

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Corso di Laurea Triennale in Matematica

# IL TEOREMA DI BÉZOUT PER CURVE TROPICALI

Tesi di Laurea in Geometria Tropicale

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
FABRIZIO CASELLI

Presentata da:  
NICOLA MEOLA

Anno Accademico 2024-2025



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>ii</b>
<b>1 L'algebra tropicale</b>	<b>1</b>
1.1 Il semianello tropicale . . . . .	1
1.2 I polinomi tropicali . . . . .	4
<b>2 Le curve tropicali</b>	<b>12</b>
2.1 Radici e ipersuperfici tropicali . . . . .	12
2.2 Dalla geometria algebrica classica a quella tropicale . . . . .	16
2.3 Le curve tropicali . . . . .	18
2.4 Condizione di bilanciamento delle curve tropicali . . . . .	29
<b>3 Il teorema di Bézout</b>	<b>33</b>
3.1 Intersezione di curve tropicali e molteplicità . . . . .	33
3.2 Il teorema di Bézout tropicale . . . . .	38
3.3 Una dimostrazione diversa di Bézout tropicale . . . . .	47
<b>Bibliografia</b>	<b>52</b>

# Introduzione

La geometria tropicale è una branca relativamente giovane della matematica. Le sue radici concettuali risalgono agli anni Settanta e Ottanta, quando si iniziò a parlare di semianello min-plus (o max-plus); all'epoca tali idee non erano ancora identificate come "tropicali", ma ne costituivano il terreno teorico. La formulazione moderna della teoria nacque soltanto nei primi anni Duemila, grazie ai lavori di Grigory Mikhalkin, Bernd Sturmfels e David Speyer. Il nome "tropicale" venne introdotto poco dopo, in onore del matematico e informatico brasiliano Imre Simon, tra i primi a dedicarsi a queste strutture.

L'obiettivo principale della geometria tropicale consiste nel tradurre problemi di geometria algebrica classica in domande riguardanti oggetti combinatori, in particolare complessi poliedrali in  $\mathbb{R}^n$ , cioè unione di poliedri tale che ogni loro intersezione sia una faccia comune, eventualmente vuota, dei poliedri coinvolti. In questo modo, questioni tradizionalmente descritte da varietà algebriche possono essere riformulate in termini più discreti e spesso più accessibili dal punto di vista combinatorio.

Si possono distinguere tre principali approcci alla geometria tropicale:

- *Approccio sintetico*: in questa prospettiva si studiano gli oggetti tropicali come entità autonome, lavorando direttamente sul semianello tropicale  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$  e costruendo varietà tropicali a partire da polinomi tropicali.
- *Approccio valutativo*: secondo questa visione la geometria tropicale nasce come lo studio delle immagini, tramite una valutazione, di varietà

algebriche definite su opportuni campi. Si tratta dell’approccio più vicino alla geometria algebrica classica, poichè permette di associare a una varietà algebrica un complesso poliedrale che ne riflette, almeno in parte, la struttura geometrica.

- *Approccio delle degenerazioni:* questo punto di vista si sviluppa dallo studio delle degenerazioni di varietà algebriche e mette in luce la relazione tra la geometria tropicale e i comportamenti limite delle famiglie algebriche.

In questa tesi si adotterà principalmente l’approccio sintetico alla geometria tropicale. Nel primo capitolo verrà introdotto il semianello tropicale  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$  con le sue proprietà di base, per poi passare allo studio dei polinomi tropicali e dei loro grafici. Successivamente, ci si concentrerà sulle curve tropicali, ossia varietà tropicali piane: in particolare verrà presentato un algoritmo per costruirne la struttura combinatoria e si mostrerà in che senso tale struttura è un complesso poliedrale pesato e bilanciato. Infine, nel terzo e ultimo capitolo, si prenderà in esame la controparte tropicale di uno dei risultati classici della geometria algebrica, ovvero il teorema di Bézout, del quale verranno fornite due diverse dimostrazioni.

Solo nel secondo capitolo verrà introdotta la nozione di valutazione e sarà enunciata una versione semplificata del teorema di Kapranov, collegata all’approccio valutativo alla geometria tropicale.

# Capitolo 1

## L'algebra tropicale

### 1.1 Il semianello tropicale

**Definizione 1.1.1** (Operazioni tropicali). Consideriamo l'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  unito a  $+\infty$  su cui si definiscono due nuove operazioni binarie:

- $\oplus : \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \times \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad x \oplus y := \min\{x, y\}.$
- $\odot : \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \times \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad x \odot y := x + y.$

chiamate rispettivamente *somma* e *prodotto tropicale*. Si indica col simbolo

$$\mathbb{R}_{\text{trop}} := (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \odot)$$

l'insieme  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  dotato di queste due nuove operazioni binarie.

**Definizione 1.1.2** (Semianello). Un *semianello*  $(A, +, \cdot)$  è una struttura algebrica dotata di un insieme  $A$  e di due operazioni binarie  $+$  e  $\cdot$ , dette rispettivamente somma e prodotto, che soddisfano le seguenti proprietà:

- i) proprietà commutativa della somma:

$$\forall a, b \in A, \quad a + b = b + a.$$

- ii) proprietà associativa della somma e del prodotto:

$$\forall a, b, c \in A, \quad a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

iii) esistenza e unicità dell'elemento neutro per la somma:

$$\exists! a' \in A : \forall a \in A, \quad a + a' = a' + a = a.$$

iv) proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma:

$$\forall a, b, c \in A, \quad (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c), \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

v) Se  $a'$  è l'elemento neutro per la somma introdotto nel punto iii), allora vale

$$\forall a \in A, \quad a \cdot a' = a' \cdot a = a'.$$

**Lemma 1.1.3.**  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$  è un semianello commutativo con unità.

*Dimostrazione.* Verichiamo che le operazioni di somma tropicale  $\oplus$  e di prodotto tropicale  $\odot$  soddisfano le proprietà viste in Definizione 1.1.2.

i)  $\forall a, b \in \mathbb{R}_{\text{trop}},$

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \min\{a, b\} \\ &= \min\{b, a\} \\ &= b \oplus a. \end{aligned}$$

ii)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_{\text{trop}},$

$$\begin{aligned} a \oplus (b \oplus c) &= \min\{a, \min\{b, c\}\} \\ &= \min\{a, b, c\} \\ &= \min\{\min\{a, b\}, c\} \\ &= (a \oplus b) \oplus c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \odot (b \odot c) &= a + (b + c) \\ &= (a + b) + c \\ &= (a \odot b) \odot c. \end{aligned}$$

iii) • *Esistenza:* Consideriamo l'elemento  $+\infty$ . Allora vale

$$\forall a \in \mathbb{R}_{\text{trop}}, \quad a \oplus (+\infty) = \min\{a, +\infty\} = a.$$

$+\infty$  è un elemento neutro per la somma tropicale.

- *Unicità:* Supponiamo per assurdo che esista  $\bar{a}$  in  $\mathbb{R}$  un altro elemento neutro per la somma tropicale. Allora vale

$$\bar{a} = \bar{a} \oplus (+\infty) = \min\{\bar{a}, +\infty\} = +\infty \Rightarrow \bar{a} = +\infty.$$

Questo è un assurdo; quindi, l'unico elemento neutro per la somma tropicale è  $+\infty$ .

iv)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_{\text{trop}}$ ,

$$\begin{aligned} a \odot (b \oplus c) &= a + \min\{b, c\} \\ &= \min\{a + b, a + c\} \\ &= (a \odot b) \oplus (a \odot c). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b \oplus c) \odot a &= \min\{b, c\} + a \\ &= \min\{b + a, c + a\} \\ &= (b \odot a) \oplus (c \odot a). \end{aligned}$$

v)  $\forall a \in \mathbb{R}_{\text{trop}}$ ,

$$\begin{aligned} a \odot (+\infty) &= a + (+\infty) \\ &= (+\infty) + a \\ &= (+\infty) \odot a \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

In più, è verificata la proprietà commutativa del prodotto tropicale:

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R}_{\text{trop}}, \quad a \odot b &= a + b \\ &= b + a \\ &= b \odot a. \end{aligned}$$

Infine, 0 è l'elemento neutro per il prodotto tropicale:

$$\forall a \in \mathbb{R}_{\text{trop}}, \quad a \odot 0 = a + 0 = 0 + a = 0 \odot a = a.$$

□

Per il Lemma 1.1.3  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$  è un semianello, ma non è un anello: infatti nessun elemento di  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$  eccetto  $+\infty$  ha un inverso additivo, in quanto l'equazione  $a \oplus b = +\infty$  ha come unica soluzione  $a = b = +\infty$ .

*Osservazione 1.1.4.*  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$  può essere definito in maniera analoga come

$$(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$$

dove

$$x \oplus y = \max\{x, y\}, \quad x \odot y = x + y.$$

In tal caso, l'elemento neutro per la somma è  $-\infty$ . E' del tutto analogo studiare geometria tropicale scegliendo come definizione di somma tropicale il massimo o il minimo tra due numeri: infatti, i due semianelli ottenuti sono isomorfi tramite l'applicazione

$$x \longmapsto -x$$

Esattamente come in aritmetica classica, in assenza di parentesi il prodotto tropicale ha la precedenza sulla somma tropicale:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_{\text{trop}}, \quad a \oplus b \odot c = \min\{a, b + c\}.$$

Inoltre, per facilitare la notazione si omette il simbolo  $\odot$  nel prodotto tropicale tra due numeri e si usa  $a^n$  per indicare il prodotto tropicale di  $a$  con se stesso  $n$  volte:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_{\text{trop}}, \quad ab = a \odot b, \quad a^n = \underbrace{a \odot a \odot \cdots \odot a}_{n \text{ volte}} = n \cdot a.$$

## 1.2 I polinomi tropicali

**Definizione 1.2.1** (Monomio tropicale). Un *monomio tropicale*  $m$  è una funzione

$$m : \mathbb{R}_{\text{trop}}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\text{trop}}$$

tale che

$$m(x_1, \dots, x_n) = c x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}.$$

dove

$$c \in \mathbb{R}_{\text{trop}}, \quad k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}.$$

In aritmetica classica,  $m$  è una funzione lineare a variabili  $x_1, \dots, x_n$ :

$$m(x_1, \dots, x_n) = c + k_1 x_1 + \dots + k_n x_n.$$

**Definizione 1.2.2** (Polinomio tropicale). Un *polinomio tropicale*  $p$  è dato dalla somma tropicale di un numero finito di monomi tropicali. In particolare, un polinomio tropicale  $p$  è una funzione

$$p : \mathbb{R}_{\text{trop}}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\text{trop}}$$

tale che

$$p(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{i=1}^N m_i(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{i=1}^N c_i x_1^{k_{i,1}} \dots x_n^{k_{i,n}}.$$

dove

$$c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}_{\text{trop}}, \quad k_{1,1}, \dots, k_{N,n} \in \mathbb{N}.$$

Usando l'aritmetica classica, vale

$$p(x_1, \dots, x_n) = \min_{1 \leq i \leq N} \{c_i + k_{i,1}x_1 + \dots + k_{i,n}x_n\}.$$

A parole, un polinomio tropicale è il minimo di un numero finito di funzioni lineari a variabili  $x_1, \dots, x_n$ .

**Definizione 1.2.3** (Grado di un polinomio tropicale). Con le stesse notazioni introdotte in Definizione 1.2.2, si dice che il polinomio  $p$  ha *grado*  $k$  dove

$$k := \max_{1 \leq i \leq N} \{k_{i,1} + \dots + k_{i,n}\}.$$

Si indica con  $\deg(p)$  il grado di un polinomio.

**Esempio 1.2.4.**

$$(i) \quad p_1(x) = 3x^3 \oplus (-2)x^2 \oplus 5x \oplus 1 = \min\{3x+3, 2x-2, x+5, 1\}.$$

Il grado di  $p_1$  è  $\deg(p_1) = 3$ .

$$(ii) \quad p_2(x, y) = 2xy \oplus 9x \oplus 1y \oplus 4 = \min\{x+y+2, x+9, y+1, 4\}.$$

Il grado di  $p_2$  è  $\deg(p_2) = 2$ .

*Osservazione 1.2.5.* Nella Definizione 1.2.2 è superfluo chiedere che i coefficienti  $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , ma basterebbe chiedere che  $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ : infatti, se esistesse  $i$  in  $\{1, \dots, N\}$  tale che  $c_i = +\infty$ , allora il monomio  $m_i(x_1, \dots, x_n)$  varrebbe costantemente  $+\infty$  per ogni scelta di  $(x_1, \dots, x_n)$  in  $\mathbb{R}_{\text{trop}}^n$ . Poichè  $+\infty$  è l'elemento neutro per la somma tropicale, il monomio  $m_i$  può essere omesso nella scrittura del polinomio tropicale.

*Osservazione 1.2.6.* Se esiste  $i$  in  $\{1, \dots, N\}$  tale che  $c_i = 0$ , allora tale coefficiente viene omesso nella scrittura dell' $i$ -esimo monomio in quanto 0 è l'elemento neutro per il prodotto tropicale, cioè

$$m_i(x_1, \dots, x_n) = x_1^{k_{i,1}} \dots x_n^{k_{i,n}} = 0 \ x_1^{k_{i,1}} \dots x_n^{k_{i,n}}.$$

**Esempio 1.2.7.**

$$p(x) = x^2 \oplus 4 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \text{il coefficiente di } x^2 \text{ è } 0, \\ \text{il coefficiente di } x \text{ è } +\infty. \end{cases}$$

**Definizione 1.2.8** (Grafico di un polinomio tropicale). Con le stesse notazioni introdotte in Definizione 1.2.2, si chiama *grafico* del polinomio tropicale  $p$  l'insieme dei punti

$$\{(x_1, \dots, x_n, p(x_1, \dots, x_n)) \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_{\text{trop}}^n\} \subseteq \mathbb{R}_{\text{trop}}^{n+1}.$$

*Osservazione 1.2.9.* Nella Definizione 1.2.2 un polinomio tropicale viene definito su  $\mathbb{R}_{\text{trop}}^n$ , ma ha senso restringere il suo dominio a  $\mathbb{R}^n$ : infatti, preso un polinomio tropicale

$$p(x_1, \dots, x_n) = \min_{1 \leq i \leq N} \{c_i + k_{i,1}x_1 + \dots + k_{i,n}x_n\},$$

supponendo che l' $i$ -esima variabile  $x_i$  sia  $= +\infty$  e le altre  $n - 1$  variabili siano in  $\mathbb{R}$ , allora tutti le funzioni lineari che presentano nella loro definizione la variabile  $x_i$  valgono costantemente  $+\infty$  e non contribuiscono al minimo. Quindi si possono eliminare; in questo modo restano solo quelle con variabili  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ . Si può concludere dunque che studiare un polinomio in  $n$  variabili appartenenti a  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$  in cui solo una di esse vale costantemente  $+\infty$  equivale a studiare un polinomio in  $n - 1$  variabili appartenenti a  $\mathbb{R}$ .

**Esempio 1.2.10.** Consideriamo il polinomio tropicale

$$p(x, y, z) = z^3 \oplus 2x^2y \oplus 7xz \oplus (-3)y = \min\{3z, 2x + y + 2, x + z + 7, y - 3\}.$$

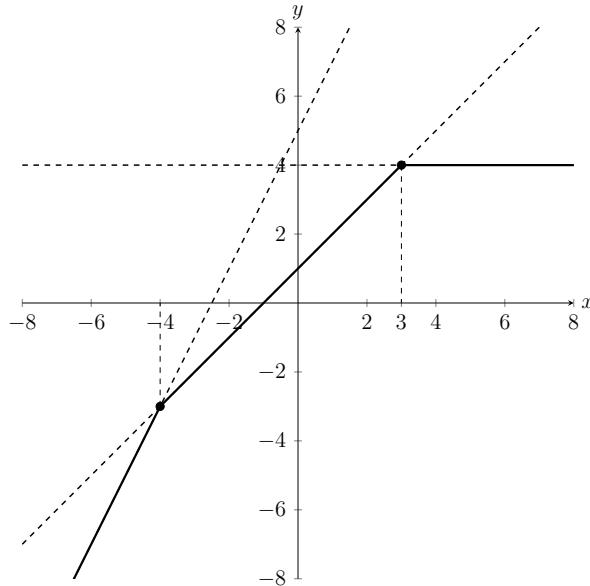
Fissata ora la variabile  $z = +\infty$ , vale

$$\begin{aligned} p(x, y, +\infty) &= \min\{+\infty, 2x + y + 2, x + (+\infty) + 7, y - 3\} \\ &= \min\{2x + y + 2, y - 3\} = 2x^2y \oplus (-3)y. \end{aligned}$$

Per Osservazione 1.2.5 e Osservazione 1.2.9, in questa tesi si considerano polinomi tropicali a coefficienti  $c_1, \dots, c_n$  in  $\mathbb{R}$  e con dominio  $\mathbb{R}^n$ ; in questo modo, anche il codominio di un polinomio tropicale sarà  $\mathbb{R}$ . Inoltre, con questa scelta, il grafico di un polinomio tropicale non sarà più un sottoinsieme di  $\mathbb{R}_{\text{trop}}^{n+1}$ , bensì un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; questo permette di rappresentarlo nello spazio euclideo come il grafico di un polinomio classico.

**Esempio 1.2.11.** Consideriamo il polinomio tropicale

$$p(x) = 5x^2 \oplus 1x \oplus 4 = \min\{2x + 5, x + 1, 4\} = \begin{cases} 2x + 5, & \text{se } x \leq -4, \\ x + 1, & \text{se } -4 \leq x \leq 3, \\ 4, & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$



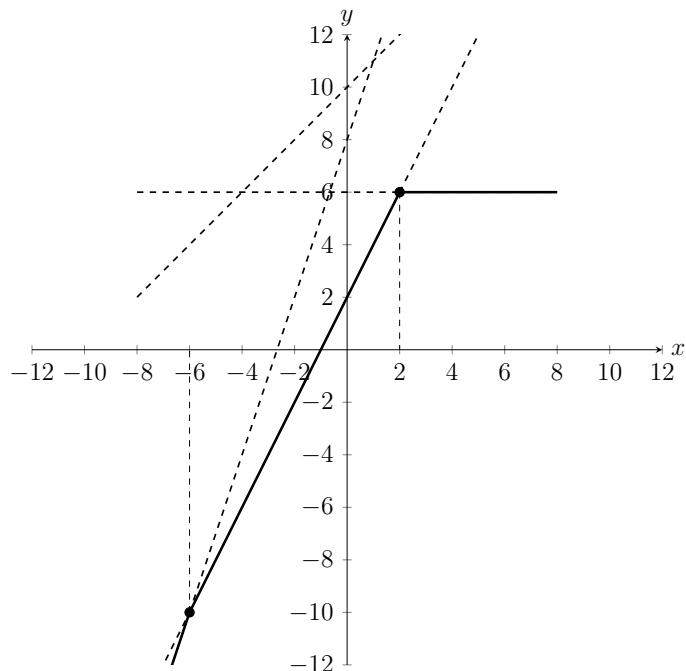
**Figura 1.** Grafico del polinomio  $p(x) = 5x^2 \oplus 1x \oplus 4$ .

In Esempio 1.2.11, il numero di parti lineari con pendenza diversa nel grafico coincide esattamente con il numero di monomi del polinomio, cioè 3. Tuttavia, questa uguaglianza non è sempre vera: in generale, supponendo che il polinomio sia la somma tropicale di  $N$  monomi, il suo grafico ha al massimo  $N$  parti lineari con pendenza diversa. Infatti, possono esserci casi in cui non tutte le funzioni lineari presenti all'interno del minimo sono raggiunte per qualche  $(x_1, \dots, x_n)$ .

**Esempio 1.2.12.** Consideriamo il polinomio tropicale

$$p(x) = 8x^3 \oplus 2x^2 \oplus 10x \oplus 6 = \min\{3x+8, 2x+2, x+10, 6\} = \begin{cases} 3x + 8, & \text{se } x \leq -6, \\ 2x + 2, & \text{se } -6 \leq x \leq 2, \\ 6, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

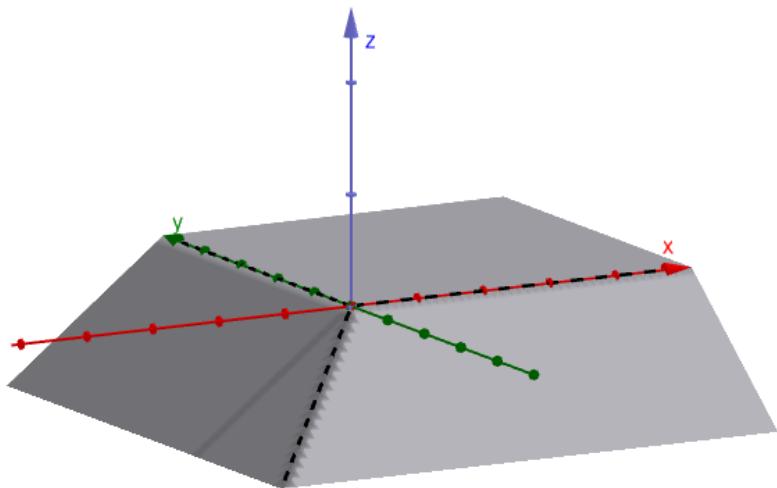
In questo caso, il termine  $x + 10$  non viene mai raggiunto dal minimo del polinomio. Quindi il suo grafico non avrà 4 parti lineari, bensì 3.



**Figura 2.** Grafico del polinomio  $p(x) = 8x^3 \oplus 2x^2 \oplus 10x \oplus 6$ .

**Esempio 1.2.13.** Consideriamo il polinomio tropicale

$$p(x, y) = x \oplus y \oplus 0 = \min\{x, y, 0\} = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq y \text{ e } x \leq 0, \\ y, & \text{se } y \leq x \text{ e } y \leq 0, \\ 0, & \text{se } 0 \leq x \text{ e } 0 \leq y. \end{cases}$$



**Figura 3.** Grafico del polinomio  $p(x, y) = x \oplus y \oplus 0$

Si nota dai grafici disegnati che i tre polinomi riportati negli esempi precedenti sono funzioni continue, concave e affini a tratti. Introduciamo anzitutto il concetto di funzione affine a tratti, per poi successivamente dimostrare tali proprietà per un polinomio tropicale generico.

**Definizione 1.2.14** (Funzione affine a tratti). Una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *affine a tratti* se esiste una decomposizione poliedrale finita  $\{P_1, \dots, P_m\}$  di  $\mathbb{R}^n$ , dove ciascun  $P_i$  è un poliedro (cioè intersezione finita di semispazi chiusi determinati da iperpiani), tale che per ogni  $i, j$  l'intersezione  $P_i \cap P_j$  sia una faccia (eventualmente vuota) comune di  $P_i$  e di  $P_j$  e tale che, per ogni

$i \in \{1, \dots, m\}$ , la restrizione di  $f$  a  $P_i$  sia una trasformazione affine, cioè

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in P_i, \quad f(x_1, \dots, x_n) = a_i + v_{i,1}x_1 + \dots + v_{i,n}x_n,$$

per opportuni  $a_i \in \mathbb{R}$  e  $v_{i,1}, \dots, v_{i,n} \in \mathbb{R}$ .

*Osservazione 1.2.15.* Nel caso di funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la condizione di essere affine a tratti coincide con la nozione di funzione lineare a tratti.

**Proposizione 1.2.16.** *Sia*

$$p(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{i=1}^N c_i x_1^{k_{i,1}} \dots x_n^{k_{i,n}}$$

*un polinomio tropicale. Allora valgono le seguenti:*

- i)  $p$  è continua.
- ii)  $p$  è affine a tratti.
- iii)  $p$  è concava.

*Dimostrazione.* i) Dimostriamo per induzione che date  $N$  funzioni continue  $f_1, \dots, f_N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , la funzione minimo  $m_N(x) = \min\{f_1(x), \dots, f_N(x)\}$  è continua.

(a) *Passo base:* Date due funzioni continue  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , allora la funzione minimo  $m_2(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  è continua: infatti si può scrivere come somma e composizione di funzioni continue, cioè

$$m_2(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}.$$

(b) *Passo induttivo:* Date  $N + 1$  funzioni continue  $f_1, \dots, f_{N+1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e supponendo per ipotesi induttiva che la funzione  $m_N$  sia continua, si ha

$$\begin{aligned} m_{N+1}(x) &= \min\{f_1(x), \dots, f_{N+1}(x)\} \\ &= \min\{\min\{f_1(x), \dots, f_N(x)\}, f_{N+1}(x)\} \\ &= \min\{m_N(x), f_{N+1}(x)\}. \end{aligned}$$

$m_{N+1}(x)$  è il minimo di due funzioni continue, quindi per il passo base è continua.

Siccome le funzioni  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto c_i + k_{i,1}x_1 + \dots + k_{i,n}x_n$  sono continue  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ , allora anche  $p(x_1, \dots, x_n) = \min_{1 \leq i \leq N} \{c_i + k_{i,1}x_1 + \dots + k_{i,n}x_n\}$  è continua.

- ii) L'affinità a tratti del polinomio tropicale  $p$  è diretta conseguenza della sua scrittura come minimo di funzioni lineari.
- iii) Poniamo  $m_i(x) = m_i(x_1, \dots, x_n) = c_i + k_{i,1}x_1 + \dots + k_{i,n}x_n$ . Poichè  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$  la funzione  $m_i$  è lineare, si ha

$$m_i(tx + (1-t)y) = t m_i(x) + (1-t) m_i(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [0, 1].$$

Di conseguenza, si ha che

$$p(tx + (1-t)y) = \min_{1 \leq i \leq N} \{m_i(tx + (1-t)y)\} = \min_{1 \leq i \leq N} \{t m_i(x) + (1-t) m_i(y)\}.$$

Ora, prese due qualsiasi famiglie finite di numeri reali  $\{A_i\}, \{B_i\}$  e per ogni  $t \in [0, 1]$ , vale

$$\min_i \{t A_i + (1-t) B_i\} \geq t \min_i \{A_i\} + (1-t) \min_i \{B_i\}.$$

Infatti, fissato  $i$ , si ha

$$t A_i + (1-t) B_i \geq t \min_j \{A_j\} + (1-t) \min_j \{B_j\},$$

e passando al minimo in  $i$  nel membro di sinistra la disegualanza si conserva. Applicando questa osservazione con  $A_i = m_i(x)$  e  $B_i = m_i(y)$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq i \leq N} \{t m_i(x) + (1-t) m_i(y)\} &\geq t \min_{1 \leq i \leq N} \{m_i(x)\} + (1-t) \min_{1 \leq i \leq N} \{m_i(y)\} \\ &= t p(x) + (1-t) p(y). \end{aligned}$$

Quindi

$$p(tx + (1-t)y) \geq t p(x) + (1-t) p(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [0, 1].$$

che è esattamente la definizione di funzione concava.

□

# Capitolo 2

## Le curve tropicali

### 2.1 Radici e ipersuperfici tropicali

Sia

$$p(x_1, \dots, x_n) = \min_{1 \leq i \leq N} \{c_i + k_{i,1}x_1 + \dots + k_{i,n}x_n\}$$

un polinomio tropicale.

**Definizione 2.1.1** (Radice di un polinomio tropicale). Una  $n$ -upla  $(a_1, \dots, a_n)$  in  $\mathbb{R}^n$  si dice *radice* di  $p$  se tale polinomio tropicale non è differenziabile in  $(a_1, \dots, a_n)$ .

Un'altra definizione di radice di un polinomio tropicale è la seguente:

**Definizione 2.1.2** (Radice di un polinomio tropicale). Si dice *radice* di  $p$  una  $n$ -upla  $(a_1, \dots, a_n)$  in  $\mathbb{R}^n$  in cui almeno due delle funzioni lineari che definiscono il polinomio  $p$  assumono lo stesso valore minimo.

Le due definizioni sono del tutto equivalenti. Infatti, se esistono indici distinti  $j$  e  $h$  tali che

$$p(a_1, \dots, a_n) = c_j + k_{j,1}a_1 + \dots + k_{j,n}a_n = c_h + k_{h,1}a_1 + \dots + k_{h,n}a_n,$$

allora il grafico di  $p$ , ottenuto come inviluppo inferiore degli iperpiani descritti dalle forme lineari  $c_i + \sum_{\ell=1}^n k_{i,\ell}x_\ell$ , coincide localmente con due iperpiani

che si incontrano in quel punto. Pertanto  $(a_1, \dots, a_n)$  è un punto di non differenziabilità del polinomio tropicale.

*Osservazione 2.1.3.* In geometria algebrica classica, le radici di un polinomio  $p(x_1, \dots, x_n)$  sono le  $n$ -uple in cui il polinomio si annulla. Se si adottasse la stessa definizione nel contesto tropicale, le radici di un polinomio tropicale sarebbero i punti in cui esso assume valore  $+\infty$ . Tuttavia, come evidenziato in Osservazione 1.2.5 e Osservazione 1.2.9, un polinomio tropicale a coefficienti reali e definito in  $\mathbb{R}^n$  non assume mai il valore  $+\infty$ , ma soltanto valori reali finiti; di conseguenza, con questa definizione, nessun polinomio tropicale avrebbe radici.

*Osservazione 2.1.4.* La scelta di questa nozione di radice per un polinomio tropicale si ispira ad un'altra formulazione classica presente nella geometria algebrica per i polinomi in una variabile: dato un polinomio  $p(x)$ , un numero reale  $a$  è una radice di molteplicità  $k$  se esiste un altro polinomio  $g(x)$  e  $k \in \mathbb{N}$  massimale tali che

$$p(x) = (x - a)^k g(x).$$

In maniera del tutto analoga, nel contesto tropicale si definisce  $a$  radice di un polinomio tropicale  $p(x)$  se esiste un polinomio tropicale di Laurent  $g(x)$  e  $k \in \mathbb{N}$  massimale per cui vale

$$p(x) = (x \oplus a)^k \odot g(x)$$

con  $k$  molteplicità di  $a$ .

Infatti, se  $a$  è una radice di  $p(x)$ , allora tale polinomio presenta un salto di pendenza in  $a$ . Indicando con  $m_{dx}$  e  $m_{sx}$  le pendenze del polinomio  $p(x)$  rispettivamente a destra e a sinistra di  $a$ , poniamo

$$k := m_{dx} - m_{sx}.$$

Consideriamo il polinomio tropicale

$$q(x) := (x \oplus a)^k = k \cdot \min\{x, a\}.$$

Questo è il polinomio "più semplice" che abbia un salto di pendenza di  $k$  in  $x = a$ ; infatti vale

$$q(x) = \begin{cases} k \cdot x & \text{se } x < a, \\ k \cdot a & \text{se } x > a. \end{cases}$$

Ponendo ora

$$g(x) := p(x) - q(x),$$

per costruzione si ottiene

$$p(x) = q(x) + g(x) = (x \oplus a)^k \odot g(x).$$

Osserviamo che  $g(x)$  è ancora un polinomio tropicale, ma può presentare anche esponenti negativi: infatti se

$$p(x) = \min_i \{a_i + m_i x\},$$

allora si ha

$$g(x) = \begin{cases} \min_i \{a_i + (m_i - k) x\} & \text{se } x < a, \\ \min_i \{(a_i - k a) + m_i x\} & \text{se } x > a. \end{cases}$$

Inoltre, si può verificare che tale  $k$  è massimale e che  $a$  non è una radice per il polinomio  $g(x)$ .

Viceversa, se un polinomio è della forma

$$p(x) = (x \oplus a)^k \odot g(x) = k \cdot \min\{x, a\} + g(x),$$

allora  $p(x)$  presenta un salto di pendenza di valore  $k$  in  $x = a$ ; in particolare,  $a$  è una radice di  $p$ .

**Definizione 2.1.5** (Ipersuperficie tropicale). L'insieme di tutte le radici di un polinomio tropicale  $p(x_1, \dots, x_n)$  è detto *ipersuperficie tropicale* di  $p$  e si indica con  $V(p)$ .

**Esempio 2.1.6.** In Esempio 1.2.11, dal grafico in Figura 1 si vede come i punti di non differenziabilità del polinomio

$$p(x) = 5x^2 \oplus 1x \oplus 4 = \min\{2x + 5, x + 1, 4\}$$

sono  $x = -4$  e  $x = 3$ . Analogamente, usando la Definizione 2.1.2, si ha:

- $2x + 5 = x + 1 \leq 4 \Rightarrow x = -4$
- $x + 1 = 4 \leq 2x + 5 \Rightarrow x = 3$
- $2x + 5 = 4 \leq x + 1 \Rightarrow \emptyset$

Quindi  $V(p) = \{3, -4\}$ .

Sapendo che le sue uniche radici sono 3 e -4, entrambe di molteplicità 1, per Osservazione 2.1.4 il polinomio può essere riscritto nella forma

$$p(x) = g(x) \odot (x \oplus 3) \odot (x \oplus (-4)) = g(x) + \min\{x, 3\} + \min\{x, -4\}$$

dove  $g(x)$  è un polinomio tropicale che non ha 3 e -4 come radici. Per determinarlo osserviamo che, nei vari intervalli determinati dalle radici, il polinomio coincide rispettivamente con uno dei suoi monomi:

$$p(x) = \begin{cases} g(x) + 2x = 2x + 5 & \text{se } x \leq -4, \\ g(x) + x - 4 = x + 1 & \text{se } -4 \leq x \leq 3, \\ g(x) + 3 - 4 = 4 & \text{se } x \geq 3, \end{cases} \implies g(x) = 5.$$

In conclusione, vale

$$p(x) = 5 \odot (x \oplus 3) \odot (x \oplus (-4)).$$

**Esempio 2.1.7.** In Esempio 1.2.13, procedendo come nel caso precedente, usando la Definizione 2.1.2 per il polinomio

$$p(x, y) = x \oplus y \oplus 0 = \min\{x, y, 0\}$$

si ha:

- $y = 0 \leq x \Rightarrow \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ ,
- $x = 0 \leq y \Rightarrow \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ ,
- $x = y \leq 0 \Rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y \leq 0\}$ .

Quindi  $V(p)$  è l'unione di questi tre insiemi.

## 2.2 Dalla geometria algebrica classica a quella tropicale

**Definizione 2.2.1** (Valutazione su  $K$ ). Sia  $K$  un campo. Una *valutazione* sul campo  $K$  è un'applicazione  $val : K \rightarrow \mathbb{R}_{\text{trop}}$  che soddisfa le seguenti proprietà:

- $val(ab) = val(a) + val(b)$ ,
- $val(a + b) \geq \min\{val(a), val(b)\} \quad \forall a, b \in K \setminus \{0\}$ ,
- $val(a) = +\infty \Leftrightarrow a = 0$ .

Inoltre, se  $val(a) \neq val(b)$  allora  $val(a + b) = \min\{val(a), val(b)\}$ .

Le valutazioni consentono di passare dal campo  $K$  a  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$  preservando, almeno in parte, la struttura algebrica di partenza. Infatti, la definizione di valutazione è molto simile a quella di omomorfismo: nella maggior parte dei casi, essa è compatibile con le operazioni di somma e prodotto, comportandosi quindi in modo analogo a un omomorfismo di strutture algebriche.

**Esempio 2.2.2** (Valutazione p-adica). *Fissato un numero primo  $p$ , si definisce la valutazione p-adica  $val_p$  come una mappa da  $\mathbb{Q}$  a  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$ . Ogni numero razionale  $q$  può essere scritto come rapporto di due interi  $a, b$  e ciascuno di essi può essere a sua volta scomposto come il prodotto di una potenza di  $p$  e un intero non divisibile per  $p$ . In formule, si ha:*

$$\forall q \in \mathbb{Q}, \exists a, b, c, d \in \mathbb{Z} : p \nmid c, d \text{ ed } \exists k, l \in \mathbb{N} \text{ tali che } q = \frac{a}{b} = \frac{p^k c}{p^l d} = p^{k-l} \frac{c}{d}.$$

Allora si definisce  $val_p(q) := k - l$ .

Ad esempio, per  $p = 3$  si ha  $val_3(\frac{54}{36}) = 1$  e  $val_3(16) = 0$ .

**Definizione 2.2.3** (Tropicalizzazione di un polinomio). Sia  $p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^N c_i x_1^{k_{i,1}} \dots x_n^{k_{i,n}}$  un polinomio in  $K[x_1, \dots, x_n]$  e sia  $val : K \rightarrow \mathbb{R}_{\text{trop}}$  una

valutazione sul campo  $K$ . Si definisce la *tropicalizzazione* di  $p$  il seguente polinomio tropicale:

$$trop(p) := \bigoplus_{i=1}^N \text{val}(c_i) \odot x_1^{k_{i,1}} \odot \dots \odot x_n^{k_{i,n}}.$$

**Teorema 2.2.4** (Kapranov). *Sia  $p(x_1, \dots, x_n)$  un polinomio con coefficienti nel campo  $K$  la cui varietà  $V(p)$  è un sottoinsieme di  $(K \setminus \{0\})^n$  e sia  $\text{val} : K \rightarrow \mathbb{R}_{\text{trop}}$  una valutazione su  $K$ . Allora vale*

$$V(trop(p)) = trop(V(p))$$

dove

$$trop(V(p)) := \{(\text{val}(x_1), \dots, \text{val}(x_n)) \mid (x_1, \dots, x_n) \in V(p)\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Il teorema di Kapranov afferma che, dato un polinomio con coefficienti in un campo  $K$ , ottenere la sua varietà algebrica e successivamente tropicalizzarla mediante una valutazione è equivalente al procedimento opposto, ovvero tropicalizzare il polinomio e successivamente considerare l'ipersuperficie tropicale associata. In altri termini, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{polinomi a coefficienti in } \mathbb{K} & \xrightarrow[V]{} & \text{curve algebriche } \subseteq \mathbb{K}^2 \\ \text{val} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \text{val} \\ \text{polinomi tropicali} & \xrightarrow[V_{\text{trop}}]{} & \text{curve tropicali } \subseteq \mathbb{R}^2 \end{array}$$

*Osservazione 2.2.5.* Il Teorema 2.2.4 rappresenta una versione semplificata del teorema di Kapranov, ottenuta imponendo l'ipotesi che la varietà  $V(p)$  sia contenuta in  $(K \setminus \{0\})^n$ . La formulazione completa del teorema di Kapranov si applica invece a varietà qualsiasi definite da polinomi di Laurent in  $x_1, \dots, x_n$ . Tuttavia, poiché questa estensione richiede strumenti ulteriori, non verrà trattata in questa tesi.

## 2.3 Le curve tropicali

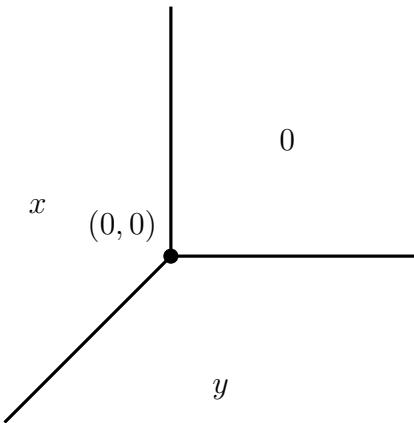
**Definizione 2.3.1** (Curva tropicale). L'ipersuperficie tropicale di un polinomio in due variabili  $p(x, y)$  si chiama *curva tropicale*.

Mentre per i polinomi a una variabile è relativamente semplice disegnare il grafico, per quelli a due variabili la situazione si complica, poiché il grafico è in  $\mathbb{R}^3$ ; per visualizzare il comportamento di un polinomio  $p(x, y)$  a due variabili, è quindi utile tracciare la sua curva tropicale in  $\mathbb{R}^2$  e indicare in ogni componente连通的 di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{V(p)\}$  quale valore assume il grafico in quella regione di piano.

**Esempio 2.3.2.** Consideriamo il polinomio

$$p(x, y) = x \oplus y \oplus 0 = \min\{x, y, 0\}.$$

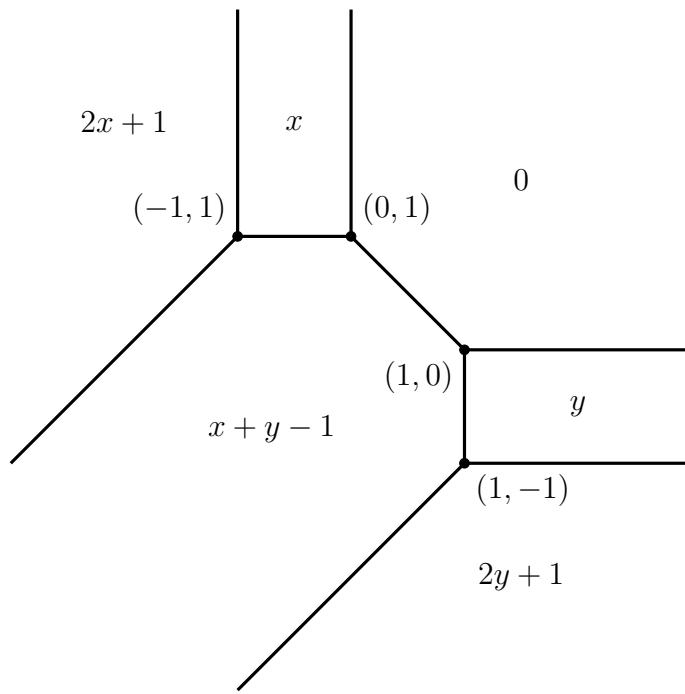
studiato in Esempio 2.1.7.



**Figura 4.** Ipersuperficie tropicale del polinomio  $p(x, y) = x \oplus y \oplus 0$ .

**Esempio 2.3.3.** Consideriamo il polinomio tropicale

$$\begin{aligned} p(x, y) &= 0 \oplus x \oplus y \oplus 1x^2 \oplus (-1)xy \oplus 1y^2 \\ &= \min\{0, x, y, 2x + 1, x + y - 1, 2y + 1\}. \end{aligned}$$



**Figura 5.** Curva tropicale del polinomio

$$p(x, y) = 0 \oplus x \oplus y \oplus 1x^2 \oplus (-1)xy \oplus 1y^2.$$

D'ora in poi ci si limiterà a considerare polinomi in due variabili, poiché l'obiettivo di questa tesi è lo studio delle proprietà delle curve tropicali.

Per polinomi con molti monomi, calcolare manualmente la relativa curva tropicale e rappresentarla nel piano secondo la Definizione 2.1.2 risulta un procedimento piuttosto lungo e laborioso. A tale scopo, esiste un algoritmo che consente di disegnare una curva tropicale a meno di riscalamento.

**Definizione 2.3.4** (Inviluppo convesso in  $\mathbb{R}^n$ ). Sia  $I$  sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ . Si chiama *inviluppo convesso* di  $I$  l'intersezione di tutti gli insiemi convessi che lo contengono. Equivalentemente, è il più piccolo sottoinsieme convesso di  $\mathbb{R}^n$  che contiene  $I$ .

**Definizione 2.3.5** (Politopo di Newton). Sia  $p(x, y)$  un polinomio. Si chiama *politopo di Newton* del polinomio  $p$  e si indica con  $\text{Newt}(p)$  l'inviluppo

convesso in  $\mathbb{R}^2$  dell'insieme

$$S := \left\{ (i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid \begin{array}{l} x^i y^j \text{ compare in } p(x, y) \text{ con} \\ \text{coefficiente diverso da } +\infty \end{array} \right\}.$$

**Definizione 2.3.6** (Politopo di Newton sollevato). Con le stesse notazioni della Definizione 2.3.5, si chiama *politopo di Newton sollevato* del polinomio  $p$  l'inviluppo convesso in  $\mathbb{R}^3$  dell'insieme

$$\{(i, j, a_{i,j}) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R} \mid (i, j) \in S, a_{i,j} \text{ è il coefficiente del monomio } x^i y^j \text{ di } p\}$$

e lo indichiamo con  $l - \text{Newt}(p)$ .

**Definizione 2.3.7** (Inviluppo convesso inferiore in  $\mathbb{R}^3$ ). Sia  $K$  l'inviluppo convesso di un sottoinsieme  $I$  di  $\mathbb{R}^3$ . Si chiama *inviluppo convesso inferiore* di  $K$  l'insieme dei suoi punti visti da  $(0, 0, -\infty)$ . Più precisamente, sono i punti  $P$  tali per cui, tracciando una semiretta  $H$  che parte da  $P$  in direzione negativa di  $z$ , allora  $H$  non interseca nessun altro punto del politopo.

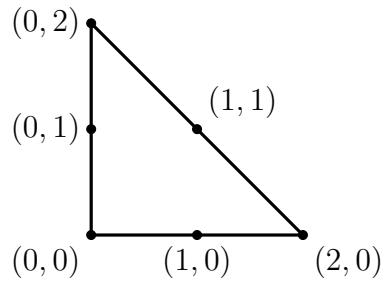
Partendo da un polinomio  $p(x, y)$  a due variabili, si costruisce il suo politopo di Newton sollevato  $l - \text{Newt}(p)$ . Considerandone il suo inviluppo convesso inferiore e proiettando questi punti sul piano  $xy$ , si ottiene una suddivisione del politopo di Newton  $\text{Newt}(p)$  di partenza.

**Esempio 2.3.8.** Consideriamo il polinomio

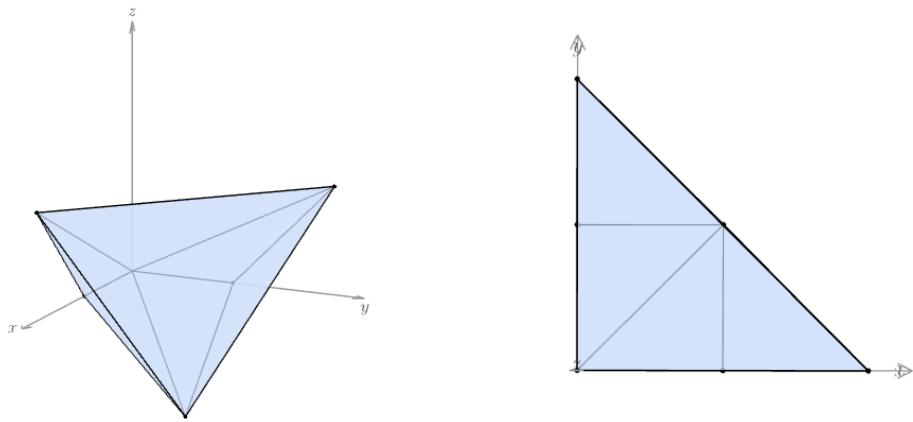
$$p(x, y) = 0 \oplus x \oplus y \oplus 1x^2 \oplus (-1)xy \oplus 1y^2$$

visto in Esempio 2.3.3. Allora si ha:

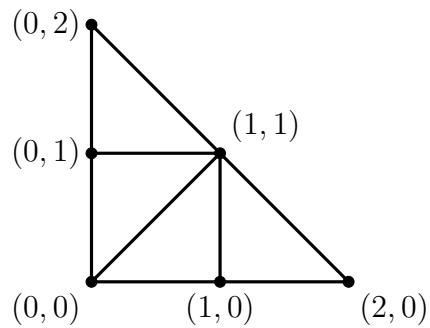
- $\text{Newt}(p) = \text{Conv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2)\};$
- $l - \text{Newt}(p) = \text{Conv}\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 0, 1), (1, 1, -1), (0, 2, 1)\}.$



**Figura 6.**  $\text{Newt}(p)$  con  $p(x,y) = 0 \oplus x \oplus y \oplus 1x^2 \oplus (-1)xy \oplus 1y^2$ .



**Figura 7.**  $l\text{-}\text{Newt}(p)$  con  $p(x,y) = 0 \oplus x \oplus y \oplus 1x^2 \oplus (-1)xy \oplus 1y^2$ .

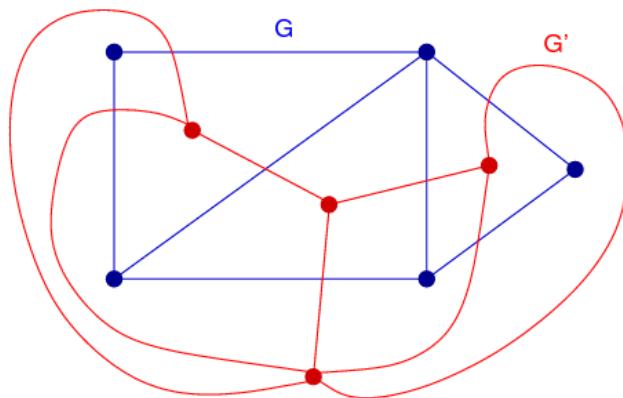


**Figura 8.** Suddivisione di  $\text{Newt}(p)$  con  $p(x,y) = 0 \oplus x \oplus y \oplus 1x^2 \oplus (-1)xy \oplus 1y^2$ .

**Definizione 2.3.9** (Grafo planare). Si definisce *grafo planare* un grafo  $G = (V, S)$  immerso in  $\mathbb{R}^2$  dove  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  è l'insieme dei suoi vertici e  $S = \{s_1, \dots, s_m\}$  l'insieme dei suoi spigoli tali che questi ultimi non si intersechino fra loro se non eventualmente nei vertici. Le componenti connesse di  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  si dicono *facce* del grafo  $G$ .

**Definizione 2.3.10** (Grafo duale). Sia  $G$  un grafo planare. Si definisce *grafo duale* di  $G$  un altro grafo immerso in  $\mathbb{R}^2$   $G' = (V', S')$  i cui vertici sono in corrispondenza biunivoca con le facce di  $G$ . Più precisamente, in ogni faccia di  $G$  si pone un vertice di  $G'$  e due vertici di  $G'$  sono connessi da uno spigolo se le facce in  $G$  corrispondenti hanno uno spigolo in comune.

*Osservazione 2.3.11.* Il grafo duale di un grafo planare non è unico.



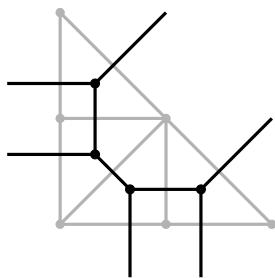
**Figura 9.** Esempio di un grafo duale di un grafo planare.

La suddivisione del politopo di Newton  $\text{Newt}(p)$  determina un grafo planare in  $\mathbb{R}^2$ . Da esso si costruisce un grafo duale ponendo un vertice in ciascuna faccia limitata della suddivisione e tracciando spigoli perpendicolari agli spigoli corrispondenti del grafo originario. Questo duale non coincide con quello definito in Definizione 2.3.10, ma ne rappresenta una variante adattata al contesto. Infine, riflettendo il grafo ottenuto rispetto alla retta  $y = -x$  si ottiene la curva tropicale associata al polinomio  $p(x, y)$  di partenza, a meno di una riscalatura di quest'ultima.

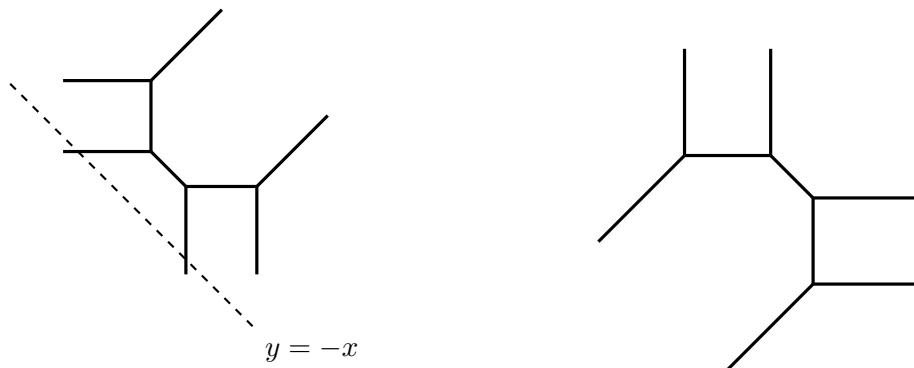
**Esempio 2.3.12.** Consideriamo il polinomio

$$p(x, y) = 0 \oplus x \oplus y \oplus 1x^2 \oplus (-1)xy \oplus 1y^2$$

visto in Esempio 2.3.8. Partendo dalla suddivisione di  $\text{Newt}(p)$  vista in Figura 8, si ha:



**Figura 10.** Grafo duale associato alla suddivisione di  $\text{Newt}(p)$  con  $p(x, y) = 0 \oplus x \oplus y \oplus 1x^2 \oplus (-1)xy \oplus 1y^2$ .



**Figura 11.** Riflessione del grafo duale visto in Figura 10 rispetto a  $y = -x$ .

La curva ottenuta coincide, a meno di riscalamento, con la curva tropicale del polinomio  $p(x, y) = 0 \oplus x \oplus y \oplus 1x^2 \oplus (-1)xy \oplus 1y^2$  vista in Figura 5 in Esempio 2.3.3.

**Osservazione 2.3.13.** In modo del tutto analogo, può risultare più semplice ruotare di  $180^\circ$  il politopo di Newton  $\text{Newt}(p)$  già suddiviso e poi calcolarne

il grafo duale come descritto in precedenza. In questo modo si ottiene direttamente la curva tropicale, senza la necessità di rifletterla rispetto alla retta  $y = -x$ .

*Osservazione 2.3.14.* L'algoritmo appena descritto consente di determinare la struttura combinatoria di una curva tropicale  $V(p)$ , ma non necessariamente la sua forma esatta. Una volta ottenuta tale struttura, risulta relativamente semplice, a partire dal polinomio iniziale, calcolare le coordinate dei vertici e determinare il valore assunto dal polinomio in ciascuna componente connessa di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{V(p)\}$ , in modo da ricostruire la curva tropicale completa. Ad esempio, se si lascia tendere  $y$  a  $+\infty$ , il polinomio di partenza si comporta come un polinomio in una sola variabile  $x$ . Infatti, tutti i termini che contengono  $y$  tendono a  $+\infty$  e non possono quindi contribuire al minimo: rimangono pertanto solo i monomi in  $x$ . Ne consegue che, nelle componenti connesse di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{V(p)\}$  che si estendono verso l'alto, il valore del polinomio dipende unicamente dalla variabile  $x$ . In tali regioni, al diminuire di  $x$  (cioè per  $x \rightarrow -\infty$ ), il grado della variabile  $x$  nei monomi che realizzano il minimo cresce progressivamente. In modo del tutto analogo, nelle componenti connesse di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{V(p)\}$  che si estendono verso destra (cioè per  $x \rightarrow +\infty$ ), il polinomio assumerà valori che dipendono soltanto dalla variabile  $y$ . In queste regioni, al diminuire di  $y$  (cioè per  $y \rightarrow -\infty$ ), il grado della variabile  $y$  nei monomi che realizzano il minimo aumenta. Conoscendo i valori assunti dal polinomio nelle diverse componenti connesse di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{V(p)\}$ , è semplice determinare le coordinate dei vertici: è sufficiente uguagliare i monomi che si incontrano in un dato vertice e risolvere il sistema di equazioni ottenuto rispetto a  $x$  e  $y$ .

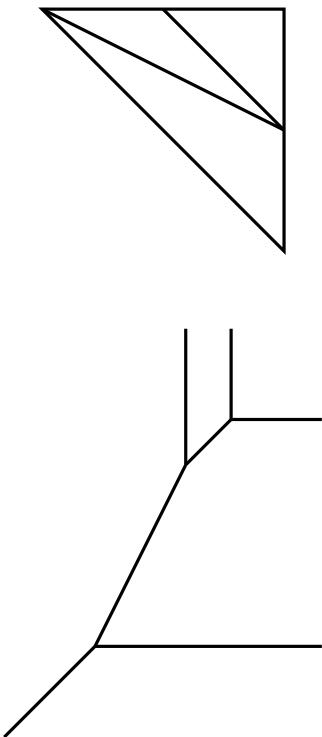
**Esempio 2.3.15.** Consideriamo il polinomio

$$p(x, y) = 1 \oplus (-2)y \oplus 1x \oplus y^2 \oplus 1xy \oplus 2x^2.$$

Allora si ha:

- $Newt(p) = \text{Conv} \left\{ (0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2) \right\};$
- $l\text{-}Newt(p) = \text{Conv} \left\{ (0, 0, 1), (1, 0, 1), (0, 1, -2), (2, 0, 2), (1, 1, 1), (0, 2, 0) \right\}.$

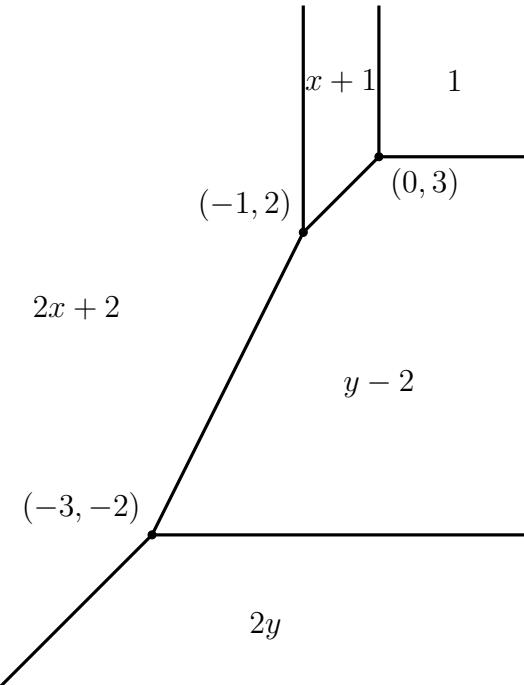
Considerando soltanto le facce inferiori di  $l - \text{Newt}(p)$ , proiettandole sul piano  $xy$  e, in base a Osservazione 2.3.13, ruotando di  $180^\circ$  la suddivisione di  $\text{Newt}(p)$ , si ottiene:



**Figura 12.** Suddivisione del politopo di Newton ruotato di  $180^\circ$ (sopra) e grafo duale corrispondente (sotto) per  $p(x, y) = 1 \oplus (-2)y \oplus 1x \oplus y^2 \oplus 1xy \oplus 2x^2$ .

Osserviamo che, nella regione in alto a destra, il polinomio assume valore 1, poichè per  $x, y$  che tendono a  $+\infty$  tutti i monomi che contengono almeno una delle due variabili tendono a  $+\infty$ , quindi non possono realizzare il minimo. In base a Osservazione 2.3.14, nelle due regioni che si estendono verso destra, il polinomio dipende soltanto dalla variabile  $y$ ; di conseguenza, esso assume rispettivamente i valori  $y - 2$  e  $2y$ . Analogamente, nelle regioni che si estendono verso l'alto, il polinomio dipende solo da  $x$  e i valori corrispondenti sono  $x + 1$  e  $2x + 2$ .

In conclusione, si determinano le coordinate dei vertici come descritto in Osservazione 2.3.14 e si ottiene la seguente curva tropicale:



**Figura 13.** Curva tropicale esatta del polinomio

$$p(x, y) = 1 \oplus (-2)y \oplus 1x \oplus y^2 \oplus 1xy \oplus 2x^2.$$

Cerchiamo ora di spiegare perchè tale algoritmo funziona: l'obiettivo è comprendere in che modo il duale della suddivisione del politopo di Newton permetta di ricostruire la struttura combinatoria della curva tropicale determinata da  $p$ . In particolare, si vuole mostrare che ciascun vertice della suddivisione corrisponde a un monomio che domina nel minimo e che, qualora due monomi raggiungano simultaneamente tale minimo, i vertici corrispondenti nel politopo di Newton sollevato risultano uniti da uno spigolo. In questo modo, la sua proiezione determina un lato della suddivisione di  $\text{Newt}(p)$  che risulta dualmente associato ad uno spigolo della curva tropicale. Sia quindi

$$p(x, y) = \min_{(i,j)} \{a_{i,j} + ix + jy\}$$

il polinomio tropicale in questione e per ogni coppia di indici  $(i, j)$  sia

$$v_{i,j} := (i, j, a_{i,j}) \in \mathbb{R}^3$$

il punto corrispondente al monomio  $a_{i,j} + ix + jy$ . Con questa notazione, il politopo di Newton sollevato  $l - \text{Newt}(p)$  è dato dall'inviluppo convesso dei punti  $v_{i,j}$ , ossia

$$N := l - \text{Newt}(p) = \text{conv}\{v_{i,j}\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Fissato un punto  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ , definiamo la funzione lineare

$$L_{(\bar{x}, \bar{y})}(u, v, w) := u \bar{x} + v \bar{y} + w.$$

Si osserva che per ogni  $(i, j)$  risulta

$$L_{(\bar{x}, \bar{y})}(v_{i,j}) = L_{(\bar{x}, \bar{y})}(i, j, a_{i,j}) = i \bar{x} + j \bar{y} + a_{i,j},$$

ossia esattamente la valutazione del monomio  $a_{i,j} + ix + jy$  nel punto  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

Ne consegue che

$$p(\bar{x}, \bar{y}) = \min_{(i,j)} \{a_{i,j} + i \bar{x} + j \bar{y}\} = \min_{(i,j)} L_{(\bar{x}, \bar{y})}(v_{i,j}).$$

Pertanto, affermare che in  $(\bar{x}, \bar{y})$  il minimo sia raggiunto esattamente da due monomi distinti equivale a dire che la funzione  $L_{(\bar{x}, \bar{y})}$  realizza il proprio minimo su  $N$  precisamente nei due vertici  $v_{a,b}$  e  $v_{c,d}$  corrispondenti ai monomi in questione.

Allora l'insieme

$$F := \{p \in N \mid L_{(\bar{x}, \bar{y})}(p) = m\} \quad \text{dove } m := \min_{p \in N} L_{(\bar{x}, \bar{y})}(p),$$

è una faccia di  $N$  supportata dall'iperpiano  $\{L_{(\bar{x}, \bar{y})} = m\}$ , nel senso che tale iperpiano interseca il politopo  $N$  esattamente nell'insieme  $F$  e che  $N$  risulta contenuto interamente nel semispazio  $\{L_{(\bar{x}, \bar{y})} \geq m\}$ . In altri termini,  $\{L_{(\bar{x}, \bar{y})} = m\}$  costituisce un iperpiano di supporto di  $N$ , e la parte di  $N$  su cui esso si appoggia coincide precisamente con la faccia  $F$ .

Se i soli vertici di  $N$  che realizzano il minimo di  $L_{(\bar{x}, \bar{y})}$  sono  $v_{a,b}$  e  $v_{c,d}$ , allora, poiché  $L_{(\bar{x}, \bar{y})}$  è lineare, tutte le combinazioni convesse di tali vertici

$$\text{conv}\{v_{a,b}, v_{c,d}\} = \{\lambda v_{a,b} + (1 - \lambda) v_{c,d} \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

realizzano anch'esse tale minimo. Ne segue che il segmento che unisce  $v_{a,b}$  e  $v_{c,d}$  coincide con la faccia  $F$  del politopo  $N$ . La condizione che questi siano gli unici vertici in cui  $L_{(\bar{x},\bar{y})}$  raggiunge il minimo implica che nessun altro  $v_{i,j}$  appartenga a questa faccia, cosicché  $F$  è effettivamente uno spigolo (faccia di dimensione 1) di  $N$ .

Tale faccia appartiene in particolare all'inviluppo inferiore di  $N$  e, mediante la proiezione

$$(i, j, a_{i,j}) \mapsto (i, j),$$

induce esattamente un lato della suddivisione di  $\text{Newt}(p)$ . Lo spigolo della curva tropicale duale a tale lato è precisamente quello che separa le due regioni di  $\mathbb{R}^2$  in cui il polinomio assume, rispettivamente, i due monomi lineari considerati.

Un ragionamento del tutto analogo vale nel caso in cui il minimo sia realizzato da tre monomi distinti: la funzione  $L_{(\bar{x},\bar{y})}$  assume in tal caso il proprio minimo in tre vertici di  $N$ , e la corrispondente faccia  $F$  è un triangolo. Dopo la proiezione  $(i, j, a_{i,j}) \mapsto (i, j)$ , tale faccia diventa una 2-cellula finita della suddivisione di  $\text{Newt}(p)$  e corrisponde dualmente a un vertice della curva tropicale, cioè a un punto in cui il minimo è realizzato simultaneamente da almeno tre monomi distinti.

In sintesi, la dualità può essere descritta nel modo seguente:

- a ciascun vertice della suddivisione di  $\text{Newt}(p)$  corrisponde un monomio che domina nel minimo che definisce il polinomio, e quindi una regione di  $\mathbb{R}^2$  in cui tale monomio è l'unico attivo;
- a ciascun lato finito della suddivisione corrisponde uno spigolo della curva tropicale, lungo il quale il minimo è raggiunto esattamente da due monomi distinti;
- a ciascuna 2-cellula finita della suddivisione corrisponde un vertice della curva tropicale, dove il minimo è realizzato simultaneamente da almeno tre monomi.

## 2.4 Condizione di bilanciamento delle curve tropicali

L'algoritmo per determinare una curva tropicale in  $\mathbb{R}^2$ , descritto nella sezione precedente, consente di assegnare in modo naturale dei pesi agli spigoli della curva, i quali rivestiranno un ruolo fondamentale nella definizione di molteplicità di un punto di intersezione.

**Definizione 2.4.1** (Peso di uno spigolo). Sia  $V(p)$  una curva tropicale e siano  $s_1, \dots, s_n$  i suoi spigoli. Come visto in precedenza, ciascuno di essi corrisponde in modo biunivoco a uno spigolo della suddivisione del politopo di Newton  $\text{Newt}(p)$ . Allora, per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ , si definisce il *peso*  $w_i$  di  $s_i$  come la lunghezza reticolare dello spigolo corrispondente nella suddivisione di  $\text{Newt}(p)$ , ossia il numero di punti di  $\mathbb{Z}^2$  attraversati da tale spigolo diminuito di 1.

**Definizione 2.4.2.** (Vettore integrale primitivo di uno spigolo) Sia  $V(p)$  una curva tropicale e siano  $s_1, \dots, s_n$  i suoi spigoli. Per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ , fissato un punto  $P$  sullo spigolo  $s_i$ , si definisce *vettore integrale primitivo*  $u_i$  associato a  $s_i$  come il vettore che, una volta traslato  $P$  nell'origine, raggiunge la prima intersezione tra la retta contenente  $s_i$  e il reticolo  $\mathbb{Z}^2$ . In altre termini, è il vettore direzionale dello spigolo, normalizzato in modo che le sue coordinate siano intere e coprime tra loro.

*Osservazione 2.4.3.* Per ogni spigolo di una curva tropicale, fissato un punto  $P$  su di esso, esistono due possibili vettori integrali primitivi: infatti, se  $u = (u_1, u_2)$  è un vettore integrale primitivo associato ad uno spigolo, allora anche  $-u = (-u_1, -u_2)$  lo è, in quanto soddisfa anch'esso la Definizione 2.4.2. Nel caso particolare in cui  $P$  sia un vertice della curva tropicale, la scelta del vettore integrale primitivo diventa univoca: infatti, traslando  $P$  nell'origine e tracciando la semiretta uscente da  $P$  nella direzione dello spigolo, si seleziona il vettore che raggiunge la prima intersezione tra tale semiretta e il reticolo  $\mathbb{Z}^2$ .

*Osservazione 2.4.4.* La definizione di vettore integrale primitivo associato a uno spigolo non dipende dalla scelta del punto  $P$  su di esso, ma unicamente dalla sua pendenza.

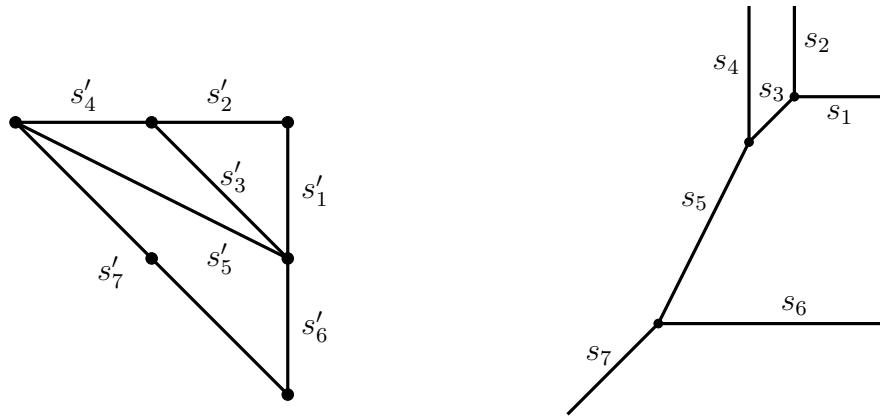
**Esempio 2.4.5.** Consideriamo il polinomio

$$p(x, y) = 1 \oplus (-2)y \oplus 1x \oplus y^2 \oplus 1xy \oplus 2x^2.$$

studiato in Esempio 2.3.15. Siano  $\{s_1, \dots, s_7\}$  gli spigoli di  $V(p)$  e  $\{s'_1, \dots, s'_7\}$  gli spigoli corrispondenti della suddivisione di  $\text{Newt}(p)$ .

- Tutti i pesi  $w_i$  sono uguali a 1, tranne  $w_7$  che è pari a 2.
- I vettori integrali primitivi sono

$$u_1 = u_6 = (\pm 1, 0), \quad u_2 = u_4 = (0, \pm 1), \quad u_3 = u_7 = (\pm 1, \pm 1), \quad u_5 = (\pm 1, \pm 2).$$



**Figura 14.** Suddivisione di  $\text{Newt}(p)$  (a sinistra) e curva tropicale  $V(p)$  (a destra) con rispettivi spigoli con  $p(x, y) = 1 \oplus (-2)y \oplus 1x \oplus y^2 \oplus 1xy \oplus 2x^2$ .

Notiamo che per il polinomio visto in Esempio 2.4.5 valgono le seguenti condizioni di bilanciamento nei vertici:

- Consideriamo i tre spigoli  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$  incidenti nel vertice  $(0,3)$  con i loro rispettivi pesi e vettori integrali primi. Allora vale:

$$w_1 \cdot u_1 + w_2 \cdot u_2 + w_3 \cdot u_3 = 1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1) + 1 \cdot (-1, -1) = (0, 0).$$

- Analogamente, nel vertice  $(-1,2)$  vale:

$$w_3 \cdot u_3 + w_4 \cdot u_4 + w_5 \cdot u_5 = 1 \cdot (1, 1) + 1 \cdot (0, 1) + 1 \cdot (-1, -2) = (0, 0).$$

- Infine, nel vertice  $(-3, -2)$  si ha:

$$w_5 \cdot u_5 + w_6 \cdot u_6 + w_7 \cdot u_7 = 1 \cdot (1, 2) + 1 \cdot (1, 0) + 2 \cdot (-1, -1) = (0, 0).$$

**Proposizione 2.4.6** (Condizione di bilanciamento). *Sia  $V(p)$  una curva tropicale e sia  $P$  un suo vertice nel quale incidono gli spigoli  $s_1, \dots, s_k$  della curva. A ciascun spigolo  $s_i$  sono associati:*

- un peso intero positivo  $w_i$ ;
- un vettore integrale primitivo  $u_i \in \mathbb{Z}^2$  che indica la direzione dello spigolo e che è univocamente determinato per Osservazione 2.4.3.

Allora è soddisfatta la seguente condizione di bilanciamento nel vertice  $P$ :

$$\sum_{i=1}^k w_i \cdot u_i = (0, 0).$$

*Dimostrazione.* Si è visto, nell’algoritmo per la costruzione di una curva tropicale, che esiste una corrispondenza biunivoca tra i vertici della curva tropicale e i poligoni della suddivisione del politopo di Newton. Consideriamo quindi il poligono della suddivisione di  $\text{Newt}(p)$  associato a  $P$ . Poichè si tratta di un poligono in  $\mathbb{R}^2$  i cui vertici hanno coordinate intere, i suoi lati possono essere interpretati come vettori in  $\mathbb{Z}^2$ .

Indicando tali vettori con  $v_1, \dots, v_k$ , il poligono risulta chiuso e orientato, e dunque la somma dei suoi lati è nulla. In formula, si ha:

$$\sum_{i=1}^k v_i = (0, 0).$$

Poichè ad ogni lato  $v_i$  del poligono corrisponde uno spigolo  $s_i$  di  $V(p)$  incidente nel vertice  $P$  e ad esso ortogonale, dalla Definizione 2.4.2 segue che la

direzione di  $u_i$  è perpendicolare a quella di  $v_i$ . Più precisamente, utilizzando la Definizione 2.4.1, si ha che

$$v_i = w_i \cdot u_i^\perp \Rightarrow \sum_{i=1}^k v_i = \sum_{i=1}^k w_i u_i^\perp = (0, 0)$$

dove  $u_i^\perp$  è ottenuto ruotando  $u_i$  di  $90^\circ$ .

Applicando la rotazione inversa, che non altera il fatto che la somma dei vettori sia nulla, si ottiene

$$\sum_{i=1}^k w_i \cdot u_i = (0, 0).$$

□

# Capitolo 3

## Il teorema di Bézout

### 3.1 Intersezione di curve tropicali e molteplicità

**Definizione 3.1.1** (Grado di una curva tropicale). Si dice che una curva tropicale  $V(p)$  ha *grado*  $d$  se il suo politopo di Newton  $\text{Newt}(p)$  è il triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(d, 0)$  e  $(0, d)$ . Equivalentemente,  $V(p)$  è di *grado*  $d$  se il polinomio tropicale  $p(x, y)$  che la definisce è di grado  $d$  e contiene con coefficienti non banali (cioè diversi da  $+\infty$ ) il termine costante e i monomi  $x^d$  e  $y^d$ .

**Definizione 3.1.2** (Curva tropicale a supporto pieno). Sia  $V(p)$  una curva tropicale di grado  $d$ . Si dice che  $V(p)$  è *a supporto pieno* se tutti i punti del reticolo  $\mathbb{Z}^2$  contenuti nel politopo di Newton  $\text{Newt}(p)$  compaiono come vertici della sua suddivisione.

*Osservazione 3.1.3.* Poichè in una curva tropicale a supporto pieno tutti i punti di  $\mathbb{Z}^2$  compaiono come vertici della suddivisione di  $\text{Newt}(p)$ , tutti gli spigoli di tale suddivisione hanno lunghezza pari a 1. Per la Definizione 2.4.1, ciò implica che ogni spigolo della curva tropicale ha peso 1.

*Osservazione 3.1.4.* La suddivisione di  $\text{Newt}(p)$  associata a una curva tropicale di grado  $d$  a supporto pieno presenta esattamente  $d$  spigoli per ciascun lato del politopo. Poichè a ciascuno di essi corrisponde un ramo infinito della

curva,  $V(p)$  possiede esattamente  $d$  raggi infiniti in ognuna delle tre direzioni standard:  $d$  in direzione  $(1, 0)$ ,  $d$  in direzione  $(0, 1)$  e  $d$  in direzione  $(-1, -1)$ , cioè lungo la retta  $y = x$  in discesa.

*Osservazione 3.1.5.* Una condizione necessaria, ma non sufficiente, affinchè una curva tropicale di grado  $d$  sia a supporto pieno è che il polinomio che la definisce abbia coefficienti non banali per tutti i monomi compatibili col grado, ossia nessun coefficiente uguale a  $+\infty$ . Infatti, se esistesse un monomio  $x^i y^j$  con  $i + j \leq d$  con coefficiente  $+\infty$ , il punto  $(i, j)$  non potrebbe comparire come vertice della suddivisione di  $\text{Newt}(p)$ , poichè non sarebbe nemmeno un vertice del politopo di Newton sollevato corrispondente.

**Esempio 3.1.6.** *Il polinomio*

$$p(x, y) = 0 \oplus x \oplus y \oplus 1x^2 \oplus (-1)xy \oplus 1y^2$$

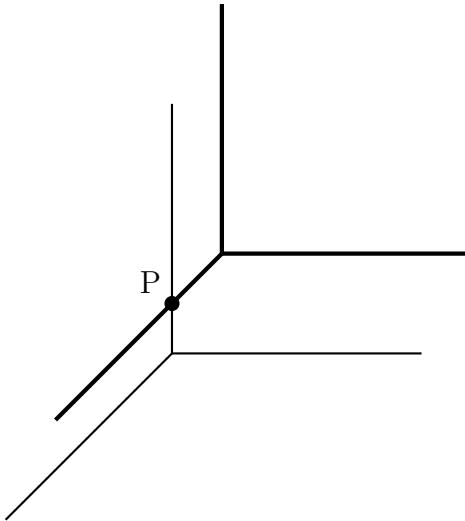
studiato in Esempio 2.3.12 è un polinomio tropicale di grado 2 a supporto pieno.

**Esempio 3.1.7.** *Il polinomio*

$$p(x, y) = 1 \oplus (-2)y \oplus 1x \oplus y^2 \oplus 1xy \oplus 2x^2.$$

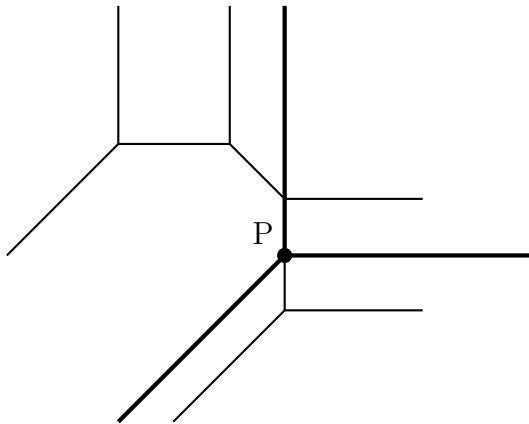
studiato in Esempio 2.3.15 costituisce un controesempio al fatto che la presenza di soli coefficienti non banali sia una condizione sufficiente affinchè la curva tropicale sia a supporto pieno. Sebbene nessun coefficiente sia pari a  $+\infty$ , la curva tropicale non è a supporto pieno: infatti il punto  $(1, 1)$  non compare come vertice della suddivisione di  $\text{Newt}(p)$  mostrata in Figura 12. In Figura 13 si nota inoltre che, pur trattandosi di un polinomio di grado 2, compare un unico raggio infinito in direzione  $(-1, -1)$ , con peso pari a 2, in accordo con quanto discusso in Osservazione 3.1.3 e Osservazione 3.1.4.

**Definizione 3.1.8** (Intersezione trasversale). L’intersezione di due curve tropicali  $C$  e  $D$  si dice *trasversale* se il punto di intersezione  $P$  non è un vertice di nessuna delle due curve e, localmente in  $P$ , gli spigoli di  $C$  e  $D$  che si intersecano in  $P$  hanno direzioni date da vettori integrali primitivi linearmente indipendenti.



**Figura 15.** Intersezione trasversale tra due curve tropicali di grado 1

**Definizione 3.1.9** (Intersezione non trasversale). L’intersezione di due curve tropicali  $C$  e  $D$  si dice *non trasversale* se il punto di intersezione  $P$  è un vertice di una delle due curve (o di entrambe), oppure se in un intorno di  $P$  due spigoli delle curve coincidono per un tratto e hanno direzioni date da vettori integrali primitivi paralleli.



**Figura 16.** Intersezione non trasversale tra due curve tropicali di grado 1 e

**Definizione 3.1.10** (Molteplicità di un punto di intersezione trasversale). Con le stesse notazioni di Definizione 3.1.8, si chiama *molteplicità tropicale*

di  $P$

$$\begin{aligned} \text{molt}_{\text{trop}}(P, C \cap D) &:= w_C w_D |\det(u_C, u_D)| \\ &= w_C w_D \left| \det \begin{pmatrix} x_C & x_D \\ y_C & y_D \end{pmatrix} \right| \\ &= w_C w_D |x_C y_D - x_D y_C|. \end{aligned}$$

dove  $w_C$  e  $w_D$  sono i pesi e  $u_C = (x_C, y_C)$  e  $u_D = (x_D, y_D)$  i vettori integrali primitivi degli spigoli rispettivamente delle curve  $C$  e  $D$  che si intersecano nel punto  $P$ .

*Osservazione 3.1.11.* Per quanto detto in Osservazione 2.4.3, dato un punto di intersezione trasversale  $P$ , i vettori integrali primitivi associati agli spigoli di  $C$  e  $D$  non sono univocamente determinati, poiché possono essere scelti sia  $u_C$  e  $u_D$  sia i loro opposti  $-u_C$  e  $-u_D$ . La definizione di molteplicità non dipende da questa scelta, poichè vale

$$\det(u_C, u_D) = \det(-u_C, -u_D) = -\det(u_C, -u_D) = -\det(-u_C, u_D)$$

e nella definizione interviene il valore assoluto. Pertanto il verso dei vettori integrali primitivi non influisce sul risultato.

Per convenzione, si scelgono i vettori integrali primitivi con componente  $x$  positiva; nel caso di vettori verticali (cioè con componente  $x = 0$ ), si scelgono quelli con componente  $y$  positiva.

*Osservazione 3.1.12.* La Definizione 3.1.10 di molteplicità può essere applicata solo quando il punto di intersezione è trasversale.

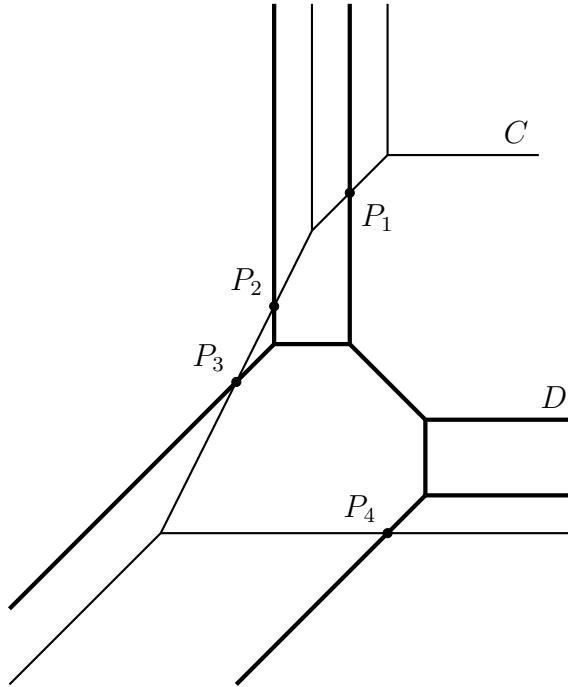
Se  $P$  invece è un punto di intersezione non trasversale, si possono verificare due problemi:

- Se  $P$  è un vertice di una delle due curve, ad esempio di  $C$ , allora su  $P$  incidono più spigoli di  $C$ . Di conseguenza, la scelta del vettore integrale primitivo  $u_C$  da utilizzare in Definizione 3.1.10 non è univoca.
- Se due spigoli coincidono per un tratto, i loro vettori integrali primitivi sono linearmente dipendenti; in tal caso si ha  $|\det(u_C, u_D)| = 0$  e quindi  $\text{molt}_{\text{trop}}(P, C \cap D) = 0$ .

**Esempio 3.1.13.** Consideriamo la curva tropicale  $C$  di grado 2 studiata in Esempio 2.3.15 e la curva tropicale  $D$  di grado 2 descritta dal polinomio

$$p_D(x, y) = 0.5 \oplus x \oplus y \oplus 1x^2 \oplus (-1)xy \oplus 1y^2.$$

e calcoliamo le molteplicità dei loro punti di intersezione trasversale.



**Figura 17.** Intersezioni delle curve descritte dai polinomi

$$p_C(x, y) = 1 \oplus (-2)y \oplus 1x \oplus y^2 \oplus 1xy \oplus 2x^2 \text{ e}$$

$$p_D(x, y) = 0.5 \oplus x \oplus y \oplus 1x^2 \oplus (-1)xy \oplus 1y^2.$$

Si osservi che tutti gli spigoli delle due curve che concorrono nei quattro punti di intersezione hanno peso pari a 1. Di conseguenza, nel calcolo delle molteplicità è sufficiente guardare esclusivamente i vettori integrali primitivi.

- $P_1$ :  $u_C = (1, 1)$ ,  $u_D = (0, 1) \Rightarrow \text{molt}_{\text{trop}}(P_1, C \cap D) = |1 \cdot 0 - 1 \cdot 1| = 1$
- $P_2$ :  $u_C = (1, 2)$ ,  $u_D = (0, 1) \Rightarrow \text{molt}_{\text{trop}}(P_2, C \cap D) = |1 \cdot 1 - 2 \cdot 0| = 1$
- $P_3$ :  $u_C = (1, 2)$ ,  $u_D = (1, 1) \Rightarrow \text{molt}_{\text{trop}}(P_3, C \cap D) = |1 \cdot 1 - 2 \cdot 1| = 1$
- $P_4$ :  $u_C = (1, 0)$ ,  $u_D = (1, 1) \Rightarrow \text{molt}_{\text{trop}}(P_4, C \cap D) = |1 \cdot 0 - 1 \cdot 1| = 1$

### 3.2 Il teorema di Bézout tropicale

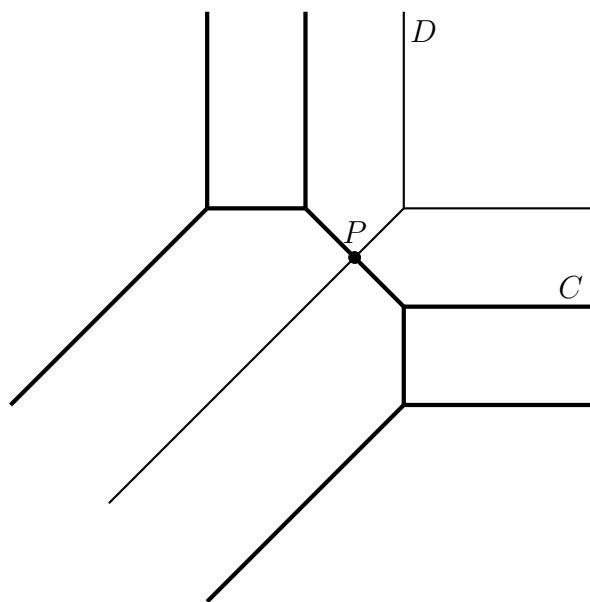
**Teorema 3.2.1** (Bézout tropicale). *Siano  $C$  e  $D$  due curve tropicali di grado rispettivamente  $c$  e  $d$  che si intersecano trasversalmente. Allora vale*

$$\sum_{P \in C \cap D} \text{molt}_{\text{trop}}(P, C \cap D) = cd.$$

*In altre parole, le due curve si intersecano in totale in  $cd$  punti, ognuno dei quali contato con la loro molteplicità.*

**Esempio 3.2.2.** Consideriamo le due curve tropicali  $C$  e  $D$  di grado rispettivamente 2 e 1 descritte dai polinomi

$$p_C(x, y) = 0 \oplus x \oplus y \oplus 1x^2 \oplus (-1)xy \oplus 1y^2, \quad p_D(x, y) = 1 \oplus x \oplus y.$$



**Figura 18.** Intersezione delle curve descritte dai polinomi  $p_C(x, y) = 0 \oplus x \oplus y \oplus 1x^2 \oplus (-1)xy \oplus 1y^2$  e  $p_D(x, y) = 1 \oplus x \oplus y$ .

Poiché le curve si intersecano in un unico punto di intersezione  $P$ , il teorema di Bézout si riduce a:

$$\text{molt}_{\text{trop}}(P, C \cap D) = w_C w_D |x_C y_D - x_D y_C| = 1 \cdot 1 |1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)| = 2 = 2 \cdot 1$$

**Esempio 3.2.3.** Consideriamo le due curve  $C$  e  $D$ , entrambe di grado 2, viste in Esempio 3.1.13. Esse soddisfano il teorema di Bézout tropicale; infatti

$$\sum_{i=1}^4 \text{molt}_{\text{trop}}(P_i, C \cap D) = 4 = 2 \cdot 2$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione del teorema di Bézout tropicale può essere articolata in cinque passaggi distinti:

- *Step 1:* Supponiamo inizialmente che  $C$  e  $D$  siano curve tropicali a supporto pieno di grado rispettivamente  $c$  e  $d$  e che si intersechino esclusivamente lungo i loro raggi infiniti orizzontali e verticali. Per Osservazione 3.1.3 e Osservazione 3.1.4, esse hanno rispettivamente  $c$  e  $d$  raggi infiniti orizzontali con vettore integrale primitivo  $(1, 0)$  e altrettanti verticali con vettore integrale primitivo  $(0, 1)$ , tutti di peso 1. Nel caso in cui l'intersezione avvenga esclusivamente lungo tali raggi, per quanto detto sopra si ottengono esattamente  $cd$  punti di intersezione, ciascuno con molteplicità pari a 1: infatti i pesi degli spigoli coinvolti sono unitari e inoltre vale

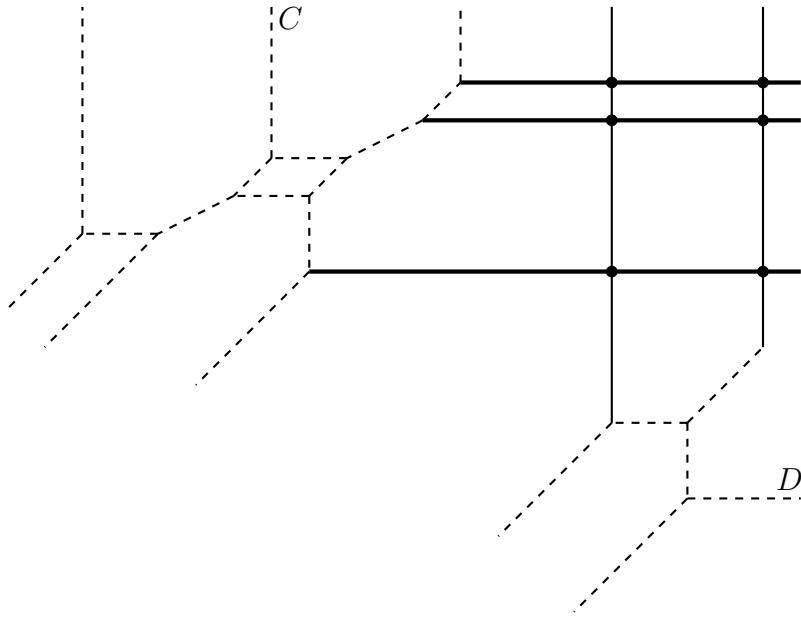
$$\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = 1.$$

Ricapitolando, si ha

$$|C \cap D| = cd \quad e \quad \forall P \in C \cap D, \text{molt}_{\text{trop}}(P, C \cap D) = 1$$

da cui

$$\sum_{P \in C \cap D} \text{molt}_{\text{trop}}(P, C \cap D) = cd.$$



**Figura 19.** Esempio di intersezione lungo i raggi infiniti orizzontali e verticali di due curve tropicali a supporto pieno di grado  $c = 3$  e  $d = 2$ .

- *Step 2:* Manteniamo l’ipotesi precedente secondo cui  $C$  e  $D$  si intersecano esclusivamente lungo i loro raggi infiniti orizzontali e verticali, ma ora rimuoviamo la condizione di supporto pieno. In particolare, senza perdita di generalità, assumiamo che la curva non a supporto pieno sia  $C$ . Per Osservazione 3.1.4, una curva tropicale di grado  $c$  a supporto pieno possiede esattamente  $c$  raggi infiniti in direzione  $(1, 0)$  e  $c$  in direzione  $(0, 1)$ , tutti di peso 1.

E’ importante osservare che l’ipotesi di supporto pieno è più forte della sola condizione di avere  $c$  raggi infiniti orizzontali e  $c$  verticali: esistono infatti curve che, pur non essendo a supporto pieno, posseggono comunque tale configurazione. Un esempio è dato dalla curva descritta dal polinomio di grado 2

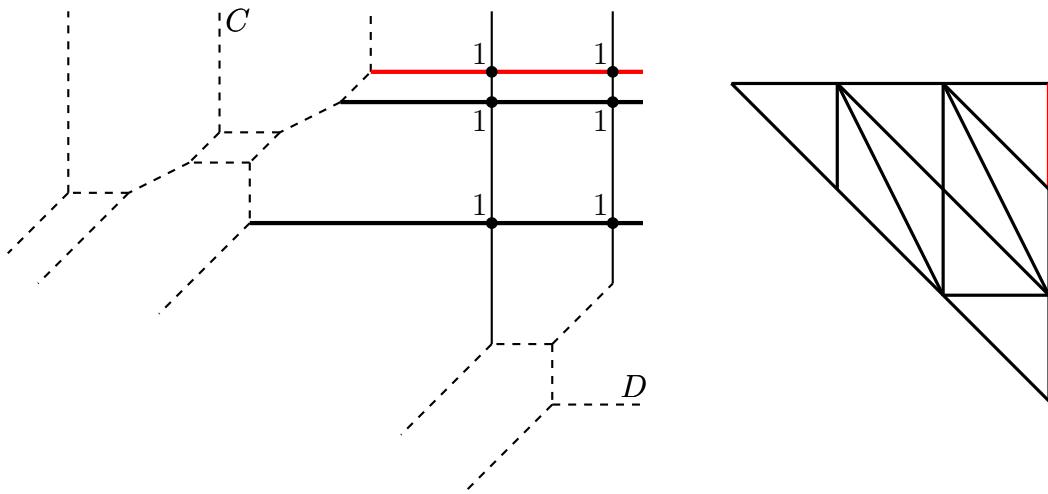
$$p(x, y) = 1 \oplus (-2)y \oplus 1x \oplus y^2 \oplus 1xy \oplus 2x^2.$$

studiato in Esempio 2.4.5. In tale situazione, se le due curve  $C$  e  $D$  continuano a intersecarsi unicamente lungo tali raggi, ci si riconduce

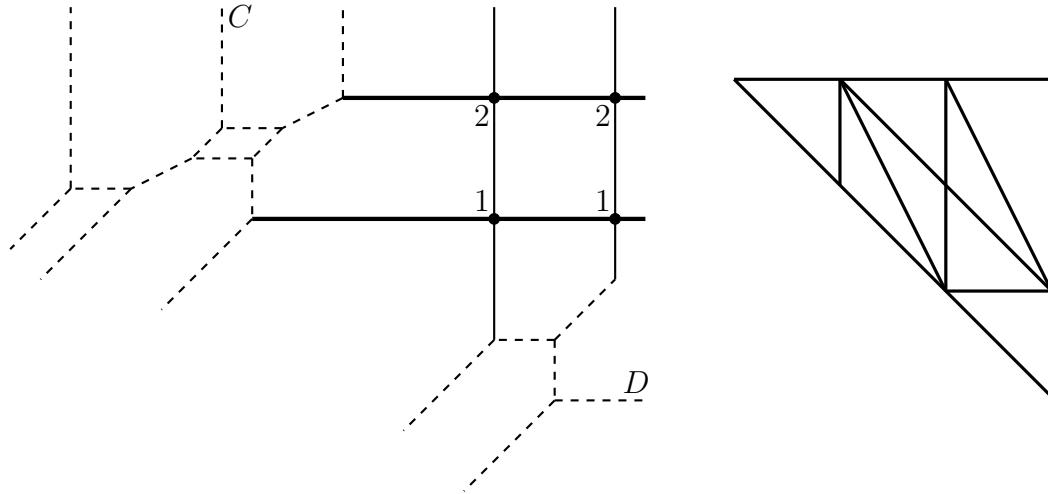
direttamente al caso descritto nello *Step 1*.

Rimane dunque da considerare il caso in cui  $C$  perda effettivamente uno dei questi raggi. Senza perdita di generalità, supponiamo che venga rimosso un raggio orizzontale in direzione  $(1, 0)$ , in modo che la curva risultante abbia solo  $c - 1$  raggi orizzontali. Nella suddivisione di  $\text{Newt}(p_C)$ , la rimozione di un raggio orizzontale corrisponde ad eliminare uno spigolo su uno dei due cateti del politopo di Newton, il cui numero passa così da  $c$  a  $c - 1$ . Di conseguenza, un altro spigolo appartenente allo stesso cateto aumenta la sua lunghezza reticolare di 1; in termini tropicali, questo si traduce in un incremento di 1 del peso di un altro raggio orizzontale di  $C$ . In sintesi, l'eliminazione di un raggio orizzontale di  $C$  comporta due effetti:

- la diminuzione di  $d$  del numero di punti di intersezione, poichè il raggio rimosso incontrava esattamente  $d$  raggi verticali di  $D$ .
- l'incremento di 1 delle molteplicità di altrettanti  $d$  punti di intersezione, dovuto all'aumento del peso di un raggio orizzontale rimasto.



**Figura 20.** Situazione precedente alla rimozione del raggio infinito orizzontale di  $C$  (in rosso). A destra, la suddivisione di  $\text{Newt}(p_C)$ , con il relativo spigolo corrispondente anch'esso evidenziato in rosso.



**Figura 21.** Situazione successiva alla rimozione del raggio infinito orizzontale di  $C$ . A destra, la suddivisione modificata di  $\text{Newt}(p_C)$ .

Le due variazioni si compensano: il numero totale di intersezioni, contate con le molteplicità tropicali, rimane invariato e continua a valere

$$\sum_{P \in C \cap D} \text{molt}_{\text{trop}}(P, C \cap D) = cd.$$

Ripetendo il discorso per ogni raggio eventualmente mancante in entrambe le curve, si conclude che, anche nel caso in cui  $C$  e  $D$  non siano a supporto pieno, purchè abbiano grado rispettivamente  $c$  e  $d$  e che si intersechino esclusivamente lungo raggi orizzontali e verticali, il numero totale di intersezioni con molteplicità è ancora pari a  $cd$ .

Partendo da due curve tropicali  $C$  e  $D$  generiche, fissiamo  $C$  e trasliamo  $D$  nel piano; indichiamo con  $D_t$  la traslata di  $D$  nel piano al tempo  $t$  in modo che  $D_0 = D$ .

Allora l'obiettivo consiste nel mostrare che esiste sempre una traslazione nel piano della curva  $D$  in modo tale che, al termine del movimento, le curve  $C$  e  $D_t$  si intersechino esclusivamente lungo i loro raggi infiniti orizzontali e verticali e che, durante questa traslazione, possono comparire sia intersezio-

ni trasversali sia intersezioni non trasversali, ma la somma delle rispettive molteplicità rimane invariata per l'intera durata del processo.

- *Step 3:* Costruiamo innanzitutto una traslazione di  $D$  che minimizzi il numero di intersezioni non trasversali con  $C$ . La posizione della curva  $D_t$  è univocamente determinata dalle coordinate di uno dei suoi punti. Infatti, fissato  $Q$  un vertice della curva, conoscendo le sue coordinate al tempo  $t$ , si possono ricavare le coordinate di tutti gli altri punti della curva. Ad esempio, se  $Q$  si trova inizialmente in  $(0, 0)$  e al tempo  $t$  risulta in  $(-1, 2)$ , allora l'intera curva al tempo  $t$  è stata traslata di 2 unità verso l'alto e di 1 unità verso sinistra.

L'intersezione tra due curve  $C$  e  $D_t$  è non trasversale quando si verifica una delle seguenti situazioni:

- un'intersezione vertice-con-vertice;
- un'intersezione vertice-con-spigolo.

Poichè ogni curva tropicale ha un numero finito di vertici, anche il numero di possibili intersezioni vertice-con-vertice è finito; questo garantisce che esiste sempre una traslazione della curva  $D$  che evita del tutto questo tipo di intersezioni.

Sia ora  $Q$  un vertice di  $D$ . Per quanto visto prima, se si trasla  $D$  nel piano, la posizione di  $D_t$  è univocamente determinata dalle coordinate di  $Q_t$ . Se, per un certo istante  $t$ ,  $Q$  cade sulle coordinate di un punto appartenente alla curva  $C$  (più precisamente su un punto interno di uno spigolo di  $C$ ), allora l'intersezione tra  $C$  e  $D_t$  è non trasversale, poichè si realizza un'intersezione vertice-con-spigolo. In questo senso, ogni punto di  $C$  rappresenta una possibile posizione di  $Q_t$  che dà luogo a un'intersezione non trasversale tra le due curve.

Ripetendo lo stesso ragionamento per ciascun vertice della curva  $D$ , si ottiene che il luogo di tutte le possibili intersezioni vertice-con-spigolo è un'unione finita di copie di  $C$ , una per ogni vertice della curva  $D$ . Poichè la traslazione di  $D$  è determinata dalla traiettoria di un singolo

vertice, è possibile descrivere le intersezioni degli altri vertici di  $D$  con gli spigoli di  $C$  in funzione della posizione di  $Q_t$ . Ne segue che esiste un cammino continuo di  $Q_t$  tale che, lungo questo movimento, si verifichi solo un numero finito di intersezioni vertice-con-spigolo. Indichiamo i corrispondenti istanti di tempo con  $\{t_1, \dots, t_k\}$ .

- *Step 4:* In ogni intervallo temporale  $(t_i, t_{i+1})$ , le curve  $C$  e  $D$  si intersecano solo in modo trasversale. Di conseguenza, durante questo movimento non si creano né si eliminano punti di intersezione; il loro numero rimane costante. Inoltre, anche le loro molteplicità restano invariate, poichè nè i pesi nè i vettori integrali primitivi degli spigoli subiscono modifiche.
- *Step 5:* Rimane da analizzare il comportamento delle curve nei pressi degli istanti  $t_i$ . In particolare, vogliamo mostrare che, pur variando il numero dei punti di intersezione e le relative molteplicità prima e dopo  $t_i$ , la somma totale delle molteplicità rimane invariata. In altri termini, vogliamo dimostrare che

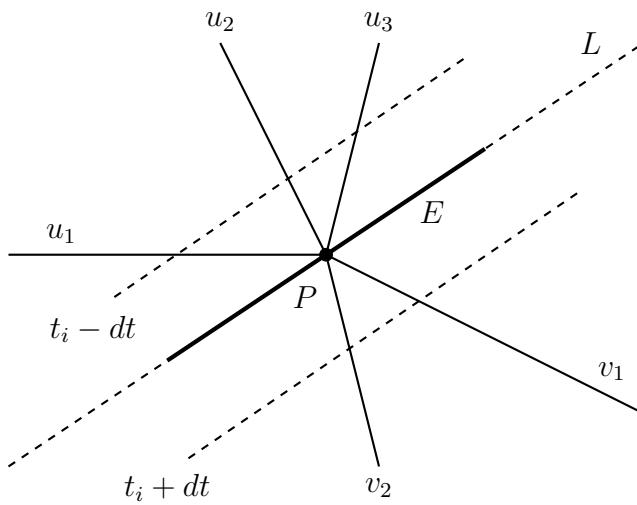
$$\sum_P \text{molt}_{\text{trop}}(P, C \cap D_{t_i-dt}) = \sum_P \text{molt}_{\text{trop}}(P, C \cap D_{t_i+dt}).$$

Fissato  $i$ , all'istante  $t_i$  ci sono due scenari possibili:

1. un vertice di  $C$  coincide con un punto interno di uno spigolo di  $D_{t_i}$ ;
2. un vertice di  $D_{t_i}$  coincide con un punto interno di uno spigolo di  $C$ .

Poichè i due casi sono simmetrici, possiamo senza perdita di generalità studiare il primo caso e indicare con  $P$  il punto in questione. Denotiamo con  $E$  lo spigolo della curva  $D_{t_i}$ , con vettore integrale primitivo pesato  $w$ , e con  $L$  la retta direzionale di  $E$ . Siano infine  $u_1, \dots, u_n$  e  $v_1, \dots, v_m$  i vettori integrali primitivi pesati degli spigoli di  $C$  incidenti in  $P$ , appartenenti rispettivamente ai due lati di  $L$ .

Per Osservazione 3.1.11, la molteplicità di un punto di intersezione non dipende dal verso scelto per i vettori integrali primitivi relativi agli spigoli incidenti. In questo caso quindi possiamo assumere che i vettori  $u_k$  e  $v_j$  siano scelti uscenti dal vertice  $P$  e orientati radialmente verso l'esterno.



**Figura 22.** Intersezione non trasversale delle curve  $C$  e  $D_{t_i}$ .

Le due rette tratteggiate parallele ad  $L$  indicano le intersezioni trasversali tra la curva  $C$  e le curve  $D_{t_i-dt}$  e  $D_{t_i+dt}$  rispettivamente.

Quindi, si ha che:

- al tempo  $t_i - dt$  la somma delle molteplicità dei punti di intersezione è

$$\sum_{k=1}^n |\det(u_k, w)|.$$

- al tempo  $t_i + dt$  la somma delle molteplicità dei punti di intersezione è

$$\sum_{j=1}^m |\det(v_j, w)|.$$

Vogliamo mostrare che queste due quantità sono uguali.

Per la condizione di bilanciamento della curva  $C$  nel vertice  $P$ , vale

$$\sum_{k=1}^n u_k + \sum_{j=1}^m v_j = 0$$

da cui, usando le proprietà del determinante, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \det\left(\sum_{k=1}^n u_k + \sum_{j=1}^m v_j, w\right) = \sum_{k=1}^n \det(u_k, w) + \sum_{j=1}^m \det(v_j, w) \implies \\ &\implies \left| \sum_{k=1}^n \det(u_k, w) \right| = \left| \sum_{j=1}^m \det(v_j, w) \right|. \end{aligned}$$

La retta  $L$  divide il piano in due semipiani: i vettori  $u_1, \dots, u_n$  si trovano in uno di essi, mentre i vettori  $v_1, \dots, v_m$  appartengono all'altro. Poichè  $w$  giace sulla retta  $L$ , i determinanti  $\det(u_k, w)$  hanno tutti lo stesso segno, mentre i determinanti  $\det(v_j, w)$  hanno segno opposto. Di conseguenza, il valore assoluto della somma dei  $\det(u_k, w)$  coincide con la somma dei loro valori assoluti, e la stessa proprietà vale anche per i  $\det(v_j, w)$ . Pertanto si ottiene

$$\sum_{k=1}^n |\det(u_k, w)| = \sum_{j=1}^m |\det(v_j, w)|.$$

In conclusione, possiamo trasformare due curve con intersezioni trasversali in posizione generale in due curve che si intersecano solamente lungo i raggi orizzontali e verticali, senza modificare il numero di intersezioni contate con molteplicità. Pertanto si ha

$$\sum_{P \in C \cap D} \text{molt}_{\text{trop}}(P, C \cap D) = cd.$$

□

### 3.3 Una dimostrazione diversa di Bézout tropicale

Esiste anche un modo più diretto per dimostrare il teorema di Bézout tropicale, basato su una definizione alternativa, ma equivalente, di molteplicità di un punto di intersezione.

**Proposizione 3.3.1.** *Siano  $C$  e  $D$  due curve tropicali definite rispettivamente dai polinomi tropicali  $p_C(x, y)$  e  $p_D(x, y)$  e supponiamo che si intersechino esclusivamente in modo traversale. Allora la loro unione  $C \cup D$  coincide con la curva tropicale associata al polinomio tropicale  $p_C(x, y) \odot p_D(x, y)$ .*

*Dimostrazione.* Denotiamo con  $h(x, y) := p_C(x, y) \odot p_D(x, y)$  e sia  $H$  la curva tropicale descritta da  $h$ . Se

$$p_C(x, y) = \min_i \{a_i + k_{i,1}x + k_{i,2}y\} \quad \text{e} \quad p_D(x, y) = \min_j \{a'_j + k'_{j,1}x + k'_{j,2}y\},$$

il loro prodotto tropicale è definito, come funzione, dalla somma usuale dei due polinomi, ovvero

$$\begin{aligned} h(x, y) &= p_C(x, y) \odot p_D(x, y) = p_C(x, y) + p_D(x, y) \\ &= \min_i \{a_i + k_{i,1}x + k_{i,2}y\} + \min_j \{a'_j + k'_{j,1}x + k'_{j,2}y\}. \end{aligned}$$

Espandendo la somma dei due minimi, si ottiene la seguente espressione:

$$h(x, y) = \min_{i,j} \{(a_i + a'_j) + (k_{i,1} + k'_{j,1})x + (k_{i,2} + k'_{j,2})y\}.$$

L'obiettivo consiste nel mostrare che  $H = C \cup D$ .

- Sia  $(x_0, y_0) \notin C \cup D$ . Allora  $(x_0, y_0) \notin C$  e  $(x_0, y_0) \notin D$ . Ciò significa che, per entrambi i polinomi, il minimo è raggiunto da un unico monomio e quindi essi sono differenziabili in  $(x_0, y_0)$ . Poichè  $h(x, y)$  è la somma dei due polinomi, risulta anch'esso differenziabile in  $(x_0, y_0)$ , cioè  $(x_0, y_0) \notin H$ .

Ne segue che  $H \subseteq C \cup D$ .

- Sia ora  $(x_0, y_0) \in C \cup D$ . Allora  $(x_0, y_0) \in C$  oppure  $(x_0, y_0) \in D$ .

Se  $(x_0, y_0) \in C$ , ci sono almeno due monomi di  $p_C$  che realizzano il minimo in  $(x_0, y_0)$ , cioè vale

$$p_C(x_0, y_0) = a_s + k_{s,1}x_0 + k_{s,2}y_0 = a_t + k_{t,1}x_0 + k_{t,2}y_0.$$

Poichè si ha

$$p_D(x_0, y_0) = a'_r + k'_{r,1}x_0 + k'_{r,2}y_0$$

il minimo in  $h$  è raggiunto da due suoi monomi diversi, cioè

$$\begin{aligned} h(x_0, y_0) &= (a_s + a'_r) + (k_{s,1} + k'_{r,1})x_0 + (k_{s,2} + k'_{r,2})y_0 \\ &= (a_t + a'_r) + (k_{t,1} + k'_{r,1})x_0 + (k_{t,2} + k'_{r,2})y_0. \end{aligned}$$

Ne segue che  $(x_0, y_0) \in H$ .

Se  $(x_0, y_0) \in D$ , il discorso è analogo. Quindi  $C \cup D \subseteq H$ .

Per la doppia inclusione, vale  $H = C \cup D$ . □

*Osservazione 3.3.2.* Per la Proposizione 3.3.1, il grado di  $C \cup D$  è pari alla somma dei gradi dei due polinomi, ovvero  $\deg(p_C) + \deg(p_D)$ .

Come visto in precedenza, i vertici di una curva tropicale corrispondono ai poligoni della suddivisione del politopo di Newton associato al polinomio che la definisce. Nel caso della curva  $C \cup D$ , i vertici possono suddividersi in 3 categorie:

- vertici già presenti in  $C$ , duali ai triangoli nella suddivisione di  $\text{Newt}(p_C)$ ;
- vertici già presenti in  $D$ , duali ai triangoli nella suddivisione di  $\text{Newt}(p_D)$ ;
- nuovi vertici, che corrispondono ai punti di intersezione trasversale tra  $C$  e  $D$ .

Dai primi due casi segue che la suddivisione di  $\text{Newt}(p_C \odot p_D)$  contiene, come sottosuddivisioni, copie delle suddivisioni di  $\text{Newt}(p_C)$  e di  $\text{Newt}(p_D)$ . I nuovi poligoni che compaiono nella suddivisione di  $\text{Newt}(p_C \odot p_D)$  corrispondono invece ai punti di intersezione trasversale tra  $C$  e  $D$ .

Tali poligoni devono essere necessariamente dei parallelogrammi. Infatti, poichè i vertici di una curva tropicale corrispondono ai poligoni della suddivisione del politopo di Newton, gli spigoli che incidono in un vertice corrispondono ai lati del suo poligono duale. Allora, se  $P$  è un punto di intersezione tra  $C$  e  $D$ , in  $C \cup D$  convergono esattamente 4 spigoli in tale punto (2 provenienti da  $C$  e 2 da  $D$ ). Di conseguenza, il poligono nella suddivisione di  $\text{Newt}(p_C \odot p_D)$  duale a  $P$  possiede 4 lati.

**Definizione 3.3.3** (Molteplicità di un punto di intersezione trasversale). Sia  $P$  un punto di intersezione trasversale tra le curve tropicali  $C$  e  $D$ . Si chiama *molteplicità tropicale* di  $P$  l'area del parallelogramma duale a  $P$  nella suddivisione di  $\text{Newt}(p_C \odot p_D)$ .

*Osservazione 3.3.4.* La Definizione 3.3.3 di molteplicità tropicale di un punto di intersezione è del tutto analoga alla Definizione 3.1.10. Infatti, indicando con  $v_1$  e  $v_2$  i vettori che descrivono i lati del parallelogramma duale al punto di intersezione  $P$ , l'area di tale parallelogramma è data da  $|\det(v_1, v_2)|$ . Poichè compare il valore assoluto del determinante, la scelta del verso di  $v_1$  e di  $v_2$  non influisce sul risultato.

Gli spigoli della curva che incidono in  $P$  sono ortogonali ai lati del suo poligono duale; supponiamo quindi, senza perdita di generalità, che  $v_1$  sia duale allo spigolo di  $C$  passante per  $P$  e  $v_2$  duale allo spigolo di  $D$  passante per  $P$ . Per la Definizione 2.4.1 e Definizione 2.4.2, tali vettori possono essere scritti come

$$v_1 = w_C u_C^\perp, \quad v_2 = w_D u_D^\perp,$$

dove  $w_C$  e  $w_D$  i pesi degli spigoli che si intersecano in  $P$ , mentre  $u_C^\perp$  e  $u_D^\perp$  si ottengono ruotando rispettivamente i vettori integrali primitivi  $u_C$  e  $u_D$  di  $90^\circ$  (la scelta del verso di rotazione è irrilevante).

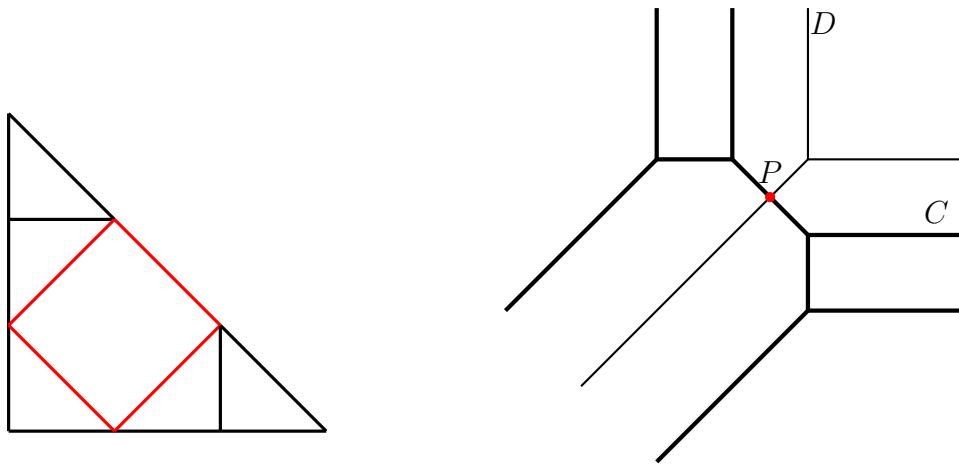
Da ciò segue che

$$|\det(v_1, v_2)| = |\det(w_C u_C^\perp, w_D u_D^\perp)| = w_C w_D |\det(u_C^\perp, u_D^\perp)| = w_C w_D |\det(u_C, u_D)|.$$

**Esempio 3.3.5.** Consideriamo le curve tropicali  $C$  e  $D$  descritte dai polinomi

$$p_C(x, y) = 0 \oplus x \oplus y \oplus 1x^2 \oplus (-1)xy \oplus 1y^2, \quad p_D(x, y) = 1 \oplus x \oplus y.$$

già analizzate in Esempio 3.2.2. Vogliamo calcolare la molteplicità del loro unico punto di intersezione  $P$  utilizzando la Definizione 3.3.3.



**Figura 23.** Suddivisione del politopo di Newton del polinomio  $p_C \odot p_D$  (a sinistra) e la curva tropicale corrispondente  $C \cup D$  (a destra).

Da Figura 22 si osserva che il poligono duale al punto di intersezione  $P$  (in rosso) è un quadrato di lato  $\sqrt{2}$ . La sua area è quindi pari a 2 e, per la Definizione 3.3.3 si ottiene

$$\text{molt}_{\text{trop}}(P, C \cap D) = 2.$$

Si nota inoltre che il triangolo in basso a sinistra della suddivisione coincide con una copia della suddivisione di  $\text{Newt}(p_D)$ , mentre i restanti 4 triangoli formano una copia della suddivisione di  $\text{Newt}(p_C)$ .

**Teorema 3.3.6** (Bézout tropicale). *Siano  $C$  e  $D$  due curve tropicali di grado rispettivamente  $c$  e  $d$  che si intersecano trasversalmente. Allora vale*

$$\sum_{P \in C \cap D} \text{molt}_{\text{trop}}(P, C \cap D) = cd.$$

*Dimostrazione.* Per Osservazione 3.3.2, poichè il grado di  $C \cup D$  è pari a  $c+d$ , il politopo di Newton di  $p_C \odot p_D$  è il triangolo con vertici  $(0, 0)$ ,  $(c+d, 0)$  e  $(0, c+d)$ .

Indichiamo con  $s$  la somma delle molteplicità dei punti di intersezione tra  $C$  e  $D$  e consideriamo la suddivisione di  $\text{Newt}(p_C \odot p_D)$ . Come visto in precedenza, i poligoni di tale suddivisione appartengono a 3 famiglie:

- quelli duali ai vertici di  $C$ , la cui area totale è  $\frac{1}{2}c^2$ ;
- quelli duali ai vertici di  $D$ , la cui area totale è  $\frac{1}{2}d^2$ ;
- i parallelogrammi duali ai punti di intersezione tra  $C$  e  $D$ , la cui area complessiva è  $s$ .

Poichè l'area di  $\text{Newt}(p_C \odot p_D)$  è pari a  $\frac{1}{2}(c+d)^2$ , si ottiene l'uguaglianza

$$\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}d^2 + s = \frac{1}{2}(c+d)^2,$$

da cui segue

$$s = \frac{(c+d)^2 - c^2 - d^2}{2} = cd.$$

□

# Bibliografia

- [1] LANG, Mingming. Bezout's Theorem in Tropical Algebraic Geometry. 2020.
- [2] SCHOOT, Davy van der. Tropical Geometry. 2025. Bachelor's Thesis.
- [3] KIM, Tae Kyu. Tropical Algebraic Geometry. 2020
- [4] MIKHALKIN, Grigory; RAU, Johannes. Tropical geometry. MPI for Mathematics, 2009.
- [5] KATZ, Eric. What is tropical geometry. Notices of the AMS, 2017, 64.4: 380-382.