

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA CIVILE

DISTART

Dipartimento di Ingegneria delle Strutture, dei Trasporti,
delle Acque, del Rilevamento, del Territorio

TESI DI LAUREA IN TEORIA DELLE STRUTTURE LS

**ANALISI NUMERICA DI STRUTTURE
AD ARCO SOLLECITATE NEL PIANO
DA FORZANTI DINAMICHE**

Tesi di Laurea di:

Luca Fini

Relatore:

Chiar.mo Prof. **Erasmus Viola**

Correlatore:

Dott. Ing. **Francesco Tornabene**

Anno Accademico 2006-2007

Indice

Prefazione.....	VII
1 METODO GENERALIZZATO DI QUADRATURA DIFFERENZIALE.....	1
1.1 Introduzione	1
1.1.1 Metodi numerici e quadratura differenziale	1
1.1.2 Genesi del G.D.Q. Method	4
1.1.3 Origine del Metodo di Quadratura Differenziale.....	9
1.1.3.1 <i>Quadratura Integrale</i>	9
1.1.3.2 <i>Quadratura Differenziale</i>	10
1.1.4 Analisi di uno spazio vettoriale polinomiale	12
1.1.4.1 <i>Definizione di uno spazio vettoriale lineare</i>	12
1.1.4.2 <i>Proprietà di uno spazio vettoriale lineare</i>	15
1.1.5 Approssimazione funzionale	18
1.1.5.1 <i>Approssimazione polinomiale</i>	18
1.2 Formulazione matematica del G.D.Q. Method	26
1.2.1 Introduzione.....	26
1.2.2 Calcolo dei coefficienti per le derivate del primo ordine	28
1.2.2.1 <i>Approcci di Bellman</i>	28
1.2.2.1.1 <i>Primo approccio di Bellman</i>	28
1.2.2.1.2 <i>Secondo approccio di Bellman</i>	30
1.2.2.2 <i>Approccio di Quan e Chang</i>	31
1.2.2.3 <i>Approccio generale di Shu</i>	32
1.2.3 Calcolo dei coefficienti per le derivate di ordine superiore al primo.....	40
1.2.3.1 <i>Coefficienti di ponderazione per le derivate di secondo ordine</i>	40
1.2.3.1.1 <i>Approccio di Quan e Chang</i>	41
1.2.3.1.2 <i>Approccio generale di Shu</i>	41
1.2.3.2 <i>Coefficienti per le derivate di ordine superiore:</i> <i>formule ricorsive di Shu</i>	43
1.2.3.3 <i>Approccio mediante la moltiplicazione matriciale</i>	48

1.2.4	Estensione al caso multidimensionale	51
1.2.5	Tipologie di discretizzazione	60
1.2.5.1	<i>Tecnica dei “δ-Sampling Points”</i>	65
1.2.5.2	<i>Esempio di discretizzazione di un dominio lineare</i>	68
2	FORMULAZIONE DINAMICA DI ARCHI PIANI	73
2.1	Introduzione	73
2.1.1	Definizioni	73
2.1.2	Teoria di Timoshenko: ipotesi fondamentali	77
2.2	Analisi della deformazione	78
2.2.1	Modello cinematica	78
2.2.2	Equazioni di congruenza	79
2.3	Legame costitutivo e caratteristiche di sollecitazione interna	83
2.4	Equazioni indefinite di equilibrio	85
2.4.1	Vettore delle forze esterne	85
2.4.2	Determinazione delle equazioni indefinite di equilibrio mediante il principio di Hamilton	86
2.4.2.1	<i>Calcolo dei termini energetici e di lavoro</i>	88
2.4.2.2	<i>Variazioni dei termini energetici e di lavoro</i>	89
2.4.3	Determinazione delle equazioni indefinite di equilibrio mediante il metodo diretto	96
2.4.3.1	Applicazione del principio dei lavori virtuali	100
2.5	Equazioni fondamentali e schema delle teorie fisiche	105
2.5.1	Introduzione	105
2.5.2	Equazioni fondamentali	106
2.5.3	Schema delle teorie fisiche	108
2.5.3.1	<i>Notazioni matriciali</i>	108
2.5.3.2	<i>Schema delle teorie fisiche</i>	111
2.6	Principali tipologie di arco	112
2.6.1	Arco parabolico	113
2.6.2	Arco cicloidale	116
2.6.3	Arco ellittico e circolare	117
2.6.4	Arco a forma di catenaria	122

3 SOLUZIONE NUMERICA MEDIANTE G.D.Q. METHOD	
E DIFFERENZE FINITE	125
3.1 Introduzione	125
3.2 Definizione e risoluzione del sistema di equazioni	127
3.2.1 Equazioni di campo e condizioni al contorno.....	127
3.2.2 Determinazione delle condizioni iniziali.....	129
3.2.3 Soluzione del problema in regime dinamico mediante l' algoritmo di Fung	132
3.2.3.1 <i>Algoritmo di Fung</i>	133
3.2.4 Calcolo della soluzione nei punti bounded del dominio spaziale.....	135
3.3 Risoluzione del problema mediante il metodo di Newmark.....	136
3.3.1 Metodo di Newmark.....	136
3.3.2 Applicazione dell' algoritmo di Newmark.....	140
3.4 Algoritmo di calcolo.....	142
3.4.1 Definizione del modello geometrico-meccanico	142
3.4.1.1 <i>Definizione della geometria dell' asse di riferimento</i>	142
3.4.1.2 <i>Caratteristiche della sezione trasversale</i>	146
3.4.1.3 <i>Parametri dei materiali</i>	150
3.4.2 Definizione delle condizioni al contorno	151
3.4.2.1 <i>Condizioni di vincolo</i>	151
3.4.2.2 <i>Condizioni di continuità</i>	153
3.4.3 Carichi agenti sulla struttura.....	160
3.4.3.1 <i>Azioni distribuite</i>	160
3.4.3.2 <i>Forze e momenti concentrati</i>	167
3.4.3.3 <i>Cedimenti vincolari anelastici</i>	169
3.4.4 Discretizzazione del modello.....	172
3.4.5 Analisi statica e determinazione delle condizioni iniziali di spostamento.....	175
3.4.6 Analisi dinamica	176
3.4.6.1 <i>Introduzione dei dati</i>	176
3.4.6.2 <i>Risoluzione del sistema</i>	183
4 APPLICAZIONI DELL' ALGORITMO DI CALCOLO.....	185
4.1 Introduzione	185

4.2 Parametri geometrici e dei materiali.....	186
4.2.1 Parametri geometrici	186
4.2.2 Parametri dei materiali	188
4.3 Risultati delle applicazioni.....	189
4.3.1 Arco parabolico.....	189
4.3.2 Arco ellittico	195
4.3.2.1 <i>Continuità materiale</i>	197
4.3.2.2 <i>Cerniera</i>	201
4.3.2.3 <i>Fessura</i>	205
4.3.3 Arco circolare	209
4.3.3.1 <i>Doppio incastro</i>	211
4.3.3.2 <i>Estremità sinistra incastrata ed estremità destra</i> <i>vincolata con un incastro scorrevole orizzontale</i>	215
4.3.4 Arco cicloidale.....	219
4.3.4.1 <i>Doppio incastro</i>	221
4.3.4.2 <i>Estremità sinistra incastrata ed estremità destra</i> <i>vincolata con un incastro scorrevole radiale</i>	225
4.3.5 Arco a forma di catenaria	229
4.3.5.1 <i>Doppio incastro</i>	231
4.3.5.2 <i>Doppio appoggio</i>	235
4.3.6 Analisi sismica.....	239
4.3.6.1 <i>Arco parabolico</i>	241
4.3.6.2 <i>Arco ellittico</i>	245
4.3.6.3 <i>Arco circolare</i>	249
4.3.6.4 <i>Arco cicloidale</i>	253
4.3.6.5 <i>Arco a forma di catenaria</i>	257
4.3.7 Archi a sezione variabile	261
4.3.7.1 <i>Arco circolare a sezione linearmente variabile</i>	261
4.3.7.2 <i>Arco parabolico a sezione variabile in maniera quadratica</i>	267
4.3.8 Analisi del moto libero	273
 Bibliografia.....	 279
 Ringraziamenti.....	 283

Prefazione

La presente tesi nasce dall'interesse nei confronti della Teoria e Meccanica delle Strutture, insegnamenti che hanno rappresentato i cardini del mio percorso formativo universitario.

L'obiettivo di questa trattazione è quello di analizzare il comportamento dinamico delle principali tipologie di strutture ad arco tramite l'applicazione del *Metodo Generalizzato di Quadratura Differenziale* e di valutare la validità di tale tecnica con riferimento ad una tecnica numerica classica quale il *Metodo di Newmark*.

Sebbene le applicazioni di dinamica strutturale nei vari campi dell'ingegneria siano molteplici, queste sono sempre governate da relazioni differenziali cui sono associate adeguate condizioni al contorno e iniziali. In genere non risulta possibile determinare la soluzione analitica del fenomeno indagato, ciò spesso è dovuto alla geometria del problema o alla complessità delle condizioni al contorno che affiancano le equazioni governanti. Per questo motivo in ambito ingegneristico vengono ampiamente sfruttate delle tecniche numeriche, che consentono di trasformare il problema differenziale in un problema algebrico e di ottenere una soluzione approssimata, ma comunque accettabile.

L'elaborato è strutturato in quattro capitoli, nei quali si fornisce un'esauriente base teorica per affrontare compiutamente l'analisi dinamica delle strutture ad arco ed in seguito vengono illustrati i risultati dell'applicazione del *G.D.Q. Method* e del *metodo di Newmark* per la risoluzione dei problemi dinamici inerenti tali strutture.

Il primo capitolo si propone di esporre in maniera esaustiva i fondamenti matematici su cui si basa il *G.D.Q. Method* con particolare attenzione ai due aspetti fondamentali del metodo: le modalità di calcolo dei coefficienti di ponderazione in base alla *Quadratura Differenziale Polinomiale* e le tipologie di discretizzazione maggiormente impiegate nell'applicazione di tale tecnica.

Nel secondo capitolo è riportata la *Formulazione Dinamica di Archi Piani*; in particolare si sono dapprima ricavate le equazioni di congruenza mediante il metodo diretto, si sono definite le equazioni di legame costitutivo elastico e sono state dedotte le equazioni indefinite di equilibrio mediante l'applicazione del principio di Hamilton. Successivamente è stato seguito il percorso inverso, ovvero si sono ricavate le equazioni

indefinite di equilibrio in ambito dinamico mediante il metodo diretto e sono poi state determinate le equazioni di congruenza tramite l'applicazione del principio delle forze virtuali e considerando le equazioni di legame costitutivo elastico definite in precedenza. Una volta note le equazioni indefinite di equilibrio, le equazioni di legame costitutivo elastico e le equazioni di congruenza, è stato possibile definire le equazioni fondamentali che governano il problema del moto. La parte finale del secondo capitolo è dedicata alla descrizione della geometria delle principali tipologie di arco.

Il terzo capitolo costituisce il nucleo principale della trattazione; infatti, dopo aver fornito le necessarie basi teoriche nei capitoli precedenti, in questo capitolo si procede all'applicazione della tecnica di quadratura differenziale alle equazioni fondamentali che governano la dinamica dell'arco piano ed alle equazioni che definiscono le condizioni al contorno e le condizioni iniziali. In questo modo si ottiene un sistema algebrico che può essere facilmente risolto mediante l'ausilio di un calcolatore. Nel capitolo in questione viene in seguito illustrata la teoria alla base del metodo di Newmark e si procede anche all'applicazione di tale tecnica al problema differenziale del moto forzato per ottenere un ulteriore sistema algebrico. Le operazioni finora descritte possono essere implementate in un codice di calcolo che provvede alla soluzione dei sistemi algebrici ottenuti, il funzionamento di tale algoritmo viene illustrato nella parte finale del terzo capitolo.

Nel quarto capitolo sono riportati i risultati di numerose applicazioni svolte mediante il codice di calcolo descritto nel capitolo precedente. In particolare si sono eseguite analisi della risposta dinamica strutturale sotto l'azione di varie forzanti, compresa l'azione sismica, e analisi del moto libero, il tutto per molteplici tipologie di arco e per diversi andamenti della sezione trasversale. Per tutte le applicazioni, sono riportate le soluzioni determinate con entrambe le tecniche descritte in precedenza, al fine di operare il confronto tra i risultati e valutare la validità del *G.D.Q. Method* nel risolvere il problema del moto forzato per le strutture in esame.

Capitolo 1

Metodo Generalizzato di Quadratura Differenziale

1.1 INTRODUZIONE

1.1.1 Metodi numerici e quadratura differenziale

Il Metodo di Quadratura Differenziale Generalizzato, o *G.D.Q. Method*, è una tecnica numerica di origine piuttosto recente che consente di risolvere, in maniera approssimata, sia le equazioni differenziali alle derivate totali sia quelle alle derivate parziali. Tale metodo ha una grossa valenza dal punto di vista ingegneristico dal momento che molti problemi di questo tipo sono governati da simili relazioni affiancate ad adeguate condizioni al contorno. Per esempio, l'analisi dei flussi dei fluidi Newtoniani è modellata tramite le equazioni di Navier-Stokes; le analisi statica e dinamica di strutture monodimensionali, piane e spaziali sono governate da diversi tipi di equazioni differenziali alle derivate parziali o totali; i problemi riguardanti le onde acustiche e le microonde sono simulati tramite l'equazione di Helmholtz. Il fatto che la soluzione in forma chiusa di queste equazioni risulta alquanto difficile ha indotto i ricercatori a sviluppare diversi metodi approssimati tra cui il G.D.Q. Method.

In molti casi, la soluzione approssimata è rappresentata attraverso l'uso di valori funzionali in determinati punti del dominio (punti di griglia o *mesh points*). In un primo

momento, è lecito dubitare della relazione esistente tra essi e le derivate presenti all'interno dell'equazione differenziale. Le incertezze, però, vengono immediatamente chiarite dal fatto che esiste un "ponte" collegante i due aspetti; in particolare, tale collegamento è definito dalla *tecnica di discretizzazione numerica* e la soluzione approssimata che ne consegue viene definita come la *soluzione numerica* del problema.

Come tecnica numerica, il G.D.Q. Method è un'evoluzione dell'originale *D.Q. Method* ed appartiene alla classe dei *metodi spettrali*. Lo sviluppo di questa procedura, allo stesso modo di tutti i criteri di discretizzazione numerica, è stato favorito dal rapido sviluppo tecnologico del calcolatore grazie a cui si riescono a dare risposte alquanto celeri ai vari quesiti proposti dall'ingegneria moderna. Il vantaggio di tale metodo, rispetto alle usuali tecniche numeriche di discretizzazione usate fino alla sua introduzione, è che consente di raggiungere precisioni più elevate con un minor sforzo computazionale. Per tale motivo, il G.D.Q. Method è diventato una valida alternativa a queste procedure tra cui spiccano per importanza il Metodo delle Differenze Finite, o *F.D. Method*, il Metodo agli Elementi Finiti, o *F.E Method*, ed il Metodo dei Volumi Finiti, o *F.V Method*. Questi ultimi rientrano sotto la categoria dei *metodi di ordine inferiore* mentre i metodi spettrali e pseudospettrali fanno parte dei cosiddetti *metodi globali*. Le tecniche numeriche maggiormente utilizzate nella meccanica strutturale sono il metodo alle differenze finite ed il metodo agli elementi finiti. Il primo metodo si è sviluppato attorno agli anni '50, mentre il secondo è nato agli inizi degli anni '60.

Negli anni '70 è stato introdotto il *Metodo di Quadratura Differenziale*. Detto procedimento appartiene ai *metodi spettrali* e *pseudospettrali* e costituisce una tecnica numerica approssimata per la risoluzione di sistemi di equazioni differenziali, sia alle derivate totali che alle derivate parziali.

I suddetti tre procedimenti numerici, che sono applicati con successo anche in vari settori della fisica e dell'ingegneria non strutturale, hanno la capacità di ricavare soluzioni accurate in dipendenza dello sforzo computazionale richiesto.

Per ottenere risultati precisi, in generale, si richiede un numero elevato di gradi di libertà. Ciò provoca l'aumento esponenziale delle operazioni numeriche e del tempo di calcolo.

Il *D.Q. Method* ha destato notevole interesse per la sua estrema semplicità applicativa e per il basso costo computazionale. Esso ha fornito risultati ampiamente soddisfacenti ed interessanti, analoghi a quelli ottenuti mediante metodologie numeriche più consolidate.

Il *metodo degli Elementi Finiti* è la più diffusa e sviluppata tecnica numerica, che viene applicata nella maggior parte dei problemi di interesse scientifico. Permette di ottenere risultati molto buoni attraverso l'utilizzo di un elevato numero di punti nodali, in cui viene discretizzato il dominio da analizzare mediante un'opportuna meshatura. I metodi spettrali e pseudospettrali, invece, forniscono risultati interessanti anche facendo uso di pochi punti nodali.

Il *metodo di Quadratura Differenziale* è stato sviluppato per calcolare soluzioni di sistemi di equazioni alle derivate parziali, utilizzando solo pochi punti nodali nel rispettivo dominio di soluzione. In origine, detto metodo è nato come solutore diretto di sistemi, lineari e non lineari, di equazioni differenziali a coefficienti variabili.

Il cuore della tecnica numerica in parola consiste nell'approssimazione della derivata di ordine generico, di una qualsiasi funzione sufficientemente regolare, valutata in un punto del dominio di definizione. Tale approssimazione si esprime attraverso una combinazione lineare dei valori assunti dalla funzione medesima nei vari punti in cui è stato discretizzato il suo dominio.

1.1.2 Genesi del G.D.Q. Method

Come accennato nel paragrafo precedente, la soluzione analitica in forma chiusa di molti problemi ingegneristici risulta assai onerosa tanto che si è reso necessario procedere attraverso metodi che fornissero delle soluzioni approssimate. Le prime tecniche di discretizzazione numerica effettivamente valide vennero sviluppate a partire dagli anni '50. In particolare, a tali anni risale lo sviluppo del Metodo delle Differenze Finite (F.D.M.), mentre è relativa agli anni '60 l'affermazione del Metodo agli Elementi Finiti (F.E.M.) e del Metodo dei Volumi Finiti (F.V.M.). Tra queste tre procedure, quella più diffusa e sviluppata risulta sicuramente il F.E.M.; un metodo basato su principi variazionali, mentre il F.D.M. e il F.V.M. sono fondati rispettivamente sull'espansione in serie di Taylor e sull'applicazione diretta della legge di conservazione fisica alle celle finite. A partire da queste procedure, vari ricercatori hanno poi sviluppato altre tecniche che si possono inserire all'interno della cosiddetta classe dei metodi spettrali tanto da poter apparire come un ulteriore sviluppo degli schemi di discretizzazione noti col nome di *metodi dei residui pesati*. Gli elementi chiave di queste nuove procedure sono le *funzioni base* e le *funzioni peso*; un aspetto che fa notare la relazione esistente tra il F.E.M. ed i metodi spettrali stessi. Infatti entrambi utilizzano delle funzioni base (o *funzioni test*) per approssimare la soluzione anche se è la scelta di esse a mostrare una delle differenze caratteristiche tra le due classi. Per la precisione, mentre le funzioni base dei metodi spettrali hanno proprietà globali, quelle da usare nel F.E.M. sono da specificare per ogni elemento in cui viene discretizzato il dominio essendo quest'ultimo suddiviso in piccole porzioni. In questo modo, le funzioni base hanno carattere locale tanto da essere utili per l'analisi delle geometrie più complesse. A tal proposito si può affermare che i metodi spettrali, pur essendo un'estensione del F.E.M., si presentano, a tutti gli effetti, come una tecnica di approssimazione sull'intero dominio.

Quanto detto non significa che i cosiddetti metodi di ordine inferiore debbano essere accantonati anche perché esistono molte simulazioni numeriche di problemi ingegneristici che possono venire tranquillamente eseguite con essi. Difatti, esistono alcune applicazioni pratiche in cui viene richiesta la soluzione delle equazioni differenziali solo in alcuni punti del dominio fisico. Il problema è che, per ottenere un accettabile grado di precisione nei punti specificati, tali metodi richiedono un numero assai elevato di punti di griglia. Un esempio di quanto detto è riscontrabile nell'analisi delle vibrazioni. Attraverso la

discretizzazione numerica delle equazioni governanti, si perviene ad un sistema risultante di equazioni algebriche che fornisce come autovalori le pulsazioni del problema dinamico in esame. La dimensione di questo sistema è solitamente uguale al numero di punti interni con cui si è discretizzato il dominio in modo da ottenere anche il medesimo numero di autovalori.

Tra essi, solo quelli relativi ai primi modi di vibrare sono significativi per cui, per ottenerli, sembrerebbe sufficiente una discretizzazione minima. In realtà non è così perché, per ottenere dei valori accurati per le pulsazioni più basse, è necessario usare un elevato numero di punti nodali anche se questo significa dover ricavare alcuni valori che non interessano. La soluzione del problema fatta in questi termini porta, quindi, ad un elevato immagazzinamento di dati e ad un notevole sforzo computazionale. Tuttavia, tali inconvenienti possono essere superati se si passa a considerare i metodi di ordine superiore e quelli globali. Infatti, con essi si riesce ad ottenere lo stesso grado di precisione utilizzando una *mesh* maggiormente diradata rispetto a quella usata con i metodi di ordine inferiore. Ciò significa che i metodi di ordine superiore sono capaci di concedere soluzioni numeriche ottimali usando un numero molto limitato di punti nodali con la diretta conseguenza di far cadere la scelta, in modo del tutto naturale, sui metodi spettrali per raggiungere i propri scopi. Al giorno d'oggi, il loro utilizzo ha avuto un grosso successo in diversi campi quali la modellazione delle turbolenze, le previsioni meteorologiche, l'analisi non lineare delle onde, la modellazione sismica, ecc.

D'altra parte, nel cercare un'efficiente tecnica di discretizzazione che permettesse di ottenere delle soluzioni numeriche precise usando una *mesh* ridotta, alcuni ricercatori svilupparono il cosiddetto *D.Q. Method*. Tale tecnica venne introdotta da Bellman e i suoi collaboratori all'inizio degli anni '70 estendendo il concetto di "quadratura integrale" alla definizione di una derivata parziale o totale di una funzione fatta rispetto ad una sua variabile. Per la precisione, essi proposero di approssimare la derivata parziale o totale di una qualsiasi funzione regolare, nell'intorno di un generico punto del suo dominio, con una sommatoria lineare pesata dei valori assunti dalla funzione stessa in tutti i punti in cui è stato discretizzato il dominio lungo la direzione di derivazione. E' facile intuire come la chiave di questo metodo non sia tanto la discretizzazione del dominio quanto la definizione dei coefficienti di ponderazione per ogni ordine di derivazione. Bellman e i suoi collaboratori suggerirono due vie per determinare tali coefficienti relativi al primo ordine di derivazione: la prima consiste nel risolvere un sistema di equazioni algebriche mentre la seconda usa una semplice formulazione algebrica con l'obbligo, però, di scegliere i punti

della mesh come radici dei polinomi shiftati di Legendre. Le prime applicazioni del D.Q.M. usarono proprio questi criteri per calcolare i coefficienti di ponderazione con uso prevalente del primo vista la possibilità di scegliere arbitrariamente le coordinate dei punti di griglia (il secondo approccio risultava troppo restrittivo da questo punto di vista). Sfortunatamente, anche se i primi risultati mostrarono segni di grande potenzialità, pure il primo approccio presentò degli inconvenienti. Quando l'ordine del sistema delle equazioni algebriche era elevato, la matrice ad esso associata risultava mal condizionata. Da questo fatto derivò la difficoltà di ottenere i coefficienti di ponderazione nel caso si volesse utilizzare un ampio numero di punti nodali. Questa è probabilmente la ragione del perché le prime applicazioni col D.Q.M. vennero svolte usando solamente un numero di punti inferiore, o al massimo uguale, a 13. Per superare entrambe gli ostacoli relativi alla valutazione di tali coefficienti vennero fatti diversi sforzi. Civan (1989) dimostrò che la difficoltà computazionale del primo approccio di Bellman era dovuta al carattere della *matrice di Vandermonde* (matrice associata al sistema di equazioni algebriche); una matrice che appare comunemente in molti problemi ingegneristici. La notorietà di essa e del relativo sistema di equazioni aveva già permesso lo sviluppo di alcuni algoritmi speciali per la sua soluzione tra cui è da ricordare quello di Björck e Pereyra (1970). Tale algoritmo si dimostrò assai efficiente dal momento che permise di calcolare accuratamente i coefficienti di ponderazione con l'uso di più di 31 punti di griglia. Ma tutto ciò non consentiva ancora di valutare tali coefficienti per ordini di derivazione superiore al primo.

Un ulteriore miglioramento nel calcolo dei coefficienti di ponderazione venne proposto da Quan e Chang nel 1989 attraverso l'uso dei polinomi interpolanti di Lagrange quali *funzioni test*. In questo modo si ottenne una formulazione esplicita per calcolare i coefficienti relativi alla discretizzazione del primo e del secondo ordine di derivazione. Una soluzione ancora migliore di questo problema venne poi proposta da Shu nel 1991 e da Shu e Richards nel 1992; una risoluzione basata sull'approssimazione polinomiale di ordine superiore e sull'analisi di uno spazio vettoriale lineare. Con quest'ultimo approccio, i coefficienti di ponderazione relativi al primo ordine di derivazione sono determinabili attraverso una semplice formulazione algebrica senza alcuna restrizione sulla scelta dei punti di griglia, mentre quelli relativi al secondo ed agli ordini superiori sono definibili mediante una relazione ricorsiva. Praticamente, in tal modo si è proposta una generalizzazione del calcolo di questi coefficienti che, a sua volta, ha portato a tradurre l'originale D.Q.M. nell'attuale Metodo Generalizzato di Quadratura Differenziale, o *G.D.Q. Method*. Chiaramente, tutto il lavoro descritto è fondato sull'approssimazione

polinomiale per cui, come conseguenza di questo fatto, il nominato G.D.Q.M. può essere considerato un metodo di *quadratura differenziale* basato su *aspetti polinomiali* (P.D.Q.M.). Recentemente, Shu e Chew (1997) e Shu e Xue (1997) hanno ulteriormente sviluppato alcune semplici formulazioni algebriche per calcolare i coefficienti di ponderazione relativi al primo ed al secondo ordine di derivazione qualora la funzione o la soluzione delle equazioni differenziali sia approssimata tramite espansione in serie di Fourier. Queste formulazioni del D.Q.M. sono diverse da quelle classiche polinomiali e tale approccio può essere denominato metodo di *quadratura differenziale* basato *sull'espansione in serie di Fourier* (F.D.Q.M.). Dall'analisi delle considerazioni sopra esposte è evidente come i fondamenti matematici del G.D.Q.M. siano da ricercare nell'analisi di uno spazio vettoriale lineare e nella approssimazione funzionale.

Pur non disdegnando qualche cenno sull'uso delle serie di Fourier, la tecnica numerica che verrà utilizzata farà riferimento alla quadratura differenziale basata sull'approssimazione polinomiale; una procedura che, come è stato illustrato in precedenza, ha subito un'evoluzione nel corso degli anni partendo dall'originale D.Q. Method fino ad arrivare all'attuale G.D.Q. Method. Nella letteratura tecnica sono disponibili una vasta serie di risultati che mostrano come, già dalle prime esperienze, il G.D.Q.M. si è proposto come un metodo ad elevata potenzialità nel campo dell'analisi strutturale grazie alla sua precisione, efficienza, semplicità d'uso e, soprattutto, al suo basso costo computazionale.

Il *D.Q. Method* venne esteso a problemi di ingegneria da Civan nel 1978 e da Civan e Shliepcevich nel 1983-84. Lo sviluppo del metodo si ebbe allorché esso venne introdotto nella risoluzione di problemi di meccanica strutturale (Jang, 1987; Bert, 1988; Jang, 1989), riguardanti principalmente l'analisi flessionale di travi e piastre, in campo statico e dinamico.

Nelle applicazioni precedenti le equazioni differenziali non superavano il secondo ordine; inoltre esse non avevano più di una condizione al contorno per ogni bordo del dominio di definizione. Nel caso di travi snelle e piastre sottili, ad esempio, l'equazione differenziale risulta essere del quarto ordine e le condizioni di vincolo sono due per ogni bordo. Si dice anche che le condizioni di vincolo sono ridondanti, in quanto l'equazione del problema è una, mentre le condizioni al contorno sono due. L'implementazione di dette condizioni richiede pertanto una particolare attenzione (Striz, 1988; Loo, 1991; Feng e Bert, 1992; Shu, 1991). Le problematiche connesse alla meccanica strutturale contribuirono al perfezionamento della metodologia in parola.

Il metodo di quadratura differenziale è riconosciuto come uno dei metodi numerici per la soluzione delle equazioni differenziali. La generalità e la versatilità di detto metodo sono evidenziate dal notevole numero di pubblicazioni degli ultimi anni. La tecnica in discorso risulta precisa, efficiente e facile da usare. Essa presenta un'elevata potenzialità nel campo dell'analisi strutturale, ove è stata applicata anche all'instabilità di travi, piastre, all'analisi dinamica di gusci a doppia curvatura, archi, impiegando nel contempo differenti tipi di vincolamento e di carico. Il metodo di quadratura è tuttora oggetto di numerosi studi di ampio respiro.

1.1.3 Origine del Metodo di Quadratura Differenziale

Fin dall'inizio degli anni '70, il termine "quadratura" veniva ordinariamente associato alla valutazione approssimata di un integrale. Bellman, assieme ai suoi collaboratori, mostrò come l'idea convenzionale della "quadratura integrale" potesse essere utilizzata in modo semplice e sistematico anche per la soluzione computazionale di equazioni integro-differenziali di tipo lineare e non. Per illustrarne la portata occorre innanzitutto osservare cosa si intende per *quadratura integrale* per poi introdurre il concetto di *quadratura differenziale*.

1.1.3.1 Quadratura Integrale

Un problema assai frequente in ambito scientifico ed ingegneristico riguarda la valutazione dell'integrale di una funzione $f(x)$ nell'intervallo finito $[a,b]$. Se esiste una funzione integrale $F(x)$ tale che $dF(x)/dx = f(x)$, allora il valore di questo integrale è fornito da $F(b) - F(a)$. Sfortunatamente, nella soluzione di problemi pratici è estremamente difficile, se non impossibile, ottenere un'espressione esplicita per la funzione integrale $F(x)$ dal momento che i valori di $f(x)$ possono essere noti solo in determinati punti del dominio. Quindi, in una situazione del genere è essenziale l'uso di un approccio numerico per risolvere il problema.

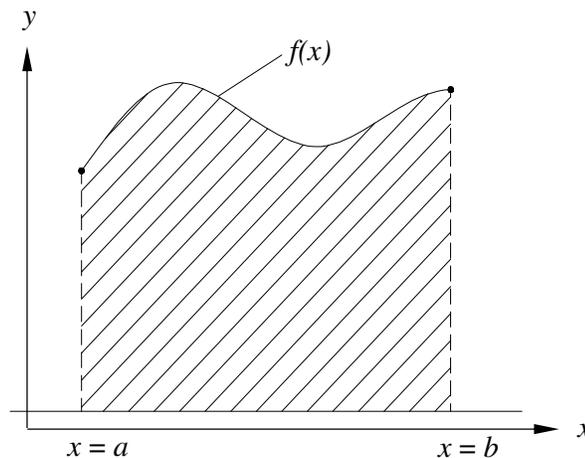


Figura 1.1. Integrale di $f(x)$ in un intervallo finito $[a,b]$.

D'altra parte, è risaputo che l'integrale suddetto rappresenta l'area sottesa dalla funzione integranda $f(x)$ nell'intervallo di interesse, come mostra la figura 1.1. In base a questo concetto, la valutazione dell'integrale può essere ipotizzata come equivalente alla definizione approssimata di tale area. E' stato seguendo questa strada che si sono sviluppate molte tecniche numeriche per le quali, in generale, l'integrale può essere approssimato nel seguente modo:

$$\int_a^b f(x) dx \cong w_1 f_1 + w_2 f_2 + \dots + w_N f_N = \sum_{i=1}^N w_i f(x_i) \quad (1.1.1)$$

dove w_i sono i coefficienti peso e $f(x_i)$ rappresentano i valori funzionali nei punti x_i in cui è stato suddiviso il dominio. In altre parole, si è discretizzato il dominio di definizione di $f(x)$ in N punti nodali $x_i, i = 1, 2, \dots, N$, che costituiscono il *reticolo della discretizzazione*.

Tale equazione prende il nome di *quadratura integrale* e solitamente viene eseguita selezionando i punti nodali in modo da fornire una distribuzione uniforme degli stessi nel relativo dominio. La forma di questa relazione è importante dal momento che rappresenta la scrittura con cui si possono identificare tutte le regole di quadratura convenzionale.

1.1.3.2 Quadratura Differenziale

Si consideri ora il seguente problema monodimensionale in cui si ha a che fare con una funzione $f(x)$ sufficientemente regolare definita nell'intervallo chiuso $[a,b]$ e si supponga che esso sia discretizzato in N punti di coordinate $a = x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N = b$ (figura 1.2):

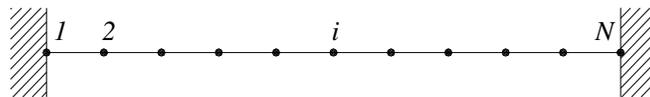


Figura 1.2. Rappresentazione del problema monodimensionale.

Seguendo il concetto di “quadratura integrale” esposto in precedenza, Bellman e Casti nel 1971 estesero, per analogia, la legge di quadratura integrale (1.1.1) al calcolo delle derivate di una funzione $f(x)$. Essi suggerirono che la derivata del primo ordine della

funzione $f(x)$ fatta rispetto ad x nel generico punto nodale x_i può essere approssimata attraverso una sommatoria lineare pesata di tutti i valori che la funzione stessa assume nei punti di discretizzazione del dominio:

$$f'(x_i) = f^{(1)}(x_i) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \cong \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(1)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.1.2)$$

dove i $\zeta_{ij}^{(1)}$ sono i coefficienti di ponderazione della sommatoria, $f(x_j)$ rappresentano i valori funzionali nei punti x_j in cui è stato suddiviso il dominio e $f'(x_i)$, oppure $f^{(1)}(x_i)$, indica la derivata del primo ordine di $f(x)$ in x_i . I coefficienti $\zeta_{ij}^{(1)}$ sono contraddistinti dai pedici i e j . Il pedice i indica il punto del dominio in cui si vuole calcolare la derivata generica. L'equazione (1.1.2) prende il nome di *quadratura differenziale* (D.Q.) e definisce, contestualmente, un *operatore lineare*. Si può già intuire da questa semplice applicazione come le fasi fondamentali di questa tecnica numerica siano la discretizzazione del dominio in N punti nodali (definizione della mesh) e la valutazione dei coefficienti di ponderazione della sommatoria. Tra le due fasi descritte, il punto chiave è sicuramente la definizione dei coefficienti di ponderazione che, come si può notare dall'equazione (1.1.2), sono diversi nei vari punti x_i del dominio. Infatti, una volta noti, la correlazione tra le derivate presenti nelle equazioni governanti il problema ed i valori della $f(x)$ nei punti della mesh è stabilita definitivamente. In altre parole, tramite i coefficienti di ponderazione si possono facilmente usare i valori funzionali per calcolare le derivate della funzione stessa. Successivamente verrà mostrato in modo dettagliato come vengono determinati tali coefficienti attraverso l'analisi di uno spazio vettoriale lineare e l'analisi dell'approssimazione funzionale. Prima di fare ciò è necessario specificare i concetti e le proprietà che stanno alle base di tali aspetti.

1.1.4 Analisi di uno spazio vettoriale polinomiale

In questo paragrafo, verranno richiamate una serie di concetti e proprietà relativi allo spazio vettoriale lineare che saranno utilizzate nelle sezioni seguenti per il calcolo dei coefficienti di ponderazione per l'approssimazione delle derivate mediante il G.D.Q.M.

1.1.4.1 Definizione di uno spazio vettoriale lineare

Uno *spazio vettoriale lineare* risulta definito in un campo F formato da una serie di elementi chiamati *scalari* e da due operazioni quali l'*addizione* “+” e la *moltiplicazione* “ \cdot ” (o “ \cdot ”). Tali operazioni sono definite per soddisfare le seguenti condizioni:

- 1) Ad ogni coppia di elementi scalari a e b assunti nel campo F , corrispondono due elementi $a + b$ e $a \cdot b$ (o ab) detti rispettivamente *somma* e *prodotto* di a e b .
- 2) L'addizione e la moltiplicazione sono operazioni che godono entrambe della *proprietà commutativa*; infatti, per ogni coppia di scalari a, b assunta nel campo F :

$$a + b = b + a, \quad ab = ba$$

- 3) L'addizione e la moltiplicazione sono operazioni che godono entrambe della *proprietà associativa*; infatti, per ogni terna di scalari a, b, c assunta nel campo F :

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc)$$

- 4) La moltiplicazione è un'operazione che gode della *proprietà distributiva* rispetto all'addizione; infatti, per ogni terna di scalari a, b, c assunta nel campo F :

$$a \cdot (b + c) = (ab) + (ac)$$

- 5) Il campo F contiene due elementi, rispettivamente 0 e 1, tali che, per ogni scalare a appartenente ad F :

$$a + 0 = a, \quad a1 = a$$

- 6) Per ogni elemento a appartenente ad F , esiste uno scalare b di F tale che:

$$a + b = 0$$

7) Per ogni elemento a di F che non sia lo 0, esiste uno scalare c di F tale che:

$$ac = 1$$

In base alle caratteristiche appena elencate, si può osservare che la serie di oggetti componenti il campo può essere un qualunque elenco di elementi; un elenco esteso nella misura in cui le due operazioni riescono ad essere ancora definite per tali scalari. I campi che verranno trattati sono i più familiari ovvero quello dei numeri reali e quello delle funzioni razionali a coefficienti reali. L'addizione e la moltiplicazione all'interno di questi due campi sono definite nella maniera usuale.

Prima di introdurre il concetto di spazio vettoriale, si consideri un piano geometrico bidimensionale. Una volta scelta la sua origine, ogni punto appartenente al piano stesso può essere rappresentato attraverso un vettore posizione. Quest'ultimo possiederà una direzione, un'intensità e un verso. Se all'interno del piano si prendono in esame due vettori, essi possono essere sommati, ma il loro prodotto non risulta definito. Usando la terminologia matematica, un piano che presenta tali caratteristiche viene chiamato *spazio lineare*, o *spazio vettoriale*, o *spazio vettoriale lineare* ed è indicato con la lettera V . Quindi, esso è formato da una serie di elementi chiamati *vettori*, da un campo F e da due operazioni dette *addizione vettoriale* e *moltiplicazione scalare*. Tali operazioni sono definite in modo da soddisfare le seguenti condizioni:

- 1) Ad ogni coppia di vettori α e β assunti nello spazio V , corrisponde un vettore $\alpha + \beta$ chiamato *somma* di α e β .
- 2) L'addizione è un'operazione che gode della *proprietà commutativa*; infatti, per ogni coppia di vettori α e β assunti in V :

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

- 3) L'addizione è un'operazione che gode della *proprietà associativa*; infatti, per ogni terna di vettori α , β e γ assunti in V :

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

- 4) Lo spazio V contiene un vettore indicato con $\mathbf{0}$, chiamato *vettore nullo* (oppure origine), tale che, per ogni vettore α appartenente a V :

$$\alpha + \mathbf{0} = \alpha$$

- 5) Per ogni vettore α assunto in V , esiste un vettore β di V tale che:

$$\alpha + \beta = \mathbf{0}$$

- 6) Per ogni elemento c appartenente a F e per ogni vettore α appartenente a V , esiste un corrispondente vettore $c\alpha$ di V chiamato *prodotto scalare* di c ed α .

- 7) La moltiplicazione scalare è un'operazione che gode della *proprietà associativa*; infatti, per ogni coppia a, b di F e per ogni vettore γ di V :

$$(ab)\gamma = a(b\gamma)$$

- 8) La moltiplicazione scalare è un'operazione che gode della *proprietà distributiva rispetto all'addizione vettoriale*; infatti, per ogni elemento a appartenente ad F e per ogni coppia di vettori β e γ assunti in V :

$$a(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma$$

- 9) La moltiplicazione scalare è un'operazione che gode della *proprietà distributiva rispetto l'addizione scalare*; infatti, per ogni coppia di elementi a e b appartenenti ad F e per ogni vettore γ assunto in V :

$$(a+b)\gamma = a\gamma + b\gamma$$

- 10) Per ogni vettore α appartenente a V ed essendo 1 un elemento di F :

$$1\alpha = \alpha$$

In base alle caratteristiche appena elencate, è noto che il campo V forma uno spazio vettoriale lineare con addizione vettoriale e moltiplicazione scalare.

Si consideri ora il set $P_N(x)$ di tutti i polinomi di grado inferiore a N con fattori reali c_i :

$$P_N(x) = \sum_{i=1}^N c_i x^{i-1} \quad (1.1.3)$$

Eseguendo l'addizione vettoriale e la moltiplicazione scalare riferite a delle quantità come la sommatoria appena definita, tali operazioni risultano definite come:

$$\sum_{i=1}^N c_i x^{i-1} + \sum_{i=1}^N d_i x^{i-1} = \sum_{i=1}^N (c_i + d_i) x^{i-1}, \quad a \left(\sum_{i=1}^N c_i x^{i-1} \right) = \sum_{i=1}^N (ac_i) x^{i-1} \quad (1.1.4)$$

Da quanto è stato detto, è facile verificare che $P_N(x)$ risulta uno *spazio vettoriale lineare*.

1.1.4.2 Proprietà di uno spazio vettoriale lineare

Le *proprietà* di uno *spazio vettoriale lineare* che stanno alla base dello sviluppo della quadratura differenziale polinomiale sono le seguenti:

- *Lineare Indipendenza*: dato un set di vettori $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ in uno spazio vettoriale lineare V definito in un campo F , esso è detto *linearmente indipendente* qualora risulti soddisfatta la relazione seguente:

$$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_N \alpha_N = 0 \quad (1.1.5)$$

se e solo se è verificata la condizione $c_1 = c_2 = \dots = c_N = 0$, dove c_1, c_2, \dots, c_N sono elementi appartenenti ad F .

In base a tale definizione si può notare che la lineare indipendenza è frutto non solo dei vettori scelti ma anche del campo F . Inoltre, da questa relazione risulta anche chiaro che se i vettori $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ sono linearmente dipendenti allora almeno uno di loro può essere scritto come combinazione lineare dei restanti.

- *Dimensione di uno spazio vettoriale lineare*: il numero massimo di vettori linearmente indipendenti all'interno di uno spazio vettoriale lineare V definisce la *dimensione dello spazio vettoriale lineare* stesso.

- Base o vettori base: un set di vettori linearmente indipendenti assunti in uno spazio vettoriale lineare V è detta *base di V* se un qualsiasi vettore appartenente a V può essere espresso come combinazione lineare dei suddetti *vettori di base*.

Se la dimensione dello spazio vettoriale lineare è pari ad N , tale proprietà si può enunciare come segue: in uno spazio vettoriale lineare N -dimensionale (V_N), ogni set di vettori linearmente indipendenti definisce una base (composta da N vettori). Tale proprietà è facilmente dimostrabile e dalla sua dimostrazione si può dedurre un aspetto molto importante e cioè che, una volta scelta la base di uno spazio vettoriale lineare N -dimensionale (V_N), ogni vettore di V_N può essere rappresentato in modo univoco con una serie di scalari d_1, d_2, \dots, d_N nel campo F .

- Cambio di base: in uno spazio vettoriale lineare N -dimensionale (V_N) esistono molti set di vettori di base ed ognuno di essi può essere univocamente espresso in funzione di un altro set di vettori base. Ad esempio, se si considerano due set di vettori base quali $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ e $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ appartenenti a V_N , tale proprietà ci indica che:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \beta_j, \quad \beta_i = \sum_{j=1}^N b_{ij} \alpha_j \quad (1.1.6)$$

per $i = 1, 2, \dots, N$ e dove a_{ij} e b_{ij} sono elementi scalari del campo F .

Questa proprietà è ovvia e può essere facilmente derivata dalla proprietà precedente.

- Operatore lineare: una funzione L viene definita un *operatore lineare* se e solo se:

$$L(a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2) = a_1 L(\alpha_1) + a_2 L(\alpha_2) \quad (1.1.7)$$

per qualunque α_1, α_2 dello spazio V_N e per qualsiasi a_1, a_2 del campo F .

In base a tale proprietà è facile dimostrare che l'equazione (1.1.2) è un operatore lineare poiché:

$$\left. \frac{\partial(a_1 f_1 + a_2 f_2)}{\partial x} \right|_{x=x_j} \cong a_1 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} f_1(x_j) + a_2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} f_2(x_j) \quad (1.1.8)$$

dove $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ rappresentano due funzioni monodimensionali definite nello stesso dominio.

- Operatore lineare e set di vettori di base in uno spazio vettoriale lineare: in uno spazio vettoriale lineare N -dimensionale V_N , si definiscano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ come un set di vettori di base. Se tutti questi vettori soddisfano la proprietà dell'operatore lineare, allo stesso modo essa sarà verificata da ogni vettore dello spazio V_N . Infatti, se tale set di vettori di base soddisfa l'equazione lineare:

$$L(\alpha_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.1.9)$$

e consideriamo α come un vettore arbitrario dello spazio vettoriale lineare V_N , allora avremo che, in base all'equazione (1.1.7) ed al fatto di poter interpretare ogni vettore come una combinazione lineare della base:

$$L(\alpha) = L\left(\sum_{i=1}^N a_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^N L(a_i \alpha_i) = \sum_{i=1}^N a_i L(\alpha_i) = 0 \quad (1.1.10)$$

- Operatore lineare e differenti set di vettori di base in uno spazio vettoriale lineare: in uno spazio vettoriale lineare N -dimensionale V_N , se un set di vettori base soddisfa la proprietà dell'operatore lineare, allo stesso modo essa sarà verificata da un altro set diverso dal primo. Infatti, si considerino $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ e $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ come due set di vettori di base di V_N e si supponga, inoltre, che il primo dei due soddisfi l'equazione (1.1.9). Se si sfrutta l'equazioni (1.1.6) e (1.1.7) si ottiene:

$$L(\beta_i) = L\left(\sum_{j=1}^N a_{ij} \alpha_j\right) = \sum_{j=1}^N L(a_{ij} \alpha_j) = \sum_{j=1}^N a_{ij} L(\alpha_j) = 0 \quad (1.1.11)$$

Essa indica che anche il secondo set di vettori base soddisfa l'equazione lineare.

1.1.5 Approssimazione funzionale

In relazione a quanto affermato nei primi paragrafi, in generale è difficile, se non impossibile, esprimere in forma chiusa la soluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali (P.D.E.). Comunque, anche se la soluzione esatta non è definibile, le teorie matematiche assicurano che una soluzione per tali equazioni esiste e può essere stabilita, approssimativamente, mediante tecniche numeriche quali ad esempio il D.Q.M.

Si può notare come la soluzione delle P.D.E. sia esprimibile, in modo esatto od approssimato, o mediante una *funzione polinomiale* oppure attraverso una *funzione armonica*. Sebbene queste non siano le uniche forme possibili, esse risultano le due tipologie base con cui può essere fornita la soluzione delle P.D.E. Ciò significa che, quando si ricerca una loro soluzione con tecniche numeriche, l'approssimazione funzionale da adottare può essere *un'approssimazione polinomiale di ordine superiore* oppure *un'espansione in serie di Fourier* (funzione armonica). Inoltre si può osservare che esiste uno stretto legame tra la soluzione e la funzione approssimante adottata.

1.1.5.1 Approssimazione polinomiale

La descrizione di questa approssimazione polinomiale si basa sul *primo teorema di Weierstrass* per il quale se $f(x)$ è una funzione continua a valori reali definita nell'intervallo chiuso $[a,b]$, allora esiste una sequenza di polinomi $P_N(x)$ che converge uniformemente a $f(x)$ al tendere di N all'infinito. Tale teorema può essere anche formulato nel seguente modo: *se $f(x)$ è una funzione continua a valori reali definita nell'intervallo chiuso $[a,b]$ allora, per ogni ε maggiore di zero, esiste un polinomio di grado $N = N(\varepsilon)$ tale per cui sia valida la seguente disuguaglianza:*

$$|f(x) - P_N(x)| \leq \varepsilon \tag{1.1.12}$$

Nelle applicazioni pratiche, questo teorema consente di dire che, se $f(x)$ rappresenta la soluzione di una P.D.E., allora tale soluzione può essere approssimata da un polinomio di grado inferiore ad N . La *forma convenzionale* per esprimere questa *approssimazione* è:

$$f(x) \cong P_N(x) = \sum_{k=1}^N c_k x^{k-1} \quad (1.1.13)$$

dove c_k rappresentano delle costanti. Ricordando quanto è stato detto precedentemente, $P_N(x)$ costituisce uno spazio vettoriale lineare N -dimensionale V_N visto che rispetta le operazioni di addizione vettoriale e di moltiplicazione per uno scalare. Ovviamente, all'interno di questo spazio vettoriale lineare V_N , un set di vettori (polinomi in forma monomia) $1, x, x^2, \dots, x^{N-1}$ è linearmente indipendente e definisce una base di V_N :

$$p_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.1.14)$$

Per ottenere una soluzione numerica di una P.D.E. è necessario scoprire quali sono i valori funzionali in determinati punti del dominio. Dal momento che si sta considerando un intervallo chiuso $[a, b]$ e che ci sono N punti nodali di coordinate $a = x_1, \dots, x_i, \dots, x_N = b$, i valori funzionali ricercati sono i vari $f(x_i)$. Ciò significa che le costanti c_k dell'equazione (1.1.13) possono essere ottenute in base alla soluzione del seguente sistema di equazioni algebriche:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 x_1 + c_3 x_1^2 + \dots + c_N x_1^{N-1} = f(x_1) \\ c_1 + c_2 x_2 + c_3 x_2^2 + \dots + c_N x_2^{N-1} = f(x_2) \\ \vdots \\ c_1 + c_2 x_N + c_3 x_N^2 + \dots + c_N x_N^{N-1} = f(x_N) \end{cases} \quad (1.1.15)$$

La matrice associata a tale sistema è la *matrice di Vandermonde*. Essa risulta non singolare, quindi invertibile, garantendo che il sistema stesso abbia un'unica soluzione per le costanti c_1, c_2, \dots, c_N . Solo una volta definite tali costanti è lecito affermare di aver ottenuto l'approssimazione polinomiale desiderata. D'altra parte, però, quando N è elevato la matrice di cui sopra è altamente mal condizionata e la sua inversione è difficoltosa. In tal caso non risulta facile ricavare le costanti attraverso il sistema (1.1.15).

La difficoltà nel definire tali costanti, e quindi il polinomio approssimante dell'equazione (1.1.13), può essere superata attraverso l'uso dei *polinomi interpolanti di Lagrange*:

$$P_N(x) = \sum_{k=1}^N l_k(x) f(x_k) \quad (1.1.16)$$

dove: $l_k(x) = \frac{\mathcal{L}(x)}{(x-x_k)\mathcal{L}^{(1)}(x_k)}$

$$\mathcal{L}(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_N) = \prod_{j=1}^N (x-x_j)$$

$$\mathcal{L}^{(1)}(x_k) = (x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_N) = \prod_{j=1, j \neq k}^N (x_k-x_j)$$

dove $\mathcal{L}^{(1)}(x)$ rappresenta la derivata del primo ordine del polinomio $\mathcal{L}(x)$. Dall'analisi di questa equazione appare chiaro che, una volta forniti i valori funzionali $f(x_k)$ negli N punti della discretizzazione, l'approssimazione polinomiale risulta definita. Inoltre, tale polinomio presenta un grado inferiore ad N e soddisfa le operazioni di addizione vettoriale e di moltiplicazione per uno scalare e quindi può essere considerato come un polinomio appartenente allo spazio vettoriale polinomiale V_N . Per quel che riguarda i termini $l_k(x)$, con $k = 1, 2, \dots, N$, essi sono delle funzioni per cui vale la seguente proprietà:

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1 & k \neq i \\ 0 & k = i \end{cases} \quad (1.1.17)$$

Tali termini sono funzioni polinomiali e quindi possono essere considerati vettori dello spazio vettoriale V_N . E' possibile notare come essi siano linearmente indipendenti e quindi è lecito considerarli come un'ulteriore base dello spazio vettoriale V_N .

Sulla falsa riga di quanto è stato appena detto, il polinomio approssimante $P_N(x)$ può anche essere determinato in altro modo attraverso l'*interpolazione polinomiale di Newton*:

$$P_N(x) = a_1 + \sum_{k=2}^N a_k (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{k-1}) \quad (1.1.18)$$

Appare chiaro che tale polinomio soddisfa le operazioni di addizione vettoriale e di moltiplicazione per uno scalare oltre ad essere di grado inferiore ad N . Queste sono le

condizioni necessarie affinché esso appartenga allo spazio vettoriale polinomiale V_N . E' inoltre evidente che si possono individuare dei fattori all'interno della precedente espressione; in particolare, tali fattori sono delle funzioni e in quanto tali rappresentano un set di vettori (polinomi) di V_N :

$$n_1(x) = 1, \quad n_k(x) = n_{k-1}(x)(x - x_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots, N \quad (1.1.19)$$

Essendo facilmente dimostrabile che questo set di vettori è linearmente indipendente, esso può essere anche considerato come base di V_N . Si osservi che nell'equazione (1.1.18) vi sono anche delle costanti a_k che possono essere espresse in termini dei valori funzionali nei punti nodali. Dall'analisi di questi a_k si può notare come a_N sia identico al fattore relativo alla potenza più elevata del polinomio $P_N(x)$ dell'equazione (1.1.16) e che:

$$a_1 + \sum_{k=2}^m a_k (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1})$$

è un polinomio di grado $m-1$ che soddisfa i valori funzionali nei punti x_1, x_2, \dots, x_m . Dall'equazione (1.1.16) si ricava direttamente:

$$a_m = \sum_{k=1}^m \frac{f(x_k)}{\mathcal{L}_m^{(1)}(x_k)}, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (1.1.20)$$

dove:

$$\mathcal{L}_m^{(1)}(x_k) = (x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_N) = \prod_{j=1, j \neq k}^m (x_k - x_j) \quad (1.1.21)$$

Naturalmente, se l'approssimazione polinomiale viene espressa usando altre forme, i set di vettori di base che ne derivano possono essere differenti da quelli considerati precedentemente.

Per esempio, quando il polinomio approssimante viene definito attraverso l'*espansione di Legendre*:

$$P_N(x) = \sum_{k=1}^N c_k L_{k-1}(x) \quad (1.1.22)$$

dove c_k sono costanti, $L_{k-1}(x)$ è il *polinomio di Legendre* di grado $k-1$. Anche in questo caso i diversi polinomi di Legendre rappresentano un set di vettori di base. Dal momento che i polinomi stessi sono le autofunzioni di un *problema singolare di Sturm-Liouville*, essi possono venire definiti risolvendo quest'ultimo. In particolare, tale problema assume la seguente forma:

$$(1-x^2)L_i^{(2)}(x) - 2xL_i^{(1)}(x) + i(i+1)L_i(x) = 0 \quad (1.1.23)$$

dove $L_i^{(1)}(x)$ e $L_i^{(2)}(x)$ rappresentano, rispettivamente, le derivate del primo e del secondo ordine del polinomio $L_i(x)$. Dalla sua soluzione si può notare come i vari polinomi di Legendre soddisfino la seguente relazione ricorsiva essendo $L_0(x) = 1$ e $L_1(x) = x$:

$$L_{i+1}(x) = \frac{2i+1}{i+1} xL_i(x) - \frac{i}{i+1} L_{i-1}(x) \quad (1.1.24)$$

Di seguito sono rappresentati i primi sette polinomi di Legendre:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= x \\ L_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ L_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ L_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ L_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\ L_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

I polinomi di Legendre sono polinomi ortogonali nell'intervallo $[-1,1]$ rispetto al "peso" $\omega(x) = 1$ e la *condizione di ortogonalità* è espressa tramite la relazione:

$$\int_{-1}^{+1} L_m(x) L_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{se } m = n \end{cases} \quad (1.1.26)$$

Per la determinazione dei polinomi di Legendre $L_i^*(\bar{x})$ shiftati nell'intervallo $[a,b]$, occorre fare riferimento alla seguente trasformazione di variabili:

$$\bar{x} = \frac{1}{2}[(b-a)x + (b+a)] \quad (1.1.27)$$

che fa corrispondere all'intervallo $[-1,1]$ l'intervallo $[a,b]$. Ponendo $x = -1$, $x = 1$ e $x = 0$, risulta $\bar{x} = a$, $\bar{x} = b$ e $\bar{x} = \frac{b+a}{2}$, rispettivamente. In simboli si ha: $x \in [-1,1] \Rightarrow \bar{x} \in [a,b]$.

Nel caso $a = 0$ e $b = 1$, dalla (1.1.27) si ha:

$$\bar{x} = \frac{1}{2}[x+1] \quad \Rightarrow \quad x = 2\bar{x} - 1 \quad (1.1.28)$$

Un generico polinomio di Legendre $L_i^*(\bar{x})$ shiftato nell'intervallo $[0,1]$ può essere ottenuto dal corrispondente polinomio di Legendre di pari grado con la seguente relazione:

$$L_i[x] = L_i[2\bar{x} - 1] = L_i^*[\bar{x}] \quad (1.1.29)$$

Attraverso il cambio di coordinate i primi quattro polinomi shiftati di Legendre si possono scrivere a partire dai polinomi di Legendre:

$$\begin{aligned}
 L_0^*(\bar{x}) &= 1 \\
 L_1^*(\bar{x}) &= 2\bar{x} - 1 \\
 L_2^*(\bar{x}) &= 6\bar{x}^2 - 6\bar{x} + 1 \\
 L_3^*(\bar{x}) &= 20\bar{x}^3 - 30\bar{x}^2 + 12\bar{x} - 1
 \end{aligned}
 \tag{1.1.30}$$

Vengono mostrate in tabella 1.1 le radici \bar{x}_i di $L_N^*(\bar{x})$, polinomio shiftato di Legendre di grado N , per $N = 7$ e $N = 9$.

In modo analogo, quando il polinomio viene definito mediante l'*espansione di Chebyshev*:

$$P_N(x) = \sum_{k=1}^N c_k T_{k-1}(x)
 \tag{1.1.31}$$

dove c_k sono costanti, $T_{k-1}(x)$ è il *polinomio di Chebyshev* di grado $k-1$. Anche i polinomi di Chebyshev sono polinomi ortogonali e costituiscono un set di vettori di base. Essi rappresentano le autofunzioni di un *problema singolare di Sturm-Liouville* che assume la seguente espressione:

$$\frac{\partial \left(\sqrt{1-x^2} T_i^{(1)}(x) \right)}{\partial x} + \frac{i^2}{\sqrt{1-x^2}} T_i(x) = 0
 \tag{1.1.32}$$

dove $T_i^{(1)}(x)$ rappresenta la derivata prima del polinomio $T_i(x)$. Dalla sua soluzione si può notare come i vari polinomi di Chebyshev soddisfino la seguente relazione ricorsiva:

$$T_{i+1}(x) = 2xT_i(x) - T_{i-1}(x)
 \tag{1.1.33}$$

essendo $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$. E' possibile scrivere il polinomio $T_i(x)$ in un forma diversa senza ricorrere a relazioni ricorsive:

$$T_k(x) = \cos k\theta, \quad \theta = \arccos(x)
 \tag{1.1.34}$$

Tabella 1.1. Radici dei polinomi shiftati di Legendre $L_N^*(\bar{x})$.

\bar{x}	$N = 7$	$N = 9$
\bar{x}_1	0.02544604	0.01591988
\bar{x}_2	0.12923440	0.08198445
\bar{x}_3	0.29707742	0.19331428
\bar{x}_4	0.50	0.33787329
\bar{x}_5	0.70292257	0.50
\bar{x}_6	0.80076559	0.66212671
\bar{x}_7	0.97455395	0.80668572
\bar{x}_8	-	0.91801555
\bar{x}_9	-	0.98408012

In base alle precedenti considerazioni si evince che in uno spazio vettoriale polinomiale V_N , ci possono essere diversi set di vettori di base. Quelli considerati come *set tipici* sono:

$$p_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.1.35)$$

$$p_k(x) = \frac{\mathcal{L}(x)}{(x-x_k)\mathcal{L}^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.1.36)$$

$$p_1(x) = 1, \quad p_k(x) = r_{k-1}(x)(x-x_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots, N \quad (1.1.37)$$

Per concludere si può osservare dall'equazione (1.1.36) che il set di vettori di base espresso da tale relazione dipende anche dalla distribuzione dei punti nodali, ovvero dalle coordinate della discretizzazione. Ciò significa che, nel caso in cui tali coordinate siano assunte quali radici del polinomio di Legendre $L_N(x)$ di grado N nell'intervallo $[-1,1]$, l'equazione (1.1.36) si particolarizza nella forma seguente:

$$p_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x-x_k)L_N^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.1.38)$$

1.2 FORMULAZIONE MATEMATICA DEL *GD.Q. METHOD*

1.2.1 Introduzione

Il metodo di quadratura differenziale proposto mirava a superare le difficoltà, connesse con la stabilità numerica e l'elevato costo computazionale, incontrate nell'utilizzo della procedura alle differenze finite. Nello sviluppo del metodo, una delle maggiori difficoltà ha riguardato la determinazione dei coefficienti di ponderazione impiegati per l'approssimazione delle derivate.

Una volta illustrati i fondamenti del D.Q.M., ovvero l'analisi dello spazio vettoriale lineare e l'approssimazione funzionale, è possibile mostrare in dettaglio il modo con cui si determinano i coefficienti di ponderazione. Si suppone che la soluzione delle P.D.E. venga approssimata mediante un polinomio di ordine superiore. Poiché, in questa situazione, l'approssimazione fatta secondo il D.Q.M. è strettamente legata al tipo di polinomio approssimante adottato, la tecnica numerica viene anche definita *Quadratura Differenziale di tipo Polinomiale (P.D.Q.)*.

Come descritto in precedenza, la tecnica di quadratura differenziale in narrativa approssima le derivate ordinarie o parziali di una funzione rispetto a una variabile spaziale, attraverso una somma lineare pesata dei valori della funzione in tutti i punti in cui è stato discretizzato il dominio. Il punto chiave della tecnica è la determinazione dei coefficienti di ponderazione, per le derivate di qualunque ordine.

Il calcolo dei coefficienti di ponderazione nel P.D.Q.M. venne eseguito inizialmente da Bellman e i suoi collaboratori. Nel 1971 essi suggerirono due vie per definire i coefficienti di ponderazione relativi al primo ordine di derivazione. Il primo modo comporta la soluzione di un sistema di equazioni algebriche. Sfortunatamente, quando il numero di punti nodali e l'ordine di derivazione risultano elevati, la matrice del sistema di equazioni algebriche risulta mal condizionata e l'inversione della matrice stessa è difficoltosa. Il secondo propone una semplice formulazione algebrica, ma con l'inconveniente di dover scegliere i punti nodali come radici del polinomio di Legendre $L_N^*(x)$ shiftato nell'intervallo $[0,1]$. Nella maggior parte delle pionieristiche applicazioni del metodo di quadratura differenziale si utilizzò il primo tra i due approcci, poiché esso permetteva una scelta arbitraria dei punti della discretizzazione.

In conclusione, gli inconvenienti incontrati sono due. Il primo metodo porta ad un sistema mal condizionato, all'aumentare del numero di punti nodali e all'aumentare dell'ordine di derivazione. Il secondo, vincola la discretizzazione, in quanto i punti nodali devono coincidere con le radici dei polinomi shiftati di Legendre.

Per superare queste difficoltà vennero fatti numerosi tentativi che sfociarono in un nuovo criterio di calcolo dei suddetti coefficienti. Tale approccio venne introdotto nel 1989 da Quan e Chang, i quali adottarono i polinomi interpolanti di Lagrange come funzioni test ottenendo così delle formulazioni algebriche non solo per i coefficienti relativi al primo ordine di derivazione, ma anche per quelli relativi al secondo. L'impiego dei polinomi di Lagrange rende libera la scelta dei punti della discretizzazione del dominio. Ciò significa che non si è più vincolati ad assumere come punti di valutazione delle derivate le radici dei polinomi shiftati di Legendre.

A questo punto, però, si sollevarono le seguenti due questioni: la prima relativa al perché dovessero esistere diversi modi per calcolare i coefficienti di ponderazione; la seconda relativa al fatto che i coefficienti definiti attraverso due modalità differenti fossero effettivamente i medesimi. Rispondere a queste due domande fu semplice mediante l'analisi dello spazio vettoriale lineare. Sfruttando le proprietà di tale spazio, Shu trovò che tutti i metodi di calcolo dei coefficienti nel P.D.Q.M. possono essere generalizzati attraverso un'adeguata scelta dei vettori di base nello spazio vettoriale lineare.

Nel 1992 venne introdotta da Shu e Richards una variante del metodo di quadratura originale. Come caso generale, Shu presentò una semplice formulazione algebrica per calcolare i coefficienti di ponderazione relativi al primo ordine di derivazione senza alcuna restrizione in merito alla scelta dei punti nodali oltre ad una relazione ricorsiva per il calcolo dei coefficienti relativi al secondo ed agli ordini superiori di derivazione. La variante in parola impiega semplici relazioni ricorsive per la determinazione dei coefficienti di ponderazione delle derivate di qualsiasi ordine e fa uso dei polinomi di Lagrange. La generalizzazione del metodo di quadratura, che elimina le difficoltà precedentemente menzionate, quali il malcondizionamento della matrice risolvete il sistema algebrico e la scelta non arbitraria dei punti nodali, costituisce il "*metodo generalizzato di quadratura differenziale*" (*Generalized Differential Quadrature Method* oppure *G.D.Q. Method*).

In questa parte verrà mostrato, in modo dettagliato, tutto l'iter descritto nel caso di problemi monodimensionali con l'estensione del discorso alla soluzione di problemi multidimensionali.

1.2.2 Calcolo dei coefficienti per le derivate del primo ordine

E' già stato descritto precedentemente come l'approssimazione delle derivate mediante il D.Q.M. sia stata proposta da Bellman e i suoi collaboratori estendendo il concetto di "quadratura integrale". In tale contesto è stata mostrata anche l'espressione mediante cui è possibile approssimare la derivata del primo ordine di una funzione monodimensionale regolare definita in un intervallo chiuso; tale espressione è riportata di seguito:

$$f'(x_i) = f^{(1)}(x_i) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \cong \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(1)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.2.1)$$

Osservandola si evince che essa non è ancora stata esplicitata in modo esaustivo in quanto, al momento, non è stato ancora chiarito il procedimento con cui vengono definiti i relativi coefficienti di ponderazione $\zeta_{ij}^{(1)}$. Di seguito si mostra come tali coefficienti possono essere calcolati in modo efficiente adottando alcune formulazioni esplicite.

1.2.2.1 Approcci di Bellman

I primi metodi di valutazione dei coefficienti di ponderazione vennero sviluppati da Bellman e Casti (1971), i quali proposero due diversi modi per calcolare i vari $\zeta_{ij}^{(1)}$ presenti nell'equazione (1.2.1). Essenzialmente, questi due approcci si differenziano a causa di un aspetto fondamentale, ossia la scelta delle *funzioni test* o polinomi di base.

1.2.2.1.1 Primo approccio di Bellman

In questo primo criterio, le funzioni di base scelte da Bellman sono del tipo seguente:

$$p_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.2.2)$$

Ovviamente, tale scrittura definisce N polinomi di base in relazione al parametro k . A questo punto, se si osserva l'equazione (1.2.1), si può notare che i coefficienti $\zeta_{ij}^{(1)}$ hanno entrambe gli indici che variano tra 1 ed N , per cui si deve ottenere un numero totale di coefficienti pari a $N \times N$. Per determinare i coefficienti $\zeta_{ij}^{(1)}$ nell'approssimazione (1.2.1), si

può procedere in analogia con il classico caso di quadratura, richiedendo che l'equazione (1.2.1) in parola sia verificata per la classe di funzioni considerate. Ricordando che il dominio è stato preventivamente discretizzato in N punti nodali, per il calcolo dei coefficienti sarà, quindi, necessario applicare la legge di quadratura alle N funzioni test negli N punti del dominio discreto in modo da ottenere $N \times N$ equazioni algebriche.

Per la (1.2.1), i polinomi in forma monomia (1.2.2) conducono ad un sistema lineare di N equazioni algebriche nelle N incognite $\zeta_{i1}^{(1)}, \zeta_{i2}^{(1)}, \dots, \zeta_{iN}^{(1)}$, per valori x_i distinti ed arbitrari ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$\left. \frac{dp_k(x)}{dx} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(1)} x_j^{k-1} = (k-1)x_i^{k-2}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.2.3)$$

Dalla soluzione del sistema algebrico lineare (1.2.3) si determinano in maniera esplicita i coefficienti $\zeta_{ij}^{(1)}$, una volta definiti i punti x_i del dominio. In altre parole, pretendendo che l'equazione (1.2.1) sia verificata per tutti i polinomi (1.2.2) di grado minore e uguale a $N-1$, si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} k=1 \Rightarrow \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(1)} = \zeta_{i1}^{(1)} + \zeta_{i2}^{(1)} + \dots + \zeta_{iN}^{(1)} = 0 \\ k=2 \Rightarrow \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(1)} x_j = \zeta_{i1}^{(1)} x_1 + \zeta_{i2}^{(1)} x_2 + \dots + \zeta_{iN}^{(1)} x_N = 1 \\ k=3 \Rightarrow \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(1)} x_j^2 = \zeta_{i1}^{(1)} x_1^2 + \zeta_{i2}^{(1)} x_2^2 + \dots + \zeta_{iN}^{(1)} x_N^2 = 2x_i \\ \vdots \\ k=N \Rightarrow \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(1)} x_j^{N-1} = \zeta_{i1}^{(1)} x_1^{N-1} + \zeta_{i2}^{(1)} x_2^{N-1} + \dots + \zeta_{iN}^{(1)} x_N^{N-1} = (N-1)x_i^{N-2} \end{array} \right. \quad (1.2.4)$$

Il sistema algebrico (1.2.4) assume la seguente forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_j & \dots & x_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & x_3^{N-1} & \dots & x_j^{N-1} & \dots & x_N^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{i1}^{(1)} \\ \zeta_{i2}^{(1)} \\ \zeta_{i3}^{(1)} \\ \vdots \\ \zeta_{ij}^{(1)} \\ \vdots \\ \zeta_{iN}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_i \\ \vdots \\ (j-1)x_i^{j-2} \\ \vdots \\ (N-1)x_i^{N-2} \end{bmatrix} \quad (1.2.5)$$

dove la matrice dei coefficienti è la *matrice di Vandermonde*:

$$\underline{V} = \underline{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_j & \dots & x_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & x_3^{N-1} & \dots & x_j^{N-1} & \dots & x_N^{N-1} \end{bmatrix} \quad (1.2.6)$$

Il sistema di equazioni appena mostrato presenta un'unica soluzione poiché la matrice ad esso associata è la classica matrice di Vandermonde. Tale matrice risulta mal condizionata se il numero N è elevato. Questo fenomeno comporta delle difficoltà nella sua inversione e, di conseguenza, nella soluzione del sistema stesso. Il fenomeno del malcondizionamento peggiora aumentando il numero di punti nodali utilizzati, come pure l'ordine delle derivate. E' stato a causa di tale inconveniente che l'uso di questo approccio ha permesso delle applicazioni numeriche solo per $N \leq 13$.

1.2.2.1.2 Secondo approccio di Bellman

A differenza del caso precedente ed analogamente alla formula d'interpolazione di Lagrange, in questo approccio le funzioni test scelte sono i polinomi di seguito riportati:

$$p_k(x) = \frac{L_N^*(x)}{(x-x_k)L_N^{*(1)}(x_k)} \quad (1.2.7)$$

dove $L_N^*(x)$ rappresenta il polinomio shiftato di Legendre di grado N ed $L_N^{*(1)}(x)$ indica la derivata del primo ordine del polinomio medesimo. In funzione di questa scelta, Bellman, Kashef e Casti (1972) dimostrarono che, con una discretizzazione ottenuta scegliendo i

vari x_k come le radici dei polinomi shiftati di Legendre ed applicando l'equazione (1.2.1) in questi N punti nodali, i coefficienti $\zeta_{ij}^{(1)}$ possono essere ottenuti con una semplice formulazione algebrica:

$$\zeta_{ij}^{(1)} = \frac{L_N^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)L_N^{(1)}(x_j)}, \quad i \neq j \quad (1.2.8)$$

$$\zeta_{ii}^{(1)} = \frac{1 - 2x_i}{2x_i(x_i - 1)}, \quad i = j \quad (1.2.9)$$

Questo procedimento si rivelò da una parte efficace perché consente di calcolare direttamente i coefficienti $\zeta_{ij}^{(1)}$ senza risolvere alcun sistema algebrico, ma d'altra alquanto restrittivo per quanto riguarda la scelta del tipo di discretizzazione del dominio. Usando tali relazioni, si può notare come il calcolo dei coefficienti di ponderazione diventi un compito assai semplice. Ad ogni modo, questo approccio non è flessibile come il precedente poiché, in questo caso, le N coordinate dei punti nodali non possono essere scelte arbitrariamente. Infatti, i punti x_k devono essere le radici del generico polinomio di Legendre $L_N^*(x)$ di grado N shiftato nell'intervallo $[0,1]$. A causa di quest'ultimo aspetto associato alla scelta dei punti nodali, tale criterio non ha trovato lo stesso grado di applicazione del primo.

1.2.2.2 Approccio di Quan e Chang

Con l'intento di migliorare i risultati ottenuti da Bellman, vennero fatti molti altri tentativi da parte dei ricercatori per definire dei criteri alternativi nella valutazione dei coefficienti di ponderazione. Uno degli approcci che si dimostrò veramente utile fu quello introdotto nel 1992 da Quan e Chang. In base ad esso, le funzioni test da adottare sono individuate dai seguenti polinomi interpolanti di Lagrange:

$$p_k(x) = \frac{\mathcal{L}(x)}{(x - x_k)\mathcal{L}^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.2.10)$$

dove:

$$\mathcal{L}(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_N) = \prod_{j=1}^N (x - x_j) \quad (1.2.11)$$

$$\mathcal{L}^{(1)}(x_k) = (x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_N) = \prod_{j=1, j \neq k}^N (x_k - x_j) \quad (1.2.12)$$

In funzione di questa scelta, essi dimostrarono che, applicando l'equazione (1.2.1) negli N punti nodali in cui è stato discretizzato il dominio, i coefficienti di ponderazione $\zeta_{ij}^{(1)}$ possono essere ottenuti attraverso le seguenti formulazioni algebriche:

$$\zeta_{ij}^{(1)} = \frac{1}{x_j - x_i} \prod_{k=1, k \neq i, j}^N \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k}, \quad i \neq j \quad (1.2.13)$$

$$\zeta_{ij}^{(1)} = \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_k}, \quad i = j \quad (1.2.14)$$

Come per il secondo approccio di Bellman, il calcolo dei coefficienti di ponderazione è abbastanza semplice con relazioni di questo tipo ma, a differenza di esso, le formule trovate possono essere applicate senza nessuna restrizione sulla scelta dei punti nodali.

1.2.2.3 Approccio generale di Shu

Inspirato dagli approcci sviluppati da Bellman, Shu nel 1991 riuscì a definire una modalità di calcolo dei coefficienti di ponderazione che può essere vista come un *approccio generale*. Infatti, mediante esso si riescono a riunire, sotto un'unica forma, tutti i criteri sviluppati precedentemente.

Partendo dai due approcci di Bellman, Shu sollevò due questioni: la prima riguardava il perché esisteva la possibilità di utilizzare due approcci per calcolare i coefficienti di ponderazione; la seconda, invece, metteva in evidenza il dubbio che questi due approcci fornissero gli stessi risultati. Per dare una risposta definitiva a questi quesiti è risultato fondamentale introdurre i concetti di approssimazione polinomiale ed analisi di uno spazio vettoriale lineare. Entrambe queste nozioni sono state già descritte precedentemente; ora si citeranno solamente gli aspetti più rilevanti.

Secondo il teorema dell'approssimazione polinomiale di Weierstrass, una funzione $f(x)$ continua nel suo dominio di definizione può essere approssimata uniformemente con una successione infinita di polinomi. In pratica, può essere utilizzata una somma finita di polinomi di grado elevato.

Alcuni metodi, come ad esempio quello spettrale, hanno applicato con successo il concetto dell'approssimazione polinomiale di ordine superiore, per la soluzione delle equazioni alle derivate parziali. E' possibile mostrare come la soluzione di una P.D.E. possa essere approssimata accuratamente tramite un polinomio di ordine superiore. Seguendo tale approccio, si suppone che una funzione continua in un dominio possa essere approssimata con un polinomio di ordine $N-1$ per N abbastanza grande. In base a quanto detto, il polinomio in questione definisce uno spazio vettoriale lineare N -dimensionale V_N , poiché risulta chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per uno scalare, oltre ad essere esprimibile in diversi modi. Se $p_k(x)$, $k=1,2,\dots,N$, è una base dello spazio vettoriale V_N , in base al teorema dell'approssimazione polinomiale, $f(x)$ può essere approssimata con un polinomio di grado $N-1$, che è combinazione lineare degli elementi della base:

$$f(x) \cong P_N(x) = \sum_{k=1}^N d_k p_k(x) \quad (1.2.15)$$

dove d_k rappresentano delle costanti che dipendono dalla tipologia di vettori di base scelti. Utilizzando come base dello spazio vettoriale V_N , i polinomi in forma monomia, $p_k(x) = x^{k-1}$, $k=1,2,\dots,N$, la relazione precedente può essere riscritta nella seguente forma:

$$f(x) \cong P_N(x) = \sum_{k=1}^N c_k x^{k-1} \quad (1.2.16)$$

dove c_k rappresentano delle opportune costanti. Come mostrato precedentemente, esistono diversi set di vettori di base nello spazio V_N . Il fatto che i vettori del suddetto spazio siano, a tutti gli effetti, dei polinomi porta a sostenere che i vettori di base possono

anche essere chiamati *polinomi di base*. Nello spazio vettoriale lineare V_N , ogni base può essere espressa in maniera univoca come combinazione lineare di un'altra base. Quattro "tipici set" di polinomi base di V_N sono elencati di seguito:

$$p_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.2.17)$$

$$p_k(x) = \frac{L_N^*(x)}{(x-x_k)L_N^{*(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.2.18)$$

$$p_k(x) = \frac{\mathcal{L}(x)}{(x-x_k)\mathcal{L}^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.2.19)$$

$$p_1(x) = 1, \quad p_k(x) = r_{k-1}(x)(x-x_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots, N \quad (1.2.20)$$

dove $L_N^*(x)$ rappresenta il polinomio shiftato di Legendre di grado N ed $\mathcal{L}(x)$ è definito dall'equazione (1.2.11). Fra i quattro set evidenziati, il secondo ed il terzo derivano entrambi dal concetto di polinomio interpolante di Lagrange, ma sono diversi per via della distribuzione dei punti nodali (il secondo set implica una discretizzazione eseguita utilizzando le radici del polinomio shiftato di Legendre di grado N , per cui è descrivibile come un caso particolare del terzo). A differenza loro, il quarto lo si ottiene, invece, partendo dal concetto di polinomio interpolante di Newton.

Si può anche notare come la prima relazione rispecchi la scrittura delle funzioni test del primo approccio di Bellman, mentre la seconda rifletta quelle del secondo approccio. In altre parole, si può osservare che le funzioni test dei due approcci di Bellman sono proprio due set di polinomi di base per lo spazio V_N . A questo punto, ricordando che l'equazione (1.2.1) definisce un operatore lineare, per le proprietà dello spazio vettoriale lineare se un set di polinomi di base soddisfa l'operatore lineare dell'equazione (1.2.1), lo stesso si può dire per gli altri polinomi di base. Ciò significa che *ogni set di polinomi base deve fornire gli stessi coefficienti di ponderazione per cui il valore di essi è indipendente dalla scelta delle funzioni test*. D'altra parte, la differenza tra i due approcci di Bellman è dovuta solamente all'uso di diverse funzioni test che, come si è già affermato, sono dei polinomi di base. In base a questo si può, quindi, dedurre che *l'uso di diversi set di polinomi base*

indicherà, conseguentemente, l'uso di differenti approcci per il calcolo dei coefficienti di ponderazione e che, poiché ci sono diversi set di polinomi base in spazio vettoriale lineare V_N , esistono molti criteri per calcolare quest'ultimi.

Appurato tutto ciò, i coefficienti di cui sopra dovranno essere utilizzati per la discretizzazione di una P.D.E. in quanto le proprietà di uno spazio vettoriale lineare forniscono anche questa capacità. A tal proposito si ricordi sempre che la soluzione di tale equazione è approssimabile mediante un polinomio di grado $N-1$ (costituente uno spazio vettoriale lineare V_N); polinomio la cui espressione è ancora sconosciuta. In effetti, se si osserva l'equazione (1.2.15) si intuisce come la sua scrittura sarà definita in particolare solo quando saranno determinate le costanti d_k anche perché il set di polinomi di base può essere scelto indipendentemente dalla soluzione nello spazio V_N . Inoltre, dalla proprietà di uno spazio vettoriale lineare si evince anche che, se un set di polinomi base soddisfa l'operatore lineare dell'equazione (1.2.1), allo stesso modo si comporta ogni polinomio base dello spazio V_N . Questo indica che la soluzione della P.D.E. scritta secondo l'equazione (1.2.15) soddisfa anch'essa l'equazione (1.2.1) e cioè, in altre parole, che *i coefficienti di ponderazione ottenuti dai polinomi base possono essere utilizzati per discretizzare le derivate di una P.D.E.*

A questo punto si noti che, quando il set di polinomi base è dato dall'equazione (1.2.17), è possibile ottenere lo stesso sistema di equazioni (1.2.4) del primo approccio di Bellman per definire i coefficienti di ponderazione. Allo stesso modo si osservi che se il set di polinomi base è quello fornito dall'equazione (1.2.18), si ritrova la stessa formulazione algebrica del secondo approccio di Bellman (1.2.7) per calcolare i suddetti coefficienti.

Seguendo l'approccio di Shu si definiscono tali coefficienti usando due differenti set di polinomi di base (o funzioni test). In particolare, il primo set a cui si farà riferimento è quello dei polinomi interpolanti di Lagrange nella loro scrittura più generale (1.2.10), mentre il secondo è quello dei polinomi in forma monomia (1.2.17).

Per semplicità si pone:

$$\mathcal{L}(x) = N(x, x_k)(x - x_k), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.2.21)$$

Come conseguenza delle (1.2.11), (1.2.12) e (1.2.21), si può verificare che:

$$N(x_i, x_j) = \mathcal{L}^{(1)}(x_i) \delta_{ij} \quad (1.2.22)$$

dove δ_{ij} è l'operatore di Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Per via dell'espressione di $\mathcal{L}(x)$, l'equazione (1.2.19) può essere semplificata nella seguente forma:

$$p_k(x) = \frac{N(x, x_k)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.2.23)$$

Essa rappresenta la nuova scrittura per il set di polinomi di base adottato. Se si applica a quest'ultima relazione (1.2.23) la legge di quadratura differenziale (1.2.1), si può scrivere:

$$\left. \frac{dp_k(x)}{dx} \right|_{x=x_h} = \frac{N^{(1)}(x_h, x_k)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_k)} = \sum_{j=1}^N \varsigma_{hj}^{(1)} p_k(x_j) = \sum_{j=1}^N \varsigma_{ij}^{(1)} \frac{N(x_j, x_k)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_k)} \quad (1.2.24)$$

Moltiplicando entrambi i membri per $\mathcal{L}^{(1)}(x_k)$, ricordando la relazione (1.2.22) ed eliminando i termini nulli, si ottiene:

$$N^{(1)}(x_h, x_k) = \sum_{j=1}^N \varsigma_{hj}^{(1)} \mathcal{L}^{(1)}(x_j) \delta_{jk} = \varsigma_{hk}^{(1)} \mathcal{L}^{(1)}(x_k) \quad (1.2.25)$$

Da cui operando il cambiamento di indici $i = h, j = k$, si ricava:

$$\varsigma_{ij}^{(1)} = \frac{N^{(1)}(x_i, x_j)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_j)} \quad (1.2.26)$$

In essa compaiono i termini $\mathcal{L}^{(1)}(x_j)$ ed $N^{(1)}(x_i, x_j)$ che devono essere opportunamente valutati; ; in particolare, il primo può essere facilmente calcolato in base all'equazione (1.2.12), mentre per definire il secondo occorre derivare l'equazione (1.2.21) rispetto la variabile x . La generica derivata di ordine n -esimo del polinomio $\mathcal{L}(x)$ risulta esprimibile con la formulazione ricorsiva:

$$\mathcal{L}^{(n)}(x) = N^{(n)}(x, x_k)(x - x_k) + nN^{(n-1)}(x, x_k) \quad (1.2.27)$$

in cui $k = 1, 2, \dots, N$, $n = 1, 2, \dots, N-1$ e dove $\mathcal{L}^{(n)}(x)$ ed $N^{(n)}(x, x_k)$ indicano le derivate di ordine n , rispettivamente, di $\mathcal{L}(x)$ ed $N(x, x_k)$. Dall'osservazione di questa relazione è possibile notare come $N^{(1)}(x_i, x_j)$ sia esprimibile nel modo seguente:

$$N^{(1)}(x_i, x_j) = \frac{M^{(1)}(x_i)}{x_i - x_j}, \quad i \neq j \quad (1.2.28)$$

$$N^{(1)}(x_i, x_i) = \frac{M^{(2)}(x_i)}{2}, \quad i = j \quad (1.2.29)$$

Ora che sono noti i termini $N^{(1)}(x_i, x_j)$, attraverso la loro sostituzione nell'equazione (1.2.26) si riescono ad ottenere i coefficienti di ponderazione per la derivata di primo ordine introdotta da Quan e Chang (1989):

$$\zeta_{ij}^{(1)} = \frac{\mathcal{L}^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)\mathcal{L}^{(1)}(x_j)}, \quad i \neq j \quad (1.2.30)$$

$$\zeta_{ii}^{(1)} = \frac{\mathcal{L}^{(2)}(x_i)}{2\mathcal{L}^{(1)}(x_i)}, \quad i = j \quad (1.2.31)$$

Dall'analisi di queste espressioni si può osservare che, una volta definito il tipo di discretizzazione x_i , la valutazione dei $\zeta_{ij}^{(1)}$ risulta elementare vista la semplicità di

definizione di $\mathcal{L}^{(1)}(x_i)$. L'equazione (1.2.30) permette di calcolare i $\zeta_{ij}^{(1)}$, $i \neq j$, senza alcuna restrizione sulla scelta dei punti nodali x_i . Al contrario, il calcolo dei coefficienti $\zeta_{ii}^{(1)}$ si basa sulla determinazione della derivata seconda $\mathcal{L}^{(2)}(x_i)$, che non è facile ottenere. Questa difficoltà può essere superata qualora si passi ad utilizzare il secondo set di polinomi base a cui si accennava in precedenza. Infatti, se si rammenta la proprietà per cui tutti i set di polinomi base di V_N soddisfano l'operatore lineare dell'equazione (1.2.1), come conseguenza di questo fatto si ha che il sistema di equazioni per il calcolo dei coefficienti $\zeta_{ij}^{(1)}$ dedotto dai polinomi interpolanti di Lagrange è equivalente a quello derivato da un altro set di polinomi di base come, ad esempio, $p_k(x) = x^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, N$. Ragionando in questo modo, è possibile definire altre relazioni per il calcolo dei $\zeta_{ii}^{(1)}$. Pertanto, per la determinazione dei coefficienti $\zeta_{ij}^{(1)}$, il sistema di equazioni derivato utilizzando i polinomi di Lagrange equivale a quello che si ricava impiegando la seconda base $p_k(x) = x^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, N$. Prendendo in considerazione il polinomio di base $p_k(x) = x^{k-1}$ per $k = 1$ (ossia $p_1(x) = x^0 = 1$) e applicando la legge di quadratura differenziale (1.2.1) a tale polinomio, i coefficienti $c_{ij}^{(1)}$ soddisfano la seguente relazione:

$$\left. \frac{dp_1(x)}{dx} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(1)} 1 = 0 \Rightarrow \zeta_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \zeta_{ij}^{(1)} \quad (1.2.32)$$

Le equazioni (1.2.30), (1.2.31) e (1.2.32) rappresentano, quindi, due diverse formulazioni per il calcolo dei coefficienti di ponderazione $\zeta_{ij}^{(1)}$; formulazioni che sono state sviluppate utilizzando due diversi set di polinomi di base appartenenti allo spazio vettoriale lineare V_N . In particolare, applicando l'approccio generale di Shu si ha che i coefficienti $\zeta_{ij}^{(1)}$ vanno calcolati in base all'equazione (1.2.30) nel caso di $i \neq j$, mentre i coefficienti $\zeta_{ii}^{(1)}$ sono da valutare in un secondo tempo attraverso le (1.2.32). Inoltre, risulta evidente che nelle equazioni precedenti i coefficienti di ponderazione dipendono solo dai punti nodali.

A questo punto è possibile fare un'ulteriore deduzione. I coefficienti di ponderazione possono essere dedotti attraverso l'interpolazione polinomiale di Lagrange. Si consideri la legge di interpolazione polinomiale di Lagrange (1.1.16) riscritta per semplicità:

$$f(x) = \sum_{j=1}^N p_j(x) f(x_j) + R(x) \quad (1.2.33)$$

dove con $p_j(x) = l_j(x)$ si indicano in questo caso i polinomi di Lagrange (1.2.19) e con $R(x)$ l'errore di troncamento. Trascurando l'errore di troncamento e rimandando agli studi di Shu per l'analisi dell'errore stesso, si espliciti la derivata prima dell'equazione (1.2.33) nel generico punto x_i :

$$f^{(1)}(x_i) \cong \sum_{j=1}^N p_j^{(1)}(x_i) f(x_j) = \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(1)} f(x_j) \quad (1.2.34)$$

Ricordando la definizione dei polinomi di Lagrange (1.2.19) e scrivendone la derivata prima, si ottiene:

$$p_j^{(1)}(x_i) = \frac{\mathcal{L}^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j) \mathcal{L}^{(1)}(x_j)} = \zeta_{ij}^{(1)} \quad (1.2.35)$$

Tale relazione fornisce un'ulteriore interpretazione per i coefficienti di ponderazione. Essi possono essere ottenuti direttamente attraverso l'interpolazione polinomiale di Lagrange e rappresentano le derivate dei polinomi di Lagrange calcolate nei punti in cui si è discretizzato il dominio. In questa maniera risulta facile intuire l'anello di congiunzione tra la funzione di cui si vuole determinare la derivata in un punto, il rispettivo polinomio approssimante e i coefficienti di ponderazione. Inoltre è facile intuire dalle considerazioni precedenti che la legge di quadratura differenziale risulta una formulazione esatta qualora la funzione di cui si vuole calcolare le derivate sia un polinomio, visto che tale polinomio può essere espresso esattamente come combinazione lineare di una base polinomiale dello spazio vettoriale lineare V_N .

1.2.3 Calcolo dei coefficienti per le derivate di ordine superiore al primo

Fino ad ora si è sempre puntato l'attenzione sull'approssimazione delle derivate del primo ordine di una funzione regolare monodimensionale. Il fatto che nelle equazioni governanti il problema compaiano spesso delle derivate parziali di ordine superiore al primo (come, ad esempio, nell'analisi statica o dinamica delle travi), fa sì che anche queste debbano essere approssimate attraverso un'espressione analoga all'equazione (1.2.1). Anche in questa situazione, il problema rimane sempre lo stesso, ossia quello della definizione dei coefficienti di ponderazione che servono per approssimare le derivate di ordine superiore al primo. Si mostrerà come tali coefficienti possano essere determinati agevolmente attraverso delle relazioni ricorsive; in particolare, sono mostrate prima le formule per il calcolo dei coefficienti per l'approssimazione delle derivate del secondo ordine, per poi definire le formule ricorsive mediante cui si è in grado di calcolare i coefficienti di ponderazione per le derivate di ordine superiore al primo.

1.2.3.1 Coefficienti di ponderazione per le derivate del secondo ordine

In base a quanto è stato appena accennato, sulla base della definizione di “quadratura differenziale” è possibile esprimere la derivata del secondo ordine di una funzione $f(x)$ regolare e monodimensionale definita in un intervallo chiuso attraverso la relazione:

$$f''(x_i) = f^{(2)}(x_i) = \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_i} \cong \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(2)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.2.36)$$

dove $f^{(2)}(x_i)$ è la derivata seconda di $f(x)$ nel punto nodale x_i , $\zeta_{ij}^{(2)}$ rappresentano i coefficienti di ponderazione relativi a tale derivata e $f(x_j)$ definiscono i valori funzionali nei punti x_j in cui è stato discretizzato il dominio. Ovviamente, visto che tale espressione è formalmente analoga all'equazione (1.2.1), anch'essa definisce un *operatore lineare*. La sola differenza apprezzabile tra l'equazione (1.2.36) e l'equazione (1.2.1) consiste nell'uso di diversi coefficienti di ponderazione che, come in precedenza, sono al momento incogniti. Di seguito si mostrano diverse modalità di calcolo dei suddetti coefficienti $\zeta_{ij}^{(2)}$.

1.2.3.1.1 Approccio di Quan e Chang

Nel 1989 Quan e Chang definirono delle relazioni per il calcolo dei coefficienti $\zeta_{ij}^{(2)}$ usando i polinomi interpolanti di Lagrange come funzioni test. Tali relazioni vengono riportate di seguito:

$$\zeta_{ij}^{(2)} = \frac{2}{x_j - x_i} \left(\prod_{k=1, k \neq i, j}^N \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} \right) \left(\sum_{l=1, l \neq i, j}^N \frac{1}{x_i - x_l} \right), \quad i \neq j \quad (1.2.37)$$

$$\zeta_{ii}^{(2)} = 2 \sum_{k=1, k \neq i}^{N-1} \left[\frac{1}{x_i - x_k} \left(\sum_{l=k+1, l \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_l} \right) \right], \quad i = j \quad (1.2.38)$$

1.2.3.1.2 Approccio generale di Shu

Analogamente a quanto fatto per le derivate del primo ordine, l'approccio generale di Shu per il calcolo dei coefficienti di ponderazione si basa sui concetti fondamentali dell'approssimazione polinomiale e dell'analisi di uno spazio vettoriale lineare. Anche in questa situazione, Shu definì tali coefficienti usando i due set di polinomi base descritti dall'equazioni (1.2.17) e (1.2.19). In particolare, facendo riferimento al set dei polinomi interpolanti di Lagrange $\mathcal{L}(x)$ nella loro scrittura più generale (1.2.10), (1.2.11) e (1.2.12), egli riuscì a definire i vari $\zeta_{ij}^{(2)}$ sostituendo l'equazione (1.2.23) all'interno dell'equazione (1.2.19).

In maniera analoga a quanto fatto per determinare i coefficienti per la derivata prima, applicando alla relazione (1.2.23) la legge di quadratura differenziale (1.2.36), si ottiene:

$$\left. \frac{d^2 p_k(x)}{dx^2} \right|_{x=x_h} = \frac{N^{(2)}(x_h, x_k)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_k)} = \sum_{j=1}^N \zeta_{hj}^{(2)} p_k(x_j) = \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(2)} \frac{N(x_j, x_k)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_k)} \quad (1.2.39)$$

Moltiplicando entrambi i membri per $\mathcal{L}^{(1)}(x_k)$, ricordando la relazione (1.2.22) ed eliminando i termini nulli, si ottiene:

$$N^{(2)}(x_h, x_k) = \sum_{j=1}^N \zeta_{hj}^{(2)} \mathcal{L}^{(1)}(x_j) \delta_{jk} = \zeta_{hk}^{(2)} \mathcal{L}^{(1)}(x_k) \quad (1.2.40)$$

Da cui operando il cambiamento di indici $i = h$, $j = k$, si ricava:

$$\zeta_{ij}^{(2)} = \frac{N^{(2)}(x_i, x_j)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_j)} \quad (1.2.41)$$

Come in precedenza, il termine $\mathcal{L}^{(1)}(x_j)$ può essere facilmente calcolato attraverso l'equazione (1.2.12), mentre il termine $N^{(2)}(x_i, x_j)$ può essere valutato sfruttando l'equazione (1.2.27). Da tale relazione si evince:

$$N^{(2)}(x_i, x_j) = \frac{\mathcal{L}^{(2)}(x_i) - 2N^{(1)}(x_i, x_j)}{x_i - x_j}, \quad i \neq j \quad (1.2.42)$$

$$N^{(2)}(x_i, x_i) = \frac{\mathcal{L}^{(3)}(x_i)}{3}, \quad i = j \quad (1.2.43)$$

Ora che sono noti i termini $N^{(2)}(x_i, x_j)$, la loro sostituzione nell'equazione (1.2.41) porta a definire le seguenti espressioni per i coefficienti di ponderazione:

$$\zeta_{ij}^{(2)} = \frac{\mathcal{L}^{(2)}(x_i) - 2N^{(1)}(x_i, x_j)}{(x_i - x_j) \mathcal{L}^{(1)}(x_j)}, \quad i \neq j \quad (1.2.44)$$

$$\zeta_{ii}^{(2)} = \frac{\mathcal{L}^{(3)}(x_i)}{3\mathcal{L}^{(1)}(x_i)}, \quad i = j \quad (1.2.45)$$

Dall'analisi di queste espressioni si può osservare come l'equazione (1.2.44) possa essere ulteriormente semplificata se si sostituiscono in essa le equazioni (1.2.30) e (1.2.31). Infatti, eseguendo tale operazione si ottiene:

$$\zeta_{ij}^{(2)} = 2\zeta_{ij}^{(1)} \left(\zeta_{ii}^{(1)} - \frac{1}{x_i - x_j} \right), \quad i \neq j \quad (1.2.46)$$

Da quanto illustrato risulta evidente che i coefficienti $\zeta_{ij}^{(2)}$ siano facilmente determinabili una volta noti i valori di $\zeta_{ij}^{(1)}$ e $\zeta_{ii}^{(1)}$ oltre alla disposizione dei punti nodali. Ciò che, invece, non si presenta facile è il calcolo di $\zeta_{ii}^{(2)}$ dal momento che ciò richiede la valutazione di una derivata di terzo ordine $\mathcal{L}^{(3)}(x_i)$. Questa difficoltà può essere superata qualora si tenga conto della proprietà dello spazio vettoriale lineare V_N per la quale tutti i set di polinomi di base soddisfano l'operatore lineare dell'equazione (1.2.36). Infatti, analogamente all'analisi effettuata nel caso di derivate del primo ordine, il sistema di equazioni per il calcolo dei coefficienti $\zeta_{ij}^{(2)}$ dedotto dall'uso dei polinomi interpolanti di Lagrange (set di polinomi di base adottato) è del tutto equivalente a quello derivato da un altro set di polinomi di base come $p_k(x) = x^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, N$. In base alle precedenti affermazioni, i coefficienti $\zeta_{ij}^{(2)}$ devono anche soddisfare la seguente relazione ottenuta utilizzando il polinomio di base $p_k(x) = x^{k-1}$ per $k = 1$ (ossia $p_1(x) = x^0 = 1$):

$$\left. \frac{d^2 p_1(x)}{dx^2} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(2)} 1 = 0 \Rightarrow \zeta_{ii}^{(2)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \zeta_{ij}^{(2)} \quad (1.2.47)$$

Con tale approccio i coefficienti $\zeta_{ij}^{(2)}$ possono essere calcolati in base all'equazione (1.2.46) per $i \neq j$, mentre i coefficienti $\zeta_{ii}^{(2)}$ vengono valutati successivamente attraverso l'equazione (1.2.47).

1.2.3.2 Coefficienti per le derivate di ordine superiore: formule ricorsive di Shu

Si è visto come determinare i coefficienti di ponderazione per le derivate del primo e del secondo ordine. In base alla legge di quadratura differenziale (1.2.1), si può generalizzare tale relazione per calcolare le derivate di ordine superiore di una funzione $f(x)$ regolare in un intervallo chiuso esprimendo i seguenti operatori lineari:

$$f^{(n-1)}(x_i) = \left. \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} \right|_{x=x_i} \cong \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(n-1)} f(x_j) \quad (1.2.48)$$

$$f^{(n)}(x_i) = \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_i} \cong \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(n)} f(x_j) \quad (1.2.49)$$

per $i=1,2,\dots,N$ e $n=2,3,\dots,N-1$. Occorre notare che in base al teorema dell'approssimazione di Weierstrass deve risultare $N > n$, ossia l'ordine di quadratura N deve essere sempre maggiore dell'ordine di derivazione n . In tali relazioni $f^{(n-1)}(x_i)$ e $f^{(n)}(x_i)$ indicano, rispettivamente, le derivate di ordine $n-1$ ed n di $f(x)$ nel punto nodale x_i , $\zeta_{ij}^{(n-1)}$ e $\zeta_{ij}^{(n)}$ rappresentano i coefficienti di ponderazione relativi a tali derivate e $f(x_j)$ definiscono i valori funzionali nei punti x_j in cui è stato discretizzato il dominio. I coefficienti $\zeta_{ij}^{(n)}$ sono contraddistinti dai pedici i e j . Il pedice i indica il punto del dominio in cui si vuole calcolare la derivata generica. Lo scopo del metodo è quello di trovare una semplice espressione algebrica che permetta di calcolare i coefficienti pesati $\zeta_{ij}^{(n)}$, per una scelta arbitraria di punti nodali e per un qualsiasi ordine di derivazione superiore al primo.

In maniera analoga a quanto fatto per i coefficienti di ponderazione per le derivate del primo ordine si può procedere attraverso il primo approccio di Bellman utilizzando come polinomi di base dello spazio vettoriale polinomiale le funzioni test riportate nell'espressione (1.2.17). Per tali polinomi la regola di quadratura si presenta nella forma:

$$\left. \frac{d^n p_k(x)}{dx^n} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(n)} x_j^{k-1} = (k-1)(k-2)(k-3)\dots(k-n)x_i^{k-n-1} \quad (1.2.50)$$

$$k=1,2,\dots,N, \quad i=1,2,\dots,N, \quad N > n$$

Il sistema che si ricava dalle (1.2.50) ha come incognite i coefficienti $\zeta_{ij}^{(n)}$ ed ammette una sola soluzione, perché la matrice dei coefficienti è la matrice di Vandermonde. Anche in questo caso, però, la matrice del sistema algebrico risulta mal condizionata all'aumentare del numero di punti nodali. Quindi, pur esistendo la soluzione del sistema, risulta difficile ottenerla dal punto di vista numerico. Si vuol far rilevare allora che, sebbene i coefficienti di ponderazione in via teorica possano essere calcolati

indifferentemente seguendo uno qualsiasi degli approcci visti precedentemente, ciò non vuol dire che sia facile eseguire tale calcolo dal punto di vista numerico. Infatti, è stato già osservato che alcuni degli approcci per la determinazione dei coefficienti di ponderazione diano luogo a problemi di carattere computazionale. Il punto chiave dell'approccio generale proposto da Shu consiste nella possibilità di calcolare i coefficienti di ponderazione per qualsiasi ordine di derivazione in maniera ricorsiva, senza dover risolvere alcun sistema e senza essere obbligati a scegliere una definita tipologia di discretizzazione. E' per tali motivazioni che Shu diede l'appellativo "generalizzato" al metodo di quadratura differenziale che fa uso dell'approccio da lui proposto per il calcolo dei coefficienti di ponderazione per le derivate di qualsiasi ordine.

In modo analogo a quanto visto in precedenza, la determinazione dei coefficienti di ponderazione si basa sui concetti fondamentali dell'approssimazione polinomiale e dell'analisi di uno spazio vettoriale lineare. Anche in questo caso, le formule per il calcolo dei suddetti coefficienti verranno derivate usando due set di polinomi di base.

Il primo a cui si fa riferimento è quello riportato nell'equazione (1.2.19), ossia quello descritto dai polinomi interpolanti di Lagrange. Una volta definito tale set di vettori di base, Shu riuscì a definire i coefficienti $\zeta_{ij}^{(n-1)}$ e $\zeta_{ij}^{(n)}$ sostituendo l'espressione (1.2.23) all'interno dell'equazioni (1.2.48) e (1.2.49).

In maniera analoga a quanto fatto per determinare i coefficienti per le derivate prima e seconda, si ottiene:

$$\left. \frac{d^{(n-1)} p_k(x)}{dx^{(n-1)}} \right|_{x=x_h} = \frac{N^{(n-1)}(x_h, x_k)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_k)} = \sum_{j=1}^N \zeta_{hj}^{(n-1)} p_k(x_j) = \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(n-1)} \frac{N(x_j, x_k)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_k)} \quad (1.2.51)$$

$$N^{(n-1)}(x_h, x_k) = \sum_{j=1}^N \zeta_{hj}^{(n-1)} \mathcal{L}^{(1)}(x_j) \delta_{jk} = \zeta_{hk}^{(n-1)} \mathcal{L}^{(1)}(x_k) \quad (1.2.52)$$

$$\left. \frac{d^{(n)} p_k(x)}{dx^{(n)}} \right|_{x=x_h} = \frac{N^{(n)}(x_h, x_k)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_k)} = \sum_{j=1}^N \zeta_{hj}^{(n)} p_k(x_j) = \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(n)} \frac{N(x_j, x_k)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_k)} \quad (1.2.53)$$

$$N^{(n)}(x_h, x_k) = \sum_{j=1}^N \zeta_{hj}^{(n)} \mathcal{L}^{(1)}(x_j) \delta_{jk} = \zeta_{hk}^{(n)} \mathcal{L}^{(1)}(x_k) \quad (1.2.54)$$

Da cui operando il cambiamento di indici $i = h$, $j = k$, si ricava:

$$\zeta_{ij}^{(n-1)} = \frac{N^{(n-1)}(x_i, x_j)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_j)} \quad (1.2.55)$$

$$\zeta_{ij}^{(n)} = \frac{N^{(n)}(x_i, x_j)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_j)} \quad (1.2.56)$$

La prima di queste due equazioni può essere riscritta in altra maniera esplicitando il termine $N^{(n-1)}(x_i, x_j)$. Tale relazione risulta valida per ogni valore di i e j :

$$N^{(n-1)}(x_i, x_j) = \zeta_{ij}^{(n-1)} \mathcal{L}^{(1)}(x_j) \quad (1.2.57)$$

Analizzando queste espressioni si può osservare che $\mathcal{L}^{(1)}(x_j)$ risulta facilmente determinabile come precedentemente visto attraverso la relazione (1.2.12), mentre $N^{(n-1)}(x_i, x_j)$ ed $N^{(n)}(x_i, x_j)$ sono valutabili sfruttando la formula ricorsiva (1.2.27). Da tale relazione si evince:

$$N^{(n-1)}(x_i, x_i) = \frac{\mathcal{L}^{(n)}(x_i)}{n}, \quad i = j \quad (1.2.58)$$

$$N^{(n)}(x_i, x_j) = \frac{\mathcal{L}^{(n)}(x_i) - nN^{(n-1)}(x_i, x_j)}{x_i - x_j}, \quad i \neq j \quad (1.2.59)$$

$$N^{(n)}(x_i, x_i) = \frac{\mathcal{L}^{(n+1)}(x_i)}{n+1}, \quad i = j \quad (1.2.60)$$

Ricavando $\mathcal{L}^{(n)}(x_i)$ dall'equazione (1.2.58) e sostituendolo nell'equazione (1.2.59), si ottiene:

$$N^{(n)}(x_i, x_j) = \frac{n \left[N^{(n-1)}(x_i, x_i) - N^{(n-1)}(x_i, x_j) \right]}{x_i - x_j}, \quad i \neq j \quad (1.2.61)$$

La relazione (1.2.61) può essere ulteriormente semplificata usando l'equazione (1.2.30):

$$N^{(n)}(x_i, x_j) = \frac{n \left[\zeta_{ii}^{(n-1)} \mathcal{L}^{(1)}(x_i) - \zeta_{ij}^{(n-1)} \mathcal{L}^{(1)}(x_j) \right]}{x_i - x_j}, \quad i \neq j \quad (1.2.62)$$

Tenendo conto dell'espressione (1.2.30), utilizzando l'equazione (1.2.62) e sostituendola nell'equazione (1.2.56), si ricava la formulazione ricorsiva per il calcolo dei coefficienti di ponderazione $\zeta_{ij}^{(n)}$:

$$\zeta_{ij}^{(n)} = n \left(\zeta_{ij}^{(1)} \zeta_{ii}^{(n-1)} - \frac{\zeta_{ij}^{(n-1)}}{x_i - x_j} \right), \quad i \neq j \quad (1.2.63)$$

dove $i, j = 1, 2, \dots, N$, $n = 2, 3, \dots, N-1$.

Per quanto riguarda la determinazione dei coefficienti $\zeta_{ii}^{(n)}$, sostituendo l'equazione (1.2.60) all'interno dell'equazione (1.2.56) si ricava:

$$\zeta_{ii}^{(n)} = \frac{\mathcal{L}^{(n+1)}(x_i)}{(n+1)\mathcal{L}^{(1)}(x_i)}, \quad i = j \quad (1.2.64)$$

dove $i, j = 1, 2, \dots, N$, $n = 2, 3, \dots, N-1$. Da quanto mostrato appare evidente che l'equazione (1.2.63) offre una strada estremamente semplice per la valutazione dei coefficienti di ponderazione $\zeta_{ij}^{(n)}$ una volta noti i valori di $\zeta_{ij}^{(n-1)}$, $\zeta_{ii}^{(n-1)}$ ed $\zeta_{ij}^{(1)}$, oltre alla disposizione dei punti nodali. Ciò che, invece, non si presenta facile è il calcolo di $\zeta_{ii}^{(n)}$ dal momento che è richiesta la valutazione della derivata $\mathcal{L}^{(n+1)}(x_i)$ di ordine $n+1$. Ancora una volta, questa difficoltà può essere superata qualora si tenga conto della proprietà dello spazio vettoriale lineare V_N per la quale tutti i set di polinomi di base soddisfano l'operatore lineare dell'equazione (1.2.49). Infatti, analogamente all'analisi effettuata nel caso di derivate del primo e del secondo ordine, il sistema di equazioni per il calcolo dei

coefficienti $\zeta_{ij}^{(n)}$ dedotto dall'uso dei polinomi interpolanti di Lagrange è del tutto equivalente a quello derivato da un altro set di polinomi di base come $p_k(x) = x^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, N$. In base alle precedenti affermazioni, i coefficienti $\zeta_{ij}^{(n)}$ devono soddisfare la seguente relazione ottenuta utilizzando il polinomio di base $p_k(x) = x^{k-1}$ per $k = 1$ (ossia $p_1(x) = x^0 = 1$):

$$\left. \frac{d^n p_1(x)}{dx^n} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(n)} 1 = 0 \Rightarrow \zeta_{ii}^{(n)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \zeta_{ij}^{(n)} \quad (1.2.65)$$

Da questa relazione si ha che i $\zeta_{ii}^{(n)}$ possono essere definiti attraverso i $\zeta_{ij}^{(n)}$, per $i \neq j$. Restano così determinati i *coefficienti di ponderazione* per le derivate di qualsiasi ordine. In conclusione, le espressioni (1.2.30), (1.2.32), (1.2.63) e (1.2.65) sono facili da implementare in un calcolatore e non hanno alcuna restrizione sulla scelta dei punti nodali, permettendo la determinazione in maniera ricorsiva dei coefficienti di ponderazione per una derivata di ordine generico.

1.2.3.3 Approccio mediante la moltiplicazione matriciale

In base alla definizione di operatore differenziale è lecito scrivere:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) \quad (1.2.66)$$

In tale relazione compaiono la derivata prima e la derivata seconda di $f(x)$ fatte rispetto ad x che, per semplicità di rappresentazione, vengono spesso indicate attraverso i simboli $f^{(1)}(x)$ e $f^{(2)}(x)$ rispettivamente. Qualora si applichi il concetto di quadratura differenziale per approssimare il primo membro dell'equazione precedente, si ottiene:

$$f^{(2)}(x_i) = \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(2)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.2.67)$$

Quando tale approssimazione è applicata al secondo membro due volte consecutive, si ha:

$$f^{(2)}(x_i) = \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} f^{(1)}(x_k) = \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} \left[\sum_{j=1}^N \zeta_{kj}^{(1)} f(x_j) \right] = \sum_{j=1}^N \left[\sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} \zeta_{kj}^{(1)} \right] f(x_j) \quad (1.2.68)$$

Comparando tra loro le relazioni (1.2.67) e (1.2.68), si ricava:

$$\zeta_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} \zeta_{kj}^{(1)} \quad (1.2.69)$$

Definendo le due matrici:

$$\zeta^{(1)} = \begin{bmatrix} \zeta_{11}^{(1)} & \cdots & \zeta_{1i}^{(1)} & \cdots & \zeta_{1N}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{i1}^{(1)} & \cdots & \zeta_{ii}^{(1)} & \cdots & \zeta_{iN}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{N1}^{(1)} & \cdots & \zeta_{Ni}^{(1)} & \cdots & \zeta_{NN}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \zeta^{(2)} = \begin{bmatrix} \zeta_{11}^{(2)} & \cdots & \zeta_{1i}^{(2)} & \cdots & \zeta_{1N}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{i1}^{(2)} & \cdots & \zeta_{ii}^{(2)} & \cdots & \zeta_{iN}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{N1}^{(2)} & \cdots & \zeta_{Ni}^{(2)} & \cdots & \zeta_{NN}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (1.2.70)$$

l'equazione (1.2.69) può essere riscritta mediante la seguente espressione:

$$\zeta^{(2)} = \zeta^{(1)} \zeta^{(1)} \quad (1.2.71)$$

Tale equazione indica che i coefficienti di ponderazione relativi al secondo ordine di derivazione possono anche essere determinati attraverso la moltiplicazione della matrice dei coefficienti di ponderazione del primo ordine per se stessa.

Ragionando in maniera analoga e ricordando che si stanno utilizzando operatori lineari quali le derivate, si può anche scrivere la derivata di ordine n di una funzione regolare $f(x)$:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{df}{dx} \right) \quad (1.2.72)$$

Se si indica con $\zeta^{(n-1)}$ ed $\zeta^{(n)}$ le matrici dei coefficienti di ponderazione per le derivate di ordine $n-1$ ed n , allora l'applicazione della legge di quadratura differenziale all'equazione (1.2.72) fornisce la seguente relazione ricorsiva:

$$\zeta^{(n)} = \zeta^{(1)} \zeta^{(n-1)} = \zeta^{(n-1)} \zeta^{(1)}, \quad n = 2, 3, \dots, N-1 \quad (1.2.73)$$

Sebbene la relazione appena illustrata sembri semplice, essa comporta più operazioni aritmetiche rispetto all'applicazione delle equazioni (1.2.63) e (1.2.65). Infatti, si può osservare come il calcolo di ogni coefficiente di ponderazione effettuato secondo l'equazioni (1.2.69) o l'equazione (1.2.73) coinvolga N moltiplicazioni ed $N-1$ addizioni per un totale di $2N-1$ operazioni aritmetiche. D'altro canto, l'applicazione dell'equazione (1.2.46) o della relazione ricorsiva (1.2.63) comporta solo due moltiplicazioni, una divisione ed una sottrazione ovvero un totale di quattro operazioni aritmetiche per il calcolo di ogni fattore non appartenente alla diagonale principale della relativa matrice. Tale calcolo risulta indipendente dal numero di punti nodali. Invece, per il calcolo di ciascun fattore appartenente alla diagonale principale bisogna utilizzare l'equazione (1.2.47) o l'equazione (1.2.65), il che comporta un complesso di $N-2$ sottrazioni. Il numero di operazioni aritmetiche da dover eseguire applicando le equazioni (1.2.63) e (1.2.65) è sostanzialmente inferiore a quello indotto dall'utilizzo dell'equazione (1.2.73). Di conseguenza, la conclusione che si può trarre da quanto detto è che, all'aumentare del numero di punti nodali, il calcolo dei coefficienti di ponderazione attraverso le equazioni ricorsive (1.2.63) e (1.2.65) risulta relativamente poco oneroso e maggiormente accurato rispetto a quello derivante dall'uso dell'equazione (1.2.73) a causa dei minori errori di arrotondamento. La formulazione ricorsiva di Shu riduce anche l'eventuale propagazione dell'errore insita nell'approccio matriciale per la determinazione dei coefficienti di ponderazione per le derivate di ordine elevato. Occorre tener presente che, se dal punto di vista formale il calcolo dei coefficienti di ponderazione per le derivate di ordine superiore $\zeta^{(2)}, \zeta^{(3)}, \zeta^{(4)}$ a partire dalla matrice dei coefficienti del primo ordine, sia corretto, l'approssimazione ottenuta risulti sempre meno accurata. Al crescere dell'ordine di derivazione aumenta l'errore commesso nella valutazione dei coefficienti di ponderazione per le derivate di ordine superiore.

1.2.4 Estensione al caso multidimensionale

Nelle applicazioni dell'ingegneria è molto frequente avere a che fare con problemi in due, tre o più dimensioni come, ad esempio, quando si devono analizzare strutture quali piastre o gusci. Ciò fa sì che l'approssimazione descritta in precedenza, valida solo per il caso monodimensionale, debba essere necessariamente estesa al caso multidimensionale. Occorre allora prestare attenzione al passaggio dal caso monodimensionale a quello bidimensionale anche perché l'estensione al caso tridimensionale e multidimensionale può essere effettuato seguendo la medesima logica.

La tipologia di approssimazione adottata è quella basata sull'approssimazione polinomiale per cui anche l'estensione al caso multidimensionale verrà sviluppata con riferimento ad essa. Tenendo conto di questo e del fatto che i domini multidimensionali possono essere regolari o meno, poiché l'approssimazione polinomiale è piuttosto differente per tali domini, si può intuire come anche l'estensione suddetta risulterà diversa a seconda del tipo di dominio in questione. Dal momento che in seguito verrà fatto largo uso di domini regolari, sarà affrontata solo l'espansione diretta ad un dominio regolare tenendo comunque presente che per domini irregolari occorre seguire una strada diversa.

La formulazione del G.D.Q.M. nel caso di problemi in una sola dimensione può essere direttamente estesa al caso multidimensionale qualora il dominio di discretizzazione sia regolare. Nel caso bidimensionale, per dominio regolare si intende un rettangolo o una qualsiasi altra forma regolare, come ad esempio un cerchio anche se, nella presente esposizione, si farà riferimento solo ad un dominio rettangolare, per semplicità.

Si consideri una funzione bidimensionale $f(x, y)$ definita su un dominio rettangolare.

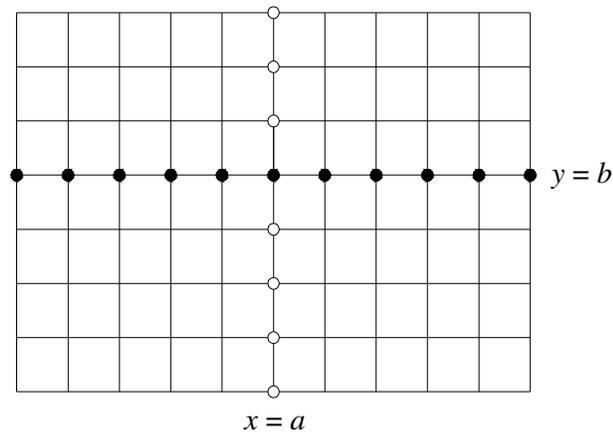


Figura 1.3. Distribuzione dei punti nodali in un dominio rettangolare.

Dalla figura 1.3 si può vedere che il dominio è stato discretizzato, per semplicità, in modo tale che l'intervallo lungo ogni linea orizzontale rimanga lo stesso così come lungo ogni linea verticale. In questo modo, è facile osservare che è possibile usare la medesima distribuzione di coordinate per ogni linea orizzontale e in maniera analoga è possibile fare lo stesso per ogni linea verticale. A questo punto si prenda in esame una singola linea orizzontale corrispondente all'equazione $y = b$ dove b è un valore costante. Lungo questa linea si può supporre che il valore della funzione bidimensionale $f(x, b)$ è approssimabile da un polinomio $P_N(x)$ di grado $N-1$ che costituisce uno spazio vettoriale lineare N -dimensionale V_N nel quale è possibile individuare un set di N vettori di base (o polinomi di base) $p_h(x)$, $h = 1, 2, \dots, N$. Allo stesso modo si prenda in esame una singola linea verticale corrispondente all'equazione $x = a$ dove a è un valore costante. Lungo questa linea coordinata il valore della funzione bidimensionale $f(a, y)$ è approssimabile da un polinomio $P_M(y)$ di grado $M-1$ che costituisce uno spazio vettoriale lineare M -dimensionale V_M nel quale è possibile individuare un set di M vettori di base (o polinomi di base) $s_r(y)$, $r = 1, 2, \dots, M$. In base a quanto detto, la $f(x, y)$ in ogni punto del dominio rettangolare può essere approssimata da un polinomio $P_{N \times M}(x, y)$ che assume la forma generale:

$$f(x, y) \cong P_{N \times M}(x, y) = \sum_{h=1}^N \sum_{r=1}^M c_{hr} p_h(x) s_r(y) \quad (1.2.74)$$

dove c_{hr} sono degli opportuni coefficienti. Scegliendo come polinomi di base i polinomi in forma monomia (1.2.17) per entrambe le direzioni coordinate, si può riscrivere l'espressione (1.2.74):

$$f(x, y) \cong P_{N \times M}(x, y) = \sum_{h=1}^N \sum_{r=1}^M d_{hr} x^{h-1} y^{r-1} \quad (1.2.75)$$

dove d_{hr} sono le costanti che definiscono il polinomio approssimante. $P_{N \times M}(x, y)$ costituisce uno spazio vettoriale lineare di dimensione $N \times M$ ($V_{N \times M}$) nel rispetto delle

operazioni di addizione vettoriale e di moltiplicazione per uno scalare. In quanto spazio vettoriale lineare, $V_{N \times M}$ conterrà un set di vettori di base (o polinomi di base) che è rappresentabile nella forma:

$$\Phi_{hr}(x, y) = p_h(x) s_r(y) \quad (1.2.76)$$

In particolare, la dimostrazione della validità di questa scelta va fatta ricordando che $p_h(x)$, $s_r(y)$ devono essere linearmente indipendenti essendo, a loro volta, dei vettori di base degli spazi V_N e V_M .

Si supponga, in base alla legge di “quadratura differenziale”, che la formulazione lineare seguente sia soddisfatta per la funzione $f(x, y)$ e per le sue derivate prime:

$$f_x^{(1)}(x_i, y_j) = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=x_i, y=y_j} \cong \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} f(x_k, y_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.2.77)$$

$$f_y^{(1)}(x_i, y_j) = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{x=x_i, y=y_j} \cong \sum_{l=1}^M \bar{\zeta}_{jl}^{(1)} f(x_i, y_l), \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (1.2.78)$$

dove $f_x^{(1)}(x_i, y_j)$ e $f_y^{(1)}(x_i, y_j)$ sono le derivate parziali del primo ordine, fatte rispetto a x ed a y , della funzione $f(x, y)$ nel punto nodale (x_i, y_j) , $\zeta_{ik}^{(1)}$ e $\bar{\zeta}_{jl}^{(1)}$ rappresentano i coefficienti di ponderazione relativi a tali derivate e $f(x_k, y_j)$, $f(x_i, y_l)$ definiscono i valori funzionali nei punti in cui è stato discretizzato il dominio. Ovviamente, visto che tali espressioni sono formalmente analoghe a quelle già viste nel caso di problemi monodimensionali, anch'esse definiscono degli *operatori lineari*. Inoltre, per le proprietà di uno spazio vettoriale lineare, è possibile constatare che se tutti i polinomi di base $\Phi_{hr}(x, y)$ soddisfano gli operatori lineari delle equazioni (1.2.77) e (1.2.78), allora questo è verificato per ogni polinomio di $V_{N \times M}$. Ora, se si sostituisce $\Phi_{ij}(x, y)$ nelle equazioni (1.2.77) e (1.2.78), si ricava:

$$\sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} p_h(x_k) = p_h^{(1)}(x_i), \quad i, h = 1, 2, \dots, N \quad (1.2.79)$$

$$\sum_{l=1}^M \bar{\zeta}_{jl}^{(1)} s_r(y_l) = s_r^{(1)}(y_j), \quad j, r = 1, 2, \dots, M \quad (1.2.80)$$

dove $p_h^{(1)}(x_i)$ rappresenta la derivata del primo ordine di $p_h(x)$ nei punti x_i , mentre $s_r^{(1)}(y_j)$ rappresenta la derivata del primo ordine di $s_r(y)$ nei punti y_j . In base alle ultime equazioni mostrate si evince che i coefficienti $\zeta_{ik}^{(1)}$ o $\bar{\zeta}_{jl}^{(1)}$ sono relazionati solamente ai polinomi base $p_h(x)$ o $s_r(y)$ per cui la formulazione adottata nel caso monodimensionale per il calcolo dei coefficienti può essere direttamente estesa al caso in esame come in seguito riportato per quanto riguarda il calcolo dei coefficienti delle derivate parziali del primo ordine in x :

$$\zeta_{ik}^{(1)} = \frac{\mathcal{L}^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_k)\mathcal{L}^{(1)}(x_k)}, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \dots, N \quad (1.2.81)$$

$$\zeta_{ii}^{(1)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^N \zeta_{ik}^{(1)}, \quad i = k \quad (1.2.82)$$

mentre per quanto riguarda il calcolo dei coefficienti delle derivate parziali del primo ordine in y si ottiene:

$$\bar{\zeta}_{jl}^{(1)} = \frac{\mathcal{P}^{(1)}(y_j)}{(y_j - y_l)\mathcal{P}^{(1)}(y_l)}, \quad j \neq l, \quad j, l = 1, 2, \dots, M \quad (1.2.83)$$

$$\bar{\zeta}_{jj}^{(1)} = - \sum_{l=1, l \neq j}^M \bar{\zeta}_{jl}^{(1)}, \quad j = l \quad (1.2.84)$$

Inoltre, in tali equazioni si può osservare la presenza delle quantità $\mathcal{L}^{(1)}(x_i)$ e $\mathcal{P}^{(1)}(y_j)$ che hanno le seguenti espressioni:

$$\mathcal{L}^{(1)}(x_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k) \quad (1.2.85)$$

$$\mathcal{P}^{(1)}(y_j) = \prod_{l=1, l \neq j}^M (y_j - y_l) \quad (1.2.86)$$

In modo del tutto analogo si possono ottenere le relazioni per il calcolo dei coefficienti di ponderazione relative alle derivate del secondo ordine ed a quelle di ordine superiore. Esse saranno ancora delle relazioni ricorsive così come si è trovato nel caso monodimensionale. Tali espressioni risultano le seguenti per problemi in due dimensioni:

$$\zeta_{ik}^{(n)} = n \left(\zeta_{ii}^{(n-1)} \zeta_{ik}^{(1)} - \frac{\zeta_{ik}^{(n-1)}}{x_i - x_k} \right), \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \dots, N, \quad n = 2, 3, \dots, N-1 \quad (1.2.87)$$

$$\zeta_{ii}^{(n)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^N \zeta_{ik}^{(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (1.2.88)$$

$$\bar{\zeta}_{jl}^{(m)} = m \left(\bar{\zeta}_{jj}^{(m-1)} \bar{\zeta}_{jl}^{(1)} - \frac{\bar{\zeta}_{jl}^{(m-1)}}{y_j - y_l} \right), \quad j \neq l, \quad j, l = 1, 2, \dots, M, \quad m = 2, 3, \dots, M-1 \quad (1.2.89)$$

$$\bar{\zeta}_{jj}^{(m)} = - \sum_{l=1, l \neq j}^M \bar{\zeta}_{jl}^{(m)}, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (1.2.90)$$

In queste relazioni, $\zeta_{ik}^{(n)}$ rappresentano i coefficienti di ponderazione delle derivate di ordine n di $f(x, y)$ fatte rispetto alla variabile x e calcolate nel punto nodale (x_i, y_j) , mentre $\bar{\zeta}_{jl}^{(m)}$ indicano i coefficienti di ponderazione delle derivate di ordine m di $f(x, y)$ fatte rispetto alla variabile y e calcolate nel punto nodale (x_i, y_j) . Chiamando le prime derivate $f_x^{(n)}(x_i, y_j)$, le seconde $f_y^{(m)}(x_i, y_j)$ e $f_{xy}^{(n+m)}(x_i, y_j)$ le rispettive derivate miste, i suddetti coefficienti sono tali da soddisfare le seguenti relazioni:

$$f_x^{(n)}(x_i, y_j) = \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n} \Big|_{x=x_i, y=y_j} \cong \sum_{k=1}^N \mathcal{S}_{ik}^{(n)} f(x_k, y_j) \quad (1.2.91)$$

$$f_y^{(m)}(x_i, y_j) = \frac{\partial^m f(x, y)}{\partial y^m} \Big|_{x=x_i, y=y_j} \cong \sum_{l=1}^M \bar{\mathcal{S}}_{jl}^{(m)} f(x_i, y_l) \quad (1.2.92)$$

$$f_{xy}^{(n+m)}(x_i, y_j) = \frac{\partial^{n+m} f(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} \Big|_{x=x_i, y=y_j} \cong \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M \mathcal{S}_{ik}^{(n)} \bar{\mathcal{S}}_{jl}^{(m)} f(x_k, y_l) \quad (1.2.93)$$

con $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, M$, $n = 1, 2, \dots, N-1$ e $m = 1, 2, \dots, M-1$.

Una volta definiti i valori funzionali in tutti i punti della discretizzazione, è facile determinare la funzione in ogni punto del dominio, anche non nodale, attraverso i polinomi interpolanti di Lagrange. Infatti, lungo una linea orizzontale della griglia definita da $y = y_j$, il valore funzionale può essere calcolato attraverso la seguente relazione:

$$f(x, y_j) = \sum_{i=1}^N p_i(x) f(x_i, y_j), \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (1.2.94)$$

mentre lungo una linea verticale $x = x_i$, il valore funzionale può essere calcolato:

$$f(x_i, y) = \sum_{j=1}^M s_j(y) f(x_i, y_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.2.95)$$

Così facendo in ogni punto non nodale del dominio rettangolare preso in considerazione, la funzione bidimensionale $f(x, y)$ può essere espressa:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p_i(x) s_j(y) f(x_i, y_j) \quad (1.2.96)$$

in cui $p_i(x)$ ed $s_j(y)$ rappresentano i polinomi interpolanti di Lagrange:

$$p_i(x) = \prod_{k=1, k \neq i}^N \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad s_j(y) = \prod_{k=1, k \neq j}^M \frac{y - y_k}{y_j - y_k} \quad (1.2.97)$$

In maniera analoga a quanto precedentemente esposto, l'approssimazione tridimensionale delle derivate parziali, di ordine generico p , r e s della funzione $f(x, y, z)$ regolare risultano essere:

$$\left. \frac{\partial^p f}{\partial x^p} \right|_{(x_i, y_j, z_k)} \cong \sum_{l=1}^{N_x} \zeta_{il}^{(p)} f(x_l, y_j, z_k), \quad p = 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (1.2.98)$$

$$\left. \frac{\partial^r f}{\partial y^r} \right|_{(x_i, y_j, z_k)} \cong \sum_{m=1}^{N_y} \bar{\zeta}_{jm}^{(r)} f(x_i, y_m, z_k), \quad r = 1, 2, \dots, N_y - 1 \quad (1.2.99)$$

$$\left. \frac{\partial^s f}{\partial z^s} \right|_{(x_i, y_j, z_k)} \cong \sum_{n=1}^{N_z} \tilde{\zeta}_{kn}^{(s)} f(x_i, y_j, z_n), \quad s = 1, 2, \dots, N_z - 1 \quad (1.2.100)$$

$$\left. \frac{\partial^p}{\partial x^p} \left(\frac{\partial^r f}{\partial y^r} \right) \right|_{(x_i, y_j, z_k)} \cong \sum_{l=1}^{N_x} \zeta_{il}^{(p)} \sum_{m=1}^{N_y} \bar{\zeta}_{jm}^{(r)} f(x_l, y_m, z_k) \quad (1.2.101)$$

$$\left. \frac{\partial^{p+r+s} f}{\partial x^p \partial y^r \partial z^s} \right|_{(x_i, y_j, z_k)} \cong \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} \sum_{n=1}^{N_z} \zeta_{il}^{(p)} \bar{\zeta}_{jm}^{(r)} \tilde{\zeta}_{kn}^{(s)} f(x_l, y_m, z_n) \quad (1.2.102)$$

Nelle equazioni sopra riportate, $\zeta_{il}^{(p)}$, $\bar{\zeta}_{jm}^{(r)}$ e $\tilde{\zeta}_{kn}^{(s)}$ indicano i coefficienti di ponderazione, calcolati nel generico punto dello spazio tridimensionale e utilizzati nella determinazione delle derivate di qualsiasi ordine della funzione $f(x, y, z)$, nelle direzioni x , y e z , rispettivamente. N_x , N_y e N_z sono il numero totale dei punti nodali scelti per discretizzare il dominio lungo gli assi x , y e z .

I coefficienti di ponderazione $\zeta_{il}^{(p)}$ con $i \neq l$ possono essere ottenuti attraverso la formula ricorsiva:

$$\zeta_{il}^{(p)} = p \left(\zeta_{ii}^{(p-1)} \zeta_{il}^{(1)} - \frac{\zeta_{il}^{(p-1)}}{x_i - x_l} \right), \quad p=1,2,\dots,N_x-1, \quad i,l=1,2,\dots,N_x \quad (1.2.103)$$

dove $\zeta_{il}^{(1)}$ risulta:

$$\zeta_{il}^{(1)} = \frac{\mathcal{L}^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_l)\mathcal{L}^{(1)}(x_l)}, \quad i,l=1,2,\dots,N_x \quad (1.2.104)$$

essendo:

$$\mathcal{L}^{(1)}(x_i) = \prod_{l=1, l \neq i}^{N_x} (x_i - x_l)$$

Quando $i = l$, i coefficienti di ponderazione $\zeta_{ii}^{(p)}$ si ottengono dalla relazione:

$$\zeta_{ii}^{(p)} = - \sum_{l=1, l \neq i}^{N_x} \zeta_{il}^{(p)}, \quad i,l=1,2,\dots,N_x, \quad p=1,2,\dots,N_x-1 \quad (1.2.105)$$

I coefficienti di ponderazione $\bar{\zeta}_{jm}^{(r)}$ con $j \neq m$ possono essere ottenuti attraverso la formula ricorsiva:

$$\bar{\zeta}_{jm}^{(r)} = r \left(\bar{\zeta}_{jj}^{(r-1)} \bar{\zeta}_{jm}^{(1)} - \frac{\bar{\zeta}_{jm}^{(r-1)}}{y_j - y_m} \right), \quad r=1,2,\dots,N_y-1, \quad j,m=1,2,\dots,N_y \quad (1.2.106)$$

dove $\bar{\zeta}_{jm}^{(1)}$ risulta:

$$\bar{\zeta}_{jm}^{(1)} = \frac{\mathcal{P}^{(1)}(y_j)}{(y_j - y_m)\mathcal{P}^{(1)}(y_m)}, \quad j,m=1,2,\dots,N_y \quad (1.2.107)$$

essendo:

$$\mathcal{P}^{(1)}(y_j) = \prod_{m=1, m \neq j}^{N_y} (y_j - y_m)$$

Quando $j = m$, i coefficienti di ponderazione $\bar{\zeta}_{jj}^{(r)}$ si ottengono dalla relazione:

$$\bar{\zeta}_{jj}^{(r)} = - \sum_{m=1, m \neq j}^{N_y} \bar{\zeta}_{jm}^{(r)}, \quad j, m = 1, 2, \dots, N_y, \quad r = 1, 2, \dots, N_y - 1 \quad (1.2.108)$$

I coefficienti di ponderazione $\tilde{\zeta}_{kn}^{(s)}$, con $k \neq n$, possono essere ottenuti attraverso la formula ricorsiva:

$$\tilde{\zeta}_{kn}^{(s)} = s \left(\tilde{\zeta}_{kk}^{(s-1)} \tilde{\zeta}_{kn}^{(1)} - \frac{\tilde{\zeta}_{kn}^{(s-1)}}{z_k - z_n} \right), \quad s = 1, 2, \dots, N_z - 1, \quad k, n = 1, 2, \dots, N_z \quad (1.2.109)$$

dove $\tilde{\zeta}_{kn}^{(1)}$ risulta:

$$\tilde{\zeta}_{kn}^{(1)} = \frac{\mathcal{Q}^{(1)}(z_k)}{(z_k - z_n)\mathcal{Q}^{(1)}(z_n)}, \quad k, n = 1, 2, \dots, N_z \quad (1.2.110)$$

essendo:

$$\mathcal{Q}^{(1)}(z_k) = \prod_{n=1, n \neq k}^{N_z} (z_k - z_n)$$

Quando $k = n$, i coefficienti di ponderazione $\tilde{\zeta}_{kk}^{(s)}$ si ottengono dalla relazione:

$$\tilde{\zeta}_{kk}^{(s)} = - \sum_{n=1, n \neq k}^{N_z} \tilde{\zeta}_{kn}^{(s)}, \quad k, n = 1, 2, \dots, N_z, \quad s = 1, 2, \dots, N_z - 1 \quad (1.2.111)$$

1.2.5 Tipologie di discretizzazione

A livello introduttivo è già stato descritto come il D.Q.M. permetta di approssimare le derivate parziali o totali di una qualsiasi funzione regolare con una sommatoria lineare pesata dei valori assunti dalla funzione stessa in tutti i punti in cui è stato discretizzato il dominio. Dall'analisi dell'equazione (1.1.2) è possibile intuire come l'applicazione di tale tecnica richieda una preventiva discretizzazione del dominio oltre al calcolo dei coefficienti di ponderazione della sommatoria. Questi stadi computazionali sono le due fasi fondamentali del metodo numerico in parola. Tenendo presente che il punto chiave di questa tecnica è la definizione dei coefficienti di ponderazione per ogni ordine di derivazione, occorre ora dare risalto alla fase riguardante la definizione della discretizzazione del dominio anche perché la scelta dei punti di griglia risulta un fattore decisivo per la precisione e l'accuratezza delle soluzioni ottenibili mediante la quadratura differenziale.

Ipotizzando di avere a che fare con un problema monodimensionale, per semplicità, i punti nodali in cui andare a suddividere il dominio lineare possono essere scelti secondo due modalità ben precise e cioè attraverso l'uso di una *mesh con punti equidistanti* o *equispaziati* (detta anche *uniforme*) oppure mediante una *mesh non equispaziata* (detta anche *non uniforme*). Tra le due classi menzionate viene frequentemente preferita la seconda dal momento che, con essa, il D.Q.M. conduce a soluzioni approssimate più accurate rispetto quelle ottenibili tramite una discretizzazione uniforme. Una tipologia razionale per la scelta della disposizione dei punti di griglia è quella fornita dalle radici dei *polinomi ortogonali* che possono essere scelti come vettori base dello spazio vettoriale polinomiale. I classici polinomi ortogonali risultano suddivisi in tre classi, dette di Jacobi, Laguerre ed Hermite. Tra esse si può effettivamente utilizzare solo quella dei polinomi ortogonali di Jacobi, dal momento che solo essi risultano definiti in un intervallo chiuso; aspetto fondamentale poiché quasi tutte le applicazioni che interessano sono ristrette a dimensioni finite. Ciò significa che la discretizzazione con punti non equidistanti può essere ottenuta scegliendo la loro posizione in base alle radici dei *polinomi di Chebyshev del primo tipo*, dei *polinomi di Chebyshev del secondo tipo* e dei *polinomi di Legendre* essendo tutti questi appartenenti alla suddetta categoria di polinomi ortogonali. Ad ogni modo, un'altra scelta che si è rivelata migliore rispetto quelle effettuabili tramite i precedenti polinomi, è quella nota come *Chebyshev-Gauss-Lobatto grid distribution*, in cui

la posizione dei punti nodali è definita mediante una *discretizzazione armonica di tipo cosenico*. Anch'essa è una modalità di discretizzazione non uniforme. Caratteristiche simili a quest'ultima tipologia si riscontrano utilizzando un altro tipo di suddivisione del dominio lineare noto come *discretizzazione quadratica*. Tra tutte le diverse modalità di disposizione dei punti nodali quella maggiormente usata nella letteratura scientifica risulta essere la discretizzazione di *Chebyshev-Gauss-Lobatto*, visto che presenta caratteristiche migliori per quanto riguarda velocità di convergenza ed accuratezza rispetto alle altre. Si vuol far rilevare che l'utilizzo della discretizzazione equispaziata conduce, nella maggior parte dei casi, a risultati inaccurati e oscillanti, in quanto le matrici dei coefficienti di ponderazione diventano mal condizionate all'aumentare del numero dei punti nodali. Nell'applicazione del metodo di quadratura differenziale si consiglia, quindi, l'utilizzo di una discretizzazione non equispaziata, che non risente degli inconvenienti della distribuzione uniforme.

Si indichi con N il numero di punti in cui si vuole suddividere il dominio e si consideri quest'ultimo come un dominio adimensionalizzato (cioè di estensione lineare unitaria: $0 \leq x \leq L \rightarrow 0 \leq \xi \leq 1$ essendo $\xi = x/L$). Con L si è indicata la lunghezza totale dell'intervallo di definizione della funzione nella direzione x . In base a quanto detto, la posizione dei punti di griglia può venire definita in uno dei seguenti modi:

- *Discretizzazione equispaziata o uniforme:*

E' la scelta più semplice e naturale per la disposizione dei punti nodali. Una sua interpretazione grafica è già stata proposta in figura 1.2 mentre, a livello analitico, le posizioni dei punti nodali vengono individuate mediante la seguente relazione:

$$\xi_k = \frac{k-1}{N-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.2.112)$$

Pur essendo semplice, tale tipo di suddivisione non viene quasi mai utilizzata dal momento che fornisce risultati meno accurati e una minor velocità di convergenza della soluzione rispetto all'uso di distribuzioni con punti di griglia non equidistanti.

- *Discretizzazione armonica di tipo cosenico o Chebyshev-Gauss-Lobatto grid distribution:*

Vista l'accuratezza dei risultati ottenuti e le ottime caratteristiche di stabilità e convergenza, è una tipologia di discretizzazione frequentemente utilizzata, con la quale è possibile definire un infittimento dei punti nodali in prossimità degli estremi del dominio lineare. In particolare, le posizioni dei punti di griglia vengono individuate tramite la seguente relazione:

$$\xi_k = \frac{1 - \cos\left(\frac{k-1}{N-1}\pi\right)}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.2.113)$$

- *Discretizzazione quadratica:*

E' una tipologia di discretizzazione che presenta caratteristiche di convergenza simili a quella precedente. Il posizionamento dei punti nodali viene ottenuto mediante le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \xi_k = 2\left(\frac{k-1}{N-1}\right)^2, & k = 1, 2, \dots, \frac{N+1}{2} \\ \xi_k = -2\left(\frac{k-1}{N-1}\right)^2 + 4\left(\frac{k-1}{N-1}\right) - 1, & k = \frac{N+1}{2} + 1, \dots, N-1, N \end{cases} \quad (1.2.114)$$

Da quanto mostrato appare evidente che per utilizzare una siffatta tipologia di discretizzazione è necessario definire un numero dispari di punti nodali in modo da definire dei valori interi per il parametro k . Tale assunzione non è da attribuirsi solo ed esclusivamente a questa distribuzione dei punti di griglia, ma è da considerarsi come una "buona norma" per la discretizzazione dal momento che permette la suddivisione del dominio lineare in un numero pari di intervalli.

- Discretizzazione secondo le radici del polinomio di Chebyshev di prima specie (I tipo):

E' una tipologia di discretizzazione con la quale è possibile definire il posizionamento dei punti di griglia attraverso le seguenti espressioni (r_k è la radice del polinomio k -esimo):

$$\xi_k = \frac{r_k - r_1}{r_N - r_1}, \quad r_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right), \quad k=1,2,\dots,N \quad (1.2.115)$$

- Discretizzazione secondo le radici del polinomio di Chebyshev di seconda specie (II tipo):

Utilizzando tale tipologia di discretizzazione il posizionamento dei punti di griglia è esprimibile mediante le espressioni seguenti (r_k è la radice del polinomio k -esimo):

$$\xi_k = \frac{r_k - r_1}{r_N - r_1}, \quad r_k = \cos\left(\frac{k}{N+1}\pi\right), \quad k=1,2,\dots,N \quad (1.2.116)$$

- Discretizzazione secondo le radici del polinomio di Legendre:

In quest'ultimo caso i punti di griglia vengono definiti nella seguente forma (r_k è la radice del polinomio k -esimo):

$$\xi_k = \frac{r_k - r_1}{r_N - r_1}, \quad r_k = \left(1 - \frac{1}{8N^2} + \frac{1}{8N^3}\right) \cos\left(\frac{4k-1}{4N+2}\pi\right), \quad k=1,2,\dots,N \quad (1.2.117)$$

Occorre osservare che le ultime tre tipologie di discretizzazione utilizzano come punti nodali le radici di polinomi ortogonali e anch'esse operano un infittimento dei punti di griglia agli estremi del dominio.

Per concludere si può intuire come queste tipologie di discretizzazione possano essere applicate per ottenere la discretizzazione nelle varie direzioni di un dominio multidimensionale regolare pur essendo state definite con riferimento ad un problema monodimensionale.

Oltre alle sei tipologie di discretizzazione riportate precedentemente, è possibile definire a partire da queste altri tipi di suddivisione caratterizzati da un maggiore infittimento dei punti nodali in prossimità degli estremi del dominio lineare. In particolare la tecnica che consente di ottenere questo risultato viene definita “*stretching formulation*”. Essa permette di infittire i punti nodali in prossimità degli estremi più di quanto non riesca a fare la sola tecnica di discretizzazione tradizionale. Quest’ultima caratteristica risulta efficace perché in alcune tipologie di problemi strutturali produce risultati più accurati rispetto a quelli che si riuscirebbe ad ottenere utilizzando le distribuzioni nodali tradizionali.

- *Stretching formulation:*

Il posizionamento dei punti di griglia è esprimibile attraverso le tipologie di discretizzazione tradizionale usando la seguente formulazione:

$$\zeta_k = (1 - \alpha)(3\xi_k^2 - 2\xi_k^3) + \alpha\xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad \alpha \leq 1 \quad (1.2.118)$$

dove ξ_k rappresentano le coordinate nodali di una qualsiasi delle sei tipologie di discretizzazione tradizionale e α è il parametro di stretching. Quando $\alpha = 1$, si osserva facilmente che dall’equazione (1.2.116) si riottengono le discretizzazioni fondamentali. In particolare si ha:

$$\alpha = 1 \Rightarrow \zeta_k = \xi_k$$

Ovviamente minore è il valore che viene scelto per il parametro di stretching e maggiore risulta l’infittimento agli estremi.

Si vuol fare osservare che, qualora il parametro di stretching α venga assunto negativo, potrebbe accadere che alcuni dei valori delle coordinate dei punti nodali in prossimità degli estremi del dominio risultino minori dell’estremo inferiore o maggiori dell’estremo superiore. In tale condizione verrebbero definiti dei punti al di fuori del dominio. E’ facile osservare che il tipo di discretizzazione costituita da un numero dispari di punti di griglia risulta simmetrica rispetto alla mezzeria del dominio. Quindi alle coordinate negative dei punti vicini all’estremo inferiore corrispondono le coordinate di punti al di fuori dell’estremo superiore. Ciò significa che è sufficiente cercare solo i punti le cui coordinate risultino negative.

Per evitare l'inconveniente sopra ricordato e in base alle precedenti affermazioni, le coordinate dei punti ζ_k vicini alle estremità del dominio lineare, che soddisfano contemporaneamente le condizioni:

$$\zeta_k < 0, \quad \zeta_{k+1} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N+1}{2}$$

vengono ridefinite nella seguente maniera:

$$\zeta_k = \beta \zeta_{k+1}, \quad \zeta_{N-k+1} = 1 - \zeta_k \quad (1.2.119)$$

dove β è una costante positiva che deve verificare la condizione: $\zeta_k - \zeta_{k-1} < \zeta_{k+1} - \zeta_k$. Frequentemente si assume $\beta = 0.1$. Con tale tipologia di discretizzazione risulta possibile addensare in maniera arbitraria i punti nodali agli estremi del dominio.

1.2.5.1 *Tecnica dei “ δ -Sampling Points”*

Le equazioni che governano diversi problemi di ingegneria strutturale sono equazioni differenziali alle derivate parziali. L'ordine di tali equazioni può essere superiore al secondo. Inoltre, le condizioni al contorno associate ad ogni estremità variano con il modello impiegato a rappresentare il comportamento dell'elemento strutturale. Ad esempio, le equazioni indefinite di equilibrio in termini di spostamento per le travi e per le piastre, sono equazioni differenziali del quarto ordine e devono soddisfare più condizioni al contorno su ciascun bordo. Dette condizioni possono presentarsi in forma differenziale, e quindi approssimabili con la tecnica del G.D.Q. Method.

Molto spesso occorre soddisfare due condizioni al contorno in un solo punto. Nell'estremo libero di una trave a mensola, le condizioni al contorno sono espresse in termini di taglio e momento. L'approssimazione introdotta con il G.D.Q. Method si riferisce, invece, ad un solo punto. In altri termini non si può scrivere più di un'equazione approssimata in uno stesso punto.

Per superare tale difficoltà occorre trovare una strada che permetta di implementare tutte le condizioni al contorno. L'espedito in parola è la cosiddetta *tecnica dei “ δ -Sampling Points”*, introdotta per la prima volta da Jang, Bert e Striz nel 1989.

Tale tecnica considera punti molto vicini a quelli estremi ($\delta = 10^{-5}$, dove δ rappresenta la distanza dal bordo), per rispettare il più possibile le condizioni geometriche del problema.

Lo scopo è quello di ottenere un'approssimazione accurata. Pertanto, le condizioni al contorno vengono imposte nei punti estremi del dominio e nei cosiddetti “ δ -points”. I δ -points sono considerati come punti del contorno, visto che la loro distanza δ dal contorno stesso viene scelta molto piccola. Agendo in questo modo e tenendo conto che in una trave si hanno due condizioni al contorno per ogni estremo, si è in grado di soddisfare entrambe le condizioni dal momento che si può applicare una condizione di bordo nel punto estremo e l'altra nel “ δ -point”. Pur essendo estremamente efficace, tale tecnica non è sempre obbligatoria. Si vuol far rilevare che, per lo studio di un problema via G.D.Q. Method occorre prestare attenzione alla formulazione del problema stesso. Ad esempio, se per la trave di Eulero-Bernoulli risulta necessario utilizzare la tecnica dei δ -points, per la trave di Timoshenko essa diventa inutile. Infatti, in quest'ultimo caso, le equazioni governanti sono due e due risultano pure le condizioni al contorno. In sintesi, utilizzando una formulazione del problema, in cui il numero di equazioni governanti sia pari al numero di condizioni al contorno non si rende necessaria l'applicazione della tecnica dei δ -points. Detta tecnica può inoltre causare oscillazioni nella soluzione.

Naturalmente, il suo utilizzo modifica leggermente l'interpretazione analitica delle tipologie di discretizzazione descritte in precedenza. In particolare, le espressioni atte a definire la posizione dei punti nodali in presenza della tecnica dei δ -points sono queste:

- Discretizzazione equispaziata o uniforme:

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \delta, \quad \xi_{N-1} = 1 - \delta, \quad \xi_N = 1, \\ \xi_k = \frac{k-2}{N-3}, \quad k = 3, 4, \dots, N-2 \end{aligned} \quad (1.2.120)$$

- Discretizzazione armonica di tipo cosenico o Chebyshev-Gauss-Lobatto:

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \delta, \quad \xi_{N-1} = 1 - \delta, \quad \xi_N = 1, \\ \xi_k = \frac{1 - \cos\left(\frac{k-2}{N-3}\pi\right)}{2}, \quad k = 3, 4, \dots, N-2 \end{aligned} \quad (1.2.121)$$

- Discretizzazione quadratica:

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \delta, \quad \xi_{N-1} = 1 - \delta, \quad \xi_N = 1, \\ \left\{ \begin{aligned} \xi_k &= 2 \left(\frac{k-1}{N-1} \right)^2, & k = 3, 4, \dots, \frac{N+1}{2} \\ \xi_k &= -2 \left(\frac{k-1}{N-1} \right)^2 + 4 \left(\frac{k-1}{N-1} \right) - 1, & k = \frac{N+1}{2} + 1, \dots, N-3, N-2 \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (1.2.122)$$

Si tenga sempre presente che il numero di punti nodali deve essere dispari di modo da definire valori interi per il parametro k .

- Discretizzazione secondo le radici del polinomio di Chebyshev di prima specie (I tipo):

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \delta, \quad \xi_{N-1} = 1 - \delta, \quad \xi_N = 1, \\ \xi_{k+1} = \frac{r_k - r_1}{r_{N-2} - r_1}, \quad r_k = \cos \left(\frac{2k-1}{2(N-2)} \pi \right), \quad k = 2, 3, \dots, N-3 \end{aligned} \quad (1.2.123)$$

- Discretizzazione secondo le radici del polinomio di Chebyshev di seconda specie (II tipo):

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \delta, \quad \xi_{N-1} = 1 - \delta, \quad \xi_N = 1, \\ \xi_{k+1} = \frac{r_k - r_1}{r_{N-2} - r_1}, \quad r_k = \cos \left(\frac{k}{(N-2)+1} \pi \right), \quad k = 2, 3, \dots, N-3 \end{aligned} \quad (1.2.124)$$

- Discretizzazione secondo le radici del polinomio di Legendre:

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \delta, \quad \xi_{N-1} = 1 - \delta, \quad \xi_N = 1, \\ \xi_{k+1} = \frac{r_k - r_1}{r_{N-2} - r_1}, \quad k = 2, 3, \dots, N-3, \\ r_k = \left(1 - \frac{1}{8(N-2)^2} + \frac{1}{8(N-2)^3} \right) \cos \left(\frac{4k-1}{4(N-2)+2} \pi \right) \end{aligned} \quad (1.2.125)$$

1.2.5.2 Esempio di discretizzazione di un dominio lineare

Si consideri un dominio lineare adimensionalizzato e di volerlo suddividere attraverso $N = 11$ punti nodali. In base a quanto detto in precedenza, tale suddivisione può essere effettuata utilizzando una discretizzazione equispaziata tra i punti oppure disponendo tali punti in modo che la loro distanza non sia uniforme. Inoltre, sia che si utilizzi l'una o l'altra tipologia di discretizzazione, è possibile adottare o meno la tecnica dei "δ-points", per cui possiamo suddividere il dominio in modi differenti applicando le equazioni precedentemente riportate. I risultati che si ottengono sono riportati nelle seguenti tabelle ognuna delle quali è relativa ad una specifica tipologia di suddivisione del dominio.

Gli stessi risultati possono essere anche interpretati a livello grafico andando a disporre i vari punti lungo una retta di riferimento per ogni discretizzazione effettuata (figura 1.3). La suddivisione del dominio risulta simmetrica sia eseguendo una discretizzazione uniforme sia operandone una non uniforme. Inoltre, si riesce ad evidenziare che, mediante una qualunque discretizzazione non uniforme senza o con la tecnica dei δ-points, la griglia di punti è molto più fitta in prossimità degli estremi rispetto al caso di una discretizzazione uniforme. Quello appena descritto è uno degli aspetti per cui si preferisce discretizzare il dominio secondo una suddivisione non uniforme (consentendo di studiare in modo più accurato le zone estreme del dominio) oltre al fatto che, in tal modo, il D.Q.M. consegna soluzioni più accurate.

Tabella 1.2. Suddivisione di un dominio adimensionalizzato secondo la discretizzazione uniforme.

Discretizzazione uniforme N=11 ; δ=10 ⁻⁵	k	$\xi_k = x_k/L$	senza "δ-points"	con "δ-points"
	1	ξ_1	0.000000	0.000000
	2	ξ_2	0.100000	0.000010
	3	ξ_3	0.200000	0.125000
	4	ξ_4	0.300000	0.250000
	5	ξ_5	0.400000	0.375000
	6	ξ_6	0.500000	0.500000
	7	ξ_7	0.600000	0.625000
	8	ξ_8	0.700000	0.750000
	9	ξ_9	0.800000	0.875000
	10	ξ_{10}	0.900000	0.999990
11	ξ_{11}	1.000000	1.000000	

Tabella 1.3. Suddivisione di un dominio adimensionalizzato secondo la discretizzazione di Chebyshev-Gauss-Lobatto.

Discretizzazione armonica (cosenica) N=11 ; $\delta=10^{-5}$	k	$\xi_k = x_k/L$	senza " δ -points"	con " δ -points"
	1	ξ_1	0.000000	0.000000
	2	ξ_2	0.024472	0.000010
	3	ξ_3	0.095492	0.038060
	4	ξ_4	0.206107	0.146447
	5	ξ_5	0.345492	0.308658
	6	ξ_6	0.500000	0.500000
	7	ξ_7	0.654508	0.691342
	8	ξ_8	0.793893	0.853553
	9	ξ_9	0.904508	0.961940
	10	ξ_{10}	0.975528	0.999990
11	ξ_{11}	1.000000	1.000000	

Tabella 1.4. Suddivisione di un dominio adimensionalizzato secondo la discretizzazione quadratica.

Discretizzazione quadratica N=11 ; $\delta=10^{-5}$	k	$\xi_k = x_k/L$	senza " δ -points"	con " δ -points"
	1	ξ_1	0.000000	0.000000
	2	ξ_2	0.020000	0.000010
	3	ξ_3	0.080000	0.080000
	4	ξ_4	0.180000	0.180000
	5	ξ_5	0.320000	0.320000
	6	ξ_6	0.500000	0.500000
	7	ξ_7	0.680000	0.680000
	8	ξ_8	0.820000	0.820000
	9	ξ_9	0.920000	0.920000
	10	ξ_{10}	0.980000	0.999990
11	ξ_{11}	1.000000	1.000000	

Tabella 1.5. Suddivisione di un dominio adimensionalizzato secondo la discretizzazione di Chebyshev (I tipo).

Discretizzazione di Chebyshev (I tipo) N=11 ; $\delta=10^{-5}$	k	senza " δ -points"		con " δ -points"	
		r_k	$\xi_k = x_k/L$	r_k	$\xi_k = x_k/L$
	1	0.989821	0.000000	0.984808	0.000000
2	0.909632	0.040507	0.866025	0.000010	
3	0.755750	0.118239	0.642788	0.060307	
4	0.540641	0.226900	0.342020	0.173648	
5	0.281733	0.357685	0.000000	0.326352	
6	0.000000	0.500000	- 0.342020	0.500000	
7	- 0.281733	0.642315	- 0.642788	0.673648	
8	- 0.540641	0.773100	- 0.866025	0.826352	
9	- 0.755750	0.881761	- 0.984808	0.939693	
10	- 0.909632	0.959493	xxx	0.999990	
11	- 0.989821	1.000000	xxx	1.000000	

Tabella 1.6. Suddivisione di un dominio adimensionalizzato secondo la discretizzazione di Chebyshev (II tipo).

Discretizzazione di Chebyshev (II tipo) N=11 ; $\delta=10^{-5}$	k	senza " δ -points"		con " δ -points"	
		r_k	$\xi_k = x_k/L$	r_k	$\xi_k = x_k/L$
	1	0.965926	0.000000	0.951057	0.000000
2	0.866025	0.051712	0.809017	0.000010	
3	0.707107	0.133975	0.587785	0.074675	
4	0.500000	0.241181	0.309017	0.190983	
5	0.258819	0.366025	0.000000	0.337540	
6	0.000000	0.500000	- 0.309017	0.500000	
7	- 0.258819	0.633975	- 0.587785	0.662460	
8	- 0.500000	0.758819	- 0.809017	0.809017	
9	- 0.707107	0.866025	- 0.951057	0.925325	
10	- 0.866025	0.948288	xxx	0.999990	
11	- 0.965926	1.000000	xxx	1.000000	

Tabella 1.7. Suddivisione di un dominio adimensionalizzato secondo la discretizzazione di Legendre.

Discretizzazione di Legendre N=11 ; $\delta=10^{-5}$	k	senza " δ -points"		con " δ -points"	
		r_k	$\xi_k = x_k/L$	r_k	$\xi_k = x_k/L$
	1	0.978165	0.000000	0.968070	0.000000
2	0.887051	0.046574	0.836018	0.000010	
3	0.730150	0.126776	0.613370	0.068204	
4	0.519096	0.234658	0.324254	0.183200	
5	0.269543	0.362220	0.000000	0.332526	
6	0.000000	0.500000	- 0.324254	0.500000	
7	- 0.269543	0.637780	- 0.613370	0.667474	
8	- 0.519096	0.765342	- 0.836018	0.816800	
9	- 0.730150	0.873224	- 0.968070	0.931796	
10	- 0.887051	0.953426	xxx	0.999990	
11	- 0.978165	1.000000	xxx	1.000000	

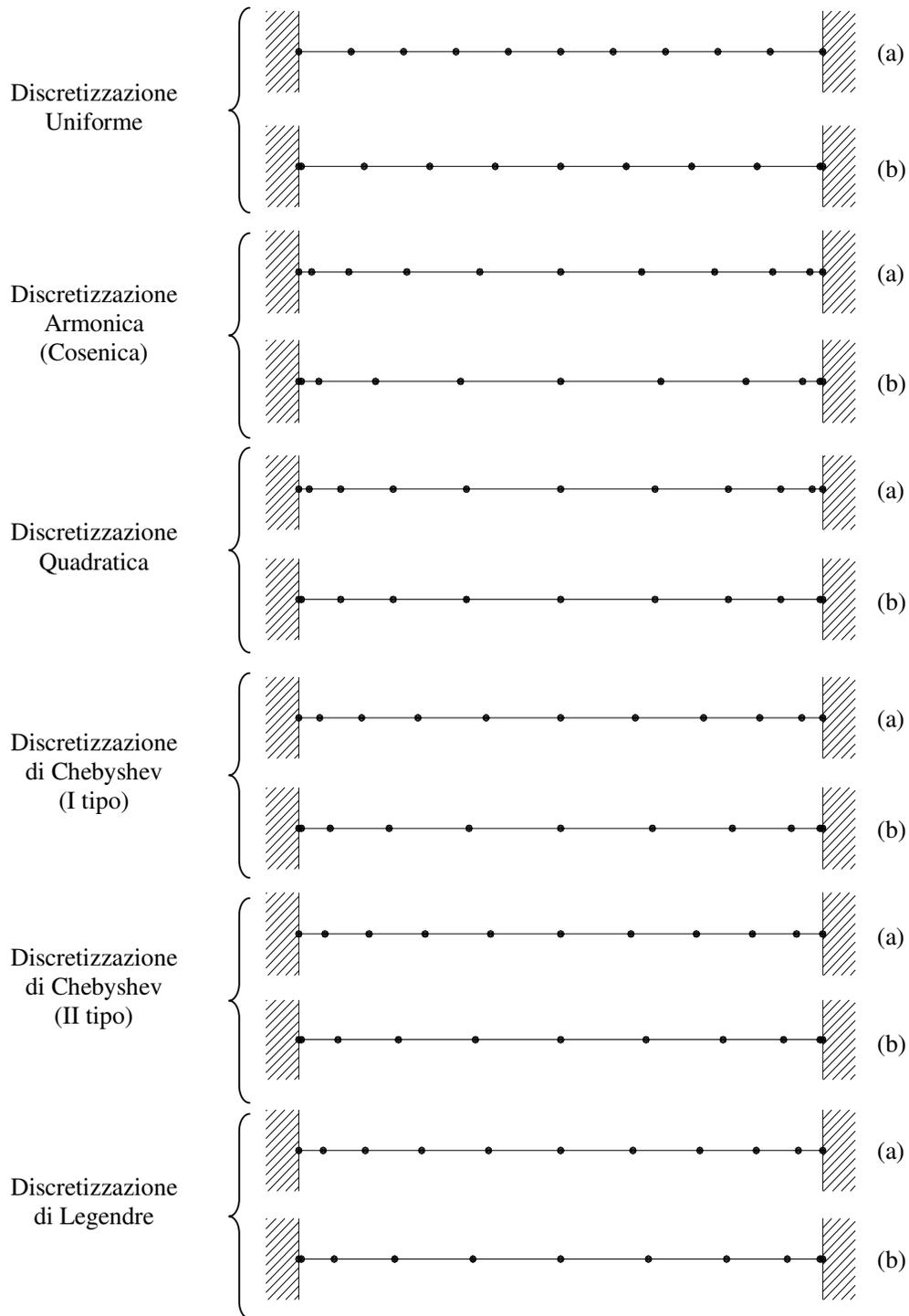


Figura 1.4. Interpretazione grafica delle varie tipologie di discretizzazione di un dominio adimensionalizzato: senza “ δ -Points” (a); con “ δ -Points” (b)

Capitolo 2

Formulazione Dinamica di Archi Piani

2.1 INTRODUZIONE

2.1.1 Definizioni

Nel contesto della teoria tecnica, le *travi* vengono intese come solidi generati da una superficie piana di forma qualsiasi che si muove nello spazio mantenendosi sempre normale alla traiettoria descritta dal suo baricentro G (Fig. 2.1). La superficie suddetta prende il nome di *sezione retta* o *sezione normale* della trave mentre il luogo dei punti descritti dalla traslazione del baricentro è detto *asse della trave*.

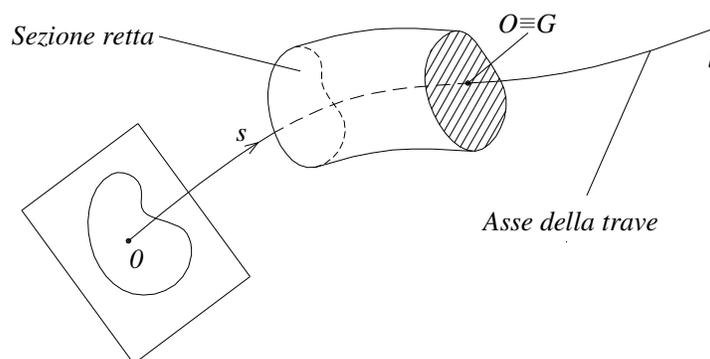


Figura 2.1. Interpretazione grafica della definizione di trave

Gli *archi piani* rappresentano una particolare categoria di trave la cui linea d'asse è costituita da una curva piana e tutte le forze agenti sono pure contenute in tale piano. Nella presente trattazione si farà riferimento a questa categoria, inoltre si supporrà sempre che al piano dell'asse e delle forze appartenga anche uno dei due assi principali d'inerzia dell'area della sezione retta.

In generale gli archi piani possono essere intesi come solidi il cui sviluppo longitudinale è preponderante nei confronti delle dimensioni trasversali, per questa ragione si parla di solidi monodimensionali e l'analisi strutturale viene ricondotta allo studio del comportamento della linea d'asse.

Per analizzare il generico arco piano in modo più specifico è bene osservare come esso possieda tre fondamentali caratteristiche di identificazione:

- *il suo asse di riferimento;*
- *la sua sezione;*
- *i suoi estremi.*

Innanzitutto, è necessario specificare cosa si intende per *asse di riferimento* sfruttando delle osservazioni di carattere tecnologico. Se la generica trave è costituita da un mezzo omogeneo, quale asse di riferimento viene, generalmente, assunto l'asse dell'arco, ovvero il luogo geometrico dei baricentri della sezione. D'altro canto, se la trave è realizzata con materiale composito (come il calcestruzzo armato, ad esempio), conviene usare il cosiddetto *asse neutro* come riferimento della struttura in esame.

Per quanto riguarda la *sezione della trave*, questa può variare con continuità la propria forma e le proprie dimensioni durante il movimento del suo baricentro lungo l'asse dell'arco, definendo così un arco a sezione variabile. Tali variazioni devono però rispettare la condizione imposta dall'assunzione di avere un asse principale d'inerzia dell'area della sezione appartenente al piano dell'asse dell'arco e delle forze. Strettamente legato alle dimensioni della sezione c'è il concetto di *arco snello* o *arco tozzo*; in particolare, si parlerà di arco snello qualora il rapporto tra l'altezza della sezione e la lunghezza dell'asse risulti molto piccolo mentre esso sarà tozzo in caso contrario.

A questo punto, resta da analizzare solo l'ultima caratteristica e cioè le *estremità dell'arco*. Esse possono venire definite mediante opportuni valori di una coordinata curvilinea s fissata sull'asse di riferimento; valori che, in generale, sono 0 e l ed identificano le posizioni delle sezioni estreme dell'arco (l rappresenta la lunghezza dell'asse di riferimento).

A livello tecnologico, gli archi possono essere costituiti da un qualunque mezzo usato sia singolarmente sia accoppiato con altre fibre per realizzare delle strutture composite. Comunque, l'interesse della presente trattazione è limitato ad archi realizzati da un unico strato di materiale elastico, omogeneo ed isotropo, in modo da poter sfruttare la *legge di Hooke* quale legame costitutivo. Trattando archi in materiale omogeneo, l'asse dell'arco e l'asse di riferimento risultano coincidenti.

Nel caso generale di trave in materiale omogeneo, tale asse rappresenta un sistema di riferimento globale grazie all'ascissa curvilinea s , avente origine in O , che permette di individuare la posizione della generica sezione retta lungo l'asse della trave.

Tuttavia, per l'analisi dell'arco piano, oggetto della presente trattazione, si è optato per un riferimento globale definito dall'angolo ϑ , che risulta nullo in corrispondenza della sezione in chiave, mentre i valori che tale ordinata assume in corrispondenza delle sezioni estreme dell'arco sono rispettivamente ϑ_0 e ϑ_1 .

In corrispondenza di ogni sezione, individuata dall'ordinata ϑ , va indicato il corrispondente raggio di curvatura r ; nel caso di arco a curvatura variabile l'andamento della curvatura dell'asse sarà governato da una legge $r = r(\vartheta)$.

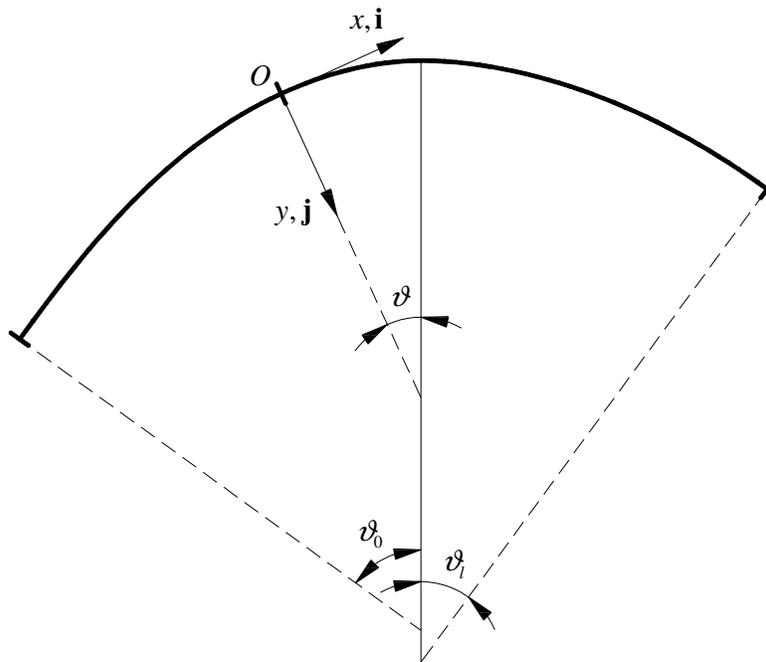


Figura 2.2. Sistema di riferimento adottato

Lungo l'asse di riferimento è poi possibile istituire un riferimento, che può essere visto come quel sistema di coordinate cartesiane ortogonali Oxy in cui O identifica l'origine del sistema e risulta coincidente con il baricentro G della sezione, x è l'asse individuato dall'intersezione del piano della sezione con il piano dell'asse e delle forze e risulta normale punto per punto all'asse dell'arco e infine y è l'asse normale alla sezione e risulta tangente punto per punto all'asse dell'arco.

Tale sistema di coordinate cartesiane ortogonali avrà ogni sua direzione associata ad un versore; in particolare tali vettori unitari vengono indicati con \mathbf{i} e \mathbf{j} , associati rispettivamente a x e y , e il loro verso è indicato nella figura 2.2.

Una volta definito il sistema locale è possibile interpretare il campo di spostamenti di un qualsiasi punto attraverso la coppia di componenti U, V . Dal momento che si sta trattando il problema da un punto di vista dinamico, tali componenti di spostamento saranno dipendenti dal tempo oltre che dalla posizione del punto stesso all'interno dell'arco per cui, a livello analitico, esse saranno:

$$U = U(y, \vartheta, t) \quad V = V(y, \vartheta, t) \quad (2.1.1)$$

2.1.2 Teoria di Timoshenko: ipotesi fondamentali

Per effettuare l'analisi dinamica del generico arco piano esistono due diverse teorie a cui fare riferimento a seconda che si voglia analizzare un elemento snello oppure un elemento tozzo.

Nel primo caso, la teoria da utilizzare va sotto il nome di *teoria di Eulero-Bernoulli*, secondo cui *la normale rettilinea all'asse di riferimento indeformato resta rettilinea e normale ad esso anche dopo la deformazione* il che equivale a trascurare la deformabilità da taglio trasversale. Come premesso, il limite di tale teoria sta nel poter essere applicata solo ad archi snelli e cioè ad elementi che presentano un rapporto molto piccolo tra l'altezza della sezione e la lunghezza dell'asse (la soluzione risulta sufficientemente accurata solo per essi).

Quando tale rapporto non è trascurabile, non è più possibile fare riferimento alla precedente teoria ma è necessario passare alla cosiddetta *teoria di Timoshenko*. Egli sviluppò tale teoria proprio sull'ipotesi che per l'analisi di elementi tozzi non era più lecito trascurare la deformabilità da taglio così come veniva proposto nella teoria di Eulero-Bernoulli. Visto che l'intento della presente dissertazione è la definizione del comportamento dinamico di archi piani moderatamente tozzi, la teoria a cui si farà riferimento in seguito sarà quella di Timoshenko. Secondo tale teoria *ogni sezione retta che si presenta piana e normale rispetto all'asse di riferimento nella sua configurazione indeformata, si manterrà piana ma non necessariamente normale ad esso dopo la deformazione* (è stata rilassata così un'ipotesi della teoria di Eulero-Bernoulli).

Sulla base di quanto affermato, nel presente capitolo si definiranno i tre set di equazioni (equazioni di congruenza o cinematiche; equazioni costitutive; equazioni di equilibrio) che stanno alla base dell'analisi dinamica di archi piani non propriamente snelli costituite da un unico strato di materiale elastico, omogeneo ed isotropo.

2.2 ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

2.2.1 Modello cinematico

In base a quanto è stato detto nella sezione precedente, il sistema di riferimento adottato consente di definire il campo di spostamenti di un punto qualsiasi dell'arco mediante la coppia U, V . Tali componenti non sono ancora state definite dal punto di vista analitico, però si è già visto che esse sono tutte funzione delle coordinate del punto dell'arco e del tempo t visto che stiamo lavorando in ambito dinamico.

Si consideri un generico arco dotato di un riferimento ortogonale locale e di un sistema globale come quelli descritti in precedenza. In base ad essi è possibile definire lo spostamento di un generico punto attraverso il seguente vettore:

$$\mathbf{U}(y, \vartheta, t) = [U(y, \vartheta, t), V(y, \vartheta, t)]^T = U(y, \vartheta, t)\mathbf{i} + V(y, \vartheta, t)\mathbf{j} \quad (2.2.1)$$

dove \mathbf{i}, \mathbf{j} sono, rispettivamente, i versori associati agli assi x, y mentre U, V sono le componenti del vettore degli spostamenti nelle corrispondenti direzioni coordinate ortogonali. Queste ultime sono le *componenti di spostamento effettive* per un arbitrario punto dell'arco e possono essere definite localmente mediante un'opportuna combinazione lineare. Infatti, in accordo con le assunzioni fatte per lo sviluppo della teoria in esame, il suddetto campo di spostamenti può essere interpretato come segue:

$$\begin{cases} U(y, \vartheta, t) = u(\vartheta, t) + \varphi(\vartheta, t)y \\ V(y, \vartheta, t) = v(\vartheta, t) \end{cases} \quad (2.2.2)$$

dove u e v rappresentano le traslazioni della sezione retta, identificata con il suo punto baricentrico appartenente all'asse, nelle rispettive direzioni x e y , mentre φ rappresenta la rotazione media della sezione attorno all'asse ortogonale al piano dell'arco e delle forze e passante per il punto d'intersezione fra asse di riferimento e sezione retta.

In questo modo sono state introdotte tre nuove entità di movimento movimento tali da consentire una definizione completa ed esaustiva del campo di spostamenti. Esse sono note col nome di *componenti di spostamento generalizzato* e sono, a tutti gli effetti, le reali

incognite, o *gradi di libertà*, del problema in esame. Tali componenti rappresentano le *variabili di configurazione* dell'elemento che si intende analizzare nel sistema di riferimento adottato, e possono essere interpretate come componenti del seguente *vettore degli spostamenti generalizzati*:

$$\mathbf{u} = [u, v, \varphi]^T \quad (2.2.3)$$

Una visione grafica delle componenti del vettore \mathbf{u} , con versi di positività annessi, è mostrata in figura 2.3:

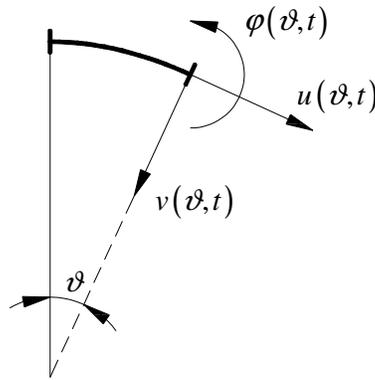


Figura 2.3. Componenti di spostamento generalizzato

2.2.2 Equazioni di congruenza

Le equazioni di congruenza rappresentano la relazione tra componenti di spostamento e componenti di deformazione. Nel caso dell'arco piano, l'analisi della deformazione è ricondotta allo studio del comportamento della linea d'asse, e precisamente di un suo elemento $ds = r d\vartheta$, essendo $r = r(\vartheta)$ il raggio di curvatura della linea d'asse nel punto generico.

In seguito alla deformazione, l'elemento ds assumerà una configurazione \overline{ds} e subirà: una variazione di lunghezza, una variazione relativa della sua tangente rispetto alla giacitura S della sezione trasversale, una variazione di direzione individuata dalla sua nuova tangente.

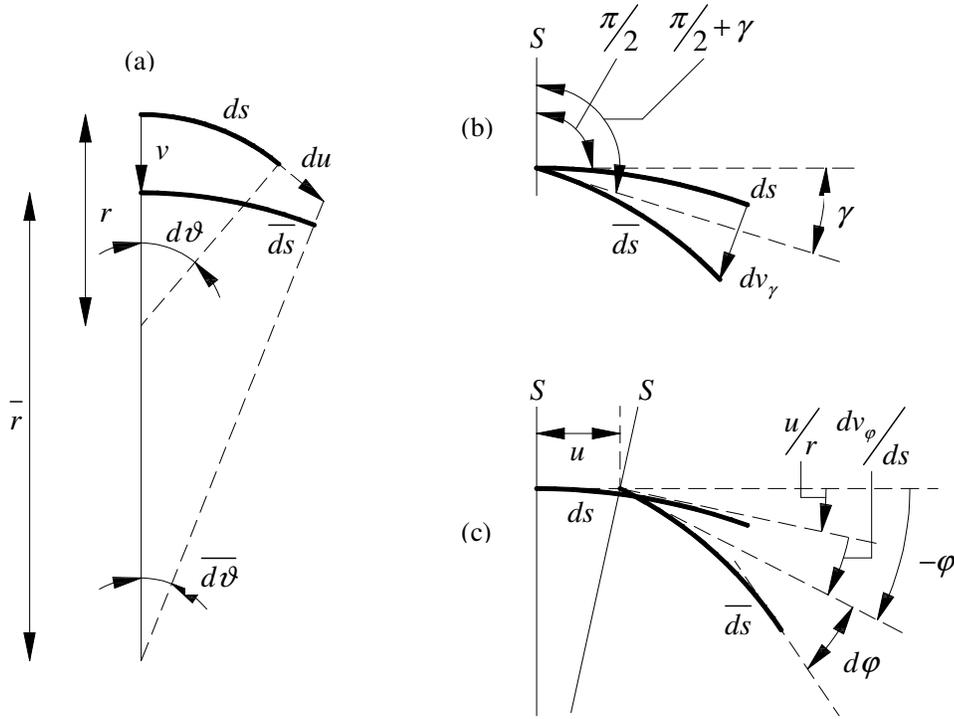


Figura 2.4. Configurazioni indeformata e deformata dell'elemento di arco

Si procede esaminando separatamente i tre effetti; alla variazione di lunghezza (figura 2.4 (a)) corrisponde una dilatazione lineare:

$$\varepsilon = \frac{\overline{ds} - ds}{ds} = \frac{(r-v)d\vartheta + du - ds}{ds} \quad (2.2.4)$$

Essendo $ds = r d\vartheta$, sostituendo nell'equazione (2.1.5) si ottiene:

$$\varepsilon = \frac{(r-v)d\vartheta + du - ds}{ds} = \frac{du - v d\vartheta}{ds} = \frac{1}{r} \frac{du}{d\vartheta} - \frac{v}{r} \quad (2.2.5)$$

Alla variazione tra la direzione della tangente all'elemento deformato \widetilde{ds} e la giacitura della sezione trasversale S (figura 2.4 (b)), ortogonali prima della deformazione, corrisponde una variazione dv_γ della componente di spostamento radiale v alla quale resta associata una dilatazione angolare:

$$\gamma = \frac{dv_\gamma}{ds} = \frac{1}{r} \frac{dv_\gamma}{d\vartheta} \quad (2.2.6)$$

Infine la variazione φ tra la direzione della tangente all'elemento indeformato e quella all'elemento deformato (figura 2.4 (c)) risulta dal contributo di due effetti: il primo dovuto alla rotazione $\frac{u}{r}$ associata allo spostamento u secondo la tangente ed il secondo dovuto all'incremento dv_φ dello spostamento v secondo la normale, ovvero:

$$-\varphi = \frac{u}{r} + \frac{dv_\varphi}{ds} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{dv_\varphi}{d\vartheta} \quad (2.2.7)$$

Nell'equazione (2.2.7) il segno negativo attribuito a φ dipende dalla convenzione adottata, per cui ad incrementi positivi delle componenti u, v corrispondono incrementi negativi della rotazione.

Alla rotazione φ risulta associata una variazione della curvatura χ dell'asse:

$$\chi = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\vartheta} \quad (2.2.8)$$

che sarà assunta positiva se tale da diminuire la curvatura iniziale dell'asse.

Poiché la variazione totale dello spostamento v in direzione radiale risulta essere:

$$dv = dv_\gamma + dv_\varphi \quad (2.2.9)$$

la somma delle equazioni (2.2.6) e (2.2.7) permette di scrivere un'unica equazione per dv , di conseguenza lo stato di deformazione della trave è individuato dalle tre componenti di spostamento generalizzato:

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{1}{r} \frac{du}{d\vartheta} - \frac{v}{r} \\ \gamma = \frac{1}{r} \frac{dv}{d\vartheta} + \frac{u}{r} + \varphi \\ \chi = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\vartheta} \end{cases} \quad (2.2.10)$$

Le relazioni trovate in forma differenziale caratterizzano uno stato di deformazione derivabile da uno stato di spostamento ed esprimono le *equazioni di congruenza* per l'arco piano.

Queste relazioni sono state ricavate analizzando il comportamento deformativi della linea d'asse, tuttavia, volendo trattare il problema dal punto di vista dinamico, le componenti di spostamento hanno dipendenza anche dal tempo t , di conseguenza risulta corretto esprimere le equazioni di congruenza in termini di derivate parziali:

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{v}{r} \\ \gamma = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u}{r} + \varphi \\ \chi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Le componenti di deformazione ricavate vengono identificate come segue:

- $\varepsilon = \varepsilon(\vartheta, t)$ rappresenta la deformazione assiale dovuta allo sforzo normale;
- $\gamma = \gamma(\vartheta, t)$ rappresenta lo scorrimento angolare indotto dall'effetto tagliante;
- $\chi = \chi(\vartheta, t)$ rappresenta la variazione di curvatura dell'asse di riferimento dovuta alle sollecitazioni flessionali.

Tali componenti deformative possono essere raggruppate in un vettore algebrico, in maniera del tutto coerente con l'ordine fissato per le componenti di spostamento:

$$\boldsymbol{\eta} = [\varepsilon, \gamma, \chi]^T \quad (2.2.12)$$

2.3 LEGAME COSTITUTIVO E CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE INTERNA

Come noto, le componenti di sollecitazione interna di una qualsiasi struttura sono strettamente legate alle tensioni agenti all'interno della stessa. Queste tensioni sono, a loro volta, relazionate alle componenti di deformazione attraverso il cosiddetto *legame costitutivo*. Quindi, se si desidera conoscere le relazioni esistenti tra le azioni interne e le componenti di deformazione del generico arco piano a comportamento elastico lineare ed isotropo, è necessario, innanzitutto, definire le espressioni attinenti al legame costitutivo per poi estendere il discorso alla valutazione di tali sollecitazioni. In base alle nozioni di Scienza delle Costruzioni, le suddette caratteristiche di sollecitazione interna sono esprimibili nella seguente forma in funzione delle componenti di deformazione:

$$\begin{cases} N = EA\varepsilon \\ T = G\Lambda\gamma \\ M = EI\chi \end{cases} \quad (2.3.1)$$

La nomenclatura delle sollecitazioni interne è la seguente:

- $N = N(\vartheta, t)$ rappresenta lo *sforzo normale* associato a $\varepsilon(\vartheta, t)$;
- $T = T(\vartheta, t)$ rappresenta lo *sforzo di taglio* associato a $\gamma(\vartheta, t)$;
- $M = M(\vartheta, t)$ rappresenta il *momento flettente* associato a $\chi(\vartheta, t)$.

mentre la loro rappresentazione grafica è illustrata in figura 2.5.

Le equazioni (2.3.1) definiscono un legame tra le cosiddette *variabili secondarie* del problema, o di seconda specie, (ovvero le componenti di sollecitazione interna) e le *variabili primali* dello stesso, o di prima specie, (ovvero le componenti di deformazione).

È bene notare come nelle equazioni (2.3.1) compaiano grandezze legate al materiale costituente la trave e cioè E, G, ν che rappresentano rispettivamente il *modulo elastico di Young*, il *modulo di elasticità tangenziale* ed il *coefficiente di Poisson*. In particolare solo le prime due compaiono esplicitamente mentre ν è presente nell'espressione di G :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.3.2)$$

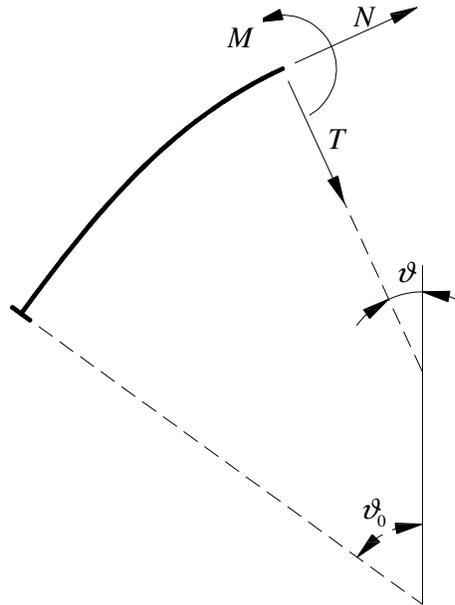


Figura 2.5. Versi di positività delle componenti di sollecitazione interna

Ma, oltre alle caratteristiche relative al mezzo, nelle espressioni delle azioni interne si possono osservare anche delle grandezze contrassegnanti la geometria strutturale come A che rappresenta l'area della sezione corrente, $\Lambda = A/\kappa_0$ che esprime il rapporto tra l'area stessa ed il corrispondente valore del fattore di taglio κ_0 , che nella presente trattazione è stato assunto pari a $\frac{6}{5}$, e I che rappresenta il momento d'inerzia della sezione.

Le tre componenti dell'azione interna possono essere raggruppate all'interno del seguente vettore algebrico degli sforzi generalizzati:

$$\mathbf{S} = [N, T, M]^T \quad (2.3.3)$$

2.4 EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

A questo punto è appropriato stabilire le relazioni che esprimono l'equilibrio dinamico dell'elemento infinitesimo di un generico arco piano in relazione alla teoria adottata. In generale, su questo elemento agiranno tutte le risultanti delle azioni interne definite nel precedente paragrafo oltre a delle generiche *forze esterne* definite per unità di lunghezza dell'asse di riferimento. Tali forze saranno le cosiddette delle *variabili sorgente* del problema, e solo una volta note esse sarà possibile definire le equazioni che governano il comportamento di un arco piano moderatamente spesso. Tali equazioni verranno definite usando il *principio di Hamilton* ovvero il principio dei lavori virtuali in ambito dinamico.

2.4.1 Vettore delle forze esterne

Il vettore delle forze esterne è quel vettore che include al suo interno tutte quelle azioni agenti su una porzione di lunghezza unitaria dell'asse di riferimento. Per definizione, esso è il vettore algebrico duale del vettore degli spostamenti generalizzati per cui, nel rispetto del riferimento locale adottato, la sua definizione analitica è fornita da:

$$\mathbf{q} = [p, q, m]^T \quad (2.4.1)$$

dove $p(\vartheta, t), q(\vartheta, t)$ sono le risultanti delle forze esterne agenti su un tronco di lunghezza unitaria nelle direzioni tangenziale e normale (hanno il significato di carichi assiale e trasversale, rispettivamente), mentre $m(\vartheta, t)$ rappresenta la coppia flettente distribuita, sempre per unità di lunghezza. Una visione grafica delle componenti del vettore \mathbf{q} è fornita in figura 2.6.

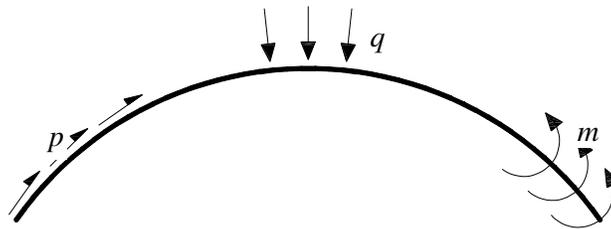


Figura 2.6. Componenti del vettore delle forze esterne

2.4.2 Determinazione delle equazioni indefinite di equilibrio mediante il principio di Hamilton

Le equazioni del moto forzato possono essere ricavate mediante il *principio variazionale di Hamilton*; tale metodo risulta particolarmente efficace in quanto fornisce anche le condizioni al contorno naturali del problema.

Per la sua applicazione si consideri un corpo elastico che cambi continuamente il suo stato tra due istanti consecutivi t_1 e t_2 e che sia in equilibrio sotto l'azione di un vettore delle forze esterne. Definita con $S = S_u + S_s$ la superficie totale di tale corpo, generalmente si assume che le forze esterne risultino note sulla porzione interna S_s di esso, mentre gli spostamenti siano conosciuti sulla porzione di estremità S_u . Inoltre, essendo \mathbf{U} il vettore di spostamento all'atto dell'equilibrio, si consideri un arbitrario vettore di spostamento $\mathbf{U} + \delta\mathbf{U}$ in cui la variazione $\delta\mathbf{U}$ rappresenta un ulteriore vettore le cui componenti sono chiamate *spostamenti virtuali*. Tale variazione $\delta\mathbf{U}$ si assume nulla in corrispondenza degli istanti t_1 e t_2 e arbitraria nell'intervallo temporale compreso.

Detto ciò, il principio di Hamilton afferma che il percorso seguito dal processo dinamico in questione può esprimersi come:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt = 0 \quad (2.4.2)$$

dove con T si è indicata l'*energia cinetica* del sistema e con Π l'*energia potenziale totale*; a parole, l'equazione (2.4.2) afferma che l'integrale tra t_1 e t_2 della funzione $(T - \Pi)$ possiede un valore estremo che si può dimostrare essere un minimo per essa.

Nel caso in cui il processo sia statico, ovvero non vi sia dipendenza dalla variabile temporale, il suddetto principio si riduce al *principio di minimo dell'energia potenziale totale*:

$$\delta\Pi = 0 \quad (2.4.3)$$

L'applicazione del principio di Hamilton passa attraverso la conoscenza delle variazioni dei termini energetici in questione; a tal proposito si procede ad enunciare alcune proprietà fondamentali:

- 1) L'operazione di variazione e quella di integrazione sono commutative. In termini analitici ciò significa che gli operatori δ e \int possono scambiarsi di posizione:

$$\delta \int_x (\dots) dx = \int_x \delta (\dots) dx$$

- 2) L'operazione di variazione e quella di derivazione sono commutative. In termini analitici ciò significa che gli operatori δ e ∂ possono scambiarsi di posizione:

$$\delta \frac{\partial (\dots)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \delta (\dots)$$

- 3) L'operazione di variazione possiede le stesse regole delle operazioni di derivazione e di integrazione; in particolare:

$$\delta f^n(x) = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot \delta f(x)$$

$$\delta(f(x) \cdot g(x)) = (\delta f(x)) \cdot g(x) + f(x) \cdot (\delta g(x))$$

$$\delta \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{(\delta f(x)) \cdot g(x) - f(x) \cdot (\delta g(x))}{[g(x)]^2}$$

Tenendo conto di tali proprietà, l'equazione (2.4.2) può esprimersi come:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - \Pi) dt = 0 \quad (2.4.4)$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale totale Π , essa può essere espressa come la somma dell'*energia di deformazione* Φ e del *potenziale dei carichi esterni* H :

$$\Pi = \Phi + H \quad (2.4.5)$$

dove il potenziale dei carichi H è dato dal lavoro compiuto dalle forze esterne cambiato di segno:

$$H = -L_e \quad (2.4.6)$$

L'equazione (2.4.4) può quindi essere riscritta come:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - \Phi) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta L_e dt = 0 \quad (2.4.7)$$

2.4.2.1 Calcolo dei termini energetici e di lavoro

L'energia cinetica T relativa ad un generico arco piano è fornita dalla seguente scrittura:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\mu A(\vartheta) \left(\frac{\partial u(\vartheta, t)}{\partial t} \right)^2 + \mu A(\vartheta) \left(\frac{\partial v(\vartheta, t)}{\partial t} \right)^2 + \mu I(\vartheta) \left(\frac{\partial \varphi(\vartheta, t)}{\partial t} \right)^2 \right) r d\vartheta \quad (2.4.8)$$

dove con μ si indica la densità del materiale; dall'equazione (2.4.8) si può notare come ogni singolo contributo di spostamento generalizzato incida in questa definizione, che risulta ottenibile dalla sovrapposizione dei singoli effetti.

L'energia elastica di deformazione Φ nel caso in esame assume l'aspetto:

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^l \left(N(\vartheta, t) \varepsilon(\vartheta, t) + T(\vartheta, t) \gamma(\vartheta, t) + M(\vartheta, t) \chi(\vartheta, t) \right) r d\vartheta \quad (2.4.9)$$

introducendo le equazioni (2.3.1) di legame costitutivo si ottiene:

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^l \left(EA(\vartheta) \varepsilon^2(\vartheta, t) + G\Lambda(\vartheta) \gamma^2(\vartheta, t) + EI(\vartheta) \chi^2(\vartheta, t) \right) r d\vartheta \quad (2.4.10)$$

introducendo le equazioni (2.2.11) di compatibilità cinematica si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \Phi = & \frac{1}{2} \int_0^l EA(\vartheta) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u(\vartheta, t)}{\partial \vartheta} - \frac{v(\vartheta, t)}{r} \right)^2 + \\
 & + G\Lambda(\vartheta) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v(\vartheta, t)}{\partial \vartheta} + \frac{u(\vartheta, t)}{r} + \varphi(\vartheta, t) \right)^2 + \\
 & + EI(\vartheta) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(\vartheta, t)}{\partial \vartheta} \right)^2 \Big|_0^l rd\vartheta
 \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Individuando con “ $\bar{}$ ” le azioni concentrate agenti alle estremità della struttura, il lavoro L_e delle forze esterne è esprimibile come:

$$\begin{aligned}
 L_e = & \frac{1}{2} \int_0^l (p(\vartheta, t)u(\vartheta, t) + q(\vartheta, t)v(\vartheta, t) + m(\vartheta, t)\varphi(\vartheta, t)) rd\vartheta + \\
 & + [\bar{N}(t)u(t) + \bar{T}(t)v(t) + \bar{M}(t)\varphi(t)]_0^l
 \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

D’ora in avanti, al fine di non appesantire la scrittura delle equazioni, l’operazione di derivazione nel tempo sarà indicata con il simbolo “ $\dot{}$ ” e non verranno riportate le dipendenze temporali e spaziali dei vari termini.

2.4.2.2 Variazioni dei termini energetici e di lavoro

Nota l’equazione (2.4.8) secondo cui si valuta l’energia cinetica T in funzione delle variabili di configurazione, la sua variazione si calcola applicando alla relazione suddetta l’operatore δ ; si ottiene così:

$$\delta T = \delta \left(\frac{1}{2} \int_0^l (\mu A \dot{u}^2 + \mu A \dot{v}^2 + \mu I \dot{\varphi}^2) rd\vartheta \right) = \int_0^l (\mu A \dot{u} \delta \dot{u} + \mu A \dot{v} \delta \dot{v} + \mu I \dot{\varphi} \delta \dot{\varphi}) rd\vartheta \tag{2.4.13}$$

Applicando l’operatore δ all’espressione (2.4.11) che esprime l’energia elastica di deformazione Φ , si ottiene la sua variazione:

$$\begin{aligned}
 \delta\Phi &= \delta \left(\frac{1}{2} \int_0^l \left(EA \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{v}{r} \right)^2 + G\Lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u}{r} + \varphi \right)^2 + EI \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right)^2 \right) r d\vartheta \right) = \\
 &= \int_0^l \left(EA \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{v}{r^2} \delta v - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \delta v - \frac{v}{r} \delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) \right) + \right. \\
 &\quad + G\Lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right) + \frac{u}{r^2} \delta u + \varphi \delta \varphi + \frac{u}{r} \delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \delta u + \right. \\
 &\quad \left. \left. + \varphi \delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \delta \varphi + \frac{\varphi}{r} \delta u + \frac{u}{r} \delta \varphi \right) + EI \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) \right) r d\vartheta
 \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

Per semplicità si considera la variazione $\delta\Phi$ come somma di tre contributi:

$$\begin{aligned}
 \delta\Phi &= \int_0^l EA \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{v}{r^2} \delta v - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \delta v - \frac{v}{r} \delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) \right) r d\vartheta + \\
 &\quad + \int_0^l G\Lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right) + \frac{u}{r^2} \delta u + \varphi \delta \varphi + \frac{u}{r} \delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \delta u + \right. \\
 &\quad \left. + \varphi \delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \delta \varphi + \frac{\varphi}{r} \delta u + \frac{u}{r} \delta \varphi \right) r d\vartheta + \int_0^l EI \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) r d\vartheta
 \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Applicando la regola nota col nome di *integrazione per parti*, che in termini analitici può essere espressa come:

$$\int_x f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x} dx = f(x) g(x) - \int_x \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x) dx$$

ognuno dei termini dell'equazione (2.4.16) può essere integrato per parti:

$$\begin{aligned}
 \delta\Phi = & \left[EA \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{v}{r} \right) \delta u \right]_0^l + \\
 & - \int_0^l \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(EA \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{v}{r} \right) \right) \delta u + \frac{EA}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{v}{r} \right) \delta v \right) r d\vartheta + \\
 & + \left[G\Lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u}{r} + \varphi \right) \delta v \right]_0^l - \int_0^l \left(-\frac{G\Lambda}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u}{r} + \varphi \right) \delta u + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(G\Lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u}{r} + \varphi \right) \right) \delta v - G\Lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u}{r} + \varphi \right) \delta \varphi \right) r d\vartheta + \\
 & + \left[EI \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \delta \varphi \right]_0^l - \int_0^l \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(EI \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) \delta \varphi \right) r d\vartheta
 \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

in questo modo è possibile eliminare le derivate degli spostamenti virtuali.

La variazione del lavoro L_e delle forze esterne si determina applicando l'operatore δ all'espressione (2.4.12):

$$\delta L_e = \int_0^l (p \delta u + q \delta v + m \delta \varphi) r d\vartheta + \left[\bar{N} \delta u + \bar{T} \delta v + \bar{M} \delta \varphi \right]_0^l \tag{2.4.17}$$

Applicando le proprietà delle operazioni di variazione e di integrazione, il principio di Hamilton può essere espresso come:

$$\begin{aligned}
 \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta (T - \Pi) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta (T - \Phi) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta L_e dt = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta \Phi dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta L_e dt = 0
 \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

in particolare, esplicitando il termine $\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt$, si nota come esso possa venire integrato per parti nel tempo:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l (\mu A \dot{u} \delta \dot{u} + \mu A \dot{v} \delta \dot{v} + \mu I \dot{\varphi} \delta \dot{\varphi}) r d\vartheta dt = \\
 &= \int_0^l [\mu A \dot{u} \delta u + \mu A \dot{v} \delta v + \mu I \dot{\varphi} \delta \varphi]_{t_1}^{t_2} r d\vartheta + \\
 &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l (\mu A \ddot{u} \delta u + \mu A \ddot{v} \delta v + \mu I \ddot{\varphi} \delta \varphi) r d\vartheta dt = \\
 &\quad = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l (\mu A \ddot{u} \delta u + \mu A \ddot{v} \delta v + \mu I \ddot{\varphi} \delta \varphi) r d\vartheta dt
 \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

ricordando che il vettore della variazione $\delta \mathbf{U}$ è per ipotesi nullo in corrispondenza degli istanti t_1 e t_2 ; in questo modo si sono eliminate le derivate temporali dei termini variazionali che erano presenti nell'espressione di δT .

Ora che tutti i termini dell'equazione di Hamilton sono stati calcolati, si può procedere alla loro sostituzione nell'equazione (2.4.18):

$$\begin{aligned}
 \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt &= \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \Phi + \delta W) dt = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left(-(\mu A \ddot{u} \delta u + \mu A \ddot{v} \delta v + \mu I \ddot{\varphi} \delta \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(EA \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{v}{r} \right) \right) \delta u + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{EA}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{v}{r} \right) \delta v - \frac{G\Lambda}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u}{r} + \varphi \right) \delta u + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(G\Lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u}{r} + \varphi \right) \right) \delta v + \right. \\
 &\quad \left. - G\Lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u}{r} + \varphi \right) \delta \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(EI \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) \delta \varphi + p \delta u + q \delta v + m \delta \varphi \right) r d\vartheta dt + \\
 &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \left(\left[EA \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{v}{r} \right) \delta u \right]_0^l + \left[G\Lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u}{r} + \varphi \right) \delta v \right]_0^l + \right. \\
 &\quad \left. + \left[EI \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \delta \varphi \right]_0^l + \left[\bar{N} \delta u + \bar{T} \delta v + \bar{M} \delta \varphi \right]_0^l \right) dt = 0
 \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

Introducendo le equazioni (2.2.11) di compatibilità cinematica si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt &= \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \Phi + \delta W) dt = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left(-(\mu A \ddot{u} \delta u + \mu A \ddot{v} \delta v + \mu I \ddot{\varphi} \delta \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (EA \varepsilon) \delta u + \frac{EA}{r} \varepsilon \delta v - \frac{G\Lambda}{r} \gamma \delta u + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (G\Lambda \gamma) \delta v - G\Lambda \gamma \delta \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (EI \kappa) \delta \varphi + p \delta u + q \delta v + m \delta \varphi \right) r d\vartheta dt + \\
 &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \left([EA \varepsilon \delta u]_0^l + [G\Lambda \gamma \delta v]_0^l + [EI \kappa \delta \varphi]_0^l + [\bar{N} \delta u + \bar{T} \delta v + \bar{M} \delta \varphi]_0^l \right) dt = 0
 \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

Introducendo le equazioni (2.3.1) di legame costitutivo si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt &= \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \Phi + \delta W) dt = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left(-(\mu A \ddot{u} \delta u + \mu A \ddot{v} \delta v + \mu I \ddot{\varphi} \delta \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial \vartheta} \delta u + \frac{N}{r} \delta v - \frac{T}{r} \delta u + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \delta v - T \delta \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial \vartheta} \delta \varphi + p \delta u + q \delta v + m \delta \varphi \right) r d\vartheta dt + \\
 &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \left([N \delta u]_0^l + [T \delta v]_0^l + [M \delta \varphi]_0^l + [\bar{N} \delta u + \bar{T} \delta v + \bar{M} \delta \varphi]_0^l \right) dt = 0
 \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

Riordinando i termini dell'equazione (2.4.22), si ottiene la seguente relazione:

$$\begin{aligned}
 \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt &= \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial \vartheta} - \frac{T}{r} + p - \mu A \ddot{u} \right) \delta u + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} + \frac{N}{r} + q - \mu A \ddot{v} \right) \delta v + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial \vartheta} - T + m - \mu I \ddot{\varphi} \right) \delta \varphi \right) r d\vartheta dt + \\
 &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \left((\bar{N} - N) \delta u + (\bar{T} - T) \delta v + (\bar{M} - M) \delta \varphi \right)_0^l dt = 0
 \end{aligned} \tag{2.4.23}$$

Le variazioni $\delta u(\vartheta, t)$, $\delta v(\vartheta, t)$, $\delta \varphi(\vartheta, t)$ sono arbitrarie nei punti interni al dominio, devono quindi annullarsi i rispettivi coefficienti, per cui risulta:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial \vartheta} - \frac{T}{r} + p = \mu A \ddot{u} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} + \frac{N}{r} + q = \mu A \ddot{v} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial \vartheta} - T + m = \mu I \ddot{\varphi} \end{cases} \quad (2.4.24)$$

Inoltre, per il principio di Hamilton, deve essere nullo anche il secondo integrale, si ha:

$$\begin{aligned} (\overline{N_0} - N(\vartheta_0)) \delta u_0 = 0 & \quad (\overline{N_l} - N(\vartheta_l)) \delta u_l = 0 \\ (\overline{T_0} - T(\vartheta_0)) \delta v_0 = 0 & \quad (\overline{T_l} - T(\vartheta_l)) \delta v_l = 0 \\ (\overline{M_0} - M(\vartheta_0)) \delta \varphi_0 = 0 & \quad (\overline{M_l} - M(\vartheta_l)) \delta \varphi_l = 0 \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

Le condizioni naturali al contorno per $\vartheta = \vartheta_0$ sono:

$$\begin{aligned} \overline{N_0} = N_0 & \quad \overline{u_0} = u_0 \\ \overline{T_0} = T_0 & \quad \text{oppure} \quad \overline{v_0} = v_0 \\ \overline{M_0} = M_0 & \quad \overline{\varphi_0} = \varphi_0 \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

Le condizioni naturali al contorno per $\vartheta = \vartheta_l$ sono:

$$\begin{aligned} \overline{N_l} = N_l & \quad \overline{u_l} = u_l \\ \overline{T_l} = T_l & \quad \text{oppure} \quad \overline{v_l} = v_l \\ \overline{M_l} = M_l & \quad \overline{\varphi_l} = \varphi_l \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

dove le grandezze $\overline{N_0}, \overline{N_l}, \overline{T_0}, \overline{T_l}, \overline{M_0}, \overline{M_l}$ e $\overline{u_0}, \overline{u_l}, \overline{v_0}, \overline{v_l}, \overline{\varphi_0}, \overline{\varphi_l}$ indicano rispettivamente le sollecitazioni e gli spostamenti imposti alle estremità.

Combinando in maniera opportuna le equazioni (2.4.26) e (2.4.27) si possono ricavare tutte le tipologie di vincolamento possibili per le due estremità dell'arco piano.

Sono state così ricavate le tre *equazioni indefinite di equilibrio*, o *equazioni di Eulero-Lagrange*, o *equazioni del moto* con le relative *condizioni naturali al contorno* per il generico arco piano, di seguito le equazioni indefinite di equilibrio vengono espresse in maniera estesa:

$$\begin{cases} \frac{1}{r(\vartheta)} \frac{\partial N(\vartheta, t)}{\partial \vartheta} - \frac{T(\vartheta, t)}{r} + p(\vartheta, t) = \mu A(\vartheta) \frac{\partial^2 u(\vartheta, t)}{\partial t^2} \\ \frac{1}{r(\vartheta)} \frac{\partial T(\vartheta, t)}{\partial \vartheta} + \frac{N(\vartheta, t)}{r} + q(\vartheta, t) = \mu A(\vartheta) \frac{\partial^2 v(\vartheta, t)}{\partial t^2} \\ \frac{1}{r(\vartheta)} \frac{\partial M(\vartheta, t)}{\partial \vartheta} - T(\vartheta, t) + m(\vartheta, t) = \mu I(\vartheta) \frac{\partial^2 \varphi(\vartheta, t)}{\partial t^2} \end{cases} \quad (2.4.28)$$

2.4.3 Determinazione delle equazioni indefinite di equilibrio mediante il metodo diretto

Le equazioni indefinite di equilibrio possono essere ottenute anche mediante il *metodo diretto*, cioè imponendo l'equilibrio di un elemento infinitesimo. Si considera un generico arco piano. Le caratteristiche strutturali e il sistema di riferimento adottato sono quelli descritti nel paragrafo 2.1.1. La più generale condizione di carico sarà rappresentata da una distribuzione di forze $p(\vartheta), q(\vartheta)$ rispettivamente in direzione assiale e radiale, e da una distribuzione di coppie flettenti $m(\vartheta)$. Le caratteristiche di sollecitazione interna agenti nella struttura in esame sono:

- lo sforzo normale $N = N(\vartheta, t)$;
- lo sforzo di taglio $T = T(\vartheta, t)$;
- il momento flettente $M = M(\vartheta, t)$.

Si considera un elemento infinitesimo di lunghezza $ds = rd\vartheta$, con $r = r(\vartheta) = \frac{1}{k(\vartheta)}$

raggio di curvatura, sottoposto ad una generica distribuzione di forzanti esterne. Se l'elemento all'interno dell'arco è in condizioni di equilibrio, esso, considerato a sé stante, sarà ancora in equilibrio pur di applicare alla sua sezione terminale di sinistra le azioni trasmesse dalla porzione di struttura posizionata a sinistra dell'elemento, ed alla sua sezione terminale di destra le azioni trasmesse dalla porzione di struttura posizionata a destra dell'elemento in questione.

Quindi, le azioni che operano sull'elemento infinitesimo in questione saranno le risultanti delle forzanti esterne e le sollecitazioni di estremità nate dallo svincolamento dall'arco piano. Tali azioni sono mostrate in figura 2.7.

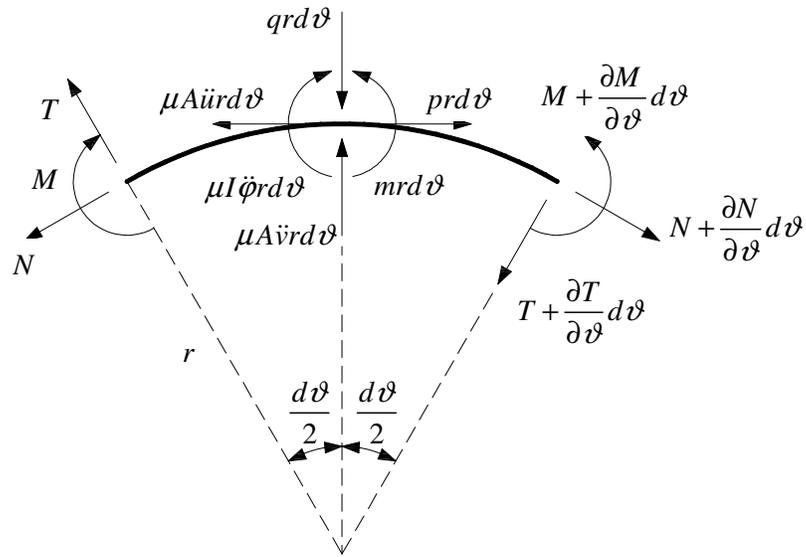


Figura 2.7. Azioni che operano sull'elemento infinitesimo

Affinché l'elemento infinitesimo considerato sia in condizioni di equilibrio, devono essere nulle le risultanti delle forze in direzione tangenziale e radiale e dei momenti flettenti rispetto ad un polo. La scomposizione delle azioni nelle direzioni tangenziale e radiale è illustrata in figura 2.8.

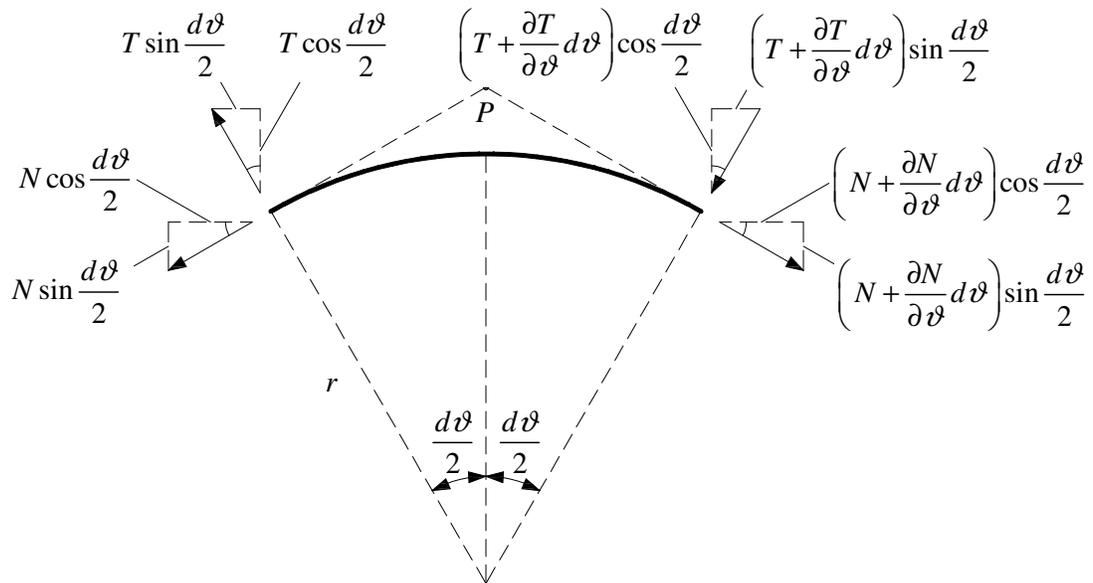


Figura 2.8 Scomposizione delle forze di estremità in componenti tangenziali e radiali

L'equazione di equilibrio alla traslazione in direzione tangenziale è la seguente:

$$\begin{aligned}
 prd\vartheta - N \cos \frac{d\vartheta}{2} - T \sin \frac{d\vartheta}{2} + \left(N + \frac{\partial N}{\partial \vartheta} d\vartheta \right) \cos \frac{d\vartheta}{2} + \\
 - \left(T + \frac{\partial T}{\partial \vartheta} d\vartheta \right) \sin \frac{d\vartheta}{2} = \mu A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} rd\vartheta
 \end{aligned}
 \tag{2.4.29}$$

Trascurando il termine $\frac{\partial T}{\partial \vartheta} d\vartheta \sin \frac{d\vartheta}{2}$ in quanto infinitesimo di ordine superiore si ottiene:

$$prd\vartheta + \frac{\partial N}{\partial \vartheta} d\vartheta \cos \frac{d\vartheta}{2} - 2T \sin \frac{d\vartheta}{2} = \mu A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} rd\vartheta
 \tag{2.4.30}$$

L'equazione di equilibrio alla traslazione in direzione radiale è la seguente:

$$\begin{aligned}
 qrd\vartheta - T \cos \frac{d\vartheta}{2} + N \sin \frac{d\vartheta}{2} + \left(T + \frac{\partial T}{\partial \vartheta} d\vartheta \right) \cos \frac{d\vartheta}{2} + \\
 + \left(N + \frac{\partial N}{\partial \vartheta} d\vartheta \right) \sin \frac{d\vartheta}{2} = \mu A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} rd\vartheta
 \end{aligned}
 \tag{2.4.31}$$

Trascurando il termine $\frac{\partial N}{\partial \vartheta} d\vartheta \sin \frac{d\vartheta}{2}$ in quanto infinitesimo di ordine superiore si ottiene:

$$qrd\vartheta + \frac{\partial T}{\partial \vartheta} d\vartheta \cos \frac{d\vartheta}{2} + 2N \sin \frac{d\vartheta}{2} = \mu A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} rd\vartheta
 \tag{2.4.32}$$

L'equazione di equilibrio alla rotazione attorno al punto P è la seguente:

$$\begin{aligned}
 mrd\vartheta + prd\vartheta \left(\frac{r}{\cos \frac{d\vartheta}{2}} - r \right) - M - Tr \tan \frac{d\vartheta}{2} + \\
 + \left(M + \frac{\partial M}{\partial \vartheta} d\vartheta \right) - \left(T + \frac{\partial T}{\partial \vartheta} d\vartheta \right) r \tan \frac{d\vartheta}{2} = \mu I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} rd\vartheta
 \end{aligned} \tag{2.4.33}$$

Trascurando il termine $\frac{\partial T}{\partial \vartheta} d\vartheta r \tan \frac{d\vartheta}{2}$ in quanto infinitesimo di ordine superiore si ottiene:

$$mrd\vartheta + prd\vartheta \left(\frac{r}{\cos \frac{d\vartheta}{2}} - r \right) + \frac{\partial M}{\partial \vartheta} d\vartheta - 2Tr \tan \frac{d\vartheta}{2} = \mu I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} rd\vartheta \tag{2.4.34}$$

Essendo $\frac{d\vartheta}{2}$ un angolo infinitesimo, si possono fare le seguenti approssimazioni:

$$\cos \frac{d\vartheta}{2} \cong 1; \quad \sin \frac{d\vartheta}{2} \cong \frac{d\vartheta}{2}; \quad \tan \frac{d\vartheta}{2} \cong \frac{d\vartheta}{2}$$

Le equazioni (2.4.30), (2.4.32), (2.4.34) diventano:

$$\begin{cases}
 prd\vartheta + \frac{\partial N}{\partial \vartheta} d\vartheta - Td\vartheta = \mu A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} rd\vartheta \\
 qrd\vartheta + \frac{\partial T}{\partial \vartheta} d\vartheta + Nd\vartheta = \mu A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} rd\vartheta \\
 mrd\vartheta + \frac{\partial M}{\partial \vartheta} d\vartheta - Trd\vartheta = \mu A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} rd\vartheta
 \end{cases} \tag{2.4.35}$$

Dividendo per $rd\vartheta$ si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial \vartheta} d\vartheta - \frac{T}{r} + p = \mu A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} + \frac{N}{r} + q = \mu A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial \vartheta} - T + m = \mu A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \end{cases} \quad (2.4.36)$$

Le equazioni (2.4.36) sono le equazioni indefinite di equilibrio, tenendo conto delle dipendenze dei vari termini la forma estesa di tali equazioni risulta essere:

$$\begin{cases} \frac{1}{r(\vartheta)} \frac{\partial N(\vartheta, t)}{\partial \vartheta} - \frac{T(\vartheta, t)}{r} + p(\vartheta, t) = \mu A(\vartheta) \frac{\partial^2 u(\vartheta, t)}{\partial t^2} \\ \frac{1}{r(\vartheta)} \frac{\partial T(\vartheta, t)}{\partial \vartheta} + \frac{N(\vartheta, t)}{r} + q(\vartheta, t) = \mu A(\vartheta) \frac{\partial^2 v(\vartheta, t)}{\partial t^2} \\ \frac{1}{r(\vartheta)} \frac{\partial M(\vartheta, t)}{\partial \vartheta} - T(\vartheta, t) + m(\vartheta, t) = \mu I(\vartheta) \frac{\partial^2 \varphi(\vartheta, t)}{\partial t^2} \end{cases} \quad (2.4.37)$$

In caso che non vi sia dipendenza dal tempo, tali equazioni assumono la seguente forma:

$$\begin{cases} \frac{1}{r(\vartheta)} \frac{dN(\vartheta)}{d\vartheta} - \frac{T(\vartheta)}{r} + p(\vartheta) = 0 \\ \frac{1}{r(\vartheta)} \frac{dT(\vartheta)}{d\vartheta} + \frac{N(\vartheta)}{r} + q(\vartheta) = 0 \\ \frac{1}{r(\vartheta)} \frac{dM(\vartheta)}{d\vartheta} - T(\vartheta) + m(\vartheta) = 0 \end{cases} \quad (2.4.38)$$

2.4.3.1 Applicazione del principio dei lavori virtuali

Partendo dalle equazioni indefinite di equilibrio, applicando il *principio dei lavori virtuali* (che assume l'aspetto del *principio delle forze virtuali*) e considerando le equazioni di legame costitutivo discusse nel paragrafo 2.3 si arriva ad ottenere le equazioni di congruenza o di compatibilità cinematica.

Si considera un sistema di forze virtuali equilibrate costituito da:

- forzanti esterne distribuite $\delta p(\vartheta, t), \delta q(\vartheta, t), \delta m(\vartheta, t)$;
- sollecitazioni interne $\delta N(\vartheta, t), \delta T(\vartheta, t), \delta M(\vartheta, t)$;
- reazioni vincolari $\overline{\delta N_0}(t), \overline{\delta N_l}(t), \overline{\delta T_0}(t), \overline{\delta T_l}(t), \overline{\delta M_0}(t), \overline{\delta M_l}(t)$.

Si considera inoltre un sistema di spostamenti $u(\vartheta, t), v(\vartheta, t), \varphi(\vartheta, t)$ e di deformazioni $\varepsilon(\vartheta, t), \gamma(\vartheta, t), \chi(\vartheta, t)$ reali, dove le componenti di deformazione vengono così identificate:

- $\varepsilon = \varepsilon(\vartheta, t)$ rappresenta la deformazione assiale dovuta allo sforzo normale;
- $\gamma = \gamma(\vartheta, t)$ rappresenta lo scorrimento angolare indotto dall'effetto tagliante;
- $\chi = \chi(\vartheta, t)$ rappresenta la variazione di curvatura dell'asse di riferimento dovuta alle sollecitazioni flessionali.

D'ora in avanti, al fine di non appesantire la scrittura delle equazioni, non verranno riportate le dipendenze temporali e spaziali dei vari termini.

Il lavoro virtuale interno δL_i si determina dalla seguente relazione:

$$\delta L_i = \int_0^l (\varepsilon \delta N + \gamma \delta T + \kappa \delta M) r d\vartheta \quad (2.4.39)$$

Il lavoro virtuale esterno δL_e è dato da:

$$\begin{aligned} \delta L_e = \int_0^l (u \delta p + v \delta q + \varphi \delta m) r d\vartheta + \\ + \overline{u_l} \delta N_l - \overline{u_0} \delta N_0 + \overline{v_l} \delta T_l - \overline{v_0} \delta T_0 + \overline{\varphi_l} \delta M_l - \overline{\varphi_0} \delta M_0 \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

dove $\overline{u_0}, \overline{u_l}, \overline{v_0}, \overline{v_l}, \overline{\varphi_0}, \overline{\varphi_l}$ sono gli spostamenti delle estremità.

Siccome per il sistema di forze virtuali valgono le equazioni indefinite di equilibrio, le equazioni (2.4.38) possono essere introdotte nell'equazione (2.4.40), si ottiene così:

$$\begin{aligned}
 \delta L_e = & \int_0^l \left(u \left(-\frac{1}{r} \frac{d\delta N}{d\vartheta} + \frac{\partial T}{r} \right) + v \left(-\frac{1}{r} \frac{d\delta T}{d\vartheta} - \frac{\partial N}{r} \right) + \right. \\
 & \left. + \varphi \left(-\frac{1}{r} \frac{d\delta M}{d\vartheta} + \delta T \right) \right) r d\vartheta + \\
 & \overline{u_l \delta N_l} - \overline{u_0 \delta N_0} + \overline{v_l \delta T_l} - \overline{v_0 \delta T_0} + \overline{\varphi_l \delta M_l} - \overline{\varphi_0 \delta M_0}
 \end{aligned} \tag{2.4.41}$$

I termini che presentano delle derivate spaziale delle forze virtuali possono essere integrati per parti:

$$\begin{aligned}
 \int_0^l -u \frac{1}{r} \frac{d\delta N}{d\vartheta} r d\vartheta &= [-u\delta N]_0^l + \int_0^l \frac{1}{r} \frac{du}{d\vartheta} \delta N r d\vartheta = \\
 &= \int_0^l \frac{1}{r} \frac{du}{d\vartheta} \delta N r d\vartheta - u(\vartheta_l) \overline{\delta N_l} + u(\vartheta_0) \overline{\delta N_0} \\
 \int_0^l -v \frac{1}{r} \frac{d\delta T}{d\vartheta} r d\vartheta &= [-v\delta T]_0^l + \int_0^l \frac{1}{r} \frac{dv}{d\vartheta} \delta T r d\vartheta = \\
 &= \int_0^l \frac{1}{r} \frac{dv}{d\vartheta} \delta T r d\vartheta - v(\vartheta_l) \overline{\delta T_l} + v(\vartheta_0) \overline{\delta T_0} \\
 \int_0^l -\varphi \frac{1}{r} \frac{d\delta M}{d\vartheta} r d\vartheta &= [-\varphi\delta M]_0^l + \int_0^l \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\vartheta} \delta M r d\vartheta = \\
 &= \int_0^l \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\vartheta} \delta M r d\vartheta - \varphi(\vartheta_l) \overline{\delta M_l} + \varphi(\vartheta_0) \overline{\delta M_0}
 \end{aligned} \tag{2.4.42}$$

Sostituendo le equazioni (2.4.42) nell'equazione (2.4.41) e riordinando i termini si ha:

$$\begin{aligned}
 \delta L_e = & \int_0^l \left(\delta N \left(\frac{1}{r} \frac{du}{d\vartheta} - \frac{v}{r} \right) + \delta T \left(\frac{1}{r} \frac{dv}{d\vartheta} + \frac{u}{r} + \varphi \right) + \delta M \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\vartheta} \right) \right) r d\vartheta + \\
 & + \overline{\delta N_l} (\overline{u_l} - u(\vartheta_l)) + \overline{\delta T_l} (\overline{v_l} - v(\vartheta_l)) + \overline{\delta M_l} (\overline{\varphi_l} - \varphi(\vartheta_l)) + \\
 & - \overline{\delta N_0} (\overline{u_0} - u(\vartheta_0)) - \overline{\delta T_0} (\overline{v_0} - v(\vartheta_0)) - \overline{\delta M_0} (\overline{\varphi_0} - \varphi(\vartheta_0))
 \end{aligned} \tag{2.4.43}$$

Il principio dei lavori virtuali afferma che il lavoro virtuale interno e il lavoro virtuale esterno sono uguali per ogni sistema di forze virtuali equilibrato. Quindi deve essere:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l (\varepsilon \delta N + \gamma \delta T + \chi \delta M) r d\vartheta = \\
 & = \int_0^l \left(\delta N \left(\frac{1}{r} \frac{du}{d\vartheta} - \frac{v}{r} \right) + \delta T \left(\frac{1}{r} \frac{dv}{d\vartheta} + \frac{u}{r} + \varphi \right) + \delta M \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\vartheta} \right) \right) r d\vartheta + \\
 & \quad + \overline{\delta N}_l (\overline{u}_l - u(\vartheta_l)) + \overline{\delta T}_l (\overline{v}_l - v(\vartheta_l)) + \overline{\delta M}_l (\overline{\varphi}_l - \varphi(\vartheta_l)) + \\
 & \quad - \overline{\delta N}_0 (\overline{u}_0 - u(\vartheta_0)) - \overline{\delta T}_0 (\overline{v}_0 - v(\vartheta_0)) - \overline{\delta M}_0 (\overline{\varphi}_0 - \varphi(\vartheta_0))
 \end{aligned} \tag{2.4.44}$$

Ovvero:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l \left(\delta N \left(\frac{1}{r} \frac{du}{d\vartheta} - \frac{v}{r} - \varepsilon \right) + \delta T \left(\frac{1}{r} \frac{dv}{d\vartheta} + \frac{u}{r} + \varphi - \gamma \right) + \delta M \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\vartheta} - \chi \right) \right) r d\vartheta + \\
 & \quad + \overline{\delta N}_l (\overline{u}_l - u(\vartheta_l)) + \overline{\delta T}_l (\overline{v}_l - v(\vartheta_l)) + \overline{\delta M}_l (\overline{\varphi}_l - \varphi(\vartheta_l)) + \\
 & \quad - \overline{\delta N}_0 (\overline{u}_0 - u(\vartheta_0)) - \overline{\delta T}_0 (\overline{v}_0 - v(\vartheta_0)) - \overline{\delta M}_0 (\overline{\varphi}_0 - \varphi(\vartheta_0)) = 0
 \end{aligned} \tag{2.4.45}$$

Affinché l'equazione (2.4.45) sia soddisfatta per ogni sistema di forze virtuali, devono essere nulli i coefficienti delle sollecitazioni interne virtuali $\delta N, \delta T, \delta M$; dall'annullamento di tali termini derivano le equazioni di congruenza:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r} \frac{du}{d\vartheta} - \frac{\partial v}{r} - \varepsilon = 0 & \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{r} \frac{du}{d\vartheta} - \frac{\partial v}{r} \\
 \frac{1}{r} \frac{dv}{d\vartheta} + \frac{u}{r} + \varphi - \gamma = 0 & \Rightarrow \gamma = \frac{1}{r} \frac{dv}{d\vartheta} + \frac{u}{r} + \varphi \\
 \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\vartheta} - \chi = 0 & \Rightarrow \chi = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\vartheta}
 \end{aligned} \tag{2.4.46}$$

inoltre, devono essere nulli anche gli altri termini dell'equazione (2.4.45), si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \overline{\delta N}_0 (\overline{u}_0 - u(\vartheta_0)) = 0 & \quad \overline{\delta N}_l (\overline{u}_l - u(\vartheta_l)) = 0 \\
 \overline{\delta T}_0 (\overline{v}_0 - v(\vartheta_0)) = 0 & \quad \overline{\delta T}_l (\overline{v}_l - v(\vartheta_l)) = 0 \\
 \overline{\delta M}_0 (\overline{\varphi}_0 - \varphi(\vartheta_0)) = 0 & \quad \overline{\delta M}_l (\overline{\varphi}_l - \varphi(\vartheta_l)) = 0
 \end{aligned} \tag{2.4.47}$$

Le condizioni naturali al contorno per $\vartheta = \vartheta_0$ sono:

$$\begin{array}{ll} \overline{N}_0 = N(\vartheta_0) & \overline{u}_0 = u(\vartheta_0) \\ \overline{T}_0 = T(\vartheta_0) & \text{oppure} \quad \overline{v}_0 = v(\vartheta_0) \\ \overline{M}_0 = M(\vartheta_0) & \overline{\varphi}_0 = \varphi(\vartheta_0) \end{array} \quad (2.4.48)$$

Le condizioni naturali al contorno per $\vartheta = \vartheta_l$ sono:

$$\begin{array}{ll} \overline{N}_l = N(\vartheta_l) & \overline{u}_l = u(\vartheta_l) \\ \overline{T}_l = T(\vartheta_l) & \text{oppure} \quad \overline{v}_l = v(\vartheta_l) \\ \overline{M}_l = M(\vartheta_l) & \overline{\varphi}_l = \varphi(\vartheta_l) \end{array} \quad (2.4.49)$$

Combinando in maniera opportuna le equazioni (2.4.48) e (2.4.49) si possono ricavare tutte le tipologie di vincolamento possibili per le due estremità dell'arco piano.

Le equazioni di congruenza (2.4.46) sono state ricavate utilizzando le equazioni di equilibrio in ambito statico, tuttavia, volendo trattare il problema dal punto di vista dinamico, si ha dipendenza anche dal tempo t , di conseguenza risulta corretto esprimere le equazioni di congruenza in termini di derivate parziali. La scrittura estesa delle equazioni di congruenza in ambito dinamico è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(\vartheta, t) = \frac{1}{r(\vartheta)} \frac{\partial u(\vartheta, t)}{\partial \vartheta} - \frac{v(\vartheta, t)}{r(\vartheta)} \\ \gamma(\vartheta, t) = \frac{1}{r(\vartheta)} \frac{\partial v(\vartheta, t)}{\partial \vartheta} + \frac{u(\vartheta, t)}{r(\vartheta)} + \varphi(\vartheta, t) \\ \chi(\vartheta, t) = \frac{1}{r(\vartheta)} \frac{\partial \varphi(\vartheta, t)}{\partial \vartheta} \end{array} \right. \quad (2.4.50)$$

2.5 EQUAZIONI FONDAMENTALI E SCHEMA DELLE TEORIE FISICHE

2.5.1 Introduzione

Finora sono stati seguiti due percorsi differenti per derivare tutte le equazioni che governano il problema dell'arco piano: prima si è partiti dall'analisi del comportamento deformativo, sono state ricavate le equazioni di congruenza (2.2.11), si sono applicate le equazioni di legame costitutivo (2.3.1) e, attraverso lo sviluppo dell'equazione (2.4.2) che esprime il principio di Hamilton, si è arrivati a determinare le equazioni indefinite di equilibrio (2.4.24). Successivamente si è seguito un percorso opposto: partendo dall'analisi dell'equilibrio dell'elemento infinitesimo di arco piano, si sono derivate le equazioni indefinite di equilibrio (2.4.36), si è applicato il principio delle forze virtuali e, attraverso l'applicazione delle equazioni di legame costitutivo (2.3.1), si è giunti a ricavare le equazioni di congruenza (2.4.50).

Ricapitolando tutto il discorso, sono state determinate 3 equazioni del moto, 3 relazioni tra sollecitazioni interne e componenti di deformazione generalizzate e 3 relazioni tra le deformazioni stesse e le componenti di spostamento generalizzato, o gradi di libertà, in totale sono state definite 9 equazioni in termini di 9 variabili dipendenti del problema. In questo modo il problema risulta ben posto e può essere risolto una volta note tutte le sue condizioni al contorno e le sue condizioni iniziali.

Ma il fatto che le suddette variabili siano dipendenti e che, quindi, le citate equazioni siano relazionabili tra loro, ci porta a fare un'ulteriore considerazione assai importante. Infatti, se si effettua la sostituzione delle equazioni di congruenza (2.2.11) o (2.3.21) nelle equazioni di legame costitutivo (2.3.1) e di ciò che ne consegue nelle equazioni indefinite di equilibrio (2.4.24) o (2.4.36), è possibile andare a descrivere il comportamento del generico arco piano attraverso delle equazioni indefinite di equilibrio scritte in termini di spostamenti generalizzati, e cioè in funzione dei gradi di libertà effettivi del problema. Le equazioni che derivano da questa serie di sostituzioni concatenate prendono il nome di *equazioni fondamentali*.

2.5.2 Equazioni fondamentali

D'ora in avanti, al fine di non appesantire la scrittura delle equazioni, l'operazione di derivazione nel tempo sarà indicata con il simbolo “'” e non verranno riportate le dipendenze temporali e spaziali dei vari termini.

La sostituzione delle equazioni di compatibilità cinematica (2.2.11) o (2.4.50) nelle equazioni di legame costitutivo (2.3.1) permette di ottenere le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} N = EA \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{v}{r} \right) \\ T = G\Lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u}{r} + \varphi \right) \\ M = EI \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Per ottenere le equazioni fondamentali dell'arco piano, è necessario sostituire le equazioni (2.5.1) nelle equazioni indefinite di equilibrio (2.4.24) o (2.4.36):

$$\begin{cases} \frac{EA}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \left(\frac{E}{r^2} \frac{dA}{d\vartheta} - \frac{EA}{r^3} \frac{dr}{d\vartheta} \right) \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{G\Lambda}{r^2} u - \left(\frac{EA}{r^2} + \frac{G\Lambda}{r^2} \right) \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \\ \quad - \left(\frac{E}{r^2} \frac{dA}{d\vartheta} - \frac{EA}{r^3} \frac{dr}{d\vartheta} \right) v - \frac{G\Lambda}{r} \varphi + p = \mu A \ddot{u} \\ \frac{G\Lambda}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2} + \left(\frac{G}{r^2 \kappa_0} \frac{dA}{d\vartheta} - \frac{G\Lambda}{r^3} \frac{dr}{d\vartheta} \right) \frac{\partial v}{\partial \vartheta} - \frac{EA}{r^2} v + \left(\frac{EA}{r^2} + \frac{G\Lambda}{r^2} \right) \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \\ \quad + \left(\frac{G}{r^2 \kappa_0} \frac{dA}{d\vartheta} - \frac{G\Lambda}{r^3} \frac{dr}{d\vartheta} \right) u + \frac{G\Lambda}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \frac{G}{r \kappa_0} \frac{dA}{d\vartheta} \varphi + q = \mu A \ddot{v} \\ \frac{EI}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} + \left(\frac{E}{r^2} \frac{dI}{d\vartheta} - \frac{EI}{r^3} \frac{dr}{d\vartheta} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} - G\Lambda \varphi - \frac{G\Lambda}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} - \frac{G\Lambda}{r} u + m = \mu I \ddot{\varphi} \end{cases} \quad (2.5.2)$$

Le equazioni fondamentali (2.5.2) scritte in forma estesa risultano essere:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{EA(\vartheta)}{r^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 u(\vartheta, t)}{\partial \vartheta^2} + \left(\frac{E}{r^2(\vartheta)} \frac{dA(\vartheta)}{d\vartheta} - \frac{EA(\vartheta)}{r^3(\vartheta)} \frac{dr(\vartheta)}{d\vartheta} \right) \frac{\partial u(\vartheta, t)}{\partial \vartheta} - \frac{G\Lambda(\vartheta)}{r^2(\vartheta)} u(\vartheta, t) + \\
 & - \left(\frac{EA(\vartheta)}{r^2(\vartheta)} + \frac{G\Lambda(\vartheta)}{r^2(\vartheta)} \right) \frac{\partial v(\vartheta, t)}{\partial \vartheta} - \left(\frac{E}{r^2(\vartheta)} \frac{dA(\vartheta)}{d\vartheta} - \frac{EA(\vartheta)}{r^3(\vartheta)} \frac{dr(\vartheta)}{d\vartheta} \right) v(\vartheta, t) + \\
 & - \frac{G\Lambda(\vartheta)}{r(\vartheta)} \varphi(\vartheta, t) + p(\vartheta, t) = \mu A(\vartheta) \frac{\partial^2 u(\vartheta, t)}{\partial t^2} \\
 \\
 & \frac{G\Lambda(\vartheta)}{r^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 v(\vartheta, t)}{\partial \vartheta^2} + \left(\frac{G}{r^2(\vartheta)\kappa_0} \frac{dA(\vartheta)}{d\vartheta} - \frac{G\Lambda(\vartheta)}{r^3(\vartheta)} \frac{dr(\vartheta)}{d\vartheta} \right) \frac{\partial v(\vartheta, t)}{\partial \vartheta} - \frac{EA(\vartheta)}{r^2(\vartheta)} v(\vartheta, t) + \\
 & + \left(\frac{EA(\vartheta)}{r^2(\vartheta)} + \frac{G\Lambda(\vartheta)}{r^2(\vartheta)} \right) \frac{\partial u(\vartheta, t)}{\partial \vartheta} + \left(\frac{G}{r^2(\vartheta)\kappa_0} \frac{dA(\vartheta)}{d\vartheta} - \frac{G\Lambda(\vartheta)}{r^3(\vartheta)} \frac{dr(\vartheta)}{d\vartheta} \right) u(\vartheta, t) + \\
 & + \frac{G\Lambda(\vartheta)}{r(\vartheta)} \frac{\partial \varphi(\vartheta, t)}{\partial \vartheta} + \frac{G}{r(\vartheta)\kappa_0} \frac{dA(\vartheta)}{d\vartheta} \varphi(\vartheta, t) + q(\vartheta, t) = \mu A(\vartheta) \frac{\partial^2 v(\vartheta, t)}{\partial t^2} \\
 \\
 & \frac{EI(\vartheta)}{r^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 \varphi(\vartheta, t)}{\partial \vartheta^2} + \left(\frac{E}{r^2(\vartheta)} \frac{dI(\vartheta)}{d\vartheta} - \frac{EI(\vartheta)}{r^3(\vartheta)} \frac{dr(\vartheta)}{d\vartheta} \right) \frac{\partial \varphi(\vartheta, t)}{\partial \vartheta} - G\Lambda(\vartheta) \varphi(\vartheta, t) + \\
 & - \frac{G\Lambda(\vartheta)}{r(\vartheta)} \frac{\partial v(\vartheta, t)}{\partial \vartheta} - \frac{G\Lambda(\vartheta)}{r(\vartheta)} u(\vartheta, t) + m(\vartheta, t) = \mu I(\vartheta) \frac{\partial^2 \varphi(\vartheta, t)}{\partial t^2}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.5.3)$$

2.5.3 Schema delle teorie fisiche

2.5.3.1 Notazioni matriciali

Le notazioni matriciali risultano essere molto utili per esprimere in maniera compatta le equazioni che governano il problema dell'arco piano.

L'*operatore differenziale di congruenza* \mathbf{D} è quella matrice che lega il vettore degli spostamenti generalizzati \mathbf{u} (2.2.3) ed il vettore delle componenti di deformazione $\boldsymbol{\eta}$ (2.2.12):

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} & -\frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \end{bmatrix} \quad (2.5.4)$$

Le equazioni di congruenza (2.2.11) o (2.4.50) possono quindi esprimersi come:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.5.5)$$

Per quanto riguarda le equazioni di legame costitutivo (2.3.1), che relazionano le componenti di deformazione $\boldsymbol{\eta}$ (2.2.12) e le componenti di sollecitazione interna \mathbf{S} (2.3.3), introducendo la *matrice di legame costitutivo* \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & G\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \quad (2.5.6)$$

tali equazioni possono esprimersi come:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}\boldsymbol{\eta} \quad (2.5.7)$$

Considerando il *vettore delle quantità di moto* Λ , definito dal prodotto tra la *matrice delle masse* \mathbf{M} ed il vettore delle derivate prime rispetto al tempo del vettore \mathbf{u} (2.2.3):

$$\Lambda = \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} = \mu \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (2.5.8)$$

la derivata prima rispetto al tempo del vettore Λ rappresenta le *forze d'inerzia* le quali, sommate alle forzanti esterne \mathbf{q} (2.4.1) cambiate di segno, danno luogo al vettore \mathbf{f} :

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \mathbf{q} \quad (2.5.9)$$

In caso di analisi statica, essendo nulle le forze d'inerzia, risulta:

$$\mathbf{f} = -\mathbf{q} \quad (2.5.10)$$

Considerando l'*operatore differenziale di equilibrio* \mathbf{D}^* :

$$\mathbf{D}^* = - \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} & -\frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \end{bmatrix} \quad (2.5.11)$$

le equazioni indefinite di equilibrio (2.4.24) o (2.4.36) possono esprimersi come:

$$\mathbf{D}^* \mathbf{S} = \mathbf{f} \quad (2.5.12)$$

Per sostituzioni successive delle relazioni di congruenza (2.5.5) nelle relazioni costitutive (2.5.7) e di queste nelle relazioni di equilibrio (2.5.11), si perviene ad una definizione delle equazioni fondamentali.

Definendo l'operatore differenziale \mathbf{L} come:

$$\mathbf{L} = \mathbf{D}^* \mathbf{C} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \quad (2.5.13)$$

le cui componenti risultano essere:

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{EA}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \left(\frac{E}{r^2} \frac{dA}{d\vartheta} - \frac{EA}{r^3} \frac{dr}{d\vartheta} \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{G\Lambda}{r^2} \\ L_{12} &= - \left(\frac{EA}{r^2} + \frac{G\Lambda}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \left(\frac{E}{r^2} \frac{dA}{d\vartheta} - \frac{EA}{r^3} \frac{dr}{d\vartheta} \right) \\ L_{13} &= - \frac{G\Lambda}{r} \\ L_{21} &= \left(\frac{EA}{r^2} + \frac{G\Lambda}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \left(\frac{G}{r^2 \kappa_0} \frac{dA}{d\vartheta} - \frac{G\Lambda}{r^3} \frac{dr}{d\vartheta} \right) \\ L_{22} &= \frac{G\Lambda}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \left(\frac{G}{r^2 \kappa_0} \frac{dA}{d\vartheta} - \frac{G\Lambda}{r^3} \frac{dr}{d\vartheta} \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{EA}{r^2} \\ L_{23} &= \frac{G\Lambda}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{G}{r \kappa_0} \frac{dA}{d\vartheta} \\ L_{31} &= - \frac{G\Lambda}{r} \\ L_{32} &= - \frac{G\Lambda}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ L_{33} &= \frac{EI}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \left(\frac{E}{r^2} \frac{dI}{d\vartheta} - \frac{EI}{r^3} \frac{dr}{d\vartheta} \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} - G\Lambda \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

le equazioni fondamentali in notazione matriciale si esprimono nella maniera seguente:

$$\mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.5.15)$$

2.5.3.2 Schema delle teorie fisiche

Tutti i discorsi sviluppati in precedenza possono essere riassunti in modo vantaggioso nel cosiddetto *schema delle teorie fisiche*. Lo schema relativo al generico arco piano moderatamente spesso è illustrato in figura 2.9, nella quale si è utilizzata la notazione matriciale. L'aspetto essenziale da porre in evidenza è come le equazioni fondamentali incorporino l'equilibrio, il legame costitutivo e la compatibilità cinematica.

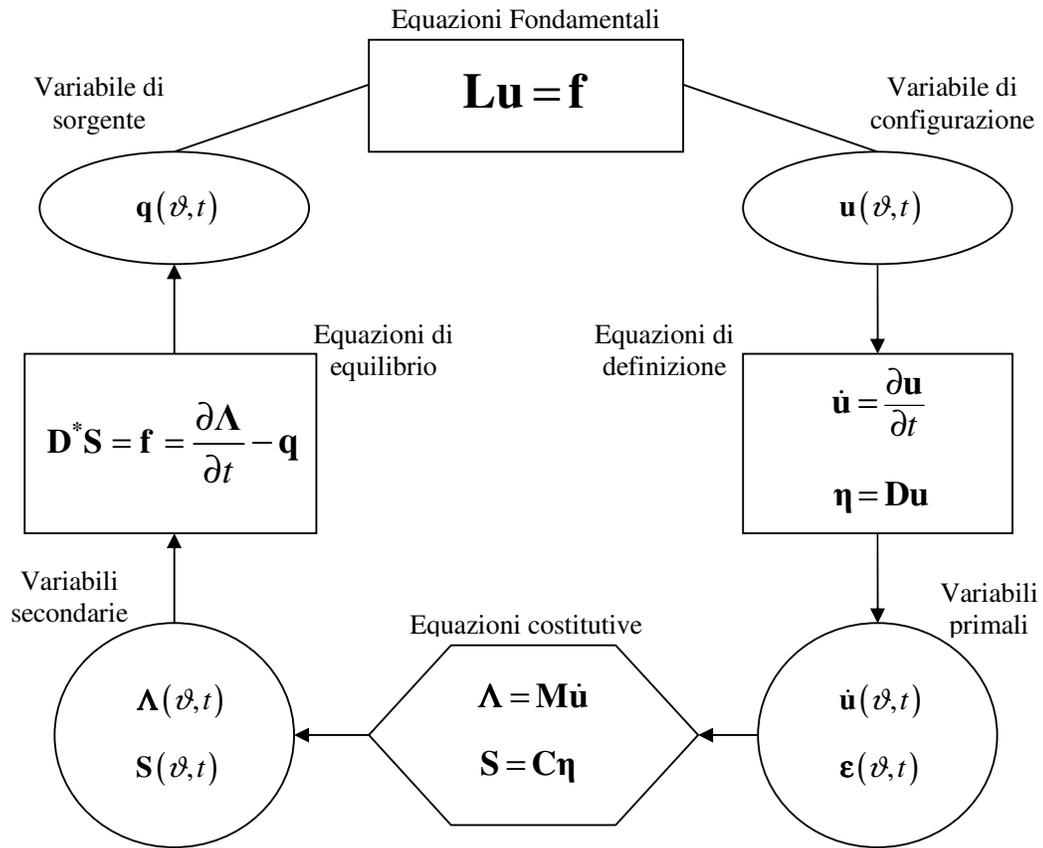


Figura 2.9. Schema delle teorie fisiche per un arco piano moderatamente spesso

2.6 PRINCIPALI TIPOLOGIE DI ARCO

La trattazione svolta finora ha tenuto conto di archi piani per cui l'andamento della curvatura è assolutamente generico lungo lo sviluppo dell'asse di riferimento. Tuttavia, le strutture ad arco generalmente impiegate nella pratica corrente hanno geometrie ben definite. Nel presente paragrafo si espongono le principali tipologie adottate nella progettazione ingegneristica. In particolare vengono descritte le curve che rappresentano l'asse dell'arco; tali curve sono considerate in un riferimento globale di tipo cartesiano ortogonale OXY . Nel riferimento utilizzato in seguito, l'asse verticale Y rappresenta un asse di simmetria, per cui in corrispondenza dell'intersezione con tale asse le curve hanno tangente orizzontale.

Per qualsiasi tipo di geometria, la lunghezza $ds = r(\vartheta)d\vartheta$ di un elemento infinitesimo di arco può sempre essere calcolata con il teorema di Pitagora:

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 \quad \Rightarrow \quad r^2(\vartheta)d\vartheta^2 = \left(\frac{dX}{d\vartheta}\right)^2 d\vartheta^2 + \left(\frac{dY}{d\vartheta}\right)^2 d\vartheta^2 \quad (2.6.1)$$

inoltre, come mostrato in figura 2.10, è sempre valida la seguente relazione:

$$dX = \overline{PP'} \cos \vartheta = r(\vartheta)d\vartheta \cos \vartheta \quad \Rightarrow \quad \frac{dX}{d\vartheta} = r(\vartheta) \cos \vartheta \quad (2.6.2)$$

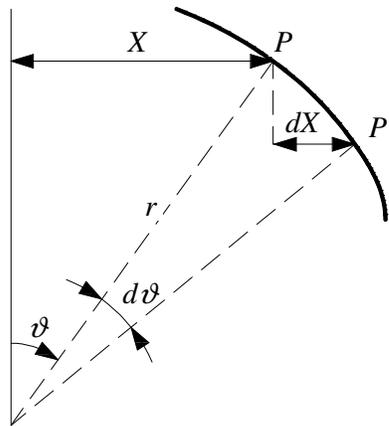


Figura 2.10. Interpretazione grafica dell'equazione (2.6.2)

2.6.1 Arco parabolico

La *parabola* rappresenta il luogo dei punti del piano per cui vale la seguente relazione:

$$X^2 - k(d - Y) = 0 \quad (2.6.3)$$

L'equazione (2.6.3) può essere riscritta come:

$$Y = d - \frac{X^2}{k} \quad (2.6.4)$$

Il parametro d indica l'altezza in chiave dell'arco, infatti è il valore dell'ordinata Y in corrispondenza dell'annullamento dell'ascissa X (punto S). Il parametro k rappresenta invece una quantità caratteristica della parabola considerata; conoscendo il valore del parametro d e le coordinate X_p, Y_p di un punto P appartenente alla parabola, si determina facilmente il valore di k sfruttando la relazione (2.6.4); infatti considerando $X_s = 0, Y_s = d$, si ha:

$$d - Y_p = Y_s - Y_p = d - \frac{X_s^2}{k} - \left(d - \frac{X_p^2}{k} \right) = \frac{X_p^2}{k} \Rightarrow k = \frac{X_p^2}{d - Y_p} \quad (2.6.5)$$

Derivando l'equazione (2.6.4) si ottiene:

$$\frac{dY}{d\vartheta} = -2 \frac{X}{k} \frac{dX}{d\vartheta} \quad (2.6.6)$$

Introducendo la relazione (2.6.2) nell'equazione (2.6.6) si ha:

$$\frac{dY}{d\vartheta} = -2 \frac{X}{k} r(\vartheta) \cos \vartheta \quad (2.6.7)$$

Dividendo entrambi i membri dell'equazione (2.6.1) per $r^2(\vartheta)d\vartheta^2$ si ottiene:

$$1 = \frac{\left(\frac{dX}{d\vartheta}\right)^2}{r^2(\vartheta)} + \frac{\left(\frac{dY}{d\vartheta}\right)^2}{r^2(\vartheta)} \quad (2.6.8)$$

Si procede sostituendo le relazioni (2.6.2) e (2.6.7) nell'equazione (2.6.8) e sviluppando l'equazione:

$$1 = 4\left(\frac{X}{k}\right)^2 \frac{r^2(\vartheta)\cos^2\vartheta}{r^2(\vartheta)} + \frac{r^2(\vartheta)\cos^2\vartheta}{r^2(\vartheta)} = 4\left(\frac{X}{k}\right)^2 \cos^2\vartheta + \cos^2\vartheta$$

$$1 - \cos^2\vartheta = 4\left(\frac{X}{k}\right)^2 \cos^2\vartheta$$

$$\frac{\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta} = \tan^2\vartheta = 4\left(\frac{X}{k}\right)^2 \quad (2.6.9)$$

$$\tan\vartheta = 2\frac{X}{k}$$

$$X = \frac{k}{2}\tan\vartheta$$

Le equazioni (2.6.4) e (2.6.9) determinano la rappresentazione parametrica dell'arco parabolico:

$$\begin{cases} X = \frac{k}{2}\tan\vartheta \\ Y = d - \frac{X^2}{k} \end{cases} \quad (2.6.10)$$

con $\vartheta \in \left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[$.

L'arco parabolico è illustrato graficamente in figura 2.11.

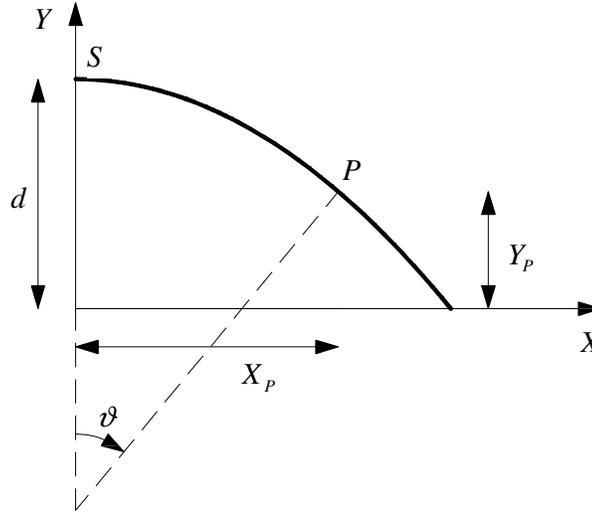


Figura 2.11. Rappresentazione grafica dell'arco parabolico

Siccome è nota l'espressione di X , dall'equazione (2.6.2) si può ricavare la legge di variazione del raggio di curvatura al variare dell'angolo ϑ :

$$\begin{aligned}
 r(\vartheta) &= \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{dX}{d\vartheta} = \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{k}{2} \tan \vartheta \right) = \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{k}{2} \frac{d \tan \vartheta}{d\vartheta} = \\
 &= \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{k}{2} \frac{1}{\cos^2 \vartheta} = \frac{k}{2 \cos^3 \vartheta}
 \end{aligned} \tag{2.6.11}$$

mentre la derivata del raggio di curvatura $r(\vartheta)$ vale:

$$\frac{dr(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{3}{2} k \frac{\sin \vartheta}{\cos^4 \vartheta} \tag{2.6.12}$$

2.6.2 Arco cicloidale

La *cicloide* è il luogo dei punti descritti da un punto di una circonferenza, denominata generatrice, nel suo moto rotatorio senza strisciare lungo una linea retta. La parametrizzazione dei punti appartenenti a tale curva è la seguente:

$$\begin{cases} X = r_c (2\vartheta + \sin(2\vartheta)) \\ Y = r_c (1 + \cos(2\vartheta)) \end{cases} \quad (2.6.13)$$

con $\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, mentre il parametro r_c rappresenta il raggio della circonferenza generatrice. L'arco cicloidale è rappresentato graficamente in figura 2.12.

Dall'equazione (2.6.2) è possibile ricavare la variazione del raggio di curvatura $r(\vartheta)$:

$$r(\vartheta) = \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{dX}{d\vartheta} = \frac{2r_c (1 + \cos(2\vartheta))}{\cos \vartheta} = \frac{4r_c \cos^2 \vartheta}{\cos \vartheta} = 4r_c \cos \vartheta \quad (2.6.14)$$

mentre la derivata del raggio di curvatura $r(\vartheta)$ vale:

$$\frac{dr(\vartheta)}{d\vartheta} = -4r_c \sin \vartheta \quad (2.6.15)$$

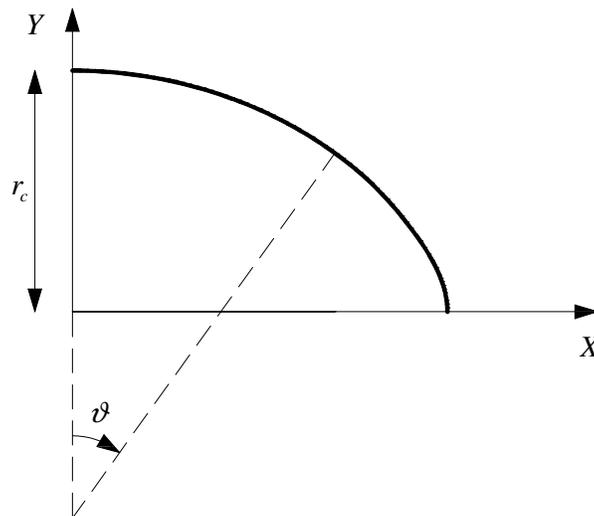


Figura 2.12. Rappresentazione grafica dell'arco cicloidale

2.6.3 Arco ellittico e circolare

L'ellisse è il luogo dei punti del piano per cui vale la relazione:

$$\frac{X^2}{r_a^2} + \frac{Y^2}{r_b^2} = 1 \quad (2.6.16)$$

dove i parametri r_a e r_b sono rispettivamente il semiasse orizzontale ed il semiasse verticale dell'ellisse. L'arco ellittico è illustrato graficamente in figura 2.13.

Si introduce il parametro k :

$$k = \frac{r_a}{r_b} \quad (2.6.17)$$

tale parametro definisce la forma dell'arco, in particolare si può notare come la curvatura risulti molto ribassata se il parametro k risulta elevato.

L'equazione (2.6.16) può essere riscritta come:

$$X^2 + k^2 Y^2 = r_a^2 \quad (2.6.18)$$

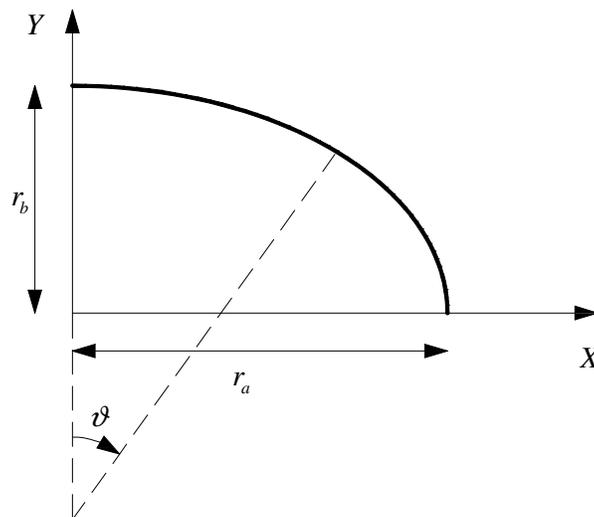


Figura 2.13. Rappresentazione grafica dell'arco ellittico

L'equazione (2.6.18) può essere riscritta come:

$$X^2 + k^2 Y^2 = r_a^2 \quad (2.6.19)$$

Dall'equazione (2.6.19) è possibile ricavare Y in funzione di X :

$$Y = \sqrt{\frac{r_a^2 - X^2}{k^2}} \quad (2.6.20)$$

La derivata di Y rispetto a ϑ vale:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{d\vartheta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{r_a^2 - X^2}{k^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(-2 \frac{X}{k^2} \right) \frac{dX}{d\vartheta} = -\frac{kX}{k^2 \sqrt{r_a^2 - X^2}} \frac{dX}{d\vartheta} = \\ &= -\frac{X}{k^2 Y} \frac{dX}{d\vartheta} = -\frac{X}{k^2 Y} r(\vartheta) \cos \vartheta \end{aligned} \quad (2.6.21)$$

Dividendo entrambi i membri dell'equazione (2.6.1) per $r^2(\vartheta) d\vartheta^2$ si ottiene:

$$1 = \frac{\left(\frac{dX}{d\vartheta} \right)^2}{r^2(\vartheta)} + \frac{\left(\frac{dY}{d\vartheta} \right)^2}{r^2(\vartheta)} \quad (2.6.22)$$

Sostituendo la (2.6.2) e la (2.6.21) nella (2.6.22) risulta:

$$1 = \frac{r^2(\vartheta) \cos^2 \vartheta}{r^2(\vartheta)} + \frac{X^2 r^2(\vartheta) \cos^2 \vartheta}{k^2 r^2(\vartheta) (r_a^2 - X^2)} = \cos^2 \vartheta + \frac{X^2 \cos^2 \vartheta}{k^2 (r_a^2 - X^2)} \quad (2.6.23)$$

Si moltiplicano entrambi i membri della (2.6.23) per $k^2 (r_a^2 - X^2)$ e si sviluppa l'equazione:

$$\begin{aligned}
 k^2(r_a^2 - X^2) &= k^2(r_a^2 - X^2)\cos^2 \vartheta + X^2 \cos^2 \vartheta \\
 k^2(r_a^2 - X^2)(1 - \cos^2 \vartheta) &= X^2 \cos^2 \vartheta \\
 k^2(r_a^2 - X^2)\sin^2 \vartheta &= X^2 \cos^2 \vartheta \\
 k^2 r_a^2 \sin^2 \vartheta - k^2 X^2 \sin^2 \vartheta &= X^2 \cos^2 \vartheta \\
 k^2 r_a^2 \sin^2 \vartheta &= X^2 (k^2 \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta)
 \end{aligned} \tag{2.6.24}$$

dalla (2.6.24) è possibile esprimere X :

$$\begin{aligned}
 X &= \sqrt{\frac{k^2 r_a^2 \sin^2 \vartheta}{k^2 \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta}} = \frac{k r_a \sin \vartheta}{\sqrt{k^2 \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta}} = \\
 &= \frac{k r_a \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta}}{\sqrt{k^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^2 \vartheta} + \frac{\cos^2 \vartheta}{\cos^2 \vartheta}}} = \frac{k r_a \tan \vartheta}{\sqrt{1 + k^2 \tan^2 \vartheta}}
 \end{aligned} \tag{2.6.25}$$

Le equazioni (2.6.20) e (2.6.25) determinano la rappresentazione parametrica dell'arco ellittico:

$$\begin{cases} X = \frac{k r_a \tan \vartheta}{\sqrt{1 + k^2 \tan^2 \vartheta}} \\ Y = \sqrt{\frac{r_a^2 - X^2}{k^2}} \end{cases} \tag{2.6.26}$$

con $\vartheta \in \left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[$.

Siccome è nota l'espressione di X , dall'equazione (2.6.2) si può ricavare la legge di variazione del raggio di curvatura al variare dell'angolo ϑ :

$$\begin{aligned}
 r(\vartheta) &= \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{dX}{d\vartheta} = \\
 &= \frac{1}{\cos \vartheta} \left\{ \frac{1}{1+k^2 \tan^2 \vartheta} \left[kr_a (1+\tan^2 \vartheta) \sqrt{1+k^2 \tan^2 \vartheta} - kr_a \tan \vartheta \frac{k^2 \tan \vartheta (1+\tan^2 \vartheta)}{\sqrt{1+k^2 \tan^2 \vartheta}} \right] \right\} = \\
 &= \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{kr_a (1+\tan^2 \vartheta)}{1+k^2 \tan^2 \vartheta} \left(\sqrt{1+k^2 \tan^2 \vartheta} - \frac{k^2 \tan \vartheta}{\sqrt{1+k^2 \tan^2 \vartheta}} \right) = \tag{2.6.27} \\
 &= \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{kr_a (1+\tan^2 \vartheta)}{1+k^2 \tan^2 \vartheta} \left(\frac{1+k^2 \tan^2 \vartheta - k^2 \tan^2 \vartheta}{\sqrt{1+k^2 \tan^2 \vartheta}} \right) = \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{kr_a (1+\tan^2 \vartheta)}{\sqrt{(1+k^2 \tan^2 \vartheta)^3}} = \\
 &= \frac{kr_a}{\cos^3 \vartheta \sqrt{(1+k^2 \tan^2 \vartheta)^3}}
 \end{aligned}$$

mentre la derivata del raggio di curvatura $r(\vartheta)$ vale:

$$\begin{aligned}
 \frac{dr(\vartheta)}{d\vartheta} &= \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{kr_a}{\cos^3 \vartheta \sqrt{(1+k^2 \tan^2 \vartheta)^3}} \right) = \\
 &= \frac{3kr_a \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \sqrt{(1+k^2 \tan^2 \vartheta)^3} - \frac{3}{2} kr_a \cos^3 \vartheta 2k^2 \tan \vartheta (1+\tan^2 \vartheta) \sqrt{1+k^2 \tan^2 \vartheta}}{\cos^6 \vartheta (1+k^2 \tan^2 \vartheta)^3} = \\
 &= \frac{3kr_a \cos^2 \vartheta \sqrt{(1+k^2 \tan^2 \vartheta)^3} \left[\sin \vartheta (1+k^2 \tan^2 \vartheta) - \cos \vartheta (1+\tan^2 \vartheta) k^2 \tan \vartheta \right]}{\cos^6 \vartheta (1+k^2 \tan^2 \vartheta)^3} = \\
 &= \frac{3kr_a \cos^3 \vartheta \sqrt{(1+k^2 \tan^2 \vartheta)^3} \left[\tan \vartheta (1+k^2 \tan^2 \vartheta) - (1+\tan^2 \vartheta) k^2 \tan \vartheta \right]}{\cos^6 \vartheta (1+k^2 \tan^2 \vartheta)^3} = \tag{2.6.28} \\
 &= \frac{3kr_a \cos^3 \vartheta \tan \vartheta \sqrt{(1+k^2 \tan^2 \vartheta)^3} \left[(1+k^2 \tan^2 \vartheta) - (1+\tan^2 \vartheta) k^2 \right]}{\cos^6 \vartheta (1+k^2 \tan^2 \vartheta)^3} = \\
 &= \frac{3kr_a \cos^3 \vartheta \tan \vartheta \sqrt{(1+k^2 \tan^2 \vartheta)^3} (1-k^2)}{\cos^6 \vartheta (1+k^2 \tan^2 \vartheta)^3} = \\
 &= \frac{3kr_a \sin \vartheta \sqrt{(1+k^2 \tan^2 \vartheta)^3} (1-k^2)}{\cos^4 \vartheta (1+k^2 \tan^2 \vartheta)^3}
 \end{aligned}$$

L'arco circolare può essere visto come un particolare arco ellittico con $k=1$, ovvero $r_a = r_b = r$, di conseguenza l'equazione (2.6.19) si riduce a:

$$X^2 + Y^2 = r^2 \quad (2.6.29)$$

dove r è il raggio di curvatura costante, di conseguenza $\frac{dr}{d\vartheta} = 0$.

2.6.4 Arco a forma di catenaria

La *catenaria* è una particolare curva piana descritta dalla relazione:

$$Y = \bar{Y} - d \cosh\left(\frac{X}{d}\right) \quad (2.6.30)$$

dove il parametro d è il raggio di curvatura al vertice, mentre \bar{Y} è dato dalla somma del parametro d con l'ordinata Y in corrispondenza di $X = 0$, ovvero l'altezza in chiave b :

$$\bar{Y} = b + d \quad (2.6.31)$$

L'arco a forma di catenaria è illustrato graficamente in figura 2.14.

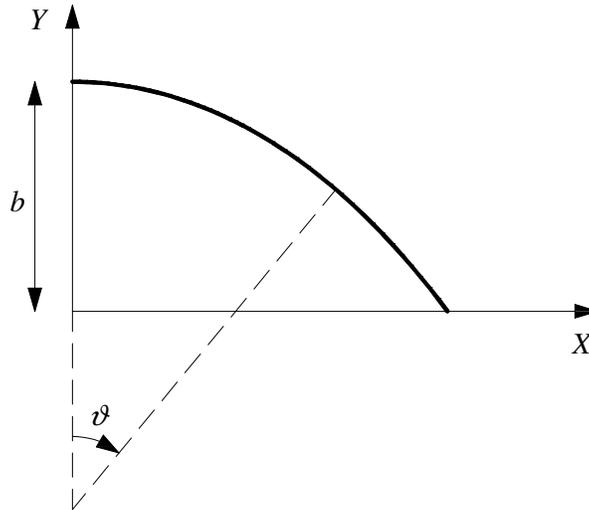


Figura 2.14. Rappresentazione grafica dell'arco a forma di catenaria

La derivata di Y rispetto a ϑ vale:

$$\frac{dY}{d\vartheta} = -\sinh\frac{X}{d} \frac{dX}{d\vartheta} = -\sinh\frac{X}{d} r(\vartheta) \cos\vartheta \quad (2.6.32)$$

Dividendo entrambi i membri dell'equazione (2.6.1) per $r^2(\vartheta)d\vartheta^2$ si ottiene:

$$1 = \frac{\left(\frac{dX}{d\vartheta}\right)^2}{r^2(\vartheta)} + \frac{\left(\frac{dY}{d\vartheta}\right)^2}{r^2(\vartheta)} \quad (2.6.33)$$

Si procede sostituendo le relazioni (2.6.2) e (2.6.32) nell'equazione (2.6.33) e sviluppando l'equazione:

$$1 = \frac{r^2(\vartheta)\cos^2\vartheta}{r^2(\vartheta)} + \sinh^2\left(\frac{X}{d}\right)\frac{r^2(\vartheta)\cos^2\vartheta}{r^2(\vartheta)} = \cos^2\vartheta + \sinh^2\left(\frac{X}{d}\right)\cos^2\vartheta$$

$$1 - \cos^2\vartheta = \sin^2\vartheta = \sinh^2\left(\frac{X}{d}\right)\cos^2\vartheta$$

$$\frac{\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta} = \tan^2\vartheta = \sinh^2\left(\frac{X}{d}\right) \quad (2.6.34)$$

$$\tan\vartheta = \sinh\left(\frac{X}{d}\right)$$

$$X = \operatorname{darcsinh}(\tan\vartheta)$$

Le equazioni (2.6.30) e (2.6.34) determinano le equazioni parametriche della catenaria:

$$\begin{cases} X = \operatorname{darcsinh}(\tan\vartheta) \\ Y = \bar{Y} - d \cosh\left(\frac{X}{d}\right) \end{cases} \quad (2.6.35)$$

con $\vartheta \in \left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[$. Essendo nota l'espressione di X , dall'equazione (2.6.2) si può ricavare

la legge di variazione del raggio di curvatura al variare dell'angolo ϑ :

$$r(\vartheta) = \frac{1}{\cos\vartheta} \frac{dX}{d\vartheta} = \frac{d}{\cos\vartheta} \frac{1 + \tan^2\vartheta}{\sqrt{1 + \tan^2\vartheta}} = \frac{d\sqrt{1 + \tan^2\vartheta}}{\cos\vartheta} = \frac{d}{\cos^2\vartheta} \quad (2.6.36)$$

mentre la derivata del raggio di curvatura $r(\vartheta)$ vale:

$$\frac{dr(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{2d \sin \vartheta}{\cos^3 \vartheta} \quad (2.6.37)$$

Capitolo 3

Soluzione numerica mediante GDQ Method e Differenze Finite

3.1 INTRODUZIONE

Nel capitolo precedente sono state mostrate le equazioni che governano il comportamento meccanico degli archi piani a sezione e curvatura variabile. Il sistema di equazioni è sempre un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali, la cui soluzione in forma chiusa non esiste in generale. Per ottenere una soluzione approssimata accettabile del problema occorre utilizzare una tecnica numerica. Il *Metodo Generalizzato di Quadratura Differenziale*, presentato nel primo capitolo, rappresenta una tecnica numerica particolarmente adatta a risolvere problemi alle derivate parziali, ossia sistemi di equazioni differenziali insieme ad opportune condizioni al contorno. Si è quindi proposta una soluzione numerica della problematica illustrata attraverso un algoritmo di calcolo implementato con *Matlab 6.5*.

Alla base di ogni tecnica numerica per la risoluzione di sistemi di equazioni differenziali vi è la *discretizzazione* del dominio di analisi, nel caso in esame la discretizzazione interessa sia il dominio spaziale, ovvero la struttura considerata, sia il dominio temporale. Tale tecnica comporta il passaggio da un sistema continuo con infiniti gradi di libertà ad un sistema discreto con un numero finito di gradi di libertà. In questo modo si ottiene un sistema più semplice, ma anche meno rappresentativo della

problematica reale. Risulta inoltre di fondamentale importanza l'individuazione dei parametri geometrici e meccanici del modello, affinché questo possa dirsi rappresentativo della struttura reale. La discretizzazione e l'individuazione dei parametri del modello costituiscono l'operazione di *identificazione* del sistema strutturale con il modello discreto, la precisione con cui viene effettuata tale operazione è fondamentale al fine di garantire l'accuratezza della soluzione.

Per valutare la validità del metodo GDQ, i risultati ottenuti sono stati confrontati con quelli forniti da una tecnica numerica classica, ossia il *metodo di Newmark*, che verrà brevemente presentato in questo capitolo.

3.2 DEFINIZIONE E RISOLUZIONE DEL SISTEMA DI EQUAZIONI

3.2.1 Equazioni di campo e condizioni al contorno

Una volta definito il sistema risolvete (2.5.3), per ottenere la soluzione numerica attraverso la tecnica GDQ occorre in primo luogo discretizzare il dominio spaziale e il dominio temporale mediante una delle tecniche descritte nel paragrafo 1.2.5. Considerando una discretizzazione del dominio spaziale in N punti e del dominio temporale in T punti, è possibile procedere alla valutazione dei coefficienti di ponderazione ζ_{ik}^s per la derivazione nello spazio e ζ_{jm}^t per la derivazione nel tempo.

Attraverso l'impiego dei suddetti coefficienti di ponderazione, le equazioni fondamentali (2.5.3) possono essere così riscritte per il generico punto i -esimo e all'istante temporale j -esimo:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{EA_i}{r_i^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(2)} u_{k,j} + \left(\frac{E}{r_i^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} A_k - \frac{EA_i}{r_i^3} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} r_k \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} u_{k,j} - \frac{G\Lambda_i}{r_i^2} u_{i,j} + \\
 - \left(\frac{EA_i}{r_i^2} + \frac{G\Lambda_i}{r_i^2} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} v_{k,j} - \left(\frac{E}{r_i^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} A_k - \frac{EA_i}{r_i^3} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} r_k \right) v_{i,j} + \\
 - \frac{G\Lambda_i}{r_i} \varphi_{i,j} + p_{i,j} = \mu A_i \sum_{m=1}^T \zeta_{jm}^{t(2)} u_{i,m} \\
 \frac{G\Lambda_i}{r_i^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(2)} v_{k,j} + \left(\frac{G}{r_i^2 \mathcal{K}_0} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} A_k - \frac{G\Lambda_i}{r_i^3} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} r_k \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} v_{k,j} - \frac{EA_i}{r_i^2} v_{i,j} + \\
 + \left(\frac{EA_i}{r_i^2} + \frac{G\Lambda_i}{r_i^2} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} u_{k,j} + \left(\frac{G}{r_i^2 \mathcal{K}_0} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} A_k - \frac{G\Lambda_i}{r_i^3} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} r_k \right) u_{i,j} + \\
 + \frac{G\Lambda_i}{r_i} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} \varphi_{k,j} + \frac{G}{r_i \mathcal{K}_0} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} A_k \varphi_{i,j} + q_{i,j} = \mu A_i \sum_{m=1}^T \zeta_{jm}^{t(2)} v_{i,m} \\
 \frac{EI_i}{r_i^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(2)} \varphi_{k,j} + \left(\frac{E}{r_i^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} I_k - \frac{EI_i}{r_i^3} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} r_k \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} \varphi_{k,j} - G\Lambda_i \varphi_{i,j} + \\
 - \frac{G\Lambda_i}{r_i} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} v_{k,j} - \frac{G\Lambda_i}{r_i} u_{i,j} + m_{i,j} = \mu I_i \sum_{m=1}^T \zeta_{jm}^{t(2)} \varphi_{i,m}
 \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

Occorre però precisare che le relazioni (3.2.1) non valgono per tutti i punti del dominio spazio-temporale, in quanto per risolvere tale problema sono indispensabili anche le

condizioni al contorno e le condizioni iniziali. In particolare le condizioni al contorno vanno scritte in corrispondenza dei punti di estremità dell'arco, ovvero per $i=1; i=N$, mentre le condizioni iniziali vanno scritte nel primo istante temporale.

Risulta quindi evidente che le equazioni (3.2.1) sono valide in tutti i punti del dominio spazio-temporale tali per cui:

$$i = 2, \dots, N-1 \quad j = 2, \dots, T \quad (3.2.2)$$

Esse prendono anche il nome di *equazioni di campo*.

Le condizioni naturali al contorno (2.4.26) e (2.4.27) vanno scritte in corrispondenza dei punti di estremità e derivano dall'applicazione del principio di Hamilton descritta nel paragrafo 2.4.2. Per $i=1$ si ha:

$$\begin{aligned} \overline{N}_{0,j} = N_{1,j} &= EA_1 \left(\frac{1}{r_1} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{s(1)} u_{k,j} - \frac{v_{1,j}}{r_1} \right) & \overline{u}_{0,j} &= u_{1,j} \\ \overline{T}_{0,j} = T_{1,j} &= GA_1 \left(\frac{1}{r_1} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{s(1)} v_{k,j} + \frac{u_{1,j}}{r_1} + \varphi_{1,j} \right) & \text{oppure} & \overline{v}_{0,j} = v_{1,j} \\ \overline{M}_{0,j} = M_{1,j} &= EI_1 \frac{1}{r_1} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{s(1)} \varphi_{k,j} & & \overline{\varphi}_{0,j} = \varphi_{1,j} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Per $i=N$ si ha:

$$\begin{aligned} \overline{N}_{l,j} = N_{N,j} &= EA_N \left(\frac{1}{r_N} \sum_{k=1}^N \zeta_{Nk}^{s(1)} u_{k,j} - \frac{v_{N,j}}{r_1} \right) & \overline{u}_{l,j} &= u_{N,j} \\ \overline{T}_{l,j} = T_{N,j} &= GA_N \left(\frac{1}{r_N} \sum_{k=1}^N \zeta_{Nk}^{s(1)} v_{k,j} + \frac{u_{N,j}}{r_N} + \varphi_{N,j} \right) & \text{oppure} & \overline{v}_{l,j} = v_{N,j} \\ \overline{M}_{l,j} = M_{N,j} &= EI_N \frac{1}{r_N} \sum_{k=1}^N \zeta_{Nk}^{s(1)} \varphi_{k,j} & & \overline{\varphi}_{l,j} = \varphi_{N,j} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

dove le grandezze $\overline{N}_0, \overline{N}_l, \overline{T}_0, \overline{T}_l, \overline{M}_0, \overline{M}_l$ e $\overline{u}_0, \overline{u}_l, \overline{v}_0, \overline{v}_l, \overline{\varphi}_0, \overline{\varphi}_l$ indicano rispettivamente le sollecitazioni e gli spostamenti imposti alle estremità.

3.2.2 Determinazione delle condizioni iniziali

Per quanto riguarda le condizioni iniziali, esse vanno imposte in tutti gli $N-2$ punti interni al dominio spaziale all'istante $j = 1$.

Tuttavia, nella risoluzione numerica adottata, il procedimento risulta leggermente differente, infatti lo spostamento dei punti del dominio all'istante iniziale non si considera noto, ma deriva dalla risoluzione delle equazioni fondamentali in ambito statico, che vengono di seguito riportate:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{EA_i}{r_i^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(2)} u_{k,1} + \left(\frac{E}{r_i^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} A_k - \frac{EA_i}{r_i^3} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} r_k \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} u_{k,1} - \frac{G\Lambda_i}{r_i^2} u_{i,1} + \\
 - \left(\frac{EA_i}{r_i^2} + \frac{G\Lambda_i}{r_i^2} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} v_{k,1} - \left(\frac{E}{r_i^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} A_k - \frac{EA_i}{r_i^3} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} r_k \right) v_{i,1} + \\
 - \frac{G\Lambda_i}{r_i} \varphi_{i,1} + p_{i,1} = 0 \\
 \frac{G\Lambda_i}{r_i^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(2)} v_{k,1} + \left(\frac{G}{r_i^2 \mathcal{K}_0} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} A_k - \frac{G\Lambda_i}{r_i^3} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} r_k \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} v_{k,1} - \frac{EA_i}{r_i^2} v_{i,1} + \\
 + \left(\frac{EA_i}{r_i^2} + \frac{G\Lambda_i}{r_i^2} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} u_{k,1} + \left(\frac{G}{r_i^2 \mathcal{K}_0} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} A_k - \frac{G\Lambda_i}{r_i^3} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} r_k \right) u_{i,1} + \\
 + \frac{G\Lambda_i}{r_i} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} \varphi_{k,1} + \frac{G}{r_i \mathcal{K}_0} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} A_k \varphi_{i,j} + q_{i,1} = 0 \\
 \frac{EI_i}{r_i^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(2)} \varphi_{k,1} + \left(\frac{E}{r_i^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} I_k - \frac{EI_i}{r_i^3} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} r_k \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} \varphi_{k,1} - G\Lambda_i \varphi_{i,1} + \\
 - \frac{G\Lambda_i}{r_i} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{s(1)} v_{k,1} - \frac{G\Lambda_i}{r_i} u_{i,1} + m_{i,1} = 0
 \end{array} \right. \quad (3.2.5)$$

cui vanno aggiunte le condizioni al contorno (3.2.3) e (3.2.4) all'istante $j = 1$.

Introducendo i vettori:

$$\mathbf{u}_1^T = [u_1, u_2, \dots, u_N, v_1, v_2, \dots, v_N, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N] \quad (3.2.6)$$

e

$$\mathbf{f}_1^T = [p_1, p_2, \dots, p_N, q_1, q_2, \dots, q_N, m_1, m_2, \dots, m_N] \quad (3.2.7)$$

La (3.2.13) può essere riscritta come:

$$\underset{[3(N-2) \times 3(N-2)]}{\mathbf{K}_{d,st}} \underset{[3(N-2) \times 1]}{\mathbf{u}_{d,1}} = \underset{[3(N-2) \times 1]}{\mathbf{f}^*} \quad (3.2.14)$$

Dalla (3.2.14) si ottiene:

$$\mathbf{u}_{d,1} = \mathbf{K}_{d,st}^{-1} \mathbf{f}^* \quad (3.2.15)$$

La soluzione del problema statico determinata dalla relazione (3.2.15) viene impiegata come condizione iniziale del problema dinamico; in questo modo è necessario dare una sola condizione iniziale, vale a dire la velocità $\mathbf{v}_{d,1}$ dei punti *domain* all'istante t_1 , ovvero:

$$\dot{\mathbf{u}}_{d,1} = \mathbf{v}_{d,1} \quad (3.2.16)$$

3.2.3 Soluzione del problema in regime dinamico mediante l'algoritmo di Fung

In ambito dinamico il sistema risolvete è il (3.2.1), che rispetto al sistema (3.2.5) prevede la presenza dei termini legati all'inerzia. Le equazioni di tale sistema scritte per tutti i punti *domain* e per tutti i punti in cui è stato discretizzato il dominio temporale possono essere raccolte nella seguente forma matriciale:

$$\underset{[3(N-2)T \times 3(N-2)T]}{\mathbf{M}} \underset{[3(N-2)T \times 1]}{\ddot{\mathbf{u}}_d} + \underset{[3(N-2)T \times 3(N-2)T]}{\mathbf{K}} \underset{[3(N-2)T \times 1]}{\mathbf{u}_d} = \underset{[3(N-2)T \times 1]}{\mathbf{f}_d} \quad (3.2.17)$$

in cui le matrici \mathbf{M} e \mathbf{K} sono matrici diagonali a blocchi:

$$\underset{[3(N-2)T \times 3(N-2)T]}{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{m} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{m} \end{bmatrix}; \quad \underset{[3(N-2)T \times 3(N-2)T]}{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{d,st} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_{d,st} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_{d,st} \end{bmatrix} \quad (3.2.18)$$

con \mathbf{m} matrice diagonale di massa per il generico istante *j-esimo*:

$$\underset{[3(N-2) \times 3(N-2)]}{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} m_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & m_{3(N-2)} \end{bmatrix} \quad (3.2.19)$$

con m_i che assume i seguenti valori:

- $m_i = \mu A_i$ se l'*i-esimo* grado di libertà è uno spostamento;
- $m_i = \mu I_i$ se l'*i-esimo* grado di libertà è una rotazione.

mentre la matrice di rigidezza $\mathbf{K}_{d,st}$ è la matrice determinata nel passaggio dalla (3.2.13) alla (3.2.14) e non varia nel tempo, è quindi costante in corrispondenza di ogni istante temporale.

3.2.3.1 Algoritmo di Fung

Il vettore delle derivate prime delle componenti di spostamento può essere calcolato come:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{d,1} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{u}}_{d,j} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{u}}_{d,T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_{11}^{(1)} \mathbf{I} & \cdots & \zeta_{1j}^{(1)} \mathbf{I} & \cdots & \zeta_{1T}^{(1)} \mathbf{I} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{j1}^{(1)} \mathbf{I} & \cdots & \zeta_{jj}^{(1)} \mathbf{I} & \cdots & \zeta_{jT}^{(1)} \mathbf{I} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{T1}^{(1)} \mathbf{I} & \cdots & \zeta_{Tj}^{(1)} \mathbf{I} & \cdots & \zeta_{TT}^{(1)} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{d,1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{d,j} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{d,T} \end{bmatrix} \quad (3.2.20)$$

Però sia $\mathbf{u}_{d,1}$ che $\dot{\mathbf{u}}_{d,1}$ sono noti dalle condizioni iniziali, si può allora scrivere:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{d,2} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{u}}_{d,j} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{u}}_{d,T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_{21}^{(1)} \mathbf{I} \\ \vdots \\ \zeta_{j1}^{(1)} \mathbf{I} \\ \vdots \\ \zeta_{T1}^{(1)} \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u}_{d,1} + \begin{bmatrix} \zeta_{22}^{(1)} \mathbf{I} & \cdots & \zeta_{2j}^{(1)} \mathbf{I} & \cdots & \zeta_{2T}^{(1)} \mathbf{I} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{j2}^{(1)} \mathbf{I} & \cdots & \zeta_{jj}^{(1)} \mathbf{I} & \cdots & \zeta_{jT}^{(1)} \mathbf{I} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{T2}^{(1)} \mathbf{I} & \cdots & \zeta_{Tj}^{(1)} \mathbf{I} & \cdots & \zeta_{TT}^{(1)} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{d,2} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{d,j} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{d,T} \end{bmatrix} \quad (3.2.21)$$

Ovvero, in notazione compatta:

$$\dot{\mathbf{u}}_d^* = \mathbf{G}_0 \mathbf{u}_{d,1} + \mathbf{G} \mathbf{u}_d^* \quad (3.2.22)$$

$[\begin{smallmatrix} 3(N-2)(T-1) \times 1 \\ \vdots \\ 3(N-2)(T-1) \times 1 \end{smallmatrix}] \quad [\begin{smallmatrix} 3(N-2)(T-1) \times 3(N-2) \\ \vdots \\ 3(N-2)(T-1) \times 3(N-2) \end{smallmatrix}] \quad [\begin{smallmatrix} 3(N-2) \times 1 \\ \vdots \\ 3(N-2) \times 1 \end{smallmatrix}] \quad [\begin{smallmatrix} 3(N-2)(T-1) \times 3(N-2)(T-1) \\ \vdots \\ 3(N-2)(T-1) \times 3(N-2)(T-1) \end{smallmatrix}] \quad [\begin{smallmatrix} 3(N-2)(T-1) \times 1 \\ \vdots \\ 3(N-2)(T-1) \times 1 \end{smallmatrix}]$

È necessario notare che i vettori \mathbf{u}_d^* e $\dot{\mathbf{u}}_d^*$ non hanno più le componenti corrispondenti all'istante $j=1$, quindi tali vettori contengono le componenti di spostamento dei punti *domain* a partire dal secondo istante temporale.

Analogamente si può ricavare l'espressione per il calcolo delle derivate seconde delle componenti di spostamento, che risulta essere:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_d^* &= \mathbf{G}_0 \dot{\mathbf{u}}_{d,1} + \\ &+ \mathbf{G} \mathbf{G}_0 \mathbf{u}_{d,1} + \\ &+ \mathbf{G} \mathbf{G} \mathbf{u}_d^* \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

$[\begin{smallmatrix} 3(N-2)(T-1) \times 1 \\ \vdots \\ 3(N-2)(T-1) \times 1 \end{smallmatrix}] \quad [\begin{smallmatrix} 3(N-2)(T-1) \times 3(N-2) \\ \vdots \\ 3(N-2)(T-1) \times 3(N-2) \end{smallmatrix}] \quad [\begin{smallmatrix} 3(N-2) \times 1 \\ \vdots \\ 3(N-2) \times 1 \end{smallmatrix}] \quad [\begin{smallmatrix} 3(N-2)(T-1) \times 3(N-2)(T-1) \\ \vdots \\ 3(N-2)(T-1) \times 3(N-2)(T-1) \end{smallmatrix}] \quad [\begin{smallmatrix} 3(N-2)(T-1) \times 1 \\ \vdots \\ 3(N-2)(T-1) \times 1 \end{smallmatrix}]$

L'algoritmo di Fung può essere applicato all'equazione matriciale (3.2.17), si ottiene:

$$\mathbf{MG}_0 \dot{\mathbf{u}}_{d,1} + \mathbf{MGG}_0 \mathbf{u}_{d,1} + \mathbf{MG}^2 \mathbf{u}_d^* + \mathbf{K} \mathbf{u}_d^* = \mathbf{f}_d \quad (3.2.24)$$

Considerando i seguenti operatori:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\text{tot}} &= \mathbf{MG}^2 + \mathbf{K} \\ \mathbf{f}_{\text{tot}} &= \mathbf{f}_d - \mathbf{MG}_0 \dot{\mathbf{u}}_{d,1} - \mathbf{MGG}_0 \mathbf{u}_{d,1} \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

l'equazione (3.2.24) diventa:

$$\mathbf{K}_{\text{tot}} \mathbf{u}_d^* = \mathbf{f}_{\text{tot}} \quad (3.2.26)$$

da cui si ricava:

$$\mathbf{u}_d^* = \mathbf{K}_{\text{tot}}^{-1} \mathbf{f}_{\text{tot}} \quad (3.2.27)$$

Aggiungendo il vettore $\mathbf{u}_{d,1}$ delle componenti di spostamento all'istante iniziale al vettore \mathbf{u}_d^* si ottiene il vettore \mathbf{u}_d :

$$\mathbf{u}_d^T = [\mathbf{u}_{d,1}^T, \mathbf{u}_d^{*T}] \quad (3.2.28)$$

Noto il vettore \mathbf{u}_d , attraverso la tecnica GDQ si possono rapidamente calcolare i vettori $\dot{\mathbf{u}}_d$ e $\ddot{\mathbf{u}}_d$.

In genere, per contenere le dimensioni del sistema risolvete e limitare così lo sforzo computazionale, si divide il tempo totale d'analisi T_{tot} in intervalli temporali Δt uguali, i quali vengono discretizzati in T punti e in seguito viene applicato l'algoritmo di Fung.

In questo modo, una volta trovata la soluzione $\mathbf{u}_d(\Delta t_l)$ nel l -esimo intervallo temporale, per far avanzare il processo di calcolo all'intervallo successivo è sufficiente porre:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{d,1}(\Delta t_{l+1}) &= \mathbf{u}_{d,T}(\Delta t_l) \\ \dot{\mathbf{u}}_{d,1}(\Delta t_{l+1}) &= \dot{\mathbf{u}}_{d,T}(\Delta t_l) \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

3.2.4 Calcolo della soluzione nei punti *bounded* del dominio spaziale

Una volta determinato il vettore \mathbf{u}_d , è nota la soluzione per tutti i punti interni al dominio spaziale. Attraverso l'equazione (3.2.12) risulta semplice ricavare la soluzione anche in corrispondenza dei punti di estremità; infatti, per ogni istante temporale *j-esimo* vale la relazione:

$$\mathbf{u}_{b,j} = \mathbf{K}_{bb}^{-1} (\mathbf{f}_{b,j} - \mathbf{K}_{bd} \mathbf{u}_{d,j}) \quad (3.2.30)$$

Si può così costruire il vettore \mathbf{u}_b :

$$\mathbf{u}_b^T = [\mathbf{u}_{b,1}^T, \dots, \mathbf{u}_{b,j}^T, \dots, \mathbf{u}_{b,T}^T] \quad (3.2.31)$$

e determinare di conseguenza il vettore soluzione \mathbf{u} :

$$\mathbf{u}^T = [\mathbf{u}_b^T, \mathbf{u}_d^T] \quad (3.2.32)$$

3.3 RISOLUZIONE DEL PROBLEMA MEDIANTE IL METODO DI NEWMARK

3.3.1 Metodo di Newmark

Il metodo di Newmark appartiene alla famiglia dei *metodi alle differenze finite*. Tale metodo prevede la discretizzazione dell'intervallo temporale di analisi in passi temporali Δt uguali fra loro. Conoscendo la configurazione del sistema all'istante iniziale, questo metodo permette di ricavare la soluzione all'istante temporale successivo, tale soluzione diviene la condizione iniziale per il successivo *step* di calcolo.

Il problema dell'equilibrio è governato da una generica equazione del tipo:

$$\mathbf{M}\mathbf{a}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3.3.1)$$

cui sono associate le condizioni iniziali. Considerando il generico istante t_j , sono note le componenti di spostamento, di velocità e di accelerazione in questo istante.

Il metodo di Newmark considera accelerazioni nodali lineari nel tempo:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_j + \frac{t-t_j}{\Delta t}(\mathbf{a}_{j+1} - \mathbf{a}_j) \quad (3.3.2)$$

Integrando si ottengono le relazioni per la determinazione di velocità e spostamento:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_j + (t-t_j)\mathbf{a}_j + \frac{(t-t_j)^2}{2\Delta t}(\mathbf{a}_{j+1} - \mathbf{a}_j) \quad (3.3.3)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_j + (t-t_j)\mathbf{v}_j + \frac{(t-t_j)^2}{2}\mathbf{a}_j + \frac{(t-t_j)^3}{6\Delta t}(\mathbf{a}_{j+1} - \mathbf{a}_j) \quad (3.3.4)$$

Essendo noti $\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j, \mathbf{a}_j$, l'unica incognita risulta essere \mathbf{a}_{j+1} .

La velocità e lo spostamento all'istante t_{j+1} sono rispettivamente:

$$\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{v}_j + \Delta t \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}_j + \frac{1}{2} \mathbf{a}_{j+1} \right) \quad (3.3.5)$$

$$\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + \Delta t \mathbf{v}_j + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{2}{3} \mathbf{a}_j + \frac{1}{3} \mathbf{a}_{j+1} \right) \quad (3.3.6)$$

Le espressioni (3.3.5) e (3.3.6) possono essere generalizzate:

$$\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{v}_j + \Delta t \left[(1-\gamma) \mathbf{a}_j + \gamma \mathbf{a}_{j+1} \right] \quad (3.3.7)$$

$$\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + \Delta t \mathbf{v}_j + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1-2\beta) \mathbf{a}_j + 2\beta \mathbf{a}_{j+1} \right] \quad (3.3.8)$$

L'equazione di bilancio all'istante t_{j+1} è la seguente:

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_{j+1} + \mathbf{K} \mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{f}_{j+1} \quad (3.3.9)$$

Sostituendo l'equazione (3.3.8) nella (3.3.9) si ottiene la seguente equazione:

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_{j+1} + \mathbf{K} \mathbf{u}_j + \Delta t \mathbf{K} \mathbf{v}_j + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{K} \left[(1-2\beta) \mathbf{a}_j + 2\beta \mathbf{a}_{j+1} \right] = \mathbf{f}_{j+1} \quad (3.3.10)$$

nella quale \mathbf{a}_{j+1} è l'unica incognita. Considerando i seguenti termini:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^* &= \mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K} \\ \mathbf{p}_{j+1}^* &= \mathbf{f}_{j+1} + \mathbf{K} \mathbf{u}_j + \Delta t \mathbf{K} \mathbf{v}_j + \frac{\Delta t^2}{2} (1-2\beta) \mathbf{K} \mathbf{a}_j \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

l'equazione (3.3.10) diventa:

$$\mathbf{K}^* \mathbf{a}_{j+1} = \mathbf{p}_{j+1}^* \quad (3.3.12)$$

da cui si ricava l'incognita \mathbf{a}_{j+1} :

$$\mathbf{a}_{j+1} = \frac{\mathbf{P}_{j+1}^*}{\mathbf{K}^*} \quad (3.3.13)$$

Inserendo \mathbf{a}_{j+1} nelle equazioni (3.3.7) e (3.3.8) si ricava la soluzione all'istante t_{j+1} , che diventa la condizione iniziale per la determinazione della soluzione all'istante successivo.

L'algoritmo di Newmark non è *self-starting* in quanto le condizioni iniziali all'istante t_0 riguardano velocità e spostamento, ma non si conosce l'accelerazione \mathbf{a}_0 . Per determinarla si impone l'equazione di bilancio all'istante t_0 :

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_0 + \mathbf{K}\mathbf{u}_0 = \mathbf{f}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_0 = \frac{(\mathbf{f}_0 - \mathbf{K}\mathbf{u}_0)}{\mathbf{M}} \quad (3.3.14)$$

Al variare dei coefficienti β e γ il metodo di Newmark assume denominazioni specifiche:

- con $\beta = 0; \gamma = \frac{1}{2}$ si ottiene il *metodo delle differenze centrali*;
- con $\beta = \frac{1}{12}; \gamma = \frac{1}{2}$ si ottiene il *metodo di Fox Goodwin II*;
- con $\beta = \frac{1}{6}; \gamma = \frac{1}{2}$ si ottiene il *metodo dell'accelerazione lineare I* o *metodo di Fox Goodwin I*;
- con $\beta = \frac{1}{4}; \gamma = \frac{1}{2}$ si ottiene il *metodo del trapezio*;
- con $\beta = \frac{1}{3}; \gamma = \frac{1}{2}$ si ottiene il *metodo dell'accelerazione lineare II*;
- con $\beta = \frac{1}{2}; \gamma = \frac{1}{2}$ si ottiene il *metodo dell'accelerazione costante media*;
- con $\beta = \frac{8}{5}; \gamma = \frac{3}{2}$ si ottiene il *metodo di Galerkin*;
- con $\beta = 2; \gamma = \frac{3}{2}$ si ottiene il *metodo delle differenze all'indietro*.

Definendo *stabilità dell'algoritmo* la condizione per cui un piccolo errore ad un passo temporale determina errori cumulativi più piccoli nei passi temporali successivi, il metodo di Newmark risulta incondizionatamente stabile se:

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2} \quad (3.3.15)$$

Se la condizione (3.3.15) non viene rispettata, allora il metodo diventa condizionatamente stabile, ovvero risulta stabile se viene rispettata la seguente condizione sulla scelta dell'incremento temporale:

$$\Delta t \leq \left(\frac{\gamma}{2} - \beta \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\omega_{\max}} \quad (3.3.16)$$

dove ω_{\max} è il massimo autovalore derivante dalla risoluzione del problema agli autovalori:

$$(\mathbf{K} - \omega \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.3.17)$$

Più è fitta la discretizzazione del dominio spaziale, maggiore è ω_{\max} , di conseguenza la condizione sul Δt risulta essere più severa.

3.3.2 Applicazione dell'algoritmo di Newmark

Note le condizioni iniziali $\mathbf{u}_{d,1}$ e $\dot{\mathbf{u}}_{d,1}$, il calcolo dei vettori $\mathbf{u}_d, \dot{\mathbf{u}}_d, \ddot{\mathbf{u}}_d$ può essere svolto mediante l'impiego dell'algoritmo di Newmark. Il tempo totale di analisi va discretizzato in incrementi Δt uguali fra loro, in particolare se si sceglie di utilizzare un algoritmo condizionatamente stabile è necessario scegliere un Δt che soddisfi la condizione (3.3.16). L'equazione di bilancio all'istante iniziale è la seguente:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_{d,1} + \mathbf{K}_{d,st}\mathbf{u}_{d,1} = \mathbf{f}_{d,1} \quad (3.3.18)$$

dove le matrici \mathbf{m} e $\mathbf{K}_{d,st}$ sono le stesse matrici descritte nell'algoritmo di Fung.

Dall'equazione (3.3.18) si può facilmente ricavare l'incognita $\ddot{\mathbf{u}}_{d,1}$ impiegando la relazione (3.3.14). Note le quantità $\mathbf{u}_{d,1}, \dot{\mathbf{u}}_{d,1}, \ddot{\mathbf{u}}_{d,1}$ e i parametri β e γ propri del metodo scelto, è possibile determinare gli spostamenti, le velocità e le accelerazioni dei punti *domain* all'istante successivo. Considerando di conoscere le quantità $\mathbf{u}_{d,j}, \dot{\mathbf{u}}_{d,j}, \ddot{\mathbf{u}}_{d,j}$ in corrispondenza del *j-esimo* istante temporale, i passaggi per il calcolo dei vettori $\mathbf{u}_{d,j+1}, \dot{\mathbf{u}}_{d,j+1}, \ddot{\mathbf{u}}_{d,j+1}$ in corrispondenza dell'istante $t_{j+1} = t_j + \Delta t$ sono quelli descritti in precedenza per il caso generico:

- calcolo delle quantità \mathbf{K}^* (costante nel tempo) e $\mathbf{p}_{d,j+1}^*$ (da calcolare per ogni istante temporale):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^* &= \mathbf{m} + \beta\Delta t^2\mathbf{K}_{d,st} \\ \mathbf{p}_{d,j+1}^* &= \mathbf{f}_{d,j+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{d,j} + \Delta t\mathbf{K}\dot{\mathbf{u}}_{d,j} + \frac{\Delta t^2}{2}(1-2\beta)\mathbf{K}\ddot{\mathbf{u}}_{d,j} \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

- calcolo dell'accelerazione $\ddot{\mathbf{u}}_{d,j+1}$:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{d,j+1} = \frac{\mathbf{p}_{d,j+1}^*}{\mathbf{K}^*} \quad (3.3.20)$$

- inserimento del vettore $\ddot{\mathbf{u}}_{d,j+1}$ nelle equazioni (3.3.7) e (3.3.8) e calcolo dei vettori $\dot{\mathbf{u}}_{d,j+1}$ e $\mathbf{u}_{d,j+1}$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_{d,j+1} &= \dot{\mathbf{u}}_{d,j} + \Delta t \left[(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_{d,j} + \gamma\ddot{\mathbf{u}}_{d,j+1} \right] \\ \mathbf{u}_{d,j+1} &= \mathbf{u}_{d,j} + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_{d,j} + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1-2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_{d,j} + 2\beta\ddot{\mathbf{u}}_{d,j+1} \right]\end{aligned}\tag{3.3.21}$$

Determinati i vettori $\mathbf{u}_{d,j+1}$, $\dot{\mathbf{u}}_{d,j+1}$, $\ddot{\mathbf{u}}_{d,j+1}$, essi possono essere utilizzati come condizioni iniziali del successivo *step* di calcolo, in questo modo si procede al calcolo dei vettori $\mathbf{u}_{d,j+2}$, $\dot{\mathbf{u}}_{d,j+2}$, $\ddot{\mathbf{u}}_{d,j+2}$. L'algorithmo termina quando vengono calcolati i vettori $\mathbf{u}_{d,T}$, $\dot{\mathbf{u}}_{d,T}$, $\ddot{\mathbf{u}}_{d,T}$, si procede poi all'individuazione dei vettori \mathbf{u}_d , $\dot{\mathbf{u}}_d$, $\ddot{\mathbf{u}}_d$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_d^T &= \left[\mathbf{u}_{d,1}^T, \dots, \mathbf{u}_{d,j}^T, \dots, \mathbf{u}_{d,T}^T \right] \\ \dot{\mathbf{u}}_d^T &= \left[\dot{\mathbf{u}}_{d,1}^T, \dots, \dot{\mathbf{u}}_{d,j}^T, \dots, \dot{\mathbf{u}}_{d,T}^T \right] \\ \ddot{\mathbf{u}}_d^T &= \left[\ddot{\mathbf{u}}_{d,1}^T, \dots, \ddot{\mathbf{u}}_{d,j}^T, \dots, \ddot{\mathbf{u}}_{d,T}^T \right]\end{aligned}\tag{3.3.22}$$

L'operazione successiva è quella del calcolo del vettore \mathbf{u}_b attraverso le relazioni (3.2.29) e (3.2.30), infine si determina il vettore soluzione \mathbf{u} attraverso la relazione (3.2.31).

È importante notare come il vettore soluzione \mathbf{u} determinato attraverso l'algorithmo alle differenze finite sia diverso dal vettore soluzione calcolato con il metodo GDQ; infatti, sebbene i due metodi utilizzino la stessa discretizzazione spaziale della struttura, essi operano differenti discretizzazioni del dominio temporale, di conseguenza il vettore \mathbf{u} risulta calcolato in corrispondenza di differenti istanti temporali, gli unici istanti temporali che i due algoritmi hanno in comune sono l'istante iniziale t_1 e l'istante finale t_T .

3.4 ALGORITMO DI CALCOLO

Note le equazioni fondamentali, le condizioni al contorno e le condizioni iniziali in termini di *GDQ Method*, è possibile passare alla visione del programma di calcolo che ha permesso di ottenere vari risultati. L'algoritmo di calcolo è stato sviluppato mediante il software *Matlab 6.5*; tale algoritmo esegue in serie diversi passaggi che, una volta completati, conducono alla soluzione cercata, ovvero al calcolo del vettore degli spostamenti \mathbf{u} . L'obiettivo del lavoro è quello di risolvere un sistema di equazioni differenziali attraverso l'impiego di una tecnica approssimata che consente di trasformare il suddetto sistema in un sistema lineare nell'incognita \mathbf{u} .

Il programma esegue inizialmente una serie di operazioni preliminari per la definizione del modello geometrico-meccanico della struttura e successivamente opera la discretizzazione dell'arco; in seguito entra in funzione l'algoritmo principale che, attraverso diverse serie di cicli di calcolo, determina lo spostamento di tutti i punti dell'arco per ogni istante dell'intervallo temporale di analisi.

Le unità di misura utilizzate sono le seguenti: il *metro* (m) per la misura della lunghezza, il *Newton* (N) per la misura della forza e il *secondo* (sec) per la misura del tempo.

3.4.1 Definizione del modello geometrico-meccanico

3.4.1.1 Definizione della geometria dell'asse di riferimento

La prima informazione richiesta dal programma è la scelta della tipologia di arco da analizzare:



In base alla scelta effettuata, si introducono una serie di dati geometrici che il programma elabora per la definizione della geometria dell'arco.

Se si intende analizzare l'*arco parabolico* appare la seguente schermata:

Arco Parabolico

Definire estremità destra: s_{dx} [m] =
3

Definire estremità sinistra: s_{sx} [m] =
-3

Definire estremità all'apice: t [m] =
0

Definire la quota della sezione all'apice rispetto alla sezione alle spalle: S [m] =
1

OK Cancel

Considerando l'arco in un riferimento cartesiano ortogonale cartesiano OXY , i dati richiesti sono: l'ascissa X (s_{dx}) dell'estremità destra, l'ascissa X (s_{sx}) dell'estremità sinistra, l'ascissa X (t) del punto di sommità e la differenza (S) fra l'ordinata Y del punto di sommità e l'ordinata Y dell'estremità destra.

Se si intende analizzare l'*arco ellittico* appare la seguente schermata:

Arco Ellittico

Definire il semiasse di base della curva: r_a [m] =
1

Definire il semiasse in altezza della curva: r_b [m] =
0.5

Definire l'angolo iniziale: ϕ_0 [deg] =
60

Definire l'angolo finale: ϕ_1 [deg] =
-60

OK Cancel

I dati richiesti sono: il semiasse di base (r_a), il semiasse in altezza (r_b), l'angolo di apertura (ϑ_0) dell'estremità destra e l'angolo di apertura (ϑ_1) dell'estremità sinistra.

Se si intende analizzare l'*arco circolare* appare la seguente schermata:

I dati richiesti sono: il raggio della circonferenza (r), l'angolo di apertura (ϑ_0) dell'estremità destra e l'angolo di apertura (ϑ_1) dell'estremità sinistra.

Se si intende analizzare l'*arco cicloidale* appare la seguente schermata:

I dati richiesti sono: il raggio della circonferenza generatrice (r_c), l'angolo di apertura (ϑ_0) dell'estremità destra e l'angolo di apertura (ϑ_1) dell'estremità sinistra.

Se si intende analizzare l'*arco a forma di catenaria* appare la seguente schermata:

I dati richiesti sono: il raggio di curvatura in chiave (r_{cat}), l'angolo di apertura (ϑ_0) dell'estremità destra e l'angolo di apertura (ϑ_1) dell'estremità sinistra.

Inserendo i dati richiesti, sfruttando le relazioni riportate nel paragrafo 2.6 il programma è in grado di definire la geometria dell'asse di riferimento dell'arco oggetto dell'analisi.

D'ora in avanti il riferimento globale sarà costituito dall'angolo ϑ e dall'ascissa curvilinea s , i cui versi positivi sono indicati in figura 3.1 assieme ai versi positivi delle componenti di spostamento.

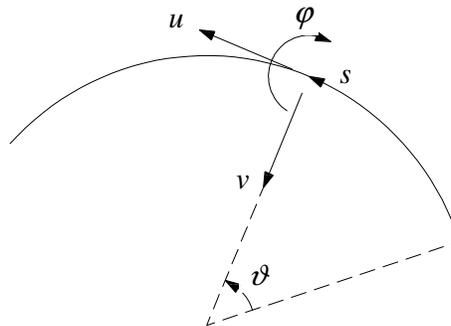


Figura 3.1. Sistema di riferimento dell'arco implementato nel codice di calcolo

Terminata la determinazione geometrica dell'asse, appare la seguente schermata:

Numero sconnessioni & Rappresentazione

Definire numero di sconnessioni: $n_s =$
1

Definire numero di punti per la discretizzazione di ogni elemento: $N =$
31

Definire numero di punti di interpolazione 2D: $N_{int} =$
31

Definire numero di punti di interpolazione 3D: $N_{int2} =$
31

Definire fattore di scala per la rappresentazione in percentuale: $f_{lr} \% =$
30

Definire fattore di scala per gli spostamenti in percentuale: $f_{sd} \% =$
10

Definire fattore di scala per le sollecitazioni in percentuale: $f_{sl} \% =$
20

Definire accelerazione di gravità: $g [N/m^2] =$
10

OK Cancel

nella quale si richiedono in input il numero di sconessioni (n_s) e il numero di punti (N) per la discretizzazione di ogni elemento; inoltre va indicata l'accelerazione di gravità (g) e vanno inseriti dati necessari alla rappresentazione grafica finale della soluzione.

In caso si desideri inserire delle sconessioni, per il posizionamento di ognuna di tali sconessioni appare la seguente schermata:



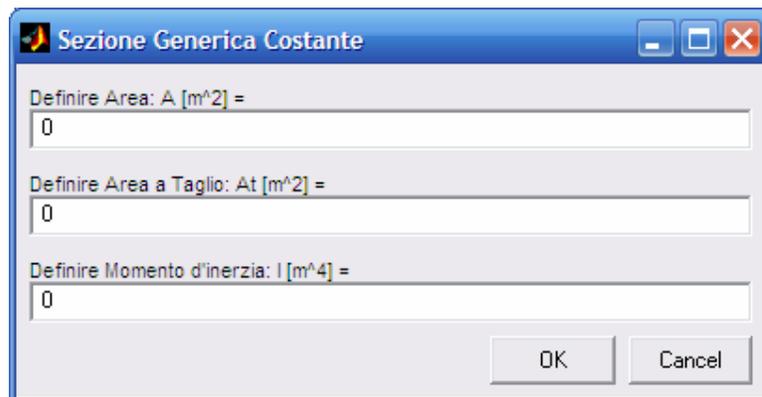
in cui va inserito l'angolo ϑ_h che individua la posizione della h -esima sconessione. Le sconessioni non possono essere collocate in corrispondenza delle estremità dell'arco, inoltre vanno inserite in ordine di ϑ_h crescente; se queste condizioni non sono rispettate, il programma non accetta i dati in input e richiede una nuova definizione del posizionamento.

3.4.1.2 Caratteristiche della sezione trasversale

Successivamente va scelto il tipo di sezione trasversale, che può essere costante e di forma generica, oppure variabile e di forma rettangolare, come mostrato nel menu:



Se si sceglie una sezione *generica costante*, appare la seguente schermata:



che chiede in input l'area (A), l'area a taglio (Λ) e il momento d'inerzia (I) di tale sezione.

Se si sceglie una sezione *rettangolare variabile*, appare la seguente schermata:

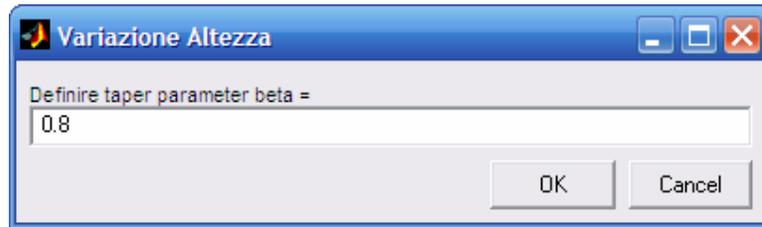
che chiede in input lo spessore (h_0) e la larghezza (b) dell'arco, oltre al fattore di taglio (κ_0) e ad un parametro necessario alla rappresentazione grafica. La sezione rettangolare mantiene costante la larghezza, mentre lo spessore è variabile lungo lo sviluppo dell'arco; l'andamento dello spessore può essere scelto nel menu successivo:

Se si sceglie una *variazione lineare* o una *variazione lineare asimmetrica*, l'andamento dello spessore h lungo l'asse è, rispettivamente:

$$h(s) = h_0 \left(1 - \beta \left(\frac{s}{s_0} \right) \right) \quad (3.4.1)$$

$$h(s) = h_0 \left(1 + \beta - 2\beta \left(\frac{s}{s_0} \right) \right) \quad (3.4.2)$$

dove h_0 è lo spessore inserito nel menu precedente, s_0 è la lunghezza dell'asse dell'arco e β è un parametro che il programma richiede in seguito nella schermata:



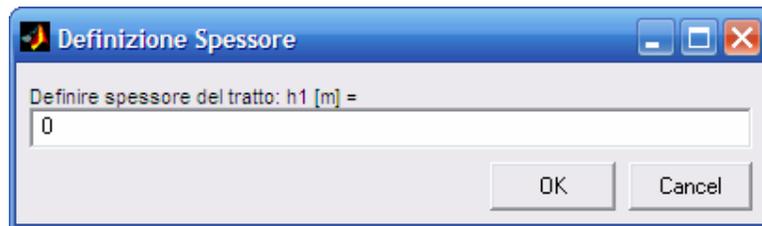
Se si sceglie una *variazione quadratica*, l'andamento dello spessore h lungo l'asse è:

$$h(s) = h_0 \frac{(s_0^2 - 2s_0s + 2s^2)}{s_0^2} \quad (3.4.3)$$

Se si sceglie uno spessore *costante*, questo vale:

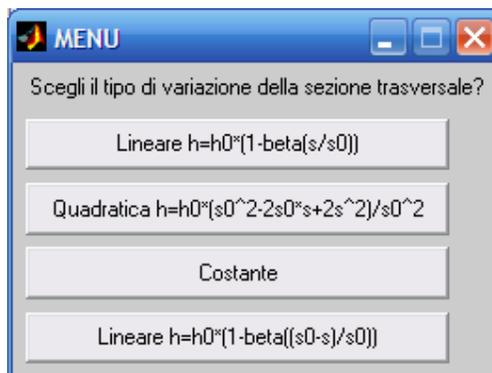
$$h(s) = \text{cost} = h_0 \quad (3.4.4)$$

Se si sceglie uno spessore *costante a tratti*, per ogni elemento k -esimo compare un menu:

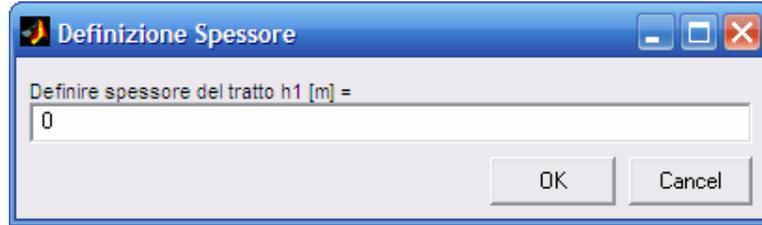


che richiede il valore dello spessore in quel tratto.

Se si sceglie uno spessore *variabile a tratti*, per ogni elemento k -esimo compare un menu:



in base al quale si sceglie il tipo di variazione dello spessore in quel tratto, inoltre per ogni k -esimo elemento va inserito lo spessore $h_{0,k}$ mediante la schermata:



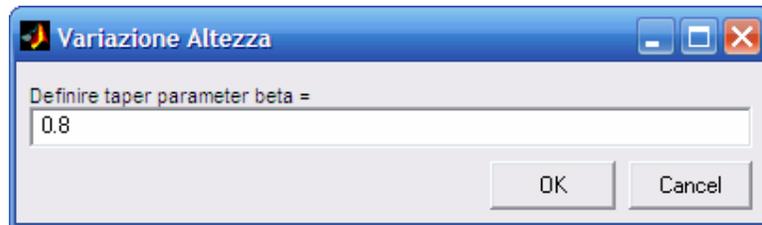
L'andamento dello spessore h_k all'interno del k -esimo elemento segue le seguenti leggi:

- *variazione lineare*, si possono scegliere due diversi andamenti:

$$h_k(s) = h_{0,k} \left(1 - \beta_k \left(\frac{s}{s_{0,k}} \right) \right) \quad (3.4.5)$$

$$h_k(s) = h_{0,k} \left(1 - \beta_k \left(\frac{s_{0,k} - s}{s_{0,k}} \right) \right) \quad (3.4.6)$$

dove il parametro β_k va inserito per ogni k -esimo elemento mediante la schermata:



mentre $s_{0,k}$ è la lunghezza dell'elemento e l'ascissa curvilinea s parte in corrispondenza dell'inizio dell'elemento;

- *variazione quadratica*:

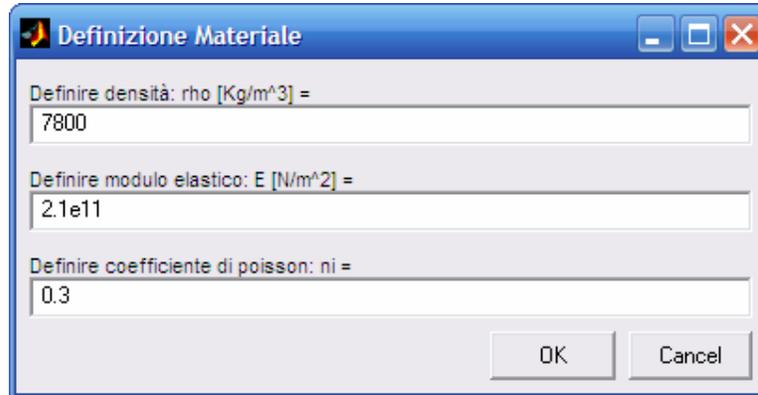
$$h_k(s) = h_{0,k} \frac{(s_{0,k}^2 - 2s_{0,k}s + 2s^2)}{s_{0,k}^2} \quad (3.4.7)$$

- *spessore costante*:

$$h_k(s) = cost = h_{0,k} \quad (3.4.8)$$

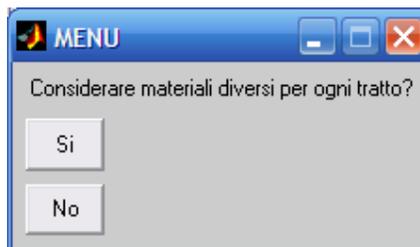
3.4.1.3 Parametri dei materiali

Lo *step* successivo è l'introduzione dei dati relativi alle caratteristiche dei materiali costituenti l'arco che si intende analizzare. Inizialmente appare la seguente schermata:

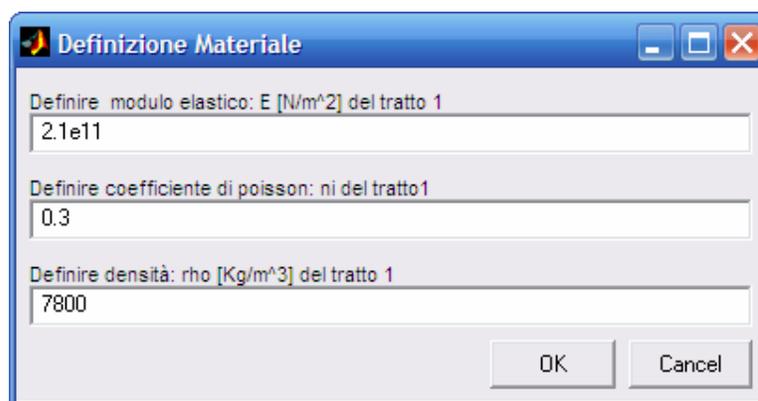


che permette l'inserimento della densità μ , del modulo elastico E e del coefficiente di Poisson ν .

Tuttavia, se l'arco è stato suddiviso in più elementi, è possibile considerare per ogni elemento materiali con caratteristiche differenti attraverso il seguente menu:



Se si intende considerare materiali diversi, per ogni tratto si ha la seguente schermata:



per definire i parametri di tali materiali; in caso contrario si considera tutto l'arco costituito dallo stesso materiale, le cui caratteristiche erano state introdotte in precedenza.

3.4.2 Definizione delle condizioni al contorno

Le condizioni al contorno vanno applicate nei punti di estremità, ovvero nei punti *bounded*, in corrispondenza dei quali non valgono le equazioni di campo.

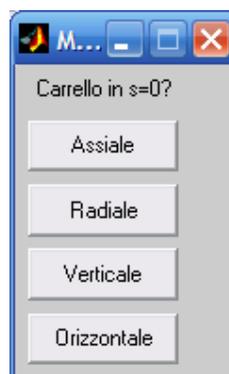
Nel caso in esame, i punti *bounded* sono i punti di estremità degli elementi in cui risulta suddiviso l'arco, quindi i punti di estremità dell'arco, e i punti in corrispondenza delle sconnessioni. In particolare in corrispondenza delle estremità dell'arco vanno definite delle *condizioni di vincolo*, mentre in corrispondenza delle sconnessioni vanno definite delle *condizioni di continuità* tra gli elementi adiacenti alla sconnessione in esame.

3.4.2.1 Condizioni di vincolo

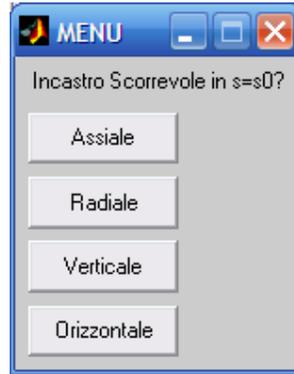
Imporre il vincolamento equivale ad applicare una particolare combinazione delle condizioni (3.2.3) e (3.2.4). La scelta dei vincoli si effettua attraverso i seguenti menu:



Se il tipo di vincolo scelto è il *carrello*, va specificato che tipo di carrello si intende impiegare, tale scelta è possibile mediante il seguente menu:

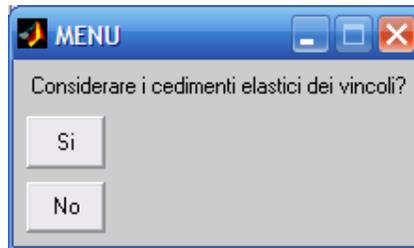


Se il tipo di vincolo scelto è l'*incastro scorrevole*, va specificato che tipo di incastro scorrevole si intende impiegare, tale scelta è possibile mediante il seguente menu:



Ovviamente il grado di vincolamento deve essere tale da rendere la struttura almeno isostatica, se la struttura risulta essere labile il codice chiede che le condizioni di vincolo vengano ridefinite.

Se il tipo di vincolamento scelto per l'arco non è un doppio incastro, si ha il seguente menu:

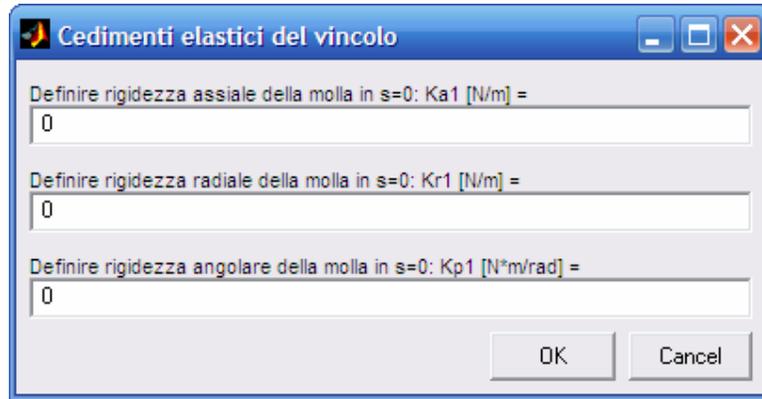


in questo modo è possibile considerare una rigidezza che si oppone allo spostamento dei gradi di libertà lasciati liberi dal vincolamento.

Se ad esempio si considera un estremo libero in corrispondenza di $\vartheta=0$, gli spostamenti $u_{1,j}, v_{1,j}, \varphi_{1,j}$ non sono vincolati, di conseguenza le equazioni della condizione al contorno sono:

$$\begin{aligned} \overline{N}_{0,j} &= N_{1,j} = EA_1 \left(\frac{1}{r_1} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{s(1)} u_{k,j} - \frac{v_{1,j}}{r_1} \right) \\ \overline{T}_{0,j} &= T_{1,j} = G\Lambda_1 \left(\frac{1}{r_1} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{s(1)} v_{k,j} + \frac{u_{1,j}}{r_1} + \varphi_{1,j} \right) \\ \overline{M}_{0,j} &= M_{1,j} = EI_1 \frac{1}{r_1} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{s(1)} \varphi_{k,j} \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Introducendo i cedimenti elastici, appare la seguente schermata:



che richiede l'inserimento della rigidità k_u alla traslazione assiale, della rigidità k_v alla traslazione radiale e della rigidità k_φ alla rotazione. In questo modo le equazioni della condizione al contorno risultano essere:

$$\begin{aligned}\overline{N}_{0,j} &= N_{1,j} = EA_1 \left(\frac{1}{r_1} \sum_{k=1}^N \mathcal{S}_{1k}^{s(1)} u_{k,j} - \frac{v_{1,j}}{r_1} \right) - k_u u_{1,j} \\ \overline{T}_{0,j} &= T_{1,j} = G\Lambda_1 \left(\frac{1}{r_1} \sum_{k=1}^N \mathcal{S}_{1k}^{s(1)} v_{k,j} + \frac{u_{1,j}}{r_1} + \varphi_{1,j} \right) - k_v v_{1,j} \\ \overline{M}_{0,j} &= M_{1,j} = EI_1 \frac{1}{r_1} \sum_{k=1}^N \mathcal{S}_{1k}^{s(1)} \varphi_{k,j} - k_\varphi \varphi_{1,j}\end{aligned}\quad (3.4.10)$$

Per completare le condizioni di vincolo vanno definite anche le forzanti di estremità e gli eventuali cedimenti anelastici, ma queste quantità vengono introdotte durante la definizione dei carichi agenti sulla struttura.

3.4.2.2 Condizioni di continuità

Una sconnessione rappresenta una sezione in cui è concentrata una discontinuità meccanica, e divide l'arco in due elementi distinti.

Avendo a che fare con più elementi che costituiscono l'arco, d'ora in avanti i vari gradi di libertà saranno caratterizzati non più da due pedici i, j come in precedenza (indicanti rispettivamente la posizione del punto nello spazio e l'istante temporale), ma da tre pedici i, k, j che indicano, rispettivamente, la posizione del punto all'interno dell'elemento, l'elemento dell'arco di cui fa parte il punto in questione e l'istante temporale.

È importante far notare che il punto in corrispondenza della sconnessione rappresenta un'estremità per entrambi gli elementi che convergono nella sconnessione in causa, quindi, pur essendoci in realtà un unico punto, computazionalmente in corrispondenza della sconnessione vengono considerati due punti. Infatti, considerando la h -esima sconnessione cui sono adiacenti gli elementi k e $k+1$ ed essendo N il numero di punti in cui tali elementi sono discretizzati, in tale sconnessione vengono a coincidere i punti individuati dagli angoli $\vartheta_{N,k}$ e $\vartheta_{1,k+1}$. Siccome si sta considerando una struttura piana sollecitata nel piano, ad ogni punto corrispondono 3 gradi di libertà, quindi per ogni sconnessione risulta necessaria la determinazione di 6 relazioni di continuità fra gli elementi adiacenti.

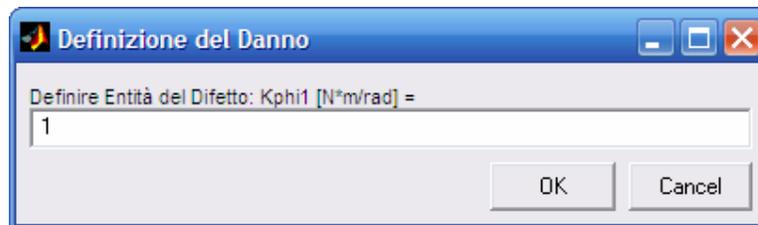
Per ogni sconnessione viene visualizzato il seguente menu:



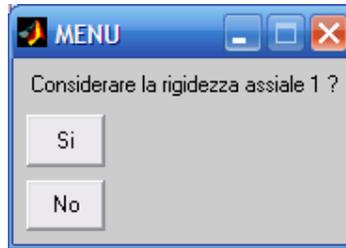
che permette di scegliere la tipologia di sconnessione.

Una sconnessione tipo *fessura* viene modellata come una cerniera con una certa rigidezza flessionale; infatti nell'ipotesi di fessura aperta, tale difetto comporta un abbattimento della rigidezza flessionale della sezione in cui tale imperfezione si viene a formare.

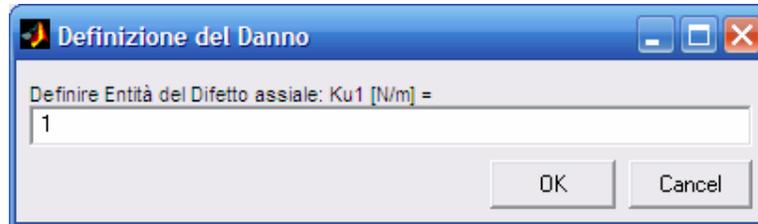
Il valore della rigidezza flessionale k_φ della molla rotazionale che modella la fessura va introdotto mediante la finestra:



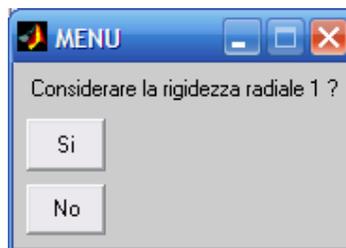
Inoltre, la fessura può comportare anche la riduzione delle rigidzze assiale e radiale; in tal caso è prevista la possibilità di modellare il difetto mediante una molla traslazionale assiale e una molla traslazionale radiale. Infatti, dopo aver dato in input il valore della rigidezza flessionale k_φ , appare, il seguente menu:



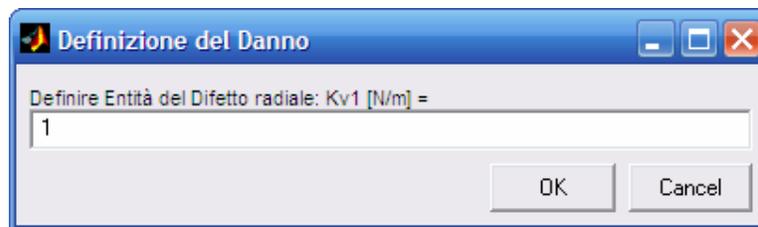
Se si intende considerare la rigidezza assiale k_u , appare la finestra che permette l'introduzione del suo valore:



Infine appare il menu:



Se si intende considerare la rigidezza radiale k_v , appare la finestra che permette l'introduzione del suo valore:



Se invece si decide di modellare la sconnessione come *cerniera* o come *continuità*, non è necessaria l'introduzione di ulteriori parametri.

Scegliere una determinata tipologia di sconnessione equivale ad imporre un determinato set di equazioni di condizioni di continuità fra gli elementi adiacenti alla sconnessione stessa.

Se si configura la sconnessione come una *fessura*, le corrispondenti equazioni di continuità tra elementi dipendono da come si è deciso di modellare tale fessura.

Considerando la sola rigidezza flessionale k_φ , le 6 condizioni di continuità nel generico istante t fra gli elementi k e $k+1$ convergenti nella h -esima sconnessione sono:

$$\begin{aligned}
 u(\vartheta_{N,k}, t) &= u(\vartheta_{1,k+1}, t) \\
 v(\vartheta_{N,k}, t) &= v(\vartheta_{1,k+1}, t) \\
 M(\vartheta_{N,k}, t) &= k_\varphi (\varphi(\vartheta_{1,k+1}, t) - \varphi(\vartheta_{N,k}, t)) \\
 N(\vartheta_{N,k}, t) - N(\vartheta_{1,k+1}, t) &= \overline{N}_h(t) \\
 T(\vartheta_{N,k}, t) - T(\vartheta_{1,k+1}, t) &= \overline{T}_h(t) \\
 M(\vartheta_{N,k}, t) - M(\vartheta_{1,k+1}, t) &= \overline{M}_h(t)
 \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

le quali, scritte mediante la tecnica GDQ per il generico istante temporale j -esimo, risultano essere:

$$\begin{aligned}
 u_{N,k,j} &= u_{1,k+1,j} \\
 v_{N,k,j} &= v_{1,k+1,j} \\
 M_{N,k,j} &= E_k I_{N,k} \frac{1}{r_{N,k}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{N,i,k}^{s(1)} \varphi_{i,k,j} = k_\varphi (\varphi_{1,k+1,j} - \varphi_{N,k,j}) \\
 N_{N,k,j} - N_{1,k+1,j} &= \\
 &= E_k A_{N,k} \left(\frac{1}{r_{N,k}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{N,i,k}^{s(1)} u_{i,k,j} - \frac{v_{N,k,j}}{r_{N,k}} \right) - E_{k+1} A_{1,k+1} \left(\frac{1}{r_{1,k+1}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{1,i,k}^{s(1)} u_{i,k+1,j} - \frac{v_{1,k+1,j}}{r_{1,k+1}} \right) = \overline{N}_{h,j} \\
 T_{N,k,j} - T_{1,k+1,j} &= \\
 &= G_k \Lambda_{N,k} \left(\frac{1}{r_{N,k}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{N,i,k}^{s(1)} v_{i,k,j} + \frac{u_{N,k,j}}{r_{N,k}} + \varphi_{N,k,j} \right) + \\
 &- G_{k+1} \Lambda_{1,k+1} \left(\frac{1}{r_{1,k+1}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{1,i,k}^{s(1)} v_{i,k+1,j} + \frac{u_{1,k+1,j}}{r_{1,k+1}} + \varphi_{1,k+1,j} \right) = \overline{T}_{h,j} \\
 M_{N,k,j} - M_{1,k+1,j} &= E_k I_{N,k} \frac{1}{r_{N,k}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{N,i,k}^{s(1)} \varphi_{i,k,j} - E_{k+1} I_{1,k+1} \frac{1}{r_{1,k+1}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{1,i,k}^{s(1)} \varphi_{i,k+1,j} = \overline{M}_{h,j}
 \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

Se si considerano anche la rigidezza assiale k_u e la rigidezza radiale k_v , oltre alla rigidezza flessionale k_φ , le 6 condizioni di continuità nel generico istante t fra gli elementi k e $k+1$ convergenti nella h -esima sconnessione sono:

$$\begin{aligned}
 N(\vartheta_{N,k}, t) &= k_u (u(\vartheta_{1,k+1}, t) - u(\vartheta_{N,k}, t)) \\
 T(\vartheta_{N,k}, t) &= k_v (v(\vartheta_{1,k+1}, t) - v(\vartheta_{N,k}, t)) \\
 M(\vartheta_{N,k}, t) &= k_\varphi (\varphi(\vartheta_{1,k+1}, t) - \varphi(\vartheta_{N,k}, t)) \\
 N(\vartheta_{N,k}, t) - N(\vartheta_{1,k+1}, t) &= \overline{N}_h(t) \\
 T(\vartheta_{N,k}, t) - T(\vartheta_{1,k+1}, t) &= \overline{T}_h(t) \\
 M(\vartheta_{N,k}, t) - M(\vartheta_{1,k+1}, t) &= \overline{M}_h(t)
 \end{aligned} \tag{3.4.13}$$

le quali, scritte mediante la tecnica GDQ per il generico istante temporale j -esimo, risultano essere:

$$\begin{aligned}
 N_{N,k,j} &= E_k A_{N,k} \left(\frac{1}{r_{N,k}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{N,i,k}^{s(1)} u_{i,k,j} - \frac{v_{N,k,j}}{r_{N,k}} \right) = k_u (u_{1,k+1,j} - u_{N,k,j}) \\
 T_{N,k,j} &= G_k \Lambda_{N,k} \left(\frac{1}{r_{N,k}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{N,i,k}^{s(1)} v_{i,k,j} + \frac{u_{N,k,j}}{r_{N,k}} + \varphi_{N,k,j} \right) = k_v (v_{1,k+1,j} - v_{N,k,j}) \\
 M_{N,k,j} &= E_k I_{N,k} \frac{1}{r_{N,k}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{N,i,k}^{s(1)} \varphi_{i,k,j} = k_\varphi (\varphi_{1,k+1,j} - \varphi_{N,k,j}) \\
 N_{N,k,j} - N_{1,k+1,j} &= \\
 &= E_k A_{N,k} \left(\frac{1}{r_{N,k}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{N,i,k}^{s(1)} u_{i,k,j} - \frac{v_{N,k,j}}{r_{N,k}} \right) - E_{k+1} A_{1,k+1} \left(\frac{1}{r_{1,k+1}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{1,i,k}^{s(1)} u_{i,k+1,j} - \frac{v_{1,k+1,j}}{r_{1,k+1}} \right) = \overline{N}_{h,j} \tag{3.4.14} \\
 T_{N,k,j} - T_{1,k+1,j} &= \\
 &= G_k \Lambda_{N,k} \left(\frac{1}{r_{N,k}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{N,i,k}^{s(1)} v_{i,k,j} + \frac{u_{N,k,j}}{r_{N,k}} + \varphi_{N,k,j} \right) + \\
 &\quad - G_{k+1} \Lambda_{1,k+1} \left(\frac{1}{r_{1,k+1}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{1,i,k}^{s(1)} v_{i,k+1,j} + \frac{u_{1,k+1,j}}{r_{1,k+1}} + \varphi_{1,k+1,j} \right) = \overline{T}_{h,j} \\
 M_{N,k,j} - M_{1,k+1,j} &= E_k I_{N,k} \frac{1}{r_{N,k}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{N,i,k}^{s(1)} \varphi_{i,k,j} - E_{k+1} I_{1,k+1} \frac{1}{r_{1,k+1}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{1,i,k}^{s(1)} \varphi_{i,k+1,j} = \overline{M}_{h,j}
 \end{aligned}$$

Se la sconnessione viene considerata come una *cerniera*, ovvero una sezione in corrispondenza della quale si annulla la rigidezza flessionale, le 6 condizioni di continuità nel generico istante t fra gli elementi k e $k+1$ convergenti nella h -esima sconnessione risultano essere:

$$\begin{aligned}
 u(\vartheta_{N,k}, t) &= u(\vartheta_{1,k+1}, t) \\
 v(\vartheta_{N,k}, t) &= v(\vartheta_{1,k+1}, t) \\
 M(\vartheta_{N,k}, t) &= 0 \\
 N(\vartheta_{N,k}, t) - N(\vartheta_{1,k+1}, t) &= \overline{N}_h(t) \\
 T(\vartheta_{N,k}, t) - T(\vartheta_{1,k+1}, t) &= \overline{T}_h(t) \\
 M(\vartheta_{N,k}, t) - M(\vartheta_{1,k+1}, t) &= \overline{M}_h(t)
 \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

le quali, scritte mediante la tecnica GDQ per il generico istante temporale j -esimo, risultano essere:

$$\begin{aligned}
 u_{N,k,j} &= u_{1,k+1,j} \\
 v_{N,k,j} &= v_{1,k+1,j} \\
 M_{N,k,j} &= E_k I_{N,k} \frac{1}{r_{N,k}} \sum_{i=1}^N \zeta_{N,i,k}^{s(1)} \varphi_{i,k,j} = 0 \\
 N_{N,k,j} - N_{1,k+1,j} &= \\
 &= E_k A_{N,k} \left(\frac{1}{r_{N,k}} \sum_{i=1}^N \zeta_{N,i,k}^{s(1)} u_{i,k,j} - \frac{v_{N,k,j}}{r_{N,k}} \right) - E_{k+1} A_{1,k+1} \left(\frac{1}{r_{1,k+1}} \sum_{i=1}^N \zeta_{1,i,k}^{s(1)} u_{i,k+1,j} - \frac{v_{1,k+1,j}}{r_{1,k+1}} \right) = \overline{N}_{h,j} \\
 T_{N,k,j} - T_{1,k+1,j} &= \\
 &= G_k \Lambda_{N,k} \left(\frac{1}{r_{N,k}} \sum_{i=1}^N \zeta_{N,i,k}^{s(1)} v_{i,k,j} + \frac{u_{N,k,j}}{r_{N,k}} + \varphi_{N,k,j} \right) + \\
 &\quad - G_{k+1} \Lambda_{N,k+1} \left(\frac{1}{r_{1,k+1}} \sum_{i=1}^N \zeta_{1,i,k}^{s(1)} v_{i,k+1,j} + \frac{u_{1,k+1,j}}{r_{1,k+1}} + \varphi_{1,k+1,j} \right) = \overline{T}_{h,j} \\
 M_{N,k,j} - M_{1,k+1,j} &= E_k I_{N,k} \frac{1}{r_{N,k}} \sum_{i=1}^N \zeta_{N,i,k}^{s(1)} \varphi_{i,k,j} - E_{k+1} I_{1,k+1} \frac{1}{r_{1,k+1}} \sum_{i=1}^N \zeta_{1,i,k}^{s(1)} \varphi_{i,k+1,j} = \overline{M}_{h,j}
 \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

Infine, se la sconnessione viene considerata come una *continuità materiale*, le 6 condizioni di continuità nel generico istante t fra gli elementi k e $k+1$ convergenti nella h -esima sconnessione risultano essere:

$$\begin{aligned}
 u(\vartheta_{N,k}, t) &= u(\vartheta_{1,k+1}, t) \\
 v(\vartheta_{N,k}, t) &= v(\vartheta_{1,k+1}, t) \\
 \varphi(\vartheta_{N,k}, t) &= \varphi(\vartheta_{1,k+1}, t) \\
 N(\vartheta_{N,k}, t) - N(\vartheta_{1,k+1}, t) &= \overline{N}_h(t) \\
 T(\vartheta_{N,k}, t) - T(\vartheta_{1,k+1}, t) &= \overline{T}_h(t) \\
 M(\vartheta_{N,k}, t) - M(\vartheta_{1,k+1}, t) &= \overline{M}_h(t)
 \end{aligned} \tag{3.4.17}$$

le quali, scritte mediante la tecnica GDQ per il generico istante temporale j -esimo, risultano essere:

$$\begin{aligned}
 u_{N,k,j} &= u_{1,k+1,j} \\
 v_{N,k,j} &= v_{1,k+1,j} \\
 \varphi_{N,k,j} &= \varphi_{1,k+1,j} \\
 N_{N,k,j} - N_{1,k+1,j} &= \\
 &= E_k A_{N,k} \left(\frac{1}{r_{N,k}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{N,i,k}^{s(1)} u_{i,k,j} - \frac{v_{N,k,j}}{r_{N,k}} \right) - E_{k+1} A_{1,k+1} \left(\frac{1}{r_{1,k+1}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{1,i,k}^{s(1)} u_{i,k+1,j} - \frac{v_{1,k+1,j}}{r_{1,k+1}} \right) = \overline{N}_{h,j} \\
 T_{N,k,j} - T_{1,k+1,j} &= \\
 &= G_k \Lambda_{N,k} \left(\frac{1}{r_{N,k}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{N,i,k}^{s(1)} v_{i,k,j} + \frac{u_{N,k,j}}{r_{N,k}} + \varphi_{N,k,j} \right) + \\
 &\quad - G_{k+1} \Lambda_{N,k+1} \left(\frac{1}{r_{1,k+1}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{1,i,k}^{s(1)} v_{i,k+1,j} + \frac{u_{1,k+1,j}}{r_{1,k+1}} + \varphi_{1,k+1,j} \right) = \overline{T}_{h,j} \\
 M_{N,k,j} - M_{1,k+1,j} &= E_k I_{N,k} \frac{1}{r_{N,k}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{N,i,k}^{s(1)} \varphi_{i,k,j} - E_{k+1} I_{1,k+1} \frac{1}{r_{1,k+1}} \sum_{i=1}^N \varsigma_{1,i,k}^{s(1)} \varphi_{i,k+1,j} = \overline{M}_{h,j}
 \end{aligned} \tag{3.4.18}$$

Nelle equazioni (3.4.12), (3.4.14), (3.4.16) , (3.4.18) i termini $\overline{N}_{h,j}, \overline{T}_{h,j}, \overline{M}_{h,j}$ sono rispettivamente la forza assiale, la forza radiale e la coppia agenti nella h -esima sconnessione all'istante j -esimo. Tali carichi verranno introdotti durante la definizione dei carichi agenti sulla struttura.

3.4.3 Carichi agenti sulla struttura

Le azioni esterne che il programma permette di considerare possono essere di diverse tipologie:

- *forze per unità di lunghezza;*
- *forze e momenti concentrati;*
- *cedimenti vincolari anelastici.*

Di queste azioni il programma in un primo momento richiede solo l'inserimento dell'intensità all'istante iniziale per poter effettuare l'analisi statica; in seguito, durante la fase di introduzione dei dati per l'analisi dinamica, sarà possibile definire l'andamento nel tempo di tali azioni; nel corso di tale fase ci sarà anche la possibilità di considerare l'azione sismica.

3.4.3.1 Azioni distribuite

Le forze per unità di agenti sull'intero arco che il programma permette di considerare sono le seguenti:

- *carico variabile in direzione verticale*, che rappresenta il peso del materiale di riempimento; l'andamento di tale carico è illustrato in figura 3.2. La geometria di tale carico è fissata, va solo inserita l'intensità $Q_{v_v} [N/m^2]$.

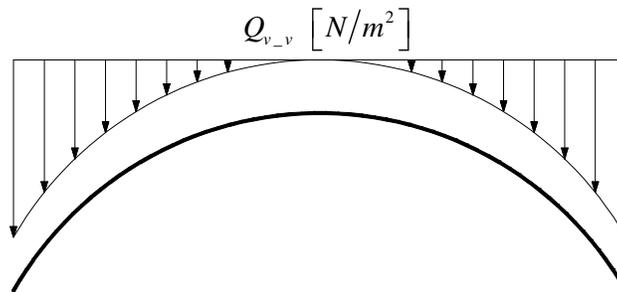


Figura 3.2. Carico variabile in direzione verticale

- *carico triangolare esterno in direzione verticale*, l'andamento di tale carico è illustrato in figura 3.3; per tale carico è necessario introdurre l'intensità $Q_{vl_1} [N/m]$ in corrispondenza dell'estremità destra dell'arco e l'intensità $Q_{vl_2} [N/m]$ in corrispondenza dell'estremità sinistra dell'arco.

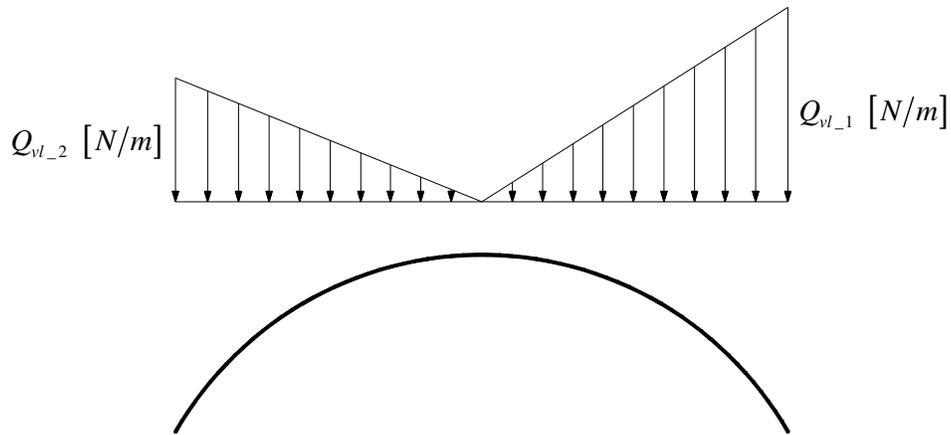


Figura 3.3. Carico triangolare esterno in direzione verticale

- *carico triangolare interno in direzione verticale*, l'andamento di tale carico è illustrato in figura 3.4; per tale carico è necessario introdurre l'intensità Q_{vl_3} [N/m] in corrispondenza della sezione di sommità.

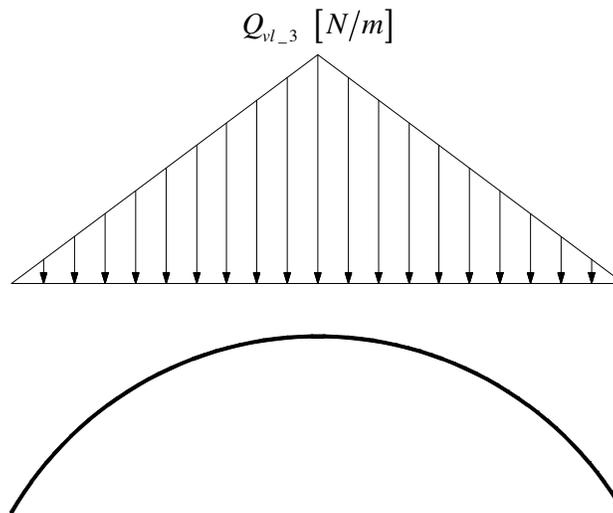


Figura 3.4. Carico triangolare interno in direzione verticale

- *carico triangolare in direzione verticale agente su tutta la campata*, l'andamento di tale carico è illustrato in figura 3.5; per tale carico è necessario introdurre l'intensità Q_{vl_4} [N/m] in corrispondenza dell'estremità destra dell'arco.

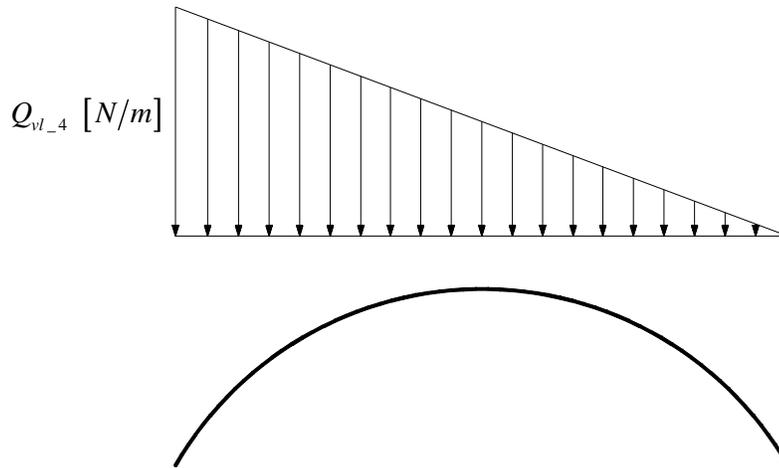


Figura 3.5. Carico triangolare in direzione verticale agente su tutta la campata

- *carico variabile in direzione orizzontale*, l'andamento di tale carico è illustrato in figura 3.6. La geometria di tale carico è fissata, va solo inserita l'intensità Q_{h_v} $[N/m^2]$.

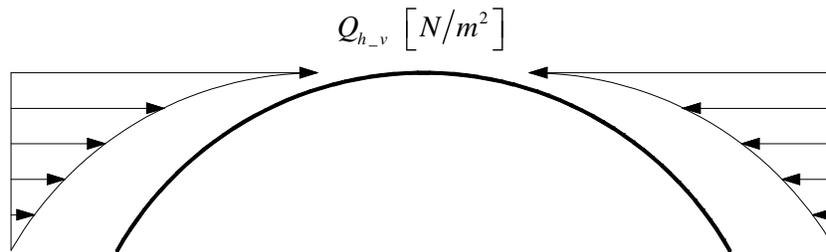


Figura 3.6. Carico variabile in direzione orizzontale

- *carico tipo pressione idrostatica destra e sinistra*, l'andamento di tale carico è illustrato in figura 3.7, per tale carico è necessario introdurre l'intensità Q_{hl_1} $[N/m]$ in corrispondenza dell'estremità destra dell'arco e l'intensità Q_{hl_2} $[N/m]$ in corrispondenza dell'estremità sinistra dell'arco.

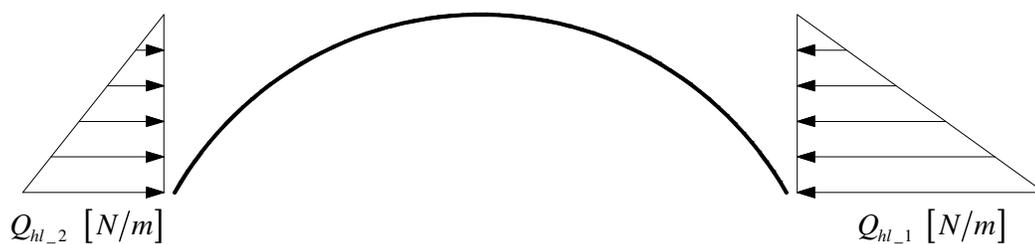


Figura 3.7. Carico tipo pressione idrostatica

- *carico orizzontale costante*, l'andamento di tale carico è illustrato in figura 3.8, per tale carico è necessario introdurre l'intensità Q_{h1} [N/m] del carico agente sulla parte destra e l'intensità Q_{h2} [N/m] del carico agente sulla parte sinistra.

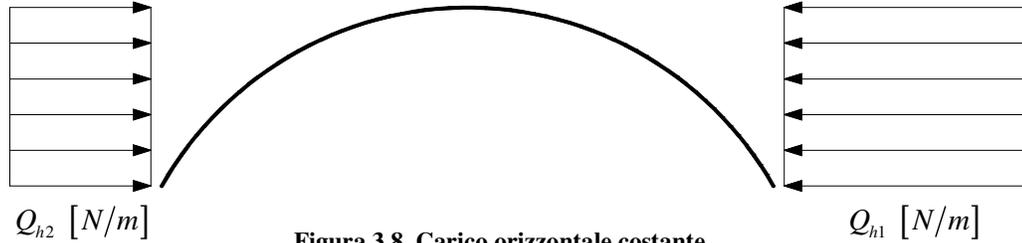


Figura 3.8. Carico orizzontale costante

I valori delle intensità Q_{v_v} , Q_{vl_1} , Q_{vl_2} , Q_{vl_3} , Q_{vl_4} , Q_{h_v} , Q_{hl_1} , Q_{hl_2} , Q_{h1} , Q_{h2} vengono dati in input all'algoritmo mediante la seguente schermata:

Definizione dei carichi

Definire carico variabile in direzione verticale: Q_{v_v} [N/m²] =
0

Definire carico triangolare (destra esterno) in direzione verticale: Q_{vl_1} [N/m] =
0

Definire carico triangolare (sinistro esterno) in direzione verticale: Q_{vl_2} [N/m] =
0

Definire carico triangolare (interno) in direzione verticale: Q_{vl_3} [N/m] =
0

Definire carico triangolare (su tutta la campata) in direzione verticale: Q_{vl_4} [N/m] =
0

Definire carico variabile in direzione orizzontale: Q_{h_v} [N/m²] =
0

Definire carico tipo pressione idrostatica (destra) in direzione orizzontale: Q_{hl_1} [N/m] =
0

Definire carico tipo pressione idrostatica (sinistra) in direzione orizzontale: Q_{hl_2} [N/m] =
0

Definire carico costante (destra) in direzione orizzontale: Q_{h1} [N/m] =
0

Definire carico costante (sinistra) in direzione orizzontale: Q_{h2} [N/m] =
0

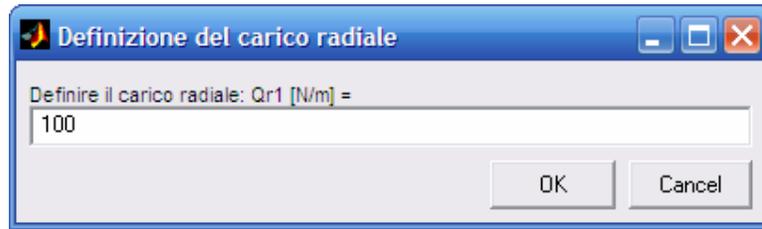
OK Cancel

Oltre ai carichi distribuiti agenti sull'intero arco, è possibile introdurre altre tipologie di carichi per unità di lunghezza che agiscono con intensità diverse sui vari elementi. Queste azioni distribuite sono le seguenti:

- *carico radiale $Q_{r,k}$ agente sul k -esimo elemento*; per ogni elemento costituente l'arco oggetto dell'analisi, si ha il seguente menu:



Se si intende considerare il carico $Q_{r,k}$ in corrispondenza del k -esimo elemento, la sua intensità viene data in input mediante la finestra:



In questo modo è possibile introdurre intensità diverse del carico radiale in corrispondenza dei diversi elementi, come illustrato in figura 3.9.

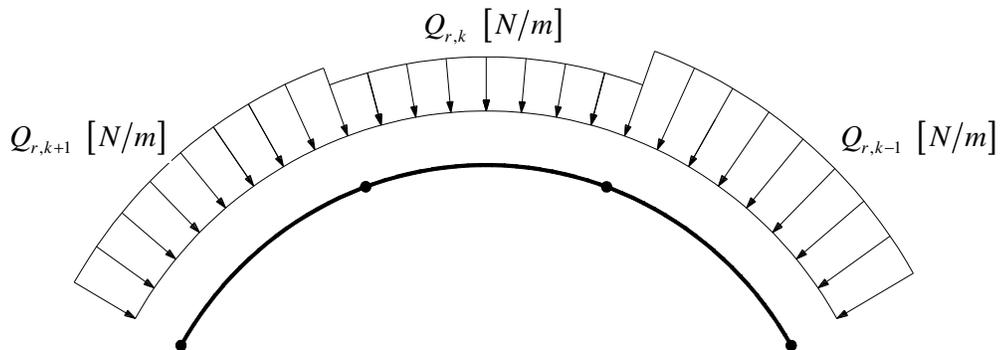
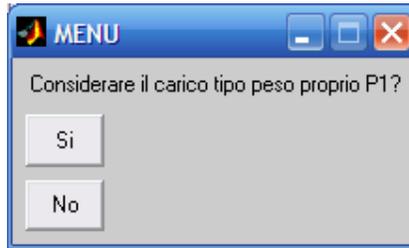
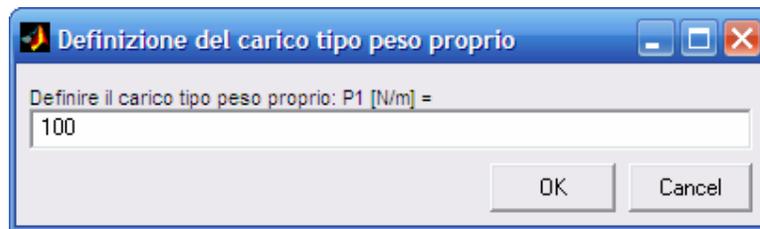


Figura 3.9. Carichi radiali agenti sui vari elementi

- carico tipo peso proprio $Q_{v,k}$ agente sul k -esimo elemento; per ogni elemento costituente l'arco oggetto dell'analisi, si ha il seguente menu:



Se si intende considerare il carico $Q_{v,k}$ in corrispondenza del k -esimo elemento, la sua intensità viene data in input mediante la finestra:



In questo modo è possibile introdurre intensità diverse del carico tipo peso proprio in corrispondenza dei diversi elementi, come illustrato in figura 3.10.

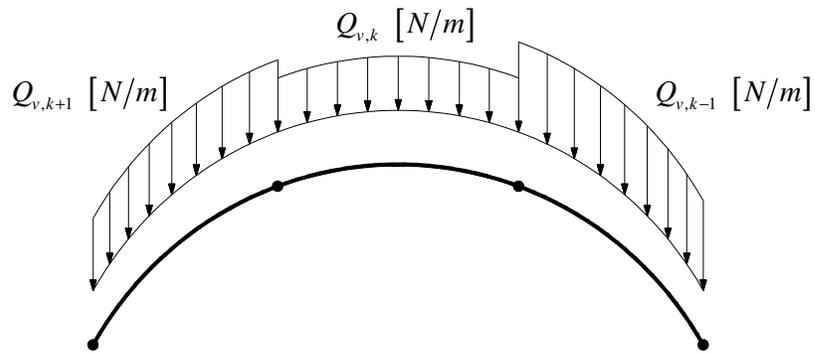
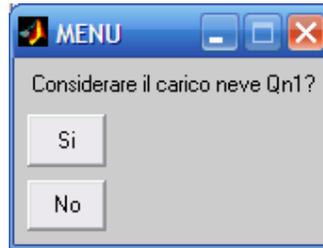
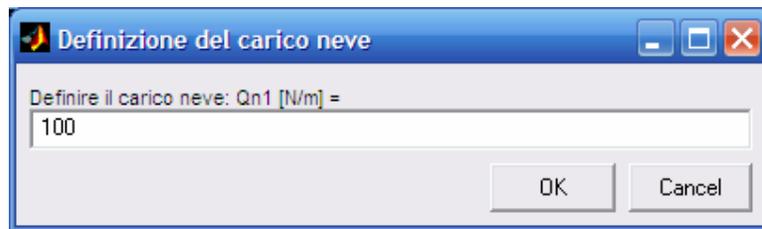


Figura 3.10. Carichi tipo peso proprio agenti sui vari elementi

- carico tipo neve $Q_{v_n,k}$ agente sul k -esimo elemento; per ogni elemento costituente l'arco oggetto dell'analisi, si ha il seguente menu:



Se si intende considerare il carico $Q_{v_n,k}$ in corrispondenza del k -esimo elemento, la sua intensità viene data in input mediante la finestra:



In questo modo è possibile introdurre intensità diverse del carico tipo neve in corrispondenza dei diversi elementi, come illustrato in figura 3.11.

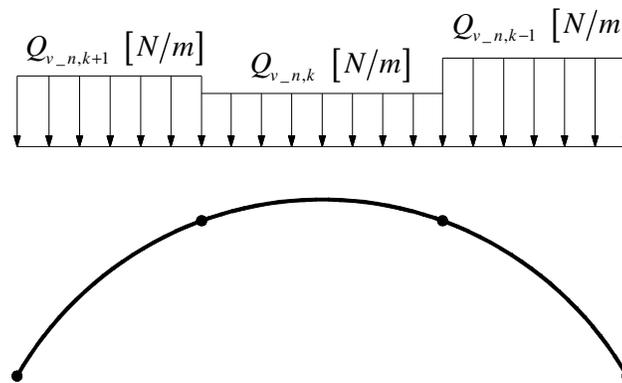
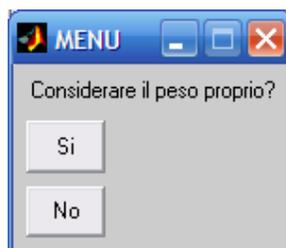


Figura 3.11. Carichi tipo neve agenti sui vari elementi

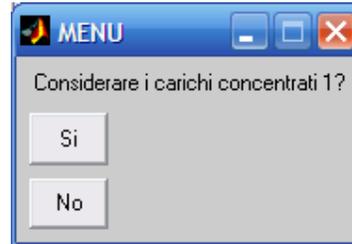
Infine, è possibile considerare o meno il peso proprio dell'arco; tale scelta va effettuata nel seguente menu:



3.4.3.2 Forze e momenti concentrati

Le azioni concentrate possono essere applicate alle estremità degli elementi in cui è stato suddiviso l'arco, ovvero in corrispondenza delle sconessioni oppure in corrispondenza dei punti d'estremità dell'arco.

In corrispondenza di ogni sconessione appare il menu:



che permette di considerare le azioni concentrate nella generica sconessione h -esima. Se si intende introdurre forze concentrate, si ha la seguente finestra:

 A dialog box titled 'Definizione dei carichi concentrati'. It contains five input fields:

- Definire carico concentrato in direzione radiale: F_r [N] = 0
- Definire carico concentrato in direzione assiale: F_a [N] = 0
- Definire carico concentrato in direzione verticale: F_v [N] = 100
- Definire carico concentrato in direzione orizzontale: F_o [N] = 0
- Definire carico concentrato M [N*m] = 0

 At the bottom right are 'OK' and 'Cancel' buttons.

per l'inserimento delle intensità della forza radiale $F_{r,h}$ [N], della forza assiale $F_{a,h}$ [N], della forza verticale $F_{v,h}$ [N], della forza orizzontale $F_{o,h}$ [N] e del momento M_h [Nm]. I versi positivi di tali azioni sono rappresentati in figura 3.12. Introducendo i valori delle varie intensità e scomponendo le forze verticale e orizzontale nelle rispettive componenti radiale e assiale, si ottengono le quantità $\overline{N}_{h,1}, \overline{T}_{h,1}, \overline{M}_{h,1}$ da inserire nelle equazioni (3.4.12), (3.4.14), (3.4.16), (3.4.18); in questo modo risulta completata la definizione delle condizione di continuità tra elementi adiacenti all'istante iniziale.

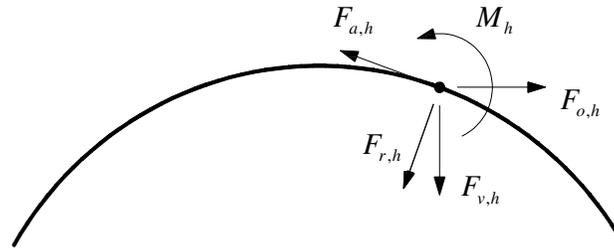


Figura 3.12. Azioni concentrate in corrispondenza della generica sconnessione

I carichi concentrati in corrispondenza delle sezioni terminali dell'arco agiscono nei punti di estremità della struttura, ovvero nei punti vincolati. Mentre nelle sconnessioni è sempre possibile inserire tutte le tipologie di azione concentrata agente nel piano, nei punti vincolati si possono considerare solo quei carichi che agiscono in corrispondenza di un grado di libertà non vincolato. Quindi, ad esempio, se un'estremità risulta incastrata, non è possibile definire alcun tipo di carico agente in quel punto. Se invece il punto di estremità risulta soggetto ad un qualsiasi altro tipo di vincolamento, si ha una finestra che richiede in input l'intensità delle forze d'estremità che è possibile considerare, inoltre, se la rotazione d'estremità non è impedita dal vincolamento, si ha anche una finestra che richiede in input l'intensità del momento concentrato d'estremità.

Se ad esempio si considera un'estremo libero in corrispondenza dell'inizio dell'arco, si possono considerare la forza radiale $F_{r,1}$ [N], la forza assiale $F_{a,1}$ [N], la forza verticale $F_{v,1}$ [N] e la forza orizzontale $F_{o,1}$ [N], l'introduzione delle cui intensità è possibile mediante la seguente schermata:

Forze concentrate

Definire carico concentrato in direzione radiale in s=0: Fr1 [N] =
0

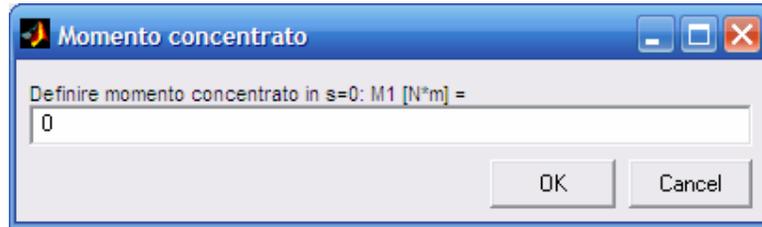
Definire carico concentrato in direzione assiale in s=0: Fa1 [N] =
0

Definire carico concentrato in direzione verticale in s=0: Fv1 [N] =
0

Definire carico concentrato in direzione orizzontale in s=0: Fo1 [N] =
0

OK Cancel

inoltre è anche possibile considerare un momento d'estremità M_1 [Nm] la cui intensità va introdotta nella seguente finestra:



I versi positivi delle azioni di estremità sono rappresentati in figura 3.13. Introducendo i valori delle varie intensità e scomponendo le forze verticale e orizzontale nelle rispettive componenti radiale e assiale, si ottengono le quantità $\overline{N}_{0,1}, \overline{T}_{0,1}, \overline{M}_{0,1}$ e $\overline{N}_{l,1}, \overline{T}_{l,1}, \overline{M}_{l,1}$ da inserire nelle equazioni (3.2.3) e (3.2.4) per la definizione delle condizioni al contorno all'istante iniziale.

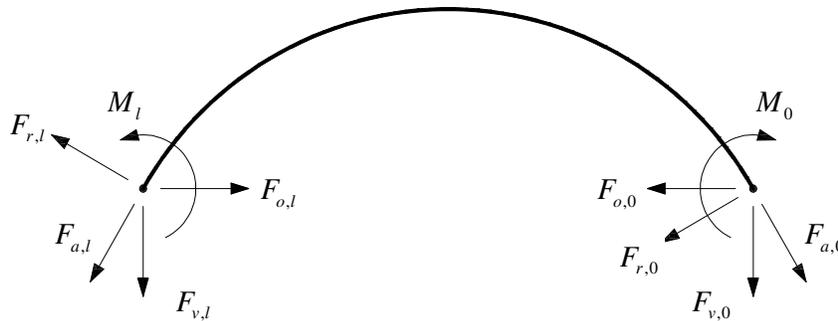
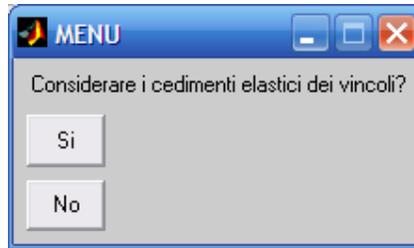


Figura 3.13. Azioni concentrate d'estremità

3.4.3.3 Cedimenti vincolari anelastici

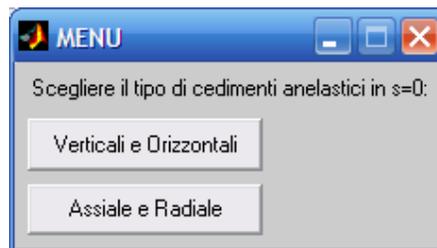
I cedimenti vincolari anelastici sono degli spostamenti imposti in corrispondenza dei gradi di libertà vincolati. Tali cedimenti comportano l'insorgere di uno stato tensionale all'interno della struttura in caso questa risulti iperstatica, mentre in una struttura isostatica gli eventuali cedimenti vincolari anelastici non provocano nessuno stato tensionale aggiuntivo.

La scelta di considerare eventuali cedimenti anelastici è possibile grazie ad un apposito menu:

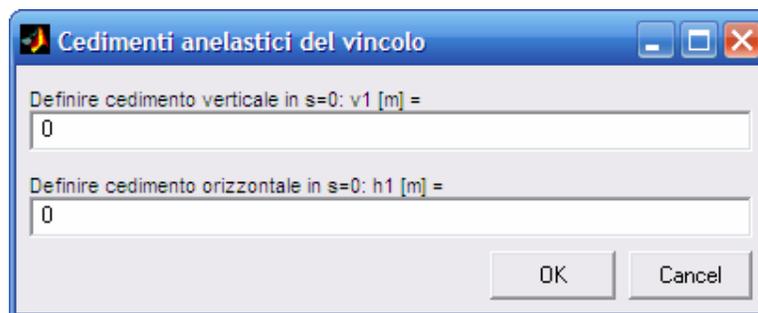


Se si sceglie di considerare i cedimenti anelastici, la finestra che compare in seguito permette l'introduzione del valore di tali cedimenti. Come specificato in precedenza, i cedimenti anelastici riguardano i gradi di libertà vincolati, di conseguenza la configurazione della finestra per l'inserimento di tali cedimenti dipende dal tipo di vincolamento adottato.

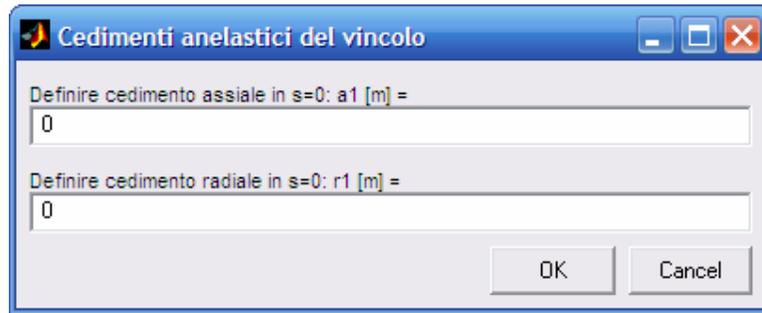
Ad esempio, se si sceglie di vincolare l'arco con un appoggio nell'estremità iniziale e un incastro scorrevole orizzontale nell'estremità finale, il vincolamento si oppone a tutti gli spostamenti della sezione iniziale e allo spostamento verticale e alla rotazione della sezione finale. Di conseguenza, volendo considerare i cedimenti anelastici dei vincoli, appare inizialmente la schermata per la scelta del tipo di cedimenti nel punto iniziale:



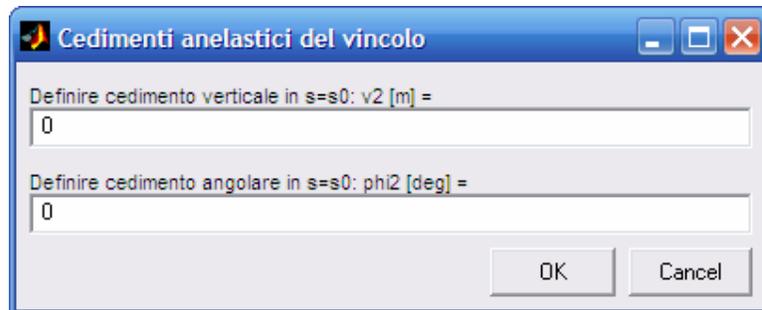
Scegliendo cedimenti anelastici verticali e orizzontali compare la seguente finestra per l'inserimento del valore di tali cedimenti:



Scegliendo cedimenti anelastici assiali e radiali compare la seguente finestra per l'inserimento del valore di tali cedimenti:



Inseriti i cedimenti anelastici della sezione iniziale, il programma richiede in input il valore dei cedimenti anelastici della sezione finale. Nel caso in esame, il vincolamento impedisce la traslazione verticale e la rotazione del punto finale, quindi i cedimenti anelastici che si possono considerare riguarderanno questi gradi di libertà; di conseguenza la finestra per l'inserimento del valore di tali cedimenti anelastici è la seguente:

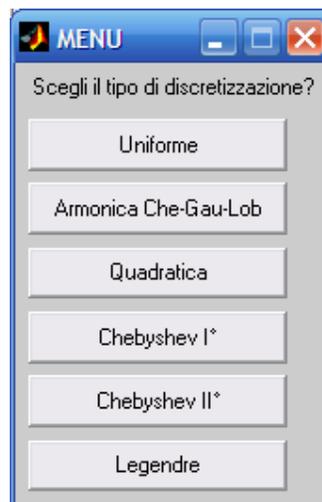


I cedimenti anelastici sono quindi degli spostamenti impressi alle estremità vincolate, scomponendo gli eventuali cedimenti anelastici verticale e orizzontale nelle rispettive componenti radiale e assiale, si ottengono le quantità $\overline{u_{0,1}}, \overline{v_{0,1}}, \overline{\varphi_{0,1}}$ e $\overline{u_{l,1}}, \overline{v_{l,1}}, \overline{\varphi_{l,1}}$ da inserire nelle equazioni (3.2.3) e (3.2.4) per la definizione delle condizioni al contorno all'istante iniziale; in questo modo risulta completata la definizione delle condizione di vincolo all'istante iniziale.

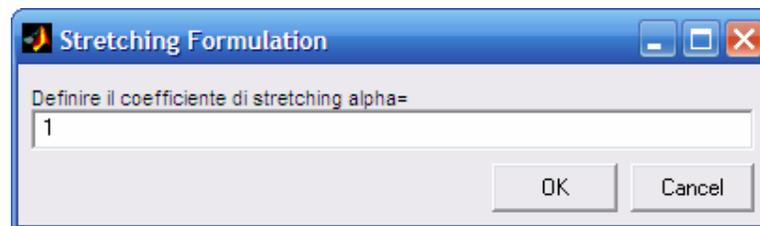
3.4.4 Discretizzazione del modello

Al termine delle tre fasi descritte in precedenza, ovvero la caratterizzazione geometrico-meccanica dell'arco, l'introduzione delle condizioni al contorno e la definizione dei carichi agenti, il modello risulta completo. Si può quindi procedere con la discretizzazione del dominio, così da poter in seguito applicare le relazioni riferite nel paragrafo 3.2 per la risoluzione del problema del moto forzato.

In precedenza era già stato definito il numero di punti N in cui si vuole discretizzare il generico elemento. Noto il numero di punti, è necessario decidere la tipologia di discretizzazione fra quelle descritte nel paragrafo 1.2.5. La scelta si effettua con il seguente menu:

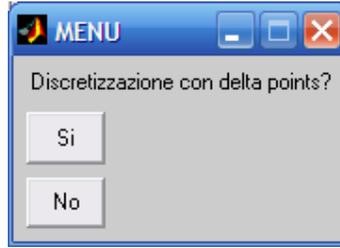


inoltre se si vuole infittire i punti in corrispondenza dei nodi, si può fare riferimento alla *stretching formulation*; in questo caso nella schermata successiva:

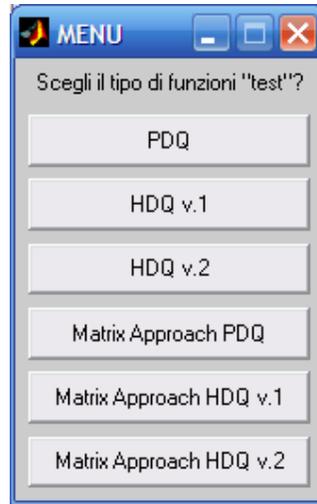


va inserito un valore del parametro α minore di 1.

Il programma prevede anche la possibilità di impiegare la tecnica dei δ -Sampling Points, l'utilizzo di tale tecnica è consentito dal seguente menu:



Infine viene richiesto di scegliere il tipo di funzioni di base, o funzioni test, da impiegare per l'approssimazione della soluzione; tale scelta è possibile mediante il seguente menu:



Una volta inserita questa informazione, l'algoritmo è in possesso di tutti i dati necessari alle operazioni di discretizzazione. In base al tipo di discretizzazione scelta, il programma discretizza in N punti tutti gli elementi in cui è stato suddiviso l'arco.

In seguito, per ogni k -esimo elemento, il programma calcola la matrice dei coefficienti di ponderazione per le derivate di primo e secondo ordine in ϑ :

$$\mathfrak{S}_k^{s(1)} = \begin{bmatrix} \mathfrak{S}_{11,k}^{s(1)} & \dots & \mathfrak{S}_{1i,k}^{s(1)} & \dots & \mathfrak{S}_{1N,k}^{s(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{S}_{i1,k}^{s(1)} & \dots & \mathfrak{S}_{ii,k}^{s(1)} & \dots & \mathfrak{S}_{iN,k}^{s(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{S}_{N1,k}^{s(1)} & \dots & \mathfrak{S}_{Ni,k}^{s(1)} & \dots & \mathfrak{S}_{NN,k}^{s(1)} \end{bmatrix} \quad \mathfrak{S}_k^{s(2)} = \begin{bmatrix} \mathfrak{S}_{11,k}^{s(2)} & \dots & \mathfrak{S}_{1i,k}^{s(2)} & \dots & \mathfrak{S}_{1N,k}^{s(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{S}_{i1,k}^{s(2)} & \dots & \mathfrak{S}_{ii,k}^{s(2)} & \dots & \mathfrak{S}_{iN,k}^{s(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{S}_{N1,k}^{s(2)} & \dots & \mathfrak{S}_{Ni,k}^{s(2)} & \dots & \mathfrak{S}_{NN,k}^{s(2)} \end{bmatrix} \quad (3.4.19)$$

Determinate le matrici $\zeta_k^{(1)}$ e $\zeta_k^{(2)}$ per tutti gli n_el elementi che concorrono a costituire l'arco, si possono assemblare la matrice $\zeta^{(1)}$ e $\zeta^{(2)}$:

$$\zeta^{s(1)} = \begin{bmatrix} \zeta_1^{s(1)} & \dots & \zeta_k^{s(1)} & \dots & \zeta_{n_el}^{s(1)} \end{bmatrix} \quad (3.4.20)$$

$$\zeta^{s(2)} = \begin{bmatrix} \zeta_1^{s(2)} & \dots & \zeta_k^{s(2)} & \dots & \zeta_{n_el}^{s(2)} \end{bmatrix} \quad (3.4.21)$$

L'operazione successiva è il calcolo del *raggio di curvatura* $r_{i,k}$, dell'*area* $A_{i,k}$ e del *momento d'inerzia* $I_{i,k}$ in corrispondenza di ogni *i-esimo* punto di ogni *k-esimo* elemento; determinate tali quantità, mediante la matrice $\zeta_k^{(1)}$ se ne calcolano le derivate prime.

Infine, noti i carichi distribuiti agenti sui vari elementi, si calcolano i valori di $p_{i,k,1}$ e $q_{i,k,1}$ per ogni *i-esimo* punto di ogni *k-esimo* elemento ($m_{i,k,1}$ è sempre nullo).

3.4.5 Analisi statica e determinazione delle condizioni iniziali di spostamento

Essendo state determinate le condizioni al contorno ed avendo individuato i punti in cui scrivere le equazioni di campo (3.2.5) all'istante iniziale, è possibile svolgere l'analisi statica della struttura per la determinazione degli spostamenti iniziali. Il procedimento seguito dall'algoritmo è quello descritto nel paragrafo 3.2.2, tuttavia è necessario specificare come viene riordinato il vettore soluzione \mathbf{u}_1 in seguito alla divisione tra gradi di libertà *bounded* e *domain* in caso di discretizzazione dell'arco in n_{el} elementi:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_1^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{b,1}^T & \mathbf{u}_{d,1}^T \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} u_{1,1}, u_{N,1}, v_{1,1}, v_{N,1}, \varphi_{1,1}, \varphi_{N,1}, \dots, u_{1,n_{el}}, u_{N,n_{el}}, v_{1,n_{el}}, v_{N,n_{el}}, \varphi_{1,n_{el}}, \varphi_{N,n_{el}} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{u}_{b,1}^T &= \begin{bmatrix} u_{1,1}, u_{N,1}, v_{1,1}, v_{N,1}, \varphi_{1,1}, \varphi_{N,1}, \dots, u_{1,n_{el}}, u_{N,n_{el}}, v_{1,n_{el}}, v_{N,n_{el}}, \varphi_{1,n_{el}}, \varphi_{N,n_{el}} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{u}_{d,1}^T &= \begin{bmatrix} u_{2,1}, \dots, u_{N-1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{N-1,1}, \varphi_{2,1}, \dots, \varphi_{N-1,1}, \dots \\ \dots, u_{2,n_{el}}, \dots, u_{N-1,n_{el}}, v_{2,n_{el}}, \dots, v_{N-1,n_{el}}, \varphi_{2,n_{el}}, \dots, \varphi_{N-1,n_{el}} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.4.22}$$

La risoluzione del sistema lineare risultante dalla scrittura delle equazioni di campo e delle equazioni delle condizioni al contorno permette di determinare il vettore $\mathbf{u}_{d,1}$ degli spostamenti dei punti *domain* all'istante iniziale. Tale vettore rappresenta una delle condizioni iniziali necessarie alla risoluzione del sistema che governa il moto forzato

3.4.6 Analisi dinamica

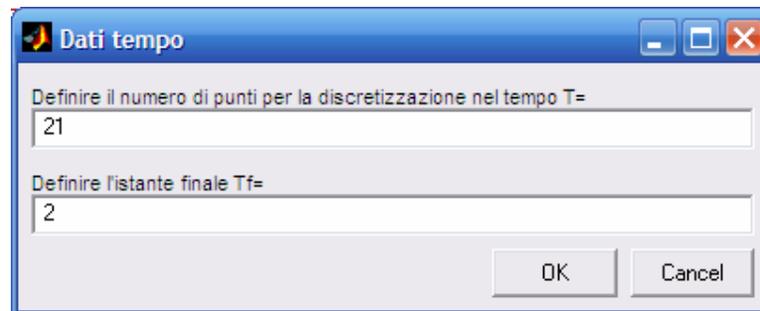
3.4.6.1 Introduzione dei dati

L'analisi statica svolta in precedenza ha permesso di determinare lo spostamento dei punti interni all'istante iniziale. Per quanto riguarda le velocità di tali punti all'istante iniziale, queste sono assunte tutte nulle. In questo modo sono note le condizioni iniziali, rappresentate dai vettori $\mathbf{u}_{d,1}$ e $\dot{\mathbf{u}}_{d,1}$.

Innanzitutto è necessario specificare se si intende fare l'analisi del *moto libero* o del *moto forzato* mediante il seguente menu:



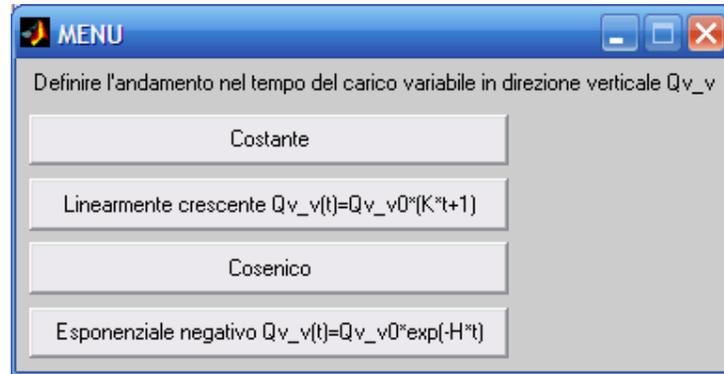
dopodiché è necessario definire il tempo di analisi; si ha la seguente schermata per l'input dei dati:



che richiede l'inserimento del tempo d'analisi T_{tot} [sec] e il numero di punti T per la discretizzazione di ogni intervallo in cui verrà diviso il tempo T_{tot} .

Se si effettua l'analisi del moto libero, la struttura non è soggetta a carichi, ma solo ad una deformazione iniziale $\mathbf{u}_{d,1}$; l'arco in esame tende allora a tornare nella condizione indeformata e di conseguenza si hanno delle *vibrazioni libere*. Non essendoci smorzamento, l'ampiezza di tali vibrazioni non decresce nel tempo.

Se si effettua l'analisi del moto forzato, è necessario definire l'andamento nel tempo delle forzanti. Per tutte le forzanti che sono state applicate alla struttura si ha la seguente schermata (nell'esempio la schermata è riferita al carico variabile in direzione verticale):



Se si considera un andamento *costante*, la generica forzante avrà un'intensità nel tempo costante ed uguale all'intensità iniziale.

$$f(t) = cost = f_0 \quad (3.4.23)$$

Se si considera un andamento *linearmente crescente*, l'andamento della generica forzante $f(t)$ nel tempo risulta definito come:

$$f(t) = f_0(Kt + 1) \quad (3.4.24)$$

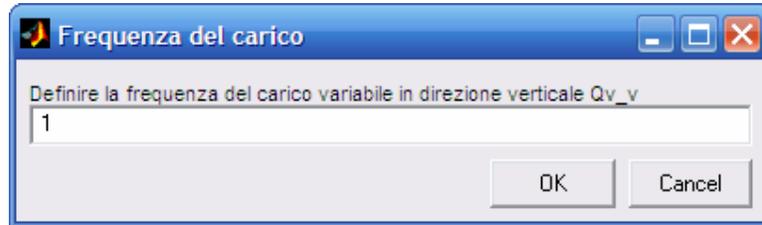
dove f_0 è l'intensità della forzante all'istante iniziale, mentre la costante K va inserita mediante la finestra:



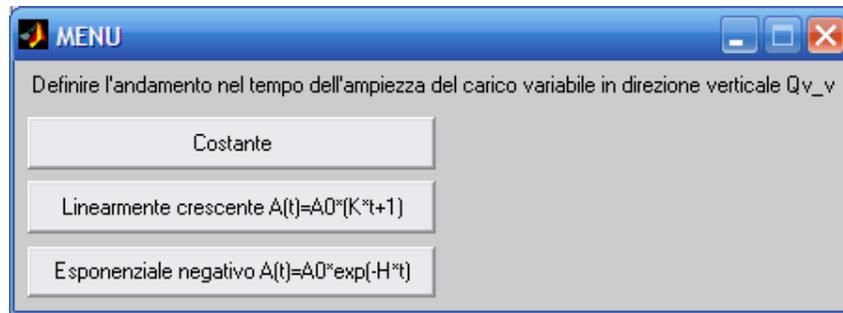
Se si considera un andamento *cosenico*, l'andamento della generica forzante $f(t)$ nel tempo risulta definito come:

$$f(t) = A(t)\cos(2\pi\omega t) \quad (3.4.25)$$

dove ω è la frequenza della forzante e va inserita mediante la finestra:



mentre $A(t)$ rappresenta l'ampiezza di oscillazione e per la scelta del suo andamento nel tempo si ha la seguente schermata:



Se si considera un'ampiezza di oscillazione *costante*, allora si ha:

$$A(t) = \text{cost} = f_0 \quad (3.4.26)$$

Se si considera un'ampiezza di oscillazione *linearmente crescente*, allora si ha:

$$A(t) = f_0(Kt + 1) \quad (3.4.27)$$

dove la costante K va inserita mediante la finestra:



Se si considera un'ampiezza di oscillazione con andamento *esponenziale negativo*, allora si ha:

$$A(t) = f_0 e^{-Ht} \quad (3.4.28)$$

dove la costante H va inserita mediante la finestra:



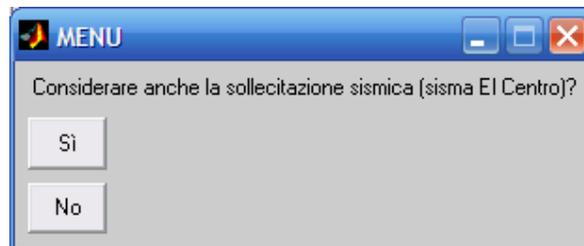
Se si considera un andamento *esponenziale negativo*, l'andamento della generica forzante $f(t)$ nel tempo risulta definito come:

$$f(t) = f_0 e^{-Ht} \quad (3.4.29)$$

dove la costante H va inserita mediante la finestra:



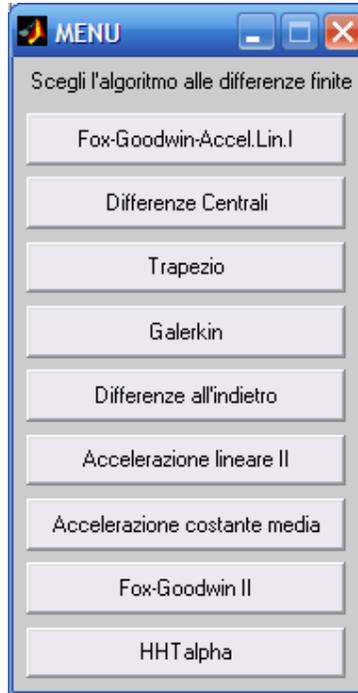
L'analisi dinamica prevede anche la possibilità di considerare un evento sismico, in particolare nel programma è stato implementato l'accelerogramma del sisma di El Centro. La scelta di considerare anche la sollecitazione sismica va effettuata mediante la seguente schermata:



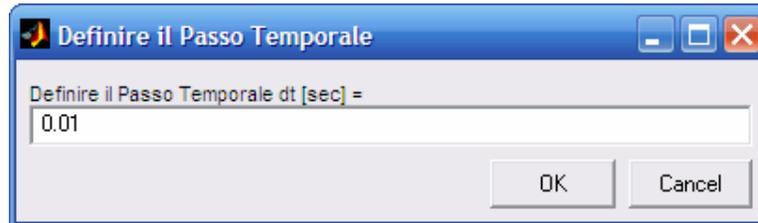
La direzione d'ingresso del sisma è da destra a sinistra.

Terminata la definizione delle forzanti nel tempo, è necessario dare in input i dati necessari al funzionamento dell'algorithm alle differenze finite per la risoluzione del problema del moto forzato.

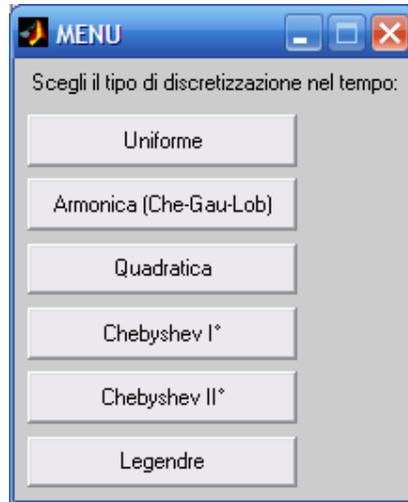
Inizialmente va scelto il tipo di algoritmo da utilizzare:



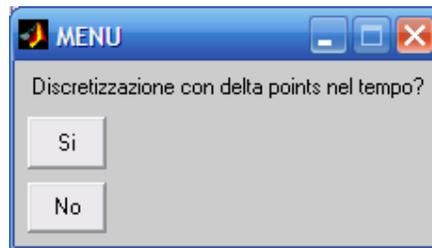
dopodiché va specificato l'incremento temporale Δt mediante la seguente schermata:



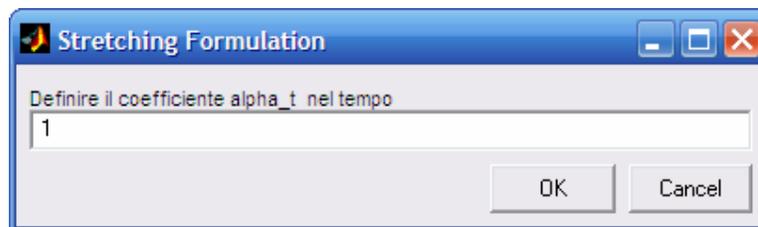
Introdotti i parametri $\beta, \gamma, \Delta t$ per l'algorithm di Newmark, si passa alla definizione dei parametri per la discretizzazione del tempo d'analisi T_{tot} mediante la tecnica GDQ. Innanzitutto è necessario decidere la tipologia di discretizzazione; tale scelta si effettua con il seguente menu:



Il programma prevede anche la possibilità di impiegare la tecnica dei δ -Sampling Points, l'utilizzo di tale tecnica è consentito dal seguente menu:

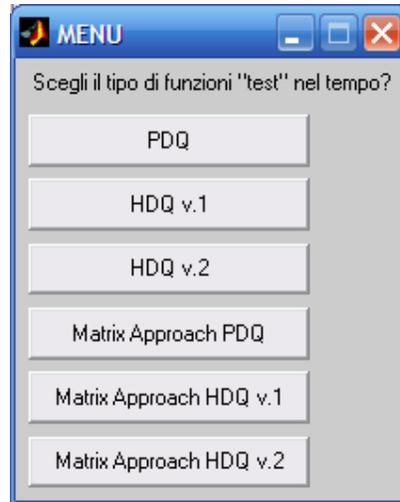


inoltre se si vuole infittire i punti in corrispondenza dei nodi, si può fare riferimento alla *stretching formulation*; in questo caso nella schermata successiva:

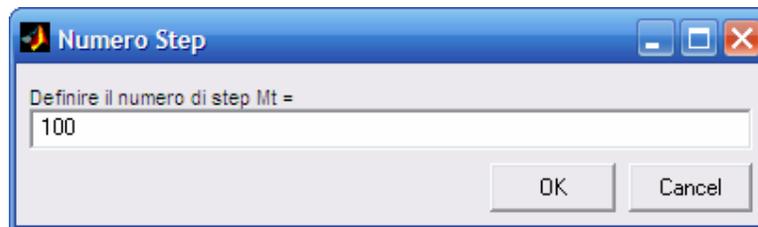


va inserito un valore del parametro α , minore di 1.

In seguito viene richiesto di scegliere il tipo di funzioni di base, o funzioni test, da impiegare per l'approssimazione della soluzione; tale scelta è possibile mediante il seguente menu:



Infine è necessario specificare il numero n_{step} di intervalli temporali in cui si intende suddividere il tempo d'analisi T_{tot} ; tale valore va inserito nella seguente schermata:



3.4.6.2 Risoluzione del sistema

L'operazione successiva è la discretizzazione del tempo d'analisi mediante la tecnica GDQ e mediante l'algoritmo alle differenze finite (quest'ultimo divide il tempo T_{tot} in incrementi temporali Δt uguali fra loro). Noti i punti in cui risulta discretizzato il dominio temporale e noti gli andamenti delle forzanti nel tempo, è possibile valutare il vettore dei carichi \mathbf{f}_d ; inoltre si possono scrivere le equazioni al contorno (3.2.3) e (3.2.4) in corrispondenza di ogni punto di discretizzazione del dominio temporale. Siccome erano già state determinate le condizioni iniziali, il codice di calcolo ha tutti i dati necessari alla risoluzione del problema del moto forzato nel tempo d'analisi.

L'algoritmo risolve il problema sia con la tecnica GDQ utilizzando le relazioni descritte nel paragrafo 3.2.3, sia con il metodo di Newmark utilizzando le relazioni descritte nel paragrafo 3.3.2. In questo modo si determina la soluzione in tutti i punti interni del dominio.

L'ultima operazione è il calcolo delle componenti di spostamento in corrispondenza dei punti *bounded* per ogni istante temporale, ciò è possibile sfruttando le relazioni descritte nel paragrafo 3.2.4.

Note le componenti di spostamento in tutti i punti del dominio spazio-temporale, il problema del moto forzato è risolto.

Bibliografia

- [1] – R. Baldacci, *Scienza delle Costruzioni*, Volume 2, UTET, 1970.
- [2] – E. Viola, *Fondamenti di Analisi Matriciale delle Strutture*, Pitagora Editrice Bologna, 1996.
- [3] – E. Viola, *Fondamenti di Dinamica e Vibrazione delle Strutture, Volume primo: Sistemi Discreti*, Pitagora Editrice Bologna, 2001.
- [4] – E. Viola, *Fondamenti di Dinamica e Vibrazione delle Strutture, Volume secondo: Sistemi Continui*, Pitagora Editrice Bologna, 2001.
- [5] – T. C. Fung, *Solving initial value problems by differential quadrature method – Part 1: first-order equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **50**, 1411-1427, 2001.
- [6] – T. C. Fung, *Solving initial value problems by differential quadrature method – Part 2: second- and higher-order equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **50**, 1429-1454, 2001.
- [7] – T. C. Fung, *Stability and accuracy of differential quadrature method in solving dynamic problems*, Computer methods in applied mechanics and engineering, **191**, 1311-1331, 2002.
- [8] – T. Y. Wu, G. R. Liu, Y. Y. Wang, *Application of the generalized differential quadrature rule to initial-boundary-value problems*, Journal of Sound and Vibrations, **264**, 883-891, 2003.
- [9] – E. Viola, F. Tornabene, *Vibration Analysis of Damaged Circular Arches with Varying Cross-section*, Structural Integrity & Durability (SID-SDHM), **1**(2), 155-169, 2005.
- [10] - E. Viola, F. Tornabene, *Vibration Analysis of Conical Shell Structures Using GDQ Method*, Far East Journal of Applied Mathematics, **25**(1), 23-39, 2006.
- [11] - E. Viola, L. Panzacchi, F. Tornabene, *General Analysis and Application to Redundant Arches under Static Loading*, Construction and Building Materials, **21**(5), 1129-1143, 2007.

- [12] - E. Viola, M. Dilena, F. Tornabene, *Analytical and Numerical Results for Vibration Analysis of Multi-stepped and Multi-damaged Circular Arches*, Journal of Sound & Vibration, **299**(1-2), 143-163, 2007.
- [13] - F. Tornabene, E. Viola, *Vibration Analysis of Spherical Structural Elements Using the GDQ Method*, Computers & Mathematics with Applications, **53**(10), 1538-1560, 2007.
- [14] - E. Viola, F. Tornabene, *Dynamical Analysis of Spherical Shell Structural Elements Using the First-order Shear Deformation Theory*, Mechanical Vibration: Where do we stand?, CISM Courses and Lectures no. **488**, 17-41, ed. by I. Elishakoff, Springer - Wien, New York, 2007.
- [15] - E. Viola, L. Panzacchi, F. Tornabene, *Structural Analysis of Historical Masonry Arches*, Restoration, International Conference of Restoration, Recycling and Rejuvenation Technology for Engineering and Architecture Application (RRTEA2004) - Cesena, Italy, 7-11 June 2004, In: G.C. Sih et L. Nobile (eds.), *Restoration, Recycling and Rejuvenation Technology for Engineering and Architecture Application*, 358-369, 2004.
- [16] - F. Tornabene, E. Viola, *The Effect of Cracks on the Dynamic Response of Circular Arches with Varying Cross-section by G.D.Q.E. Technique*, IV° International Conference on Fracture and Damage Mechanics (FDM2005) - Mallorca, Spain, 12-14 July 2005, In: M.H. Aliabadi et al. (eds.), *Advances in Fracture and Damage Mechanics IV*, 295-300, 2005.
- [17] - F. Tornabene, E. Viola, *Differential Quadrature Solution for Parabolic Structural Shell Elements*, III° European Conference on Computational Mechanics (ECCM2006) - Lisbon, Portugal, 5-8 June 2006, In: C.A. Mota Soares et al. (eds.), *Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering*, 393, 2006.
- [18] - E. Viola, F. Tornabene, *Free Vibration Analysis of Shells of Revolution Using GDQ Method*, XVI° Convegno Italiano di Meccanica Computazionale (GIMC2006) - Bologna, Italy, 26-28 June 2006, In: F. Ubertini et al. (eds.), *Atti XVI° Convegno Italiano di Meccanica Computazionale*, 93, 2006.
- [19] - F. Tornabene, F. Ubertini, E. Viola, *The Generalized Differential Quadrature Method for Solving Initial-value Problems in Linear Dynamics*, International Symposium on Recent Advances in Mechanics, Dynamical Systems and Probability Theory (MDP2007) - Palermo, Italy, 3-6 June 2007.

- [20] - F. Tornabene, E. Viola, *Free Vibrations of Laminated Composite Hyperbolic Shells of Revolution Via GDQ Method*, Convegno Italiano “Materiali e Metodi Innovativi nell’Ingegneria Strutturale”- Catania, Italy, 4-6 July 2007.
- [21] - F. Tornabene, E. Viola, *Free Vibration Analysis of Functionally Graded Doubly Curved Shell Structures Using GDQ Method*, XVIII° Convegno Italiano dell’Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata (AIMETA2007) - Brescia, Italy, 11-14 September 2007.
- [22] – A. Benedetti, *Modellazione Analitica e Sperimentazione Numerica del Comportamento Dinamico di Elementi Strutturali*, Tesi di Laurea, Università di Bologna, Anno Accademico 2003/2004.
- [23] – S. Mercuri, *Modellazione ed Applicazioni in Dinamica Strutturale*, Tesi di Laurea, Università di Bologna, Anno Accademico 2005/2006.
- [24] – F. Tornabene, *Modellazione e Soluzione di Strutture a Guscio in Materiale Anisotropo*, PhD Thesis, Università di Bologna, 2007.

Ringraziamenti

Un grazie di cuore ai miei genitori ed a tutta la mia famiglia per il loro costante appoggio in tutte le mie scelte. La piena fiducia manifestata nei miei confronti ha rappresentato per me un'inesauribile spinta nel superamento delle difficoltà incontrate lungo il mio percorso.

Un ringraziamento particolare va al Professore Erasmo Viola, per come ha saputo infondermi, attraverso i suoi insegnamenti, la passione per la conoscenza, e per avermi dato la possibilità di concludere i miei studi approfondendo un tema di grande interesse.

Un doveroso ringraziamento va all'Ingegnere Francesco Tornabene, per l'impegno e la totale disponibilità, ma anche la simpatia, con cui mi ha seguito durante tutto lo sviluppo della presente tesi.

Desidero inoltre ringraziare tutte gli amici che mi sono stati accanto in questi anni, che non mi hanno mai fatto mancare una parola di conforto nei momenti di affanno. Grazie alle esperienze di vita condivise con loro sono cresciuto come persona. Ora per me inizia una nuova fase di vita, ma spero, e sono convinto, di poter continuare a coltivare la solida amicizia che ci lega.

Grazie a tutti

Luca