Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

**FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI**
**Corso di Laurea Triennale in Matematica**

# NUMERI ORDINALI E CARDINALI NELLA TEORIA DI VON NEUMANN-BERNAYS-GÖDEL

**Tesi di Laurea in Logica Matematica**

**Relatore:**
**Chiar.mo Prof.**
**PIERO PLAZZI**

**Presentata da:**
**CARLOTTA**
**BULGARELLI**

**Sessione I**
**Anno Accademico 2011/2012**

# Introduzione

Scopo della tesi è studiare l'estensione dei numeri naturali, introdotta da Georg Cantor alla fine del XIX secolo: i *numeri ordinali* e *cardinali*.
Egli, formulando una prima teoria degli insiemi, oggi chiamata "Teoria ingenua degli Insiemi", tentò infatti di generalizzare il concetto di numero naturale nel suo duplice aspetto, cardinale e ordinale, mediante similitudini (numeri ordinali) e corrispondenze biunivoche (numeri cardinali). Ciò rappresentava anche il tentativo di sviluppare i "principi generativi dei numeri", formulati da Cantor stesso:

1. passare da un numero al successivo (numeri ordinali)

2. procedere oltre quanto già ottenuto contando (numeri cardinali)

e conseguentemente di giungere alla possibilità di contare "oltre l'infinito". Cantor non diede definizioni precise degli ordinali e cardinali ma intendeva introdurre tali numeri per "astrazione": se si prende un insieme $X$ e si astrae rispetto alla natura degli elementi, allora si ottiene il numero ordinale di $X$, denotato con $\overline{X}$, se invece si astrae doppiamente rispetto a natura ed ordine degli elementi, allora si ha il numero cardinale di $X$, $\overline{\overline{X}}$. Si noti che per Cantor l'ordine è talvolta insito nell'insieme. Nello studio dei numeri ordinali e cardinali, risulta quindi evidente l'importanza assunta dalla Teoria degli Insiemi, per la cui fondazione sono state proposte molte teorie assiomatiche differenti, a seguito della scoperta di paradossi nell'ambito della già citata prima formulazione datane da Cantor (e altri). La tesi inizia dunque con il presentare uno di tali sistemi assiomatici, proposto originariamente da Von Neumann (1925, 1928) e più tardi interamente riesaminato e semplificato da R. Robinson (1937), Bernays (1937, 1954) e Gödel (1940) [Mendelson 1972, cap. 4, par. 1]: la *Teoria NBG*, estensione conservativa della canonica teoria assiomatica degli insiemi ZFC ma, a differenza di quest'ultima, finitamente assiomatizzabile.

Nel capitolo 1 vengono perciò esposti tutti gli assiomi della teoria Von Neumann-Bernays-Gödel, mettendoli a confronto con i corrispettivi assiomi di ZFC.
Nel capitolo 2 vengono esaminati i numeri ordinali, dandone dapprima le proprietà basilari per poi passare all'induzione transfinita e agli elementi base dell'aritmetica ordinale.
Analogamente nel capitolo 3 vengono formalizzati i numeri cardinali e introdotte le consuete operazioni dell'aritmetica cardinale, soffermandosi però sulla complessa distinzione fra insiemi finiti e infiniti e accennando a un altro importante argomento affrontato da Cantor, ossia l'ipotesi del continuo.

# Indice

# Capitolo 1

# La teoria delle classi NBG

Il motivo principale della sempre maggiore importanza che la logica matematica ha assunto dal secolo scorso, è stata la scoperta dei paradossi della teoria degli insiemi e dunque l'esigenza di una revisione della teoria intuitiva (e contraddittoria), datane da Cantor nella seconda metà del XIX secolo.
Alla base di questa prima teoria degli insiemi si possono infatti individuare due principi da cui si giunge a vere e proprie contraddizioni. Il primo principio, oltre a sottolineare due concetti fondamentali della teoria: quello di elemento e della relativa relazione di appartenenza, esprime anche il legame di quest'ultimi con l'uguaglianza. Esso può essere visto come un principio di unicità, in quanto permette di determinare univocamente un insieme dai suoi elementi, non assicurandone però in alcun modo l'esistenza. Tale funzione è invece svolta dal secondo principio, che garantisce l'esistenza, come insiemi, di certe collezioni di oggetti.

**Principio di estensione**: *due insiemi coincidono se e solo se hanno gli stessi elementi.*

**Principio di comprensione**: *data una proprietà $\phi$, si possono riunire in un unico insieme $A_\phi$ tutti e soli gli oggetti che godono di quella proprietà: essi sono gli elementi di $A_\phi$.*

Parrebbe ragionevole dire che: se $\phi$ è una formula, allora esiste l'insieme $A_\phi = \{x|\phi(x)\}$. Tuttavia se consideriamo la proprietà $\phi(x) =$ "$x$ è un insieme e $x \notin x$" e definiamo $R$ la totalità degli insiemi che soddisfano tale proprietà, $R$ $= \{x|x \notin x\}$, otteniamo il

**Paradosso di Russell**: R *non può essere un insieme.*

Infatti, poiché per il principio di comprensione $R$ dovrebbe essere un insieme, possiamo chiederci se $R$ appartenga o meno a sé stesso, ma entrambi i casi portano a una contraddizione poiché, in base alla definizione, $R \in R \Rightarrow R \notin R$ e $R \notin R \Rightarrow R \in R$.
Un altro importante paradosso, presente nella trattazione ingenua della teoria degli insiemi, è il

**Paradosso di Cantor**: *non esiste un insieme che abbia per elementi tutti gli insiemi.*

Anche in questo caso, il principio di comprensione assicura l'esistenza di un insieme siffatto poiché lo si può formalizzare come la totalità degli insiemi uguali a sé stessi. Ciò è in netto contrasto con l'importante *Teorema sull'insieme potenza di Cantor*, da cui segue infatti l'esistenza di infiniti insiemi di cardinalità infinita sempre più grande e, in particolare, che nessun insieme può avere per elementi tutti gli insiemi.
Seguendo l'idea di Cantor che tali contraddizioni fossero causate dalla possibilità di formare come insiemi collezioni troppo grandi, fu riconosciuta la necessità di un approccio di tipo assiomatico alla teoria degli insiemi che delimitasse con precisione quali costruzioni insiemistiche fossero ammissibili e quali no.
Il primo a dare un efficace sistema di assiomi fu E. Zermelo; con le integrazioni di A. Fraenkel, si ha il sistema standard per la teoria contemporanea degli insiemi: **ZFC**, dove 'C' ('choice') sta ad indicare l'aggiunta dell'assioma di scelta. Tale sistema formale costituisce una teoria del primo ordine con uguaglianza e un unico simbolo proprio predicativo binario, usato infisso: $\in$; all'interno di questa teoria viene abbandonato il principio di comprensione nella sua forma non ristretta, limitandolo alla formazione di sottoinsiemi di un insieme già dato sulla base di una determinata proprietà. L'impostazione di fondo della teoria ZFC consiste quindi nel permettere, con i nuovi assiomi raccolti nello **Schema di specificazione**, la sola formazione di collezioni concepibili come *"un tutto unico M di ben precisi, distinti oggetti della nostra percezione o del nostro pensiero, chiamati gli elementi di M"*, secondo la "definizione" di insieme data da Cantor. Così facendo, i paradossi di Russell e di Cantor vengono a "cadere".
Consideriamo $r(a) = \{x \in a;\ x \notin x\}$ che, dato l'insieme ambiente $a$, esiste per lo schema di specificazione; se $r(a) \in a$, si ha $r(a) \notin r(a) \Leftrightarrow r(a) \in r(a)$, ossia una contraddizione. Ciò dimostra, per l'arbitrarietà di $a$, che per qualunque insieme considerato, si trova sempre un elemento che sta al di fuori di esso e, in particolare, che non si può trovare un insieme collezione di tutti gli insiemi, cioè il paradosso di Cantor. In ZFC le collezioni "troppo grandi", come quelle appena menzionate, compaiono perciò solo sotto forma di predicati: la collezio-

ne universale di Cantor la si può, ad esempio, indicare con **U** e $x \in \mathbf{U}$ equivale a $x = x$.
Vi sono poi teorie assiomatiche degli insiemi che, a differenza di ZFC, ammettono come oggetti della teoria anche "*molteplicità inconsistenti*" di cui Cantor, trovatosi di fronte ai paradossi visti, aveva accennato all'esistenza accanto ai veri e propri insiemi, "*molteplicità consistenti*". Una di queste è proprio la **Teoria NBG**, dovuta a Von Neumann, Bernays e Gödel.

NBG è una teoria del primo ordine con identità che dispone di una sola lettera predicativa binaria infissa: $\in$. Tale sistema assiomatico, se ristretto agli insiemi, risulta equivalente a ZFC di cui rappresenta quindi una generalizzazione in quanto, come accennato sopra, NBG non esclude dalla teoria tutto ciò che non può essere considerato un insieme. I suoi oggetti, indicati tradizionalmente con le variabili $X, Y, Z, ...$, sono "*classi*", ossia collezioni intese come totalità corrispondenti a qualche proprietà (espressa da una fbf); gli insiemi rappresentano, conseguentemente, particolari classi che possono essere pensate come "*un tutto unico*", nel senso di essere elemento di qualche classe e per cui si definisce formalmente un nuovo predicato 1-ario $M$.

**Definizione 1.0.1.** $M(X) \Leftrightarrow \exists Y(X \in Y)$ (La classe $X$ è un insieme).

Le classi che non sono insiemi, ossia quelle per cui vale $\neg M(X)$, vengono invece chiamate "*classi proprie*".
Per chiarezza, useremo le lettere minuscole $x, y, z, ...$ come variabili speciali, ristrette a insiemi. In altre parole $\forall x\ \phi(x)$ e $\exists x\ \phi(x)$ significheranno rispettivamente $\forall X(M(X) \Rightarrow \phi(X))$ e $\exists X(M(X) \wedge \phi(X))$; in particolare $\forall x \in y$ sarà lo stesso di $\forall X(M(X) \wedge X \in Y)$.
Sebbene $\equiv$ dovrebbe essere riservato all'uso formale mentre $=$ all'uso non formale, nelle formule utilizzeremo entrambi i simboli indifferentemente.

## 1.1 Gli assiomi propri di NBG

In questo paragrafo presenteremo gli assiomi propri della teoria degli insiemi di Von Neumann-Bernays-Gödel (NBG), interponendo nella loro enunciazione alcune definizioni supplementari, per mezzo delle quali si introdurranno nuovi simboli, e qualche conseguenza dei diversi assiomi introdotti.
Il primo assioma che trattiamo è esattamente il principio di estensione già esposto precedentemente, formalizzato nel linguaggio ZFC; esso però non si riferisce più solo a insiemi ma a classi.

**Assioma di estensione per NBG [E]**: *Date due classi* $X$ *e* $Y$, $X \equiv Y \Leftrightarrow \forall Z(Z \in X \Leftrightarrow Z \in Y)$.

Si ha quindi che due oggetti della teoria NBG, ossia due classi, sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi.

**Definizione 1.1.1.** $X \subseteq Y \Leftrightarrow \forall Z(Z \in X \Rightarrow Z \in Y)$ (*Inclusione*).

Viene poi dato un assioma che assicura l'esistenza dell'insieme vuoto.

**Assioma dell'insieme vuoto per NBG [V]**: *Esiste un* insieme *che non ha elementi.*

Utilizzando l'assioma appena esposto [V] ed [E], si deduce che esiste un *unico* insieme che non ha elementi. Per quest'ultimo si può quindi introdurre una nuova costante individuale, $\emptyset$:

**Definizione 1.1.2.** $\forall z(z = \emptyset \Leftrightarrow \forall y(y \notin z))$.

Poiché la teoria degli insiemi che fino ad ora abbiamo sviluppato garantisce l'esistenza di un solo insieme e questo è vuoto, ci chiediamo: si può giustificare l'esistenza di insiemi non vuoti? Per rispondere a questo interrogativo abbiamo bisogno di un nuovo principio di costruzione di insiemi:

**Assioma della coppia per NBG [C]**: *Dati due insiemi* $x$ *e* $y$ *esiste un insieme che ha per unici elementi* $x$ *e* $y$.

Questa è proprio la risposta affermativa alla domanda che ci siamo posti. Ovviamente [C], congiuntamente ad [E], permette di ottenere la condizione di *unicità* per l'insieme $z$ che ha $x$ e $y$ come suoi soli elementi, e di introdurre quindi una definizione per designare tale insieme:

**Definizione 1.1.3.** $z = \{x; y\} \Leftrightarrow \forall a(a \in z \Rightarrow a = x \vee a = y)$ (*Coppia non ordinata* di $x$ e $y$).

Dal momento che [C] è ristretto agli insiemi, è bene definire un valore unico per $\{X, Y\}$ nel caso in cui $X$ e $Y$ non siano entrambi insiemi. Diremo che $\{X, Y\} = \emptyset$ ogni volta che $X$ non è un insieme oppure non lo è $Y$, in modo tale che le coppie non ordinate siano sempre insiemi.
Inoltre, dati due insiemi $x$ e $y$, si ha la possibilità di costruire, grazie all'assioma [C], la *coppia ordinata* $(x; y) = \{\{x\}; \{x; y\}\}$, ossia di "registrare" l'ordine, anche se in maniera artificiosa, dei due elementi. Procedendo in generale per

induzione, si possono anche introdurre le $n$-uple ordinate come particolari coppie ordinate: se $n \geq 3$, una $n$-upla ordinata $(x_1; ...; x_n)$ è una particolare coppia $((x_1; ...; x_{n-1}); x_n)$. Per uniformità, si può definire una 1-upla ordinata $(x)$ semplicemente come $x$.
All'interno di NBG è quindi possibile definire coppie, non ordinate e poi ordinate, esattamente come in ZFC, dove per fare ciò viene utilizzato un assioma analogo a quello appena enunciato. Seguono poi gli *Assiomi delle classi per NBG [CL1-CL7]*:

- **CL1-Assioma della relazione** $\in$: *Esiste una classe $X$ che ha come elementi le coppie ordinate $(x; y)$ di insiemi $x, y$ tali che $x \in y$.*
- **CL2-Assioma dell'intersezione**: *Date due classi $X$ e $Y$, esiste una classe $Z$ che ha per elementi gli insiemi che appartengono sia ad $X$ che ad $Y$.*
- **CL3-Assioma del complementare**: *Data una classe $X$, esiste il suo complementare, $\overline{X}$, ossia la classe data da $\forall z(z \in X \Leftrightarrow z \notin \overline{X})$.*
- **CL4-Assioma del dominio**: *Per ogni classe $X$, esiste una classe $Z$ costituita dalle prime componenti $u$ delle coppie $(u; v) \in X$.*
- **CL5-Assioma della retroproiezione**: *Per ogni classe $X$, esiste una classe $Z$ costituita dalle coppie $(u; v)$ con $u \in X$.*
- **CL6-Assioma della permutazione**: *Per ogni classe $X$, esiste una classe $Z$ costituita dalle terne $(u; v; w)$ con $(v; w; u) \in X$.*
- **CL7-Assioma dello scambio**: *Per ogni classe $X$, esiste una classe $Z$ costituita dalle terne $(u; v; w)$ con $(u; w; v) \in X$.*

Grazie agli assiomi CL2-CL4, siamo in grado di introdurre nuovi simboli:

**Definizione 1.1.4.**

- $\forall u(u \in X \cap Y \Leftrightarrow u \in X \wedge u \in Y)$ (*Intersezione* di $X$ e $Y$);
- $\forall u(u \in \overline{X} \Leftrightarrow u \notin X)$ (*Complemento* di $X$);
- $\forall u(u \in D(X) \Leftrightarrow \exists v((u; v) \in X))$ (*Dominio* di $X$);
- $X \cup Y = \overline{(\overline{X} \cap \overline{Y})}$ (*Unione* di $X$ e $Y$);
- $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$ (*Differenza* tra $X$ e $Y$);
- **U**$= \overline{\emptyset}$ (*Classe universale di Cantor*).

Gli assiomi CL1-CL7 dimostrano come le usuali operazioni insiemistiche si possano applicare anche alle classi (in particolare alle classi proprie) e come vi siano molte fbf che, senza incorrerre in contraddizione, definiscono classi corrispondenti a tutti quegli insiemi soddisfacenti la proprietà relativa. Diamo ora una definizione di tali formule:

**Definizione 1.1.5.** Sia $\phi = \phi(X_1; ...; X_n; Y_1; ...; Y_k)$, $n \geq 1$ e $k \geq 0$, una fbf del linguaggio con variabili libere comprese tra quelle scritte. Se in essa compaiono (al più) quantificazioni relative a variabili di insieme, una tale fbf si dice *predicativa.*

**Teorema 1.1.1.** *[**Teorema delle classi**] Se $\phi = \phi(X_1; ...; X_n; Y_1; ...; Y_k)$ è predicativa, esiste una classe $Z$ i cui elementi sono le n-uple $(x_1; ...; x_n)$ tali che vale $\phi(x_1; ...; x_n; Y_1; ...; Y_k)$, cioè $Z$=$\{(x_1; ...; x_n);\ \phi(x_1; ...; x_n; Y_1; ...; Y_k)\}$. Inoltre, per l'assioma di estensionalità, la classe $Z$ è unica.*

Questo teorema asserisce che l'utilizzo del principio della comprensione così ristretto restituisce una classe piuttosto che un insieme, bandendo in tal modo i paradossi della teoria ingenua degli insiemi. Infatti, in NBG, la consueta derivazione dei paradossi porta alla semplice dimostrazione che alcune classi, come quella di Russell, sono collezioni enormememente ampie che, se si ammettessero come insiemi, genererebbero delle contraddizioni. Esse quindi non possono che essere classi proprie.

**Esempio 1.1.1.** Poiché la fbf "$X \notin X$" è predicativa, l'esistenza della classe di Russell, $R = \{x; x \notin x\}$, ci è assicurata dal teorema delle classi. Ma $\forall X(M(X) \Rightarrow (X \in R \Leftrightarrow X \notin X))$. Se assumiamo $M(R)$, otteniamo $R \notin R \Leftrightarrow R \in R$, da cui, per assurdo, $\neg M(R)$.

Il teorema 1.1.1 permette inoltre di ottenere nuove costruzioni insiemistiche, ad esempio quella del prodotto cartesiano: $\phi(X, Y, Z)$ sia $\exists u \exists v(X = (u; v) \wedge u \in Y \wedge v \in Z)$; poiché i quantificatori in $\phi$ riguardano variabili di insiemi, il teorema suddetto, congiuntamente ad [E], garantisce l'esistenza e l'*unicità* della classe corrispondente a tale fbf. Si può così introdurre una nuova lettera funzionale $\times$:

**Definizione 1.1.6.** $\forall x(x \in Y \times Z \Leftrightarrow \exists u \exists v(x = (u; v) \wedge u \in Y \wedge v \in Z)$ (*Prodotto cartesiano* di $Y$ e $Z$).

Servendoci del prodotto cartesiano e delle coppie ordinate, definiamo ora cosa si intende per relazione in NBG:

**Definizione 1.1.7.** $Rel(X) \Leftrightarrow X \subseteq \mathbf{U}^2$ ($X$ è una *relazione*).

Tale definizione è estremamente simile al suo corrispettivo in ZFC, dove l'insieme $x$ è una relazione binaria se ogni suo elemento è una coppia ordinata per la quale la prima coordinata sta in quella relazione con la seconda. Nella teoria NBG, è però permesso parlare di "relazione di inclusione $\subseteq$" in senso proprio, mentre in ZFC l'inclusione $\subseteq$ avrebbe per dominio **U**, cosa impossibile per una relazione intesa in senso insiemistico; così anche $\in$.

Finora, nonostante si possa dimostrare l'esistenza di molte classi con il teorema 1.1.1, conosciamo l'esistenza solo di pochi insiemi, quali $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ ecc. Per garantire l'esistenza di insiemi di complessità più elevata, all'interno di ZFC sono indispensabili appositi assiomi per non rischiare di incorrere nella formazione di collezioni troppo numerose:

- **Assioma dell'unione**: Dato un insieme $a$ qualunque, esiste sempre un insieme $c$ che contiene come elementi tutti gli elementi di elementi $b$ di $a$: $d \in b, b \in a$ implicano $d \in c$.
- **Assioma della potenza**: Dato un insieme $a$ qualunque, esiste sempre un insieme $c$ che contiene come elementi tutti i sottoinsiemi $b$ di $a$: $b \subseteq a$ implica $b \in c$.

Nella teoria NBG, utilizzando il teorema delle classi, sappiamo già che se si ha una classe $X$, possiamo costruire la classe $\cup X$ degli elementi di elementi di $X$ e la classe $\mathcal{P}(X)$ avente come suoi membri le sottoclassi di $X$, in quanto ben definibili rispettivamente con $\phi(X,Y) = \exists v(Y \in v \wedge v \in X)$ e $\phi(X,Y) = Y \subseteq X$. Il teorema delle classi non è però in grado di assicurare l'esistenza di insiemi siffatti; per questo motivo vi è la necessità di introdurre due assiomi che svolgano tale funzione:

**Assioma dell'unione per NBG [U]**: $\cup X$ *è un insieme se lo è* $X$*.*

**Assioma della potenza per NBG [P]**: $\mathcal{P}(X)$ *è un insieme se lo è* $X$*.*

Gli assiomi visti fino ad ora, con la sola eccezione dell'assioma [E], si prefiggono di ricavare nuovi insiemi da altri già esistenti. Nella teoria ZFC, il più importante fra questi principi di costruzione di insiemi è lo **Schema di specificazione** che, come accennato all'inizio, rappresenta una forma limitata del principio di comprensione (visto nella prima formulazione della teoria degli insiemi). Esso rappresenta uno schema di infiniti assiomi in quanto se ne ottiene uno per ogni fbf $\phi$ ed afferma che qualsiasi cosa sensata sia possibile enunciare riguardo agli elementi di un insieme, determina un sottoinsieme di quest'ultimo: il sottoinsieme di quegli elementi per i quali è vero l'enunciato.

**Schema di specificazione**: Dati un insieme $a$ e una proprietà (fbf) $\phi$, la collezione degli $x \in a$ che soddisfano $\phi$ è un insieme.

In NBG tale schema di assiomi viene sostituito dal teorema 1.1.1 che rappresenta un principio di formazione di classi assai esteso, e dall'assioma seguente:

**Assioma di specificazione per NBG [S]**: *L'intersezione tra una classe e un insieme è un insieme.*

Da quest'ultimo segue subito che, dato un insieme $x$, la classe di tutti gli elementi che soddisfano una qualsiasi fbf predicativa $\phi$ è un insieme, in quanto $\phi$ genera una classe corrispondente per il teorema delle classi.
In realtà [S] deriva da un più potente assioma, detto **Assioma di rimpiazzamento**, che, per poter essere enunciato, necessita di alcune definizioni preliminari:

**Definizione 1.1.8.**

- Un(X) $\Leftrightarrow (\forall x \forall y \forall z((x;y) \in X \wedge (x;z) \in X \Rightarrow x \equiv z)$ ($X$ è *univoca*);
- Fnz(X) $\Leftrightarrow X \subseteq \mathbf{U}^2 \wedge Un(X)$ ($X$ è una *funzione*).

**Assioma di rimpiazzamento per NBG [R]**: *Data una classe univoca $X$, se le prime componenti delle sue coppie sono tutte elementi di un insieme $x$, le seconde componenti costituiscono un insieme.*

Dimostriamo quindi che [R] implica [S]: sia $X$ la classe delle coppie $(u;u)$ dove $u \in Y$, ossia $X = \{(y_1;y_2); y_1 = y_2 \wedge y_1 \in Y\}$; evidentemente $X$ è una classe univoca ($Un(X)$) e $\exists v((v;u) \in X \wedge v \in x) \Leftrightarrow u \in x \cap Y$. Di conseguenza si ha che $x \cap Y$ è un insieme per **[R]**.
L'assioma di rimpiazzamento per NBG è molto simile al corrispondente schema in ZFC. Nel passaggio da ZFC a NBG, tale schema diviene una singola fbf poiché gli oggetti di quest'ultima teoria sono classi, rappresentate in ZFC da fbf. Si noti che lo stesso discorso vale per lo schema di specificazione visto precedentemente.

**Schema di rimpiazzamento**: Dati un insieme $a$ e una proprietà (fbf) $\phi = \phi(x_0;x_1)$, tale che $\forall x_0 \in a(\exists! x_1(\phi(x_0;x_1)))$, esiste un insieme $c$ che ha tra gli elementi tutti gli $z$ per cui $\exists x(x \in a \wedge \phi(x;z))$.

Le costruzioni insiemistiche, introdotte fino a questo momento, non sono sufficientemente potenti da garantire l'esistenza di un insieme infinito. Come possiamo formulare nel linguaggio insiemistico un principio che asserisca l'esistenza di quest'ultimo? Premettiamo una definizione:

**Definizione 1.1.9.** $S(A) = \{x : x \in A \vee x = A\}$ è detto il *successore di* $A$.

**Corollario 1.1.2.** $M(A) \Rightarrow A \in S(A)$.

Dalla definizione precedente, segue inoltre:

**Teorema 1.1.3.** *Se* $A$ *è una classe propria, allora* $S(A) = A$.

*Dimostrazione.* Sia $X$ una classe; se $X \in A$, allora $X$ è un insieme e $X \in A$ o $X = A$, da cui $X \in S(A)$.
Viceversa: se $X \in S(A)$, allora $X \in A$ o $X = A$ e $X$ è un insieme; poiché $A$ non è un insieme, si esclude la possibilità $X = A$, quindi $X \in A$. Perciò $\forall X(X \in S(A) \Leftrightarrow X \in A)$, cosicché per l'assioma di estensione $S(A) = A$. $\square$

Usando questa nuova costruzione insiemistica, siamo in grado di costruire infiniti nuovi insiemi a partire da $\emptyset$: $\{\emptyset\} = S(\emptyset)$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = S(\{\emptyset\})$, .. Per poter affermare, applicando il teorema delle classi, che esiste la classe $X$ di tutti gli insiemi siffatti e stabilire che essa è a sua volta un insieme, non è chiaro però quale sia la formula $\phi$ che caratterizza tutti e soli tali oggetti. Introduciamo quindi la seguente definizione:

**Definizione 1.1.10.** Una classe $I$ si dice induttiva se: (i) $\emptyset \in I$; (ii) se $x \in I$, allora anche $S(x) \in I$.

Chiaramente esistono classi induttive, per esempio $\mathbf{U}$. È invece necessario un assioma apposito che garantisca l'esistenza di insiemi induttivi e che si enuncia esattamente come in ZFC:

**Assioma dell'Infinito per NBG [I]**: *Esiste un* insieme *induttivo.*

*Osservazione* 1.1. L'assioma [I] implica l'assioma [V], ma, per verificare ciò, si dovrebbe rimpiazzare "$\emptyset \in I$" con "$\exists y(y \in I) \wedge \forall u(u \notin y))$" nella formulazione di [I], in modo tale da non presupporre [V].

Per mezzo della costruzione del tutto generale di successore $S$, possiamo definire per induzione nel metalinguaggio i **numerali di Von Neumann**, corrispondenti insiemistici dei numeri naturali:

**Definizione 1.1.11.** Il numerale zero, $\overline{0}$ è $\emptyset$; supposto di aver definito il numerale $\overline{n}$, il numerale $\overline{n+1}$ è $S(\overline{n}) = \overline{n} \cup \{\overline{n}\}$.

Chiarito che sono insiemi, si indicano solitamente con $m, n, ...$ senza sopralineatura.

*Osservazione* 1.2. Come vedremo nel prossimo capitolo, i numerali di Von Neumann, essendo numeri ordinali, non possono appartenere a se stessi come elemento; si ha quindi che ogni numerale di Von Neumann è diverso dal suo successore. In generale, non è possibile affermare ciò senza l'introduzione dell'assioma di fondazione [FA] che illustreremo più avanti.

L'assioma dell'infinito [I], assicurando l'esistenza di un insieme induttivo, garantisce quella del corrispettivo insiemistico di $\mathbb{N}$ da cui il nome. Infatti, essendo la classe degli insiemi induttivi non vuota, si ha che esiste un minimo insieme induttivo, indicato con $\omega$, ottenuto dall'intersezione di tutti gli insiemi induttivi. Esso contiene tutti i numerali di Von Neumann.

**Definizione 1.1.12.** $\omega = \cap\{x : 0 \in x, \text{ e } \forall y(y \in x \Rightarrow S(y) \in x)\}$.

Oltre a ciò, si prova che $\omega$ soddisfa gli assiomi di PA e permette quindi la ricostruzione dell'aritmetica elementare in NBG. Questo porta inevitabilmente, per il secondo teorema di incompletezza di Gödel, all'impossibilità di provare la consistenza della teoria NBG.

L'assioma [I] completa l'elenco degli assiomi propri di NBG. Il teorema delle classi che rappresenta il corrispettivo dello Schema di specificazione di ZFC, può essere derivato da un numero finito delle sue stesse istanze: gli *assiomi delle classi CL1-CL7* che costituiscono casi speciali del teorema in questione. È sufficiente quindi assumere la congiunzione di un numero finito di esempi di quest'ultimo. Di conseguenza, a differenza di ZFC, la teoria NBG può essere finitamente assiomatizzata, presentando soltanto un numero finito di assiomi: **[E]**, **[C]**, **[V]**, **[S]**, **[U]**, **[P]**, **[R]**, **[I]** e i sette assiomi delle classi **CL1-CL7**; si noti inoltre che *[V]* e *[S]* non sono strettamente necessari in quanto derivabili dagli altri assiomi.
Dalla trattazione sopra esposta, emerge che la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel è ricavabile da NBG, limitandosi ai soli insiemi: ogni fbf di tale teoria si può considerare una fbf di NBG, con le variabili di ZFC come variabili ristrette agli insiemi.

Per una efficace fondazione della matematica sulla teoria degli insiemi, occorrono però ulteriori assiomi, analoghi a quelli che possono essere incorporati nella teoria assiomatica di Zermelo-Fraenkel: *[AS]*, *[Reg]*.

### 1.1.1 L'assioma di scelta

L'assioma di scelta è uno degli enunciati della teoria degli insiemi più famoso, sia per le polemiche a cui ha dato luogo sia per i risultati assai generali che permette di provare. Il primo a proporre esplicitamente tale assioma fu E. Zermelo che lo usò per dimostrare il *teorema del Buon Ordinamento*, risultato essenziale nella teoria dei numeri ordinali e cardinali. In linguaggio non formale, data una qualunque famiglia (sinonimo di "insieme") di insiemi $\neq \emptyset$, tale assioma garantisce la possibilità di "scegliere" simultaneamente un singolo elemento da ciascun insieme della famiglia, anche senza che si possa delineare un particolare algoritmo di scelta; da ciò trae il nome l'assioma. Se il numero di insiemi di partenza è finito, gli altri assiomi della teoria degli insiemi sono sufficienti a garantire la possibilità di questa scelta, compito dell'assioma è dunque di assicurarla nei casi infiniti.

**Assioma di scelta per NBG [AS]**: *Per ogni insieme $x$ esiste una funzione $f$ tale che, per ogni elemento non vuoto $y$ di $x$, $f(y) \in y$.*

Una funzione che in questo senso "sceglie" un elemento da ciascun elemento non vuoto di un insieme $x$, si chiama *funzione di scelta* per $x$.
L'assioma [**AS**] può assumere un gran numero di forme, dando luogo a molti enunciati equivalenti al precedente; ne esponiamo quindi due altre importanti formulazioni, date per buone alcune definizioni riguardanti le relazioni d'ordine:

1. **Lemma di Zorn**: *Dato un insieme non vuoto parzialmente ordinato, se ogni sua catena è superiormente limitata, esso ha almeno un elemento massimale.*

2. **Teorema di Zermelo o del Buon Ordinamento**: *Ogni insieme può essere bene ordinato.*

Inoltre esiste una forma più potente dell'assioma di scelta, indicata con **UAS**. Quest'ultima afferma che:

"*Esiste una funzione di scelta universale*",

ossia una funzione (intesa non in senso insiemistico in quanto ha per dominio **U**) che assegna, ad ogni insieme non vuoto $u$, un elemento di $u$. Evidentemente si ha che **UAS** implica [**AS**], ma non si sa se avvenga l'inverso (vedi [Mendelson 1972, cap. 4, par. 5]).

Alcuni dei più significativi esempi dell'uso dell'assioma di scelta sono rappresentati dai seguenti risultati:

- (Hamel, 1905) Ogni spazio vettoriale non banale ammette una base.
- Il teorema di Hahn-Banach.

Da un lato *[AS]* consente quindi di giungere a importanti teoremi, dall'altro porta a veri e propri paradossi; ne citiamo due esempi notevoli:

- (Vitali, 1905) Esistono sottoinsiemi $A \subset \mathbb{R}$ non misurabili nel senso di Lebesgue.
- (Banach-Tarski, 1924) Se $S_r \subset \mathbb{R}^3$ è una qualsiasi sfera di raggio $r$ nello spazio euclideo ordinario, è possibile suddividerla in un numero finito di parti riassemblabili (con movimenti rigidi) in due sfere complete con lo stesso raggio $r$.

Nel seguito assumeremo *NBG + AS* in quanto, come vedremo più avanti, tale assioma risulta indispensabile nella teoria dei numeri cardinali e molto utile per i numeri ordinali.

### 1.1.2 L'assioma di regolarità

L'assioma di regolarità rappresenta un altro principio fondamentale per la teoria degli insiemi. Nonostante gran parte della matematica possa essere sviluppata senza di esso, è molto conveniente assumere l'assioma di regolarità in quanto elimina la possibilità dell'esistenza di un insieme che appartiene a sé stesso come elemento. L'enunciato che si dà in NBG, è molto simile a quello del corrispettivo assioma che può essere introdotto nella teoria $ZFC$, esteso semplicemente alle classi:

**Assioma di regolarità per NBG [Reg]**: $\forall X(X \neq \emptyset \Rightarrow \exists y(y \in X \wedge y \cap X = \emptyset))$.

Una classe non vuota $X$ che soddisfa tale condizione, ossia contiene un elemento disgiunto da $X$ stessa, si definisce *classe regolare*.
Per mettere in luce il senso dell'assioma suddetto, diamo il seguente teorema:

**Teorema 1.1.4.** *[Reg]*

a) $X \notin X$;

b) *Non esistono classi* $X$, $Y$ *tali che* $X \in Y \in X$;

c) *Non esistono classi* $X$, $Y$, $Z$ *tali che* $X \in Y \in Z \in X$.

*Dimostrazione.* È immediato che *c)* $\Rightarrow$ *b)* $\Rightarrow$ *a)*. Ci limitiamo perciò a provare solo c). Assumiamo che $X \in Y \in Z \in X$ e consideriamo $D = \{x : x = X \vee x = Y \vee x = Z\}$. Per l'assioma di regolarità (poiché $D \neq \emptyset$), si prenda un $A \in D$ tale che $A \cap D = \emptyset$; allora $A = X \vee A = Y \vee A = Z$. Ma $A = X \Rightarrow Z \in A \cap D$, $A = Y \Rightarrow X \in A \cap D$, $A = Z \Rightarrow Y \in A \cap D$, il che è contraddittorio. $\square$

L'assioma di regolarità implica in definitiva la non esistenza di $\in$- cicli finiti come $A \in A$ o $A \in B \in A$, da cui, come già accennato precedentemente, segue che:

**Corollario 1.1.5.** $\forall x(x \neq S(x))$.

Si ha inoltre che, similmente a ciò che accade in ZFC, tale assioma ha per conseguenza l'assioma di fondazione (per insiemi). Prima di introdurre quest'ultimo, diamo una definizione:

**Definizione 1.1.13.** Un insieme $x$ è ben fondato se, in esso, non esiste una $\in$-successione ... $\in x_3 \in x_2 \in x_1 \in$ ... infinitamente discendente.

**Assioma di fondazione per NBG [FA]**: *Ogni insieme è ben fondato.*

Diamo la seguente dimostrazione all'interno di ZFC ma, come accennato precedentemente, essa vale anche per NBG:

**Teorema 1.1.6.**

1. *L'assioma di regolarità [Reg] implica l'assioma di fondazione [FA];*
2. *Se assumiamo l'assioma di scelta, allora [FA] implica [Reg].*

*Dimostrazione.* 1. Per contrapposizione, supponiamo che [FA] non valga e $x$ non sia ben fondato, a causa della $\in$- successione discendente $\sigma = (x_m)_{m=0}^{+\infty}$. Definito l'insieme $y = \{x_m; m \in \omega\}$, si ha che esso non è regolare poiché, considerato un suo elemento $x_j$ qualunque, $x_{j+1} \in x_j \cap y \neq \emptyset$. Perciò [Reg] non vale.

2. Per contrapposizione, supponiamo che $x = x_0$ sia un insieme non regolare. Scelto $y \in x$, si può quindi scegliere $x_1 \in y \cap x \neq \emptyset$; poiché $x_1 \in x_0$, si può scegliere $x_2 \in x_1 \cap x_0$ e così via. Procedendo in questo modo, otteniamo una successione, definita per induzione, .... $\in x_n \in$ ... $\in x_0$, da cui segue che $x_0$ non è ben fondato, ossia che [FA] non vale.

□

*Osservazione* 1.3. Nel derivare l'assioma [Reg] dall'assioma di fondazione, l'uso di [AS] è necessario per poter definire una funzione di scelta nella famiglia di insiemi non vuoti $\{a \cap b; b \in a\}$, ottenibile per rimpiazzamento da $a$.

Mendelson (1958) ha dimostrato che, se NBG è consistente e aggiungiamo come assioma [FA], allora l'assioma di regolarità non è dimostrabile in questa teoria estesa. Grazie allo stesso Mendelson, si è giunti a un risultato simile per l'assioma di scelta: se NBG è consistente, [AS] non è dimostrabile in NBG anche se si aggiunge, come nuovo assioma, l'assioma di fondazione. Inoltre Gödel (1940) ha provato che:

**Teorema 1.1.7.** *Se NBG è consistente, lo è anche NBG + AS + Reg + GCI.*

*Osservazione* 1.4. **[GCI]** sta per **Ipotesi Generalizzata del Continuo**:

*Non esistono potenze intermedie tra quella di un insieme infinito e quella del suo insieme delle parti.*

Tale ipotesi che vedremo in dettaglio nel capitolo 3, venne avanzata da Georg Cantor nel tentativo di studiare le potenze possibili per gli insiemi infiniti e, in particolare, di verificare se vi fossero potenze intermedie tra quella di $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{R}$.

Da questi risultati segue che, se NBG è consistente, possiamo accettare l'assioma di scelta o rifiutarlo senza che si verifichi inconsistenza. P.J. Cohen (1963) dimostrò poi l'indipendenza di [AS] dagli altri assiomi, precisamente da NBG + Reg. Si ha quindi che l'assioma di scelta risulta essere consistente e indipendente rispetto a NBG. Per tali risultati si veda [Mendelson 1972, cap. 4, par. 5].

# Capitolo 2

# Numeri ordinali

Uno degli scopi per cui i numeri naturali vengono impiegati in matematica, è quello di indicare la *grandezza* di un insieme; tale utilizzo viene esteso al transfinito tramite la teoria dei numeri cardinali. Altro uso fondamentale dei numeri naturali, volto a descrivere la *posizione* di un elemento all'interno di una sequenza, è invece generalizzato dai numeri ordinali che tratteremo in questo capitolo, seguendo [Mendelson 1972, pagg. 209-220] e [Plazzi 2011, cap. 4].

## 2.1 Generalità

I numeri ordinali costituiscono, per definizione, esempi canonici di insiemi ben ordinati. La nozione di ordinale è infatti strettamente connessa al *tipo d'ordine* che si può dare a un insieme, ossia al modo con cui è possibile ordinarne gli elementi. Tale idea, di carattere intuitivo, si traduce in maniera efficace nel concetto del buon ordinamento; per ottenerne quindi una trattazione rigorosa premettiamo alcune nozioni sulle relazioni.

**Definizione 2.1.1.** Una relazione binaria $X$ è una *relazione d'ordine parziale (stretto)* su $Y$ se gode delle seguenti proprietà:

- irriflessività, $\forall y(y \in Y \Rightarrow (y;y) \notin X)$;
- transitività, $\forall u \forall v \forall w(u \in Y \wedge v \in Y \wedge w \in Y \wedge (u;v) \in X \wedge (v;w) \in X \Rightarrow (u;w) \in X)$.

$X$ ordina *totalmente* $Y$ se vale anche la *legge di tricotomia*: $\forall u \forall v(u \in Y \wedge v \in Y \wedge u \neq v \Rightarrow (u;v) \in X \vee (v;u) \in X)$.

D'ora in poi, per indicare una relazione d'ordine parziale (stretto) $X$ su una classe $Y$, utilizzeremo $<$; in altre parole $x < y$ significherà $(x; y) \in X$.

Una classe parzialmente ordinata può non avere un più piccolo elemento e, anche se ne ha uno, è possibile che qualche sua sottoclasse non ne abbia. Una classe parzialmente ordinata si chiama *bene ordinata* (ed il suo ordinamento un *buon ordinamento*) se ciascuna delle sue sottoclassi non vuote ha un più piccolo elemento:

**Definizione 2.1.2.** Una relazione d'ordine $X$ su $Y$ è un *buon ordinamento* per $Y$ se $\forall Z \neq \emptyset, Z \subseteq Y, Z$ ha minimo rispetto a $X$, cioè

$$\exists y(y \in Z \wedge \forall v(v \in Z \wedge v \not\equiv y \Rightarrow y < v)$$

.

Conseguentemente si ha che ogni classe ben ordinata è totalmente ordinata. Infatti se $x, y \in Y$ con $x \neq y$, $\{x, y\}$ è una sottoclasse non vuota di $Y$ e ha dunque un elemento minimo; a seconda che questo primo elemento sia $x$ o $y$, $x < y$ o $y < x$.

**Definizione 2.1.3.** Se $Y$ è ordinato da $X$, un suo *segmento iniziale (aperto)* determinato da $x \in Y$ è *seg(x)=seg(x;Y;X)=* $\{y \in Y; y < x\}$.

Consideriamo ora il caso degli insiemi:

**Definizione 2.1.4.** Se $y_1$ e $y_2$ sono insiemi (ben) ordinati rispettivamente da $<_{y_1}$ e $<_{y_2}$, una *similitudine* è una corrispondenza biunivoca $f$ tra i due insiemi tale che

$$\forall u \in y_1 \forall v \in y_1 (u <_{y_1} v \Leftrightarrow f(u) <_{y_2} f(v)).$$

Se una tale similitudine esiste, si dice che $y_1$ e $y_2$ sono simili:

$$(y_1; <_{y_1}) \approx (y_2; <_{y_2}).$$

Introdotti tali concetti, si ha quindi che se $y$ è un insieme ordinato totalmente da $<_y$, il *tipo d'ordine* di $y$ è rappresentato dalla classe di tutti gli ordini totali simili a $y$.
L'assioma della scelta *[AS]* (come teorema del buon ordinamento di Zermelo) ci assicura che ogni insieme può essere bene ordinato; è quindi utile trovare una classe di strutture bene ordinate tale che ogni buon ordine sia simile a un unico elemento di tale classe. Questo ci porta allo studio dei numeri ordinali che possono perciò essere pensati come un' "unità di misura" per l'ordinalità.
Prima di definirli, è però necessario spiegare cosa si intende per classe transitiva e classe ordinale:

**Definizione 2.1.5.**
- Una classe $X$ è *transitiva* se ogni suo elemento ne è anche un sottoinsieme: $\forall u(u \in X \Rightarrow u \subseteq X)$. Equivalentemente: $\forall v \forall u(v \in u \in X \Rightarrow v \in X)$.
- $X$ è una *classe ordinale* se e solo se la relazione $\in$ bene ordina $X$ e $X$ è una classe transitiva.

**Definizione 2.1.6.** Una classe ordinale che è un insieme viene chiamata *numero ordinale*. $Ord = \{x : x$ è un numero ordinale$\}$ è la classe di tutti i numeri ordinali.

Si noti che $\emptyset$ e i numerali di Von Neumann sono ordinali; in generale (prop. 2.1.6) se $\alpha$ è un ordinale, lo è anche $S(\alpha)$. Nel seguito verranno assunte lettere greche minuscole $\alpha, \beta, \gamma, ...$ come variabili ristrette a *numeri* ordinali e indicheremo la relazione $\in$ di buon ordinamento di un ordinale $\alpha$ anche con $<_\alpha$ (o semplicemente $<$).
Andiamo dunque a osservare le proprietà di tali numeri:

**Teorema 2.1.1.** *Se $\alpha$ è un ordinale, allora $\alpha$ è un insieme di ordinali, ossia $\alpha \subseteq Ord$. Inoltre se $x \in \alpha$, $x = seg(x; \alpha; \in_\alpha)$.*

*Dimostrazione.* Assumiamo che $\alpha$ sia un ordinale e che $x \in \alpha$. Dobbiamo dimostrare che $\in$ bene ordina $x$ e la transitività di $x$. Se $x \in \alpha$ allora $x \subseteq \alpha$, di conseguenza $x$ è bene ordinato da $\in_\alpha$. Inoltre se $z \in y \in x$ si ha che $z, y \in \alpha$ e per transitività di $\in_\alpha$, $z \in x$; si ha quindi che $y \subseteq x$ e che $x$ è un insieme transitivo. Perciò, per l'arbitrarietà di $x$, $\alpha \subseteq Ord$. L'ultima affermazione è immediata. □

**Teorema 2.1.2.** *$\alpha, \beta, \gamma$ siano ordinali.*

1. *$\alpha \notin \alpha$.*
2. *Se $\alpha \in \beta$ e $\beta \in \gamma$, allora $\alpha \in \gamma$.*
3. *(Legge di tricotomia per gli ordinali) Vale una ed una sola delle seguenti alternative: o $\alpha = \beta$ o $\alpha \in \beta$ o $\beta \in \alpha$.*

*Dimostrazione.*
1. Se $\alpha$ è un ordinale, allora $\in_\alpha$ è irriflessiva su $\alpha$; così se fosse $\alpha \in \alpha$, si avrebbe $\alpha \notin \alpha$.
2. Segue immediatamente dalla transitività di $\gamma$.
3. Da 1), 2) segue che le tre alternative si escludono. Per la dimostrazione che ne vale esattamente una ed una sola si veda [Mendelson 1972, prop. 4.7, 4)] che prova tale risultato più in generale.

□

Un utile corollario della legge di tricotomia per gli ordinali che useremo più avanti, è dato dal seguente risultato:

**Corollario 2.1.3.** *$\alpha, \beta$ siano ordinali; $\alpha \subseteq \beta$ se e solo se o $\alpha \in \beta$ o $\alpha = \beta$. $\alpha \subset \beta$ se e solo se $\alpha \in \beta$.*

**Teorema 2.1.4.** *Se $A$ è una classe non vuota di ordinali, essa ha un (unico) $\in$-minimo, cioè esiste $\alpha \in A$ tale che $\forall\beta(\beta \in A \Rightarrow \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta)$. $\alpha$ coincide con $\cap A$.*

*Dimostrazione.* Sia $\alpha_0 \in A$. Se $\alpha_0$ è l'elemento minimo di $A$, abbiamo già concluso. Se non lo è, per la legge di tricotomia, esisteranno dei $\beta \in A \cap \alpha_0$; si prenda il minimo fra questi $\beta$ che è anche il minimo cercato e lo si indichi con $\alpha$. Se $\gamma \in A$, $\alpha \subseteq \gamma \Rightarrow \alpha \in \cap_{\gamma \in A}\gamma = \cap A$; inoltre, poiché $\alpha \in A$, si ha che $\cap A \subseteq \alpha$, da cui l'uguaglianza. □

Quest'ultimo teorema rappresenta, in sostanza, il principio del minimo elemento per il buon ordine degli ordinali che, combinato al teorema 2.1.2, porta al seguente risultato:

**Teorema 2.1.5.** *$< = \{(x; y) : x, y \in Ord, x \in y\}$ è un buon ordine per $Ord$.*

D'ora in poi, per gli ordinali, $\alpha \in \beta$ sarà quindi lo stesso di $\alpha < \beta$. In particolare, dal teorema 2.1.1, otteniamo che ogni ordinale $\alpha$ è uguale all'insieme degli ordinali minori.

**Proposizione 2.1.6.** *$\alpha, \beta$ siano ordinali.*

1. *Se $\alpha \in Ord$, allora $S(\alpha) \in Ord$;*

2. *$\forall\alpha \nexists\beta(\alpha < \beta < S(\alpha))$;*

3. *$\forall\alpha\forall\beta(S(\alpha) = S(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta)$.*

*Dimostrazione.*
1. $\alpha \subset S(\alpha)$ per il teorema 2.1.2, 1); inoltre tutti gli elementi di $S(\alpha)$ sono ordinali. Da questo e dalla sua definizione, segue subito che è transitivo e bene ordinato da $\in_{S(\alpha)}$.

2. Supponiamo che $\exists\beta$ tale che $\alpha < \beta < S(\alpha)$; si ha che $\alpha \in \beta \wedge \beta \in S(\alpha)$. Poiché $\alpha \in \beta$, $\beta \notin \alpha$ e $\beta \neq \alpha$ per la legge di tricotomia, il che è in contraddizione con $\beta \in S(\alpha)$.

3. Supponiamo $S(\alpha) = S(\beta)$. Allora $\beta < S(\alpha)$ e, per il punto 2), $\beta \leq \alpha$. Analogamente $\alpha \leq \beta$, da cui l'uguaglianza.

□

**Proposizione 2.1.7.** *a) Ord è una classe ordinale;*

*b) Ord non è un insieme.*

*Dimostrazione.* a) Dobbiamo dimostrare che $\in$ bene ordina $Ord$ e che $Ord$ è una classe transitiva. La prima parte è data dal teorema 2.1.5. Per la seconda: se $v \in u$ e $u \in Ord$, allora, per il teorema 2.1.1, $v \in Ord$.

b) Se $Ord$ fosse un insieme, per la proposizione 2.1.6, si avrebbe $Ord \in S(Ord) \in Ord$, da cui l'assurdo.

□

*Osservazione* 2.1. Questa proposizione è strettamente connessa ad un paradosso che si presenta nella teoria degli insiemi non assiomatica; quest'ultimo si basa sull'ipotesi che si possa parlare dell' "insieme" di tutti i numeri ordinali:

***Paradosso di Burali-Forti****: non esiste un insieme che abbia per elementi tutti gli ordinali.*

Nella teoria degli insiemi assiomatica NBG, la proposizione 2.1.7 non conduce ad alcuna contraddizione ma stabilisce semplicemente che $Ord$ *è una classe propria*, analogamente a quanto visto per i paradossi di Cantor e di Russell.

**Definizione 2.1.7.** Sia $\alpha$ un ordinale.

- a) $\alpha$ è un ordinale *successore* se $\alpha = S(\beta)$ per un qualche $\beta$.
- b) $\alpha$ è un ordinale *limite* se $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha$ non è un ordinale successore.

**Proposizione 2.1.8.** *Se $A$ è una classe non vuota di ordinali, allora $\cup A$ è un ordinale ed è il minimo ordinale $\geq$ di tutti gli elementi di $A$.*

*Dimostrazione.* Se $\gamma \in \cup A$, $\exists \beta \in A$ tale che $\gamma \in \beta$; di conseguenza, per il corollario 2.1.3, $\gamma \subset \beta \subseteq \cup A$, da cui si ottiene la transitività di $\cup A$. Resta da dimostrare che $\in_{\cup A}$ bene ordina $\cup A$: siano $\alpha \in_{\cup A} \beta \in_{\cup A} \gamma$ elementi di $\cup A$, allora $\alpha \in_{\cup A} \gamma$; le altre proprietà di $\in_{\cup A}$ derivano dal teorema 2.1.2. □

Introdotta tale proposizione, possiamo esaminare in dettaglio il concetto di ordinale successore e ordinale limite. Si ha infatti che:

**Teorema 2.1.9.** *$\alpha \neq \emptyset$ è un ordinale successore se e solo se $\cup\alpha \subset \alpha$. In tal caso, se $\beta = \cup\alpha$, risulta $\alpha = S(\beta)$. In caso contrario, $\alpha$ è un ordinale limite, $\alpha = \cup\alpha$.*

*Dimostrazione.* In ogni caso, per la transitività di $\alpha$, $\cup\alpha \subseteq \alpha$.
Per l'implicazione $\Longrightarrow$: posto $\alpha = S(\beta)$, si ha che $\beta \in \alpha$, ma $\beta \notin \cup S(\beta) = \cup\alpha$, da cui $\cup\alpha \subset \alpha$.
Per l'implicazione $\Longleftarrow$, utilizziamo ripetutamente il corollario 2.1.3: sia $\beta = \cup\alpha \subset \alpha$, allora $\beta \in \alpha$. Quindi $S(\beta) = \beta \cup \{\beta\} \subseteq \alpha$. Se fosse $S(\beta) \subset \alpha$ si avrebbe $\beta \in S(\beta) \in \alpha$, da cui $\beta \in \cup\alpha = \beta$, un assurdo; pertanto $S(\beta) = \alpha$. □

Quest'ultimi risultati ci permettono di riformulare la suddivisione degli ordinali in tre classi:

1. zero: $\alpha = \emptyset = 0$;
2. successore: $\exists\beta(\alpha = S(\beta))$;
3. limite: $\alpha = \cup_{\beta<\alpha}\beta$.

Nel capitolo precedente, abbiamo visto che è possibile costruire tutti i numeri naturali come insiemi, partendo da $\emptyset$ e considerando di volta in volta l'insieme che ha come suoi elementi tutti gli insiemi precedentemente costruiti. Ciascuno di questi "numeri naturali" è dotato di una struttura di insieme ben ordinato in cui la relazione d'ordine che è naturale definire, è quella che stabilisce che un numero è minore di un altro se e solo se è un suo elemento: $m < n \Leftrightarrow m \in n$.
È quindi possibile dare una nuova definizione dei numeri naturali come ordinali:

**Definizione 2.1.8.** $\alpha$ è un *numero naturale* se è $\alpha = \emptyset$ oppure se è un successore e i suoi elementi sono tutti $= \emptyset$ oppure successori. Abbreviamo questa proprietà con $N(\alpha)$.

**Teorema 2.1.10.** $\omega = \{\alpha \in Ord;\ N(\alpha)\}$.

*Dimostrazione.* Sia $A = \{\alpha \in Ord;\ N(\alpha)\}$.
Dimostriamo che $A \subseteq \omega$, verificando che tale insieme di ordinali è incluso in ogni insieme induttivo $I$: $\emptyset \in I$ per la definizione di insieme induttivo; per assurdo, $\alpha$ sia il minimo elemento di $A$ tale che $\alpha \notin I$, ma, poiché $\beta \in \alpha \Rightarrow \beta \in I$, sarebbe $\alpha \in I$, assurdo. Per l'arbitrarietà di $I$, si ha quindi che $A$ è incluso in ogni insieme induttivo $I$ e, per la definizione 1.1.12, che $A \subseteq \omega$.
Viceversa: poiché $N(\emptyset)$ e $N(\alpha) \Rightarrow N(S(\alpha))$, $A$ è induttivo e quindi $\omega \subseteq A$. Pertanto $A = \omega$. □

**Teorema 2.1.11.** *$\omega$ è il più piccolo ordinale limite.*

*Dimostrazione.* Per definizione, $\omega$ risulta dotato di una struttura di insieme ordinato come i suoi predecessori (l'ordinamento è dato, come prima, da $\in$); inoltre $n \in m \in \omega \Rightarrow n \in \omega$. Quindi $\omega \in Ord$.
Per la transitività di $\omega$, $\cup\omega \subseteq \omega$. Dimostriamo che $\omega \subseteq \cup\omega$. Sia $\alpha \in \omega$; per la definizione 1.1.12 di $\omega$, si ha $\beta = S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\} \in \omega$. Di conseguenza $\alpha \in \cup\omega$ e, per l'arbitrarietà di $\alpha$, $\omega \subseteq \cup\omega$. Pertanto $\omega = \cup\omega$ e $\omega$ è limite.
Inoltre se $\alpha$ è un qualunque ordinale limite, allora $\emptyset \in \alpha$ e $\forall x(x \in \alpha \Rightarrow S(x) \in \alpha)$; quindi $\omega \subseteq \alpha$, ossia $\omega \leq \alpha$. □

Gli elementi di $\omega$, ovvero i numeri naturali, sono chiamati *ordinali finiti*. Il tipo di costruzione che genera la sequenza di quest'ultimi può essere portata avanti molto "oltre", definendo in questo modo quelli che Cantor chiamava *ordinali transfiniti*. Supponiamo quindi di aver definito tutti i numeri ordinali finiti nel modo suddetto e facciamo un ulteriore "passo": consideriamo nuovamente l'insieme ordinato di tutti gli insiemi definiti finora. Quello che otteniamo, per quanto detto sopra, è l'insieme $\omega$ di tutti i numeri naturali che rappresenta il più piccolo numero ordinale transfinito. Così facendo, abbiamo ottenuto un primo esempio di numero ordinale che non è un numero naturale. Ciò significa che possiamo "contare" piú in là di prima: mentre i numeri a nostra disposizione erano finora i soli elementi di $\omega$, ora abbiamo anche lo stesso $\omega$ e il suo successivo $S(\omega)$, bene ordinato in modo ovvio. Ne segue che il nostro processo del contare si estende ora fino ad includere $\omega, S(\omega), S(S(\omega))$, e così via all'infinito.

## 2.2 Induzione transfinita

L'induzione transfinita è un procedimento dimostrativo simile all'induzione matematica che si può applicare ai numeri ordinali ed anche a Ord. Inoltre il *teorema di Zermelo* (equivalente ad *[AS]*) rende possibile utilizzare tale tecnica dimostrativa ad ogni insieme, in quanto, come visto in precedenza, permette di assegnare un qualche tipo di buon ordine a ciascun insieme. Più precisamente, supponiamo che $y$ sia un sottoinsieme di un insieme bene ordinato $x$ e che ogniqualvolta un elemento $z \in x$ è tale che $seg(z) \subseteq y$, anche $z \in y$; il *principio di induzione transfinita* afferma che, sotto queste condizioni, $y = x$. Equivalentemente: se la presenza in un insieme $x \subseteq \alpha$ di tutti gli antecedenti stretti di un elemento implica la presenza dell'elemento stesso, l'insieme deve allora coincidere con $\alpha$.
La forma di induzione transfinita più simile all'induzione ordinaria consiste in un procedimento per passi successivi, formulato in termini di ordinali successori e ordinali limiti:

**Teorema 2.2.1.** *(Principio di induzione transfinita)*
*Sia $\beta$ un numero ordinale o $\beta = Ord$. Assumiamo che $A$ sia un sottoinsieme di $\beta$ tale che*

- $0 \in A$.
- *Per ogni $\alpha \in \beta$, se $\alpha \in A$ e $S(\alpha) \in \beta$, allora $S(\alpha) \in A$.*
- *Per ogni $\alpha \in \beta$, se $\alpha$ è un ordinale limite e $\gamma \in A$ per ogni $\gamma < \alpha$, allora $\alpha \in A$.*

*Allora $A = \beta$.*

Il teorema 2.2.1 rappresenta quindi una generalizzazione dell'usuale principio d'induzione per i numeri naturali; quest'ultimo è infatti ottenibile riportando tale teorema al caso particolare in cui $\beta = \omega$.
Illustriamo l'uso dell'induzione transfinita, dimostrando il seguente enunciato:

**Teorema 2.2.2.** *Se due numeri ordinali sono simili, essi sono uguali: se $\alpha \approx \beta$, allora $\alpha = \beta$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che $f$ sia una similitudine da $\alpha$ su $\beta$ e, senza perdere di generalità, che $\alpha \subseteq \beta$; dobbiamo dimostrare che $f(\gamma) = \gamma$, $\forall \gamma \in \alpha$. Consideriamo l'insieme $S = \{\gamma \in \alpha : f(\gamma) = \gamma\}$. Per ogni $\gamma \in \alpha$, il più piccolo elemento di $\alpha$ che non appartiene a $seg(\gamma)$ è lo stesso $\gamma$; di conseguenza, essendo $f$ una similitudine, il più piccolo elemento di $\beta$ che non appartiene a $f(\gamma)$ è $f(\gamma)$. Si ha quindi che se $seg(\gamma) \subset S$, $f(\gamma)$ e $\gamma$ hanno gli stessi segmenti iniziali, da cui $f(\gamma) = \gamma$. Così facendo, abbiamo dimostrato che $\gamma \in S$ ogniqualvolta $seg(\gamma) \subset S$. Pertanto il principio di induzione transfinita afferma che $S = \alpha$, ossia che $\alpha = \beta$. $\square$

Possiamo ora mostrare che ogni insieme bene ordinato assomiglia a un qualche numero ordinale in tutti i suoi aspetti essenziali, ove "somiglianza" si intende nel significato tecnico di similitudine:

**Teorema 2.2.3.** *Ogni insieme bene ordinato $x$ è simile ad uno ed un solo numero ordinale.*

*Traccia di Dimostrazione.* La dimostrazione che segue è una traccia tratta da [Halmos 1980, cap. 21] che si ambienta nell'ambito della teoria ZF.
Per il teorema 2.2.2, l'unicità è ovvia. Supponiamo che $a \in x$ sia tale che il segmento iniziale determinato da ciascun antecedente di $a$ sia simile ad un (necessariamente unico) numero ordinale. Per l'assioma di rimpiazzamento, l'insieme $\{\alpha : \alpha \in Ord \wedge y$ è un antecedente di $a \wedge y \approx \alpha\}$ esiste e, di conseguenza,

$\exists \alpha \in Ord$ tale che $a = seg(a) \approx \alpha$. Ciò implica, per il principio di induzione transfinita, che ciascun segmento iniziale di $x$ è simile a un numero ordinale e, utilizzando *[R]* come prima, che anche $x$ è simile a qualche numero ordinale. □

## 2.3 Aritmetica ordinale

In questo paragrafo introduciamo l'addizione, la moltiplicazione e l'elevazione a potenza (o esponenziazione) ordinali, e dimostriamo alcune loro proprietà fondamentali. Per presentazioni equivalenti si veda [Plazzi 2011, pagg. 72-75].

Cominciamo con il definire l'**addizione**, utilizzando la stretta connessione esistente tra gli ordinali e i buoni ordini. Si ricordi infatti che ogni buon ordine risulta simile a un ordine di tale forma particolare. Supponiamo che $e$ ed $f$ siano due insiemi disgiunti bene ordinati. L'ipotesi che tali insiemi non abbiano elementi in comune non fa perdere di generalità; infatti, in caso contrario, possiamo sempre sostituirli con $\hat{e} = \{(x, 0), x \in e\}$ e $\hat{f} = \{(x, 1), x \in f\}$, chiaramente disgiunti fra loro. L'idea consiste ora nello scrivere un insieme, facendolo poi seguire dall'altro; definiamo quindi l'ordine in $e \cup f$ in modo che gli elementi di $e$, e quelli di $f$, mantengano il loro ordine naturale, e in modo che ciascun elemento di $e$ preceda ciascun elemento di $f$. Così facendo, otteniamo un nuovo insieme bene ordinato, $e \cup f$, che rappresenta proprio la *somma ordinale* di $e$ ed $f$. Si ha infatti che se $\alpha, \beta$ sono numeri ordinali tali che $\alpha \approx e$ e $\beta \approx f$, la *somma* $\alpha + \beta$ è, per definizione, il numero ordinale simile a $e \cup f$.
Si può dare una definizione, in alcuni casi più conveniente, dell'addizione ordinale anche per induzione transfinita:

**Definizione 2.3.1** (*Formula ricorsiva per l'addizione*)**.** $\alpha, \beta$ siano ordinali.

$$\alpha + \beta = \begin{cases} \alpha & \text{se } \beta = 0 \\ S(\alpha + \gamma) & \text{se } \beta \text{ è un ordinale successore, } \beta = S(\gamma) \\ \cup_{\gamma < \beta}(\alpha + \gamma) & \text{se } \beta \text{ è un ordinale limite, } \beta = \cup_{\gamma < \beta}\gamma \end{cases}$$

Alcune proprietà dell'addizione ordinale usate comunemente sono le seguenti:

**Teorema 2.3.1.** *Siano $\alpha, \beta, \gamma$ ordinali.*

*a)* $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$*;*

*b)* $\alpha + 1 = S(\alpha)$*;*

*c) (Legge associativa)* $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Questa addizione generalizza chiaramente la somma tra numeri naturali ma non ne mantiene tutte le consuete proprietà. Infatti l'addizione ordinale non gode della proprietà commutativa.

**Esempio 2.3.1.** $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1 = S(\omega)$.
Questa disuguaglianza dipende dal fatto che, ponendo un nuovo elemento "all'inizio" di $\omega$, il risultato è ovviamente simile a quello da cui siamo partiti, mentre, mettendolo alla fine, si ha un ordinale che, presentando un "ultimo" elemento (essendo un successore), non può essere simile a $\omega$.

Consideriamo ora la **moltiplicazione** di ordinali che, come la somma, è esprimibile in termini dei buoni ordini. Per definire il prodotto di due insiemi bene ordinati, $e$ ed $f$, è innanzitutto necessario considerare la famiglia $\{e \times \{l\}\}_{l \in f}$, costruita "sostituendo una copia" di $e$ ad ogni elemento di $f$. Applicando poi la definizione di somma ordinale alla famiglia suddetta, possiamo dare una definizione naturale del prodotto di $e$ ed $f$ come il risultato della somma di $e$ a se stesso per $f$ volte, ossia come il prodotto cartesiano $e \times f$ con l'ordine lessicografico rovesciato: se $(a, b), (c, d) \in e \times f$, $(a, b) < (c, d) \Leftrightarrow b < d$ oppure $b = d \wedge a < c$. Si ha quindi che se $\alpha, \beta$ sono numeri ordinali tali che $\alpha \approx e$ e $\beta \approx f$, il *prodotto* $\alpha \cdot \beta$ è, per definizione, il numero ordinale simile a $e \times f$.
Come l'addizione, è possibile definire il prodotto ordinale anche per induzione transfinita:

**Definizione 2.3.2** (*Formula ricorsiva per la moltiplicazione*)**.** $\alpha, \beta$ siano ordinali.

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta = 0 \\ (\alpha \cdot \gamma) + \alpha & \text{se } \beta \text{ è un ordinale successore, } \beta = S(\gamma) \\ \cup_{\gamma < \beta} (\alpha \cdot \gamma) & \text{se } \beta \text{ è un ordinale limite, } \beta = \cup_{\gamma < \beta} \gamma \end{cases}$$

Diamo ora alcune proprietà fondamentali della moltiplicazione ordinale:

**Teorema 2.3.2.** *Siano $\alpha, \beta, \gamma$ ordinali.*

*a)* $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$*;*

*b)* $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$*;*

*c) (Legge associativa)* $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$*;*

*d) (Legge distributiva a sinistra)* $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$.

Anche in questo caso, la moltiplicazione ordinale, pur estendendo la moltiplicazione tra numeri naturali, non gode della proprietà commutativa.

**Esempio 2.3.2.** $2 \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot 2$.
Il termine a sinistra è infatti simile a una successione $0, 1, 0, 1, ..$, mentre $\omega \cdot 2$ si può pensare come una successione $0, 1, 2, 3, ..0, 1, 2, 3, ...$

Inoltre si ha l'inapplicabilità della legge distributiva a destra: in generale, $(\alpha + \beta) \cdot \gamma \neq (\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma)$.

**Esempio 2.3.3.** $(1 + 1) \cdot \omega = 2 \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot 2 = \omega + \omega = 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega$.

Trattiamo adesso l'ultima operazione fondamentale su ordinali, l' **esponenziazione**; per questa operazione la definizione ricorsiva è senz'altro la più spontanea e conveniente:

**Definizione 2.3.3** (*Formula ricorsiva per l'elevamento a potenza*)**.** $\alpha, \beta$ siano ordinali.

$$\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & \text{se } \beta = 0 \\ (\alpha^\gamma) \cdot \alpha & \text{se } \beta \text{ è un ordinale successore, } \beta = S(\gamma) \\ \cup_{\gamma<\beta}(\alpha^\gamma) & \text{se } \beta \text{ è un ordinale limite, } \beta = \cup_{\gamma<\beta}\gamma \end{cases}$$

Le caratteristiche più importanti dell'esponenziazione, derivanti da questa definizione, sono espresse nel seguente:

**Teorema 2.3.3.** *Siano $\alpha, \beta, \gamma$ ordinali.*

*a)* $0^0 = 1$, $0^\alpha = 0$ $(\alpha \geq 1)$*;*

*b)* $1^\alpha = 1$*;*

*c)* $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$*;*

*d)* $\alpha^{\beta\cdot\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$*.*

L'elevamento a potenza tra numeri naturali, intesi come ordinali, conserva tutte le usuali proprietà. Come per la somma e la moltiplicazione ordinali, ciò non vale nel caso di ordinali transfiniti.

**Esempio 2.3.4.** $(2 \cdot 2)^\omega = 4^\omega = \omega \neq \omega^2 = \omega \cdot \omega = 2^\omega \cdot 2^\omega$.

# Capitolo 3

# Numeri cardinali

Affrontiamo ora la teoria dei numeri cardinali che, come accennato all'inizio del secondo capitolo, vengono utilizzati al fine di confrontare la "grandezza" di insiemi qualsiasi. La presentazione di tali numeri segue [Halmos 1980, cap. 25] e [Plazzi 2011, cap. 4].

## 3.1 Generalità

I numeri cardinali rappresentano un caso particolare dei numeri ordinali; l'intuizione che sta dietro alla loro definizione formale, consiste nella definizione di "grandezza" di un insieme senza però fare riferimento al tipo di elementi che l'insieme contiene e alla presenza o meno di un ordine fra questi. Così facendo, è possibile paragonare le "grandezze" degli insiemi anche quando i loro elementi non sembrano aver niente in comune fra di loro. Per tali motivi, un concetto fondamentale per poter definire i numeri cardinali è quello di equipotenza:

**Definizione 3.1.1.** Due classi $X$ e $Y$ sono *equipotenti* se e solo se esiste una funzione biunivoca $f$ con dominio $X$ e codominio $Y$: $X \overset{f}{\sim} Y$.

Sulle classi si può inoltre definire un ordine parziale $\leq$ tale che, intuitivamente, $X \leq Y$ se $X$ è equipotente a una sottoclasse di $Y$ oppure a $Y$ stesso:

**Definizione 3.1.2.** $X \leq Y \Leftrightarrow \exists Z(Z \subseteq Y \wedge X \sim Z)$.

**Proposizione 3.1.1.** *$X, Y$ siano classi.*

1. *$X \leq X$;*

2. *$X \leq Y \wedge Y \leq Z \Rightarrow X \leq Z$;*

3. *(Teorema di Schröder-Bernstein) Se $X \leq Y$ e $Y \leq X$, allora $X \sim Y$.*

*Dimostrazione.* 1. Per ogni classe $X$, si ha $X \leq X$ poiché l'identità $id_X$ è ovviamente una corrispondenza biunivoca;

2. Supponiamo che $X$ sia equipotente a $Y_1 \subseteq Y$ mediante $F$ e $Y$ sia equipotente a $Z_1 \subseteq Z$ tramite $G$. Sia $H$ la composizione di $F$ e $G$; allora $X$ è equipotente ad una sottoclasse di $Z$ tramite $H$, cioè $X \leq Z$;

3. Vedi [Mendelson 1972, prop. 4.21, 4)].

□

Si osservi che, di fatto, l'ordine è totale, ossia due insiemi $x$ e $y$ sono sempre comparabili mediante $\leq$. La dimostrazione di tale risultato è una conseguenza del teorema del buon ordinamento e di fatto equivalente ad esso: dando un buon ordinamento a $x$ quanto a $y$, otteniamo infatti due insiemi bene ordinati che, per il teorema 2.1.2, è sempre possibile paragonare mediante similitudini. Poiché una similitudine è una corrispondenza biunivoca, segue che si può sempre determinare se $x$ e $y$ sono equipotenti oppure uno di essi è equipotente ad un sottoinsieme dell'altro.
L'equipotenza fra classi ha chiaramente tutte le proprietà di una relazione di equivalenza. Possiamo quindi eseguire una partizione di $\mathbf{U}$ in classi di equivalenza rispetto a questa relazione. Non è difficile verificare che ogni classe di equivalenza, tranne quella di $\emptyset$, è una classe propria: $\forall X \; \forall \alpha \in Ord$, la relazione $B_\alpha = \{\alpha\} \times X$ è ovviamente equipotente ad $X$; così, per $X \neq \emptyset$, la famiglia $\{B_\alpha\}_{\alpha \in Ord}$, inclusa nella classe di equivalenza di $X$, è in corrispondenza biunivoca con $Ord$, da cui segue, per la proposizione 2.1.7, che $[X]_\sim$ è una classe propria. È quindi utile scegliere un rappresentante da ognuna di queste classi per descrivere la "grandezza" degli insiemi equipotenti ad esso. Poiché sappiamo che ogni insieme è equipotente (mediante una similitudine) a qualche numero ordinale, è abbastanza naturale cercare gli insiemi rappresentativi fra quest'ultimi. I rappresentanti scelti sono appunto i numeri cardinali che, con linguaggio approssimativo, rappresentano pertanto la "proprietà" che un insieme ha in comune con tutti gli insiemi ad esso equipotenti.

**Definizione 3.1.3.** Sia $\alpha$ un ordinale.

- La cardinalità di $\alpha$ è il minimo ordinale $\beta$ tale che $\beta \sim \alpha$: $\beta = |\alpha|$.
- Se $\alpha = |\alpha|$, esso si dice un *numero cardinale.*
- Se $x$ è un qualsiasi insieme, la sua cardinalità, $|x|$, è il più piccolo ordinale $\alpha$ tale che $x \sim \alpha$;

- $Card = \{\lambda : \lambda$ è un numero cardinale$\}$ è la classe (propria, come si vedrà) di tutti i numeri cardinali.

Un numero cardinale è quindi definito come l'*ordinale minimo* rispetto alla relazione di equipotenza; l'esistenza di quest'ultimo ci è assicurata dal teorema 2.1.4 in quanto $\{\beta \mid \beta \sim \alpha\}$ rappresenta una classe non vuota di ordinali. Di conseguenza i numeri cardinali, in quanto ordinali, ci si presentano automaticamente con un ordinamento, coincidente con $\in$, che equivale a quello già definito nella definizione 3.1.2.
Si noti che, per poter attribuire un numero cardinale a un insieme qualsiasi, è necessario *[AS]* poiché devo poter mettere tale insieme in corrispondenza biunivoca con qualche ordinale, cioè devo poterlo bene ordinare. Sebbene ogni insieme $x$ possa essere bene ordinato in molti modi, come del resto già sapevamo, il suo numero cardinale $\kappa$ non dipende dal buon ordinamento su $x$ poiché $\kappa$ è definito a meno di $\sim$ (def. 3.1.3).

*Osservazione* 3.1. Come si può vedere dando una definizione rigorosa di finito (vedi la proposizione 3.2.1), i numeri naturali sono esattamente ciò che viene definito in modo formale come i *numeri ordinali finiti*. Si dimostra che, per ogni ordinale finito, non esistono altri ordinali ad esso equipotenti, ossia che due ordinali finiti hanno differenti cardinalità; segue quindi che gli ordinali finiti coincidono con i numeri cardinali finiti: $n \in \omega \Rightarrow |n| = n$. Inoltre anche $\omega$ è un numero cardinale; in particolare, è il primo *cardinale transfinito*. Si ha così che $\omega$ consiste di tutti e soli i numeri cardinali finiti.

Vediamo ora alcune proprietà dei numeri cardinali.

**Proposizione 3.1.2.** *Se $\alpha \leq \beta$, allora $|\alpha| \leq |\beta|$. Quindi se $|\alpha| \leq \beta \leq \alpha$, allora $|\alpha| = |\beta|$.*

**Proposizione 3.1.3.** *Se $a$ è un insieme di numeri cardinali, allora $\cup a$ è un numero cardinale ed è il minimo numero cardinale $\geq$ di tutti i $\kappa \in a$.*

*Dimostrazione.* Poiché, per la proposizione 2.1.8, $\alpha = \cup a$ è il minimo ordinale $\geq$ di tutti gli elementi di $a$, segue, dal risultato precedente, che $|\alpha| \geq \kappa$ per ogni $\kappa \in a$. Se $\alpha > |\alpha|$, risulta $|\alpha| \in \cup a$, ossia $|\alpha| < \kappa \leq |\alpha|$, per qualche $\kappa \in a$, il che è contraddittorio; quindi $|\alpha| = \alpha$. È facile verificare che $\nexists \gamma < \alpha$ maggiore o uguale ad ogni $\kappa \in a$. □

Abbiamo quindi dimostrato che ogni insieme di numeri cardinali ha un estremo superiore, cioè un numero cardinale strettamente più grande di ciascuno dei suoi elementi. Si ha inoltre che non esiste nessun numero cardinale più grande di tutti; tale risultato rappresenta un caso particolare della seguente:

**Proposizione 3.1.4.** *Per ogni numero ordinale $\alpha$, esiste un numero cardinale $\lambda$ tale che $\alpha < \lambda$.*

*Traccia di Dimostrazione.* Sia $\alpha$ un ordinale $\geq \omega$, in caso contrario il risultato è ovvio. Si considerino i buoni ordinamenti $X$ di $\alpha$ ristretti ad $\alpha$; poiché essi formano un insieme, è facile provare che, per rimpiazzamento, b=$\{\beta : (\beta; \in) \approx (\alpha; X)$ ove $X$ è un buon ordinamento di $\alpha$ ristretto ad $\alpha\}$ è un insieme di ordinali. $\cup b$ è il numero cardinale cercato, in quanto è il minimo numero cardinale $\geq$ di tutti gli elementi di $b$, da cui $\cup b \geq S(\alpha) > \alpha$. □

Come per i numeri ordinali, anche per i numeri cardinali è possibile definire il concetto di numero cardinale successore e di numero cardinale limite:

**Definizione 3.1.4.** Se $\lambda \in Card$, il minimo numero cardinale strettamente maggiore di esso è il suo successore cardinale: $\lambda^+$. $\kappa$ è un numero cardinale *successore* se $\kappa = \lambda^+$ per un qualche $\lambda$.

**Proposizione 3.1.5.** $\forall\lambda(\lambda \in Ord \setminus \omega \Rightarrow \lambda \sim S(\lambda))$.

*Dimostrazione.* Sia $\lambda \in Ord \setminus \omega$. Definiamo una funzione $f$ con dominio $S(\lambda)$ nel modo seguente: $f(\kappa) = S(\kappa)$ se $\kappa \in \omega$; $f(\kappa) = \kappa$ se $\kappa \notin \omega$ e $\kappa \neq \lambda$; $f(\lambda) = 0$. Allora $\lambda \overset{f}{\sim} S(\lambda)$. □

Da tale proposizione, segue chiaramente che il successore ordinale di un numero cardinale è diverso dal suo successore cardinale. Considerato $\lambda \in Card$, $\{\kappa : \kappa > \lambda\}$ costituisce una classe propria non vuota che, di conseguenza, possiede un minimo; quest'ultimo non coincide però con $S(\lambda)$, a meno che si tratti di numeri cardinali finiti. Infatti, per la proposizione precedente, se $\lambda$ è transfinito, $S(\lambda) \sim \lambda$, da cui $S(\lambda) < \lambda^+$.

**Definizione 3.1.5.** $\kappa$ è un numero cardinale *limite* se $\kappa > \omega$ e non è un numero cardinale successore.

Come si intuisce da tale definizione, anche la nozione di numero cardinale limite è diversa da quella di ordinale limite: $\omega$ è infatti un ordinale limite che non è un numero cardinale limite.
Uno dei simboli usati sovente per indicare i numeri cardinali è la prima lettera dell'alfabeto ebraico, $\aleph$ (alef); in particolare, il più piccolo numero cardinale transfinito, $\omega$, si indica anche con $\aleph_0$.

**Definizione 3.1.6.** La successione $\aleph$ è definita per ricorsione transfinita, facendo uso degli ordinali:

$$\begin{aligned} \aleph_0 &= \omega \\ \aleph_{\alpha+1} &= \aleph_\alpha^+ \\ \aleph_\alpha &= \cup_{\beta<\alpha}\aleph_\beta \text{ se } \alpha \text{ è un ordinale limite} \end{aligned}$$

Enunciamo alcune facili conseguenze di questa definizione:

**Proposizione 3.1.6.** *a)* $\forall\alpha\forall\beta(\alpha < \beta \Rightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta)$*;*

*b) Se* $A$ *è un insieme di ordinali,* $\cup_{\alpha\in A}(\aleph_\alpha) = \aleph_\beta$*, con* $\beta = \cup_{\alpha\in A}\alpha$*;*

*c) Ogni numero cardinale transfinito è un (ben preciso) alef;*

*d)* $\aleph_\alpha$ *è un numero cardinale successore se e solo se* $\alpha$ *è un ordinale successore, ed è un numero cardinale limite se e solo se* $\alpha$ *è un ordinale limite;*

*e) I numeri cardinali transfiniti costituiscono una classe propria* ***ALEF****; per conseguenza, anche* ***CARD*** *è una classe propria.*

*Dimostrazione.* Per a), b), d) vedi [Plazzi 2011, prop. 4.3.5.];

c) Sia $\kappa$ un numero cardinale transfinito strettamente maggiore di $\omega$. Essendo $A = \{\alpha : \aleph_\alpha < \kappa\}$ un insieme non vuoto di ordinali ($0 \in A$), possiede un estremo superiore: $\beta = \cup_{\alpha\in A}\alpha$, da cui $\aleph_\beta = \cup_{\alpha\in A}(\aleph_\alpha) \leq \kappa$. Se $\aleph_\beta < \kappa$, $\beta \in A$ e $\aleph_{\beta+1} = \aleph_\beta^+ \not< \kappa$; per la legge di tricotomia, si ha quindi $\kappa = \aleph_{\beta+1}$. Altrimenti, $\aleph_\beta = \kappa$.

e) **ALEF** è una classe propria poiché in corrispondenza biunivoca con **ORD**.

□

## 3.2 Insiemi finiti e infiniti

Nella teoria degli insiemi vi sono, principalmente, due tipi di caratterizzazione degli insiemi finiti: la prima si ottiene dalla definizione, data da Dedekind, degli insiemi infiniti, mentre la seconda caratterizzazione consiste in una definizione più intuitiva di insieme finito.

**Definizione 3.2.1.**

- Un insieme $x$ si dice *non- infinito (Dedekind-finito)* se e solo se non è equipotente a nessun sottoinsieme proprio di sé stesso.

- Un insieme $x$ è *finito* se e solo se è equipotente a un ordinale finito, ossia $\exists\alpha(\alpha \in \omega \wedge x \sim \alpha)$.

Esaminiamo alcuni risultati derivabili da tali definizioni:

**Proposizione 3.2.1.** *Siano* $n, m \in \omega$.

1. $\forall n \forall m(n \subset m \Rightarrow n \not\sim m)$. *Quindi nessun insieme finito è equipotente a un sottoinsieme proprio di sè stesso.*

2. $\forall n \forall m(n \neq m \Rightarrow n \not\sim m)$. *Quindi un insieme finito è equipotente a esattamente un ordinale finito e* $|n| = n$.

*Dimostrazione.* 1. Vedi [Plazzi 2011, teo. 3.2.10.].

2. Per la legge di tricotomia, $n \in m$ o $m \in n$; di conseguenza, per il corollario 2.1.3, si ha che $n \subset m$ o viceversa. 2) segue subito da 1).

□

Dalla proposizione 3.2.1, risulta facilmente che:

**Teorema 3.2.2.** *Se un insieme* $x$ *è finito, allora* $x$ *è non-infinito.*

L'inverso di tale risultato non si può verificare senza ricorrere all'uso di un ulteriore assioma, l'assioma di scelta. Pertanto le due definizioni di finito (e quindi le due di infinito) sono equivalenti solo se vale [**AS**]:

**Proposizione 3.2.3.** 1. *Ogni insieme non-finito ha un sottoinsieme numerabile, ossia equipotente a* $\omega$.

2. *Ogni insieme non-finito è infinito, ossia equipotente a un sottoinsieme proprio di sé stesso.*

*Dimostrazione.* 1. Sia $x$ non-finito; essendo non vuoto (cioè non equipotente a 0), esso ha un elemento: $x_0$. Poiché $x \not\sim 1$, $x \setminus \{x_0\}$ non è vuoto e dunque ha anch'esso un elemento: $x_1$. Esistendo, per [AS], la funzione di scelta $f$ per $\mathcal{P}(x \setminus \{0\})$ con $x_{n+1} = f(x \setminus \{x_0, ..., x_n\})$, è possibile ottenere una successione $\{x_n\}$ di elementi distinti di $x$, che quindi contiene un sottoinsieme numerabile.

2. Se $x$ è non-finito e $y \subseteq x$ numerabile con $y \overset{f}{\sim} \omega$, si ha che una corrispondenza biunivoca tra $y$ e $y \setminus \{f^{-1}(0)\}$ è data da $g = f^{-1} \circ S \circ f$. Prolungando eventualmente $g$ su $x \setminus y$ con l'identità, si ottiene una corrispondenza biunivoca tra $x$ e una sua parte propria.

□

Assumendo l'assioma di scelta, possiamo quindi riformulare l'importante risultato come

*Un insieme infinito ha sempre sottoinsiemi numerabili.*

Di conseguenza, sempre usando [AS], possiamo affermare che gli insiemi numerabili sono i più piccoli insiemi infiniti e che finito e non-infinito coincidono.

## 3.3 Aritmetica cardinale

Quest'ultimo paragrafo è dedicato a una breve esposizione dell'aritmetica cardinale che segue [Plazzi 2011, pagg. 79-83]. Come per gli ordinali, si possono infatti definire delle operazioni sui numeri cardinali: l'addizione, la moltiplicazione e l'elevazione a potenza (o esponenziazione); queste sono però completamente diverse dalle analoghe operazioni ordinali e solo l'ultima è veramente significativa. In questa sezione assumeremo [AS] che risulta necessario per poter definire tali operazioni cardinali.

Iniziamo con l'esaminare la **somma**:

**Definizione 3.3.1.** Se $\kappa$ e $\lambda$ sono numeri cardinali,

$$\kappa \oplus \lambda = |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|.$$

Assumendo [AS] e usando il legame, illustrato precedentemente, fra i numeri cardinali e la cardinalità di un insieme qualsiasi, si può ottenere una definizione dell'addizione cardinale per insiemi qualunque. Siano $e$ ed $f$ due insiemi disgiunti, ipotesi non restrittiva; se $\kappa, \lambda \in Card$ sono tali che $|e| = \kappa$ e $|f| = \lambda$, la somma $\kappa \oplus \lambda$ è la cardinalità di $e \cup f$. Quindi $|e| \oplus |f| = |e \times \{0\} \cup f \times \{1\}|$. Tale operazione è definita indipendentemente dalla scelta arbitraria di $e$ ed $f$: se $a$ e $b$ sono insiemi disgiunti con $|a| = \kappa$ e $|b| = \lambda$, si ha infatti che $a \sim e$ e $b \sim f$, da cui $a \cup b \sim e \cup f$.

Vediamo ora la **moltiplicazione**:

**Definizione 3.3.2.** Se $\kappa$ e $\lambda$ sono numeri cardinali,

$$\kappa \otimes \lambda = |\kappa \times \lambda|.$$

Anche la definizione di prodotto cardinale si può applicare al caso di insiemi qualunque, utilizzando l'assioma delle scelta. Siano $e$ ed $f$ due insiemi; se $\kappa$ e $\lambda$ sono numeri cardinali tali che $|e| = \kappa$ e $|f| = \lambda$, il prodotto $\kappa \otimes \lambda$ è il numero cardinale $|e \times f|$. Ovviamente, sostituendo ad $e$ ed $f$ insiemi equipotenti, si ha ancora lo stesso numero cardinale.

Sia l'addizione che la moltiplicazione cardinale, se ristrette agli insiemi finiti ($\kappa$ e $\lambda \in \omega$), danno luogo all'aritmetica ordinaria. La novità sta nella formazione di somme e prodotti ove almeno un termine è infinito.

**Teorema 3.3.1.** *Se $\kappa$ e $\lambda$ sono due numeri cardinali di cui almeno uno è infinito, risulta:*

- $\kappa \oplus \lambda = max\{\kappa, \lambda\}$;
- $\kappa \otimes \lambda = max\{\kappa, \lambda\}$ *purché* $\kappa, \lambda \neq 0$.

Da questo teorema, segue chiaramente che l'addizione e il prodotto cardinali soddisfano le consuete leggi:

**Teorema 3.3.2.** *Siano $\kappa, \lambda, \mu$ numeri cardinali.*

*a) (Leggi commutative)* $\kappa \otimes \lambda = \lambda \otimes \kappa$, $\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa$;

*b) (Leggi associative)* $\kappa \otimes (\lambda \otimes \mu) = (\kappa \otimes \lambda) \otimes \mu$, $\kappa \oplus (\lambda \oplus \mu) = (\kappa \oplus \lambda) \oplus \mu$;

*c) (Legge distributiva)* $\kappa \otimes (\lambda \oplus \mu) = (\kappa \otimes \lambda) \oplus (\kappa \oplus \mu)$.

**Proposizione 3.3.3.** *Se $\kappa$ è infinito, l'unione di una famiglia di cardinalità $\leq \kappa$ di insiemi, tutti di cardinalità $\leq \kappa$, ha ancora cardinalità $\leq \kappa$. Equivalentemente: se $\kappa$ è infinito e $a = \{x_\alpha; \alpha \in \kappa\}$ con $|x_\alpha| \leq \kappa$ per ogni $\alpha \in \kappa$, allora $|\cup a| = |\cup_{\alpha<\kappa} x_\alpha| \leq \kappa$.*

Tale proposizione, derivante dalle definizioni precedenti, è estremamente interessante in quanto estende dal caso $\kappa = \omega$ a tutti i numeri cardinali transfiniti il teorema dell'unione numerabile. Proviamo solo quest'ultimo risultato:

**Proposizione 3.3.4.** *Se $\{x_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di insiemi finiti o numerabili, indicizzata dall'insieme finito o numerabile $I$, $\cup_{i\in I} x_i$ è anch'essa finita o numerabile.*

*Dimostrazione.* Si può supporre, senza perdere di generalità, che tutti gli $x_i$ siano diversi dal vuoto e a due a due disgiunti, sostituendo a $x_1$ $x_1 \setminus x_0, ....$, a $x_n$ $x_n \setminus (\cup_{j=0}^{n-1} x_j)$. Data l'unione $\cup_{m=0}^{+\infty} x_m$, si scelga per ogni $m$ una biiezione $f_m : x_m \to k_m \times \{m\}$, $\kappa_m \in \omega$ (o $f_m : x_m \to \omega \times \{m\}$). Poiché $\cup_{m=0}^{+\infty} f_m : \cup_{m=0}^{+\infty} x_m \to \omega \times \omega$ è un'applicazione 1-1 e $|\omega \times \omega| = \omega$ (per il teorema 3.3.1), ne consegue che l'unione è al più numerabile. $\square$

*Osservazione* 3.2. Se la famiglia di insiemi $\{x_i\}_{i\in I}$ è infinita, per poter provare in generale la cardinalità di $\cup_{i\in I}x_i$, risulta indispensabile [AS]. Quest'ultimo serve infatti per effettuare una scelta simultanea delle biiezioni dei vari insiemi con qualche $k \in \omega$ o con $\omega$ stesso.

Terminiamo la nostra esposizione dell'aritmetica cardinale esaminando la più significativa operazione su numeri cardinali, l'**esponenziazione**.
Ne facciamo precedere la definizione da una nozione necessaria per la sua trattazione:

**Definizione 3.3.3.** $F(Y,X) = \{f; f : Y \to X\}$.

$F(Y,X)$ è la classe di tutti gli insiemi che sono funzioni da $Y$ in $X$. Da tale definizione, segue immediatamente che $\forall x\forall y(M(F(y,x))$ e, nel caso in cui $Y$ non sia un insieme, $F(Y,X) = \emptyset$.

**Definizione 3.3.4.** Se $\kappa$ e $\lambda$ sono numeri cardinali,

$$\kappa^\lambda = |F(\lambda,\kappa)|.$$

Ovviamente, se $e$ ed $f$ sono due insiemi con $|e| = \kappa$ e $|f| = \lambda$, valendo [AS], si ha $|e|^{|f|} = |F(f,e)|$.
Valgono le consuete proprietà degli esponenti:

**Teorema 3.3.5.** *Siano $k, \lambda, \mu$ ordinali.*

*a)* $0^\kappa = 0$ *(se $\kappa \neq 0$);*

*b)* $\forall\kappa, 1^\kappa = 1$*;*

*c)* $\kappa^0 = 1$*;*

*d)* $\kappa^1 = \kappa$*;*

*e)* $\kappa^{\lambda\oplus\mu} = \kappa^\lambda \otimes \kappa^\mu$*;*

*f)* $(\kappa\otimes\lambda)^\mu = \kappa^\mu \otimes \lambda^\mu$*;*

*g)* $\kappa^{\lambda\otimes\mu} = (\kappa^\lambda)^\mu$*.*

Come la somma e la moltiplicazione cardinale, l'elevamento a potenza transfinito è molto diverso da quello ordinario e anche da quello ordinale, anche se nel caso dei numeri naturali non vi è alcuna differenza.

**Esempio 3.3.1.** $2^\omega$, in senso ordinale, è $\cup_{\alpha\in\omega}(2^\alpha) = \omega$; invece, in senso cardinale, $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ che è un numero cardinale ben diverso.

**Proposizione 3.3.6.** *Per ogni insieme $x$, $\mathcal{P}(x) \sim 2^x = \{0,1\}^x$.*

*Dimostrazione.* Per ogni $u \subseteq x$, la funzione caratteristica $\chi_u$ è la funzione con dominio $x$ tale che $\chi_u(y) = 0$ se $y \in x$ e $\chi_u(y) = 1$ se $y \notin x$. Sia $F$ la funzione su $\mathcal{P}(x)$ che associa ad ogni $u$ la sua funzione caratteristica $\chi_u$. Allora $\mathcal{P}(x) \overset{F}{\sim} 2^x$. □

**Teorema 3.3.7.** *[**di Cantor, sull'insieme potenza**] $\forall x(|x| < |\mathcal{P}(x)|)$. Quindi: $\forall x(|x| < |2^x|)$.*

*Dimostrazione.* Sia $F$ una funzione da $x$ in $\mathcal{P}(x)$ tale che $F(u) = \{u\}$ per ogni $u \in x$; ne consegue che $F(x)$ è iniettiva e $|x| \leq |\mathcal{P}(x)|$.
Supponiamo, per assurdo, che $x \overset{G}{\sim} \mathcal{P}(x)$ e consideriamo $y = \{u \in x : u \notin G(u)\}$. Poiché $y$ è un sottoinsieme di $x$, si ha $y \in \mathcal{P}(x)$. Sia $z$ l'unico elemento di $x$ tale che $G(z) = y$. Dalla definizione di $y$, abbiamo che $z \in y \Leftrightarrow z \notin G(z) = y$, il che è contraddittorio. □

Da quest'ultimo teorema segue chiaramente il paradosso di Cantor, enunciato nel primo capitolo.
Inoltre se ricordiamo la nostra definizione di $\kappa^+$ come il più piccolo numero cardinale maggiore di $\kappa$, il teorema 3.3.7 suggerisce immediatamente il problema se $\kappa^+ = 2^\kappa$ o no. La risposta è subito data per $\kappa = 0$ e $\kappa = 1$: $0^+ = 2^0 = 1$, $1^+ = 2^1 = 2$; per $\kappa > 1$, la situazione è più complessa. Interessante è il caso $\kappa = \aleph_0$, poiché la relazione fra $2^{\aleph_0}$ e $\aleph_1$, il più piccolo numero cardinale maggiore di $\aleph_0$, è oggetto di un antico problema sui numeri cardinali: essendo $2^{\aleph_0}$ un numero cardinale transfinito, a quale alef corrisponde? La famosa *ipotesi del continuo*, formulata da Cantor, afferma che non vi siano numeri cardinali intermedi tra $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$, ossia che non esista nessuna cardinalità intermedia tra $|\mathbb{N}|$ e $|\mathbb{R}|$; e quindi

**Ipotesi del continuo [CI]**: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

L'ipotesi è indimostrabile a partire da ZFC, NBG e conserva perciò questo nome; vi è inoltre una sua generalizzazione, denominata *ipotesi generalizzata del continuo*, data anch'essa da Cantor:

**Ipotesi generalizzata del continuo [GCI]**: $\forall \alpha$, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Come avevamo già anticipato nel capitolo 1, gli studi di Gödel e Cohen hanno permesso di stabilire che $[GCI]$ è consistente con gli assiomi della teoria

$NBG+AS+Reg$ e che $[CI]$ è indipendente da tali assiomi. Questo è un esempio di un'importante affermazione a cui è impossibile rispondere con un "sì" o un "no" a partire dal gruppo di assiomi accettati per costruire la nostra matematica e prova che, in definitiva, la nostra conoscenza della nozione di insieme è ancora abbastanza vaga.

# Bibliografia

[Halmos 1980] Paul R. Halmos, *Teoria elementare degli insiemi*, “Collana di matematica“ 7, Feltrinelli, Milano, 1970.

[Mendelson 1972] Elliott Mendelson, *Introduzione alla logica matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, 1972.

[Monk 1972] J. Donald Monk, *Introduzione alla teoria degli insiemi*, Boringhieri, Torino, 1972.

[Plazzi 2011] Piero Plazzi, *Teorie degli insiemi - Numeri ordinali e cardinali*, elaborato dattiloscritto, 2011.