

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”
Corso di Laurea in Fisica

Livelli di Landau e dipendenza dalla gauge

Relatore:
Prof. Pierbiagio Pieri

Presentata da:
Alessio Zaccarini

Anno Accademico 2024/2025

Indice

1	Potenziali vettoriali e scalari	4
1.1	Potenziale scalare elettrico	4
1.2	Potenziale vettoriale magnetico	5
1.3	Scelta della gauge	5
1.4	Relazione tra i potenziali e i campi	6
1.5	Forza generalizzata di Lorentz	6
2	Pillole di meccanica quantistica	7
2.1	Postulati della meccanica quantistica	7
2.2	Equazione di Schrödinger stazionaria	10
2.3	Particella carica in un campo elettromagnetico: Lagrangiana, momento coniugato e Hamiltoniana	11
3	Livelli di Landau	13
3.1	Sviluppo dell'hamiltoniana	13
3.2	Gauge di Landau	14
3.3	Separazione delle variabili	14
4	Gauge simmetrica e calcolo esplicito	17
4.1	Gauge simmetrica	17
4.1.1	Elettrone in campo magnetico	18
4.2	Passaggio a coordinate polari	19
4.3	Riformulazione del problema agli autovalori radiale	19
4.4	Analisi asintotica della soluzione radiale	20
4.4.1	Scelta di una soluzione	21
4.5	Riduzione all'equazione ipergeometrica confluyente	21
4.6	Numero quantico radiale e quantizzazione dell'energia	22
5	Applicazioni della gauge simmetrica e conclusioni	24
5.1	Commenti e confronto tra le energie del Gauge simmetrico e Gauge di Landau	24
5.1.1	Funzione d'onda con gauge di Landau, commenti e grafici	25
5.2	Funzione d'onda con gauge Simmetrica, commenti e grafici	27
5.2.1	Confronto tra autofunzioni con gauge di landau e gauge simmetrica	29
5.2.2	Perché utilizzare la gauge simmetrica?	31
5.3	Conclusioni	33
A	Coordinate polari	35

B Operatore impulso in coordinate polari	37
C Operatore momento angolare	39
C.1 Algebra dei momenti angolari	39
C.2 Operatore momento angolare in coordinate polari	40
C.3 Operatore L^2 : spettro e autofunzioni	41
D Polinomi di Hermite	42
E Polinomi di Laguerre	44
F Soluzione dettagliata dell'oscillatore armonico quantistico	46
G Funzione ipergeometrica confluyente	49

Abstract

In questo elaborato ci poniamo di calcolare i Livelli di Landau per una particella "spinless" in campo magnetico uniforme monodirezionale utilizzando due diverse gauge per scrivere il potenziale vettore.

Una volta risolto il problema agli autovalori stazionario in maniera esplicita, si vanno a confrontare i risultati ottenuti, sia da un punto di vista matematico sia da un punto di vista grafico.

Si verifica l'invarianza per gauge delle energie e si discutono le differenze nelle funzioni d'onda.

Si discute poi un'applicazione per la gauge simmetrica.

Capitolo 1

Potenziali vettoriali e scalari

Introduzione

In elettromagnetismo, i campi elettrici e magnetici possono essere espressi in termini di potenziali. Il campo elettrico \vec{E} è associato a un potenziale scalare V , mentre il campo magnetico \vec{B} è descritto mediante un potenziale vettoriale \vec{A} . L'introduzione dei potenziali permette di semplificare notevolmente la trattazione matematica dei campi e consente di esprimere le equazioni di Maxwell in forma più compatta, evidenziando la struttura geometrica e simmetrica del problema.

Per ulteriori approfondimenti si consiglia [4].

1.1 Potenziale scalare elettrico

In un campo elettrostatico vale la condizione di conservatività del campo elettrico:

$$\nabla \times \vec{E} = 0. \quad (1.1)$$

Questa relazione implica l'esistenza di un potenziale scalare V tale che:

$$\vec{E} = -\nabla V. \quad (1.2)$$

Combinando tale espressione con la legge di Gauss per il campo elettrico:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (1.3)$$

si ricava l'equazione di Poisson per il potenziale elettrico:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (1.4)$$

Nel vuoto, o in regioni prive di carica ($\rho = 0$), si ottiene l'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 V = 0. \quad (1.5)$$

L'equazione di Poisson descrive quindi come la distribuzione di carica determina il potenziale elettrico, mentre l'equazione di Laplace studia il comportamento del potenziale in regioni libere da sorgenti.

1.2 Potenziale vettoriale magnetico

Il campo magnetico \vec{B} è un campo solenoidale, ossia caratterizzato da divergenza nulla:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.6)$$

Questa relazione garantisce l'esistenza di un potenziale vettoriale \vec{A} tale che:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (1.7)$$

L'introduzione del potenziale vettoriale semplifica il trattamento dei campi magnetici e consente di descrivere configurazioni anche molto complesse tramite quantità scalari e vettoriali più semplici da manipolare.

Consideriamo ora la legge di Ampère–Maxwell:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.8)$$

Sostituendo $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, si ottiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.9)$$

Usando l'identità vettoriale:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}, \quad (1.10)$$

segue:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.11)$$

1.3 Scelta della gauge

L'espressione per \vec{A} non è univoca: è infatti possibile introdurre una *trasformazione di gauge* del tipo:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda, \quad (1.12)$$

dove Λ è una funzione scalare arbitraria sufficientemente regolare. Il campo magnetico resta invariato sotto tale trasformazione:

$$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times (\vec{A} + \nabla \Lambda) = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}, \quad (1.13)$$

poiché il rotore di un gradiente è sempre nullo.

Per semplificare le equazioni relative al potenziale vettoriale si impone spesso la *condizione di Coulomb*:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (1.14)$$

In questo caso l'equazione precedente diventa:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}. \quad (1.15)$$

1.4 Relazione tra i potenziali e i campi

Il campo elettrico può essere espresso in termini del potenziale scalare e del potenziale vettoriale:

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (1.16)$$

mentre il campo magnetico è dato da:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (1.17)$$

Queste relazioni permettono di riscrivere le equazioni di Maxwell interamente in funzione dei potenziali V e \vec{A} , che diventano così le grandezze fondamentali per descrivere il comportamento dei campi elettromagnetici.

1.5 Forza generalizzata di Lorentz

La dinamica di una particella carica in presenza di campi elettrici e magnetici è governata dalla *forza di Lorentz*, che rappresenta la forza agente su una carica in movimento. La sua espressione è:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad (1.18)$$

dove q è la carica della particella e \vec{v} la velocità.

Sostituendo le definizioni dei potenziali, si ottiene la forma *generalizzata* della forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q \left[-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) \right]. \quad (1.19)$$

Questa espressione mostra come i potenziali elettromagnetici influenzino direttamente il moto della particella. In particolare:

- il termine $-\nabla V$ rappresenta la forza dovuta al potenziale elettrico;
- il termine $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ descrive la parte del campo elettrico indotta da variazioni temporali di \vec{A} ;
- il termine $\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A})$ riproduce la parte magnetica della forza, legata alla curvatura delle linee del campo.

La formulazione tramite potenziali è particolarmente utile nella meccanica quantistica e nella teoria dei campi, dove la quantità fondamentale non è il campo elettrico o magnetico in sé, ma il potenziale \vec{A} , che interviene direttamente nell'hamiltoniana e nelle fasi della funzione d'onda, infatti nei capitoli successivi questo concetto diventerà fondamentale.

Capitolo 2

Pillole di meccanica quantistica

Nel seguito vengono enunciati i 5 postulati della meccanica quantistica, un insieme coerente di leggi che ne racchiudono l'essenza.

La meccanica quantistica nasce sostanzialmente agli inizi del 20-esimo secolo dalle "due nuvolette nere" di Lord Kelvin ossia il risultato negativo dell'esperimento di Michelson-Morley e l'insufficienza della legge di Rayleigh-Jeans per l'irraggiamento a ultravioletti (non entrerà nei dettagli di queste "nuvolette"), secondo Kelvin questi due problemi erano tutto quello che separava i fisici contemporanei ad avere una comprensione totale delle leggi della natura attraverso la fisica, inutile dire che si sbagliava.

L'idea che la realtà sia quantizzata ai livelli di interazione più fondamentali, il concetto di funzione d'onda, il fatto di non poter misurare assieme velocità e posizione (almeno a scale infinitesime) e il fatto che la realtà "cambia" quando viene osservata (esperimento della doppia fenditura) sono tutti concetti racchiusi all'interno di questi 5 soli postulati, sulla quale viene poi costruita la meccanica quantistica.

Viene enunciata la formulazione dell'equazione di Schrödinger stazionaria che verrà utilizzata ampiamente nel corso di questo elaborato. Fonte [3].

2.1 Postulati della meccanica quantistica

Definizione di raggio nello spazio di Hilbert

Un **raggio** in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} è una classe di equivalenza di vettori che differiscono l'uno dall'altro per una costante arbitraria non nulla $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$|\psi\rangle \simeq \alpha |\psi\rangle \quad (2.1)$$

Postulato n.1: descrizione degli stati di un sistema

A ciascun sistema fisico quantistico si fa corrispondere uno spazio di Hilbert complesso e separabile \mathcal{H} . A ciascun stato fisico del sistema si fa corrispondere, a un fissato tempo t , un **raggio** in \mathcal{H} . Normalmente uno stato viene rappresentato da un vettore appartenente al raggio. Nel caso tale vettore non sia normalizzato, si può definire lo stato normalizzato mediante:

$$|\check{\psi}\rangle = \frac{|\psi\rangle}{\|\psi\|} \quad (2.2)$$

purché $\|\psi\| < \infty$. Dal postulato discende il principio di sovrapposizione: se il sistema può trovarsi negli stati $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, allora può trovarsi in ogni combinazione lineare:

$$\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \quad (2.3)$$

Gli stati fisici corrispondono dunque a vettori normalizzati, e una fase globale non ha significato fisico:

$$|\psi\rangle \quad \text{e} \quad e^{i\alpha}|\psi\rangle \quad (2.4)$$

rappresentano lo stesso stato. La fase relativa in una sovrapposizione è invece fisicamente rilevante.

Definizione

Un **osservabile** è una proprietà di uno stato fisico che può essere misurata.

Postulato n.2: descrizione delle osservabili fisiche

Ogni grandezza osservabile classica $F(p, q, t)$ è rappresentata in meccanica quantistica da un **operatore lineare hermitiano** \hat{F} che agisce sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} del sistema. Gli autovalori di \hat{F} (lo spettro) possono essere discreti, continui o misti.

L'operatore hermitiano soddisfa l'equazione agli autovalori

$$\hat{F}|k\rangle = f_k|k\rangle \quad (2.5)$$

e ammette una decomposizione spettrale

$$\hat{F} = \sum_k f_k \hat{E}_k = \sum_k f_k |k\rangle\langle k| \quad (2.6)$$

dove $\hat{E}_k = |k\rangle\langle k|$ sono proiettori ortogonali che soddisfano

$$\hat{E}_k \hat{E}_{k'} = \delta_{k,k'} \hat{E}_k, \quad \hat{E}_k^\dagger = \hat{E}_k. \quad (2.7)$$

Postulato n.3: misura delle osservabili fisiche

Una misura è un processo mediante il quale un osservatore acquisisce informazione sullo stato di un sistema.

Misurando l'osservabile \hat{F} nello stato generico $|\psi\rangle$, il sistema viene proiettato su uno degli autovettori $|k\rangle$ di \hat{F} e il risultato della misura è l'autovalore f_k , ottenuto con probabilità

$$P_k = \|\hat{E}_k|\psi\rangle\|^2 = \langle\psi|\hat{E}_k|\psi\rangle. \quad (2.8)$$

Nei vari casi:

- Autovalori discreti non degeneri:

$$P_k = |\langle k|\psi\rangle|^2. \quad (2.9)$$

- Autovalori discreti degeneri:

$$P_k = \sum_{i=1}^{g_k} |\langle k_i|\psi\rangle|^2, \quad (2.10)$$

dove $\{|k_i\rangle\}$ è una base ortonormale dell'autospazio di f_k .

- Autovalori continui:

densità di probabilità

$$\rho(k) = |\langle k|\psi\rangle|^2, \quad (2.11)$$

cosicché la probabilità che il risultato sia tra $f(k)$ e $f(k) + dk$ è

$$\rho(k) dk = |\langle k|\psi\rangle|^2 dk. \quad (2.12)$$

Dopo una misura che produce l'autovalore f_k , il sistema collassa nello stato $|k\rangle$ (o nella proiezione del vecchio stato sull'autospazio degenerato).

Una misura ripetuta immediatamente darà lo stesso risultato con certezza.

Postulato n.4: dinamica ed evoluzione temporale degli stati

Nei sistemi chiusi l'evoluzione temporale è descritta da un operatore unitario.

Lo stato $|\psi(t)\rangle$ evolve secondo l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (2.13)$$

dove \hat{H} è l'**operatore hamiltoniano**, ottenuto sostituendo gli operatori \hat{q} e \hat{p} nella hamiltoniana classica:

$$\hat{H} = H(\hat{q}, \hat{p}). \quad (2.14)$$

Gli operatori di posizione e momento in generale non commutano:

$$[\hat{q}, \hat{p}] \neq 0. \quad (2.15)$$

Quindi ad esempio per un sistema di N particelle con energia cinetica più un potenziale, l'operatore hamiltoniano assume la forma tipica del formalismo:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + V(\hat{q}). \quad (2.16)$$

Postulato n.5: sistemi composti

Consideriamo due sistemi A e B , con spazi di Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B . Lo spazio degli stati del sistema composto è il **prodotto tensoriale**

$$\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B. \quad (2.17)$$

Se A è nello stato $|\psi\rangle_A$ e B nello stato $|\phi\rangle_B$, lo stato congiunto è

$$|\psi, \phi\rangle_{AB} \equiv |\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B. \quad (2.18)$$

Questi postulati poggiano su una base matematica molto avanzata, gli spazi di Hilbert (postulato 1), questo fa sì che la meccanica quantistica sia lineare e permette di utilizzare il concetto di autovalore e autovettore, concetto FONDAMENTALE nella meccanica quantistica.

2.2 Equazione di Schrödinger stazionaria

Se l'hamiltoniana \hat{H} non dipende esplicitamente dal tempo t , le soluzioni dell'equazione di Schrödinger per un sistema con N gradi di libertà descritti da coordinate lagrangiane q_i possono essere fattorizzate nella forma

$$\Psi(q, t) = \psi(q) \phi(t) \quad (2.19)$$

e, inserite nell'equazione di Schrödinger,

$$i\hbar \frac{1}{\phi(t)} \frac{d\phi}{dt} = \frac{\hat{H}\psi(q)}{\psi(q)}. \quad (2.20)$$

Il primo membro dipende solo da t e il secondo solo dalle coordinate q .

Essi possono essere entrambi costanti solo se sono uguali a una stessa costante reale, che indichiamo con E . La parte temporale soddisfa quindi

$$i\hbar \frac{d\phi}{dt} = E \phi(t), \quad (2.21)$$

la cui soluzione generale è

$$\phi(t) = A e^{-\frac{i}{\hbar} E t}. \quad (2.22)$$

Poiché $|e^{-iEt/\hbar}| = 1$, si può scegliere $A = 1$ senza perdita di generalità. La parte spaziale deve soddisfare l'equazione agli autovalori dell'hamiltoniana:

$$\hat{H} \psi(q) = E \psi(q). \quad (2.23)$$

I possibili valori di energia, indicati con E_n , sono determinati dunque dall'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo (o equazione stazionaria):

$$\hat{H} \psi_{n,(k)}(q) = E_n \psi_{n,(k)}(q), \quad (2.24)$$

dove gli autostati $\psi_{n,(k)}$ sono etichettati da un indice n (discreto o continuo) associato all'autovalore E_n e da un insieme di indici $(k) = \{k_1, \dots, k_N\}$ che corrispondono ad eventuali degenerazioni dell'autospazio di E_n .

La funzione d'onda completa associata all'energia E_n assume quindi la forma

$$\Psi_n(q, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \sum_{(k)} A_{n,(k)} \psi_{n,(k)}(q) = e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \Psi_n(q). \quad (2.25)$$

Poiché il fattore temporale è una pura fase di modulo unitario, la densità di probabilità risulta

$$|\Psi_n(q, t)|^2 = \sum_{(k)} |A_{n,(k)} \psi_{n,(k)}(q)|^2, \quad (2.26)$$

che non dipende dal tempo.

Per questo motivo gli stati a energia definita sono detti **stati stazionari**.

Un generico stato quantistico può sempre essere scritto come sovrapposizione di stati stazionari:

$$\Psi(q, t) = \sum_n B_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \Psi_n(q). \quad (2.27)$$

Se la sovrapposizione coinvolge più autovalori di energia distinti E_n , le fasi temporali non possono essere fattorizzate e lo stato presenta una dipendenza temporale non banale: in tal caso lo stato non è stazionario.

2.3 Particella carica in un campo elettromagnetico: Lagrangiana, momento coniugato e Hamiltoniana

Consideriamo una particella di carica q soggetta alla forza di Lorentz

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{x}}{c} \times \vec{B} \right). \quad (2.28)$$

I potenziali elettromagnetici sono definiti da

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (2.29)$$

La lagrangiana del sistema è

$$L = \frac{1}{2} m \vec{x}^2 - q\Phi(\vec{x}) + \frac{q}{c} \vec{x} \cdot \vec{A}(\vec{x}), \quad (2.30)$$

da cui otteniamo il momento coniugato generalizzato:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = m\vec{x} + \frac{q}{c} \vec{A}. \quad (2.31)$$

Da questa relazione si ricava

$$m\vec{x} = \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}. \quad (2.32)$$

Equazioni del moto

Calcoliamo la quantità

$$\frac{d}{dt}(m\vec{x}) = m\vec{x} + \frac{q}{c} \frac{d\vec{A}}{dt}. \quad (2.33)$$

La derivata totale del potenziale vettore è

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = (\vec{x} \cdot \nabla) \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (2.34)$$

La forza lagrangiana è invece

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = -q \nabla\Phi + \frac{q}{c} \nabla(\vec{x} \cdot \vec{A}). \quad (2.35)$$

Quindi l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 0 \quad (2.36)$$

diventa

$$m\vec{x} = q \left(-\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} \left[(\vec{x} \cdot \nabla) \vec{A} - \nabla(\vec{x} \cdot \vec{A}) \right]. \quad (2.37)$$

Usando l'identità vettoriale

$$\nabla(\vec{x} \cdot \vec{A}) - (\vec{x} \cdot \nabla) \vec{A} = \vec{x} \times (\nabla \times \vec{A}), \quad (2.38)$$

e ricordando che $\nabla \cdot \vec{x} = 0$, otteniamo finalmente

$$m\vec{\ddot{x}} = q \left(-\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} \vec{\dot{x}} \times (\nabla \times \vec{A}), \quad (2.39)$$

e quindi

$$m\vec{\ddot{x}} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{\dot{x}}}{c} \times \vec{B} \right), \quad (2.40)$$

ovvero la forza di Lorentz scritta nello spazio delle coordinate generalizzate.

Hamiltoniana della particella carica

Dalla definizione di momento coniugato otteniamo

$$\vec{\dot{x}} = \frac{1}{m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right), \quad (2.41)$$

e la Hamiltoniana è

$$H = \vec{p} \cdot \vec{\dot{x}} - L. \quad (2.42)$$

Sostituendo si ottiene

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\Phi(\vec{x}). \quad (2.43)$$

Quantizzazione e equazione di Schrödinger

Quando si passa alla meccanica quantistica si sostituisce

$$\vec{p} \longrightarrow \hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla, \quad (2.44)$$

mentre $\vec{A}(\vec{x})$ e $\Phi(\vec{x})$ diventano operatori di moltiplicazione per funzione.

L'hamiltoniana quantistica diventa

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{x}) \right)^2 + q\Phi(\vec{x}). \quad (2.45)$$

La corrispondente equazione di Schrödinger per una particella spinless è:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \left[\frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{x}) \right)^2 + q\Phi(\vec{x}) \right] |\psi(t)\rangle. \quad (2.46)$$

Questa equazione sarà il punto di partenza per tutti i problemi che verranno svolti nel corso dell'elaborato.

Capitolo 3

Livelli di Landau

In questo capitolo deriviamo partendo dall'Hamiltoniana per un particella spinless all'interno di un campo magnetico uniforme i livelli energetici, noti come *Livelli di Landau*, e le autofunzioni corrispondenti, derivanti dal problema agli autovalori stazionario, derivazione presa da [5].

Inizialmente considereremo tutte e 3 le dimensioni per l'elettrone di muoversi, in modo tale da essere fedeli a [5], vedremo poi nel capitolo finale che confinare l'elettrone al movimento nel solo piano xy risulta banale.

Una discussione più approfondita del risultato ottenuto verrà fatta nell'ultimo capitolo.

3.1 Sviluppo dell'hamiltoniana

Dal capitolo precedente otteniamo:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\Phi. \quad (3.1)$$

Sviluppiamo il quadrato:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[\hat{\vec{p}}^2 - \frac{q}{c} (\hat{\vec{p}} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \hat{\vec{p}}) + \frac{q^2}{c^2} \vec{A}^2 \right] + q\Phi. \quad (3.2)$$

Dove impostiamo il potenziale Φ a zero per via della nostra scelta di gauge.

Prima di proseguire è doveroso fare un piccolo appunto per poter ulteriormente semplificare il termine di doppio prodotto.

Poiché \vec{A} dipende dalle coordinate, il commutatore non è nullo Appendice C:

$$[\hat{p}_i, A_j(\vec{x})] = -i\hbar \partial_i A_j. \quad (3.3)$$

Quindi:

$$\hat{\vec{p}} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \hat{\vec{p}} - i\hbar (\nabla \cdot \vec{A}). \quad (3.4)$$

Siccome possiamo imporre la condizione di Coulomb menzionata nel capitolo 1:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (3.5)$$

Dove la forma scelta del potenziale per rispettare la condizione è la seguente:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{A} \quad (3.6)$$

A questo punto il termine centrale di doppio prodotto diventa:

$$\hat{\vec{p}}\vec{A} + \vec{A}\hat{\vec{p}} = 2\vec{A} \cdot \hat{\vec{p}}. \quad (3.7)$$

3.2 Gauge di Landau

Consideriamo un campo magnetico uniforme diretto lungo z :

$$\vec{B} = B \hat{z}. \quad (3.8)$$

Una scelta conveniente del potenziale vettore è il *gauge di Landau*:

$$\vec{A} = (-By, 0, 0). \quad (3.9)$$

L'hamiltoniana diventa quindi, separando l'operatore $\hat{\vec{p}}$ e \vec{A} nelle loro componenti:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[\left(\hat{p}_x^2 + \frac{qB}{c} y \right)^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 \right]. \quad (3.10)$$

Notiamo che \hat{H} non dipende esplicitamente dalle coordinate x e z , per cui gli operatori \hat{p}_x e \hat{p}_z commutano con la nostra Hamiltoniana. Questo significa che è possibile diagonalizzare entrambe questi operatori utilizzando le stesse autofunzioni, il che, come vedremo nella sezione successiva, semplifica molto i calcoli.

3.3 Separazione delle variabili

Siccome l'hamiltoniana commuta con gli operatori di momento per le coordinate x e z e NON compaiono altri termini espliciti di quest'ultimi posso separare le variabili dell'autofunzione totale in questo modo:

$$\psi(x, y, z) = \psi(x)\psi(z)\chi(y) \quad (3.11)$$

Dove i termini dipendenti da x e z si riducono semplicemente ad uno "shift" da applicare a $\chi(y)$.

Infatti se scrivo l'equazione di Schrödinger stazionaria per la componente \hat{p}_x , posso assumere una soluzione del tipo:

$$\hat{p}_x \psi(x) = p_x \psi(x). \quad (3.12)$$

Dato che p_x è l'autovalore dell'operatore \hat{p}_x , l'equazione differenziale è del tipo (ricordando che $\hat{p}_i = -i\hbar\nabla_i$):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) - p_x \psi(x) = 0. \quad (3.13)$$

Da cui:

$$\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} p_x \psi(x) = 0. \quad (3.14)$$

Questa può essere scritta come:

$$\psi''(x) - k^2 \psi(x) = 0 \quad (3.15)$$

dove

$$k^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} p_x \quad (3.16)$$

La soluzione è:

$$\psi(x) = e^{i \frac{p_x}{\hbar} x} \quad (3.17)$$

Analogo il calcolo per \hat{p}_y . Cerchiamo quindi soluzioni della equazione agli autovalori stazionari nella forma:

$$\psi(x, y, z) = e^{i(p_x x + p_z z)} \chi(y) \quad (3.18)$$

[NOTA: l'esponente è come se avessi una rotazione giusto?]

Adesso che ho la forma della mia soluzione non mi resta che calcolare $\chi(y)$ e per farlo sostituisco $\phi(x, y, z)$ all'equazione agli autovalori stazionaria ($\hat{H}\phi = E\phi$).

Sostituendo si ottiene (semplificando la fase comune):

$$\frac{1}{2m} \left[(\hat{p}_x + \frac{qB}{c} y)^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 \right] \chi(y) = E \chi(y) \quad (3.19)$$

Adesso sviluppiamo il doppio prodotto e assumendo le condizioni che ci hanno portato al passaggio (3.7) abbiamo:

$$(\hat{p}_x + \frac{qB}{c} y)^2 = \hat{p}_x^2 + 2\hat{p}_x \frac{qB}{c} y + \left(\frac{qB}{c}\right)^2 y^2 \quad (3.20)$$

Sostituendo direttamente (3.20) all'interno di (3.19), tenendo conto che la funzione $\chi(y)$ è anch'essa autofunzione per gli operatori \hat{p}_x , \hat{p}_y (come citato nel paragrafo precedente) mentre per l'operatore \hat{p}_y ho l'operatore nabla rispetto la coordinata y :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \chi''(y) + \frac{1}{2m} \left[p_x^2 + 2p_x \frac{qB}{c} y + \left(\frac{qB}{c}\right)^2 y^2 + \frac{p_z^2}{2m} \right] \chi(y) = E \chi(y). \quad (3.21)$$

Per poterla risolvere dobbiamo portarci ad un caso conosciuto, qui possiamo trasformare questa equazione differenziale a un caso semplice cioè l'equazione differenziale dell'oscillatore armonico (cioè un'equazione nella forma (3.15), Appendice F).

Per farlo notiamo che l'unico autovalore "legato" alla variabile y nell'equazione è l'autovalore p_x , possiamo pensare di scrivere l'equazione all'interno come un quadrato con la variabile y "spostata" di una certa quantità y_0 , il significato di questa quantità verrà esaminato successivamente.

y_0 è definito in questo modo:

$$y_0 = -\frac{c}{qB} p_x \quad (3.22)$$

Riscriviamo poi l'energia come:

$$E' = E - \frac{p_z^2}{2m} \quad (3.23)$$

Questo ci permette di considerare il contributo del momento della particella nell'asse delle z come uno shift continuo applicato all'energia.

Sostituendo ottengo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \chi''(y) + \frac{1}{2m} \left(\frac{qB}{c}\right)^2 (y - y_0)^2 \chi(y) = E' \chi(y) \quad (3.24)$$

Riscrivendola adesso in maniera formale otteniamo:

$$\chi''(y) + \left[\frac{2m}{\hbar^2} E' - \frac{m^2}{\hbar^2} \left(\frac{qB}{mc} \right)^2 (y - y_0)^2 \right] \chi(y) = 0 \quad (3.25)$$

Possiamo riconoscere un termine energetico e un termine che assomiglia ad un potenziale armonico, infatti è l'equazione di Schrödinger di un oscillatore armonico centrato in y_0 , con frequenza ciclotronica:

$$\omega_c = \frac{qB}{mc} \quad (3.26)$$

La soluzione dell'equazione (3.25) è già ampiamente nota e studiata, la soluzione dettagliata è presente nell'appendice Appendice F. Le autofunzioni finali che otteniamo sono quindi le seguenti:

$$\psi_n = e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_z z)} e^{\frac{qB}{2}(y-y_0)^2} H_n\left(\sqrt{\frac{qB}{ch}}(y - y_0)\right) \quad (3.27)$$

Dove H_n sono i polinomi di Hermite Appendice D.

Sostituendo la carica $q = -|e|$ dove ovviamente e è la carica dell'elettrone ottengo stati completamente normalizzabili:

$$\psi_n = e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_z z)} e^{-\frac{|e|B}{2}(y-y_0)^2} H_n\left(\sqrt{\frac{qB}{ch}}(y - y_0)\right) \quad (3.28)$$

Il meno in quell'esponente rende la funzione normalizzabile. Gli autostati associati sono:

$$E'_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c. \quad (3.29)$$

Usando la definizione di E' otteniamo:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c + \frac{p_z^2}{2m} \quad (3.30)$$

Si nota una prima parte che corrisponde al movimento nel piano xy ossia $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c$, che è analoga anche a quella del problema dell'oscillatore armonico unidimensionale in meccanica quantistica, mentre, una seconda parte data da $\frac{p_z^2}{2m}$ che subentra appunto come già accennato in precedenza come uno "shift" continuo sull'asse delle z , sono livelli energetici infinitamente degeneri proprio per questo.

In meccanica classica la quantità y_0 sarebbe una coordinata del centro del cerchio, una discussione più approfondita di questo risultato verrà affrontata nel capitolo 5.

Capitolo 4

Gauge simmetrica e calcolo esplicito

E' possibile risolvere il problema dei LLs utilizzando gauge diverse, esse possono avere diversi vantaggi, come ad esempio risolvere delle degenerazioni ai livelli energetici e permette di conservare l'invarianza rotazionale, [1].

In questo capitolo ci occupiamo sempre del problema di una particella carica libera di muoversi nel piano xy non più nell'intero volume come nel capitolo precedente, sempre però sotto l'effetto di un campo magnetico costante diretto lungo l'asse z .

In questo capitolo andremo a definire la scelta di gauge simmetrico e ci porteremo alla scrittura dell'hamiltoniana per questo caso.

4.1 Gauge simmetrica

Consideriamo un campo magnetico uniforme diretto lungo l'asse z :

$$\vec{B} = B_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

La scelta che facciamo per il potenziale simmetrico è la seguente:

$$\vec{A}_{\text{sym}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -B_z y \\ B_z x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

Questa scrittura viene dal fatto che voglia rispettata la condizione di Coulomb, il potenziale deve essere quindi nella forma:

$$\vec{A}_{\text{sym}} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} \quad (4.3)$$

Sviluppando il prodotto otteniamo

$$\vec{A}_{\text{sym}} = \frac{B}{2} (-y \hat{x} + x \hat{y}). \quad (4.4)$$

Notiamo che l'unica differenza dalla gauge di Landau consiste nell'aggiunta di un termine x , differiscono quindi soltanto da un delta, che rispetta appunto la condizione $\nabla \cdot (\Delta A) = 0$

Riscrivendo il momento coniugato esattamente come si era fatto nel capitolo 2 si ottiene

$$\hat{\Pi} = \hat{p} - q\vec{A} \quad (4.5)$$

L'hamiltoniana risulta

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\Pi}_x^2 + \hat{\Pi}_y^2 + \hat{\Pi}_z^2 \right) \quad (4.6)$$

Con la scelta di gauge simmetrico e tenendo conto che la particella è costretta a muoversi nel piano xy :

$$\hat{\Pi}_x = \hat{p}_x + \frac{qB_z}{2}y, \quad \hat{\Pi}_y = \hat{p}_y - \frac{qB_z}{2}x, \quad \hat{\Pi}_z = 0 \quad (4.7)$$

Valutiamo il prodotto scalare tra potenziale e momento:

$$\vec{A} \cdot \hat{\vec{p}} = \frac{B}{2}(x\hat{p}_y - y\hat{p}_x). \quad (4.8)$$

Riconosciamo in questa equazione la terza componente dell'operatore momento angolare, scritta come:

$$\hat{L}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x \quad (4.9)$$

Sviluppando quindi i quadrati e utilizzando le unità naturali ($c = 1, \hbar = 1$) l'equazione (4.6) diventa:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 \right) - qB\hat{L}_z + \frac{q^2 B^2}{4}(x^2 + y^2) \right] \quad (4.10)$$

In questa equazione possiamo notare un termine aggiuntivo di momento angolare rispetto all'hamiltoniana trovata utilizzando la Gauge di Landau.

4.1.1 Elettrone in campo magnetico

Per un elettrone:

$$q = -e, \quad B_z = -B, \quad (4.11)$$

sostituendo all'equazione (4.10) otteniamo:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} - \frac{\omega_c}{2}\hat{L}_z + \frac{m}{2}\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2(x^2 + y^2) \quad (4.12)$$

Dove ω_c è la classica frequenza di ciclotrone:

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \quad (4.13)$$

Nell'equazione (4.12) riconosciamo un termine di energia cinetica nel primo addendo, che tiene in considerazione la quantità di moto della particella nel piano xy , abbiamo poi una parte di momento angolare nel secondo addendo (che è appunto la parte "aggiuntiva" rispetto all'hamiltoniana scritta con gauge di Landau) e infine come ultimo termine un termine di potenziale armonico.

Per poter risolvere il problema agli autovalori stazionario è molto utile effettuare un cambiamento in coordinate polari, molto comodo in quanto abbiamo l'operatore momento angolare e il termine $(x^2 + y^2)$ che si traduce perfettamente al quadrato del raggio in coordinate polari.

4.2 Passaggio a coordinate polari

Usiamo:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (4.14)$$

Valutiamo quindi come si trasforma l'operatore laplaciano nel piano xy in modo tale da poter sostituire il termine di energia cinetica dall'equazione (4.12)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (4.15)$$

La componente del momento angolare è

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (4.16)$$

Per vedere i passaggi matematici completi Appendice A , Appendice B, Appendice C Inserendole nell'hamiltoniana, otteniamo

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{\omega_c}{2} L_z + \frac{m\omega_c^2}{8} r^2. \quad (4.17)$$

Poiché $[\hat{H}, L_z] = 0$ e non ho termini misti, posso separare le variabili delle autofunzioni del problema stazionario:

$$\Psi(r, \varphi) = R(r) \Phi_{m_l}(\varphi), \quad (4.18)$$

con

$$\Phi_{m_l}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l \varphi}, \quad m_l \in \mathbb{Z}. \quad (4.19)$$

Autofunzioni dell'operatore \hat{L}_z , le possiamo scrivere direttamente in questo modo perché il termine angolare φ compare solo all'interno di esso (vedere Appendice C).

L'unica parte che resta calcolare sono le autofunzioni della parte radiale, $R(r)$, sostituia-
mo quindi (4.18) e semplifichiamo la fase comune data da (4.19):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{m_l^2}{r^2} R \right] - \frac{m_l \omega_c}{2} \hbar R + \frac{m\omega_c^2}{8} r^2 R = ER. \quad (4.20)$$

Adesso non resta che "sistemare" quest'equazione in modo tale da portarla in una forma dove ci è più facile riconoscere che tipo di equazione differenziale si tratta.

4.3 Riformulazione del problema agli autovalori radiali

Posso riscrivere l'equazione (4.20) nel modo seguente:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} - \frac{m^2}{r^2} R(r) - \frac{1}{4} \omega_c^2 r^2 R(r) + \frac{m\omega_c}{\hbar} R(r) = \frac{2m}{\hbar^2} E' R(r), \quad (4.21)$$

dove ho riscritto l'energia come:

$$E' = E + \frac{\hbar\omega_c}{2} m_\ell. \quad (4.22)$$

come sostituzione ha senso in quanto sto sommando due quantità con la stessa unità di misura in quanto $[\hbar] = \text{joule} \cdot \text{s}$ e ω_c essendo una frequenza si misura in s^{-1} , questo tipo di sostituzione ci porta quindi in un caso quasi analogo a quello di Landau dove l'energia era definita come (3.23), in questo caso però ho uno shift quantizzato, nel capitolo finale vedremo nel dettaglio le conseguenze di questo fatto.

Adesso introducendo una nuova grandezza l_0 detta lunghezza magnetica elettronica della forma:

$$l_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}. \quad (4.23)$$

L'equazione (1.1) diventa:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{m^2}{r^2} R - \frac{r^2}{4l_0^4} R + \frac{m}{l_0^2} R = \lambda R, \quad (4.24)$$

A questo punto, come è solito fare quando si risolvono equazioni differenziali, introduciamo una variabile adimensionale:

$$\xi = \frac{r^2}{2l_0^2}; \quad \xi \geq 0 \quad (4.25)$$

Le derivate rispetto a r diventano quindi

$$\frac{d}{dr} = \frac{r}{l_0^2} \frac{d}{d\xi}; \quad \frac{d^2}{dr^2} = \frac{1}{l_0^2} \frac{d}{d\xi} + \frac{r^2}{l_0^4} \frac{d^2}{d\xi^2}; \quad r^2 = 2l_0^2 \xi. \quad (4.26)$$

Sostituendo queste trasformazioni nell'equazione differenziale originale, si ottiene una nuova equazione in funzione della variabile adimensionale ξ , adesso non resta che trovare buoni candidati da sostituire alla parte di funzione d'onda radiale R , per farlo si vanno a svolgere un'analisi asintotica dell'equazione.

4.4 Analisi asintotica della soluzione radiale

Una volta introdotta la variabile adimensionale ξ , l'equazione radiale assume la seguente forma:

$$\xi \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{dR}{d\xi} - \frac{m_l^2}{4\xi} R - \frac{\xi}{4} R + \lambda R = 0. \quad (4.27)$$

Con $\lambda = \frac{E'}{\hbar\omega_c} = \frac{mE'}{\hbar^2} l_0^2$. Successivamente nell'andare a considerare i limiti per $\xi \rightarrow \infty$ e $\xi \rightarrow 0$, mi aspetto ovviamente che R e la sua derivata prima vadano a zero in maniera continua per $\xi \rightarrow \infty$.

Limite $\xi \rightarrow \infty$

Nel limite di grandi valori di ξ , i termini dominanti sono quelli proporzionali a ξ , e l'equazione si approssima come

$$\xi \frac{d^2 R}{d\xi^2} - \frac{\xi}{4} R \approx 0. \quad (4.28)$$

Le soluzioni sono della forma:

$$R(\xi) \sim \exp(\pm \xi/2). \quad (4.29)$$

La normalizzabilità richiede la scelta

$$R(x) \sim e^{-\xi/2}, \quad (\xi \rightarrow \infty). \quad (4.30)$$

Limite $\xi \rightarrow 0$

Per $\xi \rightarrow 0$, i termini dominanti sono quelli in $1/\xi$, e l'equazione diventa

$$-\frac{m_\ell^2}{4\xi}R + \xi \frac{d^2 R}{d\xi^2} \approx 0. \quad (4.31)$$

E' un'equazione differenziale a variabili separabili, la sua soluzione generale è la così detta soluzione indiciale:

$$R(\xi) \sim \xi^S \quad (4.32)$$

Dove S nel nostro caso è uguale a $\pm|m_\ell|/2$, siccome voglio che la mia funzione rimanga continua per $\xi = 0$ il segno che tengo all'esponente è il $+$, e quindi ottengo:

$$R(\xi) \sim \xi^{|m_\ell|/2}, \quad (\xi \rightarrow 0). \quad (4.33)$$

4.4.1 Scelta di una soluzione

Avendo analizzato il comportamento asintotico che mi aspetto dalla mia soluzione, mi concentro sulla sua parte "non-asintotica" e scrivo quindi la forma che deve avere la soluzione come una parte asintotica e una non che chiamo $w(\xi)$, quindi per ora ho:

$$R(\xi) = \xi^{|m_\ell|/2} e^{-\xi/2} w(\xi). \quad (4.34)$$

Adesso non resta che sostituire nell'equazione (4.27) in modo tale da poter calcolare $w(\xi)$.

4.5 Riduzione all'equazione ipergeometrica confluyente

Sostituendo l'anstaz si ottiene:

$$\xi \frac{d^2 w}{d\xi^2} + (|m_\ell| + 1 - \xi) \frac{dw}{d\xi} + \left(\lambda - \frac{|m_\ell| + 1}{2} \right) w(\xi) = 0, \quad (4.35)$$

Riconosco in questa equazione la forma dell'equazione differenziale ipergeometrica confluyente:

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + (c - x) \frac{d}{dx} - a \right] M(a, c, x) = 0. \quad (4.36)$$

Dove $M(a, c, x)$ è detta iperfunzione geometrica confluyente Appendice G ed ha la seguente forma:

Per ottenere questa forma nell'equazione (4.35) chiamo:

$$c = |m_\ell| + 1, \quad a = \frac{|m_\ell| + 1}{2} - \lambda. \quad (4.37)$$

E sostituendo poi $w(\xi)$ con $M(a, c, \xi)$ dove, $M(a, c, \xi)$ è l'equazione ipergeometrica confluyente che è definita in questo modo:

$$M(a, c, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n x^n}{(c)_n n!} - 1 + \frac{a}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (4.38)$$

dove ho $c \neq 0, -1, -2, \dots$ e $(a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1)$; $(a)_0 = 1$ è detto simbolo di Pochhammer.

E' una proprietà di queste equazioni avere un comportamento definito quando la variabile(nel nostro caso) ξ tende ad infinito Appendice G, tale che:

$$M(a, c, \xi \rightarrow \infty) \sim e^\varepsilon \varepsilon^{a-\varepsilon} \quad (4.39)$$

Noto che questo andamento è simile a quello di $R(\xi)$, vorrei però che mantenesse sia la convergenza sia che rispetti appunto l'andamento di quest'ultimo, per cui devo avere come condizione $a = 0, -1, -2, \dots$. Questo condizione "quantizza" quindi ulteriormente i valori di a e rende $\omega(\xi)$ polinomiale. Nella sezione successiva ricaveremo da questa condizione sui valori possibili di a una sorta di numero quantico radiale chiamato che chiamerò n_r .

4.6 Numero quantico radiale e quantizzazione dell'energia

Tenendo a mente valore di a in (4.37) e dalla condizione imposta in (4.5), introduco:

$$a = -n_r, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.40)$$

segue quindi, ricordando che $\lambda = \frac{E'}{\hbar\omega_c}$:

$$E' = \hbar\omega_c \left(n_r + \frac{|m_\ell| + 1}{2} \right). \quad (4.41)$$

questo è però il valore dell'energia spostata di una certa quantità che dipendeva sempre dal numero quantico m_ℓ , sostituendo Con

$$\lambda = \frac{2E'}{\hbar\omega_c}, \quad (4.42)$$

si ottiene

$$E' = \hbar\omega_c \left(n + \frac{|m_\ell|}{2} + \frac{1}{2} \right). \quad (4.43)$$

Poiché

$$E' = E + \frac{\hbar\omega_c}{2} m_\ell, \quad (4.44)$$

si ricava

$$E = \hbar\omega_c \left(n_r + \frac{|m_\ell| - m_\ell}{2} \right). \quad (4.45)$$

Dove appunto questa forma verrà commentata a dovere nel capitolo successivo.

Ricapitolando, la funzione radiale non normalizzata è definita come:

$$R_{n_r, m_\ell}(\xi) = \exp(-\xi/2) \xi^{|m_\ell|/2} M(-n_r, 1 + |m_\ell|, \xi). \quad (4.46)$$

La componente dipendente dall'angolo φ dovuta al passaggio alle coordinate polari è la seguente(già normalizzata, vedere Appendice C):

$$\Phi_{m_\ell}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_\ell\varphi}. \quad (4.47)$$

E' possibile scrivere le funzioni ipergeometriche confluenti utilizzando i polinomi di Laguerre Appendice E, in modo tale da portare questa soluzione in una forma un poco più "familiare" nella maniera seguente:

$$L_{n_r}^k(\xi) = \frac{\xi^{-k} e^\xi}{n_r!} \frac{d^{n_r}}{d\xi^{n_r}} (e^{-\xi} \xi^{n_r+k}), \quad M(-n_r, |m_\ell| + 1, \xi) = \frac{n_r!}{(n_r + |m_\ell|)!} L_{n_r}^{|m_\ell|}(\xi). \quad (4.48)$$

La parte radiale normalizzata è quindi [metodi di normalizzazione mettere appendice];

$$R_{n_r, m_\ell}(r) = N_{n_r, m_\ell} \left(\frac{r}{l_0} \right)^{|m_\ell|} \exp\left(-\frac{r^2}{4l_0^2}\right) L_{n_r}^{|m_\ell|}\left(\frac{r^2}{2l_0^2}\right), \quad N_{n_r, m_\ell} = \sqrt{\frac{n_r!}{(n_r + |m_\ell|)!}}. \quad (4.49)$$

Quindi le autofunzioni finali sono nella forma $\Psi_{n_r, m_\ell}(r, \varphi) = \Phi_{m_\ell}(\varphi) R_{n_r}(r)$, andando a sostituire le componenti si ha:

$$\Psi_{n_r, m_\ell}(r, \varphi) = N_{n_r, m_\ell} \frac{e^{im_\ell \varphi}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{r}{l_0} \right)^{|m_\ell|} e^{\left(-\frac{r^2}{4l_0^2}\right)} L_{n_r}^{|m_\ell|}\left(\frac{r^2}{2l_0^2}\right). \quad (4.50)$$

Che sarebbe l'autofunzione normalizzata totale (quindi parte radiale e parte angolare) per livello energetico, che dipende da n_r e la sua degenerazione dovuta dal numero quantico m_ℓ .

Capitolo 5

Applicazioni della gauge simmetrica e conclusioni

5.1 Commenti e confronto tra le energie del Gauge simmetrico e Gauge di Landau

Arrivati a questo punto abbiamo quindi due modi diversi per scrivere lo stesso fenomeno fisico, nel caso di Landau l'elettrone si può muovere anche nell'asse z mentre nell'altro caso no, è confinato nel piano xy , per ovviare a questo problema basta impostare $p_z = 0$ che sarebbe una soluzione accettabile da un punto di vista fisico e annullerebbe soltanto lo "shift" energetico dell'equazione (3.30).

Fatta questa premessa entrambe le funzioni d'onda descrivono un elettrone che si muove nel piano xy soggetto all'influenza di un campo magnetico diretto verso l'asse delle z , costante nel tempo, questo fatto ci ha permesso non solo di poter considerare un problema agli autovalori stazionari "standard" (non abbiamo dovuto utilizzare metodi matematici del caso come ad esempio l'utilizzo della serie di Dyson etc...) ma anche di utilizzare formule e tecniche conosciute sin dall'elettrostatica, tra i quali appunto l'utilizzo della forza generalizzata di Lorentz e utilizzare il potenziale vettore.

Quest'ultimo è un po' il centro della mia analisi, analizzato nel primo capitolo introduttivo, dove è stato scritto il modo in cui è in relazione al campo magnetico (e per completezza anche a quello elettrico) a livello puramente matematico, e come la sua formulazione si sposa perfettamente con le equazioni di Maxwell. Il potenziale vettore non è altro che un modo matematico per descrivere il campo magnetico(o elettrico), non ha delle vere e proprie implicazioni fisiche, fino all'avvento della meccanica quantistica.

infatti come già detto da un punto di vista puramente fisico non cambia che potenziale vettore utilizzo per descrivere il mio campo magnetico (invarianza di Gauge), anche in meccanica quantistica da un certo punto di vista è così, le mie energie sono le stesse tra una gauge e l'altra, basti esaminare l'equazione (3.30) ed (4.45), (ricordando di impostare per la prima $p_z = 0$) anche se ho la mia energia che dipende da numero quantico aggiuntivo, ho:

$$n = n_r = 0; \quad \frac{E_{landau}}{E_{symm}} = 1 \implies |m_\ell| - m_\ell = 0 \implies m_\ell = 0, 1, 2, \dots \quad (5.1)$$

Ho quindi una restrizione quando vado a scegliere i valori di m_ℓ . Da un punto di vista grafico, il potenziale vettore è un campo vettoriale che viene fatto "ruotare" attorno alla direzione propagazione del campo magnetico.

Immediato il riscontro di questo fatto dalla rappresentazione grafica sottostante dove viene raffigurato un confronto delle diverse gauge.

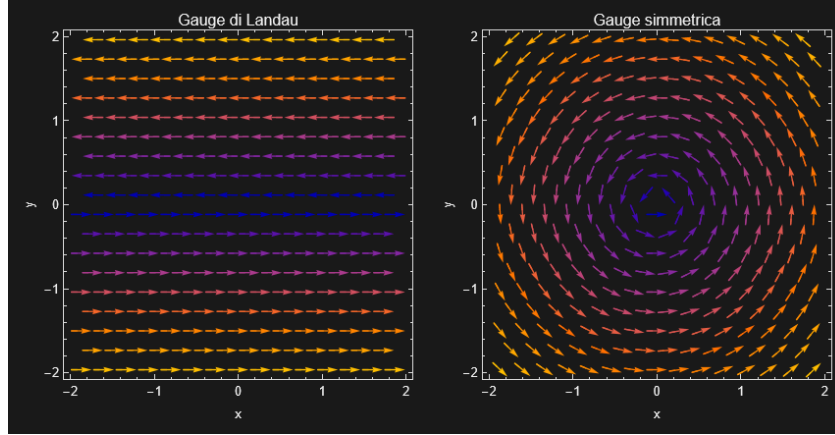


Figura 5.1: Confronto tra la gauge di Landau e la gauge Simmetrica

La scelta del gauge però ha conseguenze più profonde, nella meccanica quantistica, anche se gli output sono gli stessi, cioè ho le stesse energie al livello pratico come si può vedere nella sezione (5.1), ottengo delle autofunzioni completamente diverse, perché?

Sicuramente è dovuto al fatto che (almeno con le nostre premesse) sono stati infinitamente degeneri, in questa trattazione non includiamo nessun effetto correttivo aggiuntivo che possa andare a "degenerare" la soluzione (non consideriamo lo spin e quindi l'accoppiamento spin- \vec{B} etc...).

La scelta del vettore potenziale è anch'essa un fatto che cambia le funzioni d'onda proprio perché va a cambiare le coordinate generalizzate e di conseguenza cambia proprio la forma dell'hamiltoniana.

5.1.1 Funzione d'onda con gauge di Landau, commenti e grafici

La funzione d'onda finale che otteniamo quando andiamo a considerare la gauge di Landau è quella dell'equazione (3.28), se la andiamo a confrontare con l'autofunzione finale di un oscillatore armonico (dove per risolvere quel problema ho l'equazione di Schrödinger nella stessa forma).

Trascurando il coefficiente di normalizzazione ho:

$$\psi_{n,harmonic}(x) = e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} H_n(\alpha x) \quad \text{con} \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \quad (5.2)$$

Notiamo immediatamente che l'equazione (3.28) differisce (oltre che per un termine di normalizzazione) per la fase iniziale $e^{\frac{i}{\hbar} p_x x}$ (abbiamo impostato ad inizio capitolo $p_z = 0$) e per il fatto che ho la mia variabile spostata di un certo valore $y_0 = -\frac{c}{eB} p_x$, infatti se si si sostituisce ad ω con la frequenza di ciclotrone ottengo praticamente la stessa equazione. Come avevo già accennato nel capitolo 3, y_0 è come se fosse il centro di un cerchio se volessimo fare un paragone classico, il che è del tutto azzeccato, il mio elettrone si muove attorno ad esso compiendo un moto circolare, il fattore di fase davanti a (5.2) indica una rotazione che avviene nel piano xy , questo movimento è ovviamente influenzato dalla presenza del polinomio di Hermite, il quale una volta preso in esame il LLL (Lowest Landaw Level) annulla il suo contributo.

Per andare ulteriormente a confrontare queste funzioni d'onda andiamo a confrontare i loro grafici, per farlo riscrivo entrambe le autofunzioni nel LLL (Lowest Landau Level) ossia si imposta $n = 0$, quindi otterrei (Tenendo conto che $H_0(x) = 1$):

$$\psi_{0,harmonic}(x) = e^{-\frac{a^2 x^2}{2}} \quad \text{con} \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \quad (5.3)$$

$$\phi_{0,Landau} = e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} e^{-\frac{eB}{2}(y-y_0)^2} \quad (5.4)$$

E' come se avessi soltanto la parte radiale, in quanto non ho componenti angolari, questo semplifica il confronto grafico:

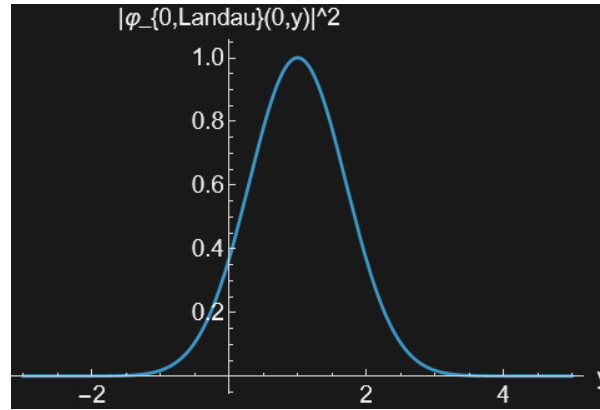


Figura 5.2: Grafico del modulo quadro (densità di probabilità) della funzione d'onda per il caso della gauge di Landau al LLL

Dalla figura sopra si può vedere esattamente il comportamento che ho descritto prima, il picco di probabilità di trovare il mio elettrone è esattamente a distanza y_0 dall'origine del sistema di riferimento.

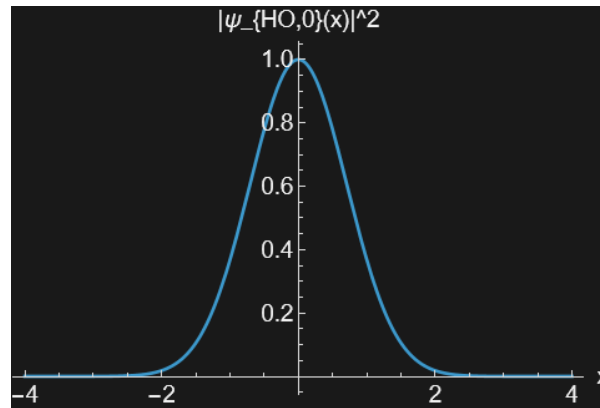


Figura 5.3: Modulo quadro della funzione d'onda al LLL per l'oscillatore armonico quantistico

Adesso un'ultima figura per poterli mettere esattamente a confronto:

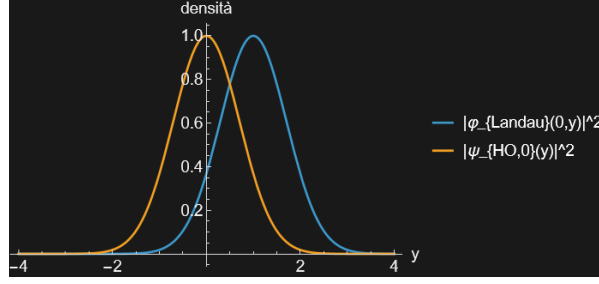


Figura 5.4: Confronto tra le due funzioni d'onda

Dalla figura sopra è banale dedurre che da un punto di vista dell'intensità non cambia assolutamente niente, se non la posizione dove può essere trovato l'elettrone. Quindi da un punto di vista puramente grafico, ho il campo vettoriale dato dal potenziale vettore, che è come se fosse una sorta di velocità, il campo magnetico viene descritto come una rotazione del potenziale vettore attorno alla sua direzione di propagazione magnetica, questo fatto cambia profondamente la struttura della mia funzione d'onda in quanto va a cambiare la struttura della lagrangiana e conseguentemente la forma dei momenti coniugati da mettere con il quale costruisco l'hamiltoniana (vedi Cap. 3) e quindi cambia la geometria con la quale scrivo la funzione d'onda una volta risolto il problema agli autovettori.

5.2 Funzione d'onda con gauge Simmetrica, commenti e grafici

Dopo aver discusso più approfonditamente le funzioni d'onda con la gauge di Landau mi vorrei soffermare a descrivere la funzione d'onda con gauge simmetrica [1].

Descriverò però in maniera approfondita (per quanto possibile) le componenti dell'autofunzione (4.50), in questa espressione è infatti molto semplice andare a commentare che cosa fa ogni singola componente (come per il caso con la gauge di Landau del resto). Trascuro in questa trattazione il termine di normalizzazione in quanto non è molto interessante da un punto di vista fisico.

Il fattore angolare:

$$e^{im_\ell\varphi}/\sqrt{2\pi}$$

descrive la dipendenza in φ della funzione d'onda e identifica la proiezione del momento angolare orbitale lungo l'asse z con valore quantizzato $L_z = m_\ell\hbar$, questo è un fatto abbastanza risaputo, in quanto è autofunzione dell'operatore \vec{L}_z sono ampiamente studiate e note nella letteratura [vedere appendici].

Il termine successivo che andiamo ad analizzare dell'equazione (4.50) è:

$$\left(\frac{r}{l_0}\right)^{|m_\ell|} \quad (5.5)$$

Esso dipende dal raggio, quindi la distanza dal centro, il valore assoluto del numero quantico m_ℓ e dal termine l_0 , prima di andare avanti commento brevemente quest'ultimo termine.

Per comprendere il significato della lunghezza magnetica si deve partire dal moto classico di una particella carica immersa in un campo magnetico uniforme (che è esattamente

il caso nel quale ci troviamo noi nel nostro problema). Se la particella possiede una velocità iniziale perpendicolare al campo, essa descrive un'orbita circolare il cui raggio si ottiene dalla seconda legge di Newton:

$$m \frac{v^2}{R} = e c v B \quad \Rightarrow \quad R = \frac{m v c}{e B}, \quad (5.6)$$

il cosiddetto raggio di Larmor.

A questo punto, ci si può chiedere quale sia il raggio minimo consentito dal principio di indeterminazione, poiché il raggio di Larmor soddisfa $R \propto mv = p$, esso non può essere reso arbitrariamente piccolo senza violare la relazione di indeterminazione:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (5.7)$$

Per una particella in moto circolare si può stimare: $\Delta x \approx 2R$ e $\Delta p \approx 2mv$. Minimizzando l'incertezza si sostituisce quindi $mv \rightarrow \hbar/R$ nell'espressione classica del raggio di Larmor (trascurando i fattori numerici non essenziali).

Ciò conduce a

$$R^2 = \frac{\hbar c}{e B}, \quad (5.8)$$

che corrisponde esattamente alla definizione della lunghezza magnetica che abbiamo utilizzato noi (si era impostato $c = 1$ quando avevamo fatto il calcolo nel capitolo precedente, ma non cambia nulla).

In altre parole, la lunghezza magnetica l_0 rappresenta la dimensione minima di un'orbita circolare in un campo magnetico compatibile con il principio di indeterminazione.

Quindi il termine (5.5) impone la corretta regolarità all'origine e ne determina la distanza radiale tipica dello stato: per valori elevati di $|m_\ell|$ la densità di probabilità è concentrata a raggi maggiori.

Ho poi un termine gaussiano:

$$e^{\left(\frac{-r^2}{4l_0^2}\right)} \quad (5.9)$$

che riflette il confinamento imposto dal campo magnetico, esso diciamo è il termine che più di tutti impatta la pozione della particella, essendo di tipo gaussiano esso diventa più piccolo più il raggio aumenta (raggio "modulato" da questa distanza manetica l_0), quindi nella funzione d'onda serve a far si che essa sia normalizzabile, infatti questo termine deriva proprio dall'analisi asintotica per $\xi \rightarrow \infty$.

Quando compaiono i polinomi di Laguerre spesso indicano che mi trovo in un problema a simmetria sferica.

Analizziamo ora il LLL in questo caso (per $n_r = 0$ ho $L_0^{|m_\ell|} = 1$) La funzione assume quindi la forma semplice:

$$\Psi_{0,m_\ell}(r, \varphi) = N_{0,m_\ell} \frac{e^{im_\ell \varphi}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{r}{l_0}\right)^{|m_\ell|} \exp\left(-\frac{r^2}{4l_0^2}\right), \quad (5.10)$$

Tutti gli stati corrispondenti a diversi valori di m_ℓ risultano quindi degeneri, questi stati sono tra l'altro molto più semplici da graficare, qui sotto vengono riportati i grafici del modulo della sola parte radiale al LLL (facile da ricavare dalla formula sopra) e il grafico del modulo della funzione d'onda totale:

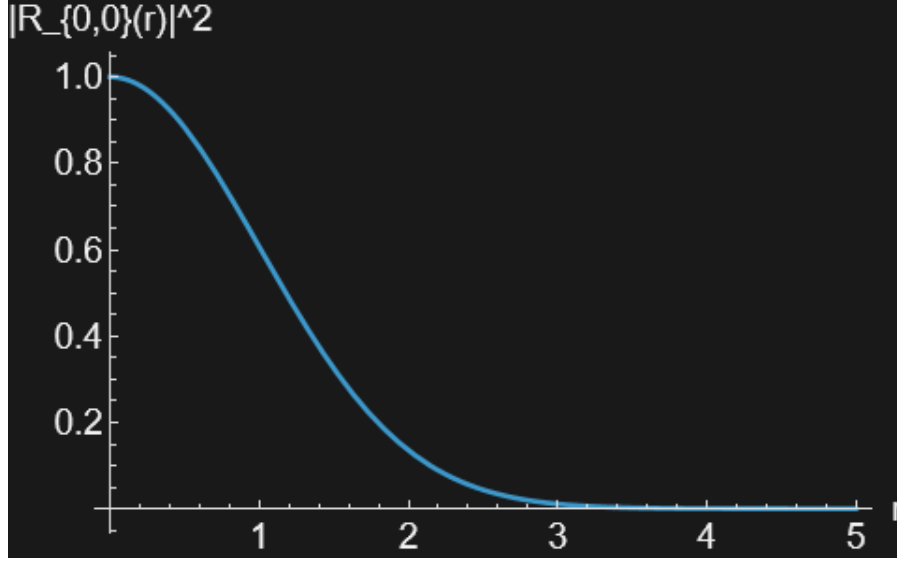


Figura 5.5: Grafico del modulo quadro della parte radiale al LLL della funzione d'onda scritta con gauge simmetrica

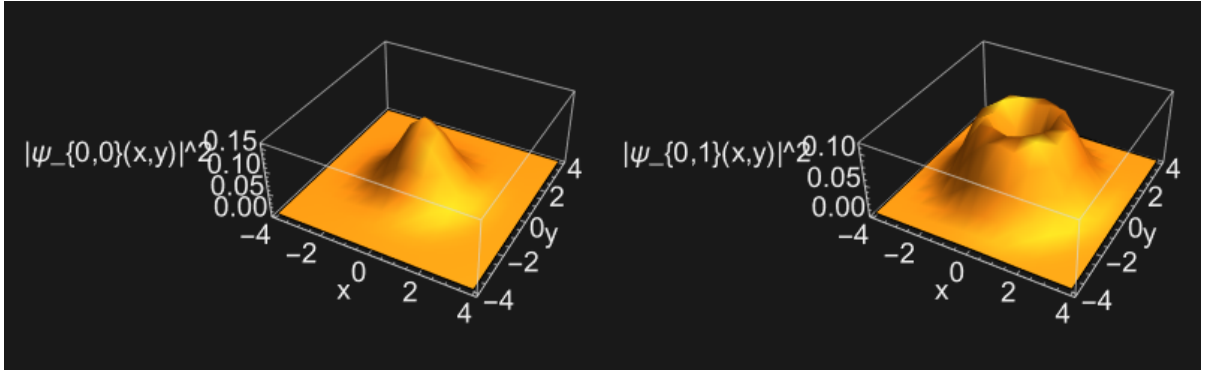


Figura 5.6: Grafico tridimensionale del modulo quadro al LLL con $m_l = 0, 1$

Adesso si propone un'ultima piccola sostituzione che tornerà utile più avanti, si osserva che gli stati a singola particella del LLL dell'equazione (5.10) possono essere scritti in modo conveniente usando la notazione complessa come

$$\Psi_{0,m_\ell}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} l_0^2 2^{m_\ell} m_\ell!} \left(\frac{z}{l_0} \right)^{m_\ell} \exp\left(-\frac{|z|^2}{4l_0^2}\right). \quad (5.11)$$

dove $m_\ell = 0, 1, \dots$ e $z = x + iy = r e^{i\varphi}$ rappresenta una variabile complessa, è un modo completamente analogo di scrivere la funzione d'onda e non aggiunge niente a tutto quello che è stato detto sopra, credo sia doveroso menzionarla in quanto comparirà più avanti nell'elaborato.

5.2.1 Confronto tra autofunzioni con gauge di landau e gauge simmetrica

Il fenomeno fisico descritto da entrambe queste autofunzioni deve essere lo stesso, devono descrivere orbite ciclotroniche circolari.

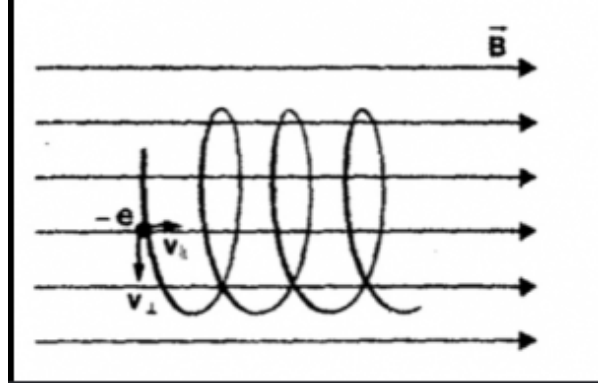


Figura 5.7: Immagine delle orbite ciclotroniche, [6]

Andando a prendere le autofunzioni per il LLL(ignoro i coefficienti di normalizzazione in quanto irrilevanti alla nostra trattazione):

$$\Psi_{0,m_\ell}(r, \varphi) = \frac{e^{im_\ell\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{r}{l_0}\right)^{|m_\ell|} \exp\left(-\frac{r^2}{4l_0^2}\right), \quad (5.12)$$

$$\Phi_{0,Landau} = e^{\frac{i}{\hbar}p_x x} e^{-\frac{eB}{2}(y-y_0)^2} \quad (5.13)$$

Entrambe queste autofunzioni sono state ampiamente discusse nelle sezioni precedenti, tra di loro la differenza più grande è la presenza del numero quantico m_ℓ nella Φ , la sua presenza rimuove infinite degenerazioni, o meglio, le degenerazioni per livello rimangono comunque infinite, soltanto che non sono più continuamente infinite ma discretamente infinite(ricordiamo che possiamo prendere solo valori di $m_\ell = 0, 1, 2, \dots$).

Il modo migliore per vedere le differenze tra queste due funzioni d'onda è andando ad analizzare i grafici per il LLL.

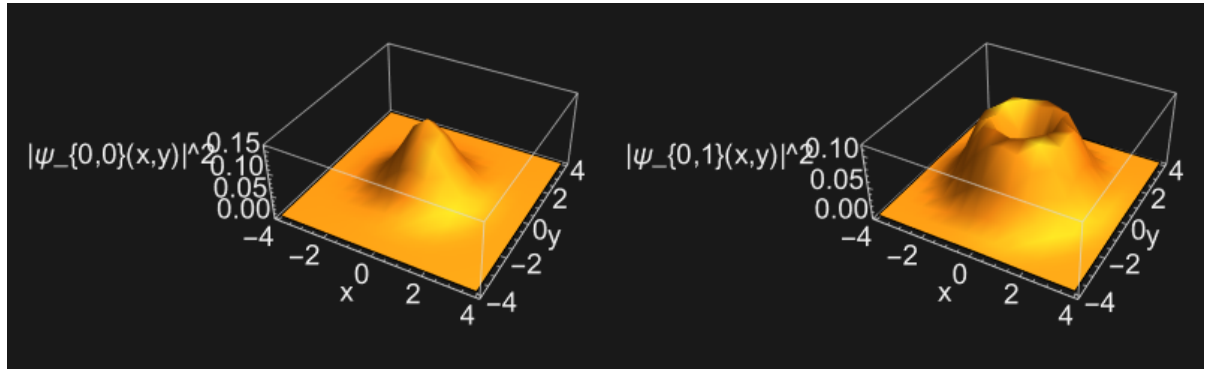


Figura 5.8: figura (5.6)

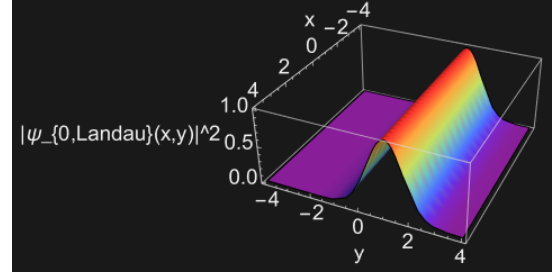
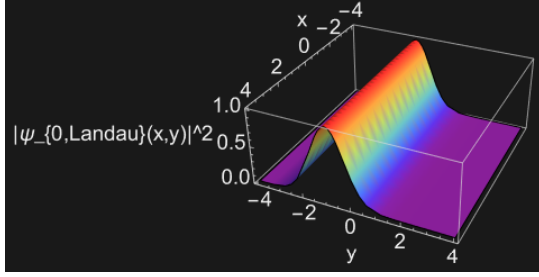


Figura 5.9: Modulo quadro della funzione d'onda con gauge di Landau con valori di $p_x = -1, 1$ rispettivamente

Quindi adesso messi vicini i grafici torna tutto, qualche commento:

- Per il disegno in figura (5.8) possiamo notare un altro dettaglio dell'equazione, quando ho $m_\ell = 0$ entra in azione il membro (5.5), esso infatti era stato ricavato quando si era andato a vedere il comportamento per $\xi \rightarrow 0$, esso ci assicura che la funzione vada a zero "smoothly".
- Per quanto riguarda la (5.9) notiamo immediatamente la differenza con (5.8), infatti sono le stesse differenze che erano state viste nella (5.1), quando utilizzo la gauge simmetrica descrivo un capo vettoriale con vettori tangenti a circonferenze che partono dal centro, nel grafico quando passo a $m_\ell = 1$ questo diventa palese, è per questo che quando si vuole conservare una simmetria rotazione si utilizza questa gauge, nella funzione d'onda viene rispecchiata la forma del potenziale vettore! Stessa cosa si può dire per la (5.9), quando utilizzo la gauge di Landau descrivo un campo vettoriale che è come se fosse una corrente uniforme diretta in direzione $-x$, le degenerazioni continue collegate queste autofunzioni dipendono dal valore p_x esso infatti influenza la distanza dell'elettrone dal centro della circonferenza.

Adesso si dovrebbe avere molto chiaro il ruolo che svolge il potenziale vettore in meccanica quantistica, o perlomeno il ruolo che ha svolto in questo caso specifico.

Però se ho in ogni caso stati definitivamente degeneri, e per arrivarci devo passare attraverso una trattazione matematica non indifferente perché dovrei scegliere di utilizzare la gauge simmetrica piuttosto che quella di Landau? Tanto alla fine il fenomeno fisico che vado a descrivere all'atto pratico è lo stesso.

5.2.2 Perché utilizzare la gauge simmetrica?

L'utilizzo della gauge simmetrica è fondamentale nella risoluzione di tutti quei problemi dove l'elettrone è confinato all'interno di un superconduttore (o comunque un qualsiasi microchip) dove compie un modo 2D al suo interno, mentre è sottoposto ad un potenziale di tipo periodico tipico dei reticoli regolari.

L'articolo di riferimento per questa sezione è [2] In questi reticoli la massa dell'elettrone spesso non è anisotropa, da un punto di vista matematico questo vuol dire avere un'hamiltoniana di questo tipo:

$$m_x > 0, \quad m_y > 0, \quad \hat{H} = \frac{1}{2m_x} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + q \frac{B_z}{2} y \right)^2 + \frac{1}{2m_y} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - q \frac{B_z}{2} x \right)^2. \quad (5.14)$$

Possiamo andare a confrontare quest'equazione con quella studiata nel capitolo precedente, (4.10) ricordando che $\hat{L}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x$.

Ovviamente nel caso di (5.14) non posso portarmi nella situazione sostituire l'operatore \hat{L}_z , il che dovrebbe essere palese anche senza andare a risolvere i quadrati.

Per aggirare questa difficoltà, riscriviamo l'hamiltoniana introducendo un parametro reale positivo c :

$$\hat{H} = \frac{c^2}{2m_x} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial(cx)} + q \frac{B_z}{2} \frac{y}{c} \right)^2 + \frac{1}{2m_y c^2} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial(y/c)} - q \frac{B_z}{2} (cx) \right)^2, \quad (5.15)$$

e richiediamo che i coefficienti davanti ai due termini siano uguali:

$$\frac{c^2}{2m_x} = \frac{1}{2m_y c^2} \quad \Rightarrow \quad c^2 = \sqrt{\frac{m_x}{m_y}}.$$

Con questa scelta, l'hamiltoniana (5.14) diventa:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_c} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} + q \frac{B_z}{2} y' \right)^2 + \frac{1}{2m_c} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial y'} - q \frac{B_z}{2} x' \right)^2, \quad (5.16)$$

dove abbiamo introdotto le coordinate scalate:

$$x' = cx, \quad y' = \frac{y}{c}, \quad (5.17)$$

e la massa ciclotronica efficace:

$$m_c = \sqrt{m_x m_y}. \quad (5.18)$$

L'hamiltoniana (5.16) ha esattamente la stessa forma di quella isotropa (basta raccogliere il termine $\frac{1}{2m_c}$), posso quindi svolgere esattamente gli stessi passaggi svolti nel capitolo 4.

In particolare, i LLL hanno energia:

$$E_{\text{LLL}} = \frac{\hbar \omega'_c}{2}, \quad \omega'_c = \frac{|q| |B|}{m_c}, \quad (5.19)$$

Come ci aspettiamo infatti questi autostati sono identici nella forma e nei valori (con opportuna scelta di m_c per il LLL descritti con la gauge di Landau), gli autostati del LLL possono essere scritti in notazione complessa come:

$$\Psi_{0,m_\ell}(z') = \frac{1}{\sqrt{2\pi l_0^2 2^{m_\ell} m_\ell!}} \left(\frac{z'}{l_0} \right)^{m_\ell} \exp\left(-\frac{|z'|^2}{4l_0^2}\right), \quad (5.20)$$

dove $z' = x' + iy'$. Forma pressoché identica a (5.11) se non per il fatto che ho uno spostamento, in maniera analoga a quando è stato fatto il confronto con le autofunzioni per l'oscillatore armonico e per l'oscillatore armonico e per il problema dei LLs con gauge di Landau, ho quindi uno.

Per visualizzare gli effetti dell'anisotropia consideriamo il caso

$$m_x = 2m_e, \quad m_y = \frac{m_e}{2},$$

per cui

$$m_c = \sqrt{m_x m_y} = m_e, \quad c = \sqrt{2}.$$

Lo stato fondamentale del LLL ($n_r = 0$, $m_\ell = 0$) ha allora modulo quadro

$$|\Psi_{0,0}(z')|^2 = \frac{1}{2\pi l_0^2} \exp\left(-\frac{|z'|^2}{2l_0^2}\right) \quad (5.21)$$

$$= \frac{1}{2\pi l_0^2} \exp\left(-\frac{1}{2l_0^2} \left[c^2 x^2 + \frac{y^2}{c^2}\right]\right), \quad (5.22)$$

che mostra esplicitamente la perdita di simmetria circolare dovuta alla massa anisotropa. E' possibile andare a controllare questo fatto da un punto di vista grafico:

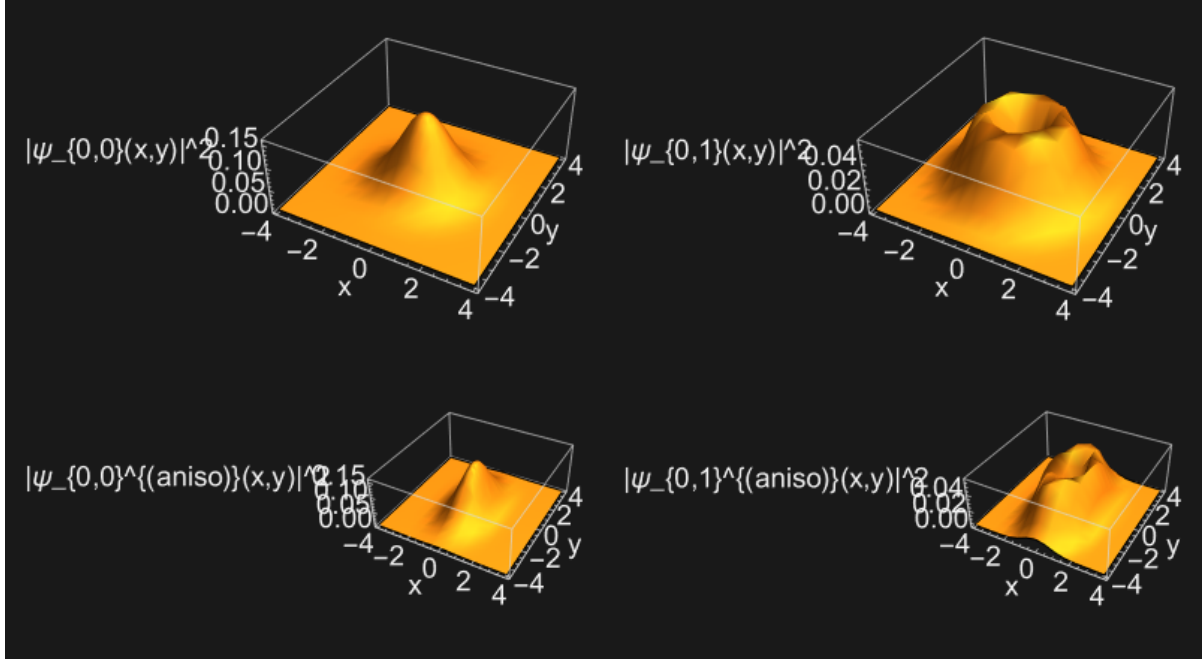


Figura 5.10: Grafico di comparazione tra il caso isotropo(sopra) e il caso anisotropico(sotto), andando a prendere i numeri quantistici $m_\ell = 0, 1$

Come possiamo vedere da grafico la probabilità di trovare l'elettrone non è più perfettamente circolare all'interno del centro del sistema ma bensì è spostata, avere una massa il doppio della normale massa elettronica sull'asse delle x e avere la metà della medesima sull'asse delle y fa sì che il valore di c sia 2 (ricordo che c è un numero reale POSITIVO), questo ovviamente influisce sulle coordinate x' e y' , e si viene a creare questa forma più ellissoidale.

5.3 Conclusioni

Per ricapitolare, sono stati calcolate le autofunzioni e i valori le energie per un' elettrone nello spazio quando abbiamo calcolato la gauge di Landau e nel piano xy nel calcolo con la gauge simmetrica. Sono state evidenziate le caratteristiche fisiche delle varie componenti delle formule, supportate con grafici. La scelta della gauge influenza la forma della funzione d'onda e anche il tipo di degenerazione si incontra ad incontrare, con la gauge di Landau ho una dipendenza diretta dal numero quantico n mentre per la gauge simmetrica ho la dipendenza da n_r e m_ℓ , in entrambi i casi queste funzioni d'onda sono infinitamente degeneri.

La gauge simmetrica è utilizzata appunto per calcolare la funzione d'onda e livelli energetici per un elettrone nel caso della massa anisotropa, poiché ci si riduce alla stessa equazione differenziale, è un caso particolare della soluzione in quanto perdo la simmetria rotazionale sul piano xy per via della deformazione mostrata in figura (5.10). I grafici sono stati scritti utilizzando il programma "Wolfram Mathematica".

Appendice A

Coordinate polari

La fonte principale per il seguito è [3] e [5].

Lo spazio euclideo ordinario è convenzionalmente descritto dalle coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3) .

Tuttavia, in certi problemi, specie con simmetria sferica o assiale, può essere conveniente usare una terna di coordinate alternative rispetto alle coordinate polari o circolari in due dimensioni $[0, \infty) \times [0, 2\pi)$, generalizzate in terna nel modo detto (coordinate polari o sferiche):

r, θ, ϕ .

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x_3 = r \cos \theta \quad (\text{A.1})$$

Derivando queste relazioni rispetto a r

$$\frac{\partial x_1}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi, \quad \frac{\partial x_2}{\partial r} = \sin \theta \sin \phi, \quad \frac{\partial x_3}{\partial r} = \cos \theta$$

e così via

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \theta = \arccos \frac{x_3}{r}, \quad \phi = \arctan \frac{x_2}{x_1} \quad (\text{A.2})$$

Le relazioni inverse sono

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \left(\frac{x_i x_3}{r^2} - \delta_{i3} \right), \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

L'elemento di volume $d\tau$ è ottenuto tramite il determinante jacobiano

$$d\tau = dx_1 dx_2 dx_3 = |J| dr d\theta d\phi$$

dove J è la matrice jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

tale che

$$\det J = r^2 \sin \theta \quad (\text{A.5})$$

Le derivate inverse sono codificate nella matrice jacobiana inversa

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} & \frac{\partial r}{\partial x_2} & \frac{\partial r}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta}{\partial x_2} & \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} & \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} & -\frac{\sin \theta}{r} \\ -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta} & \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

È importante, per le applicazioni in MQ, conoscere l'espressione delle componenti del *gradiente* $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ in coordinate polari.

Esse si ottengono applicando le regole di derivazione a catena

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

e perciò

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \tag{A.7}$$

Appendice B

Operatore impulso in coordinate polari

Fonti: [3] ; [5]

Il primo operatore che vogliamo esaminare in coordinate polari è l'impulso:

$$\vec{p} = -i\hbar\nabla \quad (\text{B.1})$$

In particolare vogliamo dare una definizione corretta della componente radiale p_r . A prima vista, detto $\vec{x}_0 = \vec{x}/|\vec{x}| = \vec{x}/r$ il versore della direzione del vettore \vec{x} , sembrerebbe corretto definire

$$p_r = \vec{x}_0 \cdot \vec{p} = \frac{\vec{x}}{r} \cdot \vec{p} = -i\hbar \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{r} \frac{\partial}{\partial x_i} = -i\hbar \sum_{i=1}^3 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r} \quad (\text{B.2})$$

Tale operatore, però, non è hermitiano. Infatti, calcoliamo l'azione di p_r^\dagger su una funzione di prova ψ :

$$\begin{aligned} p_r^\dagger \psi &= \vec{p} \cdot \frac{\vec{x}}{r} \psi = -i\hbar \left(\nabla \cdot \left(\frac{\vec{x}}{r} \psi \right) \right) \\ &= -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{r} \psi \right) \right) = -i\hbar \left(\psi \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_i}{r} + \frac{x_i}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \\ &= -i\hbar \left(\psi \left(\frac{2}{r} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial r} - i\hbar \frac{2}{r} \psi \end{aligned}$$

Dunque:

$$p_r^\dagger = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r} - i\hbar \frac{2}{r} \quad (\text{B.3})$$

Per trovare un corretto operatore hermitiano dobbiamo prendere il prodotto simmetrizzato

$$p_r = \frac{1}{2} (\vec{x}_0 \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{x}_0) \quad (\text{B.4})$$

Infatti mentre a livello classico le due scritture $\vec{p} \cdot \vec{x}_0$ e $\vec{x}_0 \cdot \vec{p}$ sono del tutto equivalenti, a livello quantistico esse devono essere simmetrizzate per ottenere un operatore hermitiano. Da questa definizione discende che la forma di p_r è:

$$p_r = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \quad (\text{B.5})$$

L'applicazione a una funzione di prova porta a:

$$\begin{aligned} p_r^2 \psi &= -\hbar^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r} \right) \\ &= -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r^2} \right] \\ &= -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r^2} \right] \end{aligned}$$

e quindi

$$p_r^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \tag{B.6}$$

Appendice C

Operatore momento angolare

Fonti: [3], [5].

C.1 Algebra dei momenti angolari

Un operatore della massima importanza in MQ, soprattutto per la trattazione di problemi a simmetria centrale, è il momento angolare.

Esso è definito come

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} = -i\hbar \vec{x} \times \nabla \quad (\text{C.1})$$

ovvero in componenti

$$L_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2, \quad L_2 = x_3 p_1 - x_1 p_3, \quad L_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1$$

ossia, in forma compatta e adottando la convenzione che gli indici ripetuti sono sommati

$$L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (\text{C.2})$$

dove il simbolo di Ricci è definito come

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{per } (i, j, k) = (1, 2, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2) \\ -1 & \text{per } (i, j, k) = (1, 3, 2); (3, 2, 1); (2, 1, 3) \\ 0 & \text{per tutti gli altri casi} \end{cases}$$

In altre parole vale +1 per le tre permutazioni cicliche di 1, 2, 3, vale -1 per tutte le loro permutazioni antisimmetriche e vale 0 in assenza dei tre simboli. La tradizionale definizione di prodotto vettoriale si esprime così esattamente con questo simbolo.

Possiamo chiederci quali siano i commutatori tra le componenti del momento angolare. Allo scopo cominciamo col calcolare i commutatori tra le componenti del momento angolare e le coordinate

$$[L_i, x_l] = i\hbar \epsilon_{ilk} x_k \quad (\text{C.3})$$

Ricordiamo ora la proprietà distributiva dei commutatori

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

e le regole di commutazione degli x_i e p_j

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0 \quad (\text{C.4})$$

per cui

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad [p_i, x_j] = -i\hbar \delta_{ij}$$

In modo del tutto analogo si può anche calcolare che

$$[L_i, p_l] = i\hbar \epsilon_{ilk} p_k$$

Lo stesso conto rifatto sulle altre componenti porta alla regola generale

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k \quad (\text{C.5})$$

Veniamo subito al fatto cruciale: le componenti del momento angolare non commutano tra loro e perciò sono misurabili solo una alla volta; le altre però non possono essere misurate simultaneamente senza una incertezza intrinseca.

Ne siamo sicuri se sommiamo le componenti:

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \quad (\text{C.6})$$

vediamo che esso commuta con tutte e tre le componenti del momento angolare

$$[L^2, L_i] = 0 \quad (\text{C.7})$$

e che quindi può essere diagonalizzato e misurato simultaneamente ad ognuna di esse, ma una volta scelta una componente, diciamo per esempio L_3 , si può misurare solo L_3 stessa e L^2 . Del momento angolare possiamo quindi conoscere solo la lunghezza L^2 e la sua proiezione lungo un asse scelto arbitrariamente, ma non le componenti nelle altre due direzioni.

C.2 Operatore momento angolare in coordinate polari

L'operatore momento angolare è definito come

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} = -i\hbar \vec{x} \times \nabla = -i\hbar \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (\text{6.54})$$

In componenti:

$$\begin{aligned} L_1 &= -i\hbar \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ L_2 &= -i\hbar \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\ L_3 &= -i\hbar \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \end{aligned}$$

È interessante notare che la forma degli operatori di innalzamento e abbassamento:

$$L_{\pm} = L_1 \pm iL_2 = \pm\hbar e^{\pm i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (\text{6.55})$$

L'operatore L^2 è utile nella misura del momento angolare perché ogni operatore scritto in coordinate polari si esprime applicando queste regole agli operatori differenziali.

Ricordiamo che:

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \quad (6.56)$$

Un calcolo lungo e alquanto noioso, che non qui riportiamo, fornisce l'espressione finale per l'operatore L^2 :

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (C.8)$$

Il quadrato dell'impulso $\vec{p} = -i\hbar\nabla$, in coordinate polari, è il laplaciano

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} L^2 \quad (C.9)$$

che, tenuto conto dei risultati di (C.8), si scrive

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (C.10)$$

e da ciò segue l'importante relazione

$$p^2 = p_r^2 + \frac{L^2}{r^2} \quad (C.11)$$

C.3 Operatore L_3 : spettro e autofunzioni

Passando a coordinate polari, vogliamo qui esaminare più nel dettaglio la quantizzazione della componente L_3 del momento angolare in quanto viene utilizzata nell'elaborato, è convenzione prendere l'asse z , in coordinate polari:

$$L_3 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (C.12)$$

ma gli stessi risultati valgono per qualunque componente.

Ora, l'equazione agli autovalori per L_3 è

$$L_3 \psi = \lambda \psi \quad (C.13)$$

la cui soluzione immediata è

$$\psi(\phi) = e^{i\lambda\phi/\hbar} \quad (C.14)$$

Dal punto di vista fisico, la variabile ϕ è un angolo, che va da 0 a 2π e pertanto gli autofunzioni di L_3 devono essere funzioni periodiche in tale variabile.

$$\psi(\phi + 2\pi) = \psi(\phi)$$

che implica

$$e^{i\lambda 2\pi/\hbar} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = m\hbar, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (C.15)$$

e lo spettro di L_3 è quindi discreto. Le autofunzioni normalizzate delle funzioni d'onda in ϕ sono pertanto

$$\psi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} \quad (C.16)$$

Appendice D

Polinomi di Hermite

Fonte: [7].

I polinomi di Hermite $H_n(x)$ sono ortonormali sull'intero asse reale, con la scelta:

$$X(x) = 1 \quad \text{e} \quad u(x) = e^{-x^2} \quad (\text{D.1})$$

cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = h_n \delta_{nm} \quad (\text{D.2})$$

con

$$h_n = \sqrt{\pi} 2^n n! \quad (\text{D.3})$$

La standardizzazione è:

$$K_n = (-1)^n \quad (\text{D.4})$$

e la formula di Rodriguez è:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (\text{D.5})$$

Soddisfano l'equazione differenziale:

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0 \quad (\text{D.6})$$

e la relazione di ricorrenza:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (\text{D.7})$$

nonché la formula per la derivata:

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (\text{D.8})$$

La loro funzione generatrice è:

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (\text{D.9})$$

I polinomi di Hermite hanno definita parità: quelli di grado pari sono pari e quelli di grado dispari sono dispari:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \quad (\text{D.10})$$

La formula esplicita è:

$$H_n(x) = (1-x)^{-1/2} (2x)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{1}{(n-2k)!} \quad (\text{D.11})$$

I primi polinomi di Hermite sono:

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

Appendice E

Polinomi di Laguerre

Fonte: [7].

I polinomi di Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ sono una famiglia dipendente da un parametro $\alpha > -1$ di sequenze di polinomi ortogonali sulla semiretta reale positiva, con la scelta della funzione $X(x)$ e del peso pari a:

$$X(x) = x, \quad w(x) = x^\alpha e^{-x} \quad (\text{E.1})$$

Essi sono ortogonali nella semiretta reale positiva:

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx = h_n \delta_{nm} \quad (\text{E.2})$$

con

$$h_n = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} \quad (\text{E.3})$$

e

$$K_n = n! \quad (\text{E.4})$$

La loro formula di Rodriguez è:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}) \quad (\text{E.5})$$

e soddisfano l'equazione differenziale:

$$x L_n^{(\alpha)''} + (\alpha + 1 - x) L_n^{(\alpha)'} + n L_n^{(\alpha)} = 0 \quad (\text{E.6})$$

La relazione di ricorrenza è:

$$(n + 1) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (2n + \alpha + 1 - x) L_n^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(x) \quad (\text{E.7})$$

e la formula per la derivata:

$$\frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \quad (\text{E.8})$$

Possono essere ottenuti dalla funzione generatrice:

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n \quad (\text{E.9})$$

La formula esplicita è:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!} \quad (\text{E.10})$$

I primi polinomi di Laguerre sono:

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1$$

$$L_1^{(\alpha)}(x) = \alpha + 1 - x$$

$$L_2^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2} [x^2 - 2(\alpha + 2)x + (\alpha + 1)(\alpha + 2)]$$

Appendice F

Soluzione dettagliata dell'oscillatore armonico quantistico

Fonti: [3], [5].

Qui si offre una soluzione dettagliata al problema generale dell'oscillatore armonico quantistico, ovviamente quando lo andiamo ad applicare al problema con gauge di Landau vanno utilizzati i parametri di quel caso specifico.

L'hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale è dunque

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (\text{F.1})$$

ovvero, in forma realizzata sullo spazio delle coordinate

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (\text{F.2})$$

Si tratta di una hamiltoniana pari e perciò le sue soluzioni sono pari o dispari.

Esse dovranno annullarsi all'infinito ove il potenziale diverge ed è pertanto proibita la fuga della particella.

Scriviamo l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo nello spazio delle coordinate:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi = E\psi \quad (\text{F.3})$$

ovvero

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \left(\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} x^2 - \frac{2mE}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \quad (\text{F.4})$$

Conviene introdurre una opportuna variabile adimensionale

$$\xi = \alpha x \quad \text{con} \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \quad (\text{F.5})$$

e introdurre la costante adimensionale

$$\epsilon = \frac{2E}{\hbar\omega} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}\hbar\omega \epsilon \quad (\text{F.6})$$

con le quali l'equazione (F.3) diventa

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - (\xi^2 - \epsilon)\psi = 0 \quad (\text{F.7})$$

I coefficienti di questa equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine non presentano singolarità al finito.

Usando la notazione:

$$p(\xi) = 0, \quad q(\xi) = \epsilon - \xi^2$$

Le soluzioni saranno dunque ovunque regolari.

Studiamo il comportamento asintotico per $|\xi| \rightarrow \infty$.

Consideriamo una soluzione del tipo

$$\psi(\xi) \approx e^{a\xi^2}$$

Calcoliamo le derivate:

$$\psi' = 2a\xi e^{a\xi^2}, \quad \psi'' = (2a + 4a^2\xi^2)e^{a\xi^2}$$

Sostituendo in (F.7):

$$2a + 4a^2\xi^2 = \xi^2 \quad (\text{F.8})$$

Dal termine dominante in ξ^2 otteniamo:

$$4a^2 = 1 \quad (\text{F.9})$$

cioè $a = \pm \frac{1}{2}$. Quindi la soluzione generale di (F.8) è una combinazione lineare dei due andamenti asintotici:

$$\psi_{\pm} \sim Ae^{-\xi^2/2} + Be^{+\xi^2/2}$$

La soluzione $\psi = e^{+\xi^2/2}$ non è accettabile perché diverge all'infinito; mentre noi vogliamo funzioni d'onda che si annullino all'infinito, quindi in L^2 . Perciò assumiamo che asintoticamente la soluzione sia del tipo:

$$\psi(\xi) = Ae^{-\xi^2/2} \quad (\text{F.10})$$

e quindi la soluzione dell'equazione completa (F.7) sia

$$\psi(\xi) = \psi_0(\xi)H(\xi) = Ae^{-\xi^2/2}H(\xi) \quad (\text{F.11})$$

dove $H(\xi)$ è una funzione intera (cioè analitica nel piano complesso intero).

Calcoliamo quindi la derivata:

$$\psi'(\xi) = A(-\xi H + H')e^{-\xi^2/2}$$

$$\psi''(\xi) = A((\xi^2 - 1)H - 2\xi H' + H'')e^{-\xi^2/2}$$

Sostituendo nella (F.7), otteniamo l'equazione per $H(\xi)$:

$$H'' - 2\xi H' + (\epsilon - 1)H = 0 \quad (\text{F.12})$$

Questa è l'equazione di Hermite, le cui soluzioni polinomiali sono i polinomi ortogonali di Hermite $H_n(\xi)$.

Siamo ora in grado di scrivere esplicitamente le funzioni d'onda stazionarie:

$$\psi_n(\xi) = Ae^{-\xi^2/2}H_n(\xi) \quad (\text{F.13})$$

Esse sono ovviamente ortogonali grazie all'ortogonalità generalizzata dei polinomi di Hermite:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) H_m(\xi) e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm} \quad (\text{F.14})$$

Ripristinati gli argomenti fisici dell'oscillatore:

$$\psi_n(x) = A e^{-\alpha^2 x^2 / 2} H_n(\alpha x)$$

Possiamo calcolare la normalizzazione:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} H_n^2(\alpha x) dx \quad (\text{F.15})$$

Effettuiamo il cambio di variabile $\xi = \alpha x$, $dx = d\xi / \alpha$:

$$1 = A^2 \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi) d\xi = A^2 \frac{\sqrt{\pi} 2^n n!}{\alpha} \quad (\text{F.16})$$

da cui

$$A = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \right)^{1/2} \quad (\text{F.17})$$

La funzione d'onda dell'autostato n -esimo è dunque

$$\psi_n(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2 / 2} H_n(\alpha x) \quad (\text{F.18})$$

dove $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$.

Si noti che si tratta di una funzione reale ed ortonormale.

Appendice G

Funzione ipergeometrica confluyente

Fonti: [7], [1].

L'equazione differenziale ipergeometrica confluyente si scrive come

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + (c - x) \frac{d}{dx} - a \right] y(x) = 0 \quad (\text{G.1})$$

Una soluzione dell'equazione ipergeometrica confluyente è

$$M(a, c, x) = 1 + \frac{a}{c}x + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\text{G.2})$$

La funzione $M(a, c, x)$ è chiamata funzione ipergeometrica confluyente del primo tipo o funzione di Kummer.

In letteratura essa appare anche con differenti notazioni: ${}_1F_1(a; c; x)$, oppure $\Phi(a, c, x)$, $\phi(a, c, x)$, $F(a; c; x)$, $f(a, c, x)$. Notare che l'espansione di (G.2) richiede che

$$c \neq 0, -1, -2, \dots$$

Si può scrivere $M(a, c, x)$ in modo più compatto come

$$M(a, c, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{G.3})$$

dove $(q)_n$ è il simbolo di Pochhammer, definito come

$$(q)_n = q(q+1)(q+2) \cdots (q+n-1), \quad (q)_0 = 1.$$

La funzione ipergeometrica confluyente $M(a, c, x)$ converge per ogni x finito.

Molte funzioni speciali importanti sono casi particolari di funzioni ipergeometriche confluyente.

Per esempio:

$$M(a; c; x) \text{ diventa un polinomio se } a = 0, -1, -2, \dots$$

Confrontiamo ora l'equazione (G.1) con l'equazione dei polinomi di Laguerre:

$$x \frac{d^2}{dx^2} + (a+1-x) \frac{d}{dx} + n = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (\text{G.4})$$

Da questo confronto possiamo dedurre che

$$M(a = -n, c = a+1, x) = L_n^{(a)}(x), \quad n = 0, 1, \dots \quad (\text{G.5})$$

dove $L_n^{(a)}$ è un polinomio di Laguerre generalizzato.

Possiamo anche confrontare l'equazione (G.1) con l'equazione dei polinomi associati di Laguerre:

$$x \frac{d^2}{dx^2} + (k + 1 - x) \frac{d}{dx} + n L_n^{(k)}(x) = 0, \quad n, k = 0, 1, \dots \quad (\text{G.6})$$

dove $L_n^{(k)}(x)$ è un polinomio di Laguerre associato.

Il confronto porta alla relazione

$$M(a = -n, c = k + 1, x) = \frac{n! k!}{(n + k)!} L_n^{(k)}(x), \quad n, k = 0, 1, \dots \quad (\text{G.7})$$

Per ulteriori dettagli consultare [7].

Bibliografia

- [1] Orion Ciftja. “Detailed solution of the problem of Landau states in a symmetric gauge”. In: *Eur. J. Phys* (2020).
- [2] Orion Ciftja. “Landau levels for charged particles with anisotropic mass”. In: *Am. J. Phys* (2024).
- [3] David J. Griffiths e Darrell F. Schroeter. *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2018.
- [4] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998.
- [5] L. D. Landau & E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics, non-relativistic theory, volume 3 of course of theoretical physics*. Pergamon Press, 1958.
- [6] Francesca Ricci. *Moto di una carica in un campo magnetico*. Presa solamente immagine. 2024. URL: <https://www.matematicamente.it/appunti/fisica-per-le-superiori/elettromagnetismo-fisica-per-le-superiori/moto-carica-un-campo-magnetico/>.
- [7] J. Mathews & R. L. Walker. *Mathematical methods of physics*. The Benjamin/Cummings publishing company, 1964.