

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

---

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Corso di Laurea in Matematica

FIBRAZIONI  
E  
TORRI DI POSTNIKOV

Tesi di Laurea in Topologia Algebrica

Relatore:

Dott.

MARCO MORASCHINI

Presentata da:

PIETRO ALBERICI

Anno Accademico 2024-2025



# Introduzione

Verso la metà del XIX secolo, la geometria si sviluppò in una direzione completamente nuova, dando vita a quella che oggi è conosciuta come topologia. Questa branca della matematica si occupa di studiare le proprietà delle figure geometriche che rimangono invariate anche quando tali figure vengono sottoposte a deformazioni così profonde da alterarne completamente le caratteristiche metriche. Nel 1895 il matematico Henri Poincaré pubblicò un articolo intitolato “Analysis Situs”, in cui impiegava idee provenienti dall’algebra astratta per affrontare problemi di natura topologica, gettando così le basi della moderna topologia algebrica. Tra i suoi numerosi contributi, introdusse la nozione di gruppo fondamentale, uno strumento essenziale per distinguere spazi topologici dal punto di vista omotopico. Nel 1935 il matematico Witold Hurewicz propose una generalizzazione del gruppo fondamentale, definendo *i gruppi di omotopia di ordine superiore*, segnando così l’inizio della teoria dell’omotopia. I gruppi di omotopia di ordine superiore permettono di classificare completamente i *complessi CW* (particolari spazi topologici) a meno di omotopia.

L’obiettivo di questa tesi è quello di approfondire alcuni concetti e strumenti fondamentali legati proprio alla teoria dell’omotopia, a partire dallo studio dei gruppi di omotopia, che introduciamo e analizziamo nel Capitolo 1. Successivamente, nel Capitolo 2 presentiamo il concetto di *fibrato*, oggetto che generalizza in modo naturale la nozione di rivestimento. Tra i vari esempi di fibrati considerati, uno dei più celebri è la *fibrazione di Hopf* (Esempio 2.12), introdotta da Heinz Hopf nel 1931. Questo risultato fu particolarmente pionieristico, poiché mostra l’esistenza di mappe omotopicamente non banali tra sfere di dimensioni diverse, mettendo così in evidenza un fatto a priori sorprendente: dato uno spazio topologico di dimensione  $n$ , i gruppi di omotopia di ordine  $k > n$  possono essere non banali (questo fatto non è vero ad esempio per i gruppi di omologia). Proseguendo, nel Capitolo 3 introduciamo il concetto di *fibrazione*, una generalizzazione del fibrato da un punto di vista omotopico, sviluppata dal matematico Jean-Pierre Serre. Le fibrazioni si distinguono per la capacità di conservare informazioni omotopi-

che essenziali, anche in assenza della struttura locale di prodotto tipica dei fibrati. Una domanda naturale è se una qualunque mappa continua possa essere considerata una fibrazione. Nel rispondere affermativamente (a meno di omotopia) a questo interrogativo, nella Sezione 3.2 introduciamo e studiamo oggetti fondamentali come lo *spazio dei cammini* e lo *spazio dei lacci*. Infine, nel Capitolo 4 mostriamo come le fibrazioni permettono di ricostruire il tipo di omotopia di un complesso CW arbitrario a partire dai suoi gruppi di omotopia. Tale procedura induttiva che consiste nel formare prodotti “intrecciati” di spazi di Eilenberg–MacLane è nota come *torre di Postnikov*, in onore del matematico Mikhail Postnikov nel 1951. Il risultato principale della tesi consiste nello stabilire quando esiste una torre di Postnikov. Una risposta completa è contenuta nel seguente teorema:

**Teorema** (Teorema 4.25). *Un complesso CW connesso  $X$  ammette una torre di Postnikov di fibrazioni principali se e solo se  $\pi_1(X)$  agisce banalmente su  $\pi_n(X)$  per ogni  $n > 1$ .*

La tesi si conclude con la dimostrazione di un risultato analogo (Teorema 4.28) per le *torri di Moore-Postnikov* e alcune applicazioni delle torri di Postnikov.

## Struttura della tesi

La tesi è suddivisa in cinque capitoli. Il Capitolo 0 raccoglie alcune definizioni preliminari di topologia che saranno utilizzate in seguito. Nel Capitolo 1 vengono introdotti i gruppi di omotopia tramite due definizioni (Definizione 1.1 e Sezione 1.1.1). Dopo aver osservato che le due definizioni sono equivalenti, studiamo i gruppi di omotopia da un punto di vista funzionale (Sezione 1.3) e il rapporto con i rivestimenti (Sezione 1.4). Il capitolo si conclude con la definizione dei gruppi di omotopia relativi e la successione esatta lunga di omotopia relativa ad essi associata. Nel Capitolo 2 vengono presentate varie proprietà di sollevamento e la successione esatta lunga in omotopia associata (Teorema 2.4). Successivamente vengono introdotti i fibrati tramite numerosi esempi e il loro rapporto con la proprietà di sollevamento studiata in precedenza. Nel Capitolo 3 vengono definite le fibrazioni in generale. Inoltre vengono introdotti lo spazio dei cammini, la fibra omotopica e lo spazio dei lacci. Questa sezione (Sezione 3.2) si conclude osservando cosa succede se si itera la costruzione dello spazio dei lacci. Nel Capitolo 4, vengono enunciati alcuni teoremi preliminari che servono per introdurre le torri di Postnikov e studiarne l’esistenza. In seguito, vengono descritte brevemente le torri di Moore-Postnikov e la tesi si conclude con l’enunciato di alcuni risultati che usano in modo centrale le torri di Postnikov in combinazione ad altre nozioni.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>0 Preliminari</b>	<b>1</b>
<b>1 I gruppi di omotopia</b>	<b>5</b>
1.1 Definizione e proprietà principali . . . . .	5
1.1.1 Definizione alternativa . . . . .	7
1.2 Relazione tra punti base . . . . .	8
1.3 Il funtore $\pi_n$ . . . . .	9
1.4 Rivestimenti e gruppi di omotopia . . . . .	10
1.5 I gruppi di omotopia relativi . . . . .	11
<b>2 I fibrati</b>	<b>15</b>
2.1 La successione esatta lunga in omotopia . . . . .	15
2.2 Definizione di fibrato . . . . .	17
2.2.1 La proprietà di sollevamento nei fibrati . . . . .	20
<b>3 Le fibrazioni</b>	<b>23</b>
3.1 Introduzione alle fibrazioni . . . . .	23
3.2 Lo spazio dei cammini . . . . .	27
<b>4 Applicazioni</b>	<b>33</b>
4.1 Alcuni concetti preliminari . . . . .	33
4.1.1 Il teorema di Whitehead . . . . .	33
4.1.2 L'approssimazione cellulare . . . . .	34
4.1.3 L'approssimazione CW . . . . .	35
4.1.4 Il Teorema di Hurewicz . . . . .	36
4.2 Le torri di Postnikov . . . . .	37
4.3 Le torri di Moore-Postnikov . . . . .	44
4.4 Applicazioni . . . . .	46
<b>Bibliografia</b>	<b>49</b>



# Elenco delle figure

1.1	L'abelianità dei gruppi di omotopia di ordine superiore . . . . .	6
1.2	L'interpretazione dell'abelianità dal punto di vista delle sfere .	8
1.3	Il cambio base dal punto di vista dei cubi . . . . .	8
1.4	Il cambio base dal punto di vista delle sfere . . . . .	8
1.5	L'idea di come viene sollevata l'omotopia tramite il rivestimento	10
1.6	L'idea del caso $n = 1$ dei gruppi di omotopia relativi . . . . .	12
1.7	Il criterio di compressione: caso $n = 2$ della seconda implicazione	12
1.8	La prima parte del caso $n = 2$ dell'esattezza di $\pi_n(A, B, x_0)$ . .	14
1.9	La seconda parte del caso $n = 2$ dell'esattezza di $\pi_n(A, B, x_0)$ .	14
2.1	Il nastro di Möbius . . . . .	18
2.2	La bottiglia di Klein . . . . .	18
2.3	La visualizzazione dei tori nel fibrato di Hopf . . . . .	20
2.4	Un toro decomposto in fibre circolari nel fibrato di Hopf . . .	20
3.1	Il dominio di una fibrazione che non è un fibrato . . . . .	24



# Capitolo 0

## Preliminari

Questo capitolo raccoglie alcune definizioni preliminari che verranno utilizzate nelle sezioni successive. Sebbene molti di questi concetti siano noti, li presentiamo qui per fissare notazioni e per delineare i prerequisiti assunti. Iniziamo col dire che in generale indicheremo con il termine *mappa* una funzione continua. Abbiamo quindi le seguenti definizioni:

**Definizione A** (Mappa di coppie). Siano  $X, Y$  spazi topologici con  $A \subset X$  e  $B \subset Y$ . Una funzione continua  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  con  $f(A) \subset B$  viene chiamata *mappa di coppie*.

In modo analogo posso definire una *mappa di triple*. Diamo ora la definizione di *omotopia tra funzioni*:

**Definizione B** (Omotopia tra mappe). Siano  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$  due mappe. Si dice che sono *omotope* se esiste  $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  continua, tale che  $F(x, 0) = f_0(x)$  e  $F(x, 1) = f_1(x)$ . Scriviamo  $f_0 \simeq f_1$

Osserviamo che la funzione  $F$  definisce una famiglia di funzioni  $f_t: X \rightarrow Y$  indicizzate da  $t \in [0, 1]$ . Dunque prendere la famiglia o la funzione  $F$  è esattamente la stessa cosa e useremo quello che conviene di più a seconda del contesto. Abbiamo anche una versione particolare della definizione precedente:

**Definizione C** (Omotopia tra mappe relativa ad un sottospazio). Siano  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$  due mappe e  $A \subset X$ . Si dice che sono omotope relativamente ad  $A$  se esiste  $F: X \rightarrow Y$  omotopia tra funzioni tale che  $F(x, t) = f_0(x) = f_1(x)$  per ogni  $x \in A$  e per ogni  $t \in [0, 1]$ .

Sempre in quest'ambito abbiamo altre definizioni:

**Definizione D** (Equivalenza omotopica). Una mappa  $f: X \rightarrow Y$  è chiamata *equivalenza omotopica* se esiste una mappa  $g: Y \rightarrow X$  tale che  $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$  e  $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ . In questo caso diciamo che  $X$  e  $Y$  sono *omotopi* o che hanno lo stesso *tipo di omotopia*.

**Definizione E** (Retrazione per deformazione). Una *retrazione per deformazione* di uno spazio topologico  $X$  su un suo sottospazio  $A$  è una mappa continua  $R: X \times [0, 1] \rightarrow X$  tale che  $R(x, 0) = \text{Id}_X$  per ogni  $x \in X$ ,  $R(X, 1) = A$  e infine  $R(x, t) = x$  per ogni  $x \in A$  e  $t \in [0, 1]$ .

Introduciamo brevemente la definizione di *rivestimento*:

**Definizione F** (Rivestimento). Un *rivestimento* di uno spazio topologico  $X$  è uno spazio topologico  $Y$  con una mappa  $p: Y \rightarrow X$  tale che per ogni  $x \in X$ , esiste un intorno  $U$  (chiamato *aperto banalizzante*) tale che:

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} \tilde{U}_i, \quad p|_{\tilde{U}_i}: \tilde{U}_i \rightarrow U \text{ omeomorfismi.}$$

Il *numero di fogli*, sopra  $x \in X$ , di un rivestimento  $p: Y \rightarrow X$  è  $|p^{-1}(x)| \leq |\tilde{X}|$ .

Spieghiamo che cos'è un *complesso CW*:

**Definizione G** (Complesso CW). Uno spazio topologico  $X$  costruito nel seguente modo è un *complesso CW*:

1. Iniziamo con un insieme discreto di punti  $X^0$ , dove i punti sono visti come 0-celle.
2. Induttivamente, costruiamo l'*n-scheletro*  $X^n$  a partire da  $X^{n-1}$  attaccando le  $n$ -celle  $D_\alpha^n$  tramite le *mappe di attaccamento*  $\phi_\alpha: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ . Questo significa che  $X^n$  è il quoziente dell'unione disgiunta  $X^{n-1} \sqcup_\alpha D_\alpha^n$  con una collezione di  $n$ -dischi  $D_\alpha^n$  sotto l'identificazione  $x \sim \phi_\alpha(x)$ , con  $x \in \partial D_\alpha^n$ .
3. Il processo può terminare dopo un numero finito di passi prendendo  $X = X^n$  per un qualche  $n < \infty$ , oppure continuare all'infinito ponendo  $X = \bigcup_n X^n$ . In quest'ultimo caso a  $X$  viene data la *topologia debole*:  $A \subset X$  è aperto (o chiuso) se e solo se  $A \cap X^n$  è aperto (o chiuso) in  $X^n$  per ogni  $n$ .

Concludiamo con la *topologia compatto-aperta*:

**Definizione H** (Topologia compatto-aperta). La *topologia compatto-aperta* su un insieme  $X^Y$  (ossia delle mappe  $f: Y \rightarrow X$ ) è la topologia data dalla prebase consistente negli insiemi  $M(K, U)$  di mappe che portano insiemi compatti  $K \subset Y$  in insiemi aperti  $U \in X$ .

Una base di  $X^Y$  consiste nell'insieme di mappe che portano un numero finito di insiemi compatti  $K_i \subset Y$  in insiemi aperti  $U_i \subset X$ .



# Capitolo 1

## I gruppi di omotopia

I *gruppi di omotopia* di uno spazio topologico puntato generalizzano l'idea del gruppo fondamentale. In questo capitolo ne diamo la definizione, insieme a dei risultati che saranno utili nel corso della discussione. Per ulteriori approfondimenti è possibile far riferimento al libro di Hatcher [Hat02, Capitolo 4.1], che è la fonte principale per la realizzazione di questa tesi, oppure anche al libro di Tammo Tom Dieck [tD08, Capitolo 6].

### 1.1 Definizione e proprietà principali

Indichiamo con  $I^n$  il cubo  $n$ -dimensionale, o in altri termini il prodotto cartesiano di  $n$  copie dell'intervallo  $I = [0, 1]$ . Il bordo  $\partial I^n$  è il sottospazio di  $I^n$  dato dai punti che hanno almeno una coordinata uguale a 0 o a 1.

**Definizione 1.1** (Gruppi di omotopia). Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $x_0 \in X$  un punto. Si definisce l' *$n$ -esimo gruppo di omotopia*  $\pi_n(X, x_0)$  l'insieme delle classi di omotopie di mappe di coppie  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  tali che le omotopie  $f_t$  soddisfino  $f_t(\partial I^n) = x_0$  per ogni  $t \in [0, 1]$ .

*Osservazione 1.2.* La definizione precedente include anche il caso  $n = 0$ . Infatti  $I^0$  è un punto e  $\partial I^0 = \emptyset$ , quindi  $\pi_0(X, x_0)$  non è altro che l'insieme delle componenti connesse, spesso indicato anche solo con  $\pi_0(X)$ . Tuttavia in questo caso non c'è un modo naturale per definire un gruppo, cosa invece possibile per  $n \geq 1$  come vedremo fra poco.

I gruppi di omotopia si chiamano così perché per  $n \geq 1$  è possibile definire una struttura di gruppo su  $\pi_n(X, x_0)$ . Per farlo introduciamo la seguente operazione:

$$(f * g)(s_1, s_2, \dots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [0, 1/2] \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [1/2, 1] \end{cases}$$

dove  $f, g: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  sono mappe di coppie.

*Osservazione 1.3.* Per  $n = 1$  il gruppo  $\pi_n(X, x_0)$  coincide con il *gruppo fondamentale*.

Gli stessi argomenti che si usano per mostrare che  $\pi_1(X, x_0)$  è un gruppo continuano a valere anche per  $n \geq 2$ , in quanto nella definizione viene coinvolta solo la prima componente. Dunque si ha:

**Proposizione 1.4.** *L'insieme  $(\pi_n(X, x_0), *)$ , dotato della legge di composizione  $*$  è un gruppo per  $n \geq 1$ , il cui elemento neutro è dato dalla mappa costante in  $x_0$ , e l'inverso di un suo elemento  $[f]$  è dato da  $-[f] = [-f]$ , dove  $-f(s_1, s_2, \dots, s_n) = f(1 - s_1, s_2, \dots, s_n)$ .*

A differenza del gruppo fondamentale, i gruppi di omotopia di ordine  $n \geq 2$  sono sempre abeliani.

**Teorema 1.5.** *Il gruppo  $\pi_n(X, x_0)$  è abeliano per ogni  $n \geq 2$ .*

*Dimostrazione.* Osserviamo che, data una mappa  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ , possiamo definire una nuova mappa  $h: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  tale che  $h(x) = f(r(x))$  per ogni  $x \in A$ , dove la funzione  $r: A \rightarrow I^n$  è un omeomorfismo su un sottocubo  $A \subsetneq I^n$ , e  $h(x) = x_0$  per ogni  $x \in I^n \setminus A$ . Dunque è evidente che  $f$  e  $h$  sono omotope relativamente a  $\partial I^n$ , in quanto  $h$  è ottenuta da  $f$  “restringendo” il suo dominio.

Dimostriamo ora che  $f * g \simeq g * f$ . Possiamo pensare al dominio di  $f * g$  come nella Figura 1.1 sottostante. Per quanto appena detto, “restringiamo” il dominio di  $f$  e  $g$  a due sottocubi, in modo da creare spazio per invertire la loro posizione lasciandolo disgiunti. Una volta fatto questo, riallarghiamo i domini e otteniamo  $g * f$ .

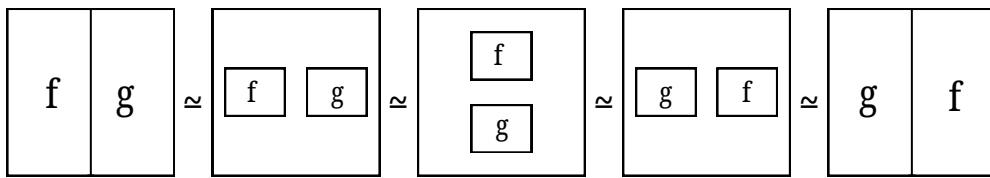


Figura 1.1

□

*Osservazione 1.6.* Spesso viene utilizzata la notazione additiva  $+$  al posto di  $*$  per trattare il caso  $n \geq 2$ .

Nonostante i gruppi di omotopia di ordine superiore siano abeliani, questo non facilita calcolarli. In generale sono più difficili da determinare rispetto al gruppo fondamentale o ai gruppi di omologia, per il fatto che, né il teorema di

Van Kampen, né l'escissione, funzionano in questi casi. Consideriamo alcuni esempi:

*Esempio 1.7.* Calcoliamo i gruppi di omotopia di un punto  $\{\text{pt}\}$ . In questo caso ogni mappa  $I^n \rightarrow \{\text{pt}\}$  è costante, e si ha  $\pi_n(X, x_0) = 1$  per ogni  $n \geq 0$ .

*Esempio 1.8.* Prendiamo uno spazio topologico  $X$  contraibile. Sia  $R: X \times I \rightarrow X$  la retrazione per deformazione ad  $x_0 \in X$  e sia  $f$  un rappresentante di una classe di omotopia in  $\pi_n(X, x_0)$ . Allora  $R': I^n \times I \rightarrow X$ ,  $R'(x, t) = R(f(x), t)$  è un'omotopia tra  $f$  e la mappa costante in  $x_0$ . Dunque otteniamo che anche in questo caso tutti i gruppi di omotopia sono banali.

*Osservazione 1.9.* Mostriremo che i gruppi di omotopia di ordine superiore sono invarianti omotopici. Dunque il risultato ottenuto nell'esempio precedente seguiva direttamente dall'Esempio 1.7

### 1.1.1 Definizione alternativa

Osserviamo che le mappe  $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  possono essere reinterpretate come mappe  $(I^n/\partial I^n, \partial I^n/\partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ , dove  $I^n/\partial I^n \cong S^n$  e  $\partial I^n/\partial I^n =: s_0$ . Questo ci permette di fornire una descrizione alternativa delle classi di omotopia. Infatti siano  $h, h': (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  due mappe omotope, allora esiste un'omotopia  $H: I^n \times I \rightarrow X$  tra  $h$  e  $h'$ . Per costruzione  $\exists! \tilde{h}, \tilde{h}': (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  mappe tali che

$$\begin{array}{ccc} (I^n, \partial I^n) & \xrightarrow{h, h'} & (X, x_0) \\ \downarrow & \nearrow \tilde{h}, \tilde{h}' & \\ (S^n, s_0) & & \end{array}$$

commuti. Similmente, definiamo  $\tilde{H}: I^n/\partial I^n \times I \rightarrow X$ ,  $\tilde{H}([x], t) = H(x, t)$  e mostriamo che è un omotopia tra  $\tilde{h}$  e  $\tilde{h}'$ . Si ha:

$$\tilde{H}([x], 0) = H(x, 0) = h(x) = \tilde{h}([x])$$

e in modo analogo,  $\tilde{H}(x, 1) = \tilde{h}'([x])$ .

Dunque avremmo potuto definire  $\pi_n(X, x_0)$  come le classi di omotopie di mappe di coppie  $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ . Useremo entrambe le definizioni a seconda di quello che conviene.

*Osservazione 1.10.* In questa interpretazione dei gruppi di omotopia, l'operazione  $f * g$  è la composizione di una funzione  $S^n \rightarrow S^n \vee S^n$  che collassa l'equatore ad un punto, con la funzione  $f \vee g: S^n \vee S^n \rightarrow S^n$  che applica  $f$

e  $g$  sulla rispettiva sfera.

Si osservi inoltre che per  $n \geq 2$  l'interpretazione dell'abelianità è banale, infatti è come se “rovesciassimo  $S^n \vee S^n$ ”.

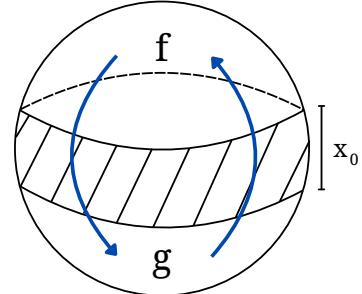


Figura 1.2

## 1.2 Relazione tra punti base

Consideriamo ora uno spazio topologico  $X$  connesso per archi. Nel caso del gruppo fondamentale sappiamo che una scelta differente del punto base  $x_1 \neq x_0$  produce sempre un gruppo isomorfo  $\pi_1(X, x_1) \cong \pi_1(X, x_0)$ , ossia è ben definita la classe di isomorfismo  $\pi_1(X)$ . Lo stesso fenomeno accade nel caso  $n \geq 2$ .

Consideriamo un cammino  $\gamma: I \rightarrow X$  tale che  $\gamma(0) = x_0$  e  $\gamma(1) = x_1$ . Sia  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_1)$  definiamo una nuova mappa  $\gamma f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  ottenuta nel seguente modo: restringiamo il dominio di  $f$  ad un sottocubo concentrico di  $I^n$ , poi inseriamo  $\gamma$  in ogni segmento radiale nello spazio tra i due cubi, come nella Figura 1.3.

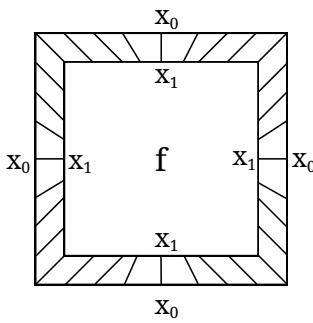


Figura 1.3: Punto di vista  
dei cubi.

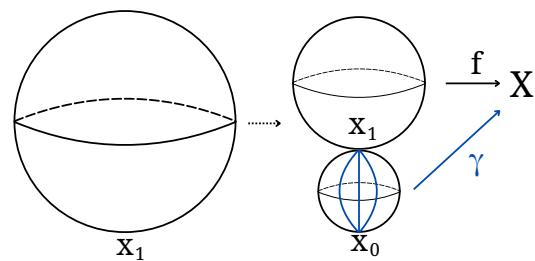


Figura 1.4: Punto di vista delle sfere.

**Proposizione 1.11.** *Sia  $X$  uno spazio topologico connesso per archi e sia  $x_0 \in X$ . Allora  $\pi_n(X, x_0)$  è isomorfo a  $\pi_n(X, x_1)$ , per ogni  $x_1 \in X$ ,  $n \geq 2$ .*

*Dimostrazione.* Definiamo  $\beta_\gamma: \pi_n(X, x_1) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ ,  $\beta_\gamma([f]) = [\gamma f]$ , dove  $\gamma$  è un cammino da  $x_0$  a  $x_1$  e  $\gamma f$  è la funzione costruita prima. Mostriamo che è un isomorfismo ben definito.

- *Buona definizione:* Ricordando come abbiamo definito la mappa  $\gamma f$ , è immediato verificare che se  $\gamma \simeq \gamma'$  relativamente a  $I$ , allora  $\beta_\gamma = \beta_{\gamma'}$ . Inoltre è ovvio anche che se  $[f] = [f']$  allora  $[\gamma f] = [\gamma f']$ .
- *Omomorfismo:* mostriamo che  $\gamma(f + g) \simeq \gamma f + \gamma g$ . Deformiamo  $f$  e  $g$ , in modo tale che siano, rispettivamente nella metà di destra, e in quella di sinistra di  $I^n$ , costanti su  $x_1$ . Le nuove funzioni le indichiamo  $f + 0$  e  $0 + g$ . Tramite la seguente omotopia:

$$h_t(s_1, s_2, \dots, s_n) = \begin{cases} \gamma(f + 0)((2 - t)s_1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [0, 1/2] \\ \gamma(0 + g)((2 - t)s_1 + t - 1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [1/2, 1] \end{cases}$$

si ha  $\gamma(f + g) \simeq \gamma(f + 0) + \gamma(g + 0) \simeq \gamma f + \gamma g$ , dove l'ultima omotopia è ovvia.

- *Inversa:* per concludere che è un isomorfismo, osserviamo che  $(\gamma\eta)f \simeq \gamma(\eta f)$  e  $1_f \simeq f$ . Ora è facile verificare che  $\beta_{\bar{\gamma}}$  è l'inversa di  $\beta_\gamma$ , dove  $\bar{\gamma} = \gamma(1 - s)$  è il cammino inverso.  $\square$

*Osservazione 1.12.* Dal momento che  $\beta_{\gamma\eta} = \beta_\gamma\beta_\eta$ , possiamo definire un omomorfismo di gruppi tra  $\pi_1(X, x_0)$  e  $\text{Aut}(\pi_n(X, x_0))$  dato da  $[\gamma] \mapsto \beta_\gamma$ . Questo omomorfismo definisce un'azione di  $\pi_1$  sui  $\pi_n$ , dove ogni elemento  $[\gamma]$  di  $\pi_1$  agisce come un automorfismo su  $\pi_n$ :  $([\gamma], [f]) \mapsto [\gamma f]$ .

### 1.3 Il funtore $\pi_n$

Analizziamo la questione da un punto di vista funzionale.

**Proposizione 1.13.**  *$\pi_n$  è un funtore covariante dalla categoria **Top<sub>\*</sub>** (degli spazi topologici puntati) alla categoria **Grp** (dei gruppi).*

*Dimostrazione.* Consideriamo una mappa  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ , alla quale associamo  $\pi_n(f): \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ ,  $[g] \mapsto [f \circ g]$ . Questa funzione è ben definita sulle classi di omotopia, dato che se  $g \simeq g'$ , allora esiste  $F$  un'omotopia fra  $g$  e  $g'$  e quindi  $f \circ F$  fornisce l'omotopia fra  $f \circ g$  e  $f \circ g'$  cercata. Il fatto che  $\pi_n(f)$  sia un omomorfismo di gruppi segue dalla definizione dell'operazione data. Infine,  $\pi_n(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\pi_n(X, x_0)}$ , e  $\pi_n(f \circ g) = \pi_n(f) \circ \pi_n(g)$ .  $\square$

*Osservazione 1.14.* Se due mappe  $\phi, \psi$  sono omotope tramite  $F: X \times I \rightarrow Y$ , allora  $\pi_n(\phi) = \pi_n(\psi)$ . Infatti abbiamo  $[\phi \circ f] = [\psi \circ f]$  come testimoniato dall'omotopia

$$F': I^n \times I \rightarrow Y, F'(x, t) = F(f(x), t).$$

*Osservazione 1.15.* Un'equivalenza omotopica  $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$  induce un isomorfismo su tutti i gruppi di omotopia. Infatti, se  $f \circ g \simeq \text{Id}_X$  allora  $\pi_n(f) \circ \pi_n(g) = \pi_n(f \circ g) = \pi_n(\text{Id}_X)$ . Analogamente per  $g \circ f \simeq \text{Id}_Y$ .

## 1.4 Rivestimenti e gruppi di omotopia

I gruppi di omotopia di ordine superiore si comportano bene rispetto ai rivestimenti. Vale infatti il seguente risultato:

**Proposizione 1.16.** *Ogni rivestimento  $p: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ , induce un isomorfismo  $\pi_n(p): \pi_n(Y, y_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ , per ogni  $n \geq 2$ .*

*Dimostrazione.* La suriettività segue dalla semplice connessione di  $S^n$  e dalla proprietà di sollevamento delle mappe [Hat02, Proposizione 1.33], la quale implica che ogni mappa  $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  si solleva a  $(Y, y_0)$ .

Per l'iniettività consideriamo  $[\tilde{g}] \in \ker \pi_n(p)$ , quindi  $\pi_n(p)([\tilde{g}]) = [p \circ \tilde{g}] = [c_{x_0}]$ , dove  $c_{x_0}$  indica la mappa costante in  $x_0$ . Dunque  $p \circ \tilde{g} \simeq c_{x_0}$  relativamente a  $\partial I^n$  tramite  $F: I^n \times I \rightarrow X$ . Per la proprietà di sollevamento delle omotopie [Hat02, Proposizione 1.30], solleviamo  $F$  ad un'omotopia  $\tilde{F}: I^n \times I \rightarrow Y$ , a partire da  $\tilde{g}$ . Abbiamo che la restrizione di  $\tilde{F}$  a una qualsiasi faccia di  $I^n \times I$ , esclusa  $I^n \times \{0\}$ , è un sollevamento della restrizione di  $p \circ \tilde{F} = c_{x_0}$  alla stessa faccia. In particolare, per unicità dei sollevamenti, questo è esattamente  $c_{y_0}$ . Dunque  $\tilde{F}$  è un'omotopia tra  $\tilde{g}$  e  $c_{y_0}$ , ossia  $\tilde{g}$  è banale in  $\pi_n(Y, y_0)$ .

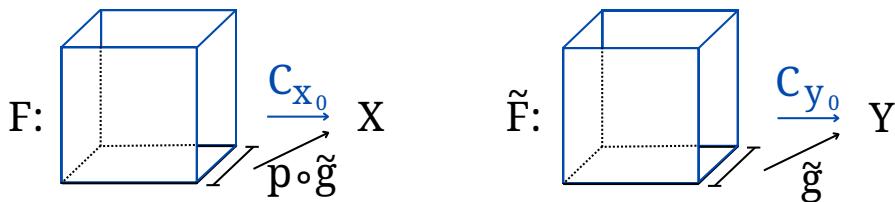


Figura 1.5: Caso  $n = 2$ . L'esterno del cubo è rappresentato in blu per indicare le zone dove le funzioni  $F, \tilde{F}$ , sono costanti rispettivamente su  $x_0, y_0$ . Da qui si nota l'omotopia cercata.

□

*Osservazione 1.17.* In particolare, facendo riferimento all’Esempio 1.8, un qualsiasi spazio topologico con rivestimento universale contraibile ha i gruppi di ordine superiore banali.

*Esempio 1.18.* Sapendo che il rivestimento universale di  $S^1$  è  $\mathbb{R}$ , con la mappa  $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $f(t) = e^{2\pi it}$ , conosciamo ora tutti i gruppi di omotopia di  $S^1$ :

$$\pi_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

L’esempio precedente mostra che  $S^1$  ha tutti i gruppi di omotopia banali tranne nel caso  $n = 1$ . Spazi di questo tipo vengono detti spazi  $K(G, 1)$ , in questo caso  $G = \mathbb{Z}$ . Più in generale, vale la seguente definizione:

**Definizione 1.19** (Spazio di Eilenberg-Maclane). Uno spazio topologico  $X$  avente solo l’ $n$ -esimo gruppo di omotopia non banale, e isomorfo a  $G$ , è detto spazio di *Eilenberg-Maclane*  $K(G, n)$ .

Utilizzeremo anche la notazione  $K(\pi, n)$  al posto di  $K(G, n)$  per indicare che l’ $n$ -esimo gruppo di omotopia è l’unico non banale, e per non specificare il gruppo  $G$  a cui è isomorfo.

## 1.5 I gruppi di omotopia relativi

Possiamo generalizzare quanto appena visto studiando i gruppi di omotopia relativi  $\pi_n(X, A, x_0)$  per una coppia  $(X, A)$  con punto base  $x_0 \in A$ .

Identifichiamo  $I^{n-1}$  come la faccia di  $I^n$  data dai punti la cui ultima coordinata sia uguale a 0 e  $J^{n-1}$  come la chiusura di  $\partial I^n - I^{n-1}$ , ossia l’unione delle restanti facce di  $I^n$ .

**Definizione 1.20** (Gruppi di omotopia relativi). Sia  $n \geq 1$ . Si definisce  $n$ -esimo gruppo di omotopia relativo  $\pi_n(X, A, x_0)$  con  $x_0 \in A$ , come l’insieme della classi di omotopie di mappe di triple  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  tali che le omotopie  $f_t$  soddisfino  $f_t(\partial I^n) \subset A$  e  $f_t(J^{n-1}) = x_0$  per ogni  $t \in [0, 1]$ .

*Osservazione 1.21.* Non c’è un modo preciso per definire  $\pi_0(X, A, x_0)$ , quindi lo lasciamo indefinito.

Analogamente a prima, vogliamo definire una struttura di gruppo su questi insiemi. L’operazione sarà definita dalla stessa formula del caso  $\pi_n(X, x_0)$ , però ora la coordinata  $s_n$  avrà un ruolo diverso e questo porterà ad alcune differenze.

*Osservazione 1.22.* Per  $n = 1$  non abbiamo un modo naturale per definire un gruppo. Poiché in questo caso  $I = [0, 1]$ ,  $I^0 = \{0\}$ ,  $J^0 = \{1\}$ , quindi  $\pi_1(X, A, x_0)$  sono le classi di omotopie di cammini in  $X$  da un punto qualunque in  $A$  al punto fissato  $x_0$  tali che gli estremi dei cammini restino in  $A$  durante l'omotopia.

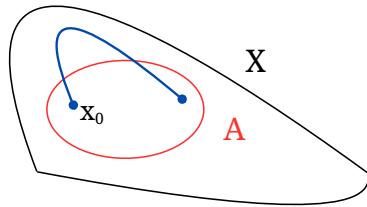


Figura 1.6

*Osservazione 1.23.* Per  $n = 2$  è un gruppo mentre per  $n \geq 3$  è un gruppo abeliano. Per approfondire questo fatto si può far riferimento al libro di Rotman [Rot88, Corollario 11.44]

Anche in questo caso c'è una definizione alternativa, ottenuta collassando  $J^{n-1}$  ad un punto. Possiamo vedere  $\pi_n(X, A, x_0)$  come l'insieme delle classi di omotopie di mappe  $(D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ . Da questo punto di vista, l'operazione è data da  $c: D^n \rightarrow D^n \vee D^n$  che collassa  $D^{n-1} \subset D^n$  ad un punto.

Ora diamo una formulazione utile e chiarificatrice di cosa voglia dire che un elemento di  $\pi_n(X, A, x_0)$  è *banale*.

**Proposizione 1.24** (Criterio di compressione). *Una mappa di triple  $f: (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  rappresenta zero in  $\pi_n(X, A, x_0)$  se e soltanto se  $f \simeq g$  relativamente a  $S^{n-1}$  e  $g(D^n) \subset A$ .*

*Dimostrazione.* ( $\Leftarrow$ ) : Dalle ipotesi segue che  $[f] = [g]$  in  $\pi_n(X, A, x_0)$ . Inoltre  $[g] = 0$  per via dell'omotopia ottenuta componendo  $g$  con la retrazione per deformazione di  $D^n$  in  $s_0$ .

( $\Rightarrow$ ) : Abbiamo  $[f] = 0$  attraverso l'omotopia  $F: D^n \times I \rightarrow X$ . Consideriamo ora una mappa  $H: D^n \times I \rightarrow D^n \times I$  definita in modo che per ogni  $t$ ,  $D^n \times \{t\}$  sia omeomorfo a  $D^n \times \{t\} \cup S^{n-1} \times [0, t]$  (mandando  $\partial D^n \times \{t\}$  omeomorficamente in  $S^{n-1} \times \{0\}$ ). Allora  $F \circ H$  ci dà un'omotopia relativamente a  $S^{n-1}$  tra  $f$  e una mappa dal disco  $D^n$  con immagine contenuta interamente in  $A$  (ossia  $g := F \circ H|_{D^n \times \{1\}}$ ). Si confronti Figura 1.7.

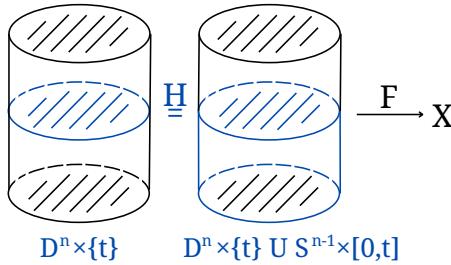


Figura 1.7: Caso  $n = 2$ . Si può osservare che  $F \circ H$  è un'omotopia relativa a  $S^{n-1}$  poiché  $F \circ H(x, t) = F \circ H(x, s), \forall x \in \partial D^n, \forall s, t \in [0, 1]$ .

□

*Osservazione 1.25.* Come nel caso assoluto, data una mappa  $\phi: (X, A, x_0) \rightarrow (X, B, x_0)$  questa induce un omomorfismo  $\pi_n(\phi)$  sui gruppi di omotopia relativi per  $n \geq 2$ . Continuano a valere  $\pi_n(\phi \circ \psi) = \pi_n(\phi) \circ \pi_n(\psi)$ ,  $\pi_n(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\pi_n(X, A, x_0)}$  e l’Osservazione 1.14.

*Osservazione 1.26.* Considerando  $A = \{x_0\}$ ,  $\pi_n(X, x_0, x_0) = \pi_n(X, x_0)$ . Dunque i gruppi di omotopia assoluti sono un caso particolare di quelli relativi.

Ora enunciamo un risultato importante legato ai gruppi di omotopia relativi. Prima di tutto, ricordiamo che una successione  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  è esatta in  $B$ , se  $\text{Im}(f) = \ker(g)$ . Consideriamo gli omomorfismi indotti dalle inclusioni  $i: (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ ,  $j: (X, x_0, x_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ . Inoltre definiamo  $\delta$  come la funzione indotta restringendo le mappe  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  a  $I^{n-1}$ . Quest’ultima è chiamata *bordo* ed è un omomorfismo quando  $n > 1$ .

**Teorema 1.27.** *La successione lunga*

$$\cdots \rightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{\pi_n(i)} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\pi_n(j)} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(A, x_0) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \pi_0(X, x_0)$$

è esatta.

*Dimostrazione.* Per dimostrarlo, deriviamo la successione esatta lunga di una tripla  $(X, A, B, x_0)$  con  $x_0 \in B \subset A \subset X$ :

$$\cdots \rightarrow \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \pi_1(X, A, x_0)$$

Quando  $B = x_0$  ci riduciamo alla successione esatta lunga per una coppia, con l’unica differenza che quella che vogliamo mostrare prosegue con altri due passi. Nonostante in quest’ultimi non sia definita una struttura di gruppo, si può verificare facilmente che l’esattezza continua a valere.

*Esattezza in  $\pi_n(X, B, x_0)$ :* Osserviamo che la composizione  $j_* i_*$  è zero dal momento che ogni mappa  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (A, B, x_0)$  rappresenta zero in  $\pi_n(X, A, x_0)$  per la Proposizione 1.24. Per vedere invece che  $\ker j_* \subset \text{Im } i_*$ , consideriamo un rappresentante  $f: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$  dello zero in  $\pi_n(X, A, x_0)$ . Allora sempre per il Criterio di Compressione (Proposizione 1.24),  $f$  è omotopa relativamente a  $\partial I^n$  ad una mappa con immagine in  $A$ , dunque  $[f] \in \pi_n(X, B, x_0)$  è nell’immagine di  $i_*$ .

*Esattezza in  $\pi_n(X, A, x_0)$ :* La composizione  $\delta j_*$  è zero dal momento che la restrizione di una mappa  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$  a  $I^{n-1}$  ha immagine

in  $B$ , dunque per la Proposizione 1.24 rappresenta zero in  $\pi_{n-1}(A, B, x_0)$ . Viceversa, supponiamo che la restrizione di  $f: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  a  $I^{n-1}$  rappresenti zero in  $\pi_{n-1}(A, B, x_0)$ . Allora  $f|_{I^{n-1}}$  è omotopa ad una mappa con immagine in  $B$  attraverso un'omotopia  $F: I^{n-1} \times I \rightarrow A$  relativa  $\partial I^{n-1}$ . Possiamo aggiungere  $F$  a  $f$  come in Figura 1.8 e otteniamo una nuova mappa  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$  che vista in  $(X, A, x_0)$  è evidentemente omotopa a  $f$ . Dunque  $[f] \in \text{Im } j_*$ .

*Esattezza in  $\pi_n(A, B, x_0)$ :* La composizione  $i_*\delta$  è zero dal momento che la restrizione di una mappa  $f: (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \rightarrow (X, A, x_0)$  a  $I^n$  è omotopa relativamente  $\partial I^n$  ad una mappa costante attraverso  $f$  stessa. Viceversa, sia  $F$  un'omotopia fra  $f: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (A, B, x_0)$  e la mappa costante, attraverso mappe  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$ . Sia  $g = F|_{I^{n-1} \times I}$  definita come nella prima immagine della Figura 1.9. Riparametrizziamo l' $n$ -esima e l' $(n+1)$ -esima coordinata come nella seconda immagine, così facendo abbiamo una funzione che ha immagine tramite  $\delta$  data da  $f$  “aumentata” da  $g$ . In maniera analoga a quanto detto nell'esattezza di  $\pi_n(X, B, x_0)$ , aumentare  $f$  con  $g$  dà poi lo stesso elemento in  $\pi_n(A, B, x_0)$ .  $\square$

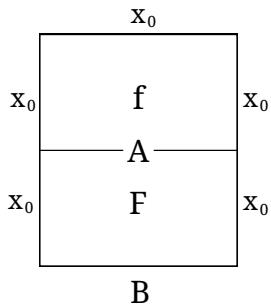


Figura 1.8

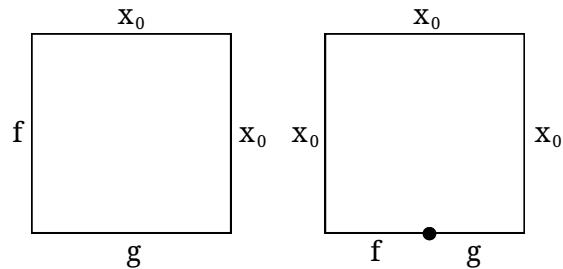


Figura 1.9

# Capitolo 2

## I fibrati

Una “successione esatta corta di spazi”  $A \hookrightarrow X \rightarrow X/A$  induce una successione esatta lunga in omologia, ma questo non avviene per i gruppi di omotopia visto che non soddisfano l’escissione. Tuttavia, come vedremo fra poco, esiste una “successione esatta corta di spazi” che dà origine a una successione esatta lunga in omotopia. Questa sorta di “successione esatta corta”  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  è chiamata *fibrato*.

### 2.1 La successione esatta lunga in omotopia

Iniziamo col definire le proprietà che ci porteranno alla successione esatta lunga dei gruppi di omotopia.

**Definizione 2.1** (Proprietà di estensione dei sollevamenti). Sia  $Z$  uno spazio topologico e  $A \subset Z$ . Si dice che la coppia  $(Z, A)$  possiede la *proprietà di estensione dei sollevamenti* se, data una mappa  $E \rightarrow B$ , per ogni mappa  $Z \rightarrow B$ , esiste un sollevamento  $Z \rightarrow E$  che estende un sollevamento dato  $A \rightarrow E$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & B \end{array}$$

Se consideriamo  $(Z, A) = (X \times I, X \times \{0\})$  con  $X$  spazio topologico, otteniamo un caso particolare della proprietà precedente. Infatti, vale la seguente definizione:

**Definizione 2.2** (Proprietà di sollevamento delle omotopie). Si dice che una mappa  $p: E \rightarrow B$  ha la *proprietà di sollevamento delle omotopie* rispetto a uno spazio topologico  $X$  se, data un’omotopia  $g_t: X \rightarrow B$  e una mappa

$\tilde{g}_0: X \rightarrow E$  tale che  $p \circ \tilde{g}_0 = g_0$ , allora esiste un'omotopia  $\tilde{g}_t: X \rightarrow E$  che solleva  $g_t$ , ossia  $p \circ \tilde{g}_t = g_t$

Osserviamo ora un'ultima proprietà che segue sempre dalla Definizione 2.1. In particolare, se consideriamo la proprietà di estensione dei sollevamenti per la coppia  $(X \times I, X \times \{0\} \cup A \times I)$ , si ottiene una forma relativa della precedente definizione:

**Definizione 2.3** (Proprietà di sollevamento delle omotopie per una coppia). Si dice che una mappa  $p: E \rightarrow B$  ha la proprietà di sollevamento delle omotopie per una coppia  $(X, A)$  se ogni omotopia  $g_t: X \rightarrow B$  si solleva ad un'omotopia  $\tilde{g}_t: X \rightarrow E$  a partire da un sollevamento dato  $\tilde{g}_0: A \rightarrow E$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\tilde{g}_t|_A} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{g}_t & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{g_t} & B \end{array}$$

**Teorema 2.4.** Sia  $p: E \rightarrow B$  una mappa con la proprietà di sollevamento delle omotopie rispetto ai dischi  $D^k$  per ogni  $k \geq 0$ , e siano  $b_0 \in B$  e  $x_0 \in F := p^{-1}(b_0)$ . Allora la mappa  $p_*: \pi_n(E, F, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  è un isomorfismo per ogni  $n \geq 1$ . Inoltre, se  $B$  è connesso per archi, allora si ha la seguente successione esatta lunga

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F, x_0) \rightarrow \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x_0) \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow \pi_0(E, x_0) \rightarrow 0$$

*Osservazione 2.5.* La proprietà di sollevamento delle omotopie per i dischi  $D^k$  è equivalente alla proprietà di sollevamento delle omotopie per la coppia  $(D^k, \partial D^k)$ , questo perché sono entrambi casi particolari della Definizione 2.1 e le coppie  $(D^k \times I, D^k \times \{0\})$ ,  $(D^k \times I, D^k \times \{0\} \cup \partial D^k \times I)$  sono omeomorfe. Inoltre, la proprietà di sollevamento delle omotopie per dischi è equivalente alla proprietà di sollevamento delle omotopie per ogni coppia di complessi CW  $(X, A)$ . Per induzione sullo scheletro di  $X$ , è sufficiente costruire  $\tilde{g}_t$  su una cella di  $X \setminus A$  alla volta. Componendo con la mappa caratteristica  $\phi: D^k \rightarrow X$  di una cella otteniamo la riduzione al caso  $(D^k, \partial D^k)$ . Una mappa  $p: E \rightarrow B$  che soddisfa la proprietà di sollevamento delle omotopie rispetto ai dischi è talvolta chiamata *fibrazione di Serre*.

*Dimostrazione.* Mostriamo che  $p_*$  è suriettiva. Sia  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$  un rappresentante di un elemento in  $\pi_n(B, b_0)$ . La mappa costante in  $x_0$  fornisce un sollevamento di  $f$  a  $E$  sul sottospazio  $J^{n-1} \subset I^n$ . La proprietà

di sollevamento delle omotopie per la coppia  $(I^{n-1}, \partial I^{n-1})$  estende  $f$  ad un sollevamento  $\tilde{f}: I^n \rightarrow E$  tale che  $\tilde{f}(\partial I^n) \subset F$ , dal momento che  $f(\partial I^n) = b_0$ . Allora  $\tilde{f}$  rappresenta un elemento di  $\pi_n(E, F, x_0)$  con  $p_*([\tilde{f}]) = [f]$  visto che  $p \circ \tilde{f} = f$ .

Mostriamo che  $p_*$  è iniettiva. Siano  $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, F, x_0)$  tali che  $p_*([\tilde{f}_0]) = p_*([\tilde{f}_1])$ . Sia  $G: (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (B, b_0)$  un'omotopia tra  $p \circ \tilde{f}_0$  e  $p \circ \tilde{f}_1$ . Abbiamo un sollevamento parziale  $\tilde{G}$  dato da  $\tilde{f}_0$  su  $I^n \times \{0\}$ ,  $\tilde{f}_1$  su  $I^n \times \{1\}$  e la mappa costante in  $x_0$  su  $J^{n-1} \times I$ . Una volta permutate le ultime due coordinate di  $I^n \times I$ , la proprietà di sollevamento relativa delle omotopie ci dà un sollevamento  $\tilde{G}: I^n \times I \rightarrow E$ . Questa è un'omotopia  $\tilde{f}_t: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, F, x_0)$  da  $\tilde{f}_0$  a  $\tilde{f}_1$ . Dunque  $p_*$  è iniettiva.

Per l'ultima tesi del teorema sostituiamo  $\pi_n(B, b_0)$  al posto di  $\pi_n(E, F, x_0)$  nella successione esatta lunga per la coppia  $(E, F)$  del Teorema 1.27. Allora la mappa  $\pi_n(E, x_0) \rightarrow \pi_n(E, F, x_0)$  nella successione esatta diventa la composizione  $\pi_n(E, x_0) \rightarrow \pi_n(E, F, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0)$ , che non è altro che  $\pi_n(p): \pi_n(E, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$ . Infine, lo 0 al termine della successione, che corrisponde alla suriettività di  $\pi_0(F, x_0) \rightarrow \pi_0(E, x_0)$ , segue dal fatto che  $B$  sia connesso per archi. Infatti, un qualsiasi cammino in  $E$  da un punto arbitrario  $x \in E$  ad un punto in  $F$  può essere ottenuto sollevando un cammino in  $B$  da  $p(x)$  a  $b_0$ .  $\square$

## 2.2 Definizione di fibrato

Diamo la definizione di fibrato, e vediamo successivamente degli esempi.

**Definizione 2.6** (Fibrato). Una struttura di *fibrato* su uno spazio  $E$ , con *fibra*  $F$ , consiste in una proiezione  $p: E \rightarrow B$  tale che ogni punto di  $B$  abbia un intorno  $U$  per il quale esiste un omeomorfismo  $h: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  che faccia commutare il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times F \\ & \searrow p & \swarrow p_1 \\ & U & \end{array}$$

dove  $p_1: U \times F \rightarrow U$  è la proiezione sul primo fattore.

*Osservazione 2.7.* La commutatività del diagramma significa che  $h$  manda ogni fibra  $F_b = p^{-1}(b)$  omeomorficamente sulla coppia  $\{b\} \times F$ . Dunque le fibre  $F_b$  sono organizzate localmente come nel prodotto  $B \times F$ , ma non necessariamente globalmente. Una mappa  $h$  come sopra è chiamata una

*trivializzazione locale* del fibrato. Dal momento che  $h(x) = (p(x), h'(x))$ ,  $h$  è determinata dalla seconda coordinata, ossia una mappa  $h': p^{-1}(U) \rightarrow F$  che è un omeomorfismo su ogni fibra  $F_b$ .

La struttura di fibrato è determinata dalla mappa  $p: E \rightarrow B$ , ma spesso scriviamo esplicitamente la fibra  $F \rightarrow E \rightarrow B$ . Lo spazio  $B$  è chiamato *spazio base*, mentre  $E$  è lo *spazio totale*.

*Esempio 2.8.* Un fibrato con uno spazio discreto come fibra, è un rivestimento. Viceversa, un rivestimento con il numero di fogli sopra un qualunque punto costante (per esempio un rivestimento sopra uno spazio base connesso), è un fibrato con fibra discreta.

*Esempio 2.9.* Dalla definizione si verifica immediatamente che il prodotto di spazi topologici, dotato della proiezione su una delle due componenti è un fibrato. Dunque  $S^1 \times I \rightarrow S^1$ , il cilindro con la proiezione sulla prima componente, o  $S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ , il toro, sono esempi di fibrati *banali*.

*Esempio 2.10.* Il nastro di Möbius è un fibrato non banale con spazio base  $S^1$  e fibra un intervallo. In particolare, sia  $E$  il quoziente di  $I \times [-1, 1]$  attraverso la relazione di equivalenza  $(0, v) \sim (1, -v)$  come nella Figura 2.1, con  $p: E \rightarrow S^1$  indotta al quoziente dalla proiezione  $I \times [-1, 1] \rightarrow I$ . Dunque la fibra è  $[-1, 1]$ .

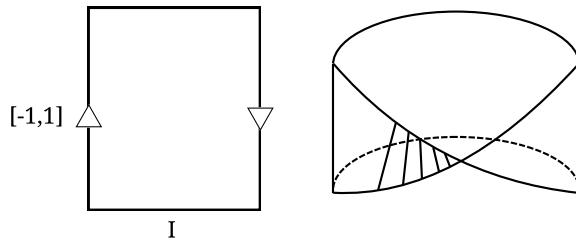


Figura 2.1: A sinistra la realizzazione del nastro di Möbius come quoziente del rettangolo. A destra il nastro con in evidenza le fibre.

Incollando insieme due copie di  $E$  usando come mappa di attaccamento l'identità sul bordo circolare dei due nastri di Möbius, otteniamo la bottiglia di Klein, come nella Figura 2.2.

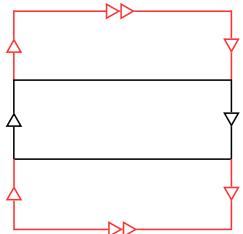


Figura 2.2: La realizzazione della bottiglia di Klein come attaccamento di due copie del nastro di Möbius.

In altri termini, consideriamo un cilindro  $I \times S^1$  e incolliamo  $\{0\} \times S^1$ ,  $\{1\} \times S^1$  con orientazione opposta. Ragionando in modo analogo a prima, otteniamo un fibrato su  $S^1$  con fibra  $S^1$ .

*Esempio 2.11.* Gli spazi proiettivi danno luogo a fibrati in modo naturale. Nel caso reale possiamo considerare il rivestimento dato dalla proiezione  $S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ , che sappiamo essere un fibrato in  $\mathbb{RP}^n$  con fibra  $S^0$  dall'Esempio 2.8. L'analogo di questo in ambito complesso è dato dal fibrato  $S^1 \rightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ , dove  $S^{2n+1}$  è la sfera unitaria in  $\mathbb{C}^{n+1}$  e  $\mathbb{CP}^n$  è definito come il quoziente di  $S^{2n+1}$  attraverso la relazione data da  $(z_0, \dots, z_n) \sim \lambda(z_0, \dots, z_n)$  per  $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$ . La proiezione  $p: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$  manda  $(z_0, \dots, z_n)$  nella sua classe di equivalenza  $[z_0 : \dots : z_n]$ , dunque le fibre sono copie di  $S^1$ . Mostriamo che la proprietà di trivialità locale dei fibrati è soddisfatta: sia  $U_i \subset \mathbb{CP}^n$  l'insieme delle classi  $[z_0 : \dots : z_n]$  con  $z_i \neq 0$  e definiamo la mappa

$$h_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times S^1, h_i(z_0, \dots, z_n) = ([z_0, \dots, z_n], z_i/|z_i|)$$

la quale porta fibre in fibre ed è un omeomorfismo con inversa data da  $([z_0, \dots, z_n], \lambda) \mapsto \lambda|z_i|z_i^{-1}(z_0, \dots, z_n)$ .

*Esempio 2.12.* Il caso  $n = 1$  dell'esempio precedente è particolarmente interessante visto che  $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$  e il fibrato diventa  $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$  con fibra, spazio totale e spazio base tutte sfere. Questo è conosciuto come *fibrato di Hopf* (o “*fibrazione di Hopf*”) e lo possiamo descrivere esplicitamente. Possiamo considerare che la proiezione  $S^3 \rightarrow S^2$  mandi  $(z_0, z_1)$  in  $z_0/z_1 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$ . Passando in coordinate polari abbiamo:

$$p(r_0 e^{i\theta_0}, r_1 e^{i\theta_1}) = (r_0/r_1) e^{i(\theta_0 - \theta_1)} \text{ con } r_0^2 + r_1^2 = 1$$

Per un certo  $\rho = r_0/r_1 \in (0, \infty)$  fissato, gli angoli  $\theta_0$  e  $\theta_1$  variano indipendentemente su  $S^1$ , quindi i punti  $(r_0 e^{i\theta_0}, r_1 e^{i\theta_1})$  formano un toro  $T_\rho \subset S^3$ . Variando  $\rho$ , questa unione disgiunta di tori  $T_\rho$  riempie  $S^3$ , se includiamo anche i casi limite  $T_0$  e  $T_\infty$  dove il raggio  $r_0$  e  $r_1$  sono zero, facendo degenerare i tori  $T_0$  e  $T_\infty$  in dei cerchi. Quest'ultimi sono i cerchi unitari in ciascun fattore  $\mathbb{C}$  di  $\mathbb{C}^2$ . Attraverso la proiezione stereografica di  $S^3$  fatta dal punto  $(0, 1)$  in  $\mathbb{R}^3$ , corrispondono al cerchio unitario nel piano  $xy$  e all'asse  $z$ . Inoltre ogni toro  $T_\rho$  è unione di fibre circolari, ciascuna descritta dalla coppia  $(\theta_0, \theta_1)$  tale che  $\theta_0 - \theta_1$  sia costante.

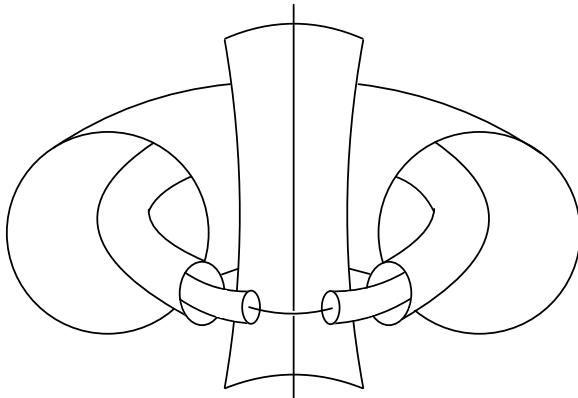


Figura 2.3: I tori  $T_\rho$  sono posizionati come in figura.

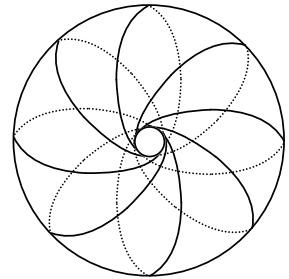


Figura 2.4: Uno dei tori decomposto in fibre circolari.

### 2.2.1 La proprietà di sollevamento nei fibrati

Vogliamo analizzare come i fibrati si comportano rispetto alla proprietà di sollevamento delle omotopie.

**Proposizione 2.13.** *Un fibrato  $p: E \rightarrow B$  ha la proprietà di sollevamento delle omotopie rispetto ad ogni coppia di complessi CW  $(X, A)$ .*

*Dimostrazione.* Dall’Osservazione 2.5 sappiamo che la proprietà di sollevamento delle omotopie per coppie CW è equivalente a quella per dischi o cubi. Sia  $G: I^n \times I \rightarrow B$ ,  $G(x, t) = g_t(x)$  l’omotopia che vogliamo sollevare, a partire da un sollevamento dato  $\tilde{g}_0$  di  $g_0$ . Scegliamo un ricoprimento aperto  $\{U_\alpha\}$  di  $B$  con trivializzazioni locali date da  $h_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ . Per compattezza di  $I^n \times I$  possiamo suddividere  $I^n$  in sottocubi  $C$  e  $I$  in intervalli  $I_j = [t_j, t_{j+1}]$  tali che ogni prodotto  $C \times I_j$  è mappato da  $G$  in un singolo  $U_\alpha$ . Possiamo assumere per induzione su  $n$  che  $\tilde{g}_t$  sia già costruita sopra  $\partial C$  per ogni sottocubo  $C$ . Per estendere  $\tilde{g}_t$  su  $C$  possiamo procedere per passi, costruendo il sollevamento per  $t$  in ogni intervallo successivo  $I_j$ . Questo in effetti ci porta al caso in cui non è necessaria nessuna divisione di  $I^n \times I$ , dunque  $G$  mappa  $I^n \times I$  in un singolo  $U_\alpha$ . Allora abbiamo  $\tilde{G}(I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I) \subset p^{-1}(U_\alpha)$ , e componendo  $\tilde{G}$  con la trivializzazione locale  $h_\alpha$  ci porta al caso del prodotto  $U_\alpha \times F$ . In questo caso la prima coordinata di un sollevamento  $\tilde{g}_t$  è solo  $g_t$ , mentre la seconda dobbiamo costruirla. Quest’ultima può essere ottenuta dalla composizione  $I^n \times I \rightarrow I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I \rightarrow F$ , dove la prima mappa è una retrazione, e la seconda mappa è data da  $\tilde{g}_0$  e quello che avevamo in precedenza per induzione.  $\square$

*Esempio 2.14.* Applicando la precedente proposizione e il Teorema 2.4 ad un rivestimento  $p: E \rightarrow B$  con  $E$  e  $B$  connessi per archi e fibra discreta, si ottiene una successione esatta lunga che porta alla Proposizione 1.16, la quale affermava che  $\pi_n(p): \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(B)$  fosse un isomorfismo per  $n \geq 2$ . Ottieniamo anche una successione esatta corta  $0 \rightarrow \pi_1(E) \rightarrow \pi_1(B) \rightarrow \pi_0(F) \rightarrow 0$ , coerente con la teoria dei rivestimenti, in particolare con i seguenti risultati [Hat02, Proposizioni 1.31, 1.32]. Infatti quest'ultime affermano che  $\pi_1(p): \pi_1(E) \rightarrow \pi_1(F)$  sia iniettiva e che la fibra  $F$  possa essere identificata, tramite la proprietà di sollevamento dei cammini, con l'insieme delle classi laterali di  $\pi_1(p)(\pi_1(E))$  in  $\pi_1(B)$ .

*Esempio 2.15.* La successione esatta lunga descritta nel Teorema 2.4 per il fibrato di Hopf  $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$  dà gli isomorfismi  $\pi_2(S^2) \cong \pi_1(S^1)$  e  $\pi_n(S^3) \cong \pi_n(S^2)$  per ogni  $n \geq 3$ . Considerando il risultato [Hat02, Corollario 4.25], che afferma che  $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ , si ottiene che  $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ . In particolare questo gruppo è generato dalla classe di omotopia corrispondente alla mappa di Hopf  $S^3 \rightarrow S^2$ .



# Capitolo 3

## Le fibrazioni

In questo capitolo vogliamo studiare le *fibrazioni*, che in un certo senso possono essere pensate come un analogo dei fibrati da un punto di vista omotopico.

### 3.1 Introduzione alle fibrazioni

Innanzitutto, spieghiamo che cosa si intende con il termine fibrazione, e vediamo le principali differenze dai fibrati.

**Definizione 3.1** (Fibrazione). Una *fibrazione* è una mappa  $p: E \rightarrow B$  che ha la proprietà di sollevamento delle omotopie (Definizione 2.2) rispetto ad ogni spazio topologico  $X$ .

*Osservazione 3.2.* Si eredita la notazione dai fibrati, dunque  $E$  è lo spazio totale mentre  $B$  è lo spazio base.

*Esempio 3.3.* Una proiezione  $B \times F \rightarrow F$  è una fibrazione dal momento che possiamo scegliere sollevamenti della forma  $\tilde{g}_t(x) = (g_t(x), h(x))$ , a partire da  $\tilde{g}_0(x) = (g_0(x), h(x))$  dato.

In un fibrato tutte le fibre sono omeomorfe per definizione, questo però non è detto si verifichi per le fibrazioni, come mostra il seguente controesempio:

*Esempio 3.4.* Sia  $E$  il triangolo 2-dimensionale in  $\mathbb{R}^2$  con vertici  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Mostriamo che la mappa  $p: E \rightarrow [0, 1]$ , definita da  $p(x, y) = x$ , è una fibrazione, ma le sue fibre non sono tutte omeomorfe.

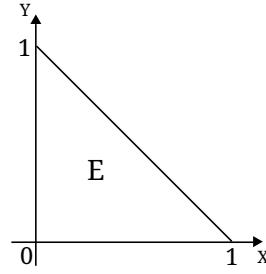


Figura 3.1: L'insieme descritto precedentemente.

1. Sia  $X$  uno spazio topologico e  $G: X \times I \rightarrow I$ ,  $G(x, t) = g_t(x)$  l'omotopia che vogliamo sollevare a partire dal sollevamento dato  $\tilde{g}_0$  di  $g_0$ . Abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{g}_0} & E \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{G} & I, \end{array}$$

i.e.  $G \circ i = p \circ \tilde{g}_0$ , con  $i: X \rightarrow X \times I$ ,  $i(x) = (x, 0)$ . Allora possiamo definire il sollevamento di  $G$  come:

$$\tilde{G}: X \times I \rightarrow E, \quad \tilde{G}(x, t) = (G(x, t), \min\{1 - G(x, t), q(\tilde{g}_0(x))\})$$

dove  $q: E \rightarrow I$ ,  $q(x, y) = y$ . La funzione è ben posta perché il minimo sul secondo fattore ci garantisce che l'immagine sia contenuta in  $E$ . Inoltre assicura che sia effettivamente un sollevamento a partire da  $\tilde{g}_0$ . Dunque  $p$  è una fibrazione.

2. Mostriamo che almeno due fibre non sono omeomorfe. Per farlo consideriamo  $\{0\}, \{1\} \in I$ . Si ha:

$$p^{-1}(\{0\}) = \{0\} \times [0, 1] \cong [0, 1] \not\cong \{(1, 0)\} = p^{-1}(\{1\}).$$

*Osservazione 3.5.* Nell'esempio precedente le fibre non sono omeomorfe, ma si può verificare facilmente che hanno lo stesso tipo di omotopia. In realtà questa proprietà vale in generale per tutte le fibre di una fibrazione sulla stessa componente连通的.

**Proposizione 3.6.** *Sia  $p: E \rightarrow B$  una fibrazione, allora le fibre  $F_b = p^{-1}(b)$  su ciascuna componente连通的 di  $B$ , sono tutte omotopicamente equivalenti.*

*Dimostrazione.* Un cammino  $\gamma: I \rightarrow B$  dà origine a un'omotopia  $g_t: F_{\gamma(0)} \rightarrow B$  con  $g_t(F_{\gamma(0)}) = \gamma(t)$ . L'inclusione  $F_{\gamma(0)} \hookrightarrow E$  fornisce un sollevamento  $\tilde{g}_0$ , dunque per la proprietà di sollevamento delle omotopie abbiamo un'omotopia  $\tilde{g}_t: F_{\gamma(0)} \rightarrow E$  con  $\tilde{g}_t(F_{\gamma(0)}) \subset F_{\gamma(t)}$  per ogni  $t$ . In particolare,  $\tilde{g}_1$  definisce una mappa  $L_\gamma: F_{\gamma(0)} \rightarrow F_{\gamma(1)}$ . Studiamo ora le proprietà della funzione che associa  $\gamma \mapsto L_\gamma$ :

- (a) Se  $\gamma \simeq \gamma'$  relativamente  $\partial I$ , allora  $L_\gamma \simeq L_{\gamma'}$ . In particolare la classe di omotopia di  $L_\gamma$  è indipendente dalla scelta del sollevamento  $\tilde{g}_t$  di  $g_t$ .
- (b) Per una concatenazione di cammini  $\gamma * \gamma'$ ,  $L_{\gamma * \gamma'}$  è omotopo alla composizione  $L_\gamma \circ L_{\gamma'}$ .

Da queste affermazioni segue che  $L_\gamma$  è un'equivalenza omotopica con inversa omotopica data da  $L_{\bar{\gamma}}$ , dove  $\bar{\gamma}$  è il cammino inverso di  $\gamma$ . Prima di dimostrare le affermazioni precedenti, osserviamo che una fibrazione ha la proprietà di sollevamento delle omotopie per una coppia  $(X \times I, X \times \partial I)$ , perché le coppie  $(I \times I, I \times \{0\} \cup \partial I \times I)$  e  $(I \times I, I \times \{0\})$  sono omeomorfe, e restano tali quando si prende il prodotto per  $X$ .

Iniziamo col dimostrare (a): sia  $\alpha: I \times I \rightarrow B, \alpha(s, t)$ , un'omotopia tra  $\alpha(0, t) = \gamma(t)$  e  $\alpha(1, t) = \gamma'(t)$  relativa a  $\partial I$ . Questa determina una famiglia  $g_{st}: F_{\gamma(0)} \rightarrow B$  con  $g_{st}(F_{\gamma(0)}) = \alpha(s, t)$ . Siano  $\tilde{g}_{0,t}$  e  $\tilde{g}_{1,t}$  i sollevamenti che definiscono  $L_\gamma = \tilde{g}_{0,1}$  e  $L_{\gamma'} = \tilde{g}_{1,1}$ , e sia  $\tilde{g}_{s,0}$  l'inclusione  $F_{\gamma(0)} \hookrightarrow E$  per ogni  $s$ . Definiamo  $G_t(x, s): F_{\gamma(0)} \times I \rightarrow B, G_t(x, s) = g_{st}(x)$  e applichiamo la proprietà di sollevamento delle omotopie relativa alla coppia  $(F_{\gamma(0)} \times I, F_{\gamma(0)} \times \partial I)$ . Otteniamo un sollevamento  $\tilde{G}_t(x, s) := \tilde{g}_{st}$ , e considerando  $t = 1$  otteniamo un'omotopia tra  $\tilde{g}_{0,1}$  e  $\tilde{g}_{1,1}$ , ossia tra  $L_\gamma$  e  $L_{\gamma'}$ .

Analizziamo ora l'indipendenza della classe di omotopia di  $L_\gamma$  per la scelta di un sollevamento. Sia  $\tilde{g}_{1,t}$  come prima e sia  $\tilde{f}_{0,t}$  un sollevamento diverso da  $\tilde{g}_{0,t}$ . Il sollevamento  $\tilde{f}_{0,t}$  definisce una funzione  $\bar{L}_\gamma$ . Seguendo lo stesso ragionamento di prima si ottiene:

$$\bar{L}_\gamma = \tilde{f}_{0,1} \simeq \tilde{g}_{1,1} \simeq \tilde{g}_{0,1} = L_\gamma$$

da cui si ha la tesi. Analogamente per una scelta differente di  $\tilde{g}_{1,t}$ .

Per quanto riguarda (b): se consideriamo che  $\tilde{g}_t$  e  $\tilde{g}'_t$  definiscono, rispettivamente,  $L_\gamma$  e  $L_{\gamma'}$ , allora abbiamo un sollevamento  $\tilde{f}_t$  che definisce  $L_{\gamma * \gamma'}$ :

$$\tilde{f}_t = \begin{cases} \tilde{g}_{2t}, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \tilde{g}'_{2t-1} L_\gamma, & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e considerando la funzione ottenuta per  $t = 1$  concludiamo.  $\square$

Sorge naturale chiedersi se le fibrazioni soddisfano un analogo omotopico della proprietà di trivialità locale dei fibrati. Innanzitutto, osserviamo che

per una fibrazione  $p: E \rightarrow B$ , per qualsiasi sottospazio  $A \subset B$ , la restrizione  $p|_A: p^{-1}(A) \rightarrow A$  è una fibrazione. Dunque ci si può domandare se per ogni punto di  $B$ , esiste un intorno  $U$ , tale che la fibrazione  $p^{-1}(U) \rightarrow U$  è equivalente, sotto un certo aspetto, ad una proiezione  $U \times F \rightarrow U$ . La nozione naturale di equivalenza tra le fibrazioni è definita nel modo seguente:

**Definizione 3.7.** Siano  $p_1: E_1 \rightarrow B$  e  $p_2: E_2 \rightarrow B$  fibrazioni. Si dice che una mappa  $f: E_1 \rightarrow E_2$  preserva le fibre se  $p_1 = p_2 \circ f$ , oppure, equivalentemente, se  $f(p_1^{-1}(b)) \subset p_2^{-1}(b)$  per ogni  $b \in B$ .

**Definizione 3.8** (Equivalenza omotopica fibrata). Una mappa che preserva le fibre  $f: E_1 \rightarrow E_2$  è un'equivalenza omotopica a fibre se esiste una mappa che preserva le fibre  $g: E_2 \rightarrow E_1$ , tale che entrambe le composizioni  $f \circ g$  e  $g \circ f$  sono omotope all'identità, attraverso mappe che preservano le fibre.

*Osservazione 3.9.* Un'equivalenza omotopica fibrata può essere interpretata come una famiglia di equivalenze omotopiche corrispondenti alle fibre di  $E_1$  e  $E_2$ .

Vogliamo dimostrare che  $p: E \rightarrow B$  è localmente omotopicamente banale in modo fibrato, come descritto in precedenza, qualora  $B$  sia localmente contraibile. Per procedere, come prima cosa dobbiamo discutere un altro concetto di base:

**Definizione 3.10** (Fibrazione indotta). Consideriamo una fibrazione  $p: E \rightarrow B$  e una mappa  $f: A \rightarrow B$ . Si chiama fibrazione indotta (o “pullback fibration”) la mappa  $f^*(E) \rightarrow A$  tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f} & B, \end{array}$$

dove  $f^*(E) = \{(a, e) \in A \times E | f(a) = p(e)\}$  e le mappe senza nome sono le proiezioni su  $A$  ed  $E$  rispettivamente.

*Osservazione 3.11.* La proprietà di sollevamento delle omotopie continua a valere per la mappa  $f^*(E) \rightarrow A$  visto che un'omotopia  $g_t: X \rightarrow A$  dà la prima coordinata di un sollevamento  $\tilde{g}_t: X \rightarrow f^*(E)$ , mentre la seconda coordinata corrisponde al sollevamento ad  $E$  della composizione  $f \circ g_t$ . Quindi  $(\tilde{g}_t, \widetilde{f \circ g_t}): X \rightarrow f^*(E)$  è un sollevamento di  $g_t: X \rightarrow A$ .

**Proposizione 3.12.** *Data una fibrazione  $p: E \rightarrow B$  e un'omotopia  $f_t: A \rightarrow B$ , si ha che le fibrazioni indotte  $f_0^*(E) \rightarrow A$  e  $f_1^*(E) \rightarrow A$  sono omotopicamente equivalenti in modo fibrato.*

*Dimostrazione.* Scriviamo l'omotopia  $f_t$  come  $F: A \times I \rightarrow B$ . La fibrazione  $F^*(E) \rightarrow A \times I$  estende le fibrazioni  $f_0^*(E) \rightarrow A$  e  $f_1^*(E) \rightarrow A$  prendendo  $A \times \{0\}$  e  $A \times \{1\}$ . Dunque è sufficiente provare che per una fibrazione  $p: E \rightarrow B \times I$ , per ogni  $s \in [0, 1]$ , le fibrazioni ottenute restringendosi a  $E_s := p^{-1}(B \times \{s\}) \rightarrow B$  sono tutte omotopicamente equivalenti in modo fibrato.

Procediamo in modo simile a quanto fatto nella dimostrazione della Proposizione 3.6. Un cammino  $\gamma: I \rightarrow I$  dà origine a una mappa che preserva le fibre  $L_\gamma: E_{\gamma(0)} \rightarrow E_{\gamma(1)}$ , la quale è ottenuta sollevando l'omotopia  $g_t: E_{\gamma(0)} \rightarrow B \times I$ ,  $g_t(x) = (p(x), \gamma(t))$ , a partire dall'inclusione  $E_{\gamma(0)} \hookrightarrow E$ . Come nella Proposizione 3.6, si mostra che valgono le due proprietà (a) e (b), osservando che in (a) l'omotopia  $L_\gamma \simeq L_{\bar{\gamma}}$  preserva le fibre poiché è ottenuta sollevando un'omotopia  $h_t: E_{\gamma(0)} \times I \rightarrow B \times I$  della forma  $h_t(x, u) = (p(x), -)$ . Da (a) e (b) segue che  $L_\gamma$  è un'equivalenza omotopica fibrata con inversa omotopica data da  $L_{\bar{\gamma}}$ .  $\square$

**Corollario 3.13.** *Una fibrazione  $p: E \rightarrow B$  con spazio base  $B$  contraibile è omotopicamente equivalente in modo fibrato alla fibrazione prodotto  $B \times F \rightarrow B$ , dove  $F$  è una fibra di  $p$ .*

*Dimostrazione.* La fibrazione indotta su  $E \rightarrow B$  lungo l'identità  $B \rightarrow B$  è  $E \rightarrow B$  stessa, mentre la fibrazione indotta lungo una mappa costante  $B \rightarrow B$  è il prodotto  $B \times F$ . La tesi segue usando il fatto che  $B$  sia contraibile e la proposizione precedente.  $\square$

## 3.2 Lo spazio dei cammini

Esiste un modo per rendere una mappa qualsiasi, una fibrazione. Data una mappa  $f: A \rightarrow B$ , sia  $E_f$  lo spazio dato dalle coppie  $(a, \gamma)$ , dove  $a \in A$  e  $\gamma: I \rightarrow B$  un cammino in  $B$  con  $\gamma(0) = f(a)$ . Dotiamo  $E_f$  con la topologia indotta come sottospazio dalla topologia compatto-aperta di  $A \times B^I$ , con  $B^I$  lo spazio delle mappe  $I \rightarrow B$ .

**Proposizione 3.14.** *La mappa  $p: E_f \rightarrow B$ ,  $p(a, \gamma) = \gamma(1)$  è una fibrazione.*

*Dimostrazione.* La continuità di  $p$  segue considerando la composizione di funzioni:

$$E_f \rightarrow I \times B^I \rightarrow B, (a, \gamma) \mapsto (1, \gamma) \mapsto \gamma(1)$$

dove la continuità dell'ultima mappa segue dal risultato classico sulla topologia compatto-aperta che afferma che la mappa di valutazione è continua [Hat02, Proposizione A.14, punto (a)].

Verifichiamo che è una fibrazione. Sia  $g_t: X \rightarrow B$  e sia  $\tilde{g}_0: X \rightarrow E_f$  un sollevamento dato di  $g_0$ , che scriviamo come  $\tilde{g}_0(x) = (h(x), \gamma_x)$  con  $h: X \rightarrow A$  e  $\gamma_x: I \rightarrow B$ . Definiamo il sollevamento  $\tilde{g}_t: X \rightarrow E_f$ ,  $\tilde{g}_t(x) = (h(x), \gamma_x * g_{[0,t]}(x))$ , con la seconda coordinata uguale al cammino  $\gamma_x$  concatenato al cammino tracciato da  $g_s(x)$ , tenendo fisso  $x$  e variando  $0 \leq s \leq t$ . La concatenazione di cammini è ben definita dal momento che  $g_0(x) = p \circ \tilde{g}_0(x) = \gamma_x(1)$ . Per verificare che l'omotopia  $\tilde{g}_t$  è continua, la consideriamo come mappa  $X \times I \rightarrow E_f \subset A \times B^I$  e applichiamo una proprietà della topologia compatto-aperta [Hat02, Proposizione A.14, punto (b)]. Quest'ultima afferma che la continuità della mappa  $X \times I \rightarrow A \times B^I$  è equivalente alla continuità della mappa associata  $X \times I \times I \rightarrow A \times B$ .  $\square$

Possiamo identificare  $A$  con il sottospazio di  $E_f$  dato dalle coppie  $(a, \gamma)$  con  $\gamma$  il cammino costante in  $f(a)$ . Inoltre,  $E_f$  si retrae per deformazione su questo sottospazio restringendo progressivamente tutti i cammini  $\gamma$  a sottocammini sempre più brevi. La mappa  $E_f \rightarrow B$  si restringe a  $f$  quando considerata sui punti del sottospazio  $A$ , di conseguenza abbiamo fattorizzato una mappa arbitraria  $f: A \rightarrow B$  nella composizione  $A \hookrightarrow E_f \rightarrow B$ , data da un'equivalenza omotopica e una fibrazione. Possiamo anche pensare a questa costruzione come ad un modo per estendere  $f$  ad una fibrazione  $E_f \rightarrow B$ , allargando il dominio  $A$  di  $f$  ad uno spazio omotopicamente equivalente ad  $A$ .

**Definizione 3.15** (Fibra omotopica). La fibra  $F_f$  di  $E_f \rightarrow B$  è chiamata *fibra omotopica* di  $f$ . Essa consiste in tutte le coppie  $(a, \gamma)$  con  $a \in A$  e  $\gamma$  un cammino in  $B$  da  $f(a)$  ad un punto base fissato  $b_0 \in B$ .

Prendiamo in esame il caso in cui  $f: A \rightarrow B$  sia l'inclusione, allora  $E_f$  è lo spazio dei cammini in  $B$  che iniziano dai punti di  $A$ . In questa situazione, una mappa  $\phi: (I^{i+1}, \partial I^{i+1}, J^i) \rightarrow (B, A, x_0)$  si può reinterpretare come una mappa  $\phi': (I^i, \partial I^i) \rightarrow (F_f, \gamma_0)$ , dove  $\gamma_0$  è il cammino costante in  $x_0$  e  $F_f \subset E_f$  è la fibra omotopica su  $x_0$  (si osservi che per comodità di scrittura identifichiamo  $\gamma_0 \equiv (x_0, \gamma_0) \in F_f$ ). Dimostriamo questo fatto. Per prima cosa identifichiamo  $I^{i+1} \equiv I^i \times I$ , e indichiamo l'ultimo parametro con  $t \in I$ . Per ogni punto  $x \in I^i$ , definiamo il cammino:

$$\omega_x: I \rightarrow B, \omega_x(t) := \phi(x, t).$$

Dunque per ogni  $x$ , abbiamo un cammino in  $B$  dal punto iniziale  $\phi(x, 0) \in A$  a quello finale  $\phi(x, 1) = x_0$ , visto che  $(x, 0) \in \partial I^{i+1}$  e  $(x, 1) \in J^i$ . Quindi è sufficiente porre:

$$\phi': (I^i, \partial I^i) \rightarrow (F_f, \gamma_0), \quad \phi'(x) = \omega_x.$$

Si verifica facilmente che per ogni  $x \in \partial I^i$ ,  $\phi'(x) = \gamma_0$ , visto che  $x = (\dots, i, \dots)$  con la  $i$ -esima posizione uguale a 0 o 1 e quindi abbiamo  $(x, t) \in J^i$  e  $(x, t) \xrightarrow{\phi} x_0$ , per ogni  $t \in I$ . Il ragionamento precedente mostra che il gruppo  $\pi_{i+1}(B, A, x_0)$  può essere identificato con  $\pi_i(F_f, \gamma_0)$ . Da questo segue che la successione esatta lunga per la coppia  $(B, A)$  data dalla Proposizione 1.27 coincide con quella data dalla fibrazione  $E_f \rightarrow B$  della Proposizione 2.4. Un esempio notevole si ha quando  $f$  è l'inclusione di un punto  $b_0$  in  $B$ , ossia  $f: \{b_0\} \rightarrow B$ . In tal caso, lo spazio  $E_f$  coincide lo *spazio dei cammini*  $PB$  in  $B$  con punto iniziale  $b_0$ , e la proiezione  $p: PB \rightarrow B$  manda ogni cammino nel suo punto di arrivo. La fibra  $p^{-1}(b_0)$  è chiamata lo *spazio dei lacci*  $\Omega B$  e consiste in tutti i lacci in  $B$  con punto base  $b_0$ . Dal fatto che  $PB$  è contraibile, troncando progressivamente i cammini, si ha il seguente risultato:

**Proposizione 3.16.** *Sia  $f: \{x_0\} \hookrightarrow X$  l'inclusione di  $x_0 \in X$ . Allora  $\pi_n(X, x_0) \simeq \pi_{n-1}(\Omega X, x_0)$  per ogni  $n$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo la successione esatta lunga della Proposizione 2.4 data dalla fibrazione  $PX \rightarrow X$ . Abbiamo:

$$\dots \rightarrow \pi_n(PX, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(\Omega X, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(PX, x_0) \rightarrow \dots$$

e segue la tesi, visto che  $\pi_k(PX, x_0)$  è banale per ogni  $k$ .  $\square$

Se la costruzione della fibrazione  $f \mapsto E_f$  è applicata ad una mappa  $p: E \rightarrow B$ , che è già una fibrazione, ci si potrebbe aspettare che la fibrazione risultante  $E_p \rightarrow B$  sia strettamente correlata a quella originale. Infatti vale il seguente risultato:

**Proposizione 3.17.** *Se  $p: E \rightarrow B$  è una fibrazione, allora l'inclusione  $i: E \hookrightarrow E_p$  è un'equivalenza omotopica. Inoltre, le fibre omotopiche di  $p$  sono tutte omotopicamente equivalenti alle fibre originali.*

*Dimostrazione.* Applichiamo la proprietà di sollevamento delle omotopie all'omotopia  $g_t: E_p \rightarrow B$ ,  $g_t(e, \gamma) = \gamma(t)$ , a partire da  $\tilde{g}_0(e, \gamma) = e$ . Il sollevamento ottenuto  $\tilde{g}_t: E_p \rightarrow E$  è la prima coordinata dell'omotopia  $h_t: E_p \rightarrow E_p$ , la cui seconda coordinata è la restrizione del cammino  $\gamma$  all'intervallo  $[t, 1]$ . Dal momento che i punti finali di ciascun cammino  $\gamma$  non cambiano,  $h_t$  è una mappa che preserva le fibre. Dunque, abbiamo:

$$h_0 = \text{Id}_{E_p}, \quad h_1(E_p) \subset E \quad \text{e} \quad h_t(E) \subset E,$$

per ogni  $t$ , con la solita identificazione di  $E$  come sottospazio di  $E_p$ . Concludiamo osservando che  $i \circ h_1 \simeq \text{Id}_{E_p}$  attraverso l'omotopia  $h_t$ , e  $h_1 \circ i \simeq \text{Id}_E$  tramite l'omotopia  $h_t|_E$  ristretta ad  $E$ . Quindi  $i$  è un'equivalenza omotopica fibrata.  $\square$

Abbiamo osservato che lo spazio dei lacci appare come fibra di una fibrazione  $PB \rightarrow B$ , con spazio totale contraibile. Presentiamo ora una sorta di risultato duale.

**Definizione 3.18** (Equivalenza omotopica debole). Si dice che una mappa  $f: X \rightarrow Y$  è un'*equivalenza omotopica debole*, se induce isomorfismi  $\pi_n(f): \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(Y, f(x_0))$  per ogni  $n$  e per qualsiasi scelta del punto base  $x_0$ .

**Proposizione 3.19.** *Se  $F \rightarrow E \rightarrow B$  è una fibrazione o un fibrato con  $E$  contraibile, allora esiste un'equivalenza omotopica debole  $F \rightarrow \Omega B$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $R: E \times I \rightarrow E$  una retrazione per deformazione di  $E$  su  $x_0 \in E$ , e consideriamo  $p \circ R: E \times I \rightarrow B$ . Allora, per ogni  $x \in E$ , abbiamo  $\gamma_x: I \rightarrow B$ ,  $\gamma_x(t) = p(R(x, t))$  un cammino in  $B$  da  $p(x)$  a  $p(x_0)$ . Si ottiene così una mappa  $E \rightarrow PB$ ,  $x \mapsto \bar{\gamma}_x$ , la quale, se composta con la fibrazione  $PB \rightarrow B$ , è  $p$ . Restringendo questa mappa ne otteniamo un'altra  $F \rightarrow \Omega B$ , dove  $F = p^{-1}(b_0)$ . Inoltre, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & E & \xrightarrow{p} & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \Omega B & \longrightarrow & PB & \longrightarrow & B \end{array}$$

Notiamo in particolare che la successione esatta lunga relativa a  $F \rightarrow E \rightarrow B$  è mappata in quella data da  $\Omega B \rightarrow PB \rightarrow B$ . Dal Lemma Dei Cinque [Hat02, The Five-Lemma], e dalla contraibilità di  $E$  e  $PB$ , segue che  $F \rightarrow \Omega B$  è un'equivalenza omotopica debole.  $\square$

Studiamo ora cosa accade quando si itera il processo di creazione di fibre omotopiche. Data una fibrazione  $p: E \rightarrow B$  con fibra  $F = p^{-1}(b_0)$ , sappiamo che l'inclusione di  $F$  nella fibra omotopica  $F_p$  è un'equivalenza omotopica. L'inclusione  $F \hookrightarrow E$  si estende ad una mappa  $i: F_p \rightarrow E$ ,  $i(e, \gamma) = e$ . Dimostriamo che  $i$  è una fibrazione. Consideriamo la fibrazione indotta  $p_1: p^*(PB) \rightarrow E$ , lungo  $p$ , dalla fibrazione  $PB \rightarrow B$ . Sia l'omotopia  $g_t: X \rightarrow E$  l'omotopia che vogliamo sollevare a partire da un sollevamento dato  $\tilde{g}_0$  di  $g_0$ . Possiamo costruire il diagramma commutativo sottostante:

$$\begin{array}{ccccc} & & p^*(PB) & \xrightarrow{h} & F_p \\ & \nearrow \tilde{g}_t & \downarrow p_1 & & \downarrow i \\ X & \xrightarrow{g_t} & E & \xrightarrow{\text{Id}_E} & E \end{array}$$

dove  $h: p^*(PB) \rightarrow F_p$  manda la coppia  $(e, \gamma)$  in  $(e, \bar{\gamma})$ , mentre  $\tilde{g}_t: X \rightarrow p^*(PB)$  è dato dalla proprietà di sollevamento delle omotopie rispetto alla fibrazione  $p_1$ . Abbiamo così dimostrato che  $i$  è una fibrazione.

Questo ci consente di iterare la procedura, prendendo la fibra omotopica  $F_i$  associata alla fibrazione  $i$  con la relativa mappa verso  $F_p$ . Otteniamo così la prima riga del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_j & \longrightarrow & F_i & \xrightarrow{j} & F_p \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \\ & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \simeq \uparrow \\ \cdots & \longrightarrow & \Omega E & \xrightarrow{\Omega p} & \Omega B & \longrightarrow & F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B \end{array}$$

La fibra effettiva di  $i$  su un punto  $e_0 \in p^{-1}(b_0)$  consiste nelle coppie  $(e_0, \gamma)$  dove  $\gamma$  è un laccio in  $B$  con punto base  $b_0$ . Quindi la fibra è  $\Omega B$  per definizione e l'inclusione  $\Omega B \hookrightarrow F_i$  è un'equivalenza omotopica. Nella seconda riga del diagramma, la mappa  $\Omega B \rightarrow F$  è la composizione delle mappe  $\Omega B \hookrightarrow F_i \rightarrow F_p \rightarrow F$ , dove l'ultima mappa è l'inversa omotopica nell'inclusione  $F \hookrightarrow F_p$ , dunque il quadrato in questione nel diagramma contiene mappe che commutano a meno di omotopia. La fibra omotopica  $F_i$  consiste nelle coppie  $(\gamma, \eta)$ , dove  $\eta$  è un cammino in  $E$  che termina in  $e_0$  e  $\gamma$  è un cammino in  $B$  che parte da  $p(\eta(0))$  e finisce in  $b_0$ . Un'inversa omotopica per l'inclusione  $\Omega B \hookrightarrow F_i$  è data dalla retrazione  $F_i \rightarrow \Omega B$  che manda  $(\gamma, \eta)$  nel laccio ottenuto componendo il cammino inverso di  $p \circ \eta$  con  $\gamma$ . Questa costruzione può essere iterata un numero indefinito di volte, ottenendo così una successione di fibrazioni conosciuta come *successione di Puppe*:

$$\cdots \rightarrow \Omega^2 B \rightarrow \Omega F \rightarrow \Omega E \rightarrow \Omega B \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow B$$

dove due qualunque mappe consecutive formano una fibrazione, a meno di un'equivalenza omotopica, e tutte le mappe a sinistra sono ottenute applicando il *funtore*  $\Omega$ . Quest'ultimo in particolare è definito nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \Omega : \mathbf{Top}_* &\longrightarrow \mathbf{Top}_* \\ (X, x_0) &\longmapsto (\Omega X, \gamma_{x_0}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) &\longmapsto \Omega(f) : (\Omega X, \gamma_{x_0}) \longrightarrow (\Omega Y, \gamma_{y_0}) \\ &\quad \gamma \longmapsto (f \circ \gamma) \end{aligned}$$

Concludiamo osservando che la successione esatta lunga per una qualsiasi fibrazione nella sequenza, coincide con la successione esatta lunga per  $F \rightarrow E \rightarrow B$  da un certo indice in poi.



# Capitolo 4

## Applicazioni

Data una successione di gruppi di omotopia, è possibile trovare uno spazio topologico che la realizzi? È necessario imporre delle condizioni sulla successione? Ci sono dei modi per realizzare degli spazi di Eilenberg-Maclane? Questi interrogativi si possono riassumere nel chiedersi se esistano strumenti per costruire spazi a partire da proprietà omotopiche assegnate. Queste sono le domande con cui il matematico Brayton Gray nel suo libro introduce le *torri* di Postnikov [Gra75, Capitolo 17], che definiremo e studieremo in quest'ultimo capitolo della tesi.

### 4.1 Alcuni concetti preliminari

Iniziamo richiamando alcuni concetti di carattere generale.

#### 4.1.1 Il teorema di Whitehead

I complessi CW sono costruiti usando le mappe di attaccamento, le quali hanno come dominio delle sfere. Di conseguenza è intuitivo che i gruppi di omotopia dei complessi CW forniscano molte informazioni. Rimandiamo al libro di Hatcher per una dimostrazione [Hat02, Teorema 4.5].

**Teorema 4.1** (Teorema di Whitehead). *Se  $f: X \rightarrow Y$  è un'equivalenza omotopica debole tra complessi CW, allora  $f$  è un'equivalenza omotopica. Inoltre, se  $f$  è l'inclusione di un sottocomplesso  $X \hookrightarrow Y$ , allora  $X$  è un retratto per deformazione di  $Y$ .*

*Esempio 4.2.* Consideriamo un complesso CW con tutti i gruppi di omotopia banali. Allora il suo tipo di omotopia è quello di un punto, poiché se prendiamo l'inclusione di una 0-cellula nel complesso, abbiamo che questa induce

un isomorfismo su tutti i gruppi di omotopia. Dunque per il Teorema 4.1, il complesso si retrae per deformazioni sulla 0-cellula.

Diamo ora un altro risultato utile per l'introduzione alle torri di Postnikov.

**Lemma 4.3** (Lemma di estensione). *Data una coppia di complessi CW  $(X, A)$  e una mappa  $f: A \rightarrow Y$  con  $Y$  connesso per archi, si ha che  $f$  si estende ad una mappa  $F: X \rightarrow Y$  se  $\pi_{n-1}(Y) = 0$  per ogni  $n$  tale che  $X \setminus A$  abbia almeno una cella di dimensione  $n$ .*

*Dimostrazione.* Assumiamo induttivamente che  $f$  sia estesa sopra l' $(n-1)$ -scheletro. Allora l'estensione sopra una  $n$ -cella esiste se e solo se la composizione della mappa di attaccamento della cella  $S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$  con  $f: X^{n-1} \rightarrow Y$  è omotopa alla mappa costante. Questa condizione è verificata se  $\pi_{n-1}(Y) = 0$ .  $\square$

#### 4.1.2 L'approssimazione cellulare

Presi una mappa tra complessi CW risulta talvolta conveniente richiedere che le celle vengano mandate in celle della stessa dimensione o inferiore. Una mappa  $f: X \rightarrow Y$ , che soddisfa  $f(X^n) \subset Y^n$  per ogni  $n$ , è chiamata *mappa cellulare*. Un risultato chiave in teoria dell'omotopia è *l'approssimazione cellulare* che afferma che una mappa arbitraria tra complessi CW può sempre essere deformata in una mappa cellulare:

**Teorema 4.4** (Approssimazione cellulare). *Ogni mappa  $f: X \rightarrow Y$  tra complessi CW è omotopa ad una mappa cellulare. Inoltre, se  $f$  era già cellulare su un sottocomplesso  $A \subset X$ , l'omotopia può essere scelta in modo che sia stazionaria su  $A$ .*

Per la dimostrazione rimandiamo il lettore al libro di Hatcher [Hat02, Teorema 4.8]. Otteniamo così il seguente corollario:

**Corollario 4.5.** *Per ogni coppia di interi  $0 \leq n < k$  abbiamo  $\pi_n(S^k) = 0$ .*

*Dimostrazione.* Se consideriamo  $S^n$  e  $S^k$  con la loro classica struttura di complesso CW, ossia composte da una 0-cellula ed una cella di dimensione massima, con le 0-celle come punti base, allora ogni mappa che preserva il punto base  $S^n \rightarrow S^k$  è omotopa ad una mappa cellulare. Visto che in  $S^k$  l'unica cella che ha dimensione minore di  $n$  è la 0-cellula, abbiamo che la mappa cellulare deve essere costante.  $\square$

Ogni mappa di coppie  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  di complessi CW può essere deformata attraverso mappe di coppie  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$  ad una mappa cellulare. Infatti, per il Teorema 4.4 deformiamo la restrizione  $f|_A: A \rightarrow B$  ad una mappa cellulare, successivamente estendiamo questo ad un omotopia di  $f$  su tutto  $X$ , e infine deformiamo la mappa ottenuta per renderla cellulare, mantendendola stazionaria su  $A$ .

### 4.1.3 L'approssimazione CW

L'obiettivo di questa sezione è mostrare che ogni spazio topologico è debolmente omotopicamente equivalente a un complesso CW. Per prima cosa diamo una definizione che generalizza l'idea di semplicemente connesso.

**Definizione 4.6** ( $n$ -connesso). Uno spazio topologico  $X$  con punto base  $x_0 \in X$  è detto  $n$ -connesso se  $\pi_i(X, x_0) = 0$  per ogni  $0 \leq i \leq n$ .

*Osservazione 4.7.* La nozione di 0-connesso equivale a dire che  $X$  è connesso per archi, così come 1-connesso equivale al fatto che  $X$  sia semplicemente connesso. Inoltre, visto che  $n$ -connesso implica 0-connesso, la scelta del punto base è irrilevante.

Esiste anche una versione relativa della precedente definizione:

**Definizione 4.8** (Coppia  $n$ -connessa). Una coppia  $(X, A)$  è detta  $n$ -connessa se  $\pi_i(X, A, x_0) = 0$  per ogni  $x_0 \in A$ , e per ogni  $1 \leq i \leq n$ .

*Osservazione 4.9.* Esiste anche una definizione per il caso  $i = 0$ , nonostante non abbiamo definito i gruppi di omotopia relativi  $\pi_0$ . In questo caso diciamo che è  $n$ -connesso se ogni mappa  $(D^0, \partial D^0) \rightarrow (X, A)$  è omotopa relativamente a  $\partial D^0$  ad una mappa  $D^0 \rightarrow A$ . Questo equivale a richiedere che ogni componente connessa di  $X$  contenga punti in  $A$ , dal momento che  $D^0$  è un punto e  $\partial D^0$  è l'insieme vuoto.

Ora introduciamo cosa vuol dire *approssimazione CW*:

**Definizione 4.10** (Approssimazione CW). Sia  $X$  uno spazio topologico e  $Z$  un complesso CW. Il dato di  $Z$  e di un'equivalenza omotopica debole  $f: Z \rightarrow X$  è detto *approssimazione CW* di  $X$ .

L'idea rimane quella di riuscire a lavorare con spazi più semplici, come i complessi CW, dove, per esempio, è possibile argomentare guardando cella per cella. A questo proposito sarà utile considerare anche versione semplificate per quanto riguarda le coppie  $(X, A)$ , richiedendo che godano di proprietà omotopiche migliori. Questo motiva la seguente definizione:

**Definizione 4.11** (Modello CW  $n$ -connesso per una coppia). Sia  $A \neq \emptyset$  un complesso CW e supponiamo di avere una coppia  $(X, A)$ . Un *modello CW  $n$ -connesso per la coppia*  $(X, A)$  è il dato di una coppia di complessi CW  $n$ -connessa  $(Z, A)$  e di una mappa  $f: Z \rightarrow X$  tale che la restrizione  $f|_A$  sia l'identità,  $\pi_i(f): \pi_i(Z) \rightarrow \pi_i(X)$  sia un isomorfismo per  $i > n$ , ed iniettiva per  $i = n$ .

*Osservazione 4.12.* La definizione appena data si riduce a quella precedente quando consideriamo  $n = 0$  e  $A$  è definito scegliendo un punto in ciascuna componente连通的. In questo caso  $\pi_0: \pi_0(Z) \rightarrow \pi_0(X)$  è suriettiva, oltre che iniettiva.

Concludiamo con un fatto dimostrato da Hatcher [Hat02, Corollario 4.19]

**Proposizione 4.13.** *Un modello CW  $n$ -connesso per la coppia  $(X, A)$  è unico a meno di un'equivalenza omotopica relativa ad  $A$ . In particolare, le approssimazioni CW di spazi sono uniche a meno di un'equivalenza omotopica.*

#### 4.1.4 Il Teorema di Hurewicz

Enunciamo un ultimo risultato importante in topologia algebrica che lega i gruppi di omotopia a quelli di omologia:

**Teorema 4.14** (Teorema di Hurewicz). *Se uno spazio topologico  $X$  è  $(n-1)$ -connesso,  $n \geq 2$ , allora  $\tilde{H}_i(X) = 0$  per  $0 \leq i < n$  e  $\pi_n(X) \cong H_n(X)$ . Se una coppia  $(X, A)$  è  $(n-1)$ -connessa,  $n \geq 2$ , con  $A$  semplicemente connesso e non vuoto, allora  $H_i(X, A) = 0$  per  $0 \leq i < n$  e  $\pi_n(X, A) \cong H_n(X, A)$ . Qui  $\tilde{H}_i$  indica l'omologia ridotta.*

In realtà siamo interessati a una versione più generale del caso relativo di quella appena enunciata. Definiamo  $\pi'_n(X, A, x_0)$  come il gruppo ottenuto da  $\pi_n(X, A, x_0)$  quoientando per il sottogruppo generato da tutti gli elementi della forma  $[\gamma] \cdot [f] - [f]$ , con  $[\gamma] \in \pi_1(A, x_0)$  e  $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$ . Nel caso  $n = 2$ , quando il gruppo non è detto che sia abeliano, consideriamo il sottogruppo normale generato dagli elementi di quella forma.

**Teorema 4.15** (Teorema di Hurewicz generale). *Siano  $X, A \neq \emptyset$  spazi topologici connessi per archi e sia  $n \geq 2$  un intero. Se la coppia  $(X, A)$  è  $(n-1)$ -connessa allora la funzione  $h': \pi'_n(X, A, x_0) \rightarrow H_n(X, A)$  è un isomorfismo e  $H_i(X, A) = 0$  per  $0 \leq i < n$ .*

La funzione  $h'$  è indotta sui gruppi quoienti precedentemente definiti dalla funzione  $h: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow H_n(X, A)$  chiamata *mappa di Hurewicz*. Se

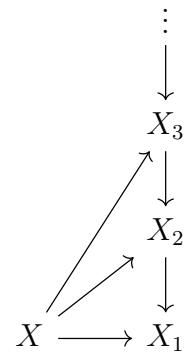
consideriamo  $\pi_n(X, A, x_0)$  per  $n > 0$  come l'insieme delle classi di omotopia di mappe  $f: (D^n, \partial D^n, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ , la mappa di Hurewicz è definita come  $h([f]) = H_n(f)(\alpha)$  dove  $\alpha$  è un generatore fissato di  $H_n(D^n, \partial D^n) \cong \mathbb{Z}$ , e  $H_n(f): H_n(D^n, \partial D^n) \rightarrow H_n(X, A)$  è la funzione indotta da  $f$  sui gruppi di omologia. La funzione  $h$  è un omomorfismo quando  $n > 1$ , ossia quando abbiamo una struttura di gruppo su  $\pi_n(X, A, x_0)$ .

Per le dimostrazione di questi teoremi e ulteriori approfondimenti si consulti il libro di Hatcher [Hat02, Sezione 4.2].

## 4.2 Le torri di Postnikov

Una *torre di Postnikov* per uno spazio topologico  $X$  connesso per archi è un diagramma commutativo come quello a destra, tale che:

1. La mappa  $X \rightarrow X_n$  induce isomorfismi sui gruppi di omotopia  $\pi_i$  per ogni  $0 \leq i \leq n$ .
2.  $\pi_i(X_n) = 0$  per ogni  $i > n$ .



*Esempio 4.16.* Sia  $X$  uno spazio topologico  $K(G, n)$  (e.g.  $S^1 = K(\mathbb{Z}, 1)$ ). Allora una torre di Postnikov per  $X$  è data da:

$$X_i = \begin{cases} X, & i \geq n \\ *, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove la mappa  $X \rightarrow X_i$  è data dall'identità, o dalla mappa costante nel punto \*.

In generale andremo a trattare solo il caso in cui lo spazio topologico  $X$  è un complesso CW connesso poiché in questo caso la torre di Postnikov esiste sempre. Infatti, consideriamo celle di dimensione  $n+2$  e utilizziamo le mappe cellulari  $S^{n+1} \rightarrow X$  che generano  $\pi_{n+1}(X)$  come mappe di attaccamento ad  $X$ . Osserviamo che una mappa  $f$  è omotopa alla mappa costante in  $\pi_{n+1}(X)$  se e solo se  $f$  si estende al disco, ossia se e solo se esiste una mappa  $F: D^{n+1} \rightarrow X$  tale che  $F|_{S^{n+1}} = f$ . Dunque lo spazio che otteniamo ha  $\pi_{n+1}$  banale. Allora ripetiamo il processo, attaccando celle di dimensione  $n+3$  e otteniamo uno spazio con  $\pi_{n+2}$  banale. Iterando un numero infinito di volte otteniamo il risultato, ossia uno spazio topologico  $X_n$  che soddisfa la definizione. Infatti, l'inclusione  $X \hookrightarrow X_n$  si estende ad una mappa  $X_{n+1} \rightarrow X_n$  grazie al Lemma di Estensione 4.3, dal momento che  $X_{n+1}$  è ottenuto da

$X$  attaccando celle di dimensione uguale o maggiore a  $n + 3$  e  $\pi_i(X_n) = 0$  per  $i > n$ . Gli spazi  $X_n$  possono essere pensati come troncature di  $X$ , le quali forniscono approssimazioni migliori al crescere di  $n$ . Infine osserviamo che la torre di Postnikov per un complesso CW connesso è unica a meno di equivalenze omotopiche, come testimoniato dalla Proposizione 4.13.

Se trasformiamo la mappa  $X_n \rightarrow X_{n-1}$  in una fibrazione, guardando alla successione esatta lunga del Teorema 2.4, ci accorgiamo che la sua fibra  $F_n$  è un  $K(\pi_n X, n)$ :

$$\pi_{i+1}(X_n) \rightarrow \pi_{i+1}(X_{n-1}) \rightarrow \pi_i(F_n) \rightarrow \pi_i(X_n) \rightarrow \pi_i(X_{n-1})$$

Possiamo sostituire ogni mappa  $X_n \rightarrow X_{n-1}$  con una fibrazione  $X'_n \rightarrow X'_{n-1}$ , partendo da  $X_2 \rightarrow X_1$  e proseguendo in dimensioni superiori. Per il passo induttivo, possiamo rimpiazzare la composizione  $X_n \rightarrow X_{n-1} \hookrightarrow X'_{n-1}$  con una fibrazione  $X'_n \rightarrow X'_{n-1}$  che fa commutare il diagramma a destra.

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xhookrightarrow{\quad} & X'_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{n-1} & \xhookrightarrow{\quad} & X'_{n-1} \end{array}$$

Dunque possiamo richiedere che una torre di Postnikov soddisfi anche la seguente condizione:

3. La mappa  $X_n \rightarrow X_{n-1}$  è una fibrazione con fibra un  $K(\pi_n X, n)$ .

Nella misura in cui le fibrazioni possono essere pensate come prodotti “intrecciati”, a meno di un’equivalenza omotopica, gli spazi  $X_n$  di una torre di Postnikov possono essere pensati come prodotti “intrecciati” di spazi di Eilenberg-Maclane  $K(\pi_n X, n)$ .

Per molti scopi si può sostituire il complesso CW  $X$  con uno degli  $X_n$  costruiti, per esempio se si è interessati all’omotopia o omologia in dimensione al più  $n$ . Tuttavia, per determinare completamente l’omotopia di  $X$  dalla sua torre di Postnikov, è necessario una sorta di limite.

**Definizione 4.17** (Limite inverso di una successione di spazi topologici). Data una successione di mappe  $\dots \rightarrow X_2 \rightarrow X_1$ , definiamo il *limite inverso*  $\varprojlim X_n$  come il sottospazio dello spazio prodotto  $\prod_n X_n$ , dato dalle sequenze di punti  $x_n \in X_n$ , tale che  $x_n$  viene mappato in  $x_{n-1}$  tramite la mappa  $X_n \rightarrow X_{n-1}$ .

Abbiamo inoltre una corrispondente nozione algebrica:

**Definizione 4.18** (Limite inverso di una successione di gruppi). Data una successione di omomorfismi di gruppi  $\dots \rightarrow G_2 \rightarrow G_1$ , definiamo il *limite inverso*  $\varprojlim G_n$  come il sottogruppo del gruppo prodotto  $\prod_n G_n$ , dato dalle successioni di elementi  $g_n \in G_n$ , tale che  $g_n$  viene mappato in  $g_{n-1}$  tramite l’omomorfismo  $G_n \rightarrow G_{n-1}$ .

**Proposizione 4.19.** *Per una successione arbitraria di fibrazioni*

$$\cdots \rightarrow X_2 \rightarrow X_1,$$

*la mappa naturale  $\lambda: \pi_i(\lim_{\leftarrow} X_n) \rightarrow \lim_{\leftarrow} \pi_i(X_n)$  è suriettiva. Inoltre,  $\lambda$  è iniettiva se le mappe  $\pi_{i+1}(X_n) \rightarrow \pi_{i+1}(X_{n-1})$  sono suriettive per  $n$  sufficientemente grande.*

*Dimostrazione.* Scegliamo un rappresentante per un elemento di  $\lim_{\leftarrow} \pi_i(X_n)$ , dato dalle mappe  $f_n: (S^i, s_0) \rightarrow (X_n, x_n)$ . Sappiamo che la mappa di proiezione  $p_n: X_n \rightarrow X_{n-1}$  porta  $[f_n]$  in  $[f_{n-1}]$  e consideriamo l'omotopia  $H: S^i \times I \rightarrow X_{n-1}$  tra  $p_n \circ f_n$  e  $f_{n-1}$ . Visto che  $p_n$  è una fibrazione, possiamo applicare la proprietà di sollevamento delle omotopie 2.2, ottenendo così un'omotopia  $\tilde{H}: S^i \times I \rightarrow X_n$ . In particolare vale  $p_n(\tilde{H}(x, 1)) = H(x, 1) = f_{n-1}$ , dove  $\tilde{H}(x, 1) =: f'_{n-1}$  è omotopo tramite  $\tilde{H}$  alla mappa  $f_n$ . Dunque possiamo sostituire la mappa di partenza  $f_n$  con una mappa omotopa, che fissa  $s_0$ , tale che  $p_n \circ f_n = f_{n-1}$ . Procedendo induttivamente per al variare di  $n \geq 2$ , otteniamo che la relazione vale per ogni  $n$ , e questo ci dà la suriettività di  $\lambda$ . Prima di trattare l'iniettività, ricordiamo la definizione di sottinsieme *cofinale*.

**Definizione 4.20** (Sottinsieme cofinale). Sia  $(I, \leq)$  un insieme parzialmente ordinato. Un sottinsieme  $J \subset I$  si dice cofinale in  $I$  se per ogni  $i \in I$ ,  $\exists j \in J$  tale che  $i \leq j$ .

Osserviamo che preso un sottoinsieme di indici cofinale, il limite inverso resta invariato. Di conseguenza anche eliminando un numero finito di termini alla fine della successione di spazi o gruppi otteniamo lo stesso limite inverso. Possiamo quindi assumere che le mappe  $\pi_{i+1}(X_n) \rightarrow \pi_{i+1}(X_{n-1})$  siano suriettive per ogni  $n$ . Consideriamo un rappresentante di  $\pi_i(\lim_{\leftarrow} X_n)$  dato dalla mappa  $f: S^i \rightarrow \lim_{\leftarrow} X_n$ , e supponiamo venga mandato da  $\lambda$  nell'elemento neutro di  $\lim_{\leftarrow} \pi_i(X_n)$ . La funzione relativa all' $n$ -esima coordinata di  $f$ ,  $f_n: S^i \rightarrow X_n$ , deve essere anche essa omotopa ad una mappa costante. Dunque si estende ad una funzione  $F_n: D^{i+1} \rightarrow X_n$ . Abbiamo che per i punti di  $S^i$  vale  $p_n \circ F_n = F_{n-1}$ , quindi possiamo pensare a  $p_n \circ F_n$  e  $F_{n-1}$  come alle restrizioni ai due emisferi di  $S^{i+1}$  di una mappa  $g_{n-1}: S^{i+1} \rightarrow X_{n-1}$ . Possiamo sfruttare la suriettività di  $\pi_{i+1}(X_n) \rightarrow \pi_{i+1}(X_{n-1})$  per scegliere  $F_n$  in modo tale che  $p_n \circ F_n \simeq F_{n-1}$  relativamente a  $S^i$ . Questo equivale a dire che  $g_{n-1}$  è omotopa ad una mappa costante. Analogamente a quanto fatto nella dimostrazione della suriettività, sfruttiamo la proprietà di sollevamento delle omotopie per la coppia  $(D^{i+1}, S^i)$  e otteniamo  $p_n \circ F_n = F_{n-1}$ . Procedendo

per induzione su  $n \geq 2$ . Osserviamo che  $f: S^i \rightarrow \lim_{\leftarrow} X_n$  è omotopa ad una mappa costante. Abbiamo così mostrato che  $\lambda$  è iniettiva.  $\square$

Otteniamo direttamente il seguente corollario:

**Corollario 4.21.** *Per la torre di Postnikov di un complesso CW connesso  $X$ , la mappa naturale  $X \rightarrow \lim_{\leftarrow} X_n$  è un'equivalenza omotopica debole. Dunque  $X$  è un'approssimazione CW di  $\lim_{\leftarrow} X_n$ .*

*Dimostrazione.* La composizione  $\pi_i(X) \rightarrow \pi_i(\lim_{\leftarrow} X_n) \xrightarrow{\lambda} \lim_{\leftarrow} \pi_i(X_n)$  è un isomorfismo, dal momento che  $\pi_i(X) \rightarrow \pi_i(X_n)$  è un isomorfismo per  $n$  sufficientemente grande.  $\square$

Abbiamo visto come decomporre un complesso CW connesso  $X$  nei termini della sua torre di Postnikov. Ora consideriamo il processo inverso. Vogliamo costruire la torre a partire da uno spazio topologico  $X_1$  di tipo  $K(\pi, 1)$ , costruendo induttivamente  $X_n$  a partire da  $X_{n-1}$ . L'ideale sarebbe che la fibrazione  $K(\pi, n) \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1}$  si estendesse a destra ad un altro termine, in modo da formare una successione di fibrazioni del tipo:

$$K(\pi, n) \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow K(\pi, n+1). \quad (*)$$

In questo caso  $X_n$  sarebbe la fibra omotopica di una mappa  $X_{n-1} \rightarrow K(\pi, n+1)$ .

*Osservazione 4.22.* La tesi non tratta di teoria della coomologia, ma un risultato di Hatcher [Hat02, Teorema 4.57] afferma che le classi di omotopia di mappe del tipo  $X_{n-1} \rightarrow K(\pi, n+1)$  sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di  $H^{n+1}(X_{n-1}; \pi)$ .

Come già osservato nel Capitolo 3 la fibra omotopica di una mappa  $X_{n-1} \rightarrow K(\pi, n+1)$  è la stessa cosa, a meno di invertire il verso di percorrenza dei cammini, del pullback della fibrazione dei cammini  $PK(\pi, n+1) \rightarrow K(\pi, n+1)$ , e il suo tipo di omotopia dipende solo dalla classe di omotopia della mappa  $X_{n-1} \rightarrow K(\pi, n+1)$ , come indicato dalla Proposizione 3.12.

*Osservazione 4.23.* L'ultimo termine nella successione di fibrazioni  $(*)$  non può essere nient'altro che uno spazio  $K(\pi, n+1)$ . Infatti, lo spazio dei lacci di un complesso CW è omotopicamente equivalente ad un complesso CW. Questa è una conseguenza di un teorema di Milnor [Mil59], il quale afferma che la fibra omotopica di una mappa arbitraria tra complessi CW ha lo stesso tipo di omotopia di un complesso CW. Allora, per la Proposizione 3.16, si ha  $\pi_{n+1}(K(\pi, n+1)) \cong \pi_n(\Omega K(\pi, n+1))$  e per il Teorema di Whitehead 4.1 otteniamo che lo spazio dei lacci ha lo stesso tipo di omotopia del primo termine della successione, ossia  $K(\pi, n)$ .

Diamo ora una definizione generale che sarà utile a breve:

**Definizione 4.24** (Fibrazione principale). Una fibrazione  $F \rightarrow E \rightarrow B$  si dice *principale* se esiste un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & E & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Omega B' & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & E' \longrightarrow B' \end{array}$$

dove la seconda riga è una successione di fibrazioni e le mappe verticali sono equivalenze omotopiche deboli.

Nel contesto descritto sopra:

$$\begin{array}{ccccccc} K(\pi, n) & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & X_{n-1} & & \\ \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \\ \Omega K(\pi, n+1) & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & X_{n-1} & \longrightarrow & K(\pi, n+1) \end{array}$$

Dunque se tutte le fibrazioni in una torre di Postnikov per  $X$  sono principali, allora abbiamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ K(\pi_3 X, 3) & \longrightarrow & X_3 & \xrightarrow{k_3} & K(\pi_4 X, 5) & & \\ & & \downarrow & & & & \\ K(\pi_2 X, 2) & \longrightarrow & X_2 & \xrightarrow{k_2} & K(\pi_3 X, 4) & & \\ & & \downarrow & & & & \\ K(\pi_1 X, 1) = X_1 & \xrightarrow{k_1} & & & & & K(\pi_2 X, 3) \end{array}$$

dove ogni  $X_{n+1}$  è, a meno di un'equivalenza omotopica, la fibra omotopica della mappa  $k_n: X_n \rightarrow K(\pi_{n+1}, n+2)$ . La mappa  $k_n$ , per quanto detto in precedenza nell'Osservazione 4.22, è equivalente ad una classe in  $H^{n+2}(X_n; \pi_{n+1} X)$  chiamata l' $n$ -esimo *k-invariante* di  $X$ . Da un punto di vista intuitivo, queste classi coomologiche possono essere viste come delle regole per costruire inductivamente  $X$  a partire dagli spazi di Eilenberg-Maclane. Per esempio, se tutti i  $k_n$  sono la funzione costante,  $X$  è solo lo spazio prodotto dei  $K(\pi_n X, n)$ , e nel caso generale  $X$  è una sorta di prodotto “intrecciato” dei  $K(\pi_n X, n)$ . La costruzione effettiva di uno spazio a partire dai suoi  $k$ -invarianti è in genere un procedimento troppo macchinoso per essere eseguito concretamente. Tuttavia, come strumento teorico, tale procedimento può rivelarsi estremamente utile. Il risultato seguente ci dice quando questo strumento è disponibile:

**Teorema 4.25.** *Un complesso CW connesso  $X$  ammette una torre di Postnikov di fibrazioni principali se e solo se  $\pi_1(X)$  agisce banalmente su  $\pi_n(X)$  per ogni  $n > 1$ .*

Osserviamo che nella definizione di fibrazione principale, la mappa  $F \rightarrow \Omega B'$  esiste automaticamente ed è un'equivalenza omotopica debole per ipotesi. Pertanto, capire se una fibrazione è principale si riduce al seguente problema:

**Problema 4.26.** *Data una mappa  $A \rightarrow X$ , esiste una fibrazione  $F \rightarrow E \rightarrow B$  e un diagramma commutativo come quello a destra tale che le mappe verticali siano equivalenze omotopiche deboli?*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \longrightarrow & E \end{array}$$

Nel problema precedente possiamo rimpiazzare  $A$  e  $X$  con complessi CW attraverso l'approssimazione CW, e cambiare la mappa risultante  $f: A \rightarrow X$  in un'inclusione attraverso il *cilindro mappante*, dove quest'ultimo è il quoziente di  $(A \times I) \sqcup X$  ottenuto identificando i punti  $(a, 1) \in A \times I$  con i punti  $f(a) \in X$ . In generale il cilindro mappante  $M_f$  si retrae per deformazione sul sottospazio  $X$  muovendo i punti  $(x, t)$  lungo il segmento  $\{x\} \times I \subset M_f$  fino al punto finale  $f(x) \in X$ . L'inclusione segue dall'identificazione di  $A$  con il sottospazio  $A \times \{0\} \subset M_f$ . La questione quindi diventa capire quando una coppia di complessi CW  $(X, A)$  è equivalente ad una coppia  $(E, F)$ , ossia capire quando esiste una fibrazione  $F \rightarrow E \rightarrow B$  e una mappa  $(X, A) \rightarrow (E, F)$ , per le quali entrambe le mappe  $X \rightarrow E$  e  $A \rightarrow F$  sono equivalenze omotopiche deboli. In generale la risposta sarà raramente affermativa, dal momento che la fibra omotopica di  $A \hookrightarrow X$  dovrebbe avere lo stesso tipo di omotopia debole di uno spazio dei lacci, che è una condizione molto restrittiva. Tuttavia, nella situazione di una torre di Postnikov, la fibra omotopica è proprio un  $K(\pi, n)$  con  $\pi$  abeliano dato che  $n \geq 2$ , e dunque ha lo stesso tipo di omotopia di uno spazio dei lacci. Tuttavia, dobbiamo anche richiedere che: l'azione di  $\pi_1(A)$  su  $\pi_n(X, A)$  sia banale per  $n \geq 1$ . Questo è equivalente a richiedere che l'azione di  $\pi_1(F)$  su  $\pi_n(E, F)$  sia banale. Mostriamo che ciò è sempre vero per le fibrazioni. Tramite l'isomorfismo  $\pi_n: \pi_n(E, F, x_0) \rightarrow \pi_n(B, x_0)$  un elemento  $\gamma\alpha - \alpha$ , con  $\gamma \in \pi_1(F)$  e  $\alpha \in \pi_n(E, F, x_0)$ , viene mappato nell'elemento  $\pi_1(p)(\gamma)\pi_n(\alpha) - \pi_n(\alpha)$  che è zero, perché  $\pi_1(p)$  appartiene al gruppo banale  $\pi_1(x_0)=0$ .

Nel capitolo precedente, subito dopo la Definizione 3.15, abbiamo visto che i gruppi di omotopia relativi  $\pi_n(X, A)$  sono sempre isomorfi al gruppo di omotopia  $\pi_{n-1}$  della fibra omotopica dell'inclusione  $A \hookrightarrow X$ . Quindi, quando la fibra omotopica è un  $K(\pi, n)$ , l'unico gruppo di omotopia relativo non ba-

nale è  $\pi_{n+1}(X, A) \cong \pi$ . In questa situazione, la condizione necessaria legata all'azione banale è anche sufficiente:

**Lemma 4.27.** *Sia  $(X, A)$  una coppia di complessi CW con  $X$  e  $A$  entrambi connessi, tali che la fibra omotopica dell'inclusione  $A \hookrightarrow X$  sia un  $K(\pi, n)$  con  $n \geq 1$ . Allora esiste una fibrazione  $F \rightarrow E \rightarrow B$  e una mappa di coppie  $(X, A) \rightarrow (E, F)$ , che induce le equivalenze omotopiche deboli  $X \rightarrow E$  e  $A \rightarrow F$ , se e solo se l'azione di  $\pi_1(A)$  su  $\pi_{n+1}(X, A)$  è banale.*

*Dimostrazione.* Per quanto detto in precedenza, rimane da dimostrare solo che la condizione sull'azione del  $\pi_1(A)$  su  $\pi_{n+1}(X, A)$  sia sufficiente. Abbiamo già osservato che i gruppi  $\pi_i(X, A)$  sono tutti zero, fatta eccezione per  $\pi_{n+1}(X, A) \cong \pi$ . Se l'azione di  $\pi_1(A)$  su  $\pi_{n+1}(X, A)$  è banale, il Teorema di Hurewicz 4.15 ci dà l'isomorfismo  $\pi_{n+1}(X, A) \cong H_{n+1}(X, A)$ . Dal momento che  $(X, A)$  è  $n$ -connesso, possiamo assumere che  $A$  contenga l' $n$ -scheletro di  $X$ , dunque  $X/A$  è  $n$ -connesso e il Teorema di Hurewicz generale 4.14 ci dà l'isomorfismo  $\pi_{n+1}(X/A) \cong H_n(X/A)$ . Quindi la mappa quoziente  $X \rightarrow X/A$  induce un isomorfismo  $\pi_{n+1}(X, A) \cong \pi_{n+1}(X/A)$ , visto che l'affermazione analoga per i gruppi di omologia è vera. Abbiamo che  $\pi_{n+1}(X/A) \cong \pi$ , e possiamo costruire un  $K(\pi, n+1)$  a partire da  $X/A$  attaccando celle di dimensione maggiore o uguale a  $n+3$ . Questo ci porta al seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/A \\ \downarrow & & \downarrow \simeq & \searrow k & \downarrow \\ F_k & \longrightarrow & E_k & \longrightarrow & K(\pi, n+1) \end{array}$$

dove le mappe verticali sono inclusioni, e la riga in basso è ottenuta convertendo la mappa  $k$  in una fibrazione. La mappa  $A \rightarrow F_k$  è un'equivalenza omotopica debole, come possiamo osservare dal Lemma Dei Cinque [Hat02, The Five-Lemma] applicato alla mappa tra la successione esatta lunga dei gruppi di omotopia per la coppia  $(X, A)$  e quella per  $(E_k, F_k)$ , calcolate tramite i Teoremi 1.27 e 2.4. Gli unici gruppi di omotopia relativa non banali sono per entrambi  $\pi_{n+1}$ , i quali si mappano isomorficamente in  $\pi_{n+1}(K(\pi, n+1))$ .  $\square$

Abbiamo ora tutti gli strumenti per dimostrare il Teorema 4.25.

*Dimostrazione.* Per il Lemma 4.27, tutto quello che dobbiamo fare è identificare l'azione di  $\pi_1(X)$  su  $\pi_n(X)$  con l'azione di  $\pi_1(X_n)$  su  $\pi_n(X_{n-1}, X_n)$  per  $n \geq 2$ , dove  $X_n \rightarrow X_{n-1}$  è interpretata come una mappa di inclusione. Dalla successione esatta

$$0 = \pi_{n+1}(X_{n-1}) \rightarrow \pi_{n+1}(X_{n-1}, X_n) \xrightarrow{\partial} \pi_n(X_n) \rightarrow \pi_n(X_{n-1}) = 0$$

abbiamo un isomorfismo  $\pi_{n+1}(X_{n-1}, X_n) \cong \pi_n(X_n)$  che rispetta l'azione di  $\pi_1(X_n)$ . Inoltre, la mappa  $X \rightarrow X_n$  induce isomorfismi sui  $\pi_1$  e sui  $\pi_n$ , dunque possiamo concludere.  $\square$

### 4.3 Le torri di Moore-Postnikov

Consideriamo una generalizzazione delle torri di Postnikov, in cui si parte da una mappa  $f: X \rightarrow Y$  tra spazi topologici connessi per archi e non da un singolo spazio come in precedenza. Una *torre di Moore-Postnikov* per  $f$  è un diagramma commutativo come il seguente:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & Z_3 & & \\
 & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\
 X & \xrightarrow{\quad} & Z_2 & \xrightarrow{\quad} & Y \\
 & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & Z_1 & & 
 \end{array}$$

dove ogni composizione  $X \rightarrow Z_n \rightarrow Y$  è omotopa ad  $f$ , e tale che:

- (1) La mappa  $X \rightarrow Z_n$  induce un isomorfismo sui  $\pi_i$  per  $i < n$  e una mappa suriettiva per  $i = n$ .
- (2) La mappa  $Z_n \rightarrow Y$  induce un isomorfismo su  $\pi_i$  per  $i > n$  e una mappa iniettiva per  $i = n$ .
- (3) La mappa  $Z_{n+1} \rightarrow Z_n$  è una fibrazione con fibra un  $K(\pi_n(F), n)$  dove  $F$  è la fibra omotopica di  $f$ .

Una torre di Moore-Postnikov si riduce al caso di una torre di Postnikov quando prendiamo  $Y$  come un punto e scegliamo  $X_n = Z_{n+1}$ . Scartiamo lo spazio  $Z_1$  perché ha tutti i gruppi di omotopia banali, dato che  $\pi_n(Z_1) \cong \pi_n(Y) = 0$  per ogni  $n \geq 1$ .

**Teorema 4.28.** *Ogni mappa  $f: X \rightarrow Y$  tra complessi CW ammette una torre di Moore-Postnikov, che è unica a meno di equivalenza omotopica. Una torre di Moore-Postnikov di fibrazioni principali esiste se e solo se  $\pi_1(X)$  agisce banalmente su  $\pi_n(M_f, X)$  per ogni  $n > 1$ , dove  $M_f$  è il cilindro mappante di  $f$ .*

*Dimostrazione.* Per la dimostrazione dell'esistenza e dell'unicità di un diagramma che soddisfa le proprietà (1) e (2) della definizione, rimandiamo il lettore a dei risultati classici che possono essere trovati nel libro di Hatcher [Hat02, Proposizioni 4.13, 4.18] applicati alla coppia  $(M_f, X)$ . Con questo diagramma, possiamo procedere come nel caso delle torri di Postnikov, sostituendo ogni mappa  $Z_n \rightarrow Z_{n-1}$  con una fibrazione omotopicamente equivalente, iniziando con  $Z_2 \rightarrow Z_1$  e scalando verso l'alto la torre. Possiamo applicare la proprietà di sollevamento delle omotopie per rendere i triangoli nella metà di sinistra strettamente commutativi. Dopo questi passaggi, i triangoli nella metà di destra commutano a meno di omotopia. Per renderli strettamente commutativi possiamo rimpiazzare ogni mappa verso  $Y$  con la composizione che passa da  $Z_1$ . Per vedere che le fibre di mappe  $Z_{n+1} \rightarrow Z_n$  sono spazi di Eilenberg-Maclane, come nella condizione (3), consideriamo due livelli successivi della torre:

$$\begin{array}{ccc} & Z_{n+1} & \\ X & \nearrow & \downarrow & \searrow \\ & Z_n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Possiamo assumere che le mappe  $Z_{n+1} \rightarrow Z_n$  siano inclusioni considerando i cilindri di mappa, prima quello di  $X \rightarrow Z_{n+1}$ , poi della nuova mappa  $Z_{n+1} \rightarrow Z_n$ , e infine della nuova mappa  $Z_n \rightarrow Y$ . Dal triangolo commutativo di sinistra del diagramma otteniamo che  $Z_{n+1} \rightarrow Z_n$  è un isomorfismo sui  $\pi_i$  per ogni  $i < n$  e una suriezione per  $i = n$ , dunque  $\pi_i(Z_n, Z_{n+1}) = 0$  per  $i < n + 1$ . Similmente, il triangolo di destra dà  $\pi_i(Z_n, Z_{n+1}) = 0$  per  $i > n + 1$ . Per mostrare che  $\pi_{n+1}(Z_n, Z_{n+1}) \cong \pi_{n+1}(Y, X)$  usiamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{n+1}(Z_{n+1}) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(Z_n) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(Z_n, Z_{n+1}) & \longrightarrow & \pi_n(Z_{n+1}) \longrightarrow \pi_n(Z_n) \\ \downarrow = & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow = \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ \pi_{n+1}(Z_{n+1}) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(Y) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(Y, Z_{n+1}) & \longrightarrow & \pi_n(Z_{n+1}) \longrightarrow \pi_n(Y) \\ \uparrow & & \uparrow = & & \uparrow & & \uparrow \cong \qquad \qquad \qquad \uparrow = \\ \pi_{n+1}(X) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(Y) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(Y, X) & \longrightarrow & \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y) \end{array}$$

La mappa verticale in alto a destra è iniettiva, mentre quella in basso a sinistra è suriettiva. Dunque per il Lemma Dei Cinque [Hat02, The Five-Lemma] le due mappe verticali sono isomorfismi. Dal momento che la fibra omotopica di un'inclusione  $A \hookrightarrow B$  ha i  $\pi_i$  uguali a  $\pi_{i+1}(B, A)$ , vediamo che la condizione (3) è soddisfatta.

L'affermazione riguardo a una torre principale di fibrazioni può essere ottenuta come un'applicazione del Lemma 4.27. Come abbiamo visto in precedenza, esiste un isomorfismo  $\pi_{n+1}(Y, X) \cong \pi_{n+1}(Z_n, Z_{n+1})$  che rispetta l'azione di  $\pi_1(X) \cong \pi_1(Z_{n+1})$ , e perciò il lemma ci dà il risultato.  $\square$

## 4.4 Applicazioni

Concludiamo la tesi con alcuni risultati in cui le torri di Postnikov sono centrali.

In topologia algebrica è comune incontrare situazioni in cui si vuole sollevare o estendere una mappa. Un esempio incontrato precedentemente è la proprietà di sollevamento delle omotopie. Nella forma più semplice, le domande relative all'estensione e ai sollevamenti possono essere riformulate in uno dei seguenti modi:

**Problema 4.29** (Il problema dell'estensione). *Date una coppia di complessi CW  $(W, A)$  e una mappa  $A \rightarrow X$ , questa si estende ad una mappa  $W \rightarrow X$ ?*

**Problema 4.30** (Il problema del sollevamento). *Date una fibrazione  $X \rightarrow Y$  e una mappa  $W \rightarrow Y$ , esiste un sollevamento  $W \rightarrow X$ ?*

Per far sì che il problema dei sollevamenti includa casistiche come la proprietà di sollevamento delle omotopie, lo generalizziamo ad una forma relativa:

**Problema 4.31** (Il problema del sollevamento relativo). *Date una coppia di complessi CW  $(W, A)$ , una fibrazione  $X \rightarrow Y$ , e una mappa  $W \rightarrow Y$ , esiste un sollevamento  $W \rightarrow X$  che estende un sollevamento dato su  $A$ ?*

Ovviamente, ci possiamo ridurre al caso assoluto se prendiamo  $A = \emptyset$ . In realtà la forma appena enunciata include anche il problema dell'estensione di una mappa, che otteniamo scegliendo  $Y$  uguale ad un punto. Le condizioni che abbiamo messo, per quanto restrittive, sono spesso verificate in molti casi interessanti. Si potrebbero eliminare tali richieste, ma questo porterebbe ad una difficoltà maggiore. Lo strumento della topologia algebrica che si occupa di trovare una soluzione a questi problemi è chiamato *teoria dell'ostruzione* e fa riferimento ad una procedura per definire una successione di classi di coomologia che misurano l'ostruzione a trovare una soluzione ai problemi precedenti. Ci sono due modi per sviluppare la teoria, praticamente identici:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \\ W & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow & \downarrow \\ W & \longrightarrow & Y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ W & \longrightarrow & Y \end{array}$$

il primo si occupa di costruire il sollevamento o l'estensione su una cella di  $W$  per volta, procedendo induttivamente sullo scheletro di  $W$ . Il secondo può essere più difficile, ma ha il vantaggio che diventa un'applicazione quasi banale delle torri di Postnikov per il problema dell'estensione, e delle torri di Moore-Postnikov per quello dei sollevamenti. Per un'introduzione più dettagliata all'argomento si consulti il libro di Hatcher [Hat02, Sezione 4.3, Obstruction Theory].

Come abbiamo spiegato nella tesi un problema centrale in topologia consiste nel calcolo dei gruppi di omotopia. Tuttavia ad oggi non si conosce nessun complesso CW finito, semplicemente connesso e non contraibile di cui sappiamo calcolare tutti i suoi gruppi di omotopia [Ale12]. Per questo un problema classico che affascina ed ha affascinato da sempre i matematici è lo studio dei gruppi di omotopia delle sfere  $S^n$  per  $n \geq 2$ . Utilizzando la teoria delle sequenze spettrali [McC01], che non trattiamo nella tesi, ed applicando la teoria delle torri di Postnikov che abbiamo discusso, uno può provare i seguenti teoremi:

**Teorema 4.32.** *Consideriamo le sfere 2-dimensionali allora vale:  $\pi_4(S^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .*

Similmente otteniamo:

**Teorema 4.33.** *Se  $X$  è un complesso CW finito, che è connesso, semplicemente connesso e non contraibile, allora  $\pi_i(X)$  contiene un sottogruppo isomorfo a  $\mathbb{Z}$  o a  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  per infiniti indici  $i$ .*

Questo teorema ci mostra effettivamente perché sia così difficile trovare un complesso CW  $X$  finito, semplicemente connesso e non contraibile di cui si conoscono tutti i  $\pi_n$ . Infatti questo avrà infiniti gruppi di omotopia di ordine superiore da studiare.



# Bibliografia

- [Ale12] Alexander Berglund, *Rational homotopy theory*, 2012, <https://staff.math.su.se/alexb/rathom2.pdf>.
- [Gra75] Brayton Gray, *Homotopy theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. Vol. 64, pp. xiii+368, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975, An introduction to algebraic topology.
- [Hat02] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, pp. xii+544, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [McC01] John McCleary, *A user's guide to spectral sequences*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 58, pp. xvi+561, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [Mil59] John Milnor, *On spaces having the homotopy type of a CW-complex*, Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1959), 272–280.
- [Rot88] Joseph J. Rotman, *An introduction to algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 119, pp. xiv+433, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [tD08] Tammo tom Dieck, *Algebraic topology*, EMS Textbooks in Mathematics, pp. xii+567, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.