ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Riflessioni storiche e didattiche sul concetto di infinito matematico

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Giorgio Bolondi

Presentata da:
Sofia Faletra

Prima Sessione
Anno Accademico 2011/2012

Indice

Elenco delle figure

Introduzione

Questa tesi nasce come tentativo di approfondire un tema molto studiato nell'ambito della didattica della matematica: l'infinito matematico.

La ricerca in didattica della matematica, e principalmente l'opera pionieristica di Guy Brousseau negli anni Settanta e Ottanta, ci hanno insegnato che, quando si deve affrontare la didattica di un certo argomento, è necessario in modo preliminare prendere confidenza con la sua storia e, meglio ancora, con la sua epistemologia; dominare un argomento nella sua evoluzione storica e nella sua interezza epistemologica ci permette di conoscerlo e padroneggiarlo meglio. Pertanto si è deciso di presentare nella prima parte di questa tesi un iter storico - critico con un forte impianto epistemologico concernente le fasi del lungo percorso compiuto dai matematici nel corso dei millenni sul tema dell'infinito matematico. Dunque, nel primo capitolo si cerca di ricostruire la lunga storia di conquiste culturali, ma anche di incertezze e di errori, che ha coinvolto più persone in tempi diversi e ha messo in luce molteplici aspetti del concetto di infinito. Questo è importantissimo per conoscere meglio quali siano le radici di difficoltà che possono incontrare gli allievi su questo tema. Infatti conoscere l'evoluzione storica di un determinato argomento fornisce maggiori strumenti critici per la valutazione degli errori degli studenti; si vedrà nel corso della tesi come a volte questi non sono errori, ma tentativi di far quadrare concezioni precedenti in situazioni nuove. La tesi poi prosegue con una seconda parte divisa in due capitoli dove viene affrontato l'aspetto didattico del concetto di infinito matematico. Infatti nel secondo capitolo tratteremo i temi generali delle didattica, in modo che il lettore prenda conoscenza di questi argomenti assi importanti e sia poi in grado di proseguire con la lettura del terzo capitolo dove vengono analizzate le problematiche inerenti all'insegnamento e all'apprendimento del concetto di infinito. In quest'ultimo capitolo si dà la possibilità al lettore di capire ciò che sta alla base degli ostacoli epistemologici e didattici relativi a questo tema; ostacoli, che giustificano e spiegano, dando loro un senso, le convinzione errate di chi affronta (insegnante e allievo) il tema dell'infinito matematico.

Dunque l'obbiettivo di questa tesi è da una parte riconoscere gli ostacoli epistemologici attraverso la storia della matematica e la sua epistemologia e dall'altra è di cercare di mettere in evidenza, come oltre agli ostacoli epistemologici sia necessario riconoscere anche gli ostacoli didattici, certamente ancora più influenti nella formazione individuale, dato che condizionano e determinano in maniera definitiva gli apprendimenti degli allievi.

Capitolo 1

Storia dell'infinito[1]

Una prima idea di "senza limite" può essere apparsa già nella mente dell'uomo primitivo; ogni volta che osservava la Luna, le stelle, il Sole, il fulmine, il tuono, le nuvole, la pioggia si sarà chiesto "che cos'è?". E più o meno ingenuamente, pian piano, l'uomo si dà di tutto spiegazioni, rigorose quanto basta alla sua cultura del momento. Egli si interroga sulla natura del fuoco e dell'acqua; poi sulla costruzione della materia, sull'origine del pensiero, su sé stesso, arrivando prima o poi a chiedersi tra l'altro quanto vasto è il mondo. Non è ragionevole, da questo punto di vista, pensare a "cose" illimitate, cioè prive di un termine, prive di un inizio e di una fine. Ciò riguarda lo spazio, il tempo, l'universo, gli dei ecc. Eppure la domanda attorno a questi concetti sussiste: se ha limiti, che "universo" è? Se il tempo ha un inizio "prima" che cosa accadeva?

1.1 Primi passi

In questo quadro di idee nasce la Scuola ionica, nella regione di Mileto, nell'attuale Turchia. Il fondatore è Talete di Mileto (624 a.C. circa - 545 a.C. circa), considerato il primo filosofo ma anche il primo matematico della storia. Egli identifica l'*origine di tutte le cose* (**arché**) nell'acqua in quanto, a

[1] Per non rendere troppo pesante la lettura con continue citazioni, si dichiara che quasi tutto il contenuto del Cap. 1 è tratto dalle due seguenti opere: *Infinti infiniti* (Arrigo, D'Amore, Sbaragli, 2010) e *Breve storia dell'infinito* (Zellini, 1993).

suo avviso, tutto ha alla base della propria natura uno stato di umidità e a questo stato tutte le cose ritornano. Uno dei suoi allievi, Anassimandro di Mileto (610 a.C-547 a.C), considera l'**arché** come qualcosa di qualitivamente indefinito (idea di indeterminazione), senza limiti, come l'aria. Si dice che inventasse una nuova parola per indicare questo concetto, *ápeiron* (dal greco *a-péras*), generalamente tradotto in "senza limite" o senza confine o spiegazione o termine o indefinito. A tale proposito ci si chiede: che cosa intendere con il termine di Anassimandro, *illimitato, infinito* o *indefinito*? Oggi questi tre termini hanno un significato ben distinto:

- *illimitato* si dice di qualcosa che non ha limite, come la retta intesa nella sua estensione lineare;

- *infinito* può essere inteso come una numerosità maggiore di qualsiasi cardinale naturale;

- *indefinito* si dice di qualcosa senza un chiaro confine, oppure senza una precisa definizione.

Molto probabilmente, come sostiene Marchini (2001), a quei tempi, gli studiosi ritenevano questi termini sinonimi o li usavano in modo indifferenziato.

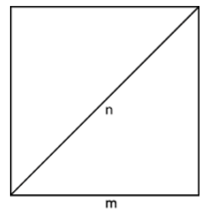
1.2 Pitagora e la scuola pitagorica

Pitagora (580 a.C. circa - 504 a.C. circa) filosofo e matematico di grande importanza, nasce nell'isola di Samo, una delle tante isole del Mar Egeo. Di lui si racconta che fosse figlio di Mnesarco, un agiato mercante che poté permettersi di far studiare il figlio e fra i più illustri insegnanti di Pitagora si citano Anassimandro e soprattutto Talete. Fu quest'ultimo a spingere Pitagora ad allargare i propri orizzoanti culturali verso l'Oriente: Egitto e Babilonia. Così Pitagora entra in contatto con la matematica dei Babilonesi che in quel tempo rappresentavano la punta più avanzata. Al ritorno dal suo soggiorno in Oriente, Pitagora approda a Crotone da dove però, cacciato per ragioni politiche, si sposta e si stabilisce nella regione di Metaponto. Lì fonda una scuola, famosa quanto esclusiva, nella quale, si dice, prima di essere ammessi alle lezioni del Maestro, occorreva trascorrere tre interi anni in perfetto silenzio. Sulla sua morte i resoconti biografi non coincidono: secondo alcuni, Pitagora, rientrato a Crotone, sarebbe vissuto fino all'età di cento anni. La critica attuale tende a ritenere che una persona di nome Pitagora non sia mai esistita e che si tratti soprattutto di un ideale umano di scienziato, mistico e pensatore. Il pensiero di Pitagora si basava sul fatto che alla base della spiegazione dell'universo c'era la matematica. Tutto, secondo lui, è descrivibile attraverso i numeri naturali e i loro rapporti. Gli oggetti reali, segmenti, figure geometriche sono aggregati di *monadi*, corpuscoli unitari, dotati di grandezza, ma talmente piccoli da risultare non ulteriormente divisibili e, comunque, non nulli, non disposti a caso, bensì secondo un ordine geometrco-aritmetico prestabilito. Questa posizione veniva esaltata dalle rappresentazioni figurali dei numeri, mediante opportune configurazioni geometriche di monadi. Ancora oggi sono conosciuti i numeri poligonali (triangolari, quadrati, pentagonali ecc.) ma anche tetraedrici, piramidali quadrangolari ecc. Ma l'illusione dei Pitagorici di poter esprimere tutto l'universo solo attraverso i numeri naturali e i loro rapporti, cioè attraverso i razionali, cade nel momento in cui scoprono essi stessi l'esistenza di grandezze *incommensurabili*.

Definizione 1.1. Due grandezze si dicono incommensurabili quando non esiste alcuna grandezza contenuta un numero intero di volte nell'una e nell'altra.

Ciò che fa cadere l'illusione pitagorica della monade è la dimostrazione dell'incommensurabilità tra il lato e la diagonale di un quadrato; questa dà indirettamente vita ai numeri irrazionali.
Riportiamo di seguito una possibile ricostruzione della dimostrazione dei Pitagorici.

Dimostrazione. Consideriamo un quadrato e supponiamo, conformemente all'ipotesi pitagorica, che il suo lato contenga un numero naturale m di monadi, mentre la sua diagonale contenga un numero naturale n di monadi. Usando il massimo comun divisore tra m ed n come unità di misura comune per i due segmenti, per cui lato e diagonale misureranno rispettivamente $p[= m/MCD(M,N)]$ e $q[= n/MCD(m,n)]$ volte tali unità di misura. Se m



ed n sono numeri primi tra loro, allora tale unità di misura vale 1 e si ha: $p = m$ e $q = n$. In ogni caso, p e q sono numeri primi tra loro cioè sono *privi di divisori comuni* (a parte l'unità). Applicando il teorema di Pitagora si ottiene: $p^2 + p^2 = q^2$, cioè $2p^2 = q^2$. Il numero di sinistra è pari dato che ha 2 come fattore e valendo l'uguaglianza è pari anche quello a destra (q^2); ma l'unico modo affinché un quadrato sia pari è che il numero che l'ha originato (q) sia pari. Allora lo possiamo scrivere così: $q = 2t$. Sostituiamo: $2p^2 = (2t)^2$, cioè $2p^2 = 4t^2$. Dividiamo ambo i membri per 2: $p^2 = 2t^2$. Il membro di destra è pari avendo 2 come fattore e per l'uguaglianza, sarà pari anche il membro di sinistra, il che comporta che p sia pari. Ma avevano già dimostrato che q stesso era pari e quindi ci troviamo in una situazione in cui valgono contemporaneamente le due seguenti affermazioni:

1. p e q sono primi tra loro
2. p e q sono entrambi pari.

Questa è una evidente contraddizione, la cui genesi sta nell'aver supposto che, valendo l'ipotesi monadica pitagorica, ogni segmento si potesse esprimere come numero naturale di monadi.

□

Così il finitismo pitagorico cade; se un ente geometrico, per esempio un segmento, contenesse un numero naturale finito di monadi, allora diagonale e lato del quadrato dovrebbero essere commensurabili. Ma questo è impossibile; ciò significa che l'ipotesi monadica, legata ai soli numeri naturali, non tiene. La crisi dei Pitagorici consiste nel conflitto tra intuizione e ragione. Dal quel momento, gli enti della matematica non sono più considerati sensibili, ma diventano enti puramente di ragione: si apre così la strada alla concezione di vari concetti matematici che non hanno una rappresentante nella realtà ingenua, nella fisica del mondo sensibile; tra questi concetti, privilegiamo l'infinito, che può realizzarsi solo a condizione che ci si stacchi dal mondo sensibile.

1.3 Suola eleatica

Parmenide (VI-V sec. a.C.) filosofo greco presocratico di Elea (il nome latino della cittadina è Velia, situata sulla costa del Cilento), fonda la Scuola Eleatica, una fra le più importanti scuole filosofiche presocratiche. Parmenide pone in netta antitesi due modi diversi e contrapposti di interpretare la verità:

- *doxa*: verità di origine sensibile
- *Alétheia*: Verità di carattere razionale.

L'uomo può servirsi della *doxa*, ma solo per il fine supremo di raggiungere l'*Alétheia*. Nella *doxa* si esclude l'infinito per evitare paradossi come quello riportato di seguito, mentre nell'*Alétheia*, che rappresenta la vetta spirituale, la massima e vera conoscenza cui l'essere umano deve aspirare, si può arrivare a concepire l'infinito; anzi, gli si dà un ruolo: infinito come Essere totale, unico, eterno, perfetto. Uno dei suoi allievi fu Zenone di Elea (V sec. a.C), che raccolse l'eredità del maestro. Gli argomenti di Zenone sono celeberrimi paradossi che rappresentano confutazioni di idee filosofiche. C'è un classico esempio ove sorge l'opportunità di distinguere diverse forme dell'infinito: il paradosso di Achille e la tartaruga (argomento paradossale di Zenone contro il moto).

Paradosso di Achille e la tartaruga: Achille Pie' Veloce è sfidato dalla tartaruga, notoriamente lenta, in una gara podistica. Entrambi stabiliscono che la tartaruga parta contemporaneamente ad Achille, ma con 100 m di vantaggio. Achille vincerà la gara se riuscirà a raggiungere la tartaruga. Sicuramente tutti noi, in base alla nostra esperienza sensibile, pensiamo che Achille sia il favorito, ma ora vedremo che, con il paradossale ragionamento di Zenone, Achille perderà la gara perché non potrà raggiungere la tartaruga

in un tempo finito.
Supponiamo che Achille corra 10 volte più veloce della tartaruga. Mentre Achille in pochi secondi copre i 100 m dello svantaggio iniziale, la tartaruga ha percorso ulteriori 10 m; mentre Achille percorre questi 10 m, la tartaruga compie ancora 1 m; mentre Achille percorre il metro che lo distanzia dalla tartaruga, questa percorre $0,1$ m; e così via. Dunque la tartaruga sarà sempre davanti ad Achille, il quale come abbiamo già detto perderà la gara.
Ora esaminiamo la situazione in termini di matematica attuale.
La somma dei tratti che separano Achille dalla tartaruga è:

$$S = 100 + 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + ... \tag{1.1}$$

cioè

$$S = 110 + \sum_{n=0}^{\infty} 0,1^n = 110 + \frac{1}{1 - 0,1} = 110 + \frac{1}{0,9} = 111,\overline{1}; \tag{1.2}$$

quindi, in totale, il tratto che Achille deve percorrere per raggiungere la tartaruga, pur essendo la somma di infiniti addendi, ha un valore finito. Una volta percorso questo tratto, di $111,\overline{1}$ m, Achille raggiunge la tartaruga. Meglio ancora, più evidente: dopo $111,112$ m Achille avrà superato la tartaruga.
Per sciogliere l'apparente paradosso, si è dovuto far capo alla teoria delle serie infinite, cioè ai concetti di analisi matematica, definitivamente fondati solo grazie alla sistemazione dei numeri reali fatta da Dedekind nel 1872. Teoria, che non era certamente patrimonio dei matematici greci di quel tempo. Zenone sapeva benissimo che Achille avrebbe raggiunto la tartaruga in breve tempo, ma il suo paradosso era una sfida ai suoi contemporanei. Alla base del successo di Zenone, sta nel fatto che per gli antichi Greci la somma di infiniti segmenti non può che essere un segmento infinito; l'idea che tale somma potesse essere finita era fuori dalla portata concettuale di quel tempo, ed anche poi.

1.4 Aristotele

In questo periodo, nella filosofia e nella matematica greca si percepiva un clima di profondo imbarazzo nei confronti di questo argomento (l'infinito) che portava a contraddizioni o, almeno, a paradossi, per esempio, come quello di Zenone. Tanto da portare in seguito Aristotele, allievo di Platone, a vietare l'uso del concetto di infinità, al fine di evitare ciò che lui riteneva uno *scandalo*. Infatti Aristotele (384 a.C.-322 a.C.), filosofo greco, rilevò una duplice natura dell'infinito:

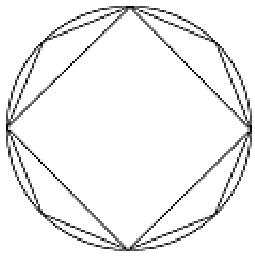
- *in atto*: significa che l'infinito si presenta in un atto unico, tutto in una volta, come un dato di fatto;

- *in potenza*: vuol dire che si dà una situazione che nell'istante in cui se ne parla è finita, ma con la sicurezza che si può sempre andare al di là del limite posto.

Così Aristotele diffidò i matematici del fare uso dell'infinito attuale, ammettendo solo l'uso esclusivo dell'infinito potenziale; così, per il filosofo greco, un segmento non è composto di infinite parti (in atto) ma è sempre divisibile (in potenza). Questo "divieto" dell'uso dell'infinito attuale fu percepito per lungo tempo come un vero e proprio dogma; infatti più di uno studioso nel Medioevo e nel Rinascimento, ma anche in tempi a noi assai più vicini, si trovò ad un passo dal poter dominare razionalmente l'infinito, ma la pesante eredità di Aristotele lo impedì.

1.4.1 Antifonte e la quadratura del cerchio

Ma vi fu qualche accenno, nel pensiero classico, alla possibilità di considerare l'infinto in senso attuale? Possiamo trovare un implicito accenno agli infinitesimi nei tentativi di quadratura del cerchio di Antifone (IV sec a.C.). Quest'ultimo pensava di poter trovare un quadrato di area uguale a quella di un cerchio assegnato appellandosi all'evidenza empirica della indistinguibilità del minimo arco di circonferenza dal minimo segmento di retta. Così egli argomentava: in un cerchio è possibile inscrivere un poligono regolare con un numero di lati arbitrariamente grande; inoltre è possibile costruire un quadrato di area uguale a quella di un qualsiasi poligono regolare. Se si aumenta indefinitamente il numero dei lati del poligono inscritto nella circonferenza, ogni lato si approssima sempre più all'arco sotteso, e l'area compresa tra il poligono e la circonferenza si riduce fino ad assumere una grandezza arbitrariamente piccola. E' possibile a questo punto concludere che il poligono si identificherà alla fine con il cerchio e che i suoi lati saranno tanto piccoli da poter essere considerati come archi, se pur minimi, della circonferenza. Antifonte sosteneva che, da un certo momento in poi, un arco minimo di



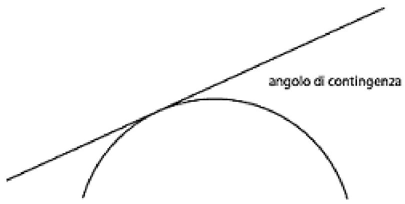
circonferenza non si distingue da un segmento, e quindi un poligono regolare con un numero infinito di lati non si distingue da una circonferenza. Egli concludeva che una quadratura del cerchio è dunque possibile. Aristotele contribuì autorevolmente a ridicolizzare questa soluzione sostenendo la completa infondatezza delle ragioni invocate da Antifonte. Aristotele sosteneva che l'insieme dei poligoni non può comprendere un termine conclusivo che coincida con la circonferenza. Se ciò avvenisse si ammetterebbe allora implicitamente l'esistenza attuale dell'infinità dei poligoni; ma ciò è assurdo, poiché l'*ἄπειρον* (l'assenza di ogni limite) sarebbe in tal caso un infinito attuale e il suo intrinseco significato risulterebbe compromesso e ingiustificatamente inalterato. Nell'esempio descritto è sufficiente ammettere che è possibile, dato un qualsiasi poligono inscritto, trovarne un altro con i lati più piccoli, ovvero che è possibile ridurre l'area residua tra poligono e cerchio a una grandezza arbitrariamente piccola senza pretendere di introdurre un concetto problematico di un insieme attualmente infinito di poligoni.

1.5 Euclide

Ora parleremo di uno dei più grandi matematici dell'antichità: Euclide (IV - III sec. a.C). E' un matematico greco vissuto ad Alessandria d'Egitto sotto il regno di Tolomeo I. La sua opera principale è conosciuta con il titolo *Elementi*; contiene gran parte della matematica conosciuta in quel tempo nella civiltà greca e si compone di 13 libri (capitoli). I primi 6 concernono la geometria piana trattata esclusivamente con i due strumenti ammessi all'epoca: la riga e il compasso. I libri VII, VIII, IX sono dedicati alla teoria dei numeri, il libro X tratta grandezze incommensurabili e gli ultimi 3 libri propongono la geometria solida. A noi interessa osservare che gli *Elementi* sono di ferrea impostazione aristotelica, soprattutto per la concezione dell'infinito che è potenziale e mai attuale. Ad esempio, nel postulato II del I libro, Euclide non usa il termine *retta*, ma parla di un ente geometrico che chiama: *eutheia grammé (linea terminata)* per il quale richiede, tramite un opportuno postulato, che si possa "prolungare continuamente per diritto". Occorre precisare il significato del termine "postulato" usato da Euclide. Esso è da intendersi in senso più stretto rispetto all'odierno concetto di "assioma": per Euclide il postulato deve avere una forte componente di verità intuitiva. Il famoso V postulato di Euclide, oggi detto "delle parallele", nella sua formulazione originaria non parlava di "rette parallele", perché ciò avrebbe sottinteso la considerazione di un'infinità in atto. Fu espresso da Euclide nei termini seguenti:

Se un segmento prolungabile continuamente per diritto, venendo a cadere su due altri segmenti prolungabili continuamente per diritto, forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, i due segmenti, eventualmente opportunamente prolungati, si incontrano da quella stessa parte in cui sono gli angoli minori di due retti.

È interessante notare come Euclide eviti di parlare direttamente della retta come di un'infinità attuale; ubbidendo all'ingiunzione di Aristotele di non considerare insiemi infiniti in senso attuale; si limita alla prudenziale idea di segmenti prolungabili, che concernano l'infinito potenziale. Importante nel nostro caso, citare, inoltre, una delle più celebri nozioni comuni *(coinaì énnoiai)* scelte da Euclide: "*Il tutto è maggiore della parte*". Infatti nella proposizione XX del libri IX, Euclide non dimostra che "*esistono infiniti numeri primi*", come si direbbe oggi, ma che "*i numeri primi sono di più che ogni proposto numero complessivo di numeri primi*", in sintonia con la posizione di parlare di infinito senza mai nominarlo in modo attuale. Ma non sempre la presenza della problematica connessa con l'infinito si rileva per prolungamento; a volte si rileva per diminuzione. Consideriamo la descrizione fatta da Euclide relativa all'*angolo di contingenza*: angolo mistilineo compreso tra un arco di circonferenza ed un segmento ad esso tangente. Euclide dimostra che l'angolo di contingenza è minore di qualsiasi angolo rettilineo. Consideriamo



un angolo rettilineo "piccolo"; lo si divida a metà da una bisettrice; poi ancora a metà, e così via, tante volte quante si vuole (in potenza). Ebbene, si può

Figura 1.1: Divisione a metà in potenza di un angolo rettilineo.

dimostrare che l'angolo di contingenza, è comunque più piccolo di qualsiasi angolo rettilineo per quanto piccolo preso.
Ciò nega il postulato di Eudosso da Cnido (408 a.C. - 355 a.C.), chiamato oggi postulato di Eudosso-Archimede, e riportato da Euclide nel libro V degli *Elementi*:
date due grandezze omogenee A e B tali che $A < B$, esiste sempre un numero naturale n tale che n volte A supera B, cioè $nA > B$; il che si può anche esprimere come segue:
date due grandezze omogenee A e B tali che $A < B$, esiste sempre un numero naturale n tale che la n-esima parte di B è minore di A, cioè $\frac{1}{n}B < A$.

Ora, se A è l'ampiezza di un angolo di contingenza e B è quella di un angolo rettilineo qualsiasi (piccolo a piacere), si ha proprio che $A < B$, ma non esiste affatto un numero n tale che, suddividendo B in n parti, si abbia alla fine un angolo minore dell'angolo di contingenza; infatti, se suddividiamo un angolo rettilineo in quante parti si vogliano, si troverà sempre alla fine un angolo rettilineo che, per la dimostrazione di Euclide, sarà sempre maggiore dell'angolo di contingenza, anche se abbiamo diviso l'angolo rettilineo in un numero n "enorme" di parti. Dunque, gli angoli di contingenza non rispettano un postulato che sembra universale; è un esempio, forse tra i primi, di grandezze che sfuggono al postulato di Eudosso-Archimede, grandezze cosiddette "non archimedee". Euclide si accorge di questa delicatissima situazione, non perchè lo dica esplicitamente, ma perchè egli definisce le grandezze eudossiane, che oggi chiamiamo *archimedee*, in modo tale da escludere quelle infinitesime, come l'angolo di contingenza. L'opera di Euclide, per quanto riguarda l'infinito, è quindi improntata su una scelta filosofica di stampo aristotelico: egli rifiuta l'infinito attuale e accetta e fa uso del solo infinito potenziale; in questa scelta è rigoroso e non si concede deroghe.

Infine ricordiamo che a Eudosso si riconosce la paternità del **metodo di esaustione**: siano A, B, G e G' delle grandezze tali che $A < G < B$ e $A < G' < B$, in modo tale che $B - A$ si possa rendere minore di un numero ϵ (reale positivo) piccolo a piacere: $B - A < \epsilon$. Ora se supponiamo che $G < G'$ si trova un assurdo; infatti, se $G < G'$, allora sarebbe $G' - G = d$, valore determinato; ma allora sarebbe $G - G' = d < \epsilon$, il che è assurdo, dato che, come avevamo detto, ϵ deve poter essere piccolo a piacere.
D'altra parte, se si suppone che $G' < G$, con analogo ragionamento si giunge ad un assurdo. Ecco allora che, nelle condizioni dette, non può che essere $G = G'$.
Sulla base di questa considerazione si basa il principio di esaustione applicato da Eudosso prima e da Archimede poi, proprio per valutare superfici o volumi di figure a volte complesse. Questo metodo fa uso dell'infinito nell'unico modo previsto da Aristotele, evitando cioè ogni considerazione che faccia riferimento ad una sua presunta esistenza attuale.

1.6 Archimede

Ora parliamo di Archimede di Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.), matematico, fisico e ingegnere siracusano. A lui dobbiamo tante creazioni, ma a noi interessa parlare del procedimento di successiva approssimazione di una piramide per mezzo di *scaloidi*. Ora chiariremo tale concetto.

Archimede riconosce a Democrito (460 a.C. circa - 360 a.C. circa), filosofo greco, la paternità del teorema secondo il quale una piramide (un cono) ha un volume pari a un terzo di quello di un prisma (di un cilindro) aventi le facce caratterizzanti, considerate come basi, congruenti e la stessa relativa altezza, ma sostiene che lo stesso non ha dato di questo fatto alcuna dimostrazione. Accenniamo alla ricostruzione fatta da Federico Enriques del ragionamento di Democrito (Lombardo Radice, 1981). Questo può essere iniziato dalla osservazione intuitiva che "piramidi di ugual base e altezza sono uguali" (hanno uguale volume). La ragione è che triangoli (poligoni) ottenuti sezionando con un piano parallelo alla faccia comune (base) hanno aree uguali, perché sono riduzioni omotetiche della faccia comune secondo lo stesso rapporto. Se non si vuol ricorrere agli infiniti triangoli (poligoni) sezioni ottenuti con piani paralleli alla faccia comune, il che implicherebbe un uso dell'infinito in atto, si può ricorrere all'approssimazione della piramide mediante uno *scaloide*. L'"intuizione meccanica" ci fa dire che, aumentando costantemente il numero di strati, gli scaloidi approssimano sempre meglio la piramide; ma questo metodo può essere accettato come dimostrazione del Teorema di Democrito? Archimede, in una lettera indirizzata ad Eratostene (276 a.C. - 192 a.C. circa), cita Eudosso di Cnido, il quale basa la sua dimostrazione sull'argomentazione che il risultato di tale procedimento, detto *procedimento per esaustione o metodo di esaustione* non può non essere quello. In termini attuali, la dimostrazione di Eudosso si basa su due procedimenti di approssimazione di una piramide mediante scaloidi:

1. *procedimento di scaloidi inscritti*;

2. *procedimento per scaloidi circoscritti.*

Dimostrazione. Chiamiamo v_n la successione dei volumi degli scaloidi inscritti ottenuti dividendo l'altezza in n parti e V_n quella degli scaloidi circoscritti a parità di n; si può dimostrare che, al variare di n si tratta di due successioni monotone: v_n crescente, V_n decrescente, con $v_n < V_n$, quindi $v_1 < v_n < V_n < V_1$.

Eudosso deve aver intuito che queste due successioni, per così dire, tendono l'una verso l'altra, quindi non possono far altro che tendere entrambe al valore separatore costituito dal volume V della piramide, supposto esistente. Ossia, se scegliamo uno scaloide inscritto, questo avrà volume minore di V;

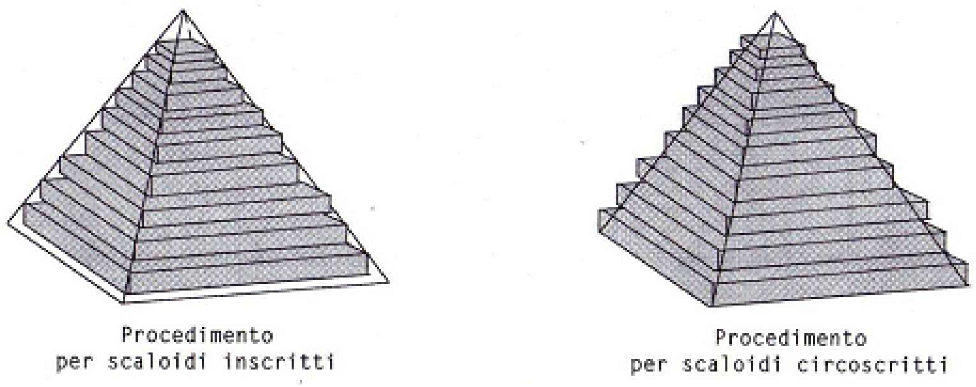


Figura 1.2: Gli scaloidi.

aumentando l'indice n, possiamo sempre scegliere uno scaloide il cui volume (maggiore del precedente) si avvicinerà maggiormente a V; e così via.
Se al contrario, scegliamo uno scaloide circoscritto, esso avrà volume maggiore di V; aumentando l'indice n, possiamo sempre scegliere uno scaloide il cui volume (minore del precedente) si avvicinerà maggiormente a V; e così via.
In questo modo v_n è crescente e superiormente limitata e V_n è decrescente e inferiormente limitata; inoltre non è difficile dimostrare che, per ogni numero $\epsilon > 0$, per quanto piccolo, è sempre possibile trovare un indice k, a partire dal quale è $|V_k - v_k| < \epsilon$, quindi i limiti di v_n e V_n sono uguali e coincidono con V. $\square$

Come abbiamo potuto vedere nella dimostrazione abbiamo fatto uso del concetto di limite, che non faceva certo parte della matematica di Archimede. Ricordiamo però che, in questo contesto, ad Archimede importava solo la correttezza del risultato. Ad Archimede bastava l'idea dell'*esaustione*, del fatto cioè che la differenza tra il volume della piramide e quella dello scaloide che lo approssima si fa sempre più piccola, finché diventa nulla, il che è l'equivalente (intuitivo) del passaggio al limite. Quindi Archimede non si preoccupa particolarmente del rigore di queste dimostrazioni. Assume il *metodo di esaustione* e lo applica ogni qualvolta ne avverte il bisogno: con estrema disinvoltura, suddivide svariate figure geometriche (piane e solide) in infinitesimi (attuali) e in infinite sezioni e raggiunge così risultati straordinari.

Il fatto curioso è che egli propone dimostrazioni geometriche che aggirano l'ostacolo dell'infinito in atto. Quindi per Archimede, l'infinito attuale è solo uno strumento tecnico che lo studioso di geometria non può ignorare, per lo meno per farsi un'idea dei risultati, ma non è riconosciuto come strumento rigoroso per dimostrare.

1.6.1 Pi greco[2]

Nel paragrafo 1.2 abbiamo parlato della scoperta delle così dette grandezze incommensurabili da parte dei Pitagorici e quindi della loro difficoltà nel trovarsi in una ambito numerico differente e più esteso, rispetto a quello dei razionali; quello dei reali. Cioè quel campo che include tutti quei numeri che condividono il destino di non poter essere espressi in *ratio*, e cioè come rapporto, frazione, e perciò sono detti ir-razionali. Un numero famoso, irrazionale (e trascendente) è π: rapporto costante tra la lunghezza di una circonferenza e il diametro della stessa. Di questo numero si parla già nelle tavolette sumere del 3000 a.C., e nei papiri egizi del 2000 a.C., che ne diedero una approssimazione piuttosto rozza. Ad esempio, la stima che di π dà il papiro di Rhind è $3,16049\ldots$. Ad interessarsi in modo particolare a questo argomento fu Archimede, che adottò un metodo molto più raffinato per la stima di π, che anticipò certi spunti dell'analisi infinitesimale moderna. Egli osservò che la lunghezza della circonferenza poteva approssimarsi per difetto con il perimetro dei poligoni regolari inscritti e per eccesso con quello dei poligoni regolari circoscritti. Archimede osservò che già con un numero n di lati pari a 96 si ottiene la stima $3,14103\ldots < \pi < 3,14271\ldots$, che è di una accuratezza tanto più sorprendente se si considera che risale a oltre due millenni fa.

1.7 Ruggero Bacone

Ora effettuiamo un "salto" di secoli e arriviamo al XIII secolo e parliamo di Ruggero Bacone (1214-1292). Svolge un ruolo importante nell'evoluzione del

[2] Si dichiara che tale paragrafo è tratto dal libro *Matematica, miracoli e paradossi* (Leonesi, Toffalori, 2007).

concetto di infinito matematico; nella sua opera *Opus maius* (1233) scrive che si può stabilire una corrispondenza (oggi diremmo biunivoca) tra i punti di un lato di un quadrato e i punti di una diagonale dello stesso, nonostante abbiano diversa lunghezza. Questa osservazione se pensiamo è sorprendente; era infatti allora opinione comune diffusa che vi fossero più punti in un segmento più lungo rispetto ad uno più corto. Poteva essere l'inizio di una vera e propria rivoluzione culturale, ma la conclusione alla quale giunge Ruggero Bacone è deludente. Era a un passo dalla constatazione che per insiemi infiniti "il tutto può anche non essere maggiore di una parte", egli conclude invece che l'infinito matematico in atto non è logicamente possibile perchè questo risulterebbe contraddittorio rispetto all'impostazione di Euclide, e quindi a quella di Aristotele. A tale proposito possiamo citare Tommaso d'Aquino (1225-1274) che, oltre ad essere un filosofo scolastico e teologo, fu anche riconosciuto come dotto matematico e fine logico. Anche egli era sul punto di ammettere l'infinito in atto, ma poi rifiuta questo concetto ribadendo che per la mente umana c'è solo l'infinito potenziale, mentre l'infinito in atto è possibile solo nella mente di Dio. Lo dice espressamente in *Summa theologiae*; infatti in questo testo egli afferma appunto che l'unico infinito attuale è in Dio. Noi recepiamo questa posizione come un modo elegante di promuovere l'infinito in atto, senza apparentemente contraddire Aristotele, perché ciò che "Dio può fare" è comunque pensato dall'uomo.

1.8 Infinito categorematico e sincategorematico

Il Medioevo inventò e discusse un'originale formula di distinzione tra i concetti racchiusi nell'infinito attuale e potenziale. La difficoltà contenuta nell'associazione aristotelica era la seguente:

1. la potenza presuppone sempre un fine cui è diretta e non può perciò fare a meno dell'atto;

2. l'ἄπειρον indica invece una condizione opposta all'attualità, cioè l'illimitato è inteso come qualcosa che sia più grande di qualsiasi grandezza

finita, non poteva esistere neppure potenzialmente.

I due filosofi Gregorio da Rimini (1300-1358) e Giovanni Buridano (1290-1358 circa) classificarono l'infinito in questo modo:

- *infinito sincategorematico*: data una quantità finita, comunque grande, esiste una quantità ancora più grande; questo infinito ha un carattere di tipo "aperto" , si basa sulla ripetitività del puro finito in cui esso consiste;

- *infinito categorematico*: opposto al precedente, si intende come l'attributo di un oggetto che si pone come qualcosa di più grande di qualsiasi grandezza finita suscettibile di esistenza.

Riportiamo, qui di seguito, l'esempio di Buridano della *linea gyrativa*: problema di assai difficile soluzione.

Si pensi a un cilindro di altezza h unitaria, e lo si divida in parti "proporzionale", cioè lo si decomponga in una successione infinita di cilindri le cui altezze formino una progressione geometrica di ragione $1/2$. Sulla superficie del primo cilindro parziale si disegni un'elica di passo uguale alla sua altezza, quindi la si prolunghi sul secondo cilindro parziale, di altezza $1/4 = 1/2^2$, con un altro tratto di elica di passo $1/4$. Sull'n-esimo cilindro parziale ($n = 3, 4, 5, \ldots$) si prolunghi la *linea gyrativa*, giunta fino all'$(n-1)$-esimo cilindro con diversi passi decrescenti, con un n-esimo tratto di elica di passo $1/2^n$. Ci si può chiedere infine di che specie è l'infinito realizzato dai vari tratti di elica che percorrono complessivamente la superficie di cilindro inizialmente considerato. Si considera la *linea gyrativa* come un infinito categorematico, se si concepisce l'intero cilindro come un tutto attualmente dato. Mentre la si considera come un infinito sincategorematico se si dice che lungo ogni parte del cilindro è tracciata una linea gyrativa. Abbiamo due punti di visualizzazione della fuga dell'illimitato: l'uno consiste in un limite attuale, l'altro, invece, incentrato sul carattere incessante del mero processo di accrescimento. Un analogo esempio è quello di Gregorio da Rimini sulla divisione dell'unità di tempo. A differenza del precedente, che ha una descrizione puramente geometrica, questo ha invece, una descrizione che richiede un esplicito e diretto intervento divino che infranga almeno provvisoriamente le stesse leggi della creazione. Egli divise appunto il tempo (ad esempio un'ora) in parti proporzionali di lunghezze: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2}^n, \dots$ e immaginò che Dio potesse creare in ciascuna porzione di tempo una pietra. È evidente, egli concluse, che alla fine di un'ora Dio avrà creato infinite pietre. Comunque entrambi gli esempi associano a ciascuna parte "proporzionale" una quantità archimedea, che sommata a sé stessa infinite volte genera una quantità superiore a qualsiasi quantità finita assegnata. In sostanza ciò che fanno entrambi, anche se Gregorio da Rimini in modo logicamente discutibile, è alludere ad un infinito in atto, in quanto sostiene che ogni corpo è costituito da un insieme infinito di parti (s'intende proporzionali). Si può notare che si sta andando verso un senso di innovazione, in quanto tutto ciò è incompatibile con le tesi tradizionali.

1.9 Nicola da Cusa

Una citazione importante la merita Nicola da Cusa (o Niccolò Cusano) (1400 o 1401-1464), che rappresenta l'ultimo dei medioevali di stampo neoplatonico;[3] l'infinito è poco presente in quell'epoca come grandezza cardinale, ma appare invece come ordinale o come non meglio precisata "vastità". Ma Niccolò confonde l'infinito con l'illimitato oppure talvolta con l'indefinito (D'Amore, 1994). Nelle costruzioni geometriche di N. Cusano c'è una particolare attenzione all'illogico, al non razionale, a tutto ciò che non si riesce concretamente a vedere disegnato su un foglio di carta. Egli esporre questi argomenti come entità di cui solo l'intelletto, la "mens tuens", può cogliere la natura e l'essenza: l'intelletto "vede" ciò che gli occhi non possono distinguere e ciò che la mano non sa disegnare. Riportiamo qui di seguito un esempio di Niccolò Cusano di come geometricamente illustra l'infinito attuale nella paradossale soluzione finale del curvo nel retto. La domanda che si faceva Cusano era: "quand'è che il curvo giunge a coincidere con il retto?". Egli stesso dice che non si può immaginare questo risultato come evento fisicamente o razionalmente verificabile, perché la linea retta non è mai l'ultimo termine di una successione indefinita di linee sempre meno curve, ma è tuttavia l'inevitabile ultimo termine di riferimento, di misura, di confronto per

[3]E' una particolare interpretazione del pensiero di Platone sviluppata nell'età ellenistica e diventata la principale scuola filosofica antica a partire dal III sec. a. C.

l'infinità delle linee curve. Così, dice N. Cusano, è con l'occhio dell'intelletto che occorre ragionare sulla coincidenza del curvo con il retto. E questo può avvenire in due situazioni distinte: nell'infinitamente grande e nell'infinitamente piccolo. Nel primo caso si può immaginare una circonferenza che al crescere indefinito della lunghezza del suo raggio tende a confondersi con una qualsiasi retta ad essa tangente. Nel secondo caso si può pensare di restringere all'infinito l'arco di una circonferenza fino che esso non si distingua dalla corda che lo sottende. Cusano scrive: "E' necessario che io ricorra alla visione intellettuale, che giunge a vedere la minima ma non assegnabile corda coincidere col minimo arco".

1.10 Galileo Galilei

Veniamo al grande Galileo Galilei (1564-1642), scienziato, filosofo e scrittore. Egli fu inizialmente convinto della possibilità di abbracciare l'infinito attuale. Secondo lui, le linee, ma anche gli oggetti concreti che si trovano in natura, sono formati da un continuo (infinito attuale) di parti, ma misurabili (e quindi a loro volta divisibili). Le sue considerazioni di geometria lo portano a scegliere che l'infinito può entrare in collisione con l'VIII nozione comune di Euclide: "il tutto è maggiore della parte". Basta disegnare un triangolo ABC (figura 1.3) e vedere che tra il lato AB e il segmento MN, che congiunge i punti medi degli altri due lati, deve esistere una corrispondenza biunivoca ottenuta congiungendo i punti di AB con C e considerando il punti P', corrispondente di P, come intersezione di MN con CP. Tutto ciò contro l'intuizione che sembra portare a far credere che AB, dato che ha lunghezza doppia rispetto a MN, sia formato da un numero maggiore di punti.

Ma, ben presto, l'accettazione dell'infinito attuale condusse Galileo a scontrarsi con rilevanti difficoltà, che egli trattò in alcune sue riflessioni contenute nell'opera *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* del 1638, e note con i nomi di "Paradosso di Galileo" e "Paradosso della ruota". Nel primo, Galileo propone considerazioni analoghe a quelle geometriche, in ambito numerico. Famosa la costatazione presente sia nei *Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze* (1632), che nel *Dialogo sopra i due*

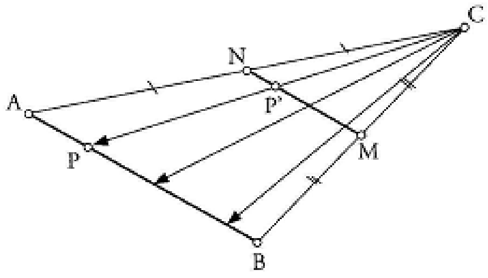


Figura 1.3: Corrispondenza biunivoca tra due segmenti in un triangolo.

massimi sistemi (1632) che, da una parte, l'insieme $\mathbb{N}_q$ dei numeri naturali quadrati è parte propria dell'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali, ma che, d'altra parte, è facile stabilire una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_q$: per esempio, a ogni numero n si fa corrispondere il suo quadrato n^2:

$$\begin{array}{cccccccccc}
\mathbb{N} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n & \dots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
\mathbb{N}_q & 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \dots & n^2 & \dots
\end{array}$$

Proponiamo di seguito un breve estratto dall'opera di Galilei, *Nuove scienze*, riferito al paradosso degli interi e dei quadrati ("Paradosso di Galileo"). I personaggi che intervengono nel dialogo sono: Simplicio, l'aristotelico; e Filippo Salviati, che rappresenta Galileo stesso.

[...]

SALVIATI: *Benissimo, e sapete ancora, che sì come i prodotti si dimandano quadranti, i producenti, cioè quelli che si moltiplicano, si chiamano lati o radici; gli altri [numeri] poi, che non nascono da numeri moltiplicati in se stessi, non sono altrimenti quadrati. Onde se io dirò, i numeri tutti, comprendono i quadrati e non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò propositione verissima: non è così?*

SIMPLICIO: *Non si può dir altrimenti.*

SALVIATI: *Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, loro esser tanti quante sono le proprie radici, avvenga che ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato, né quadrato alcuno ha più d'una sola radice, né radice alcuna più d'un quadrato solo.*

SIMPLICIO: *Così sta!*

SALVIATI: *Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri, poiché non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato; e stante questo, converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, perché tanti sono quante le loro radici, e radici sono tutti i numeri; e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser più che i propri quadrati, essendo la maggior parte non quadrati.*

Ora traduciamo in linguaggio attuale la situazione apparentemente paradossale presentata da Galileo.
PRIMO ASSUNTO: i quadrati sono solo una parte dei numeri (naturali).
SECONDO ASSUNTO: esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali e quello $\mathbb{N}_q$ dei numeri quadrati (come visto in precedenza).

Secondo il primo assunto, per l'aristotelico vi sono meno numeri quadrati di numeri (naturali). Ma di fronte al secondo assunto, anche l'aristotelico non può non riconoscere l'esistenza della corrispondenza biunivoca che sancisce la stessa numerosità dei due insiemi: quello dei numeri naturali e quello dei numeri quadrati.
Dove sta l'errore che fa nascere il paradosso? Nell'aver esteso a un'infinità una proprietà degli insiemi finiti, secondo la quale ogni parte propria di un insieme possiede meno elementi dell'insieme stesso. E quindi il famoso assunto di Euclide "*Il tutto è maggiore della parte*" va definitivamente in crisi.
Nel secondo paradosso,[4] quella della ruota, (attribuito ad Aristotele), si considerano invece due ruote concentriche e solidali; quando la più grande rotola e percorre un giro completo, anche la più piccola fa lo stesso, ed entrambe

[4] Le informazioni su questo paradosso è stato tratto dal libro *Matematica, miracoli e paradossi* (Leonesi, Toffalori, 2007).

percorrono due segmenti di uguale lunghezza l.

Parve a Galileo che questa conclusione contraddicesse il fatto che i due

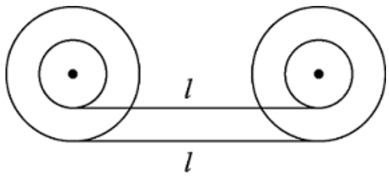


Figura 1.4: Paradosso della ruota

segmenti rappresentano lo svolgimento di due circonferenze di lunghezza differente. Egli allora si chiedeva: "Or come dunque può senza salti scorrere il cerchio minore una linea tanto maggiore della sua circonferenza?". L'unica via d'uscita era infatti una corrispondenza biunivoca tra la circonferenza piccola e quella grande. Ma, questa conclusione, come già quella del primo paradosso, sembra contraria al senso comune e in contraddizione con il principio di Euclide che "il tutto è maggiore della parte". A Galileo non resta altro che concludere: "Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno all'infinito, dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso che sia inconveniente".

1.10.1 Contare o confrontare?[5]

Le riflessioni di Galileo, su questi paradossi, contengono anche suggerimenti stimolanti su come potremmo pretendere di misurare l'infinito. In effetti, non possiamo contare né i numeri naturali né i loro quadrati; pur tuttavia, possiamo *confrontare* i due insiemi e stabilire rigorosamente che gli uni sono tanti quanti gli altri, perché c'è una corrispondenza biunivoca. Per spiegarci con un esempio più semplice, facciamo il caso di un impresario teatrale che vuole verificare il successo di un suo spettacolo. Per dichiarare il tutto esaurito, può contare prima il numero dei posti, poi quello dei biglietti venduti e accertarsi infine che sono uguali; ma può anche più rapidamente sbirciare la sala da dietro il sipario e controllare che ogni spettatore ha la sua poltrona e

[5]Tratto dal libro *Matematica, miracoli e paradossi* (Leonesi, Toffalori, 2007).

ogni poltrona il suo spettatore, che non ci sono né posti vuoti né spettatori in piedi e di nuovo rallegrarsi. Se però passiamo a un contesto infinito, non possiamo pretendere di contare posti e (forse) spettatori, né, per riferirci al primo esempio di Galileo, numeri naturali e i loro quadrati. Possiamo tuttavia ancora confrontare i due insiemi coinvolti, stabilire ove possibile una corrispondenza biunivoca tra essi e dedurre in tal caso che hanno lo stesso numero di elementi: è quello che fa Galileo nella trattazione del paradosso. In definitiva, nel caso dell'infinito possiamo, se non contare, almeno confrontare: decidere se due insiemi sono o no ugualmente numerosi. C'è però un'obiezione che sorge abbastanza spontaneamente, e cioè: ne vale realmente la pena? In effetti si potrebbe ragionevolmente sostenere che gli insiemi infiniti sono tutti, appunto, infiniti, e come tali hanno forzatamente lo stesso numero (infinito) di elementi. È dunque inutile soffermarsi in questo genere di confronti, l'infinto appiattisce tutto. L'esempio dei numeri e dei quadrati sembra confermarlo.

1.10.2 L'albergo di Hilbert[6]

C'è un altro famoso argomento che conferma questa impressione, e va sotto il nome di "Albergo di Hilbert", esempio che sembra dovuto a David Hilbert (1862-1943). Lo ricordiamo brevemente. Supponiamo di avere un albergo completo, dotato di tante camere quanti sono i numeri naturali, in cui ogni camera N ha già il suo ospite N. Questo è l'Albergo del Paradiso. Se a un'ora della notte arriva un nuovo cliente in cerca di sistemazione, il portiere dovrà dichiarargli con rammarico di non poterlo ospitare e indirizzarlo ad altro ricovero. Ma poi, con un ragionamento matematico elementare, il Grande Portinaio trova un'eccellente soluzione:

- sposta l'ospite 0 nella camera 1,
- l'ospite 1 nella camera 2, ...
- l'ospite N nella camera $N + 1$, e così via,

[6] Tratto dal libro *Matematica, miracoli e paradossi* (Leonesi, Toffalori, 2007).

e liberando così la camera 0. Il tutto è lecito perché l'albergo è infinito. L'argomento di Hilbert sottolinea che un insieme infinito, come quello dei naturali, può avere tanti elementi quanti un suo sottoinsieme proprio, come quello che si ottiene "dimenticando" 0: la funzione successore, quella che trasforma ogni naturale N in $N + 1$, è una corrispondenza biunivoca fra i naturali e i naturali maggiori di 0; togliere l'elemento 0 non diminuisce il numero complessivo dei naturali rimanenti.

1.11 Metodo degli indivisibili di Cavalieri

Nel paragrafo 1.6 avevamo parlato di una lettera di Archimede indirizzata ad Eratostene; l'argomento di tale lettera riguardava la suddivisione di una superficie in infiniti segmenti o di un solido in infinite superfici. Ora dedicheremo questo paragrafo alla riappropriazione, da parte del mondo della matematica, del metodo di Archimede, che verrà ribattezzato "degli indivisibili". Quindi, il metodo degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri (1598-1647), in sostanza, è il metodo di Archimede. Occorre però tenere presente che all'epoca circolavano solo alcune traduzioni parziali del metodo del Siracusano e che quindi Cavalieri non poteva conoscerlo nei dettagli. Nel 1635, Cavalieri pubblica l'opera *Geometria indivisibilium continuoorum quadam nova ratione promota* che consiste nel considerare una figura piana come costituita dalle infinite corde intercettate entro la superficie da un insieme di rette parallele; ciascuna di quelle corde è vista come un rettangolo avente una dimensione infinitesima, *l'elemento indivisibile*, appunto. Cavalieri si avvale del metodo degli indivisibili anche per enunciare il principio che porta il suo nome:

se due superfici tagliate da un sistema di rette parallele generano corde corripondenti isometriche, esse sono equiestese; se le corde corrispondenti hanno rapporto costante, lo stesso rapporto esiste fra le aree.

Se A_1, A_2, A_3 sono le aree dei quadrilateri rappresentati nella figura 1.5, si ha $A_1 = A_2 = 2\ A_3$.

Lo stesso principio vale anche per figure geometriche tridimensionali.

Se due solidi tagliati da un sistema di piani paralleli generano sezioni corrispondenti equiestese, essi hanno lo stesso volume; se le sezioni corrispondenti hanno rapporto costante lo stesso rapporto esiste fra i volumi.

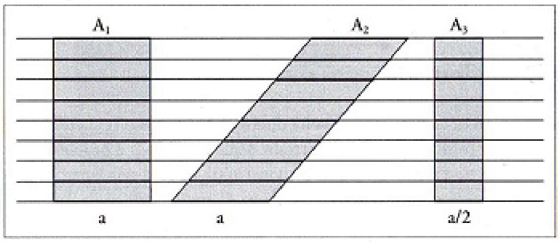


Figura 1.5: Equiestensione di figure.

Se $A_i = B_i = 6\ C_i$, allora $V_A = V_B = 6\ V_C$

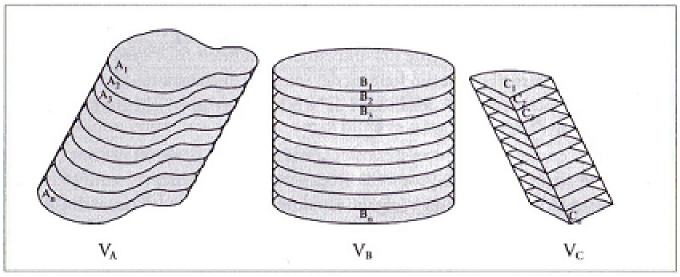


Figura 1.6: Figure equivolumetriche.

1.12 Descartes

La strada che conduce alle grandi realizzazioni, come quella dell'analisi matematica, è però ancora lunga e complessa. Ad esempio la messa a punto del linguaggio algebrico (grazie a François Viète (1540-1603)) e la creazione della geometria analitica hanno favorito questo passo fondamentale, hanno reso possibile la sintesi tra geometria e algebra. Il nuovo linguaggio algebrico è fatto di lettere che rappresentano numeri e di segni di operazione. La geometria analitica nasce soprattutto grazie ai contributi dei francesi René Descartes e Pierre de Fermat. Iniziamo a parlare del primo. Descartes (1596-1650), filosofo e matematico, è riuscito a vedere con occhi nuovi la geometria: inizia ad esprimere gli enti geometrici e le loro proprietà in linguaggio algebrico. Per esempio, nel piano, prefissato un sistema di riferimento ("assi cartesiani"), a ogni punto corrisponde una coppia ordinata di numeri reali (x, y) le cui componenti x e y sono dette "coordinate" del punto; a ogni retta corrisponde un'equazione di primo grado, in modo che tutti e solo i punti della retta hanno coordinate che soddisfano l'equazione; le condizioni di parallelismo e di perpendicolarità si traducono in uguaglianze fra i coefficienti ecc. Questo metodo di geometria analitica "costringe" a considerare la retta come un'infinità attuale di punti; dato che, una volta stabilita la corrispondenza fra retta ed equazione, essendo infinite le coppie di numeri che soddisfano quest'ultima, devono necessariamente risultare infiniti anche i punti che stanno sulla retta. Nonostante tutto questo, Descartes non si schiera fra i promotori dell'infinito attuale. Anzi egli fa una distinzione tra infinito e indefinito che riflette la tradizionale opposizione tra infinità attuale e infinità potenziale. Egli scrive: "Pongo qui la distinzione tra l'indefinito e l'infinito. E non c'è nulla che io chiamo propriamente infinito se non ciò in cui da ogni parte non riscontro alcun limite, nel qual senso solo Dio è infinito. Ma le cose di cui non vedo una fine solo sotto qualche rispetto, come l'estensione degli spazi immaginari, l'insieme dei numeri, la divisibilità delle parti della quantità e altre simili, io le chiamo indefinite e non infinite, perché esse non sono da ogni parte senza fine né limite". Descartes fu anche tra i primi a intuire aspetti dell'infinito che poi hanno svolto un ruolo importante nella storia successiva. In una lettera del 1630 egli contestava a Mersenne un argomento dimostrativo assai diffuso circa l'inesistenza di insiemi infiniti. Mersenne esibiva la semplice constatazione che una eventuale linea infinita dovrebbe contenere infiniti piedi e anche infinite tese,[7] che sono 6 volte più grandi di un piede. L'insieme infinito di tese avrebbe dovuto allora contenere assurdamente come un suo sottoinsieme proprio l'infinito insieme di piedi, pur coincidendo entrambi con la linea infinita. La conclusione doveva allora essere la seguente: la linea infinita non può esistere in quanto, esistendo, dovrebbe coincidere con ciascuno di due insiemi infiniti di cui uno più grande dell'altro. Descartes accettò il paradosso, ma negò che si potessero trarre le conclusioni che a Mersenne sembravano scontate. Il paradosso rivelava anzi una caratteristica prevedibile di ogni insieme che si presentasse infinito: il

[7] Piede e tesa sono antiche misure francesi di lunghezza corrispondente, il primo a circa $32,5\ cm$ e la seconda a circa $1,949\ m$.

rapporto tra una tesa e un piede è un numero finito, il che rende a priori incompatibile l'osservazione di Mersenne con ciò che è invece attinente l'infinito e alle sue leggi. Le norme che regolano un'eventuale confrontabilità tra insiemi infiniti non possono che trascendere del tutto ogni proporzione finita come quella che stabilisce il rapporto tra un piede e una tesa. Descartes fece anche uso dell'infinitesimo, almeno intuitivamente, nel risolvere il problema della determinazione della retta tangente a una curva algebrica in un suo punto P. Descartes trova un metodo che vale solo per le curve algebriche di secondo grado e per alcune altre di grado superiore; ma non è certamente applicabile a tutte le curve algebriche e a curve trascendenti. Egli immagina una retta variabile secante la curva data in due punti P e Q. Descartes osserva che le coordinate di P e Q sono le soluzioni del sistema

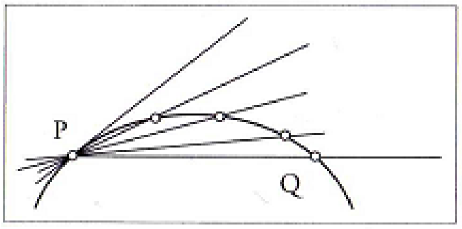


Figura 1.7: Curva algebrica di secondo grado con retta variabile, secante in due punti.

composto dalla equazione della curva e da quella della secante PQ. Questa retta risulterà tangente quando il punto Q coincide con P, cioè quando il sistema considerato ha una sola soluzione contata due volte. Ora, operando una semplice sostituzione, il sistema dà luogo ad un'equazione di secondo grado, la quale ha una sola soluzione quando il suo discriminante è nullo. A Descartes basta quindi introdurre un parametro incognito nell'equazione di PQ e porre la condizione che il discriminante citato sia nullo. Questa è un'equazione con una sola incognita: il parametro di PQ nel caso che questa retta sia tangente.

1.13 Fermat

Anche Fermat (1601-1665), matematico francese, contemporaneo di Descartes, affronta il problema della determinazione della retta tangente ad una curva in un suo punto P. La sua soluzione è molto vicina ai metodi che verranno sviluppati più tardi da Leibniz e Newton. Talmente vicina che lo stesso Newton dichiara, in una sua lettera, di aver tratto l'ispirazione da alcuni studi di Fermat sulle tangenti, per l'enunciazione del calcolo differenziale. Nel suo trattato *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, Fermat propone un nuovo modo per determinare i punti di massimo e minimo di una curva. Egli considera una curva di equazione $y = f(x)$ e si propone di trovare l'ascissa x corrispondente a un punto di massimo o di minimo. Oltre all'ascissa x considera l'ascissa $x + e$, essendo e una "quantità piccola". Il valore $f(x+e)$ non è proprio uguale a $f(x)$, ma è "quasi " uguale, siccome e è "piccolissimo". Così egli arriva a scrivere che $f(x) = f(x + e)$ dicendo che "*adeguaglia"* i due valori. Poi divide i due membri per e e opera le semplificazioni algebriche che si impongono e cancella tutti i termini che contengono la e (cioè pone la $e = 0$), ottenendo così un'equazione le cui soluzioni sono le ascisse dei punti di massimo o di minimo.
Con metodo analogo, Fermat determina anche la tangente a una curva in un punto di massimo o di minimo.

Egli considera un triangolo rettangolo ABC e intuisce che, se AB "tende

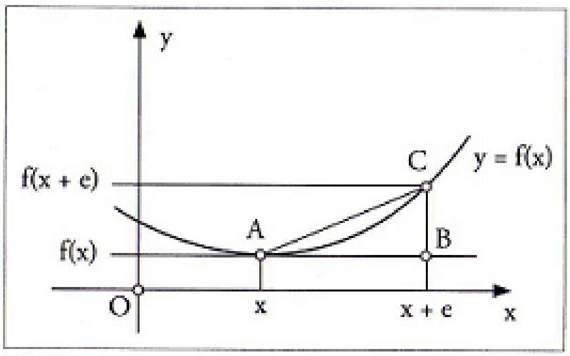


Figura 1.8: Tangente a una curva in un punto di minimo.

ad annullarsi" (cioè è infinitesimo), anche l'altro cateto BC tende ad annullarsi, ma in maniera infinitamente più rapida (cioè è un infinitesimo di ordine superiore) e allora la retta AC tende a coincidere con la tangente in A alla curva, parallela all'asse delle ascisse. Molto probabilmente Fermat non capisce l'importanza del triangolo ABC, triangolo infinitesimale che sta alla base del più moderno concetto geometrico di derivata. Sarà invece un altro francese, Blaise Pascal (1623-1662), a capirne il ruolo centrale, senza però giungere a una vera generalizzazione.

1.14 Leibniz e la nascita del nuovo calcolo

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), filosofo e scienziato tedesco, si occupa di un altro spetto dell'infinito: il "*principio di continuità*", di cui Descartes ne anticipò l'intendimento. A partire da questo principio gli scienziati di quel tempo, cercarono di far chiarezza su un altro concetto importantissimo: "il punto all'infinito". Gli studiosi cercarono di definire i punti all'infinito come un'applicazione speciale del principio di continuità. Infatti, uno dei modi di cui Leibniz formulò successivamente questo principio è il seguente: se la differenza tra due casi o configurazioni può diminuire al di sotto di ogni livello effettivamente assegnabile in dati concreti, allora è necessario che tale differenza *possa trovarsi diminuita al di sotto di ogni quantità assegnata* anche in quelle configurazioni che non possono esistere "in concreto" ma solamente cercate e immaginate come risultato di una variazione continua. Se si immagino allora due rette non parallele su un piano, esse si incontrano certamente in un punto. Ma facendo variare con continuità le loro direzioni fino a renderle parallele, il punto di intersezione si allontana indefinitivamente sul piano fino a sparire del tutto nel caso limite del parallelismo. Ciò che le rette hanno in comune in tutte le configurazioni intermedie deve allora in qualche modo essere presente anche nell'ultima conseguenza della variazione, rappresentata appunto dal parallelismo. L'ordine dei dati deve trasmettersi in un ordine analogo ravvisabile nel punto irraggiungibile cui essi sono orientati; punto che è in sé invisibile, ma indirettamente rivelato dall'*unicità* della "direzione" che definisce il parallelismo. La giustificazione dei punti all'infinito risiede anche nella loro "visibilità" come configurazione geometriche ordinarie: fissando ad esempio alcuni punti di riferimento fondamentali su una coppia di rette, il

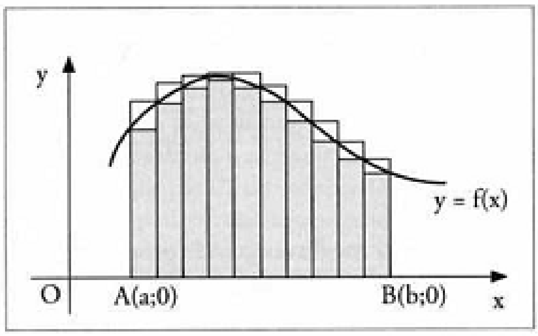
punto all'infinito di una di esse può essere fatto corrispondere ad un punto "al finito" sull'altra, e una variazione continua verso l'infinito sulla prima può corrispondere ad un percorso finito sulla seconda. Ma la fama di Leibniz come matematico è legata soprattutto alla sistemazione organica del "*calcolo infinitesimale*".
Già a vent'anni, Gottfried Wilhelm Leibniz esprime il suo grande progetto, rimasto poi sostanzialmente non realizzato, quello di creare un *Calculus rationinator*, cioè un "metodo generale nel quale tutte le verità della ragione fossero ridotte a una specie di calcolo". Egli, si preoccupa assai poco di dare, del suo calcolo infinitesimale, spiegazioni ma si limita a dare le regole di funzionamento; per lui si tratta di una lingua per la quale ha più senso preoccuparsi del modo di porsi e di funzionare, che non delle motivazioni e dei perché delle scelte.
Alla metà del XVII secolo, i due problemi centrali che appassionano i matematici e i fisici sono:

- il *problema delle quadrature*, cioè della determinazione delle aree delle superfici racchiuse tra l'asse delle ascisse e curve del tipo $y = f(x)$ di qualsiasi tipo;

- il *problema delle tangenti*, cioè della determinazione dell'equazione della retta tangente a una curva in un suo punto.

L'intuizione che ebbero Leibniz e Newton, separatamente e contemporaneamente, e che apre nuovi orizzonti al metodo matematico, sta nel capire che i due problemi sono strettamente legati: in un certo senso si possono considerare uno inverso dell'altro.

Per risolvere il problema delle quadrature, Leibniz considera la suddivisione del segmento AB in *infiniti* segmenti e quindi la scomposizione dell'area in altrettanti rettangoli di cui un lato è infinitesimo e la relativa altezza tende all'ordinata dei singoli punti. I rettangoli possono essere di due tipi: inscritti e circoscritti. L'area da determinare è compresa tra la somma delle aree dei rettangoli inscritti e quella delle aree dei rettangoli circoscritti. Le due somme infinite di rettangoli infinitesimi quando la lunghezza di un lato tende a



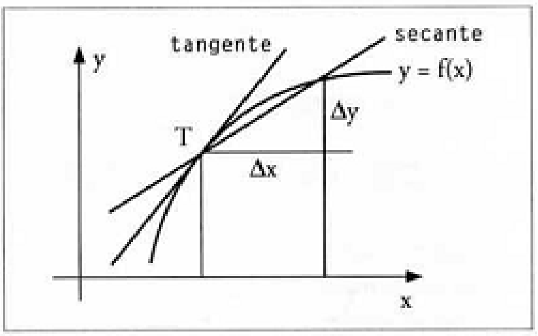


Figura 1.9: Il problema delle quadrature (a sinistra) e il problema delle tangenti (a destra).

0, tendono all'area cercata; oggi chiamiamo quest'area *integrale (definito) da* a a b *della funzione* $f(x)$ e si usa scrivere:

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{1.3}$$

Il moderno simbolo di integrale "$\int$" (una "s" allungata) viene introdotto proprio da Leibniz prima nella forma "$\int l$", (che riprende il simbolo "omnes l" di Cavalieri), poi nella forma attuale "$\int ydy$". Leibniz intuisce perfettamente il legame tra i due problemi. In particolare capisce che (usando il suo linguaggio):

$$F(z) = \int_a^z f(x)dx, \ allora \ dF(x) = f(x). \tag{1.4}$$

Quindi Leibniz usa il simbolo differenziale come lo usiamo oggi. In un primo tempo in corrispondenza all'uso del simbolo "$\int l$", il differenziale della grandezza x lo indicava con $\frac{x}{d}$, poi, dopo la semplificazione dell'integrale nel modo $\int ydy$, adotta la scrittura in dx. Il moderno termine "integrale" viene pure introdotto da Leibniz al posto di "summa" su consiglio dei fratelli Jakob e Johann Bernoulli dei quali parleremo fra poco.

1.15 Newton

Nettamente diversa per raggiungere gli stessi risultati di Leibniz, è l'impostazione di Isaac Newton (1642-1727), tutta volta a risolvere problemi di fisica

(Cantelli, 1958). Newton è un matematico e fisico inglese, il suo trattato più importante di fisica è *Philosophia naturalis principia mathematica* (1686): in esso egli pone le basi della meccanica, in particolare la nota legge della gravitazione universale. Invece, fra le opere di carattere matematico, fondamentale è lo scritto *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (1671), nel quale pone le basi del calcolo infinitesimale: i concetti di derivata e di integrale usando metodi di sviluppo in serie. Nel *Tractatus de quadratura curvarum*, Newton applica i suoi metodi di calcolo infinitesimale allo studio delle curve piane. Per lui le grandezze matematiche sono di tipo dinamico, generate da un moto continuo; concezione che si contrappone a quella statica e geometrica di Leibniz. In quest'ultima opera Newton considera una curva che in termini odierni definiremmo continua e derivabile, pensandola come il risultato di un moto continuo di un punto; analogamente considera le superfici generate da un moto continuo di una curva, i solidi generati da moto di una superficie, gli angoli per rotazione dei loro lati. Riportiamo un passaggio significativo:

considerando dunque che quantità generate, crescendo in tempi uguali, riescono maggiori o minori secondo la velocità maggiore o minore con cui crescono, ho cercato un metodo per determinare le grandezze delle velocità dei moti o degli incrementi con cui si generano; chiamando flussioni (cioè derivate) queste velocità di accrescimento e fluenti (cioè primitive) le quantità generate, giunsi a poco a poco negli anni 1665 e 1666 al metodo delle flussioni, del quale qui faccio uso nella quadratura delle curve. Con riferimento alla

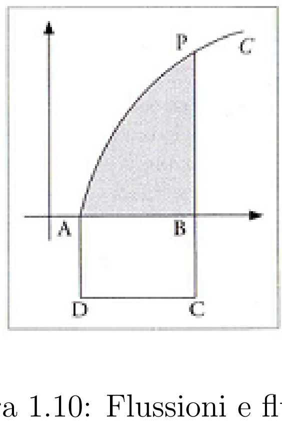


Figura 1.10: Flussioni e fluenti.

figura 1.10, la superficie delimitata della curva C, dall'asse delle ascisse e dall'ordinata BP è vista da Newton come superficie generata dall'ordinata BP che si muove con moto uniforme da A in senso positivo. La velocità di questo movimento la chiama *flussione*, come si è visto, mentre chiama *fluente* l'elemento (l'area). Ad ogni istante si determinano due superfici: il triangolo curvilineo ABP (generato dal movimento BP) e il rettangolo $ABCD$ (generato dal movimento di BC). L'assunto iniziale di Newton è che vale la seguente proposizione.

Proposizione 1.15.1.

$$\frac{Flussione(ABP)}{Flussione(ABCD)} = \frac{BP}{BC} \tag{1.5}$$

Due sono i problemi che interessavano i fisici in quel tempo:

- data la legge del moto, determinare la velocità;
- data la velocità, determinare la legge del moto.

Newton intuisce che essi sono analoghi a quelli delle quadrature delle curve e delle tangenti ed anche che i due problemi sono strettamente legati e riconducibili ai seguenti:

- date le quantità fluenti, trovare le flussioni;
- date le flussioni, determinare le quantità fluenti.

Vediamo ora come Newton procede per risolvere questi problemi.

1.15.1 Risoluzione dei problemi

Con riferimento alla figura 1.11, Newton immagina un punto B che si sposta, a partire da A, lungo la retta r, con velocità costante v. L'equazione del moto è allora:

$$x = vt \tag{1.6}$$

dove x è la distanza di B da A (origine) e t il tempo. Per semplicità, se si pone $v = 1$, allora l'equazione del moto diventa

$$x = t \tag{1.7}$$

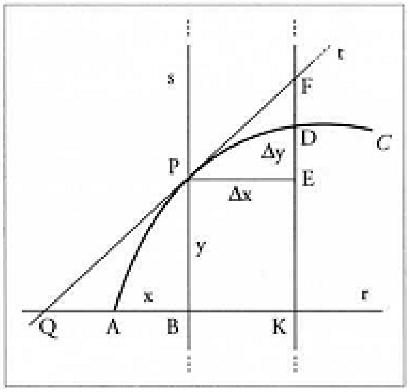


Figura 1.11: Equazioni del moto.

Considera una retta s per B, perpendicolare a r; al variare di B, varia pure s. Nello stesso tempo suppone che un punto P sia variabile su s secondo una certa legge; chiama y la distanza di P da B; indica con $y = f(x)$ la legge che lega la posizione di P e la posizione di B. Istante per istante, P descrive una linea nel piano di r ed s: nella figura è la curva C. In questo moto si sviluppano le seguenti grandezze (fluenti di Newton):

- il segmento AB (indicato con x)
- il segmento BP (indicato con y)
- la curva AP;
- l'area compresa tra AB, BP e la curva AP.

Il problema consiste nel trovare le velocità d'incremento cioè, nel linguaggio di Newton, le flussioni.
Egli suppone che B compia un nuovo piccolo spostamento, da B a K. Nello stesso tempo P si porta in D; il segmento BP si trasforma in KD. Dal punto P traccia la tangente t alla curva e chiama Q il punto d'intersezione con r. Da P traccia la perpendicolare PE su KD. L'area ABP aumenta e diventa AKD (cioè aumenta del rettangolo $BKEP$ e del pezzetto PED). Chiama poi F l'intersezione tra le rette DK e t. A questo punto può valutare gli incrementi delle singole fluenti:

- il segmento AB si è incrementato di BK che è uguale a PE;

- il segmento BP si è incrementato di ED;
- la curva AP si è incrementata dell'arco PD;
- l'area APB si è incrementata di $BKDP$.

Newton considera poi il rapporto $\Delta x/\Delta y$ tra gli incrementi PE di AB e ED di BP; con molta disinvoltura dice di fare tendere a zero Δx e che, così facendo, il rapporto $\Delta x/\Delta y$ si avvicina al rapporto PE/EF. Newton dice esplicitamente che il "limite" di $\Delta x/\Delta y$ (per Δx tendente a zero) è il rapporto tra le velocità d'incremento, cioè tra le flussioni. Dato che ha posto $v = 1$, questo rapporto esprimere proprio la velocità d'incremento di y.
Inoltre, data una relazione (funzionale) $y = f(x)$, se si riesce a trovare la flussione si determina anche la retta tangente, perché, essendo i triangoli QBP e PEF simili, il rapporto BP/QB risulta uguale al rapporto EF/PE che stabilisce l'inclinazione della retta tangente alla curva in P.

Newton si occupa anche del problema inverso, cioè di calcolare l'area della superficie $PBKD$. La strada è ormai spianata: S è la somma dell'area del rettangolo $PBKE$ e di quella del "residuo" PED, indicata con e.
Newton costruisce il rapporto incrementale di S:

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{y \cdot \Delta x + e}{\Delta x} = y + \frac{e}{\Delta x} \tag{1.8}$$

Quanto al rapporto $e/\Delta x$, Newton osserva che è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δx; infatti, dalla figura si ricava che l'area del residuo PED è minore di quella del triangolo PEF, dunque:

$$e < area(PFE) = \frac{1}{2}\Delta x \Delta y. \tag{1.9}$$

Di conseguenza, per Δx tendente a zero, si ha:

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} \to y. \tag{1.10}$$

In altri termini, l'ordinata della curva $y = f(x)$ è la flussione dell'area S, mentre quest'ultima è la fluente di y.
E' così che nasce il nuovo calcolo, chiamato oggi "analisi matematica", e che viene poi diffuso e reso grande grazie agli sforzi di diversi matematici come Jakob Bernoulli, Leonhard Euler e Karl Friederich Gauss.

1.16 Guido Grandi e il paradosso

Dato che stiamo trattando il tema dell'infinito, non possiamo non parlare di Guido Grandi (1671-1742) matematico e filosofo italiano, e del suo paradosso (1703) che si basa sulla seguente somma infinita di addendi:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots + \ldots \tag{1.11}$$

Grandi diede il risultato $S = 1/2$, per raggiungere il quale, molto probabilmente si è servito della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + \ldots = \frac{1}{x+1} \tag{1.12}$$

a condizione che $|x| < 1$, ignorando però tale condizione e ponendo $x = 1$.
Un modo più semplice per calcolare S, ammesso che esista, è il seguente:

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots - \ldots) = 1 - S \tag{1.13}$$

da cui si ricava:
$S = 1 - S$, $2S = 1$, $S = \frac{1}{2}$.
Ma operando in modi diversi, si ottengono risultati diversi:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned} S &= 1 - [1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots - \ldots] = \\ &= 1 - [(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots] = \\ &= 1 - [0 + 0 + 0 + \ldots] = 1. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Quindi, a seconda del metodo che si applica per calcolarla, la somma sembra assumere valori diversi, agli occhi di un matematico dell'epoca. Potremmo dedurre che $\frac{1}{2} = 0 = 1$ e tutta la matematica cadrebbe in contraddizione.
Dove sta l'errore?
Siamo di fronte alla non liceità dell'estendere all'infinità in atto qualsiasi proprietà che valga nel finito. Negli ultimi tre calcoli si è applicata l'associatività di una somma finita a una somma con infiniti addendi. Queste estensioni all'infinito, semplicemente, non sono lecite.

1.17 Euler e i fratelli Bernoulli

Leonhard Euler (1707-1783), matematico svizzero, insieme ai fratelli Bernoulli è uno dei maggiori diffusori del modello leibniziano del nuovo calcolo. Euler può essere considerato uno dei rappresentanti più emblematici dello spirito illuministico[8] anche per la sua totale dedizione alla matematica. Egli usa in modo disinvolto l'infinito, soprattutto nello studio delle serie infinite, di gran moda a quel tempo. Trova interessanti relazioni tra teoria dei numeri e analisi e produce sviluppi in serie ancora oggi ricchi di fascino. Fra i risultati più noti ottenuti da Euler, citiamo i seguenti:

- il numero trascendente e

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\ldots=e; \tag{1.16}$$

- il numero trascendente π

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots&=\frac{\pi^2}{6} \\ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots&=\frac{\pi}{4}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Mentre, i due fratelli Jakob (1654-1705) e Johann (1667-1748) Bernoulli meritano un discorso a parte. Jakob si fa conoscere per la pubblicazione su *Ars conjectandi* (1713) della cosiddetta "legge dei grandi numeri", importantissima in probabilità. Ma per i nostri scopi sono importanti i lavori realizzati grazie all'applicazione del calcolo di Leibniz:

- lo sviluppo in serie di una funzione, detto poi "sviluppo di Taylor" (1689);
- uno studio dettagliato sulla curva isocrona (cioè la traiettoria descritta da una particella che cade nel vuoto in modo che la sua altezza dal suolo subisca una variazione lineare rispetto al tempo);
- la determinazione dell'equazione della spirale logaritmica, detta *spira mirabilis*, per la formulazione del problema relativo alla catenaria (la

[8]Riferito al periodo dell'Età dell'Illuminismo, XVIII secolo, quando l'Europa fu caratterizzata da notevoli cambiamenti culturali.

curva descritta da un filo inestensibile sospeso alle sue estremità , sotto la sola influenza della forza di gravità). Il merito di Jakob fu di porre il problema in termini nuovi, usando appunto il calcolo infinitesimale.

Il rapporto tra i due fratelli Bernoulli risulta curioso. Jakob, il maggiore, aiuta il giovane Johann a intraprendere gli studi di matematica all'Università di Basilea, malgrado l'opposizione dei genitori che lo volevano avviare dapprima al commercio, poi agli studi in medicina. Johann si dimostra subito molto abile in matematica: si dice che dopo pochi mesi di studio dell'opera di Leibniz, l'allievo supera il maestro e crea un po' di gelosia in Jakob. Ciò che fa rompere l'armonia del rapporto tra i due fratelli è la pubblicazione quasi immediata, da parte di Johann, della soluzione del problema della *catenaria*, posto da Jakob dopo parecchi tentativi di risolverlo senza successo.

1.18 Gauss

Un altro grande che adottò il metodo di Leibniz fu Karl Fiederich Gauss (1777-1855). Egli ha prodotto importanti risultati in algebra, in teoria dei numeri e nello studio delle geometrie non euclidee. Ma a noi interessano i contributi in analisi, nei quali adotta appunto il metodo di Leibniz. Ricordiamo fra i suoi numerosi risultati:

- la curva della densità di probabilità della distribuzione normale, detta appunto "di Gauss";
- il metodo di risoluzione per eliminazione di un sistema di equazioni a più incognite, detto di Gauss-Jordan;
- i contributi nella risoluzione di equazioni differenziali e integrali; l'estensione della teoria dei numeri reali al campo complesso;
- i contributi alla geometria differenziale, in particolare i metodi di rappresentazione piana di superfici curve.

Ma anch'egli mostra di essere scettico nei confronti dell'uso dell'infinito attuale in matematica. Infatti in una conferenza pubblica pronuncia testualmente la frase seguente:

[...] *protesto contro l'uso di una grandezza infinita come un tutto compiuto, ciò che in matematica non è mai stato*

ed infatti nel trattato *Disquisitiones arithmeticae* (1800) usa espressioni del tipo "tendere all'infinito". Insomma, l'infinito è presente, ma spesso in forme ambigue. Anche per questo, Gauss è considerato una figura di transizione tra il passato e il secolo XIX che vedrà la consacrazione definitiva del concetto matematico di infinito.

1.19 Bolzano

L'enorme sviluppo che i matematici hanno dato all'analisi nel XVIII secolo è caratterizzata da una loro evidente disinvoltura nel manipolare l'infinito, poco disturbata dalla vecchia questione filosofica dell'infinito attuale e potenziale, ma sorretta dalla convinzione che, prima o poi, tutto si sarebbe messo a posto. I matematici, così, procedono e costruiscono tutti i concetti e le tecniche che oggi fanno parte di ogni corso di analisi matematica usando i numeri reali senza che fossero stati costruiti in modo rigoroso. Questo fatto può sembrare sorprendente, se si pensa che tutti gli argomenti citati presuppongono i concetti di limite e di convergenza che non possono essere rigorosamente definiti, se non si premette una sistemazione altrettanto rigorosa dell'insieme dei numeri reali. Tra il 1842 e il 1848, Bernhard Bolzano (1781-1848), filosofo e matematico notevole, scrive *Paradoxien des Unendlichen* (I paradossi dell'infinito) . Si tratta di una raccolta di 70 brevi paragrafi. Leggendo questa opera si nota come Bolzano cerca di fissare le idee sul concetto di infinito: usa correttamente la corrispondenza biunivoca fra insiemi infiniti e va molto vicino alla definizione di Galileo-Dedekind di insieme infinito, senza però esplicitarla. In questo ambito, l'atteggiamento di Bolzano di fronte all'infinito è profondamente diverso da quello di Galileo. Per esempio egli afferma che non c'è alcun paradosso nello stabilire una corrispondenza biunivoca tra un insieme infinito B e una sua parte propria infinita A. Tuttavia nella sua opera si annidano anche errori e incertezze che hanno fatto storia. Per esempio egli afferma che, dati due segmenti di lunghezza diversa, ambedue hanno infiniti punti, ma in quello più lungo ve n'è un'infinità maggiore. Secondo quanto afferma Georg Cantor, che presenteremo più avanti, le incertezze di Bolzano sono dovute al fatto che manca ancora l'idea di cardinale di un insieme.

1.20 Weierstrass

Ora parleremo di Karl Weierstrass (1815-1897), considerato da molti storici colui che sistema l'analisi matematica da un punto di vista rigoroso. Docente di matematica all'Università e all'Accademia di Berlino, si occupa di ricerche sulle funzioni ellittiche e approfondisce la teoria delle funzioni analitiche e di quelle abeliane; ottiene parecchi risultati nel calcolo delle variazioni e infine, ciò che per noi è più importante, dà una costruzione rigorosa dell'insieme dei numeri reali. La costruzione di Weierstrass inizia dall'insieme $\mathbb{Q}$ e si basa sull'idea di "aggregati finiti", cioè su somme di unità frazionarie.
Esempio: al numero $0,75$ può corrispondere l'aggregato finito $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right\}$, ma anche l'aggregato $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right\}$. Gli aggregati finiti che corrispondono a uno stesso numero razionale si possono riunire in una classe di equivalenza. Così ogni numero razionale può essere definito da una classe infinita tra loro equivalenti. Poi Weierstrass propone di creare nuovi numeri, "gli irrazionali", appunto, definendoli a loro volta come classi di aggregati infiniti. Ma noi sappiamo che ciò è possibile solo se si ammette che una somma di infinite frazioni può essere un numero finito, ciò che Weierstrass non solo ammette ma giustifica elegantemente. All'irrazionale $\sqrt{2}$ corrisponde, per esempio, l'aggregato infinito

$$\left\{1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}, 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, \dots\right\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots\right\}. \tag{1.18}$$

Infatti, come si può notare, da queste successive frazioni si ottengono dei valori alternativamente minori e maggiori di $\sqrt{2}$ e tali che ogni valore differisce da $\sqrt{2}$ di una quantità minore del precedente. La successione di queste frazioni se prolungata all'infinito, converge verso $\sqrt{2}$, nel senso che, assegnata una qualsiasi quantità ϵ, tutti i suoi elementi, tranne un numero finito di essi, elevati al quadrato differiscono da 2 per una quantità minore di ϵ. Ciò che si ottiene sono infinite oscillazioni della successione intorno a $\sqrt{2}$. Fra gli altri suoi risultati non possiamo non citare:

- *Teorema di Bolzano-Weierstrass.* Un insieme di uno spazio euclideo, limitato e costituito di infiniti punti, ammette almeno un punto di accumulazione.

- *Teorema di Weierstrass.* Una funzione definita in un insieme chiuso e limitato ammette almeno un punto nel quale la funzione assume il valore dell'estremo superiore e almeno un punto nel quale la funzione assume il valore dell'estremo inferiore.[9]

1.21 La sistemazione teorica di Cauchy

Diciamo che l'opera di sistemazione dell'analisi raggiunge il suo vertice con la sistemazione teorica effettuata da Augustin Cauchy (1789-1857), matematico francese, in forma però ancora discorsiva e intuitiva, dei concetti di limite, di funzione continua e di derivata, per giungere alla moderna definizione algebrica di Weierstrass, la cosiddetta definizione "$\epsilon - \delta$", che si riconosce per l'uso estremamente serio e consapevole dell'infinito matematico. Nel suo *Cours d'analyse* (1821), Cauchy descrive a parole le sue intuizioni sui concetti basilari dell'analisi di limite, continuità e derivata. Non possiamo parlare di definizioni in senso stretto, ma ciò che manca è solo un formalismo rigoroso. Ecco come descrive il limite di una funzione:

quando valori successivi di una variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fisso, eventualmente differiscono da questo per un valore che tende ad annullarsi, il valore fisso è detto limite di tutti gli altri valori della variabile.

Alla luce delle conoscenze odierne possiamo dire che Cauchy intuisce l'idea base di limite correttamente; egli però si riferisce a un'unica variabile, mentre in una funzione sono almeno due le variabili in gioco. Inoltre usa espressioni non precisate come "si avvicinano indefinitamente" e "differiscono da questo per un valore che tende ad annullarsi". Questo si può vedere anche nel modo in cui Cauchy tentò di ricondurre l'infinitesimo alla nozione di *variabile*,

[9]Gli spazi euclidei più frequentemente usati in geometria sono, per esempio, la retta, il piano o lo spazio tridimensionale. Un punto di accumulazione P di un insieme infinito I è tale che a qualunque intorno di P, appartengono infiniti elementi di I.

scrivendo che "quando i successivi valori numerici di una variabile decrescono indefinitamente così da essere più piccoli di ogni numero dato, tale variabile diventa ciò che si chiama *infinitesimo*, ovvero quantità infinitamente piccola". Ci vorrà, come abbiamo già detto, l'intervento di Weierstrass per chiarire in termini rigorosamente matematici il significato profondo delle espressioni usate da Cauchy. Continuiamo, con il vedere come Cauchy "definisce" il concetto di continuità:

una funzione è continua nel punto x se la differenza $f(x+\Delta x) - f(x)$ decresce indefinitamente con Δx. In altre parole: una funzione f è continua in x se una variazione infinitesima di x implica una variazione infinitesima di $f(x)$.

E la stessa di incremento infinitesimo si riscontra nella sua definizione di derivata:

quando una funzione è continua in un dato intervallo della variabile x, allora un incremento infinitesimale Δx di x produce un incremento infinitesimale di y. Di conseguenza, se si pone $\Delta x = i$, ciascuno dei termini del rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ diventa indefinitamente piccolo. Ma quando questi due termini si avvicinano al limite zero indefinitamente e simultaneamente, la frazione può convergere verso un altro limite positivo o negativo. Questo limite, se esiste, assume un valore ben determinato per ogni valore di x; varia con x. La forma della nuova funzione generata dai limiti della frazione $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dipende dalla forma della funzione proposta $y = f(x)$. Per indicare questa dipendenza si dà alla nuova funzione il nome di derivata e la si indica con la notazione y^1 o $f^1(x)$.

Weierstrass riesce a formalizzare definitamente il concetto di limite di una funzione di una variabile:

diciamo che una funzione $y = f(x)$ ha il limite L, per x tendente a un valore x_0 se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un valore δ tale che, se $|x - x_0| < \delta$, allora $|f(x) - L| < \epsilon$.

Definizione che possiamo trovare su un qualunque manuale di analisi. E tutto ciò come sappiamo, si può scrivere $lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Weierstrass, così facendo, dà ai concetti basilari dell'analisi quel rigore che mancava usando gli infinitesimi Δx e Δy, proprio quelli che nei secoli precedenti venivano da molti additati come qualcosa di assolutamente non rigoroso. Le definizioni di funzione continua e di funzione derivata, sostanzialmente identiche a quelle di Cauchy, assumono quindi le nuove forme:

- una funzione $y = f(x)$ è continua nel suo punto x_0 se e solo se

$$lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{1.19}$$

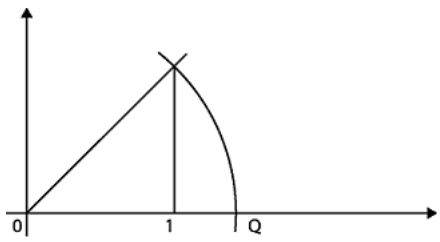
- la derivata della funzione $y = f(x)$ è la funzione

$$f^{'}(x) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1.20}$$

Possiamo affermare che l'opera di Weierstrass, anche dal punto di vista formale, ha favorito l'evoluzione dell'infinitesimo potenziale verso l'infinitesimo attuale.

1.22 I numeri reali secondo Dedekind

Richard Dedekind (1813-1916), matematico tedesco, fu concittadino e allievo di Gauss. Dedekind intorno al 1858 elabora il *Postulato della continuità della retta* che contribuisce alla definitiva sistemazione alla teoria dei numeri irrazionali. Esso apparirà per la prima volta nel suo scritto *Continuità e numeri irrazionali* (Dedekind, 1872), in particolare in un paragrafo dal titolo affascinante e significativo: *Creazione dei numeri irrazionali.* Il postulato può essere enunciato nel seguente modo: si suddividano tutti i punti di una retta orientata in due classi tali che ogni punto di una classe preceda, nel verso stabilito, ogni punto dell'altra; allora esiste un unico punto che separa le due classi, cioè tale che, se considerato appartenente alla prima classe, non precede alcun punto di essa, mentre se considerato appartenente alla seconda classe non segue alcun punto di essa. Quindi ogni punto della retta è univocamente determinato dalla sezione da esso prodotta e può quindi, esso stesso, denominarsi appunto una "sezione". La struttura topologica della retta così definita viene trasportata nell'insieme dei numeri reali mediante una corrispondenza biunivoca fra i punti della retta e i numeri reali, resa possibile orientando la retta, fissando su di essa un origine e fissando un'unità di misura. Nella prima esposizione dei suoi risultati Dedekind partiva dal riconoscimento dell'analogia tra i numeri razionali e punti di una retta, analogia che si muta in precisa corrispondenza tra un numero razionale a e il punto P della retta (dove sono stati fissati il punto 0 e una unità di misura) la cui distanza da 0 è coperta dal segmento individuato da a. Ponendo la questione in questi termini risulta, tuttavia, che ad infiniti punti sulla retta non corrisponde alcun numero razionale. Basta considerare il caso del punto Q nella figura sottostante. Le caratteristiche di continuità e comple-



tezza della retta, non sono riprodotte dal corpo dei razionali: in quest'ultimo esistono dei "vuoti",[10] che rendono problematico ogni tentativo di aritmetizzazione del continuo geometrico mediante l'impiego dei soli numeri razionali. Dedekind per definire i numeri reali in modo che soddisfino a una versione aritmetica della proprietà di continuità della retta adottò il celebre metodo dei "tagli" e "sezioni", che gli permise appunto, di definire rigorosamente, a partire da $\mathbb{Q}$, l'insieme $\mathbb{R}$, aggiungendo appunto a $\mathbb{Q}$ i numeri irrazionali. Egli osservò che ogni numero razionale x individua una "sezione" del corpo razionale ordinario, cioè una coppia di classi A_1 e A_2 tali che ogni numero di A_1 è minore di ogni numero di A_2, mentre x è il più grande numero della classe A_1 oppure il più piccolo numero della classe A_2. Una coppia (A_1, A_2) tale che ogni numero di A_1 sia minore di ogni numero di A_2 può tuttavia, pur essendo definita senza alcuna ambiguità, non corrispondere ad alcun numero razionale x, allo stesso modo in cui una sezione della retta (ad esempio quella prodotta dal punto Q della retta) può non corrispondere ad alcuna frazione razionale. Ma ogni qualvolta ciò accade, pensò Dedekind è legittimo "creare" un nuovo numero (irrazionale) y che corrisponda alla coppia (A_1, A_2) cioè che sia, esso stesso, la coppia (A_1, A_2). Viene così chiarito il fatto che $(\mathbb{Q}, <)$ è denso ma non continuo, mentre $(\mathbb{R}, <)$ è denso e continuo.

[10]Termine ambiguo. Lo introduciamo per rendere l'idea della non continuità di $\mathbb{Q}$.

1.23 I numeri naturali

Come abbiamo potuto vedere siamo arrivati a parlare di come i grandi studiosi che ci hanno preceduto siano arrivati a definire l'insieme dei numeri reali. Ma in tutti questi lavori, si è sempre data per scontata non solo l'esistenza ma anche una fondazione logica condivisa dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. La cosa sembrava talmente ovvia, da non meritare studi particolari. Eppure, se si vuole che l'intera opera di fondazione sia rigorosa, occorre sistemare fondazionalmente anche questo basamento. Se ne occuparono molti ricercatori, matematici, filosofi e anche psicologi, ma tra tutti emergono per l'importanza del nome e del risultato aggiunto, principalmente tre studiosi: il logico-filosofo tedesco Gottlob Frege (1848-1925), il matematico italiano Giuseppe Peano (1858-1932) ed il matematico statunitense Jhon Von Neumann (1903-1957). Ora parleremo, brevemente, del loro contributo in questo ambito.

1.23.1 Frege

La costruzione di Gottlob Frege si basa sull'assunto che un numero naturale è una proprietà estensionale del concetto: "l'estensione di un concetto". Egli definisce allora i numeri naturali come segue:

- il numero 0 appartiene al concetto "non identico a sé stesso";
- il numero 1 appartiene al concetto "identico a 0";
- il numero 2 appartiene al concetto "identico a 0 o a 1";
- il numero 3 appartiene al concetto "identico a 0 o a 1 o a 2"; ecc.

1.23.2 Peano

Ben diverso è il tentativo di Peano di definire assiomaticamente i numeri naturali e il suo sistema assiomatico ha avuto molto più successo di quello di Frege, nonostante varie critiche che portarono l'Autore ed i suoi numerosi allievi a vari adattamenti, e dunque a successive pubblicazioni con modifiche. Ricordiamo la seguente versione; $\mathbb{N}, 0, a^+$ siano termini primitivi che indicano rispettivamente l'insieme dei numeri naturali, lo zero e la funzione "successore"$a^+ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Assumiamo i seguenti assiomi:

- la totalità dei numeri naturali è una classe, indicata con $\mathbb{N}$;
- zero (0) è un numero;
- a ogni numero x ne corrisponde un altro, detto il *successivo* di x e indicato con x^+;
- zero non è il successivo di alcun numero;
- a numeri distinti corrispondono successivi distinti;
- *assioma di ricorsione*:[11] se una classe C contiene 0 e se, per ogni a di C, contiene anche a^+, allora C include $\mathbb{N}$.

1.23.3 Von Neumann

Diversa è la costruzione di Von Neumann:

- chiamiamo 0 l'insieme vuoto: $0 = \oslash$
- chiamiamo 1 l'insieme che contiene il solo insieme vuoto: $1 = \{\oslash\}$
- chiamiamo 2 l'insieme che contiene $\oslash$ e $\{\oslash\}$: $2 = \{\oslash, \{\oslash\}\}$
- chiamiamo 3 l'insieme che contiene; $\oslash$, $\{\oslash\}$ e $\{\oslash, \{\oslash\}\}$:
  $3 = \{\oslash, \{\oslash\}, \{\oslash, \{\oslash\}\}\}$ ecc.

1.24 Cantor

La figura di maggior spicco, nel campo dell'infinito matematico, è quella di Georg Cantor(1845-1918). Giovane matematico tedesco, molto brillante, studia numerosi problemi di matematica: fra questi, il problema dell'unicità

[11]Oggi viene espresso in forma simbolica nel seguente modo:
$P(0)$
$(\forall n \in \mathbb{N})[P(n) \to P(n^+)]$
$(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$

della scomposizione di una funzione reale in una serie trigonometrica (siamo nel 1872 e Cantor ha 27 anni), che lo porta ad una serie di interrogativi sugli insiemi infiniti e sulla struttura topologica della retta. La serie di cui stiamo parlando è del tipo:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 cos\, x + b_1 sen\, x + a_2 cos\, 2x + b_2 cos\, 2x + \dots \tag{1.21}$$

o, più sinteticamente,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos\, nx + b_n sen\, nx). \tag{1.22}$$

Quando la serie converge, essa è detta "serie di Fourier[12] della funzione f"; Cantor si occupa di stabilire le condizioni minime per la funzione f affinché la serie sia convergente e dimostra l'unicità della scomposizione. In tutto questo ci sono due condizioni importanti che coinvolgono l'infinito: il numero di massimi e di minimi e il numero di punti di discontinuità che la funzione può assumere nell'intervallo da 0 a 2π, affinché sia esprimibile con una serie di Fourier. Nel 1872, Cantor riesce ad estendere la convergenza di tali serie anche per funzioni con un numero infinito di punti di discontinuità. Ora percorriamo insieme, sinteticamente, le tappe principali della mirabile avventura grazie alla quale Cantor, con molta determinazione, è riuscito a dare un nuovo volto all'infinito matematico.

- Due insiemi (finiti o infiniti) si dicono equipotenti (o equinumerosi) se è possibile stabilire tra di essi una corrispondenza biunivoca.
- I segmenti AB e CD (pensati come insiemi di punti) sono equipotenti al di là della loro lunghezza (la figura 1.12 sostituisce la dimostrazione).

- L'insieme dei punti di un segmento è equipotente all'insieme dei punti di una semiretta (la figura 1.13 sostituisce la dimostrazione).
- L'insieme dei punti di un segmento è equipotente all'insieme dei punti di una retta (la figura 1.14 sostituisce la dimostrazione).

[12]Dal matematico francese Jean Baptise Joseph Fourier (1768-1830) che ha espresso i coefficienti a_n e b_n mediante integrali definiti.

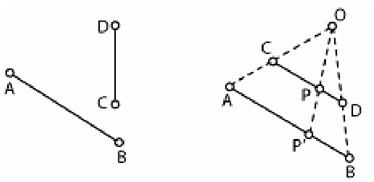


Figura 1.12: Corrispondenza biunivoca tra segmenti di diversa lunghezza.

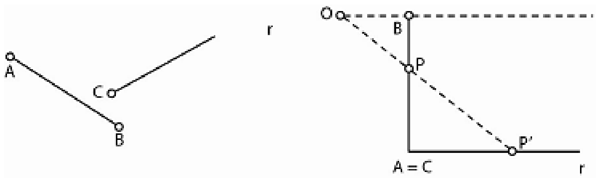


Figura 1.13: Corrispondenza biunivoca segmento-semiretta.

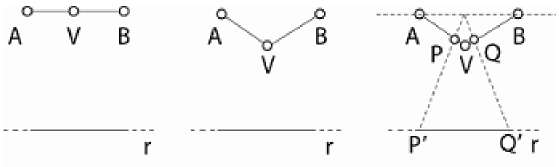


Figura 1.14: Corrispondenza biunivoca segmento-retta.

- L'insieme dei punti interni di un quadrato è equipotente all'insieme dei punti di un suo lato.

  Dimostrazione. Proposta da Courant e Robbins nel 1971.
  Supponiamo che il lato del quadrato misuri una unità e consideriamo il quadrato unitario in un sistema di riferimento cartesiano. Ogni punto

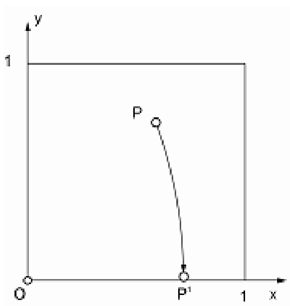


Figura 1.15: Corrispondenza biunivoca quadrato e suo lato.

interno al quadrato ha coordinate del tipo:
$P(0, a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots ; 0, b_1b_2b_3 \ldots b_n \ldots)$;[13] a esso facciamo corrispondere sul lato (in ascissa) il punto: $P(0, a_1b_1a_2b_2 \ldots a_nb_n \ldots ; 0)$; si può agire in modo opposto, dimostrando il viceversa. Si è così individuata una corrispondenza biunivoca tra i punti di un quadrato e quelli di un suo lato.

Con questi risultati, attesi da secoli, ma in parte del tutto nuovi, la strada verso il mondo al di là del finito è definitivamente aperta.

1.24.1 I numeri cardinali transfiniti

Il punto di partenza della costruzione dei numeri transfiniti è il concetto di equipotenza. L'equipotenza, definita in un insieme definito di insiemi M, è una relazione di equivalenza, che indichiamo col simbolo R. Ne segue il concetto di *numero cardinale (o potenza)* di un insieme I di M: è la classe di equivalenza dell'insieme quoziente M/R che ha come elemento I (Cantor, 1955). Elenchiamo alcuni primi risultati di Cantor e ne diamo una dimostrazione:

1. Dato un qualsiasi insieme U, il corrispondente insieme delle parti $P(U)$ ha potenza superiore a quella di U.[14]

2. Gli insiemi $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ dei numeri interi e razionali hanno la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.

3. L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali ha una cardinalità maggiore di quella di $\mathbb{N}$.

4. L'insieme A dei numeri algebrici ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.

Dimostrazione.

[13]Per far si che vi sia veramente una corrispondenza biunivoca tra i punti e le loro coordinate, queste devono essere, espresse, in forma decimale, evitando il 9 periodico e considerando solo gli zeri che precedono cifre significative. Quindi si eviterà la scrittura $0,3\overline{9}$ la si sostituirà con $0,4$.

[14]Questo teorema è detto anche "di Cantor". Ricordiamo che "un insieme delle parti di un insieme I" o "insieme potenza di I" si intende l'insieme di tutti i sottoinsiemi di I.

1. Cantor vuole dimostrare che l'insieme delle parti $P(U)$ di un insieme U (anche infinito) ha cardinalità *maggiore* di quella di U. Inizia a osservare che se U è vuoto, allora $P(U) = \oslash$, perciò $card\ (U) = 0$ e $card\ (P(U)) = 1$. Poi suppone $U \neq \oslash$ e considera il sottoinsieme S di $P(U)$ costituito da sottoinsiemi aventi un solo elemento (singoletti), cioè $S = \{\{a\}\,|a \in U\}$. Considera poi la funzione

$$\begin{aligned} f : & U \to S \\ & a \to \{a\} \end{aligned} \tag{1.23}$$

essa è biunivoca, perciò può concludere che U è equipotente a una parte di P(U). A questo punto, basta dimostrare che $P(U)$ non è equipotente a U. Procedendo per assurdo, si suppone che U sia equipotente a $P(U)$. Deve esistere quindi una corrispondenza biunivoca tra U e $P(U)$, cioè una corrispondenza tale che a ogni elemento x di U faccia corrispondere un insieme I_x di $P(U)$. A questo punto Cantor costruisce un nuovo insieme H, elemento di $P(U)$, mediante il seguente criterio:
- se $x \in I_x$, allora $x \notin H$;
- se $x \notin I_x$, allora $x \in H$.
Quindi H differisce da I_x per almeno un elemento. Di conseguenza la corrispondenza tra U e $P(U)$ non è biunivoca, ciò che crea l'assurdo con la supposizione di partenza. La conclusione allora è la seguente: $P(U)$ ha cardinalità maggiore di U.

2. Consideriamo l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali e sia n la sua cardinalità (o numerosità o potenza) che diremo "del numerabile"; n è una cardinalità infinita nel senso che è maggiore di qualsiasi cardinalità finita. Siano $\mathbb{N}_Q$ l'insieme (di Galilei) dei numero quadrati, $\mathbb{N}_P$ dei pari, $\mathbb{N}_D$ dei dispari, $\mathbb{N}_{Pr}$ dei primi. Ciascuno di questi insiemi si può mettere in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$ e ha quindi la cardinalità del numerabile n. Se A è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$, allora la sua cardinalità è n. Infatti, se consideriamo un qualunque insieme infinito $A = a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ dove gli a_i sono elementi di $\mathbb{N}$, possiamo costruire la corrispondenza biunivoca $a_1 \leftrightarrow 0, a_2 \leftrightarrow 1, \ldots, a_m \leftrightarrow m-1, \ldots$ Ne deduciamo che il cardinale di A è n, che perciò risulta essere il cardinale

infinito *più piccolo*. Consideriamo l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$; si può creare in vari modi una corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$, per esempio:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 0 & +1 & -1 & +2 & -2 & +3 & -3 & \dots \end{array}$$

Dunque la cardinalità di $\mathbb{Z}$ è ancora n. Lo stesso si può dire dei razionali $\mathbb{Q}$. La cosa può sembrare a prima vista strana e sorprendente; si potrebbe infatti osservare che l'usuale ordine dei naturali ha un primo elemento 0 ed è discreto (ogni elemento ha un suo immediato successore e ogni elemento escluso lo 0 ammette un immediato predecessore), mentre quello dei razionali non ha estremi ed è denso (tra due elementi $a < b$ ce n'è sempre un altro intermedio c con $a < c < b$). Quindi si deve trovare una corrispondenza tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ che riesca a conciliare queste due strutture. Non bisogna trovare un isomorfismo che cerchi di preservare la relazione d'ordine dei due diversi insiemi, ma basta trovare una biiezione tra questi. Conseguentemente possiamo riordinare i razionali non negativi facendo riferimento alla loro rappresentazione come frazioni m/n, con m e n naturali, $n \neq 0$, m e n primi tra loro, e sistemarli prima secondo $m + n$ e poi, a parità di somma, secondo il loro ordine abituale, ottenendo così in definitiva una successione $0/1$, $1/1$, $\underbrace{1/2, 2/1}_{somma\ 3}$, $\underbrace{1/3, 3/1}_{somma\ 4}$, $\underbrace{1/4, 2/3, 3/2, 4/1}_{somma\ 5}$,... del tutto analoga a quella dei naturali $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots$ e quindi disponibile a determinare una corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$. Ora è facile estendere questa prima funzione tra naturali (cioè gli interi non negativi) e razionali non negativi in modo da coinvolgere da un lato tutti gli interi e dall'altro tutti i razionali, e concludere nuovamente che gli uni sono tanti quanti gli altri (pur costituendo un sottoinsieme proprio: infatti effettuando un estensione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$, non troviamo $\mathbb{Q}$ ma $\mathbb{Q}^a$). A questo punto componiamo la biiezione appena trovata tra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ con quella che già conosciamo tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, ed effettuiamo anche la biiezione tra $\mathbb{N}$

e un sottoinsieme proprio di $\mathbb{Q}$ in modo da ottenere la corrispondenza biunivoca cercata tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$.[15]

3. Cantor mostra che l'insieme dei numeri reali compresi tra 0 e 1 (e di conseguenza l'insieme $\mathbb{R}$) ha cardinalità superiore a quella dell'insieme numerico $\mathbb{N}$ (e quindi anche di $\mathbb{Z}$ e di $\mathbb{Q}$). In questa dimostrazione Cantor applica il suo famoso "procedimento diagonale" e la dimostrazione è condotta di nuovo per assurdo. Supponiamo dunque che la cardinalità dell'insieme dei numeri reali compresi tra 0 e 1 sia uguale a quella di $\mathbb{N}$; di conseguenza *tutti* questi numeri si possono esprimere nella forma decimale nel seguente elenco numerabile:
   $0, a_{11}a_{12}\dots a_{1n}\dots$
   $0, a_{21}a_{22}\dots a_{2n}\dots$
   $\dots$
   $0, a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn}\dots$
   $\dots$
   Consideriamo ora un numero reale che abbia la seguente forma decimale:
   $0, b_1b_2\dots b_n\dots$
   nella quale però si pongono le seguenti condizioni: $b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, \dots, b_n \neq a_{nn}, \dots$;
   questo numero:
   - non è compreso nell'elenco precedente di tutti i reali (supposti esistenti) compresi tra 0 e 1: infatti non è il primo, per la prima condizione, e così via;
   - tuttavia è un numero reale compreso tra 0 e 1, per la forma stessa in cui è stato scritto;
   dunque siamo di fronte ad una evidente contraddizione, originata dall'aver supposto di scrivere tutti i reali compresi tra 0 ed 1 in un elenco numerabile. Con ciò resta dimostrato che l'insieme dei numeri reali compresi tra 0 ed 1 non può avere la cardinalità dell'insieme $\mathbb{N}$. Tuttavia, tale cardinalità non può essere minore di quella di $\mathbb{N}$, dato che

[15] La dimostrazione della corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ è tratta dal libro *Matematica, miracoli e paradossi* (Leonesi, Toffalori; 2007).

è facile vedere che, ad ogni $n(\neq 0)$ di $\mathbb{N}$, si può far corrispondere il numero $1/n$ che appartiene all'insieme dei numeri reali compresi tra 0 ed 1: dunque la cardinalità di questo insieme deve necessariamente essere maggiore di $\mathbb{N}$.

4. Cantor dimostra che anche l'insieme dei numeri algebrici (cioè quei numeri che sono soluzioni di equazioni algebriche) ha la cardinalità n. Si dice numero algebrico reale un numero reale w che sia soluzione di un equazione della forma $a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0$ dove $n, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sono numeri interi. Possiamo supporre, grazie a banali passaggi che non modificano la generalità della situazione, che i numeri n e a_0 siano positivi, che i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, non abbiano divisori comuni (diversi da 1) e che l'equazione non sia riducibile; fatte queste ipotesi, risulta dai teoremi dell'aritmetica e dell'algebra che l'equazione che ammette come soluzione un determinato numero algebrico reale è interamente determinata; inversamente, a un'equazione di questo tipo corrispondono al massimo n soluzioni algebriche reali. Sia W l'insieme dei numeri algebrici: vediamo come Cantor dimostra che W è numerabile. Chiamiamo *altezza* di una equazione algebrica A il numero:
$h(A) = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| + |a_n|$.
L'altezza h è di conseguenza, per ogni equazione algebrica, un numero naturale ben determinato; inversamente, a un dato numero naturale m corrisponde solo un numero limitato di equazioni algebriche di altezza m. Per esempio, per dati numeri naturali assunti come altezze, ecco di seguito le equazioni algebriche che hanno appunto tale altezza; per ciascuna di tali equazioni si dà l'elenco delle soluzioni che sono in numero finito e che sono numeri algebrici:
1. equazione: $x = 0$ essa ha come soluzione il numero algebrico 0
2. equazioni: $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$, $x^2 = 0$ i numeri algebrici che sono soluzioni di esse: $-1, 1, 0$
3. equazioni: $x + 2 = 0$, $x - 2 = 0$, $2x + 1 = 0$, $2x - 1 = 0$, $3x = 0$, $x^2 - 1 = 0$ i numeri algebrici che sono soluzioni di esse: $-2, 2, -1/2, 1/2, 0, -1, 1$ ecc.

Possiamo quindi allineare in una successione tutti i numeri algebrici reali nel modo seguente: dapprima ordiniamo le equazioni per altezza crescente, dopo di che, a parità di altezza, ordiniamo i vari numeri algebrici (che sono ogni volta in quantità finita) per esempio secondo l'ordine naturale ($<$) di $\mathbb{R}$. Nel caso in cui un numero algebrico si presenti una seconda volta o più, non viene preso in esame. La successione sarà quindi (per quel che riguarda i suoi primi termini):
$0, -1, 1, -2, -1/2, 1/2, \ldots$
Possiamo dunque concludere che questa successione, che contiene tutti i numeri algebrici, è equipotente all'insieme $\mathbb{N}$.

Questi risultati danno una svolta decisiva alla ricerca di Cantor; tra l'altro finalmente appare evidente che almeno una cardinalità maggiore di quella di $\mathbb{N}$ esiste. Abbiamo già visto con gli insiemi $\mathbb{N}_Q, \mathbb{N}_P, \mathbb{N}_D, \mathbb{N}_{Pr}$ che una cardinalità infinita minore di quella di $\mathbb{N}$ non esiste, dato che ogni suo sottoinsieme infinito ha cardinalità n; dunque, quella di $\mathbb{N}$ è la cardinalità infinita minore possibile. L'abbiamo già denominata "infinità numerabile" o "del numerabile" e l'abbiamo indicata con n. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, l'insieme dei pari, dei quadrati, degli algebrici, hanno tutti cardinalità n. Abbiamo visto però che l'insieme dei numeri reali compresi tra 0 e 1 è più che numerabile; questa cardinalità è ovviamente la stessa di $\mathbb{R}$, insieme dei numeri reali, che ha come modello immediato la retta geometrica, pensata come insieme dei punti. Poiché la caratteristica della retta geometrica è la sua continuità, diciamo che questa cardinalità si chiama: cardinalità "del continuo" che indichiamo con c, che è anche la cardinalità dei punti di un piano, di qualsiasi varietà continua a m dimensioni. Con un piccolo abuso del linguaggio relazionale aritmetico, scriviamo: $n < c$. Per molti anni, Cantor cercò un insieme infinito A di cardinalità tale da interporsi tra n e c, del tipo $n < card\ A < c$, ma invano. Tanto che decise di proporre ed accettare una sorta di ipotesi momentanea, detta *ipotesi del continuo* (IC): tra n e c non ci sono altri cardinali transfiniti; a questo punto, dunque, n è il primo cardinale transfinito e c è il secondo, ammettendo IC. Cantor decise di usare la prima lettera dell'alfabeto ebraico come segno ricorrente e di indicare n con $\aleph_0$ (alèf zero) e con $\aleph_1$ (alèf uno) il cardinale transfinito successivo c. Ricordiamo che l'insieme $\mathbb{R}$ dei reali si può definire con il metodo dei "tagli" di Dedekind; dunque, la cardinalità di

$\mathbb{R}$ è quella dell'insieme potenza di $\mathbb{Q}$: $card\ \mathbb{R} = card\ P(\mathbb{Q})$. Tra i risultati di Cantor troviamo che la cardinalità dell'insieme potenza di un insieme di cardinalità finita a è di 2^a, allora si può scrivere, in forma aritmetica un po' forzata, la relazione tra c e n: $c = 2^n$. Ecco dunque trovato un modo per indicare una sorta di "successivo" tra i cardinali transfiniti, dato che quello usuale introdotto tra i naturali non può funzionare; è evidente infatti che $n+1 = n$. Se si interpone tra due numeri naturali s e $s+1$ un oggetto nuovo a, ottenendo la successione: $0, 1, 2, \ldots, s, a, s+1, \ldots$ è ovvio che si può trovare una corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$: da 0 ad s si fanno corrispondere i naturali tra 0 ed s; ad a si fa corrispondere $s+1$; ad $s+1$ si fa corrispondere $s+2$, e così via. Essendo l'insieme dei numeri irrazionale continuo e quello dei numeri algebrici numerabile, si deduce che l'insieme dei numeri irrazionali non algebrici, cioè i *trascendenti*, deve avere la cardinalità del continuo. Questa nuova idea di successivo fra i transfiniti permette di proseguire nell'elenco ordinato: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_n, \ldots$, molto meglio espresso come segue, in modo assai più efficace: $\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, 2^{2^{2^{\aleph_0}}}, \ldots$ che Cantor esprime come "successione dei numeri cardinali transfiniti". Ora se vale l'ipotesi del continuo IC tra n e c, cioè tra $\aleph_0$ ed $\aleph_1$, che cosa accade tra $\aleph_n$ ed $\aleph_{n+1}$? Per analogia, l'ipotesi del continuo IC si può estendere in maniera naturale all'intera successione dei numeri cardinali transfiniti; in tal senso assume la denominazione di *ipotesi generalizzata del continuo* (IGC): non esiste alcun cardinale transfinito compreso tra due cardinali transfiniti successivi $\aleph_n$ e $\aleph_{n+1}$, cioè tra $\aleph_n$ e $2^{\aleph_n}$. A questo punto, la successione dei cardinali transfiniti costituisce una nuova classe di numeri, sui quali si possono dunque definire operazioni che traggono ispirazione dalle usuali, come l'addizione e la moltiplicazione.

L'addizione tra cardinali viene definita come l'unione di insiemi disgiunti: $card\ (A) + card\ (B) = card\ (A \cup B)$, con $A \cap B = \oslash$. Tale definizione è adatta sia ad insiemi finiti che infiniti, ma porta a risultati piuttosto diversi nel caso di cardinali transfiniti; per esempio:

$\aleph_0 = \aleph_0 + n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = 2 \cdot \aleph_0$

$\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 + \ldots + \aleph_0 = n \cdot \aleph_0$, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

La moltiplicazione tra cardinali corrisponde al prodotto cartesiano degli insiemi: $card\ (A) \cdot card\ (B) = card\ (A \times B)$, con $A \times B$ prodotto cartesiano

di A e B. Anche qui, come prima, porta a risultati diversi; per esempio:
$\aleph_0 = \aleph_0 \cdot n$, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
$\aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0^2$
$\aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \ldots \cdot \aleph_0 = \aleph_0^n$, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

1.24.2 I numeri ordinali transfiniti

Ora vedremo come Cantor costruisce i numeri ordinali transfiniti, ma prima occorre fissare qualche conoscenza iniziale.

- Dato un insieme A, ogni applicazione biunivoca di A su sé stesso si dice permutazione (o biiezione) di A.

- Se I è un insieme finito con cardinalità n, allora esistono esattamente $n!$ permutazioni di I.

- Dato un insieme A e una relazione d'ordine stretto $<$ (cioè antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva), si dice che A è totalmente ordinato, se e solo se, comunque scelti in A due elementi a, b, è sempre vera una sola delle relazioni $a < b$ oppure $b < a$.

- Un ordinamento di un insieme I si dice *buono* (quindi I si dice *ben ordinato*) se e solo se ogni sottoinsieme A di I possiede un minimo, che chiamiamo "primo elemento" (tolto questo, il sottoinsieme rimanente ha un minimo che chiamiamo "secondo" e così via). Nel caso di un insieme finito, ogni ordinamento totale è un buon ordinamento, non così per insiemi infiniti.[16]

- Dati due insiemi A, B equipotenti e totalmente ordinati, fra le applicazioni biunivoche da A verso B ve n'è una sola che rispetta i due ordini: la chiamiamo *similitudine*.

- Due insiemi bene ordinati hanno lo stesso numero ordinale solo se si può stabilire tra di essi una similitudine.

[16] Si pensi ad esempio al fatto che $\mathbb{N}$ è ben ordinato, mentre $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ non lo sono.

- Dato un insieme I ben ordinato, chiamiamo *tratto iniziale (o segmento) rispetto a un suo elemento* a il sottoinsieme degli elementi di I che precedono a.[17]

Poi Cantor introduce il numero ω rispetto al quale l'insieme $\mathbb{N}$ è tratto iniziale. Cantor dice: *è perfino permesso immaginare il numero ω appena creato come limite a cui tendono i numeri n (naturali), purché con ciò si voglia intendere solamente che è il primo numero intero (naturale) che segue tutti i numeri n, che cioè deve essere dichiarato superiore a ogni numero n.*
Procedendo con ordine, ecco come vengono costruiti i numeri ordinali transfiniti:

- si ammette che 0 sia il primo numero ordinale;

- la successione dei numeri naturali $0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ si ottiene, partendo da 0, aggiungendo una unità a un numero già formato: questo è il *primo principio di generazione*;

- come "limite" di questa successione, aggiungiamo il numero ordinale ω: questo è il *secondo principio di generazione*;

- si prosegue poi applicando ancora il primo principio di generazione più volte e si ottiene: $0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \dots, \omega+n, \dots$

Poi Cantor osserva che la successione appena ottenuta, di nuovo, non ha un massimo, quindi applica ancora il secondo principio di generazione e, dopo aver raggiunto ω elementi, arriva al numero 2ω, che è un numero maggiore di tutti i precedenti; poi continua applicando alternativamente il primo o il secondo principio di generazione, ottenendo così:
$0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \dots, \omega+n, \dots, 2\omega, 2\omega+1, 2\omega+2, 2\omega+3, \dots, 2\omega+n, \dots, 3\omega, \dots, n\omega, (n+1)\omega, \dots, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^n, \dots, \omega^\omega, \dots$ Arrivato a questo punto, Cantor si chiede se il primo segmento della successione
$0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots, \omega$ che è evidentemente un insieme ben ordinato è simile alla successione:
$0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$

[17] Per esempio, in $(\mathbb{N}, <)$ il tratto iniziale rispetto a n è $0, 1, 2, \dots, n-1$.

La risposta è negativa, dato che è impossibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra le due successioni che ne rispetti l'ordine. In una tale corrispondenza, dovrebbe essere $f(n+1) = f(n) + 1$, ma ω non è successivo di alcun numero n, dunque non è immagine di alcun numero n. Di conseguenza, l'ordinalità di $0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots, \omega$ è superiore a quella degli insiemi numerabili. Ogni volta che si applica il secondo principio, si aumenta l'ordinalità e questo passaggio è molto delicato, infatti Cantor scrive:
La prima impressione che vi farà tale successione (la successione allargata dei numeri naturali) sarà senz'altro che non si vede come, proseguendola, si possa arrivare a una specie di arresto, che invece sarebbe necessario se dobbiamo ottenere con questo mezzo una nuova potenza determinata, ossia la potenza della seconda classe, immediatamente superiore a quella della prima classe.

L'operazione è resa possibile dal terzo principio di generazione, che Cantor enuncia così:
Per realizzare questo arresto, ai due modi di generazione se ne viene ad aggiungere un terzo, che io chiamo principio di limitazione, e che consiste nell'esigenza di non creare un nuovo numero intero, tramite uno dei due altri modi, che se la totalità dei numeri antecedenti è numerabile in una classe di numeri già esistente e conosciuta in tutta la sua estensione.

A questo punto, giunge una domanda spontanea: la successione dei numeri cardinali transfiniti e quella dei numeri ordinali transfiniti sono uguali? O, è possibile trovare dei collegamenti tra le due successioni?
Cantor pensa che la risposta potrebbe essere positiva, a condizione che sia possibile ben ordinare qualsiasi insieme. Egli mostra anche come può essere fatto:
sia E un qualunque insieme infinito. Scegliamo arbitrariamente un suo elemento, che chiamiamo e_1, e lo togliamo da E. Otteniamo $E - \{e_1\}$. In seguito togliamo un altro elemento, e_2, e otteniamo $E - \{e_1, e_2\}$. Continuando fin che abbiamo tolto tutti gli elementi e_n (n naturale) e ottenuto $E - \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$. Ora togliamo da questa differenza, di nuovo, un elemento qualunque che chiamiamo e_ω (ω indica la potenza della seconda classe

di Cantor). Continuiamo togliendo successivamente elementi che chiamiamo $e_{\omega+1}, \ldots, e_{2\omega}, \ldots$
Al momento in cui l'insieme differenza risulta vuoto, l'insieme tolto è esattamente E, ma l'ordine imposto ai suoi elementi fa sì che ora E sia ben ordinato. Ma tale modo di procedere incontra parecchie critiche, e nel 1904 Ernest Zermelo (1871-1953), per risolvere questo e altri problemi relativi alla validità di operare tali scelte, formula il cosiddetto "assioma della scelta", del quale diamo una delle tante versioni in cui esso può essere enunciato: "Per ogni insieme A, i cui elementi sono insiemi non vuoti e disgiunti P_i, esiste almeno un insieme C che contiene un elemento e uno solo di ogni P_i".
Dunque, la domanda posta se si possono confrontare le due successioni dei cardinali e degli ordinali transfiniti, rimane legata all'accettazione o meno dell'assioma della scelta.

Capitolo 2

Uno sguardo alla didattica della matematica[1]

Una delle creazioni nate all'interno della matematica della seconda metà del XX secolo è la nascita di una disciplina del tutto nuova, interessante e stimolante: la didattica della matematica. In essa si fondano risultati di una grande varietà di teorie che hanno per così dire concesso alla matematica di farne uso per capire il funzionamento di una situazione d'aula quando l'oggetto del problema è la costruzione cognitivo-concettuale della matematica da parte di giovani allievi, sotto la guida di un adulto esperto, l'insegnate in un ambiente scolastico. Tali discipline sono almeno le seguenti: storia della matematica, epistemologia, psicologia, pedagogia, didattica generale, sociologia, filosofia, linguistica, semiotica, antropologia. Ne è risultata, nel tempo, una disciplina del tutto nuova, dalle solide radici culturali e scientifiche, con fondazioni sue specifiche. La didattica della matematica studia la epistemologia dell'apprendimento matematico, in quanto esso ha di specifico; moltissime delle ricerche di questi primi 30-40 anni di vita della disciplina sono basate sull'apprendimento di temi matematici specifici del mondo scolastico come l'aritmetica, la geometria, l'algebra, le equazioni, le relazioni, l'uguaglianza o di temi trasversali come la dimostrazione, la definizione, la risoluzione di

[1]Per non rendere troppo pesante la lettura con continue citazioni, si dichiara che il contenuto del Cap. 2 è tratto dal libro *Elementi di didattica della Matematica* (D'Amore, 1999).

problemi ecc. Tra queste seconde, lo studio dell'apprendimento dell'infinito è stato certo una delle più seguite, soprattutto perché appare subito evidente, agli occhi di un osservatore competente, che lo studente si trova a dover accomodare modelli diversi e non vi riesce (Infiniti infinti, 2010).
Ma di questo tema specifico parleremo nel prossimo capitolo; cioè prima di iniziare a parlare della didattica dell'infinito, ci sembra opportuno trattare i temi generali della didattica della matematica, cercando di andare con ordine e di spiegarli nel modo più chiaro possibile.

2.1 Introduzione alla didattica della matematica

Iniziamo subito con il chiarire il concetto della parola *didattica*; il termine "didattico" inizialmente appare solo come *aggettivo*, mentre al giorno d'oggi tende anche ad essere utilizzato, tra gli studiosi di lingua italiana appartenenti al settore, come *sostantivo* proprio per contraddistinguere coloro che si occupano della didattica come ambito scientifico di ricerca. Infatti le parole nascono e si stabilizzano all'interno di una ristretta comunità, come nel caso del nostro termine, che le usa in modo nuovo, e solo a distanza di anni si espandono e diventano comuni anche all'esterno della primitiva comunità. La radice etimologica di questo termine è voce dotta greca, didakticòs, participio passato di didàskein (insegnare), e oggi in molti dizionari italiani troviamo come definizione sotto la voce didattica: "teoria e pratica dell'insegnare" o "arte e metodo dell'insegnamento". E che cos'è allora la *didattica della matematica*? Per spiegare tale concetto partiamo dal lavoro di Steiner (1985), secondo il quale la complessità del sistema globale dell'insegnamento della matematica si può decomporre in Teoria, Sviluppo e Pratica, per notare come l'educazione matematica sia un sistema sociale eterogeneo e complesso, nel quale si distinguono tre ambiti (Godino, Batanero, 1998):

- "l'azione pratica riflessiva sui processi di insegnamento ed apprendimento della matematica;

- la tecnologia didattica, che si propone di mettere a punto materiali per migliorare l'efficacia dell'istruzione matematica, usando le conoscenze scientifiche disponibili;

- la ricerca scientifica, che si occupa di comprendere il funzionamento dell'insegnamento della matematica nel suo insieme."

Questi ambiti riguardano il funzionamento del sistema didattico, avendo come fine ultimo comune quello di migliorare il risultato dell'educazione matematica, ma è anche vero che ciascuno di essi si contraddistingue per tempi, obiettivi, risorse, regole ecc. In particolare:

- il primo riguarda principalmente l'insegnante ed il suo bisogno di quelle informazioni che abbiano l'effetto di migliorare l'efficacia didattica dell'insegnamento;

- il secondo riguarda coloro che si interessano ai curricoli, a chi scrive manuali didattici, a chi crea materiali didattici;

- il terzo riguarda soprattutto la ricerca che, normalmente, si svolge in ambienti universitari.

La didattica della matematica sarebbe la disciplina scientifica legata alla terza componente di queste tre e si contraddistingue dall'educazione matematica che sarebbe invece interessata alla prime due componenti: teoria, sviluppo e pratica. Quindi possiamo dire che la didattica della matematica è la disciplina scientifica ed il campo della ricerca il cui scopo è di identificare, caratterizzare e comprendere i fenomeni ed i processi che condizionano l'insegnamento e l'apprendimento specifico della matematica. Mentre l'educazione matematica è il sistema sociale complesso ed eterogeneo che include teoria, sviluppo e pratica relativa all'insegnamento ed apprendimento della matematica; include la didattica della matematica come sottosistema.

2.2 Il triangolo: insegnante, allievo, sapere

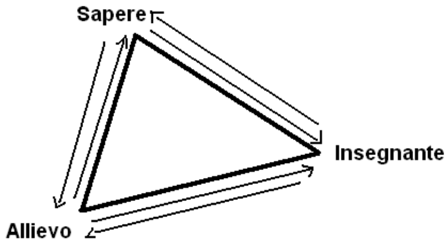
È da tempo che la ricerca in didattica della matematica si occupa dei tre protagonisti dell'azione didattica: *sapere, allievo, insegnante* cercando quali possano essere le cause del mancato apprendimento da parte dell'allievo, in rapporto ad un sapere in gioco, su cui viene operata una trasposizione didattica da parte dell'insegnante. Nel corso del tempo, il fulcro dell'osservazione da parte dei ricercatori si è spostato dal *sapere* (didattica A, come abbreviazione di *ars docenti* - didattica che centra i suoi studi nella fase dell'insegnamento), all'*allievo* (didattica B - didattica che centra i suoi studi nella fase dell'apprendimento). Gli studi in didattica A che occupavano il posto centrale negli anni '60-'80, hanno lasciato il posto agli studi in didattica B. Il passaggio, però, non è ben definito perché studi in didattica A sono stati condotti anche dopo gli anni '80 e questi sono stati influenzati da quelli condotti in didattica B. Per molto tempo la didattica della matematica è stata intesa come arte, il suo lavoro era costituito essenzialmente dall'insegnamento della matematica e quindi l'obiettivo era quello di creare situazioni sotto forma di lezioni, attività, ambienti, giochi per un insegnamento migliore della matematica. Cioè si basava sull'assunto: migliore è l'insegnamento migliore sarà anche l'apprendimento, quindi la cosa più importante era il peso "artistico" dell'attività d'insegnamento basato sulla esperienza reiterata. Oggi invece, si potrebbe ipotizzare un duplice modo di vedere la didattica della matematica:

A : come divulgazione delle idee, fissando dunque l'attenzione sulla fase dell'insegnamento (A sta per Ars). Il didatta A è sensibile all'allievo, lo pone al centro della sua attenzione, ma la sua azione didattica non è sull'allievo bensì sull'argomento in gioco e cerca di risolvere problemi importanti come: migliorare l'immagine della matematica, migliorare l'immagine di sé nel fare matematica, migliorare l'attenzione, attivare interesse e motivazione.

B : come ricerca empirica, fissando invece l'attenzione sulla fase dell'apprendimento.

Se si effettuano prove empiriche, con opportuni e ben studiati dispositivi sperimentali, sui risultati cognitivi ottenuti con attività di tipo A, allora si passa alla ricerca considerata sperimentale, si entra nel campo della epistemologia dell'apprendimento, cioè si passa al punto che contraddistingue la tipologia B.

E negli ultimi venti anni la ricerca in didattica della matematica ha analizzato in diversi modi e con accurati dettagli, quello che si nasconde dietro il "triangolo" che ha come "vertici" i tre protagonisti dell'azione didattica: l'allievo, l'insegnante e il sapere. Questo triangolo rappresenta un modello



sistemico che serve per situare e analizzare i molteplici rapporti che si instaurano tra i tre "soggetti" che rappresentano i "vertici" del triangolo. Nei vertici del triangolo troviamo:

- il *Sapere* inteso come quello accademico, ufficiale, universitario, rappresenta il polo ontogenetico o epistemologico. È nei dintorni di questo vertice che si situa la teoria degli ostacoli epistemologici legati alla natura intrinseca del concetto, alla sua evoluzione o alla complessità formale delle sue strutture.

- L'*allievo* rappresenta il polo genetico o psicologico. In questo vertice si fa riferimento a progetti culturali o cognitivi personali, filtrati però dal rapporto di scolarizzazione che fa sì che le esperienze personali di un soggetto apprendente non siano libere da vincoli. È nei dintorni di questo polo che si situa la teoria degli ostacoli ontogenetici.

- L'*insegnante* rappresenta il polo funzionale o pedagogico. In questo vertice si fa riferimento a progetti culturali o cognitivi sui quali influiscono in modo notevole l'insieme delle attese pedagogiche (non sempre esplicite), delle credenze relative al sapere, delle convinzioni professionali, delle "filosofie implicite" (Speranza, 1992). È nei dintorni di questo polo che si situa la teoria degli ostacoli didattici, dato che è l'insegnante il responsabile delle scelte e dei progetti didattici.

Mentre i lati del triangolo evidenziano la relazione tra coppie dei soggetti appena citati:

- *insegnante-allievo* che può essere riassunto nel verbo "animare" nel quale si possono rintracciare i seguenti due concetti:
  - la *devoluzione* che rappresenta l'azione dell'insegnante verso l'allievo, che lo spinge ad implicarsi nel progetto didattico che lo riguarda; è quindi il processo o l'attività di responsabilizzazione attraverso i quali l'insegnante ottiene che lo studente impegni la sua personale responsabilità in un'attività cognitiva che diventa allora attività cognitiva dell'allievo;
  - l'*implicazione* che rappresenta l'azione dell'allievo su se stesso: l'allievo accetta la devoluzione, accetta cioè di farsi carico personale della costruzione della propria conoscenza.
  "Animare" può quindi essere interpretato come spingere all'implicazione personale, favorendo la devoluzione.

- *Allievo-sapere*, caratterizzato dal verbo "apprendere", dove l'attività che domina è l'implicazione che consente un accesso ad un "sapere personale" che verrà istituzionalizzato (vedi lato insegnante-sapere) dall'insegnante incentivando la costruzione della conoscenza. In questo lato si trovano le immagini che ha lo studente di scuola, di cultura, il suo rapporto personale specifico con la matematica e, più in generale, con l'istituzionalizzazione del sapere; e questo dipende molto dall'età, dalle esperienze pregresse, dalla famiglia, dal tipo di società in cui l'allievo vive eccetera.

- *Insegnante-sapere* dove il verbo che domina è "insegnare" e le attività caratterizzanti sono: l'*istituzionalizzazione delle conoscenze* (Chevallard, 1992) e la *trasposizione didattica* (Chevallard, 1985, 1994; Cornu e Vergnioux, 1992). L'*istituzionalizzazione delle conoscenze*[2] rappresenta un processo complementare alla devoluzione e all'implicazione, che avviene quando l'insegnante riconosce come sapere legittimo e spendibile

[2]Secondo Brousseau (1994): "l'istituzionalizzazione del compito è l'atto sociale attraverso il quale il maestro e l'allievo riconoscono la devoluzione".

nel contesto scuola il sapere acquisito con l'impegno personale dell'alunno, una volta che si sono verificate la devoluzione e l'implicazione dell'allievo. L'attività più generale che caratterizza questo lato rappresenta la *trasposizione didattica* (Chevallard, 1985) che è intesa come il lavoro di adattamento, di trasformazione del sapere in oggetto di insegnamento in funzione del luogo, del pubblico e delle finalità didattiche che ci si pone. L'insegnante deve perciò operare una trasposizione dal sapere (che sorge dalla ricerca) al sapere insegnato (quello della pratica in aula); in realtà, il passaggio è molto più complesso perché va dal sapere (quello degli esperti della disciplina che strutturano e organizzano tale sapere) al sapere da insegnare (quello deciso dalle istituzioni) al sapere insegnato (quello che l'insegnante sceglie come oggetto specifico del suo intervento didattico). Il passaggio tra sapere e sapere da insegnare, è filtrato dalle scelte epistemologiche dell'insegnante che dipendono dalle sue convinzioni, dalle sue "filosofie implicite", dall'idea che ha di trasposizione didattica, dall'influenza della noosfera,[3] ecc. Gli elementi caratterizzanti questo lato sono quindi le credenze dell'insegnante relative a: sapere, allievi, apprendimento, scopi dell'educazione, idea di scuola, eccetera.

2.3 Situazioni didattiche e a-didattiche

Nel precedente paragrafo non abbiamo parlato di alcune situazioni che caratterizzano il lato del triangolo tra insegnante-allievo; cioè durante la fase di apprendimento-insegnamento uno studente e un insegnate si troveranno in particolari situazioni: le cosiddette situazioni didattiche e a-didattiche. Chiariamo questo concetto. Una *situazione didattica* è un insieme di relazioni stabilite in modo esplicito o implicito tra insegnate, allievo (o un gruppo di allievi) ed elementi di contorno (strumenti o materiali), avendo come sco-

[3]La noosfera è una sorta di zona intermedia tra il sistema scolastico (e le scelte dell'insegnante) e l'ambiente sociale più esteso (esterno alla scuola). In essa si articolano i rapporti tra i due sistemi, in un tutto unico, con i loro conflitti. La noosfera si potrebbe pensare come "la cappa esterna che contiene tutte le persone che nella società pensano ai contenuti ed ai metodi di insegnamento" (Godino, 1993).

po quello di far si che gli studenti apprendano, cioè costruiscano una certa conoscenza stabilita in precedenza. Le situazioni didattiche sono dunque specifiche della conoscenza che si vuol fare raggiungere. Poi, affinché l'allievo costruisca la propria conoscenza, deve occuparsi personalmente della risoluzione del problema che gli è stato posto nella situazione didattica, si usa dire che il ragazzo deve raggiungere, come abbiamo già detto in precedenza, la *devoluzione della situazione*. Diciamo che una situazione didattica su un certo tema relativo al sapere possiede due componenti:

- una situazione a-didattica;
- un contratto didattico.

La *situazione a-didattica* si verifica quando in un ambiente organizzato per l'apprendimento di un certo argomento viene a cadere l'intenzione didattica. Durante questa situazione l'intenzione dell'insegnante non è esplicita nei confronti dell'allievo, ma il docente presenta al ragazzo il gioco senza esplicitare lo scopo didattico da raggiungere e segue lo studente durante tutta l'attività, favorendo il processo di devoluzione. Mentre l'idea di *contratto didattico* fa ingresso nel mondo della didattica della matematica verso la fine degli anni '70 e fu lanciata da Guy Brousseau (1978); tale idea nacque per studiare le cause del fallimento elettivo in matematica, cioè quel tipico fallimento riservato solo al dominio della matematica, da parte di studenti che invece, più o meno, sembrano "arrangiarsi" nelle altre materie. Secondo Brousseau il contratto didattico è "l'insieme dei comportamenti dell'insegnante che sono attesi dall'allievo e l'insieme dei comportamenti dell'allievo che sono attesi dall'insegnante" (Brousseau, 1986).

2.4 Contratto didattico

Il rapporto tra l'insegnante e l'allievo, quel ricco e delicato complesso di interazioni, di comportamenti che deve (o che dovrebbe) avere quale prodotto finale l'apprendimento, è costituito da atteggiamenti, da richieste, da risposte, da un insieme di fasi e di momenti che si influenzano vicendevolmente e che sembrano ripetersi giorno dopo giorno, mese dopo mese. Molto spesso

il rapporto tra insegnate e allievo è basato su regole non scritte, su convenzioni implicite che vengono accettate continuamente e spontaneamente sia dal docente che dal discente. Anzi, talvolta sembra quasi che queste (mai dichiarate) norme di comportamento siano perfettamente conosciute da entrambe le parti in gioco, come se costituissero una sorta di contratto la cui validità sia indiscutibilmente nota e chiara per tutti. Pensiamo ad esempio ad un insegnate che è solito dedicare le prime ore del martedì mattina all'interrogazione; lo studente prima di entrare in classe saprà già che se l'insegnante quella mattina farà il suo nome, sarà soggetto ad una valutazione. Questo comportamento non è regolato da norme scritte, ma entrambi i soggetti (insegnate e allievo) sanno benissimo come comportarsi, tutto secondo "contratto", in quelle determinate ore. Già nel 1973 J. Filloux ipotizzò la presenza di un *contratto pedagogico* tale da collegare e da influenzare reciprocamente i comportamenti dell'insegnante e dell'allievo (Filloux, 1973). Nel 1986 G. Brousseau perfezionò questa idea, inizialmente incentrata sulla dimensione sociale, e la arricchì con la considerazione degli aspetti cognitivi: nacque così il *contratto didattico*. Fino ad oggi sono stato fatti molti studi sui comportamenti degli allievi in aula ed molti comportamenti considerati fino a poco tempo fa inspiegabili o legati al disinteresse, all'ignoranza, all'incapacità logica o all'età immatura, sono invece stati chiariti; alla base ci sono motivazioni molto più complesse ed interessanti. Uno degli studi più noti è quello che va sotto il nome di l'*età del capitano*.
Riportiamo qui di seguito un esempio di scuola secondaria superiore. Il professore di questa classe propone agli allievi la seguente equazione di secondo grado:

$$(x-1)(x-2)=0 \tag{2.1}$$

e chiede agli studenti di trovare le radici di questa equazione.
Gli studenti, nessuno escluso, moltiplicano tra loro i due binomi, ma nessuno si lancia, senza fare calcoli, affermando semplicemente: "Le radici sono 1 e 2"?
Non la fa nessuno, proprio per contratto didattico; lo studente suppone che rispondere in quel modo sia troppo semplice, e che il suo insegnante si aspetta di vedere se è in grado di fare i conti e vuol vedere applicata la formula risolutiva. Tale effetto rientra peraltro tra quelli cosiddetti di rottura del

contratto didattico: se anche l'allievo si rende conto dell'assurdità del problema posto, necessita di farsi carico personale di una rottura del contratto didattico, per poter rispondere che il problema non si può risolvere. Quindi il contratto didattico è un insieme di regole, di vere e proprie *clausole*, il più delle volte non esplicite che organizzano le relazioni tra il contenuto insegnato, gli alunni, l'insegnate e le attese all'interno della classe nelle ore di matematica.

2.5 Conflitti, immagini, modelli e misconcezioni

Argomenti di studio in didattica della matematica che stanno emergendo con estrema forza e grande rilievo negli ultimi anni riguardano i conflitti, le misconcezioni ed i modelli intuitivi. Lo studente nel tempo costruisce un concetto e se ne fa un'immagine chiamata *immagine mentale*. L'immagine mentale è il risultato prodotto da una sollecitazione interna o esterna, condizionata da influenze culturali, stili personali che fanno sì che l'individuo produce tale immagine. Essa può essere elaborata più o meno consciamente, tuttavia l'immagine mentale è interna ed almeno in prima istanza involontaria. L'insieme delle immagine mentali elaborate, tutte relative ad un certo concetto, costituisce il *modello mentale* (interno) del concetto stesso. L'immagine mentale può essere validata e rinforzata nel corso del curricolo scolastico dello studente da prove, esperienze ripetute, figure, esercizi risolti ed accettati dall'insegnante come corretti. Ma può capitare che tale immagine si rilevi inadeguata, prima o poi, rispetto ad un'altra dello stesso concetto in contrasto con la precedente che lo studente credeva definitiva. Questo crea un *conflitto* tra la precedente immagine, che lo studente credeva definitiva, relativamente a quel concetto, e la nuova. Ciò accade soprattutto quando la nuova immagine amplia i limiti di applicabilità del concetto o ne dà una versione più comprensiva. Dunque il conflitto "cognitivo" è un conflitto interno causata dalla non congruenza tra due immagini, o tra un'immagine ed un concetto. Durante la successioni di immagini, c'è un momento in cui l'immagine cui si è pervenuti "resiste" a sollecitazioni diverse, cioè si dimo-

stra più "forte", e le nuove sollecitazioni, invece di costringere a distruggere un immagine per costruirne una nuova, finiscono con il confermare questa immagine, come immagine "giusta" di un certo concetto. Ed un'immagine di questo tipo si può chiamare *modello* di un concetto.
Possono accadere due cose:

- *il modello si forma al momento giusto*, nel senso che si tratta davvero del modello previsto per quel concetto del Sapere matematico al momento in cui si sta parlando; in questo caso, l'azione didattica ha funzionato e lo studente si è costruito il modello atteso del concetto;

- *il modello si forma troppo presto*, quando ancora dovrebbe essere solamente un immagine debole che necessita di essere ulteriormente ampliata; a questo punto, per l'allievo non è facile raggiungere il concetto perché la stabilità del modello è di per sé stessa un ostacolo ai futuri apprendimenti.

Legata alle idee di immagine di un concetto e conflitto, c'è un'importante questione che riguarda la *misconcezione*. Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare, essa però non è vista sempre come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione. Alla base dei conflitti ci sono delle misconcezioni (concezioni non corrette) eventualmente in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica.

2.6 Concetti e teoria degli ostacoli

Che cos'è un *concetto*? Il suo nome latino, *conceptus* da *concepire*, fa chiaro riferimento al risultato dell'atto di concepimento o generazione della mente nel suo staccarsi dall'immediatezza delle impressioni sensibili e delle rappresentazioni particolari e nel suo giungere ad una significazione universale. Nel celebre Dizionario di Filosofia di Nicola Abbagnano (1901-1990) si trova la seguente definizione: "In generale, ogni procedimento che renda possibile la descrizione, la classificazione e la previsione degli oggetti conoscibili". Da notare che, in questa accettazione:

- il concetto è un processo, dunque qualche cosa di dinamico e non di statico;
- vi può essere concetto di qualsiasi cosa, dagli oggetti concreti a quelli astratti; da quelli reali ad oggetti irreali, inesistenti, immaginari;
- c'è differenza tra nome e concetto; basti pensare che nomi diversi possono essere pertinenti allo stesso concetto.

A questo punto scattano due problematiche fondamentali:

- la *natura* del concetto;
- la *funzione* del concetto.

Per quanto riguarda sulla natura del concetto, in filosofia ha avuto due tipologie di risposte diverse:

- il concetto è l'*essenza* stessa delle cose e dunque la loro essenza necessaria;
- il concetto è il segno dell'*oggetto* dunque si trova con esso in rapporto di significazione.

Sulla funzione del concetto si hanno due concezioni fondamentalmente diverse:

- di tipo *finale*: il concetto ha come scopo finale quello di esprimere o rivelare la sostanza delle cose;
- di tipo *strumentale*, ed allora si hanno vari ulteriori aspetti:
  - il concetto è uno strumento per descrivere gli oggetti e permetterne il riconoscimento;
  - il concetto è uno strumento per classificare gli "oggetti" nel mondo più economico possibile;
  - il concetto è uno strumento per organizzare i dati dell'esperienza in modo da stabilire tra essi connessi di carattere logico;
  - il concetto è uno strumento per prevedere.

Comunque non possiamo non affermare che non è facile formare un concetto: "Ogni concetto, anche semplice in apparenza, è circondato da un intorno fluttuante e complesso di rappresentazioni associate che comportano molteplici livelli di formulazione e livelli di integrazione del concetto"(Giordan, De Vecchi. 1987, pag. 178). Poi c'è da tenere presente gli ostacoli che si frappongono all'apprendimento, proposti una prima volta da Guy Brousseau nel 1976 e sistemati in modo definitivo negli anni successivi. Infatti durante il processo di insegnamento-apprendimento si formano da una parte idee transitorie, ma dall'altro bisogna fare i conti con il fatto che tali idee resisteranno poi al tentativo di superarle. Quindi le rotture sono necessarie, e vi sono allora questi fenomeni chiamati *ostacoli.* Si potrebbe dire che un *ostacolo* è un idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi precedenti, ma che si rileva fallimentare quando si tenta di applicarla ad un problema nuovo. Visto il successo ottenuto, si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla; ma questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti.
Si possono distinguere tre tipi di ostacoli:

1. di *natura ontogenetica*, cioè legata alla natura particolare dello studente;

2. di *natura didattica*, cioè legata alle scelte di contenuti e di metodologia dell'insegnante;

3. di *natura epistemologica*, cioè legata allo specifico di certi contenuti matematici.

Ci soffermeremo solo sul terzo aspetto legato agli ostacoli. Ogni argomento a carattere matematico ha un proprio statuto epistemologico che dipende dalla storia della sua evoluzione all'interno della matematica, della sua accettazione critica nell'ambito della matematica, dalle riserve che gli sono proprie, dal linguaggio in cui è espresso o che richiede per potersi esprimere. Per esempio, quando nella storia dell'evoluzione di un concetto si individua una non continuità, una frattura, cambi radicali di concezione, allora si suppone che quel concetto abbia al suo interno *ostacoli di carattere epistemologico* sia ad essere concepito, sia ad essere accettato dalla comunità dei matematici, sia ad essere appreso. Quest'ultimo punto si manifesta, per esempio, in errori ricorrenti e tipici di vari studenti, in diverse classi, stabili negli anni (riscontreremo tale ostacolo sull'apprendimento del concetto di infinito).

2.7 Il linguaggio della matematica

Molti Autori asseriscono che la matematica sia, di per sé stessa, un linguaggio. Il fatto che abbia, in modo del tutto evidente:

- una sintassi
- una semantica
- una pragmatica

proprie e specifiche, e questo, fa propendere per una risposta positiva.
Allora la matematica è di per sé stessa un linguaggio? Qualunque risposta si dia a questa domanda, essa è fonte (da sempre) di aspre polemiche; non è dunque il caso di illudersi di risolvere qui questa difficile problematica. Anche perché riguarda, in verità, solo marginalmente la didattica. Di fatto, però, nel rispondere alla domanda, molti pensano, appunto, alla matematica in sé; se noi accettiamo il fatto che la didattica della matematica tratti tra l'altro problemi di "comunicazione della matematica", allora siamo portati a concludere che non si può, nel nostro ambito, non fare qualche riflessione sul complesso rapporto che c'è tra l'esposizione della matematica con l'intenzione di farla apprendere, il suo apprendimento consapevole, la necessità di comunicazione che si ha (nei due versi) in aula, il contratto di comunicazione che si instaura in aula e la "lingua comune".[4] Diversi Autori hanno messo in evidenza la complessità dell'acquisizione del "discorso scientifico" (le sue nozioni, i suoi concetti, ma anche i suoi modi linguistici peculiari) da parte degli studenti a causa del linguaggio "speciale" che esso richiede, specie in contrasto con la lingua comune che lo studente utilizza fuori dal contesto

[4]Lingua che si usa normalmente in contesto non istituzionalizzato, per la comunicazione usuale.

scolastico. Proprio in questo ambito troviamo un evidente paradosso didattico che tormenta gli insegnanti sensibili, chiamato *paradosso del linguaggio specifico*:

- l'insegnamento è comunicazione ed uno dei suoi scopi è di favorire l'apprendimento degli allievi; per prima cosa, allora, chi comunica deve far sì che il linguaggio utilizzato non sia esso stesso fonte di ostacoli alla comprensione; la soluzione sembrerebbe banale, basta evitare agli allievi quel linguaggio specifico: tutta la comunicazione deve avvenire nella lingua comune;

- la matematica ha un suo linguaggio specifico (o, addirittura, è un linguaggio specifico); uno dei principali obiettivi di chi la insegna è quello di far apprendere agli allievi non solo a capire, ma anche a far proprio quel linguaggio specialistico; dunque, non si può evitare di far entrare a contatto gli allievi con quel linguaggio specifico, anzi: al contrario, occorre presentarlo (imporlo) perché lo facciano proprio.

Pertanto quando si fa matematica, la comunicazione non avviene certo nel linguaggio matematico dei matematici, ma neppure avviene nella lingua comune, ma si assume una sintassi specifica (a volte farraginosa), una semantica ritenuta opportuna, facendo nascere una lingua difficile da gestire.

Capitolo 3

Riflessioni didattiche sul concetto di infinito matematico[1]

Gli studi in didattica della matematica che hanno analizzato la problematica dell'insegnamento e dell'apprendimento dell'infinito matematico sono numerosissimi, e hanno puntato particolarmente l'attenzione sugli allievi per esaminare quali siano i motivi che fanno dell'infinito un soggetto cognitivamente così difficile da essere costruito correttamente. Questi studi mostrano come sia dal punto di vista storico che per quanto concerne l'apprendimento del concetto di infinito matematico, l'evoluzione di questo argomento sia molto lenta ed avvenga spesso in modo contraddittorio e solo grazie ad un processo di sistemazione e maturazione cognitiva che riguarda solo un numero assai limitato di individui.

3.1 Ostacoli e infinito matematico

Nel precedente capitolo abbiamo parlato della teoria degli ostacoli, ora vogliamo vedere come questi *ostacoli* si oppongono alla costruzione della conoscenza del concetto di infinito matematico. Pensiamo alla trattazione dell'infinito

[1]Per non rendere troppo pesante la lettura con continue citazioni, si dichiara che il contenuto del Cap. 3 è tratto dal libro *Infiniti infiniti* (Arrigo, D'Amore, Sbaragli, 2010).

matematico nella scuola elementare, sicuramente qui riscontreremo ostacoli ontogenetici legati all'immaturità concettuale e critica causate principalmente dall'età degli alunni (Spagnolo, 1998); ma non per questo si devono sottovalutare le prime intuizioni, le prime immagini, i primi modelli che si formano nella mente dei bambini fin dalla scuola elementare, come conseguenza anche delle sollecitazioni degli stessi insegnanti. La letteratura internazionale, partendo dallo sviluppo storico di questo controverso argomento, ha saputo mettere in evidenza gli ostacoli epistemologici che si frappongono all'apprendimento dell'infinito matematico e che permettono di spiegare alcune difficoltà incontrate dagli studenti. [Si veda ad esempio Schneider (1991)]. Effettuiamo alcune considerazioni sugli ostacoli *epistemologici*. Si può pensare che lo sviluppo storico di un concetto sia stato un passaggio nell'arco della storia da una fase "iniziale" intuitiva ad una fase "finale" del concetto stesso (forse sarebbe meglio chiamarla "attuale" o "avanzata"), matura (nel momento in cui se ne parla) e strutturale; è ovvio che questa è solo una schematizzazione, dato che tra queste due fasi considerate come il punto di partenza e il punto di arrivo (nel momento in cui se ne parla) vi sono tanti altri passaggi fondamentali che permettono di raggiungere la fase "attuale" del concetto (Sfard, 1991). Ciò che è avvenuto nella storia della matematica si può rintracciare in ambito didattico; in effetti alcune delle prime ingenue intuizioni che si sono avute storicamente sul tema dell'infinito, si possono rintracciare nuovamente nelle considerazioni e convinzioni manifestate intuitivamente dagli studenti in classe. Ossia dal punto di vista didattico, si può rilevare una situazione analoga a quella che è avvenuta storicamente: in una prima fase gli allievi si accostano intuitivamente ad un concetto matematico, senza averne una comprensione completa e sviluppata, solo successivamente l'apprendimento si fa più pieno e maturo (Sfard, 1991). Si possono quindi ipotizzare due percorsi in "parallelo": il primo riferito allo sviluppo storico del sapere, il secondo riferito ad un analogo percorso di ciò che avviene in ambito didattico (Sfard, 1991; Bagni, 2001). Il passaggio in ambito didattico dalla fase "iniziale" alla fase "avanzata" del sapere può far nascere, nella mente degli allievi, dubbi e reazioni che si possono rintracciare nel corrispondente passaggio nella formazione del sapere. È importante sottolineare che la fase "intuitiva ingenua" risulta in opposizione a quella "avanzata" sia nella storia della matematica che nei processi di apprendimento e insegnamento, non solo nella scuola elementare ma anche oltre, dato che i modelli permangono nella scuola superiore (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002) e, in alcuni casi, anche in seguito. Queste considerazioni possono risultare molto utili per la *trasposizione didattica* che dovrebbe partire da una prima conoscenza intuitiva degli studenti, per poi far sì che le convinzioni iniziali degli allievi si indirizzino verso la fase "avanzata" del concetto stesso.

3.2 Quadro teorico sulle ricerche didattiche sull'infinito matematico

In questo paragrafo riporteremo solo alcune delle numerosissime ricerche in didattica che sono state effettuate nell'ambito del concetto di infinito matematico; vedremo come Arrigo, D'Amore e Sbaragli hanno analizzato ed evidenziato o le misconcezioni degli studenti o gli ostacoli epistemologici su questo tema e come si siano convinti che ci sia un profondo legame tra ostacoli epistemologici e didattici.

3.2.1 Infinito potenziale ed attuale

Riportiamo qui di seguito alcune ricerche che sono state fatte in ambito dell'infinito potenziale e attuale. In Hauchert e Rouche (1987) si narra di una discussione tra studenti liceali ai quali vengono proposte vari questioni aventi a che fare con l'infinito come, per esempio, i paradossi di Zenone; in tale lavoro sono riportati interessanti protocolli, tra i quali scegliamo come prototipo quello di un allievo di 15-16 anni che afferma: "Calcolando, resterà sempre qualcosa da percorrere. Ma esisterà certo un punto alla fine, dove Achille raggiungerà la tartaruga". Si nota la contraddizione delle due frasi, segno del dibattito interno che si sta svolgendo nella mente dell'allievo. Un'altra ricerca che è bene ricordare è quella di Nuñez (1991) che affronta la problematica sulla divisione in parti sempre più piccole del percorso di Achille con allievi di diversa età (da 8 a 14 anni); interessante è il fatto che i risultati non differiscono molto nei due livelli scolastici, nonostante la diversa età e la diversa competenza matematica, come se temi di questo genere difficilmente fossero influenzati dall'apprendimento matematico, se questo non è specifico. Alcuni ricercatori sostengono che la difficoltà di costruzione concettuale da parte degli allievi è in larga misura dovuta alla presenza, in questa questione, dell'infinito attuale; per esempio, Fischbein (2001) mostra una serie di esempi di influenze tacite esercitate dai modelli mentali sull'interpretazione di diversi concetti matematici rientranti nel dominio dell'infinito attuale. Tali modelli taciti provocano interpretazioni erronee, contraddizioni e paradossi non essendo in genere controllati in modo consapevole.

3.2.2 Scivolamento, dipendenza, appiattimento

Come abbiamo potuto vedere nel primo capitolo, spesso le dimostrazioni che si effettuano nel campo dell'infinito si basano su corrispondenze biunivoche; queste dimostrazioni risultano essere convincenti per un adulto esperto, ma non sempre lo sono per uno studente, anche se maturo. Ad esempio le corrispondenze tra l'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali e l'insieme dei naturali pari, o tra $\mathbb{N}$ e l'insieme dei naturali quadrati sono state analizzate, tra gli altri, da Duval (1983); egli mostra che uno dei motivi forti di non accettazione della dimostrazione da parte degli studenti sta nello *scivolamento (glissement)* dal verbo Avere al verbo Essere nel corso della dimostrazione: "Ogni naturale ha un quadrato (avere un quadrato) - non tutti i naturali sono quadrati di naturali (essere un quadrato)." [Nelle ricerche di Arrigo e D'Amore (1999, 2002)]. Si sono effettuate molte altre ricerche sulle erronee intuizioni e rappresentazioni che si fanno gli studenti nel tentare di mettere in corrispondenza biunivoca insiemi infiniti; possiamo citare il contributo di Waldegg (1993), nel quale si analizzano i componenti e le dichiarazioni di studenti di fronte alla costruzione di queste corrispondenze, e i numerosi contributi di Tsamir e Tirosh, tra i quali ricordiamo Tsamir (1999) e Tsamir e Tirosh (1999) nel quale mostrarono come si possono sfruttare le risposte scorrette relative a rappresentazioni di insiemi infiniti allo scopo di aumentare la consapevolezza delle contraddizioni presenti nel loro modo di ragionare, guidandoli verso l'uso della corrispondenza biunivoca come unico criterio per paragonare quantità infinite. In questi studi si è messo in evidenza, tra le altre cose, come la decisione di uno studente relativa alla possibilità che due insiemi infiniti siano costituiti dallo stesso numero di elementi dipende dalla rappresentazione specifica degli insiemi infiniti data nel problema. I risultati di tali ricerche sono stati usati per costruire una serie di attività riguardanti l'infinito con l'obbiettivo di incoraggiare gli studenti e far sì che si rendessero conto delle contraddizioni insite tra le convinzioni possedute su questo argomento; questo a portato alcuni studenti a scegliere, con una buona consapevolezza, la corrispondenza biunivoca come metodologia per superare tali contraddizioni. Un altro problema riscontrato nelle ricerche di Arrigo e D'Amore (1999, 2002) con gli studenti svizzeri ed italiani di scuola superiore è il fenomeno noto in letteratura come *dipendenza*; viene messa in evidenza la convinzione degli studenti basata sulla veridicità dell'VIII nozione comune di Euclide: "Il tutto è maggiore della parte", sia per il finito che per l'infinito. Quindi stiamo parlando della dipendenza della cardinalità dalla "grandezza" di insiemi numerici; ad esempio, dato che l'insieme dei numeri pari rappresenta un sottoinsieme dell'insieme dei numeri naturali, si pensa che il primo debba essere costituito da un numero minore di elementi. Un altro esempio è quello di avere la convinzione che il numero di punti che si trovano in due diversi segmenti è più grande nel segmento di maggior lunghezza. Inoltre, la Sbaragli (2004, 2006) studia quanto sia radicata la presenza della *dipendenza in ambito* sia *geometrico* che *aritmetico* presso insegnanti di scuola primaria e secondaria di primo grado, basata sulla forzata e falsa genarilizzazione ai casi infiniti di ciò che si è appreso circa la corrispondenza biunivoca sui casi finiti. Uno dei fenomeni di dipendenza in ambito geometrico è legato all'idea di segmento concepito come "collana di perle", ossia il segmento considerato come filo-segmento formato da perline - punti a contatto l'una con l'altra. Tale modello si fonda su misconcezioni riguardanti il punto matematico considerato come ente avente una qualche dimensione, una qualche forma ad idee erronee relative alla topologia della retta. Ricordiamo le ricerche di Arrigo e D'Amore (1999, 2002) dove mettono in evidenza le difficoltà nella comprensione dell'infinito matematico e della padronanza del concetto di continuità da parte di studenti di scuola superiore siano legate al problema della presenza del *modello intuitivo*[2] che gli studenti hanno degli enti

[2]Si riserva il nome di *modello intuitivo* a quei modelli che rispondono pienamente alle sollecitazioni intuitive e che hanno dunque un'accettazione immediata forte. In effetti

geometrici, in particolare del punto e del segmento. Nella ricerca di Sbaragli (2005, 2006) si mette proprio in evidenza come gli insegnanti di scuola primaria e secondaria di primo grado presentino le stesse misconcezioni possedute dagli allievi, non solo per il segmento considerato come una "collana di perle", ma anche, più in generale, per gli enti primitivi della geometria. Inoltre per questa ricerca sono risultate significative le considerazioni riportate in Fischbein (1993) dove, tramite vari esempi (alcuni di questi relativi al punto), viene messa in evidenza la complessità delle relazioni tra gli aspetti figurali e concettuali nell'organizzazione dei *concetti figurali*[3] e la fragilità di tale organizzazione nelle menti degli studenti. Per questo, dal punto di vista didattico, Fischbein sostiene che gli insegnanti dovrebbero mettere sistematicamente in evidenza agli studenti le varie situazioni conflittuali per mostrare l'importanza dominante della definizione sulla figura. Ossia, lo studente dovrebbe essere reso consapevole dei conflitti e delle loro origini, con lo scopo di enfatizzare nella sua mente la necessità per il ragionamento matematico di dipendere da vincoli formali. Inoltre sempre Fischbein (1993) sostiene che l'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei vincoli concettuali su quelli figurali, non è un processo spontaneo; anzi, dovrebbe costituire una continua, sistematica e principale preoccupazione dell'insegnante. Perché questo avvenga, in Arrigo e D'Amore (2002) si suggerisce un intervento a monte, cioè sulla preparazione in questo specifico campo degli insegnanti della scuola di base. Importantissimo è quest'ultimo aspetto perché, come vedremo meglio più avanti, le convinzioni degli insegnanti di scuola elementare nei confronti dell'infinito matematico influenzano il formarsi nella mente degli allievi di modelli intuitivi che producono situazioni di disagio cognitivo. Per modificare e raffinare queste convinzioni occorre un nuovo apprendimento che può avvenire solo tramite corsi di formazione che consentano di riflettere in modo specifico su

più forte è il modello intuitivo, più difficile è infrangerlo per *accomodarlo* ad una nuova immagine (Fischbein, 1985; D'Amore, 1999).

[3] "Oggetti" di studio della geometria con proprietà spaziali (forma, posizione e grandezza) e qualità concettuali (idealità, astrattezza, generalità e perfezione) intrinsecamente legati tra loro. Ad esempio una figura geometrica può essere descritta come avente intrinsecamente proprietà concettuali. Ma una figura geometrica non è puro concetto, ma un'immagine visiva.

questo tema. Un altro fenomeno riscontato in letteratura è l'*appiattimento* che consiste nel ritenere tutti gli insiemi infiniti come aventi la stessa cardinalità, ossia nel ritenere che tutti gli insiemi infiniti possano essere messi in corrispondenza biunivoca tra loro. Abbiamo visto come fin dall'antichità il dibattito tra denso e continuo fu caratterizzato da moltissimi fraintendimenti e polemiche e la reale consapevolezza matematica fu raggiunta solo alla fine del XIX secolo. Ebbene le ricerche dimostrano che il dibattito continua in didattica, come la difficoltà da parte di molti studenti di passare dal denso al continuo e di capire come nel denso vi siano, molti più "buchi"[4] rispetto al continuo. Tale fenomeno è stato evidenziato anche da Fischbein ed i suoi allievi, i quali hanno messo in evidenza le difficoltà degli studenti di passare dal denso al continuo, mostrando le difficoltà che hanno anche studenti maturi nel tentativo di costruire correttamente l'idea di numero irrazionale. Più in dettaglio, in letteratura si è mostrato come, una volta accettato da parte degli studenti che due insiemi come $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ debbano avere la stessa cardinalità (dopo la dimostrazione, da parte del ricercatore o insegnante, della corrispondenza biunivoca tra i due insiemi), risulta molto frequente la generalizzazione che, allora, tutti gli insiemi infiniti debbano avere necessariamente la stessa cardinalità; misconcezioni che non dipende solo da un ostacolo epistemologico, ma anche da ostacoli didattici. Anche il fenomeno di *appiattimento*, così come quello di *dipendenza*, si basa sulla generalizzazione ai casi infiniti di ciò che si è appreso circa la corrispondenza biunivoca sui casi finiti.

3.2.3 Induzione, limiti e numeri periodici

Varie ricerche hanno analizzato ulteriori difficoltà da parte degli studenti, come ad esempio l'accettazione del principio di induzione. Con la ricerca di Fischbein ed Engel (1989) e di Morshvitz Hadar (1991) si è rilevato che uno studente se, dopo aver provato che una certa proprietà vale per $n = 0$ o per $n = 1$, e che, avendo ammesso che valga per n, aver dimostrato anche che vale per $n + 1$, egli ritenga che sia "più rassicurante" il fatto di effettuare una prova per qualche caso sporadico $n = 2$, $n = 3$, $\ldots$; cioè per molti

[4]Termine ambiguo introdotto per rendere meglio l'idea della differenza tra denso e continuo.

studenti la dimostrazione deve essere "rinforzata" attraverso esempi concreti per poter essere davvero accettata. Curiosa è anche la ricerca di Manoma-Downs (1990) dove vengono analizzate le risposte a domande su uguaglianze del tipo: $0,\bar{9} = 1,\ 0,\bar{3} = 1/3$ ed il calcolo di alcuni limiti per x che tende a 2, con $x - 2$ al denominatore, paragonando i modelli culturali che sembrano distinguere le risposte di allievi inglesi e greci. Ci sono anche innumerevoli ricerche sulla comprensione del concetto di limite da parte degli studenti, sulla difficoltà e sugli ostacoli a carattere epistemologico, didattico, cognitivo e metacognitivo connessi all'apprendimento di questo tema.

3.2.4 Dalle percezioni agli assiomi

Le ricerche sulla didattica dell'infinito vengono fatte a qualsiasi livello scolastico, fina dalla scuola dell'infanzia, nei primi anni di primaria fino alla scuola secondaria superiore. Ad esempio lo studio di Marchini (2004) che mette in evidenza in bambini tra i 5 e i 7 anni come le concezioni o credenze sul tempo e lo spazio risultano in stretta relazione con il concetto di infinito, oppure lo studio di Gilbert e Rouche (2001) che mettono in evidenza come il problema di fondo verte sulla constatazione che "nessuna grandezza sensibile è infinita", cioè dimostra come gli argomenti relativi all'infinito siano percepiti come contrari all'intuizione e distaccati dall'esperienza quotidiana. In questo ambito non possiamo non citare la discussa teoria di Lakoff e Nuñez (2000) basata sulla *conoscenza incarnata (embodied cognition theory)* che consiste in una teoria della conoscenza che attribuisce un ruolo fondamentale alla metafora intendendola come una particolare ed importante strumento cognitivo. La metafora concettuale intesa da Lakoff e Nuñez è come una struttura che consente di comprendere concetti astratti in termini concreti, utilizzando idee e modelli di ragionamento fondati all'interno del sistema senso-motorio. Gli Autori sostengono che l'idea di infinito in atto sia basta su una sola metafora, la quale è in grado di caratterizzare un'ampia varietà di concetti matematici. Quest'analisi poggia sul cosiddetto *sistema aspettuale* che caratterizza la struttura degli eventi nel modo in cui li concettualizziamo. Tutte le diverse presenze dell'infinito in atto rappresentano casi particolari di un'unica metafora basilare e generale, chiamata la *metafora base dell'infinito (basic* *metaphor of infinity)* nella quale i processi che continuano indefinitamente sono concettualizzati come se avessero un risultato ultimo. E a questo proposito Tall (2002) classifica le modalità di rappresentazione in matematica in tre modi distinti:

- *embodied* (conoscenza incarnata), basato sulle percezioni e azioni in un contesto reale, quindi sensoriali;
- *simbolico - percettuale*, che combina il ruolo dei simboli in matematica, considerandoli sia come processi che come oggetti;
- *formale - assiomatico*, che si riferisce ad un approccio formale che parte da un sistema di assiomi e procede per deduzioni logiche per dimostrare teoremi.

Per Tall "embodiment" diventa sinonimo di approccio didattico legato alle attività senso-motorie degli studenti nell'eseguire attività matematiche. Relativo a questo tema, Tall mette in evidenza come la costruzione di idee spontanee e formali relative all'infinito sia il prodotto del pensiero umano e possa essere considerata in termini di embodied cognition (Lakoff e Nnuñez, 2000).

3.2.5 Il "senso dell'infinito"[5]

Una altra ricerca interessante è quella di D'Amore et al. effettuata nel 2004 in Colombia, Italia, e Svizzera sul "senso dell'infinito"; in essa si dimostra che un tale senso esiste, ma può essere raggiunto solo in casi estremamente specifici. Per "stima" si intende "il risultato di un procedimento (conscio o inconscio) che tende a individuare il valore incognito di una quantità o di una grandezza" (Pellegrino, 1999, pag. 145); non si tratta, dunque, di "approssimare" un risultato, ma di cogliere l'essenza del cardinale di una raccolta. Tutto ciò è difficile e comporta varie abilità e Pellegrino (1999, pagg. 146-147) ne elenca parecchie; a suo avviso, un buon estimatore deve:

[5]Si dichiara che tale paragrafo è tratto dall'articolo *Il "senso dell'infinito"* (D'Amore et. al, 2004).

- essere dotato di buone capacità mentali e matematiche, anche se intuitive e spontanee;
- saper scegliere a intuito qual è la strada migliore per effettuare la stima;
- saper accettare la presenza di un errore nella sua stima, rispetto al valore esatto;
- saper trasformare dati numerici astratti o astrusi in qualche cosa di familiare o di interpretabile;
- saper usare e coordinare tra loro varie strategie di calcolo mentale.

Più volte, però, nel corso di ricerche precedenti su questioni aventi a che fare con cardinali infiniti, ci si è imbattuti in allievi che dichiaravano curiose "stime" nelle quali mescolavano numeri finiti ed infiniti con una certa naturalezza e senza porsi troppi problemi (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002). Riportiamo qui di seguito un esempio significativo, per facilitare la comprensione di questo argomento.
Esempio.
Ambiente: ultimi anni delle scuole superiori (italiane e svizzere) (età degli allievi: 17-19 anni).
A studenti che avevano già studiato l'argomento "infinito matematico", è stata sottoposta la seguente domanda: "Malgrado che fra due razionali diversi ve ne siano addirittura infiniti, credi ancora che vi siano tanti razionali quanti naturali?"
Se prendiamo le percentuali di risposte degli studenti italiani, abbiamo un quadro più fedele delle reali capacità dei liceali di confrontare cardinali di insiemi infiniti. Infatti incontriamo l'effetto dell'appiattimento: il 67 per cento risponde che sì, i due insiemi sono equipotenti, ma solo perché sono tutti e due infiniti. Riuscire a percepire l'uguaglianza $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ come un fatto intuitivo supera ogni possibilità non solo dei principianti, ma anche di molti studenti considerati ottimi matematici. Nonostante la dimostrazione di Cantor, sembra che l'intuizione non giochi a favore. Il fatto è che le stime delle cardinalità dei due insiemi sono fortemente ostacolate dall'intuizione che sembra spingere verso l'affermazione $|\mathbb{N}| < |\mathbb{Q}|$. In questo caso, vengono

messe in crisi le abilità Pellegrino (1999) sopra citate. Riassumendo possiamo dire che i risultati di questa ricerca rilevano che non c'è legame tra il "senso del numero" con la conseguente capacità di dare "stime" intuitive e accettabili ed il "senso dell'infinito" con la conseguente capacità di dare "stime" intuitive di cardinalità infinite.

3.2.6 Differenza tra le concezioni potenziale e attuale dell'infinito e dell'infinitesimo

Molte ricerche sono ispirate al classico dibattito filosofico su infinito in senso potenziale e in senso attuale che permettono di giungere a importanti considerazioni. In Bagni (1998 b) viene messo in evidenza come gli studenti di scuola superiore sono portati ad accostarsi all'infinitesimo mediante descrizioni intuitive, più vicine alla nozione comune di infinitesimo potenziale che non a quella, impegnativa, di infinitesimo attuale. Nell'articolo viene analizzata la nozione di infinitesimo indotta negli studenti della scuola secondaria di secondo grado (con particolare attenzione al liceo scientifico italiano) dalla tradizionale impostazione didattica prima e dopo lo studio dell'analisi. Ed in Bagni (2001) viene evidenziato come la differenza tra le concezioni potenziali e attuale dell'infinito e dell'infinitesimo; l'Autore mostra come la concezione potenziale dell'infinito e dell'infinitesimo sia facilmente riconducibile alla descrizione di un *processo*, mentre la concezione attuale sia da riferire più propriamente ad un *oggetto*. E la stessa diversa esprimibilità nei vari registi rappresentativi risente delle differente difficoltà concettuale delle due impostazioni. Fischbein (1998) cita un esempio dove afferma come l'infinito potenziale viene intuitivamente accettato da studenti delle superiori e dei primi anni di università, a differenza dell'infinito attuale. Proponiamo questo brano: "La ricerca ci ha mostrato che, mentre un infinito potenziale può essere compreso, afferrato, accettato intuitivamente, come processo illimitato, un infinito attuale non può essere afferrato intuitivamente come una quantità data. Per questo motivo i problemi che contengono operazioni con infiniti attuali portano a profonde difficoltà intuitive" (Fischbein, Tirosh, Hess, 1979). Dai risultati di queste ricerche emerge come, sia dal punto di vista storico che per quanto concerne l'apprendimento del concetto di infinito matematico, l'evoluzione della concezione attuale sia molto lenta ed avvenga spesso in modo contraddittorio e solo grazie ad un processo di sistemazione e maturazione cognitiva degli apprendimenti. L'ostacolo epistemologico, inteso nel senso classico alla maniera di Brousseau (1983), è una conoscenza stabile che funziona bene in ambiti precedenti, ma che crea problemi ed errori al momento in cui si cerca di adattarla a nuove situazioni; dunque questo ostacolo è da intendersi come conoscenza che blocca quelle successive sullo stesso tema, quando si cerca di ampliarle, ma non come una mancanza di conoscenza.

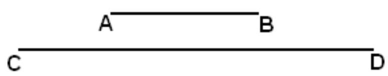
3.2.7 Ostacoli didattici

Le difficoltà a concettualizzare in modo corretto l'infinito non sono presenti solo tra studenti, ma anche tra insegnanti e tra insegnanti in formazione, il che rafforza la necessità di prendere in futuro sempre più in esame questo contenuto disciplinare specifico nella formazione, evidenziandone gli ostacoli didattici e tenendo conto del ruolo centrale dell'intuizione e dell'importanza degli aspetti storici come chiave di lettura degli argomenti matematici. In effetti le attuali ricerche sull'infinito mostrano molto spesso la presenza di ostacoli didattici, derivanti dalle scelte degli insegnanti e delle problematiche del processo di insegnamento-apprendimento della matematica. A tale proposito possiamo ricordare le ricerche di Arrigo e D'Amore (1999, 2002) riguardanti studenti al termine del percorso di scuola superiore, che mettono in evidenza come le misconcezioni da essi possedute non dipendono soltanto da ostacoli epistemologici, ma anche soprattutto di tipo didattico; e i lavori di Sbaragli (2004, 2006, 2007) che mostrano come le misconcezioni presenti negli allievi ed evidenziate dalla letteratura internazionale siano le stesse possedute dagli insegnanti di scuola primaria e secondaria di primo grado, il che rafforza davvero la necessità di prendere in futuro sempre più in esame gli ostacoli didattici e i contenuti disciplinari della formazione.

3.3 Le convinzioni degli allievi sull'infinito matematico

È stata effettuata una ricerca relativa alla didattica dell'infinito matematico per capire quali siano le relative convinzioni degli allievi inscritti al primo anno del corso di laurea in matematica all'università di Bologna; studenti che hanno terminato il loro corso di studi alla scuola secondaria e che hanno un reale interesse ed un'attitudine alla materia. A questi allievi è stato sottoposto il seguente questionario:

1. Ci sono più punti nel segmento AB o nel segmento CD?

   Perché?

2. Sono di più i numeri pari o i numeri naturali?
   Perché?

3. Il numero $0,3\bar{9}$ è uguale al numero $0,4$ o è una sua approssimazione?

Poi si è lasciato tutto il tempo necessario per riflettere, pensare e scrivere la risposta che ritenevano giusta.

3.3.1 Risultati

Il questionario è stato sottoposto a 11 studenti e ora riporteremo qui di seguito alcune risposte del questionario, in modo da avere una chiara panoramica delle convinzioni degli allievi intervistati.

1. Alla prima domanda 2 studenti rispondono CD; essi affermano che in due segmenti di lunghezze diverse vi sono numeri differenti di punti, in particolare che a maggior lunghezza corrisponde un maggior numero di punti. È ovvio che, anche come immagine visiva, un segmento può essere trasportato con un movimento rigido sull'altro, in modo che il

più corto sia incluso nel più lungo; l'influenza del modello figurale, in questo caso, condiziona negativamente la risposta. In effetti per l'infinito non vale la nozione comune euclidea: *Il tutto è maggiore della parte*, se si intende quel "maggiore" riferito alla cardinalità dell'insieme dei punti. La confusione risulta dall'impossibilità di distinguere grandezze diverse in gioco: la misura del segmento, l'insieme dei punti del segmento. Riportiamo qui di seguito un esempio di risposta relativa a questa convinzione:

CD. Perché siccome una retta, e di conseguenza un segmento, è composta da punti, e siccome il segmento CD è più lungo del segmento AB allora ne deduciamo che CD è composto da più punti.

Questa accettazione intuitiva (segmento più lungo comporta insieme più numeroso di punti) rappresenta una misconcezione, menzionata dagli studiosi con il nome di *dipendenza* dai cardinali transfiniti da fatti relativi a misure (cioè l'insieme di misura maggiore ha più elementi). Inoltre, da questa affermazione risulta molto presente il cosiddetto "modello della collana", già citato nel paragrafo 3.2.2, che si basa sull'idea di segmento concepito come filo-segmento formato da minuscole perline-punti, a contatto l'una con l'altra. È evidente che una simile concezione porta alla convinzione che la cardinalità delle perle-punti dipenda dalla lunghezza del sostegno-segmento: maggior lunghezza implica maggiore cardinalità dell'insieme dei punti. A causa di questo modello intuitivo molti studenti maturi (nel nostro caso al primo anno di università) non riescono a diventare padroni del concetto di continuità. Infatti per superare questo ostacolo epistemologico occorre un nuovo apprendimento: il concetto di densità. Questo concetto ha a che fare con l'infinito attuale: il segmento come insieme ordinato di punti è denso perché tra due suoi punti diversi scelti arbitrariamente ce ne sono infiniti altri; il che presuppone però un altro concetto, quello di punto geometrico privo di estensione.

8 allievi rispondono che il numero di punti presenti nei due segmen-

ti sono uguali perché infiniti; riportiamo alcune risposte:

Uguali. Perché in entrambi sono infiniti.
Lo stesso numero, perché entrambi hanno infiniti punti.
Nessuno dei due. In ognuno dei due ci sono infiniti punti.
Non si può dire, in un intervallo ci sono infiniti punti.

Da queste risposte non si riesce ben a capire se gli studenti abbiano ben acquisito il concetto di infinità attuale, ma possiamo pensare che essi giustificano l'uguaglianza dei punti con la loro infinità; sembra proprio che avvenga il fenomeno dell'*appiattimento* dei cardinali transfiniti, fenomeno presentato nel paragrafo 3.2.2, che consiste nel ritenere che tutti gli insiemi infiniti sono tra loro equipotenti, generalizzando così che tutti gli insiemi infiniti lo siano. Ma parleremo di questo fenomeno in maniera più approfondita nella risposta alla prossima domanda.

Un solo studente risponde in maniera esatta ed esauriente alla prima domanda, proponendo la dimostrazione di Cantor che mette in evidenza, attraverso la proiezione da un punto opportuno, come vi siano lo stesso numero di punti in due segmenti di lunghezze diverse. Riportiamo la risposta dello studente:

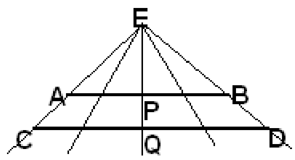


Figura 3.1: Rappresentazione effettuata dallo studente.

Stesso numero. Perché sia E il punto di intersezione tra le rette AC e BD. Per ogni punto P di AB traccio la retta EP che interseca CD in Q. in questo modo stabilisco una corrispondenza biunivoca tra i punti di AB e di CD: dunque sono dello stesso numero.

2. Alla seconda domanda, a parte un allievo che non risponde, gli studenti

hanno risposto nel seguente modo:

5 allievi rispondono in modo corretto, ma mentre 3 di loro parlano di biiettività tra due insiemi, come si può vedere qui di seguito:

Stesso numero. Perché sia P insieme dei numeri pari, $\mathbb{N}$ numeri naturali e sia f: $\mathbb{N} \to P$, $f(n) = 2n$. Essa è biunivoca, dunque P e $\mathbb{N}$ hanno la stessa cardinalità.

Uguali. Perché la funzione da $\mathbb{N} \to P$(insieme dei numeri pari) che a n associa $2n$ è una biiezione.

Sono entrambi infiniti, perché hanno entrambi cardinalità $\aleph_0$, cioè si può fare una biiezione tra l'insieme dei numeri pari e l'insieme dei numeri naturali.

Gli altri 2 dei 5 studenti non danno una completa motivazione, ma giustificano la loro risposta parlando soltanto di "stessa cardinalità" dei due insiemi, nel seguente modo:

Stesso numero. Perché i due insiemi hanno uguale cardinalità.
Uguali. Hanno uguale cardinalità.

Comunque la risposta data è corretta, e quindi la classifichiamo come tale.

Ora se facciamo un passo indietro, notiamo che nella prima domanda un ragazzo ha risposto con l'affermazione "Non si può dire", ebbene lo stesso ragazzo ora risponde a questa domanda scrivendo:

Non si può dire, perché sono infiniti entrambi.

È evidente che questo studente non concepisce un confronto tra le cardinalità di insiemi infiniti e continua a rispondere nello stesso modo;

questo fatto deriva dall'idea che si possa parlare di cardinalità solo al finito e che infinito sia sinonimo di indefinito.

Mentre per i restanti 4 studenti si verifica il fenomeno dell'*appiattimento*, rispondendo nel seguente modo:

Uguali, perché entrambi infiniti.

A questi studenti è venuto spontaneo pensare che, essendo tutti e due gli insiemi infiniti, si possa concludere, in accordo con un passo di Galileo, che l'aggettivo "maggiore" non si possa utilizzare parlando di infinità; da ciò si trae la conseguenza che tutti gli insiemi di questo tipo sono null'altro che infiniti e che per essi non si possano usare aggettivi come "maggiore" o "minore". Infatti nessuno di questi ultimi ragazzi ha affermato o anche almeno accennato alla scala gerarchica dei transfiniti di Cantor, cioè dal numerabile al continuo ecc.

Possiamo sollevarci del fatto che nessun allievo ha dato la risposta che più di tutte temevamo: sono di più i numeri naturali. Rispondendo in questo modo gli studenti sosterrebbero la nozione comune euclidea: "il tutto è maggiore della parte", e ricomparirebbe il fenomeno della *dipendenza* della cardinalità dalla "grandezza" di insiemi numerici, dove la dipendenza viene intesa come: dati due insiemi A e B, se $A \subset B$, allora la cardinalità di B è maggiore di quella di A (dove A rappresenta l'insieme dei numeri pari e B l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali).

3. All'ultima domanda la maggior parte degli studenti ha risposto in maniera errata; 7 allievi hanno risposto che $0,3\bar{9}$ è una approssimazione di $0,4$, uno studente ha preferito non rispondere e gli altri 3 invece hanno risposto correttamente affermando che $0,3\bar{9}$ è uguale a $0,4$. Quindi la maggioranza degli studenti intervistati crede fortemente che $0,3\bar{9}$ sia diverso da $0,4$, nonostante questi allievi dovrebbero conoscere la dimostrazione "scolastica" dell'uguaglianza $0,3\bar{9} = 0,4$ dove si sfrutta la formula che fa passare da un numero scritto in forma periodica allo

stesso scritto in forma frazionaria. Gli studenti che hanno risposto in maniera sbagliata è perché non hanno ben acquisito il concetto di infinito attuale e non riescono a capire il significato esatto della forma decimale periodica di un numero razionale. Infatti i numeri periodici nascono in un contesto linguistico di infinito potenziale; quando essi vengono introdotti nella scuola media e superiore l'insegnante solitamente usa affermare "Potrei continuare la divisione e otterrei sempre lo stesso resto, quindi al quoziente dovrei riportare sempre la stessa cifra...". Dunque nasce l'idea di quell'avvicinarsi sempre più al risultato senza mai raggiungerlo, così per molti allievi ad esempio 0, è "quasi" uguale a 1, ma non esattamente uguale a 1, perché per arrivare a 1 manca sempre qualcosa. Dunque, in questo caso, l'ostacolo non è solo epistemologico ma anche didattico.

Conclusione

Nella presente tesi è stato approfondito il tema dell'infinito analizzando attentamente i seguenti aspetti:

- *storico*: mostra come ci siano voluti millenni per prendere in possesso il suo significato;

- *epistemologico*: matematici di alto prestigio hanno lottato per cercare di padroneggiarlo e inserirlo nella nostra disciplina e hanno accettato il rischio di totali fraintendimenti;

- *didattico*: importantissimo per la sua potenzialità educativa; necessaria per penetrare davvero nel mondo dell'aritmetica e della geometria.

Si è visto inoltre come la tematica dell'infinito, nonostante venga analizzata in profondità, rimane sempre sfuggente, creando la sensazione di non riuscire mai a comprendere effettivamente la sua vera essenza. A tale proposito concludiamo la tesi citando una frase di David Hilbert:
L'infinito! Nessun altro problema ha mai scosso così profondamente lo spirito umano; nessun altra idea ha stimolato così profondamente il suo intelletto; e tuttavia nessun altro concetto ha maggior bisogno di chiarificazione che quello di infinito.

Ringraziamenti

Sembra strano oggi essere arrivata qui, alla realizzazione di questo desiderio, e ripercorrendo questo viaggio il pensiero più importante va ai miei genitori e a mio fratello Rudy che sono stati il mio punto di riferimento, perché con grande sostegno e molta pazienza mi hanno permesso di raggiungere questo importante obiettivo.

Desidero ringraziare la professoressa Martha Isabel Fandiño Pinilla e il professore Giorgio Bolondi, relatore di questa tesi, per la costante disponibilità e cortesia avute nei miei confronti; particolarmente preziose sono risultate le loro indicazioni con le quali sono stata costantemente guidata nell'elaborazione di questa tesi.

Un grazie a chi mi è stato vicino, nessuno escluso, comprendendo il grande valore che per me ha avuto questa impresa.

Ringrazio tutta la compagnia di amiche che ho incontrato lungo il mio percorso: Claudia, Vale, Antonina, Sara e soprattutto Ale per i suoi "preziosi" consigli.

Inoltre desidero ringraziare le mie "vecchie" amiche di viaggio: Lucia, per la sua simpatia e per la sua generosità, Claudietta, per essere diventata un'amica davvero speciale e Marina, per tutti i suoi numerosi aiuti, ma specialmente per avermi sopportato dal giorno alla notte in questi ultimi anni.

Un grazie anche ad Elenina che è sempre stata pronta ad aiutarmi, nonostante la lontananza che ci separa.

Un grazie di cuore va alle mie amiche Sara, Elisa e Azzurra per essere sempre pronte a festeggiare i successi ma soprattutto pronte a farti distrarre nei momenti critici.

Poi, infine, un ringraziamento speciale va a Gionata. Grazie per esserci sempre stato, soprattutto per tutte le volte in cui ho detto che non ce l'avrei

fatta, senza di te non ci sarei mai riuscita. In fondo questa laurea è anche un po' tua!

Bibliografia

[1] *Infiniti infiniti* G. Arrigo, B. D'Amore, S. Sbaragli (2010)

[2] *Breve storia dell'infinitto* P. Zellini (1993)

[3] *Elementi di Didattica della Matematica* B. D'Amore (1999)

[4] *Matematica, miracoli e paradossi* S. Leonesi, C. Toffalori (2007)

[5] *Il"senso dell'infinito"* Articolo di B. D'Amore et al. (2004)