Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Augusto Righi"
Corso di Laurea in Fisica

Formalismo hamiltoniano: invarianti e trasformazioni canoniche

Relatore:
Prof. Alexandr Kamenchtchik

Presentata da:
Nicolò Pancaldi

Anno Accademico 2024/2025

Abstract

Questo lavoro presenta alcuni aspetti fondamentali del formalismo hamiltoniano della meccanica classica, riportando le dimostrazioni dettagliate degli enunciati e delle formule presentate. Tra gli strumenti principali per lo studio della meccanica hamiltoniana vi sono le trasformazioni canoniche e gli invarianti canonici, quali le parentesi di Poisson e di Lagrange e gli invarianti di Poincaré. Il primo capitolo discute oggetti fondamentali invarianti sotto trasformazioni canoniche. Si affrontano le parentesi di Poisson e di Lagrange e si introduce inoltre la notazione simplettica, che consente di esprimere in forma compatta le relazioni fondamentali del formalismo. Vengono illustrati gli invarianti di Poincaré e il teorema di Liouville, per mostrare come le trasformazioni canoniche siano caratterizzate dalla proprietà di conservare determinate misure nello spazio delle fasi. Il secondo capitolo si concentra sulle trasformazioni canoniche sia nella versione infinitesima che nella versione finita. Si dimostra come le parentesi di Poisson, introdotte nel primo capitolo, svolgano il ruolo di commutatore dei flussi hamiltoniani. Si affrontano poi le trasformazioni finite introducendo le serie di Lie, che forniscono una formulazione elegante e generale delle trasformazioni continue nello spazio delle fasi. Si dimostrano le proprietà algebriche dell'operatore di Lie e di una sua semplice generalizzazione. Infine si arriva a derivare l'operatore di evoluzione tempo-ordinato nel contesto della meccanica classica, per poi mostrarne un esempio applicativo particolare riportandone i calcoli espliciti.

Indice

Introduzione

Storicamente la formulazione hamiltoniana della meccanica classica fu introdotta dal matematico Sir W. R. Hamilton nella prima metà dell'Ottocento, a partire dalla formulazione lagrangiana. Si tratta di un formalismo alternativo, e più potente, di quello di Lagrange e di quello di Newton, per lo studio dei sistemi meccanici conservativi. Le velocità generalizzate della meccanica di Lagrange vengono sostituite dai momenti generalizzati. La dinamica di un sistema è determinata, per mezzo delle equazioni del moto, dalla funzione *hamiltoniana*. Questa trasformazione di variabili consente di mettere in luce la simmetria tra coordinate e momenti coniugati, che non è evidente nelle altre formulazioni. I cambi di variabili ammissibili formano un insieme più vasto rispetto alle trasformazioni ammesse nel formalismo lagrangiano, perché coinvolgono sia coordinate che momenti, potendo rimescolarli. Quindi la distinzione tra coordinate e momenti non è rigida: la formulazione hamiltoniana li tratta in modo simmetrico.
La formulazione hamiltoniana della meccanica sta alla base dell'evoluzione di teorie fondamentali quali la meccanica quantistica, la meccanica statistica e la teoria delle perturbazioni. Classicamente, la funzione hamiltoniana è la generatrice infinitesima delle traslazioni temporali, ossia genera l'evoluzione del sistema nel tempo. In meccanica quantistica l'hamiltoniana è promossa ad operatore, e mantiene il ruolo di generatore dell'evoluzione temporale per mezzo dell'equazione di Schroedinger. L'introduzione in meccanica classica hamiltoniana delle *parentesi di Poisson* dota l'insieme delle variabili dinamiche di una struttura algebrica che è rispecchiata nell'algebra degli operatori della meccanica quantistica. La *quantizzazione canonica*, introdotta da Dirac come procedura per quantizzare sistemi classici, sostituisce le parentesi di Poisson degli osservabili classici con il commutatore degli operatori quantistici (per un numero immaginario). Nel corso della trattazione vedremo come già classicamente le parentesi di Poisson svolgano il ruolo di commutatore delle trasformazioni canoniche, il che aiuta a comprendere l'origine di questa procedura di quantizzazione.
Lo spazio descritto dalle coordinate e dai momenti, detto *spazio delle fasi*, possiede una geometria intrinseca, che è preservata da una classe di trasformazioni *canoniche*, che conservano la forma delle equazioni di Hamilton. L'evoluzione temporale stessa è una trasformazione canonica. L'utilizzo delle trasformazioni canoniche permette di effettuare cambi di variabili per semplificare le equazioni del moto sì da facilitarne la soluzione. La *teoria di Hamilton-Jacobi* si basa sull'idea di trovare una trasformazione, e quindi una sua funzione generatrice, che ponga le equazioni in una forma immediatamente integrabile.

Hamilton aveva in precedenza studiato l'ottica geometrica e cercava una formulazione della meccanica che mostrasse pienamente l'analogia strutturale tra ottica e meccanica, che fu raggiunta con la teoria di Hamilton-Jacobi. Questa analogia avrebbe, tra l'altro, guidato Schroedinger nella concezione della sua famosa equazione per una particella quantistica non-relativistica in un potenziale esterno.

L'obiettivo di questo lavoro è presentare in modo coerente ed autosufficiente alcuni aspetti fondamentali del formalismo hamiltoniano della meccanica classica. Al fine di fornire un'esposizione il più possibile autonoma, gli enunciati e le formule presentate vengono dimostrati in dettaglio.
Nel corso del primo capitolo si richiamano dapprima gli aspetti essenziali del formalismo lagrangiano ed hamiltoniano nel contesto della meccanica classica, necessari per fornire un quadro di riferimento coerente per la discussione successiva. In seguito vengono discusse le parentesi di Poisson e di Lagrange, affrontando in dettaglio la loro invarianza rispetto alle trasformazioni canoniche. Si introduce inoltre la notazione simplettica, che consente di esprimere in forma compatta le relazioni fondamentali del formalismo. Nella parte finale vengono affrontati gli invarianti di Poincaré e il teorema di Liouville, per mostrare come le trasformazioni canoniche siano caratterizzate dalla proprietà di conservare determinate misure nello spazio delle fasi.
Nel secondo capitolo si sviluppa dapprima la teoria delle trasformazioni canoniche infinitesime, mostrando anche come le parentesi di Poisson, introdotte nel primo capitolo, svolgano il ruolo di commutatore dei flussi hamiltoniani. Si affrontano poi le trasformazioni finite introducendo le serie di Lie, che forniscono una formulazione elegante e generale delle trasformazioni continue nello spazio delle fasi. Verranno introdotti e si dimostreranno le proprietà algebriche dell'operatore di Lie e di una sua semplice generalizzazione. Infine si arriverà a derivare l'operatore di evoluzione tempo-ordinato nel contesto della meccanica classica, per poi mostrarne un esempio applicativo particolare con calcoli espliciti.
In generale, la trattazione segue testi di riferimento classici, quali *Analytical Mechanics* di N. A. Lemos e *Classical Mechanics* di H. Goldstein, ma alcune derivazioni, pur non presentando risultati nuovi nel contesto di una materia consolidata, sono state elaborate dall'autore in modo autonomo, cercando di mantenere consistenza con la trattazione e per fornire un ragionamento più semplice od intuitivo.

Capitolo 1

Meccanica Hamiltoniana: invarianti canonici e matrici simplettiche

1.1 Richiami

In meccanica lagrangiana, un dato sistema viene descritto da un set di variabili indipendenti, dette *coordinate generalizzate*, che servono ad individuare univocamente la configurazione del sistema ad ogni istante. Queste variabili sono scelte in modo da tenere conto automaticamente dei vincoli a cui è sottoposto il sistema. Il numero di *gradi di libertà* del sistema è il numero minimo di coordinate indipendenti necessarie a descrivere univocamente la configurazione del sistema. Un sistema ad n gradi di libertà sarà quindi descritto da un set di n coordinate generalizzate $q \equiv (q_1, ..., q_n)$. Lo spazio mappato da queste coordinate viene detto *spazio delle configurazioni* del sistema.
Per descrivere la dinamica si introduce la *funzione lagrangiana* L del sistema, dipendente dalle q, dalle loro derivate temporali, ed eventualmente dal tempo: $L = L(q, \dot{q}, t)$. La traiettoria fisica seguita dal sistema nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ tra due configurazioni fissate agli estremi, $q(t_1)$ e $q(t_2)$, è quella che rende stazionario il *funzionale d'azione* S,

$$S[q] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L dt. \tag{1.1}$$

Da questo *principio variazionale*: $\delta S = 0$, discendono le equazioni del moto di *Eulero-Lagrange*,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{1.2}$$

Si definisce il *momento coniugato* alla coordinata q_i come

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{1.3}$$

Possiamo passare ad una diversa formulazione, in cui assumiamo a variabili indipendenti le coordinate e i momenti coniugati, effettuando una trasformata di Legendre della lagrangiana. La funzione ottenuta dipenderà da q, p ed eventualmente dal tempo, ed è detta *hamiltoniana* del sistema,

$$H(q,p,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L, \tag{1.4}$$

dove $\dot{q}_i$ devono essere sostituite con p_i invertendo le (1.3) per ricavare $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q,p,t)$. Nel formalismo hamiltoniano il principio variazionale può essere espresso

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0, \tag{1.5}$$

e avremo ancora che le variazioni δq si annullano agli estremi t_1, t_2. Non ci sono invece vincoli sulle variazioni δp, ma è conveniente in alcuni contesti assumere che anch'esse si annullino agli estremi, ad esempio trattando le trasformazioni canoniche, come si vedrà in seguito. Dal principio variazionale (1.5) si ricavano le *equazioni del moto di Hamilton*

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Si definisce *spazio delle fasi* del sistema lo spazio delle $2n$ coordinate $(q,p) \equiv (q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$. Lo stato del sistema ad un dato istante è rappresentato da un punto (q,p) nello spazio delle fasi. Al passare del tempo, il punto rappresentativo si muove nello spazio delle fasi, descrivendo una curva continua $(q(t), p(t))$. L'evoluzione è determinata dalle equazioni (1.6), che sono un sistema di $2n$ equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, che determina univocamente la soluzione una volta assegnato lo stato del sistema al tempo iniziale. Mentre le equazioni di Lagrange sono n equazioni del secondo ordine nelle q, le equazioni di Hamilton sono $2n$ equazioni del primo ordine in q, p, scritte in forma normale. Questo permette di effettuare lo studio qualitativo delle soluzioni e di interpretare le soluzioni come flusso di un campo vettoriale nello spazio delle fasi.

Un osservabile è rappresentato da una funzione $f(q,p,t)$ definita sullo spazio delle fasi, eventualmente dipendente dal tempo. Se guardiamo come varia f durante l'evoluzione del sistema, valutandola sui punti dell'orbita, $f(t) := f(q(t), p(t), t)$, possiamo riesprimere la variazione temporale di f durante il moto ricorrendo alle equazioni di Hamilton,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \\ &= \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

e compare la *parentesi di Poisson* di f ed H. In generale, la parentesi di Poisson di due funzioni $A(q,p,t)$ e $B(q,p,t)$, dove (q,p) sono variabili canoniche, è definita come

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}. \tag{1.8}$$

L'equazione (1.7) si può leggere dicendo che la variazione temporale di una funzione di fase f può avere due origini. In primo luogo, f può cambiare nel tempo perché il punto rappresentativo del sistema si muove nello spazio delle fasi, spostandosi in un nuovo punto (q,p) dove $f(q,p,t)$ assume un valore diverso. La parentesi di Poisson con l'hamiltoniana tiene conto della variazione dovuta al movimento nello spazio delle fasi. In secondo luogo, se f dipende esplicitamente dal tempo, può cambiare anche rimanendo nello stesso punto dello spazio delle fasi, e la derivata parziale rispetto al tempo tiene conto di questo secondo contributo.

Una *trasformazione canonica* è una trasformazione delle variabili canoniche, eventualmente dipendente dal tempo, tale da preservare la forma delle equazioni di Hamilton [2]. Siano (q,p) variabili canoniche. Una trasformazione

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q,p,t), \\ P_i &= P_i(q,p,t) \end{aligned} \tag{1.9}$$

è canonica se esiste una funzione $K(Q,P,t)$ tale che

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial K}{\partial P_i}, \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial K}{\partial Q_i}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Questo vuol dire che valgono le equazioni di Hamilton nelle variabili (Q,P), e la funzione hamiltoniana è $K(Q,P,t)$, in generale diversa dall'hamiltoniana nelle "vecchie" variabili $H(q,p,t)$.
Come discusso sopra, le equazioni di Hamilton si possono ricavare dal principio variazionale,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0, \tag{1.11}$$

e se le equazioni devono conservare la stessa forma, dovranno seguire da un analogo principio

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - K \right) dt = 0. \tag{1.12}$$

Un modo di garantire che il principio variazionale valga nelle nuove variabili è imporre che gli argomenti differiscano per una derivata totale rispetto al tempo

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d\phi}{dt}(q,p,t), \tag{1.13}$$

infatti, dato che le variazioni δq si annullano agli estremi, e possiamo scegliere anche le δp nulle agli estremi, risulta $\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\phi}{dt} dt = \delta\phi(q(t_2), p(t_2), t_2) - \delta\phi(q(t_1), p(t_1), t_1) = 0$.
Spesso scriviamo la (1.13) in forma differenziale

$$\sum_{i=1}^{n} (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (K - H)dt = d\phi, \tag{1.14}$$

ovvero la quantità a primo membro deve essere un differenziale esatto.
L'espressione (1.14) suggerisce di pensare ϕ come funzione di (q, Q, t). Supponiamo di poter risolvere le n equazioni $Q_i = Q_i(q, p, t)$ per $p_i = p_i(q, Q, t)$. Sostituendo poi p_i nelle P_i otteniamo $P_i = P_i(q, Q, t)$. In pratica, possiamo prendere (q, Q) come set di $2n$ variabili indipendenti per ϕ. Definiamo la *funzione generatrice di primo tipo* $F_1(q, Q, t) = \phi(q, p(q, Q, t), t)$. Dalla (1.14) con $\phi = F_1$ ricaviamo

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \tag{1.15}$$

Data una qualunque funzione $F_1(q, Q, t)$, regolare e tale che det $\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j} \neq 0$, è automaticamente definita una trasformazione canonica grazie a queste equazioni [3]. Infatti, la condizione che il determinante hessiano sia non nullo implica che possiamo risolvere il sistema di n equazioni $p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}(q, Q, t)$ per le $Q_i = Q_i(q, p, t)$. Sostituendo queste ultime in $P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}(q, Q, t)$ si ottengono anche $P_i = P_i(q, p, t)$. Le equazioni $Q_i = Q_i(q, p, t)$, $P_i = P_i(q, p, t)$ definiscono una trasformazione $(q, p) \to (Q, P)$, che è canonica per costruzione.
Supponiamo ora, invece, di poter prendere (q, P) come set di $2n$ variabili indipendenti, cioè di poter invertire il sistema di n equazioni $P_i = P_i(q, p, t)$ per $p_i = p_i(q, P, t)$, da sostituire nelle Q_i. Per passare alle variabili (q, P) dobbiamo eliminare dQ_i e far comparire dP_i nella (1.14). Ciò può essere ottenuto tramite una trasformata di Legendre. Aggiungiamo $d(\sum P_i Q_i)$ ad entrambi i membri ed usiamo l'identità $d(\sum P_i Q_i) = \sum P_i dQ_i + \sum Q_i dP_i$, per riscrivere la (1.14) come

$$\sum_{i=1}^{n} (p_i dq_i + Q_i dP_i) + (K - H)dt = d\left(\phi + \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i\right), \tag{1.16}$$

che ci permette di identificare la generatrice *di secondo tipo* $F_2(q, P, t) = \sum_{i=1}^{n} P_i\, Q_i(q, P, t) + \phi(q, p(q, P, t), t)$, ed ottenere le equazioni

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \tag{1.17}$$

Come prima, data una qualsiasi $F_2(q, P, t)$, regolare, con det $\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_j} \neq 0$, risolviamo il sistema $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}(q, P, t)$ per $P_i = P_i(q, p, t)$, che sostituiamo in $Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}(q, P, t)$ per ricavare $Q_i = Q_i(q, p, t)$.

Notiamo che, quando la generatrice dipende esplicitamente dal tempo, la nuova hamiltoniana K non è semplicemente la trasformata puntuale della precedente, H, ma acquisisce un termine aggiuntivo, uguale alla derivata parziale rispetto al tempo della generatrice.

1.2 Parentesi di Poisson

La parentesi di Poisson di due funzioni di fase, definita nella sezione precedente, soddisfa le seguenti proprietà algebriche, per ogni funzioni di fase A, B, C,

$$\begin{aligned} \text{linearità} \quad & \{\alpha A+\beta B, C\} = \alpha\{A, C\} + \beta\{B, C\} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \\ \text{antisimmetria} \quad & \{A, B\} = -\{B, A\}, \\ \text{identità di Jacobi} \quad & \{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0, \\ \text{regola di Leibniz} \quad & \{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, B\}C. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Se si assume come definizione delle parentesi la (1.8), le (1.18) possono essere ricavate a partire da essa. Useremo spesso queste proprietà nel seguito.

1.2.1 Invarianza canonica delle parentesi fondamentali

Consideriamo una generica trasformazione dipendente dal tempo, della forma

$$(q, p) \to (Q, P) \qquad Q_i = Q_i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t). \tag{1.19}$$

Assumendo una generatrice del primo tipo, in base alla (1.15), scriviamo l'hamiltoniana come

$$H(q, p, t) = K(Q, P, t) - \frac{\partial F}{\partial t}(q, Q, t)\,. \tag{1.20}$$

Deriviamo questa equazione prendendo come variabili indipendenti le (q, p),

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_j} &= \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial K}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial q_j} + \frac{\partial K}{\partial P_l}\frac{\partial P_l}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} - \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial q_j}, \\ \frac{\partial H}{\partial p_j} &= \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial K}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial p_j} + \frac{\partial K}{\partial P_l}\frac{\partial P_l}{\partial p_j}\right) - \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial p_j}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Deriviamo rispetto al tempo le equazioni di trasformazione (1.19)

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\dot{p}_j\right) + \frac{\partial Q_i}{\partial t}, \\ \dot{P}_i &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\dot{p}_j\right) + \frac{\partial P_i}{\partial t}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Sostituiamo le equazioni di Hamilton per le "vecchie" variabili canoniche (q, p), poi usiamo le (1.21) per esprimerle rispetto a K,

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_i &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial Q_i}{\partial t} = \\
&= \sum_{j,l} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial Q_l}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q_l}{\partial q_j} \right) \frac{\partial K}{\partial Q_l} + \sum_{j,l} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial P_l}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial P_l}{\partial q_j} \right) \frac{\partial K}{\partial P_l} + \\
&\quad - \sum_{j,l} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial Q_l}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q_l}{\partial q_j} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Q_l} + \sum_{j} \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} + \frac{\partial Q_i}{\partial t} = \\
&= \sum_l \{Q_i, Q_l\} \frac{\partial K}{\partial Q_l} + \sum_l \{Q_i, P_l\} \frac{\partial K}{\partial P_l} - \sum_l \{Q_i, Q_l\} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Q_l} + \\
&\quad + \left[\sum_j \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} + \frac{\partial Q_i}{\partial t} \right].
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Ora, se prendiamo la seguente identità nelle variabili q, Q, t,

$$Q_i(q, p(q, Q, t), t) = Q_i \tag{1.24}$$

e la deriviamo rispetto a t tenendo costanti q, Q, otteniamo

$$\sum_k \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\Big|_{q,t,p_{j\neq k}} \frac{\partial p_k(q, Q, t)}{\partial t}\Big|_{q,Q} + \frac{\partial Q_i}{\partial t}\Big|_{q,p} = 0, \tag{1.25}$$

e ricordando che, per una generatrice del primo tipo,

$$p_k(q, Q, t) = \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial q_k}\Big|_{Q,t,q_{j\neq k}}, \tag{1.26}$$

la (1.25) è uguale a

$$\sum_k \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\Big|_{q,t,p_{j\neq k}} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_k}\Big|_{Q,q_{j\neq k}} + \frac{\partial Q_i}{\partial t}\Big|_{q,p} = 0. \tag{1.27}$$

Il primo membro della (1.27) coincide con la parentesi quadra della (1.23), che quindi si annulla identicamente. La (1.23) si riduce così a

$$\dot{Q}_i = \sum_{l=1}^{n} \{Q_i, Q_l\} \frac{\partial K}{\partial Q_l} + \sum_{l=1}^{n} \{Q_i, P_l\} \frac{\partial K}{\partial P_l} - \sum_{l=1}^{n} \{Q_i, Q_l\} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Q_l}. \tag{1.28}$$

Seguiamo un procedimento analogo per calcolare $\dot{P}_i$,

$$\begin{aligned}
\dot{P}_i &= -\sum_l \{Q_l, P_i\} \frac{\partial K}{\partial Q_l} + \sum_l \{P_i, P_l\} \frac{\partial K}{\partial P_l} + \sum_l \{Q_l, P_i\} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Q_l} \\
&\quad + \left[\sum_j \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} + \frac{\partial P_i}{\partial t} \right].
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Partiamo dall'identità
$$P_i(q, p(q,Q,t), t) = P_i(q,Q,t) \tag{1.30}$$
e deriviamola rispetto a t tenendo costanti q, Q,
$$\sum_k \frac{\partial P_i}{\partial p_k}\Big|_{q,t,p_{j\neq k}} \frac{\partial p_k(q,Q,t)}{\partial t}\Big|_{q,Q} + \frac{\partial P_i}{\partial t}\Big|_{q,p} = \frac{\partial P_i}{\partial t}\Big|_{q,Q}. \tag{1.31}$$
Impiegando le relazioni per gli impulsi coniugati con una generatrice di primo tipo, che sono la (1.26) e la seguente
$$P_i(q,Q,t) = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}\Big|_{q,t,Q_{m\neq i}}(q,Q,t), \tag{1.32}$$
la (1.31) diventa
$$\sum_k \frac{\partial P_i}{\partial p_k}\Big|_{q,t,p_{j\neq k}} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_k}\Big|_{q_{m\neq k},Q,t} + \frac{\partial P_i}{\partial t}\Big|_{q,p} = -\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial Q_i}\Big|_{q,Q_{m\neq i}}. \tag{1.33}$$
Sostituendo quest'ultima nella parentesi quadra della (1.29), otteniamo
$$\dot{P}_i = -\sum_l \{Q_l, P_i\}\frac{\partial K}{\partial Q_l} + \sum_l \{P_i, P_l\}\frac{\partial K}{\partial P_l} + \sum_l \left(\{Q_l, P_i\} - \delta_{li}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Q_l}. \tag{1.34}$$
Per una trasformazione canonica, le (1.28) e (1.34) devono ridursi alle equazioni di Hamilton
$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}. \tag{1.35}$$
Questo si verifica se la trasformazione $(q,p) \to (Q,P)$ soddisfa le condizioni
$$\{Q_i, Q_j\} = 0, \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}, \quad \{P_i, P_j\} = 0. \tag{1.36}$$
Vale anche l'inverso. Una trasformazione canonica va considerata indipendente dal sistema specifico, cioè indipendente dalla forma dell'hamiltoniana del sistema. Quindi nelle condizioni di canonicità non deve comparire K, o le sue derivate. Le (1.28) e (1.34) devono ridursi alle (1.35) qualunque sia K. Allora dobbiamo annullare, o porre uguali alla delta, le parentesi di Poisson, che compaiono come "coefficienti" delle derivate di K.
Se calcoliamo le parentesi fondamentali di (Q,P) rispetto alle (Q,P) stesse, avremo ovviamente l'identità,
$$\begin{aligned} &\{Q_i, P_j\}_{(Q,P)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial Q_k}\frac{\partial P_j}{\partial P_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial P_k}\frac{\partial P_j}{\partial Q_k}\right) = \delta_{ij}, \\ &\{Q_i, Q_j\}_{(Q,P)} = 0, \qquad \{P_i, P_j\}_{(Q,P)} = 0. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Pertanto valgono le condizioni di invarianza

$$\begin{aligned} \{Q_i, Q_j\}_{(Q,P)} &= \{Q_i, Q_j\}_{(q,p)} = 0, \\ \{Q_i, P_j\}_{(Q,P)} &= \{Q_i, P_j\}_{(q,p)} = \delta_{ij}, \\ \{P_i, P_j\}_{(Q,P)} &= \{P_i, P_j\}_{(q,p)} = 0. \end{aligned} \tag{1.38}$$

La (1.38) significa che le parentesi fondamentali hanno lo stesso valore se calcolate rispetto a qualunque insieme di variabili canoniche. Sono invarianti per trasformazioni canoniche. Le (1.36) possono essere prese come definizione di un set di variabili canoniche.

1.2.2 Invarianza canonica di qualunque parentesi di Poisson

Siano $f(q,p,t)$ e $g(q,p,t)$ due funzioni di fase. Effettuiamo una arbitraria trasformazione canonica delle coordinate $(q,p) \to (Q(q,p,t), P(q,p,t))$. Indichiamo $\{f,g\}_{(q,p)}$ la parentesi di Poisson di f e g calcolata rispetto alle variabili (q,p). Vale l'invarianza canonica delle parentesi di Poisson

$$\{f,g\}_{(Q,P)} = \{f,g\}_{(q,p)}. \tag{1.39}$$

Dimostrazione. Consideriamo f e g come funzioni composte con le equazioni di trasformazione,

$$\begin{aligned} f(q,p,t) &= f'(Q(q,p,t), P(q,p,t), t), \\ g(q,p,t) &= g'(Q(q,p,t), P(q,p,t), t) \end{aligned} \tag{1.40}$$

(omettiamo gli apici da qui in poi). Applicando la regola della catena, si giunge a

$$\begin{aligned} \{f,g\}_{(q,p)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \Big(&\frac{\partial f}{\partial Q_k}\frac{\partial g}{\partial Q_m}\{Q_k, Q_m\}_{(q,p)} + \frac{\partial f}{\partial Q_k}\frac{\partial g}{\partial P_m}\{Q_k, P_m\}_{(q,p)} + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial P_k}\frac{\partial g}{\partial Q_m}\{P_k, Q_m\}_{(q,p)} + \frac{\partial f}{\partial P_k}\frac{\partial g}{\partial P_m}\{P_k, P_m\}_{(q,p)} \Big), \end{aligned} \tag{1.41}$$

che mostra come ogni parentesi di Poisson si riconduca alle parentesi fondamentali. Per l'invarianza delle parentesi fondamentali, già dimostrata, l'espressione precedente si riduce a

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial Q_k}\frac{\partial g}{\partial P_m}\delta_{k,m} - \frac{\partial f}{\partial P_k}\frac{\partial g}{\partial Q_m}\delta_{k,m} \Big) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial Q_k}\frac{\partial g}{\partial P_k} - \frac{\partial f}{\partial P_k}\frac{\partial g}{\partial Q_k} \right) = \{f,g\}_{(Q,P)}. \end{aligned} \tag{1.42}$$

□

La (1.39) significa, esplicitamente,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial Q_k}\frac{\partial g}{\partial P_k}-\frac{\partial f}{\partial P_k}\frac{\partial g}{\partial Q_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}-\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}\right), \tag{1.43}$$

ossia, la parentesi di due funzioni di fase f, g può essere calcolata rispetto a qualunque insieme di variabili canoniche. Non è quindi necessario mantenere il pedice che indica le variabili di derivazione.
Finora abbiamo adottato il punto di vista passivo, pensando alle trasformazioni come un cambio di coordinate che etichettano gli stessi punti geometrici. L'invarianza delle parentesi di Poisson vale anche dal punto di vista attivo. In particolare, assumiamo una trasformazione canonica continua dipendente da un parametro t (ad esempio l'evoluzione temporale, con parametro il tempo). La trasformazione "muove" il punto corrente $(q(t), p(t))$ lungo una curva continua nello spazio delle fasi, in modo formalmente analogo all'evoluzione ottenibile a partire da un'hamiltoniana. Si può definire un flusso di fase che mappa ogni punto (q, p) nel suo evoluto al "tempo" t,

$$(q(t), p(t)) \equiv (Q, P) = \phi_t(q, p). \tag{1.44}$$

Per ogni funzione di fase $f(q, p)$, definiamo la funzione di fase

$$f_t(q, p) \equiv f(\phi_t(q, p)) = f(Q(t; q, p), P(t; q, p)), \tag{1.45}$$

che ad ogni (q, p) associa il valore di f nel punto trasformato $\phi_t(q, p)$. Con questa notazione, l'invarianza delle parentesi di Poisson si scrive

$$\{f \circ \phi_t, g \circ \phi_t\} = \{f, g\} \circ \phi_t, \tag{1.46}$$

che può essere ricavata nel seguente modo. Come abbiamo dimostrato, la parentesi può essere calcolata in qualunque set di variabili canoniche,

$$\sum_i\left(\frac{\partial f_t}{\partial q_i}\frac{\partial g_t}{\partial p_i}-\frac{\partial f_t}{\partial p_i}\frac{\partial g_t}{\partial q_i}\right)=\sum_i\left(\frac{\partial f_t}{\partial Q_i}\frac{\partial g_t}{\partial P_i}-\frac{\partial f_t}{\partial P_i}\frac{\partial g_t}{\partial Q_i}\right). \tag{1.47}$$

Ora, in base alla (1.45), la derivata di f_t rispetto a Q_i coincide con la derivata di $f(q, p)$ rispetto a q_i, calcolata nel punto trasportato $(q(t), p(t))$,

$$\left(\frac{\partial f_t}{\partial Q_i}\right)_{Q_{m\neq i},P}=\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)_{q_{m\neq i},p}\Bigg|_{\substack{q=Q(t;q,p)\\ p=P(t;q,p)}}. \tag{1.48}$$

Pertanto (1.47) si può riscrivere

$$\sum_i\left(\frac{\partial f_t}{\partial q_i}\frac{\partial g_t}{\partial p_i}-\frac{\partial f_t}{\partial p_i}\frac{\partial g_t}{\partial q_i}\right)=\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)\Bigg|_{\substack{q=Q(t;q,p)\\ p=P(t;q,p)}}, \tag{1.49}$$

che è la (1.46).
In particolare, le parentesi fondamentali sono costanti nel flusso

$$\{q_i(t), q_j(t)\} = 0, \quad \{q_i(t), p_j(t)\} = \delta_{ij}, \quad \{p_i(t), p_j(t)\} = 0. \tag{1.50}$$

Esempio 1.1. *Consideriamo l'hamiltoniana di un oscillatore armonico unidimensionale (con $m = \omega = 1$), $H = (q^2 + p^2)/2$, che genera l'evoluzione*

$$Q(t) = q \cos t + p \sin t, \quad P(t) = -q \sin t + p \cos t. \tag{1.51}$$

Siano $f(q,p) = q^2$, $g(q,p) = p^2$, per cui $\{f, g\} = 4qp$. Le funzioni trasformate sono

$$f_t(q,p) = Q(t)^2 = (q \cos t + p \sin t)^2, \quad g_t(q,p) = P(t)^2 = (-q \sin t + p \cos t)^2 \tag{1.52}$$

e la loro parentesi è

$$\begin{aligned} \{f_t, g_t\} &= \frac{\partial f_t}{\partial q}\frac{\partial g_t}{\partial p} - \frac{\partial f_t}{\partial p}\frac{\partial g_t}{\partial q} = \\ &= [2\cos t(q \cos t + p \sin t)][2\cos t(-q \sin t + p \cos t)] \\ &\quad - [2\sin t(q \cos t + p \sin t)][-2\sin t(-q \sin t + p \cos t)] = \\ &= 4(q \cos t + p \sin t)(-q \sin t + p \cos t) = 4Q(t)P(t), \end{aligned} \tag{1.53}$$

che è precisamente la trasformata di $\{f, g\}$, come stabilisce la (1.46).

1.3 Matrici simplettiche

Per un sistema hamiltoniano ad n gradi di libertà, descritto dalle variabili canoniche $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$, definiamo i vettori colonna di $2n$ componenti

$$\eta = \begin{pmatrix} q_1 \\ ... \\ q_n \\ p_1 \\ ... \\ p_n \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial H}{\partial \eta} = \begin{pmatrix} \partial H/\partial q_1 \\ ... \\ \partial H/\partial q_n \\ \partial H/\partial p_1 \\ ... \\ \partial H/\partial p_n \end{pmatrix}. \tag{1.54}$$

Le equazioni di Hamilton si scrivono

$$\dot{\eta} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \eta} = J \frac{\partial H}{\partial \eta}, \tag{1.55}$$

dove I_n è la matrice identità $n \times n$, e si è introdotta la *matrice simplettica* $2n \times 2n$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.56}$$

che ha le proprietà $J^T = J^{-1} = -J$, $J^2 = -I_{2n}$ e $\det J = +1$. Per calcolare il determinante conviene portare la matrice in forma diagonale, scambiando la colonna i-esima con la colonna $(n+i)$-esima. Sono quindi necessari n scambi, il che porta fuori dal determinante un fattore $(-1)^n$

$$\det J = (-1)^n \det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} = (-1)^n (-1)^n = +1. \tag{1.57}$$

Data una trasformazione canonica $T : \eta = (q,p)^T \to \zeta = (Q,P)^T$ indipendente dal tempo, scriviamo la condizione di canonicità in questa nuova notazione. Poiché la trasformazione non dipende dal tempo, la hamiltoniana K nelle nuove variabili è legata ad H da

$$H(\eta) = K(\zeta(\eta)). \tag{1.58}$$

Derivando questa equazione

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial K}{\partial \zeta_k} \frac{\partial \zeta_k}{\partial \eta_i}, \tag{1.59}$$

che si scrive in forma matriciale

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^T \frac{\partial K}{\partial \zeta} = (DT)^T \frac{\partial K}{\partial \zeta}, \tag{1.60}$$

dove si è indicata $DT = \partial\zeta/\partial\eta$ la matrice jacobiana della trasformazione T, di elementi $(DT)_{ij} = \partial\zeta_i/\partial\eta_j$, e l'apice ^{T} indica trasposizione. Usando la regola della catena,

$$\dot{\zeta} = DT\ \dot{\eta} = (DT)J\frac{\partial H}{\partial \eta} = (DT)J(DT)^T \frac{\partial K}{\partial \zeta}. \tag{1.61}$$

La trasformazione T è canonica se valgono le equazioni di Hamilton

$$\dot{\zeta} = J\frac{\partial K}{\partial \zeta}, \tag{1.62}$$

e confrontando le (1.61) e (1.62), deduciamo che per una trasformazione canonica la matrice jacobiana è una *matrice simplettica*, ossia soddisfa la condizione

$$(DT)J(DT)^T = J, \tag{1.63}$$

che è equivalente a $(DT)^T J(DT) = J$, come si può dimostrare facilmente manipolando l'espressione.
Viceversa, se DT è una matrice simplettica, allora la trasformazione T è canonica. Infatti in tal caso si avrà

$$\dot{\zeta} = (DT)\dot{\eta} = (DT)J\frac{\partial H}{\partial \eta} = (DT)J(DT)^T\frac{\partial K}{\partial \zeta} = J\frac{\partial K}{\partial \zeta}. \tag{1.64}$$

La condizione simplettica (1.63) vale anche per le trasformazioni dipendenti dal tempo, il che può essere dimostrato considerando la trasformazione finita come successione di trasformazioni infinitesime [2], come si vedrà nel prossimo capitolo.
Mostriamo che la composizione di trasformazioni canoniche è canonica. Date due trasformazioni canoniche T_1 e T_2, esse soddisfano la condizione simplettica (1.63). La jacobiana della composta è il prodotto delle jacobiane, $D(T_2 \circ T_1)(q,p) = DT_2(T_1(q,p))DT_1(q,p)$.

$$(D(T_2 \circ T_1))^T J D(T_2 \circ T_1) = (DT_1)^T (DT_2)^T J (DT_2)(DT_1) = (DT_1)^T J (DT_1) = J. \tag{1.65}$$

Le parentesi di Poisson si possono scrivere in notazione simplettica

$$\{f,g\}_\eta = \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^T J \frac{\partial g}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial g}{\partial \eta_j}. \tag{1.66}$$

Infatti, se $\eta = (q,p)^T = (q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)^T$, svolgendo esplicitamente il conto,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}\partial f/\partial q & \partial f/\partial p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & I_n \\ -I_n & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial g/\partial q \\ \partial g/\partial p\end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix}\partial f/\partial q & \partial f/\partial p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial g/\partial p \\ -\partial g/\partial q\end{pmatrix} &= \\ = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}\right) &= \{f,g\}_\eta. \end{aligned} \tag{1.67}$$

In particolare, le parentesi fondamentali si riassumono in un'unica espressione

$$\{\eta_i, \eta_j\} = J_{ij}, \tag{1.68}$$

dove gli indici i, j vanno da 1 a $2n$.
Data una trasformazione canonica $T : \eta = (q,p)^T \to \zeta = (Q,P)^T$, vediamo che la condizione simplettica (1.63) equivale all'invarianza delle parentesi fondamentali. Calcoliamo la parentesi fondamentale $\{\zeta_i, \zeta_j\}$ rispetto alle "vecchie" variabili η,

$$\begin{aligned} \{\zeta_i, \zeta_j\}_\eta = \left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta}\right)^T J \frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^{2n}\sum_{l=1}^{2n} \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_k} J_{kl} \frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_l} = \\ = \sum_{k=1}^{2n}\sum_{l=1}^{2n} ((DT)_{ik} J_{kl} (DT)_{jl}) = \left((DT)J(DT)^T\right)_{ij} = J_{ij}. \end{aligned} \tag{1.69}$$

Questo dimostra che

$$\{\zeta_i, \zeta_j\}_\eta = \{\zeta_i, \zeta_j\}_\zeta = J_{ij}, \tag{1.70}$$

ossia le parentesi fondamentali sono invarianti sotto la trasformazione $T : \eta \to \zeta$.
Più in generale, è immediato dimostrare l'invarianza canonica di qualunque parentesi di Poisson. Partiamo dalla regola della catena

$$\frac{\partial f}{\partial \eta_i} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial \zeta_k}\frac{\partial \zeta_k}{\partial \eta_i} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \eta} = (DT)^T \frac{\partial f}{\partial \zeta}, \tag{1.71}$$

dove per brevità si è indicata la funzione composta $F(\zeta) = f(\eta(\zeta))$ con lo stesso simbolo f. Usando la condizione simplettica (1.63),

$$\begin{aligned} \{f, g\}_\eta &= \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^T J \frac{\partial g}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)^T (DT) J (DT)^T \frac{\partial g}{\partial \zeta} = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)^T J \frac{\partial g}{\partial \zeta} = \{f, g\}_\zeta. \end{aligned} \tag{1.72}$$

Se f, g sono funzioni composte della forma $f(\eta) = \tilde{f}(\psi(\eta))$, $g(\eta) = \tilde{g}(\phi(\eta))$, dove $\psi_1, ..., \psi_r$, $\phi_1, ..., \phi_s$ sono arbitrarie funzioni di fase, applicando la regola della catena,

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^T J \left(\frac{\partial g}{\partial \eta}\right) = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \psi}\right)^T \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) J \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right)^T \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \phi}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \psi}\right)^T \{\psi, \phi\} \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \phi}\right) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \psi_k} \{\psi_k, \phi_l\} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \phi_l}, \end{aligned} \tag{1.73}$$

rappresenta la regola della catena per le parentesi di Poisson.

1.4 Parentesi di Lagrange

Siano (χ, ξ) $2n$ variabili canoniche, dipendenti da due parametri u, v. Definiamo la *parentesi di Lagrange*

$$\begin{aligned} [u, v]_{(\chi,\xi)} &\coloneqq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial u} \frac{\partial \xi_k}{\partial v} - \frac{\partial \chi_k}{\partial v} \frac{\partial \xi_k}{\partial u}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\right)^T J \frac{\partial \eta}{\partial v}, \qquad\qquad \eta \equiv (\chi, \xi)^T. \end{aligned} \tag{1.74}$$

1.4.1 Invarianza canonica delle parentesi di Lagrange

Sia $T : \eta = (\chi, \xi)^T \to \zeta = (q, p)^T$ una trasformazione canonica, che quindi deve soddisfare la condizione simplettica sulla matrice jacobiana, $(DT)^T J (DT) = J$. Se η è funzione di due parametri u, v allora ζ è funzione di u, v attraverso η: $\zeta = \zeta(\eta(u, v))$. La regola della catena implica

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u} = (DT) \frac{\partial \eta}{\partial u}, \tag{1.75}$$

sicché la parentesi di Lagrange sarà

$$\begin{aligned} [u, v]_\zeta &= \left(\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right)^T J \frac{\partial \zeta}{\partial v} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\right)^T (DT)^T J (DT) \frac{\partial \eta}{\partial v} = \\ &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\right)^T J \frac{\partial \eta}{\partial v} = [u, v]_\eta. \end{aligned} \tag{1.76}$$

La (1.76) si scrive esplicitamente come

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\chi_k}{\partial u}\frac{\partial\xi_k}{\partial v}-\frac{\partial\chi_k}{\partial v}\frac{\partial\xi_k}{\partial u}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q_k}{\partial u}\frac{\partial p_k}{\partial v}-\frac{\partial q_k}{\partial v}\frac{\partial p_k}{\partial u}\right), \tag{1.77}$$

la quale significa che la parentesi $[u, v]$ assume lo stesso valore, nel generico punto (u, v), in qualunque sistema di coordinate canoniche la si calcoli.

1.4.2 Parentesi fondamentali

Prendendo come funzioni u, v le variabili canoniche stesse (χ, ξ) si ricava

$$\begin{aligned}
u &= \chi_i,\ v = \chi_j \quad \rightarrow \quad [\chi_i, \chi_j] = 0,\\
u &= \chi_i,\ v = \xi_j \quad \rightarrow \quad [\chi_i, \xi_j] = \delta_{ij},\\
u &= \xi_i,\ v = \xi_j \quad \rightarrow \quad [\xi_i, \xi_j] = 0,
\end{aligned} \tag{1.78}$$

o, scritte in forma matriciale,

$$[\eta, \eta] = J. \tag{1.79}$$

1.4.3 Condizioni di canonicità con le parentesi di Lagrange

Le condizioni di canonicità sono analoghe a quelle formulate con le parentesi di Poisson ed esprimono l'invarianza delle parentesi fondamentali sotto trasformazioni canoniche.
In questa sezione seguiamo sostanzialmente l'approccio del Lemos [3]. La condizione di canonicità in forma differenziale (1.14), che qui riportiamo,

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i dq_i - P_i dQ_i) + (K - H)dt = d\phi, \tag{1.14}$$

può essere presa a tempo fissato ed implica quindi, come caso particolare,

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i dq_i - P_i dQ_i)\,|_{t=const} = d\phi|_{t=const}. \tag{1.80}$$

Dimostriamo che vale anche l'inverso: (1.80) implica (1.14). Sia F la generatrice, supponiamo di primo tipo, per cui $\phi(q, p, t) = F(q, Q(q, p, t), t)$. Definiamo come al solito $K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \partial F/\partial t$.

$$\begin{aligned}
d\phi &= d\phi|_t + \frac{\partial\phi}{\partial t}dt,\\
dQ_i &= dQ_i\Big|_t + \frac{\partial Q_i}{\partial t}dt,
\end{aligned} \tag{1.81}$$

dove la derivata di ϕ rispetto al tempo si può esprimere come

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial Q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{1.82}$$

Ora sostituiamo dentro la (1.80) le espressioni ricavate

$$\sum_{i=1}^{n} \left(p_i dq_i - P_i \left(dQ_i - \frac{\partial Q_i}{\partial t} dt \right) \right) = d\phi - \frac{\partial\phi}{\partial t} dt. \tag{1.83}$$

Sostituendo anche la (1.82) e riarrangiando,

$$\sum_{i=1}^{n} (p_i dq_i - P_i dQ_i) + \frac{\partial F}{\partial t} dt = d\phi. \tag{1.84}$$

Avendo definito $\partial F/\partial t = K - H$, segue la (1.14).

Sia (q,p) un set di variabili canoniche. La trasformazione di variabili $(q,p) \to (Q,P)$ nello spazio delle fasi è canonica se e solo se

$$\begin{aligned} [q_i, q_j]_{(Q,P)} &= 0, \\ [q_i, p_j]_{(Q,P)} &= \delta_{ij}, \\ [p_i, p_j]_{(Q,P)} &= 0. \end{aligned} \tag{1.85}$$

Dimostrazione. In base alla discussione precedente, assumeremo il tempo fissato. Per definizione, una trasformazione canonica deve soddisfare la condizione (1.80),

$$\sum_{j=1}^{n} (p_j dq_j - P_j dQ_j) = d\phi. \tag{1.86}$$

Nella trasformazione, le variabili (Q,P) sono funzioni di (q,p), e i differenziali sono

$$\begin{aligned} dQ_i &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} dp_k \right), \\ dP_i &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial P_i}{\partial p_k} dp_k \right). \end{aligned} \tag{1.87}$$

Sostituiamo questi differenziali e riarrangiamo l'equazione,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(p_k - \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \right) dq_k - \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \right) dp_k = d\phi. \tag{1.88}$$

Posto

$$A_k = p_k - \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}, \quad B_k = -\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}, \tag{1.89}$$

riscriviamo $d\phi$ come

$$d\phi = \sum_{k=1}^{n} \left(A_k dq_k + B_k dp_k \right). \tag{1.90}$$

Se la trasformazione è canonica, allora l'espressione (1.90) è un differenziale esatto, il che implica la condizione di chiusura della forma differenziale (simmetria delle derivate seconde miste di ϕ),

$$\frac{\partial A_j}{\partial q_k} = \frac{\partial A_k}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial B_j}{\partial p_k} = \frac{\partial B_k}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial A_j}{\partial p_k} = \frac{\partial B_k}{\partial q_j}. \tag{1.91}$$

Il calcolo esplicito di queste condizioni porta all'invarianza delle parentesi di Lagrange fondamentali. Vediamo per esempio la prima,

$$\frac{\partial}{\partial q_k}\left(p_j - \sum_l P_l \frac{\partial Q_l}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(p_k - \sum_l P_l \frac{\partial Q_l}{\partial q_k} \right). \tag{1.92}$$

La derivata rispetto a q_k è calcolata tenendo le altre variabili $q_{m\neq k}, p$ costanti, quindi p_j e p_k non danno contributo,

$$\sum_l \left(\frac{\partial P_l}{\partial q_k}\frac{\partial Q_l}{\partial q_j} + P_l \frac{\partial^2 Q_l}{\partial q_j \partial q_k} \right) = \sum_l \left(\frac{\partial P_l}{\partial q_j}\frac{\partial Q_l}{\partial q_k} + P_l \frac{\partial^2 Q_l}{\partial q_k \partial q_j} \right). \tag{1.93}$$

La trasformazione $Q(q,p)$ è per ipotesi una funzione regolare, quindi le derivate seconde commutano e si cancellano nell'espressione, e rimaniamo con

$$\sum_l \left(\frac{\partial Q_l}{\partial q_j}\frac{\partial P_l}{\partial q_k} - \frac{\partial P_l}{\partial q_j}\frac{\partial Q_l}{\partial q_k} \right) = 0, \tag{1.94}$$

dove a primo membro figura la parentesi di Lagrange $[q_j, q_k]$, e j e k sono arbitrari. In modo analogo si dimostrano le altre condizioni, $[p_j, p_k] = 0$ e $[q_j, p_k] = \delta_{jk}$.
Viceversa, sotto l'ipotesi che il dominio di $\mathbb{R}^{2n}$ su cui sono definite le variabili (q,p) sia un aperto semplicemente connesso, la chiusura della forma differenziale implica l'esattezza (lemma di Poincaré). Pertanto sotto questa ipotesi vale l'implicazione inversa: se le parentesi fondamentali sono invarianti, allora la trasformazione è canonica. □

1.4.4 Reciprocità delle parentesi di Lagrange e di Poisson

Siano $u_i = u_i(\eta_1, ..., \eta_{2n})$ per $i = 1, ..., 2n$ un set di $2n$ funzioni indipendenti delle variabili canoniche η, tali che la matrice jacobiana sia non singolare e sia possibile quindi invertire localmente per $\eta_i(u_1, ..., u_{2n})$.

Indicando con $\{\ ,\ \}$ le parentesi di Poisson e con $[\ ,\ ]$ le parentesi di Lagrange rispetto alle variabili canoniche η,

$$\sum_{k=1}^{2n}\{u_i,u_k\}[u_k,u_j]=-\delta_{ij}, \tag{1.95}$$

o, in forma matriciale,

$$\{u,u\}[u,u]=-I_{2n}. \tag{1.96}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata per le parentesi fondamentali, cioè se $u=\eta$, ricordando che

$$\{\eta,\eta\}=J, \quad [\eta,\eta]=J, \tag{1.97}$$

segue $\{\eta,\eta\}[\eta,\eta]=[\eta,\eta]\{\eta,\eta\}=J^2=-I_{2n}$.
Per funzioni u_i qualsiasi, ricordiamo che

$$\begin{aligned}\{u_i,u_k\}&=\sum_{l,m=1}^{2n}\frac{\partial u_i}{\partial\eta_l}J_{lm}\frac{\partial u_k}{\partial\eta_m},\\ [u_k,u_j]&=\sum_{r,s=1}^{2n}\frac{\partial\eta_r}{\partial u_k}J_{rs}\frac{\partial\eta_s}{\partial u_j}.\end{aligned} \tag{1.98}$$

Calcoliamo

$$\sum_{k=1}^{2n}\{u_i,u_k\}[u_k,u_j]=\sum_k\sum_{l,m}\sum_{r,s}\left(\frac{\partial u_i}{\partial\eta_l}J_{lm}\frac{\partial u_k}{\partial\eta_m}\right)\left(\frac{\partial\eta_r}{\partial u_k}J_{rs}\frac{\partial\eta_s}{\partial u_j}\right), \tag{1.99}$$

dove tutti gli indici nelle somme vanno da 1 a $2n$. Osservando che, per la regola della catena, $\sum_k(\partial u_k/\partial\eta_m)(\partial\eta_r/\partial u_k)=\partial\eta_r/\partial\eta_m=\delta_{rm}$, sommiamo prima su k,

$$\sum_{l,m}\sum_{r,s}\frac{\partial u_i}{\partial\eta_l}J_{lm}\delta_{rm}J_{rs}\frac{\partial\eta_s}{\partial u_j}. \tag{1.100}$$

Contraendo su m compare la somma $\sum_r J_{lr}J_{rs}=-\delta_{ls}$,

$$\sum_{l,s}\frac{\partial u_i}{\partial\eta_l}\left(-\delta_{ls}\right)\frac{\partial\eta_s}{\partial u_j}=-\sum_s\frac{\partial u_i}{\partial\eta_s}\frac{\partial\eta_s}{\partial u_j}=-\frac{\partial u_i}{\partial u_j}=-\delta_{ij}. \tag{1.101}$$

Questo dimostra che $\{u,u\}[u,u]=-I$.
Ricordando l'antisimmetria delle parentesi,

$$\sum_k\{u_i,u_k\}[u_k,u_j]=\sum_k\left(-\{u_k,u_i\}\right)\left(-[u_j,u_k]\right)=\sum_k[u_j,u_k]\{u_k,u_i\}, \tag{1.102}$$

segue che $\{u,u\}[u,u]=([u,u]\{u,u\})^T$, e poiché la trasposta dell'identità è ancora l'identità, esse coincidono

$$\{u,u\}[u,u]=[u,u]\{u,u\}=-I. \tag{1.103}$$

□

1.5 Invarianti di Poincaré

Sia S una superficie bidimensionale nello spazio delle fasi, parametrizzata da due coordinate (u, v) che assumono valori in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Definiamo

$$A \equiv \int_S dq \cdot dp = \int_S \sum_{i=1}^{n} dq_i dp_i = \sum_{i=1}^{n} \int_S dq_i dp_i = \sum_{i=1}^{n} \int_D dudv \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)}. \tag{1.104}$$

Spieghiamo il significato di questo oggetto. L'oggetto $dq_i dp_i \equiv dq_i \wedge dp_i$ è una 2-forma differenziale che misura l'area orientata della proiezione sul piano di fase (q_i, p_i) di una porzione infinitesima della superficie S. Più precisamente, per ogni coppia di vettori w_1, w_2 tangenti alla superficie,

$$\begin{aligned}(dq_i \wedge dp_i)(w_1, w_2) &= dq_i(w_1)dp_i(w_2) - dq_i(w_2)dp_i(w_1) = \\ &= (w_1)_{q_i}(w_2)_{p_i} - (w_2)_{q_i}(w_1)_{p_i},\end{aligned} \tag{1.105}$$

dove $(w)_{q_i}$ è la componente del vettore w lungo la direzione del vettore $\partial/\partial q_i$ della base locale dello spazio tangente allo spazio delle fasi. Si osservi che $((w_1)_{q_i}, (w_1)_{p_i})$ e $((w_2)_{q_i}, (w_2)_{p_i})$ sono le proiezioni di (rispettivamente) w_1 e w_2 sul piano delle fasi i-esimo, di coordinate (q_i, p_i). La combinazione numerica delle componenti nella (1.105) è proprio l'area del parallelogrammo formato dai vettori proiettati.
Integrando la forma $dq_i \wedge dp_i$ sopra ad S, otteniamo l'area orientata della proiezione di S sul piano (q_i, p_i). La quantità (1.104) è quindi la somma delle aree orientate delle proiezioni di S sui piani di fase [1]. Nell'ultima uguaglianza abbiamo cambiato le variabili di integrazione da q_i, p_i ad u, v ed è comparso quindi il determinante jacobiano, che come noto rappresenta il fattore di scala locale degli elementi di "volume" sotto cambio di variabili. La trasformazione $(u, v) \to (q_i, p_i)$ trasforma l'"area infinitesima" $dudv$ nell'"area infinitesima" $\partial(q_i, p_i)/\partial(u, v)dudv$. Questo segue anche dalle proprietà di bilinearità e antisimmetria del prodotto esterno. I differenziali sono $dq_i = (\partial q_i/\partial u)du + (\partial q_i/\partial v)dv$ e $dp_i = (\partial p_i/\partial u)du + (\partial p_i/\partial v)dv$, perciò

$$\begin{aligned}dq_i \wedge dp_i &= \left(\frac{\partial q_i}{\partial u}du + \frac{\partial q_i}{\partial v}dv\right) \wedge \left(\frac{\partial p_i}{\partial u}du + \frac{\partial p_i}{\partial v}dv\right) = \\ &= \left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u}\frac{\partial q_i}{\partial v}\right) du \wedge dv = \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)}du \wedge dv.\end{aligned} \tag{1.106}$$

Notiamo che la somma dei determinanti jacobiani è una parentesi di Lagrange,

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{\partial p_i}{\partial u}\right) = [u, v]. \tag{1.107}$$

Pertanto la (1.104) è uguale a

$$A = \int_D dudv[u, v]. \tag{1.108}$$

Consideriamo ora una trasformazione canonica $T : (q, p) \to (Q, P)$. Se la interpretiamo in senso attivo, T muove i punti dello spazio delle fasi rimanendo all'interno dello stesso spazio e la superficie S viene mappata in una nuova superficie $S' = T(S)$ nello stesso spazio. Consideriamo quindi la quantità

$$A' \equiv \int_{S'} dQ \cdot dP \tag{1.109}$$

e dimostriamo che $A' = A$, ossia A è un invariante canonico: per ogni superficie S, il numero A è preservato dalle trasformazioni canoniche.
Se immaginiamo la trasformazione finita T come il risultato di una trasformazione canonica continua che sposta i punti nello spazio delle fasi, la superficie S evolve con continuità arrivando ad S'. Sotto una trasformazione canonica continua, il movimento di ogni punto dello spazio delle fasi è descritto da delle equazioni del primo ordine analoghe a quelle di Hamilton. Pertanto, il punto iniziale su S fissa univocamente la traiettoria seguita da tale punto. Punti distinti seguono traiettorie distinte che non si intersecano mai: dato che la soluzione che passa per un dato punto è unica, se due soluzioni si intersecano, allora coincidono. Poiché le traiettorie non si intersecano, ogni coppia di coordinate (u, v) su S individua univocamente una di queste traiettorie, sicché il punto evoluto su S' può essere individuato ancora dalle stesse coordinate (u, v). Possiamo pensare alla superficie in movimento come ad una famiglia continua ad un parametro di superfici, del tipo $\eta = \eta(u, v; \lambda)$. Pertanto A' si può scrivere come integrale sullo stesso dominio D di A,

$$A' = \int_D dudv[u, v]_{(Q,P)}. \tag{1.110}$$

Come abbiamo già dimostrato, le parentesi di Lagrange sono invarianti canonici: $[u, v]_{(Q,P)} = [u, v]_{(q,p)}$, e precisamente la parentesi non cambia in valore, perciò

$$A' = \int_D dudv[u, v]_{(Q,P)} = \int_D dudv[u, v]_{(q,p)} = A. \tag{1.111}$$

L'evoluzione temporale è una trasformazione canonica, perciò conserva A. Al passare del tempo, la superficie iniziale S_0 evolve con continuità in una superficie S_t, ma il valore di A rimane costante, $A(S_t) = A(S_0)$ ad ogni tempo t, per ogni S_0.

Possiamo anche calcolare direttamente

$$\sum_i dQ_i \wedge dP_i = \sum_{i,k,l} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} dp_k \right) \wedge \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_l} dq_l + \frac{\partial P_i}{\partial p_l} dp_l \right). \tag{1.112}$$

Applichiamo la proprietà distributiva del prodotto esterno. Grazie all'antisimmetria, i termini con differenziali uguali si annullano, e i termini del tipo $dq_k \wedge dq_l$ con $k > l$ si riconducono a quelli con $k < l$ con un cambio di segno, portando a costruire le parentesi di Lagrange.

$$\begin{aligned}\sum_i dQ_i \wedge dP_i = \sum_{k<l} \Big([q_k, q_l] dq_k \wedge dq_l + [p_k, p_l] dp_k \wedge dp_l\Big) + \\ + \sum_{k\neq l} [q_k, p_l] dq_k \wedge dp_l + \sum_k [q_k, p_k] dq_k \wedge dp_k.\end{aligned} \tag{1.113}$$

Come si è dimostrato sopra, la trasformazione è canonica se e solo se preserva le parentesi fondamentali. Quindi tutte le parentesi nella (1.113) si annullano ad eccezione di $[q_k, p_k]$, che vale 1, e concludiamo che

$$\sum_{i=1}^n dQ_i \wedge dP_i = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i. \tag{1.114}$$

Questo significa che una trasformazione è canonica se e solo se preserva questa forma differenziale.

Esempio 1.2. *Siano (q, p) due variabili canoniche in uno spazio delle fasi 2-dimensionale. Prendiamo la seguente trasformazione*

$$Q = q, \quad P = p + f(q), \tag{1.115}$$

dove $f(q)$ è una funzione arbitraria. La trasformazione è canonica, infatti è immediato constatare che preserva le parentesi, o equivalentemente, la forma differenziale (1.114) *(con $n = 1$).*
Supponiamo ora che (x, y) siano due variabili non canoniche, ossia $\{x, y\} = k \neq 1$. Ora la medesima trasformazione

$$Q = x, \quad P = y + f(x), \tag{1.116}$$

non è canonica, perché le variabili di partenza non lo sono. Le nuove variabili non sono canoniche,

$$\{Q, P\} = \{x, y + f(x)\} = \{x, y\} + \{x, f(x)\} = \{x, y\} = k \neq 1, \tag{1.117}$$

dove abbiamo usato la proprietà delle parentesi di Poisson $\{x, f(x)\} = \{x, x\}(df/dx) = 0$. Tuttavia, vale ancora che

$$\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial x} = 1. \tag{1.118}$$

Concludiamo che, quando le variabili (x, y) non sono canoniche, la parentesi di Poisson $\{Q, P\}$ non può essere rappresentata dalla usuale espressione differenziale a primo membro di (1.118)*. Quest'ultima rappresenta solo il fattore di scala delle parentesi: impigando la regola della catena,*

$$\{Q, P\} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial x}\right)\{x, y\} = \{x, y\}. \tag{1.119}$$

Possiamo definire una nuova trasformazione in modo da bilanciare il fattore k nella parentesi di Poisson. Ad esempio, assumendo $k \neq 0$,

$$Q = x, \quad P = y/k, \tag{1.120}$$

in modo da avere

$$\{Q, P\} = \{x, y\}/k = k/k = 1. \tag{1.121}$$

Questa trasformazione continua a non essere canonica, in quanto non preserva la forma differenziale (1.114)*,*

$$dQ \wedge dP = \frac{1}{k} dx \wedge dy \tag{1.122}$$

o, (equivalentemente, perchè siamo in 2 dimensioni), il determinante jacobiano è diverso da 1.

1.6 Teorema di Liouville

Sia R una regione dello spazio delle fasi (q, p) che viene mappata nella regione R' dello spazio (Q, P) da una trasformazione canonica. La misura $2n$-dimensionale della regione R può essere scritta

$$\Gamma = \int_R dq_1 ... dq_n dp_1 ... dp_n \equiv \int_R d^{2n} z \tag{1.123}$$

e, analogamente, per R' avremo

$$\Gamma' = \int_{R'} dQ_1 ... dQ_n dP_1 ... dP_n \equiv \int_{R'} d^{2n} \zeta. \tag{1.124}$$

Applicando il teorema del cambio di variabile negli integrali,

$$\Gamma' = \int_R \left| \frac{\partial(\zeta_1, ..., \zeta_{2n})}{\partial(z_1, ..., z_{2n})} \right| d^{2n} z, \tag{1.125}$$

compare il valore assoluto del determinante jacobiano della trasformazione $z \equiv (q, p) \rightarrow \zeta \equiv (Q, P)$. Abbiamo dimostrato in precedenza come ogni trasformazione canonica debba soddisfare la condizione simplettica sulla matrice jacobiana $DT \equiv \partial\zeta/\partial z$, che riportiamo qui

$$(DT) J (DT)^T = J. \tag{1.63}$$

Questa condizione implica che il valore assoluto del determinante jacobiano è uguale a 1. Ricordando che il determinante della matrice simplettica J è uguale a 1,

$$\begin{aligned} \det(DT) \det(J) \det\big((DT)^T\big) = \det(J) = 1, \\ (\det(DT))^2 = 1 \rightarrow |\det(DT)| = 1. \end{aligned} \tag{1.126}$$

Allora $\Gamma' = \Gamma$, cioè le trasformazioni canoniche conservano la misura $2n$-dimensionale di qualunque regione R dello spazio delle fasi.

Pensiamo ad una trasformazione canonica dipendente da un parametro continuo (di cui l'evoluzione temporale, generata dall'hamiltoniana, è un caso particolare). Una arbitraria regione iniziale R_0, corrispondente al valore t_0 del parametro, ha un certo "volume" (misura) Γ_0 definito. Ciascun punto di R_0 evolve sotto il flusso generato dalla trasformazione seguendo delle equazioni del moto formalmente uguali alle equazioni di Hamilton. Allora questa regione evolve con continuità attraverso lo spazio delle fasi, cambiando in generale la sua forma, ma conservando sempre il suo volume. Sia R_t l'immagine di R_0 quando il parametro (pensiamo al tempo) assume il valore t. Sia Γ_t il volume di R_t, definito da (1.124). La conservazione della misura sotto il flusso canonico si può esprimere: $\Gamma_t = \Gamma_0$, per ogni t.

Capitolo 2

Trasformazioni canoniche

2.1 Trasformazioni canoniche infinitesime (ICT)

Una trasformazione canonica infinitesima (ICT) è una trasformazione canonica in cui le variabili canoniche trasformate differiscono dalle iniziali per quantità infinitesime [2]

$$\begin{aligned} q_i \to Q_i = q_i + \delta q_i, \\ p_i \to P_i = p_i + \delta p_i. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Si può quindi vedere come la trasformazione identità, che è una trasformazione canonica di generatrice $F = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i$, più una parte infinitesima. La generatrice si può scrivere quindi

$$F = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i + \epsilon G(q, P, t), \tag{2.2}$$

dove ϵ è una parametro infinitesimo e G una qualunque funzione differenziabile. Essendo F una generatrice del secondo tipo, per definizione

$$\begin{aligned} Q_j = \frac{\partial F}{\partial P_j} = q_j + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_j}, \\ p_j = \frac{\partial F}{\partial q_j} = P_j + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

quindi le variazioni delle variabili canoniche sono

$$\begin{aligned} \delta q_j \equiv Q_j - q_j = \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_j}, \\ \delta p_j \equiv P_j - p_j = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Poiché la variazione dell'impulso coniugato p_j è del primo ordine in ϵ, se sostituiamo p a P dentro la funzione $G(q, P, t)$ nella (2.2), commettiamo un errore del secondo ordine,

$\epsilon G(q, P, t) = \epsilon G(q, p, t) + O(\epsilon^2)$. Questo significa che le generatrici delle trasformazioni canoniche infinitesime (del secondo tipo) possono essere scritte come

$$F = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i + \epsilon G(q, p, t). \tag{2.5}$$

Per la stessa ragione, $\epsilon \partial G / \partial P_j = \epsilon \partial G / \partial p_j + O(\epsilon^2)$ e possiamo riscrivere la variazione delle coordinate come

$$\delta q_j = Q_j - q_j = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_j}. \tag{2.6}$$

Possiamo anche partire direttamente dall'invarianza della forma differenziale per arrivare alle stesse conclusioni. Assumiamo per semplicità lo spazio delle fasi bidimensionale, di variabili canoniche (q, p). Consideriamo una trasformazione infinitesima $(q, p) \to (q + \delta q, p + \delta p)$. Sotto quali condizioni questa trasformazione è canonica? La condizione di canonicità richiede che la forma differenziale $\omega = pdq - Hdt$ differisca al più per il differenziale totale di una funzione $\phi(q, p, t)$. Consideriamo quindi

$$\begin{aligned} \omega' &= p'dq' - Kdt = (p + \delta p)(dq + d\delta q) - Kdt = \\ &= (pdq - Hdt) + [\delta p dq + p d\delta q - (K - H)dt] + \delta p d\delta q. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Possiamo trascurare il termine $\delta p d\delta q$, che è infinitesimo di ordine superiore ai termini precedenti. Usiamo poi l'identità $pd\delta q = d(p\delta q) - \delta q dp$ per riscrivere

$$\omega' = (pdq - Hdt) - [-\delta p dq + \delta q dp + (K - H)dt] + d(p\delta q). \tag{2.8}$$

Affinché la quantità dentro parentesi quadre sia un differenziale totale, deve esistere una funzione differenziabile $G(q, p, t)$ tale che

$$\delta p = -\frac{\partial G}{\partial q}, \quad \delta q = \frac{\partial G}{\partial p}, \quad K - H = \frac{\partial G}{\partial t}. \tag{2.9}$$

Inoltre questa funzione G dovrà essere "infinitesima" perché le variazioni sono molto piccole. Conviene quindi scriverla come ϵG, dove ϵ è un parametro infinitesimo che moltiplica G, la quale invece resta finita. Ponendo infine $\phi_\epsilon(q, p, t) = \epsilon \left(p \frac{\partial G}{\partial p} - G \right)$, otteniamo $\omega' = \omega + d\phi_\epsilon$, come richiesto. In conclusione, la trasformazione $(q, p) \to (q + \delta q, p + \delta p)$ è canonica se esiste una funzione differenziabile $G(q, p, t)$ tale che

$$\delta p = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q}, \quad \delta q = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p}, \quad K - H = \epsilon \frac{\partial G}{\partial t}. \tag{2.10}$$

In generale, per uno spazio delle fasi $2n$-dimensionale, ripercorriamo lo stesso ragionamento. La trasformazione $(q, p) \to (q + \delta q, p + \delta p)$ è canonica se esiste una funzione differenziabile $G(q, p, t)$, detta generatrice, tale che

$$\delta p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad \delta q_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad K - H = \epsilon \frac{\partial G}{\partial t}. \tag{2.11}$$

Queste variazioni si riesprimono per mezzo delle parentesi di Poisson

$$\begin{aligned} \delta q_j &= \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_j} = \epsilon\{q_j, G\}, \\ \delta p_j &= -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j} = \epsilon\{p_j, G\}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

e si raccolgono in forma compatta introducendo il vettore $\eta = (q,p)^T$, ed utilizzando la matrice simplettica J definita in (1.56),

$$\delta\eta = \epsilon J \frac{\partial G}{\partial \eta} = \epsilon\{\eta, G\}. \tag{2.13}$$

Più in generale, sia $u(q,p,t)$ una qualunque variabile dinamica differenziabile. Interpretando la ICT in senso attivo, ossia come mappa che sposta il punto di fase (q,p) nel punto $(q+\delta q, p+\delta p)$, la variazione al primo ordine subita dalla funzione $u(q,p,t)$ è

$$\begin{aligned} \delta u = u(q+\delta q, p+\delta p, t) - u(q,p,t) &\approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial u}{\partial p_i}\delta p_i \right) = \\ = \epsilon \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} \right) &= \epsilon\{u, G\} = \epsilon \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^T J \frac{\partial G}{\partial \eta}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

La (2.13) permette di dimostrare che l'impulso è il generatore infinitesimo delle traslazioni, e il momento angolare è il generatore infinitesimo delle rotazioni [2]. Se come generatrice prendiamo un impulso $G = p_i$, le variazioni delle coordinate canoniche sono

$$\begin{aligned} \delta q_k &= \epsilon\{q_k, p_i\} = \epsilon\delta_{ki} \\ \delta p_k &= \epsilon\{p_k, p_i\} = 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Questo significa che lo spostamento di una singola coordinata q_i è generato dal suo momento coniugato p_i. Viceversa, la coordinata q_i genera le traslazioni dell'impulso ad essa coniugato p_i. Consideriamo una singola particella e adottiamo le coordinate cartesiane (il significato fisico della generatrice non dipende dalle coordinate). Abbiamo dimostrato che la componente p_x dell'impulso genera le traslazioni lungo l'asse x, e analogamente per gli altri assi. Studiamo ora il momento angolare, le cui componenti cartesiane sono $l_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j p_k$. Le variazioni delle coordinate canoniche sotto la trasformazione generata dalla componente l_i di parametro infinitesimo $\delta\theta$ risultano

$$\begin{aligned} \delta x_a &= \delta\theta \sum_k \epsilon_{aik} x_k \\ \delta p_b &= \delta\theta \sum_k \epsilon_{bik} p_k. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Per esempio, se prendiamo la terza componente l_z, le trasformazioni sono

$$\begin{aligned} &\delta x = -y\delta\theta, \quad \delta y = x\delta\theta, \quad \delta z = 0 \\ &\delta p_x = -p_y\delta\theta, \quad \delta p_y = p_x\delta\theta, \quad \delta p_z = 0, \end{aligned} \tag{2.17}$$

che rappresentano una rotazione infinitesima della posizione attorno all'asse z, e una rotazione infinitesima dell'impulso attorno all'asse p_z. In altre parole, la componente l_i del momento angolare genera le rotazioni attorno all'asse cartesiano i-esimo. Quanto discusso si può generalizzare ad un sistema di N particelle. La proiezione dell'impulso totale del sistema sul versore n di $\mathbb{R}^3$, $P_n = P \cdot n$, genera le traslazioni del sistema lungo la direzione n dello spazio. La componente del momento angolare totale su n, $L_n = L \cdot n$, è la generatrice delle rotazioni del sistema attorno all'asse n.

Per una ICT $\eta \to \eta + \delta\eta$, la matrice jacobiana rispetto alle variabili η è, impiegando la (2.13),

$$DT = I + \frac{\partial \delta\eta}{\partial \eta} = I + \epsilon J \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta}, \tag{2.18}$$

dove $\frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta}$ è la matrice hessiana della generatrice G. La trasposta è $(DT)^T = I - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta} J$, perché l'hessiana è simmetrica mentre l'unità simplettica J è antisimmetrica. Pertanto

$$(DT)^T J (DT) = J + O(\epsilon^2), \tag{2.19}$$

che significa che ogni trasformazione canonica infinitesima soddisfa la condizione simplettica. Una trasformazione finita, anche dipendente dal tempo, può sempre vedersi come composizione di trasformazioni infinitesime. Dato che la composizione di trasformazioni simplettiche è simplettica, segue che ogni trasformazione canonica finita, anche dipendente dal tempo, è simplettica.

2.1.1 Corrispondenza tra ICT e funzioni dello spazio delle fasi

Come si è discusso in precedenza, per ogni ICT della forma

$$\begin{aligned} q_i' &= q_i + \epsilon f_i(q, p, t), \\ p_i' &= p_i + \epsilon g_i(q, p, t), \end{aligned} \tag{2.20}$$

esiste una funzione $G(q, p, t)$ tale che $f_i = \partial G / \partial p_i$ e $g_i = -\partial G / \partial q_i$, e questa G è la generatrice infinitesima.

Vale anche l'inverso: per ogni funzione differenziabile $G(q, p, t)$ dello spazio delle fasi, la trasformazione delle variabili definita da

$$\begin{aligned} q_i' &= q_i + \lambda \frac{\partial G}{\partial p_i}, \\ p_i' &= p_i - \lambda \frac{\partial G}{\partial q_i}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

dove λ è un parametro infinitesimo, e dove si definisce l'hamiltoniana trasformata come $K = H + \lambda \partial G / \partial t$, è una ICT.

Dimostrazione. In base alla condizione di canonicità di una trasformazione dello spazio delle fasi, occorre dimostrare che la forma differenziale espressa nelle nuove coordinate $\omega' = \sum_i p'_i dq'_i - K dt$ differisce da $\omega = \sum_i p_i dq_i - H dt$ per un differenziale totale. Sostituiamo le quantità trasformate nell'espressione di ω',

$$\begin{aligned}\omega' &= \sum_i \left(p_i - \lambda\frac{\partial G}{\partial q_i}\right)\left(dq_i + \lambda d\frac{\partial G}{\partial p_i}\right) - (H + \lambda \partial G/\partial t)\, dt = \\ &= \sum_i \left(p_i dq_i - \lambda \frac{\partial G}{\partial q_i} dq_i + \lambda p_i d\frac{\partial G}{\partial p_i}\right) - H dt - \lambda \frac{\partial G}{\partial t} dt + O(\lambda^2).\end{aligned} \tag{2.22}$$

Ora usiamo l'identità $\sum_i p_i d\frac{\partial G}{\partial p_i} = d\left(\sum_i p_i \frac{\partial G}{\partial p_i}\right) - \sum_i \frac{\partial G}{\partial p_i} dp_i$,

$$\begin{aligned}&\left(\sum_i p_i dq_i - H dt\right) - \lambda dG + \lambda d\left(\sum_i p_i \frac{\partial G}{\partial p_i}\right) + O(\lambda^2) = \\ &\qquad = \omega - \lambda d\left(G - \sum_i p_i \frac{\partial G}{\partial p_i}\right) + O(\lambda^2).\end{aligned} \tag{2.23}$$

Ponendo $\phi_\lambda(q,p,t) = \lambda\left(G - \sum_i p_i \frac{\partial G}{\partial p_i}\right)$, e trascurando i termini infinitesimi di ordine superiore al primo, si riscrive $\omega' = \omega - d\phi_\lambda$, mostrando che le forme differiscono per un differenziale totale. □

Questo prova che, se riusciamo a dimostrare che una data trasformazione infinitesima delle variabili $\eta \equiv (q,p)^T$ soddisfa $\eta' = \eta + \lambda\{\eta, G\}$ per una qualche funzione $G(q,p,t)$, allora è una trasformazione canonica.

2.1.2 Trasformazioni canoniche continue e sistemi dinamici

Si consideri una trasformazione canonica continua (CCT), ossia una famiglia di trasformazioni canoniche dipendente da un parametro continuo λ

$$\begin{aligned}q_i(\lambda) &= q_i(q,p,\lambda), \\ p_i(\lambda) &= p_i(q,p,\lambda),\end{aligned} \tag{2.24}$$

e poniamo che per $\lambda = 0$ la trasformazione si riduca all'identità: $q_i(0) = q_i$, $p_i(0) = p_i$. La versione infinitesima di questa trasformazione si ottiene come approssimazione al primo ordine nell'intorno dell'identità, cioè per valori molto piccoli di λ,

$$\begin{aligned}q_i(\lambda) &\approx q_i + \lambda \left.\frac{\partial q_i(q,p,\lambda)}{\partial \lambda}\right|_0 = q_i + \lambda f_i(q,p), \\ p_i(\lambda) &\approx p_i + \lambda \left.\frac{\partial p_i(q,p,\lambda)}{\partial \lambda}\right|_0 = p_i + \lambda g_i(q,p),\end{aligned} \tag{2.25}$$

e come sappiamo, la trasformazione è canonica se esiste una funzione $G(q,p)$ tale che $f_i = \partial G/\partial p_i$ e $g_i = -\partial G/\partial q_i$. Abbiamo discusso l'interpretazione attiva della trasformazione, nella quale lo spostamento infinitesimo lungo la curva $(q(\lambda), p(\lambda))$ è proporzionale a $(\partial G/\partial p, -\partial G/\partial q)^T$. Come sappiamo, la variazione delle coordinate in uno spostamento infinitesimo lungo la curva è data da $\delta q_i = \{q_i, G\}d\lambda = (\partial G/\partial p_i)d\lambda$ e $\delta p_i = \{p_i, G\}d\lambda = -(\partial G/\partial q_i)d\lambda$. In altre parole, per ogni punto (q,p) dello spazio delle fasi passa un'unica traiettoria generata dalla trasformazione continua, soluzione del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} \dfrac{dq_i}{d\lambda} = \dfrac{\partial G}{\partial p_i}, \\ \dfrac{dp_i}{d\lambda} = -\dfrac{\partial G}{\partial q_i}, \\ q_i(0) = q_i \ , \quad p_i(0) = p_i. \end{cases} \tag{2.26}$$

Osserviamo come queste non siano altro che le equazioni di Hamilton con hamiltoniana G e il ruolo del tempo svolto dal parametro continuo λ. Le linee di flusso generate da una CCT sono matematicamente equivalenti all'evoluzione di sistemi dinamici. Tutte le trasformazioni canoniche continue $(q(\lambda), p(\lambda))$ sono esempi di soluzioni di sistemi dinamici.

2.2 Variazioni dell'hamiltoniana

2.2.1 Trasformazioni canoniche indipendenti dal tempo

Data una trasformazione canonica

$$(q,p) \to (Q(q,p), P(q,p)), \tag{2.27}$$

per definizione, la nuova hamiltoniana è la trasformata puntuale della vecchia

$$K(Q,P,t) = H(q(Q,P), p(Q,P), t). \tag{2.28}$$

Il cambio di variabili canoniche determina un cambiamento di dipendenza funzionale $H \to K$, ma il valore delle due funzioni in punti corrispondenti è lo stesso. In altre parole, un dato punto X dello spazio delle fasi può essere rappresentato in diversi sistemi di coordinate $X \to (q,p)$, $X \to (Q,P)$, ma il valore delle funzioni dipende solo da X: $K(X) = H(X)$. K e H sono due rappresentazioni diverse della stessa applicazione dello spazio delle fasi a valori reali. Questo non sarà più vero per una trasformazione canonica dipendente dal tempo.
Consideriamo adesso trasformazioni canoniche che ammettono un'interpretazione in senso attivo: è necessario che la trasformazione agisca all'interno dello stesso spazio. Esempi sono rotazioni, traslazioni, scaling dello spazio delle fasi. Le simmetrie di un sistema fisico saranno trasformazioni di questo tipo. Al contrario, una trasformazione da coordinate cartesiane a polari non può essere interpretata in senso attivo.

Definiamo tre tipi di variazione a seguito di una trasformazione canonica di questo tipo

$$\begin{aligned} &\text{variazione in forma} \quad \delta_0 H := K(q,p,t) - H(q,p,t), \\ &\text{variazione attiva} \quad \delta_A H := H(Q,P,t) - H(q,p,t), \\ &\text{variazione passiva} \quad \delta_P H := K(Q,P,t) - H(q,p,t), \end{aligned} \tag{2.29}$$

dove (Q,P) è il punto trasformato di (q,p). Nella variazione in forma, le due funzioni sono valutate nel medesimo generico argomento (q,p,t), per cui la differenza può essere dovuta solo alla diversa dipendenza funzionale di K e di H dai rispettivi argomenti. Da cui il nome di variazione *in forma*. Nella variazione passiva, interpretiamo la trasformazione canonica come un cambio di variabili: le variabili (q,p) e $(Q(q,p),P(q,p))$ sono diverse coordinate che individuano lo stesso punto geometrico X dello spazio delle fasi. Come abbiamo visto, nelle nuove coordinate la hamiltoniana non è più H, ma K. Per le trasformazioni indipendenti dal tempo, che stiamo considerando qui, K è data dalla (2.28), perciò la variazione passiva è identicamente nulla per questo tipo di trasformazioni. Nella variazione attiva, pensiamo alla trasformazione non come a un cambio di variabili, ma come ad una mappa che muove il punto geometrico di coordinate (q,p) nel punto geometrico di coordinate (Q,P). Ci muoviamo rimanendo all'interno dello stesso spazio, i punti vengono mappati in altri punti dello stesso spazio, muovendosi lungo il flusso generato dalla trasformazione. Quindi possiamo calcolare l'hamiltoniana H nel punto iniziale e nel punto finale, e vedere quanto è cambiata: questa differenza è $\delta_A H$.
Cerchiamo ora una relazione tra i tre tipi di variazione.

$$\begin{aligned} \delta_P H &= K(Q,P,t) - H(q,p,t) = \\ &= [K(Q,P,t) - H(Q,P,t)] + [H(Q,P,t) - H(q,p,t)] = \\ &= \delta_0 H + \delta_A H. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Assumiamo in particolare una trasformazione infinitesima, indipendente dal tempo, di generatrice $G(q,p)$ e parametro infinitesimo λ,

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i(\lambda) = q_i + \lambda \frac{\partial G}{\partial p_i}(q,p), \\ P_i &= p_i(\lambda) = p_i - \lambda \frac{\partial G}{\partial q_i}(q,p). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Abbiamo già discusso la variazione di funzioni di fase arbitrarie sotto una ICT attiva. La variazione attiva dell'hamiltoniana è infatti

$$\begin{aligned} &\delta_A H = H(q(\lambda),p(\lambda),t) - H(q,p,t) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_k}(q_k(\lambda) - q_k) + \frac{\partial H}{\partial p_k}(p_k(\lambda) - p_k) \right) + O(\lambda^2) = \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial q_k} \right) + O(\lambda^2) = \lambda\{H,G\} + O(\lambda^2). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Ricordando che, per una trasformazione indipendente dal tempo, la variazione passiva è identicamente nulla, otteniamo

$$\begin{aligned} &\delta_A H = \lambda\{H, G\} + O(\lambda^2), \\ &\delta_P H = 0 = \delta_0 H + \delta_A H + O(\lambda^2) \longrightarrow \delta_0 H = -\delta_A H + O(\lambda^2). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Le simmetrie sono le trasformazioni canoniche che lasciano invariante l'hamiltoniana. La (2.33) illustra che, al primo ordine, l'annullamento della variazione in forma equivale all'annullamento della variazione attiva, nel caso indipendente dal tempo. Pertanto, in presenza di una simmetria, deve annullarsi la parentesi di Poisson $\{H, G\} = 0$, il che comporta che la generatrice G, indipendente dal tempo per ipotesi, è una costante del moto: $\frac{dG}{dt} = \{G, H\} = 0$.

2.2.2 Trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo

Quando la trasformazione canonica dipende dal tempo, la hamiltoniana nelle nuove variabili è

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \lambda \frac{\partial G}{\partial t}, \tag{2.34}$$

dove G è la generatrice, e la variazione passiva risulterà quindi

$$\delta_P H := K(Q, P, t) - H(q, p, t) = \lambda \frac{\partial G}{\partial t}. \tag{2.35}$$

Perciò, a meno di termini di ordine λ^2,

$$\delta_P H - \delta_A H = \delta_0 H = \lambda \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \{G, H\} \right) = \lambda \frac{dG}{dt}. \tag{2.36}$$

Ciò mostra che la quantità che deve annullarsi per avere una costante del moto non è la variazione passiva o quella attiva, ma la variazione in forma, che è uguale alla differenza delle due. È questa la variazione che si annulla sempre in presenza di simmetria, sia nel caso dipendente che indipendente dal tempo. Ovviamente, la variazione dipende dalla particolare trasformazione, e per sottolineare la dipendenza dalla generatrice G possiamo indicarla $\delta_0^{(G)} H$.

$$\text{Teorema di Noether} \quad \delta_0^{(G)} H = 0 \longrightarrow \frac{dG}{dt} = 0. \tag{2.37}$$

Le (2.36) e (2.37) valgono anche nel caso tempo-indipendente con $\partial G/\partial t = 0$.

2.3 Serie di Lie e trasformazioni canoniche finite

Secondo l'interpretazione attiva, una trasformazione canonica dipendente da un parametro continuo sposta il punto di fase lungo una curva continua nello spazio delle fasi, a partire da un dato punto iniziale. Una TC finita si può vedere come successione di

ICT, ciascuna corrispondente ad uno spostamento infinitesimo lungo questa curva. La TC finita può quindi essere ricavata, almeno formalmente, integrando l'espressione dello spostamento infinitesimo (2.14) [3].
Sia $u(q, p)$ una variabile dinamica e consideriamo una ICT di generatrice $X(q, p)$ e parametro continuo α. Lungo questa trasformazione lo stato del sistema varia con continuità in funzione del parametro α e in funzione del punto iniziale: $(q(\alpha), p(\alpha); q_0, p_0)$. Quindi ogni punto evolve lungo una curva nello spazio delle fasi, e le curve non si intersecano, perché l'equazione (2.14) è del primo ordine e la condizione iniziale determina univocamente l'evoluzione. Corrispondentemente, se valutiamo le funzioni di stato del sistema lungo le orbite, esse diventano funzioni di α: $u(\alpha) = u(q(\alpha), p(\alpha))$. Se la funzione u non ha dipendenza esplicita da α, la variazione al primo ordine è data da (2.14), $\delta u = \{u, X\} d\alpha$, e quindi la derivata prima di $u(\alpha)$ è

$$\frac{du}{d\alpha} = \{u, X\}. \tag{2.38}$$

La trasformazione finita si ottiene integrando questa equazione differenziale ricavando $u(\alpha)$. Assumiamo che sia possibile sviluppare $u(\alpha)$ in serie di Taylor attorno al valore iniziale (in $\alpha = 0$)

$$u(\alpha) = u(0) + \alpha \frac{du}{d\alpha}\bigg|_0 + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{d^2u}{d\alpha^2}\bigg|_0 + ... \tag{2.39}$$

Per calcolare le derivate successive, applichiamo ripetutamente la formula (2.38) prendendo come funzione u la derivata precedente (ricordando che per ipotesi u non dipende esplicitamente da α, per cui non c'è la derivata parziale rispetto ad α).

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} = \frac{d}{d\alpha}\{u, X\} = \{\{u, X\}, X\}. \tag{2.40}$$

Introducendo l'*operatore di Lie* $D_X \equiv \{\ , X\}$,

$$\frac{du}{d\alpha} = D_X u \ , \quad \frac{d^2u}{d\alpha^2} = D_X(D_X u) \equiv D_X^2 u \tag{2.41}$$

e, ragionando per induzione, si ricava

$$\frac{d^n u}{d\alpha^n} = D_X^n u. \tag{2.42}$$

Con questo nuovo operatore, la serie si riscrive come

$$u(\alpha) = u(0) + \alpha (D_X u)\Big|_0 + \frac{\alpha^2}{2!}(D_X^2 u)\Big|_0 + ... + \frac{\alpha^n}{n!}(D_X^n u)\Big|_0 + ... \tag{2.43}$$

che prende il nome di *serie di Lie* della funzione u rispetto alla generatrice X. Riconosciamo in questa espressione lo sviluppo formale dell'esponenziale, perciò possiamo esprimerla simbolicamente in forma compatta come

$$u(\alpha) = \exp(\alpha D_X)\, u(0). \tag{2.44}$$

L'operatore D_X gioca il ruolo di derivata lungo il flusso hamiltoniano, ed $\exp(\alpha D_X)$ svolge il ruolo di operatore di evoluzione per il flusso generato dalla trasformazione canonica di generatrice $X(q,p)$ e parametro α, ossia evolve il valore $u(\alpha = 0)$, definito nel punto iniziale $(q(0), p(0))$, lungo la linea di flusso della trasformazione passante per $(q(0), p(0))$, restituendo l'effetto $u(\alpha)$ della trasformazione finita.
Dimostriamo di seguito alcune elementari proprietà algebriche dell'operatore di Lie, che seguono subito dalle proprietà delle parentesi di Poisson.

$$\begin{aligned} &\text{linearità} \quad D_X(\alpha F + \beta G) = \alpha D_X F + \beta D_X G, \\ &\qquad\qquad\quad D_{aX+bY}(F) = a D_X F + b D_Y F, \\ &\text{antisimmetria} \quad D_X F = -D_F X, \\ &\text{prodotto} \quad D_X(FG) = G(D_X F) + F(D_X G), \\ &\text{commutatore} \quad [D_X, D_Y] = D_{\{Y,X\}}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Dimostrazione. Sfruttando la linearità delle parentesi di Poisson, che viene dalla linearità delle derivate, $D_X(\alpha F + \beta G) = \{\alpha F + \beta G, X\} = \alpha\{F, X\} + \beta\{G, X\} = \alpha D_X F + \beta D_X G$. Analogamente, $D_{aX+bY}(F) = \{F, aX + bY\} = a\{F, X\} + b\{F, Y\} = a D_X F + b D_Y F$. Si noti che α, β, a, b possono essere qualsiasi funzioni che non dipendano da (q,p).
Supponendo che anche $F(q,p,t)$ si possa interpretare come generatrice di una trasformazione canonica, le associamo l'operatore $D_F \equiv \{\ , F\}$ e dall'antisimmetria delle parentesi di Poisson segue $D_X F = \{F, X\} = -\{X, F\} = -D_F X$.
Impiegando la proprietà di Leibniz delle parentesi di Poisson,
$D_X(FG) = \{FG, X\} = F\{G, X\} + \{F, X\}G = F(D_X G) + (D_X F)G$.
Per l'ultima proprietà, valutiamo il commutatore su una generica funzione argomento F, ed applichiamo l'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson,

$$\begin{aligned} D_X(D_Y F) - D_Y(D_X F) &= \{\{F, Y\}, X\} - \{\{F, X\}, Y\} = \\ &= \{F, \{Y, X\}\} = D_{\{Y,X\}} F. \end{aligned} \tag{2.46}$$

□

La Figura 2.1 mostra un'interpretazione geometrica dell'operatore di Lie. Ragionando in due variabili per semplicità, se partiamo dal generico punto (q,p) e applichiamo la TC generata da $X(q,p)$ per una quantità infinitesima $d\alpha$, adottando ancora una volta l'interpretazione attiva, ci ritroveremo nel punto $(q(\alpha + d\alpha), p(\alpha + d\alpha)) \approx (q + \delta q, p + \delta p)$, e lo "spostamento infinitesimo" $(q,p) \to (q + \delta q, p + \delta p)$ rappresenta la direzione tangente alla traiettoria nello spazio delle fasi generata da $X(q,p)$, nel punto (q,p), ossia la tangente alla curva di flusso $(q(\alpha), p(\alpha))$. Viceversa, possiamo definire la linea di flusso della TC come la curva tangente al "campo vettoriale" $(q,p) \to (q + \delta q, p + \delta p)$ nel generico punto (q,p). La direzione del vettore tangente nel punto (q,p) è quindi

$$\frac{1}{d\alpha}\begin{pmatrix} \delta q \\ \delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_X q \\ D_X p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial X/\partial p \\ -\partial X/\partial q \end{pmatrix}. \tag{2.47}$$

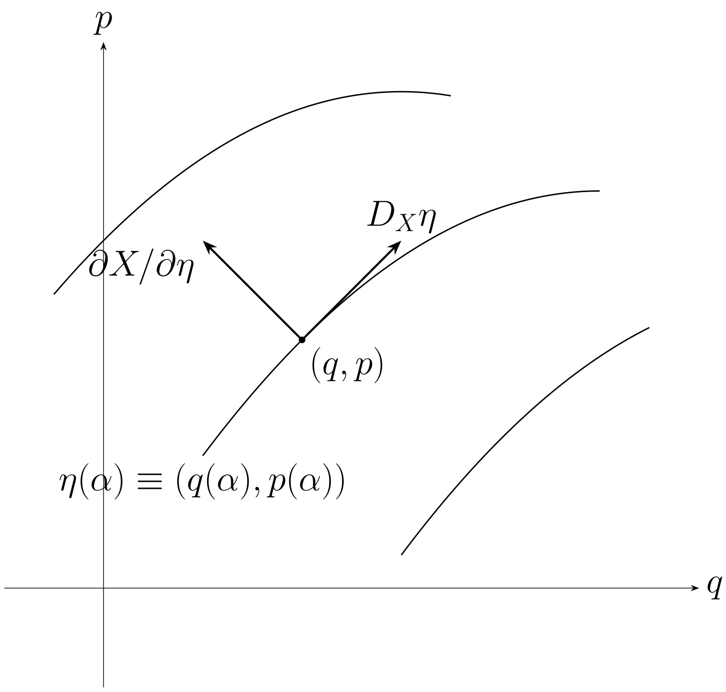

Figura 2.1: Rappresentazione schematica di alcune orbite di una trasformazione canonica nello spazio delle fasi, con disegnati vettore tangente e normale in un punto.

La linea di flusso è quindi normale al gradiente della generatrice $\partial X/\partial\eta \equiv (\partial X/\partial q, \partial X/\partial p)^T$, vale a dire che la generatrice stessa è costante lungo la trasformazione da essa generata, come del resto segue immediatamente dal fatto che $\{X, X\} = 0$. In altri termini, le linee di flusso sono curve di livello di X. L'operatore D_X può essere visto come campo vettoriale, ossia un operatore differenziale del primo ordine che agisce sulle funzioni di fase,

$$D_X \equiv \{\ , X\} = \frac{\partial X}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial X}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}, \tag{2.48}$$

e le sue componenti nella "base" locale $\{\partial/\partial q, \partial/\partial p\}$ rappresentano proprio la direzione della tangente (2.47) alla linea di flusso in quel punto. Questo operatore prende il nome di *campo vettoriale hamiltoniano* X_H generato da X, l'operatore che misura il tasso di variazione delle funzioni di fase lungo il flusso generato da X: $X_H(F) \equiv D_X(F) = \{F, X\}$.

$$X_H(\eta) \equiv D_X(\eta) = \{\eta, X\} = J\frac{\partial X}{\partial \eta} = \begin{pmatrix} \partial X/\partial p \\ -\partial X/\partial q \end{pmatrix}. \tag{2.49}$$

2.3.1 Parentesi di Poisson e commutatore di campi hamiltoniani

Date due trasformazioni canoniche infinitesime: T_1 di generatrice X e T_2 di generatrice Y. Dimostriamo che il loro commutatore è ancora una trasformazione canonica e la sua

generatrice è la parentesi di Poisson delle due generatrici.
Consideriamo un punto generico A di coordinate $(q,p)^T$ dello spazio delle fasi. Se applichiamo prima la trasformazione T_1 per una quantità infinitesima ϵ_1, secondo l'interpretazione attiva il punto A viene portato in un nuovo punto A_1 dello spazio delle fasi, molto vicino ad A. Se ora applichiamo T_2 per una quantità infinitesima ϵ_2, il punto A_1 verrà portato in un altro punto A_2. Si può fare riferimento alla Figura 2.2. Come abbiamo discusso, i campi vettoriali X_H, Y_H ci permettono di calcolare la variazione di qualunque funzione di fase lungo questo percorso. Se invece, partendo ancora da A, applichiamo le stesse trasformazioni nell'ordine opposto, passeremo da un punto B_1 e arriveremo in un punto B_2, che in generale sarà diverso da A_2. Se sono diversi, significa che le trasformazioni non commutano: l'ordine in cui vengono applicate influisce sul risultato.

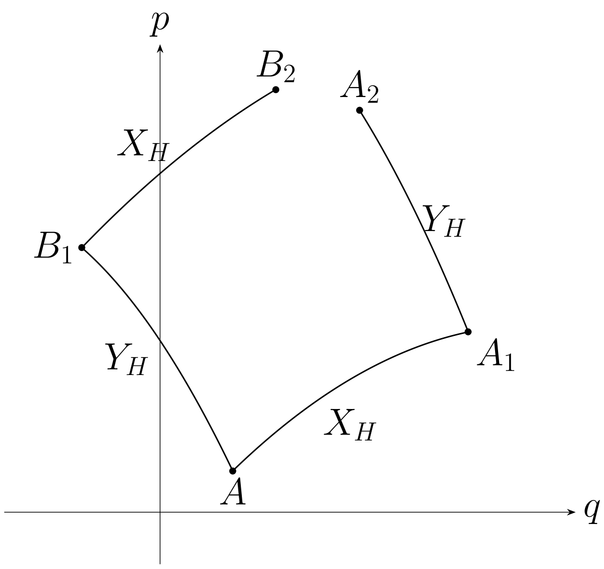

Figura 2.2: Trasformazioni non commutanti.

Al primo ordine nei parametri infinitesimi,

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{T_1} A_1 = A + \epsilon_1 X_H(A) \xrightarrow{T_2} A_2 = A_1 + \epsilon_2 Y_H(A_1), \\ A &\xrightarrow{T_2} B_1 = A + \epsilon_2 Y_H(A) \xrightarrow{T_1} B_2 = B_1 + \epsilon_1 X_H(B_1). \end{aligned} \tag{2.50}$$

Ora approssimiamo gli spostamenti come

$$\begin{aligned} Y_H(A_1) &= Y_H(A) + \epsilon_1 X_H(Y_H(A)) + O(\epsilon_1^2), \\ X_H(B_1) &= X_H(A) + \epsilon_2 Y_H(X_H(A)) + O(\epsilon_2^2). \end{aligned} \tag{2.51}$$

Per esempio, la prima di queste equazioni significa che il campo Y_H nel punto A_1 è uguale al campo Y_H nel punto A più una correzione dovuta al trasporto del campo Y_H da A ad

A_1 lungo la trasformazione T_1 generata da X_H.
Infatti, ricordando che $Y_H(A_1) = \{\eta, Y\}\Big|_{A_1} = (\partial Y/\partial p, -\partial Y/\partial q)^T\Big|_{A_1}$, dove $\eta \equiv (q,p)^T$ sono le coordinate dello spazio delle fasi, concentriamoci su una singola componente. Utilizziamo la formula già dimostrata $\delta u = \epsilon\{u, X\}$, con $u = \partial Y/\partial p_i$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial p_i}\Big|_{A_1} &= \frac{\partial Y}{\partial p_i}\Big|_A + \epsilon_1\{\frac{\partial Y}{\partial p_i}, X\}\Big|_A + O(\epsilon_1^2) = \\ &= \frac{\partial Y}{\partial p_i}\Big|_A + \epsilon_1 X_H\left(\frac{\partial Y}{\partial p_i}\right)\Big|_A + O(\epsilon_1^2).\end{aligned} \tag{2.52}$$

Analogamente avremo

$$\frac{\partial Y}{\partial q_i}\Big|_{A_1} = \frac{\partial Y}{\partial q_i}\Big|_A + \epsilon_1 X_H\left(\frac{\partial Y}{\partial q_i}\right)\Big|_A + O(\epsilon_1^2). \tag{2.53}$$

Mettendole insieme,

$$\begin{aligned}Y_H(A_1) = \begin{pmatrix}\partial Y/\partial p\\ -\partial Y/\partial q\end{pmatrix}\Bigg|_{A_1} &= \begin{pmatrix}\partial Y/\partial p\\ -\partial Y/\partial q\end{pmatrix}\Bigg|_A + \epsilon_1 X_H\begin{pmatrix}\partial Y/\partial p\\ -\partial Y/\partial q\end{pmatrix}\Bigg|_A + O(\epsilon_1^2) = \\ = Y_H(A) + \epsilon_1 X_H(Y_H(A)) + O(\epsilon_1^2),\end{aligned} \tag{2.54}$$

che è la prima delle (2.51). La seconda si deriva in modo del tutto analogo. Possiamo scrivere allora i punti finali

$$\begin{aligned}A_2 &= A + \epsilon_1 X_H(A) + \epsilon_2 Y_H(A) + \epsilon_1\epsilon_2 X_H(Y_H(A)) + ...\\ B_2 &= A + \epsilon_2 Y_H(A) + \epsilon_1 X_H(A) + \epsilon_2\epsilon_1 Y_H(X_H(A)) + ...\end{aligned} \tag{2.55}$$

La differenza tra i punti finali dei due percorsi misura quanto le trasformazioni falliscono nel commutare

$$\begin{aligned}A_2 - B_2 &= \epsilon_1\epsilon_2(X_H(Y_H(A)) - Y_H(X_H(A))) + ... = \\ &= \epsilon_1\epsilon_2[X_H, Y_H]\Big|_A + ...\end{aligned} \tag{2.56}$$

Qui ci viene in aiuto la proprietà del commutatore (2.45) dimostrata in precedenza per l'operatore di Lie, $[D_X, D_Y] = D_{\{Y,X\}}$ (ricordiamo che $X_H \equiv D_X$), grazie alla quale troviamo

$$A_2 - B_2 = \epsilon_1\epsilon_2\{Y, X\}_H(A) = \epsilon_1\epsilon_2\{\eta, \{Y, X\}\}\Big|_A. \tag{2.57}$$

Poiché B_2 differisce da A per quantità infinitesime, se sostituiamo B_2 al posto di A nella (2.57) non perdiamo precisione perché la differenza, moltiplicata per $\epsilon_1\epsilon_2$, è trascurabile. Perciò $A_2 - B_2 = \epsilon_1\epsilon_2\{Y, X\}_H(B_2)$. Questo risultato significa che la trasformazione che manda $B_2 \to A_2$, ossia il commutatore delle due trasformazioni, è a sua volta una trasformazione canonica infinitesima, di generatrice $\{Y, X\}$ e parametro uguale al prodotto

dei parametri. Vediamo quindi che la differenza è di ordine superiore alle singole trasformazioni: le trasformazioni infinitesime commutano all'ordine lineare in ϵ_1 ed ϵ_2, ma non all'ordine $\epsilon_1\epsilon_2$.
Un esempio fisico e geometrico di ciò è dato dalle relazioni di commutazione del momento angolare. In meccanica, il momento angolare è il generatore delle rotazioni nello spazio delle fasi, e le componenti cartesiane soddisfano le parentesi di Poisson $\{L_x, L_y\} = L_z$ e permutazioni cicliche. Queste a loro volta riflettono la struttura geometrica del gruppo delle rotazioni $SO(3)$, codificata nell'algebra di Lie dei generatori, $[J_x, J_y] = J_z$ e sue permutazioni cicliche. Da un punto di vista geometrico, se effettuiamo una rotazione infinitesima di angolo $\delta\theta_x$ attorno all'asse x, seguita da una rotazione infinitesima di angolo $\delta\theta_y$ attorno all'asse y, e poi eseguiamo queste trasformazioni in ordine inverso, la differenza al secondo ordine è una rotazione attorno all'asse z, di angolo $\delta\theta_x\delta\theta_y$.
La (2.57) può essere generalizzata a funzioni di fase arbitrarie

$$\delta f = f(A_2) - f(B_2) = \epsilon_1\epsilon_2\{f, \{Y, X\}\}. \tag{2.58}$$

2.3.2 Osservabile dipendente dal parametro della trasformazione

Se la variabile dinamica $u(q, p, \alpha)$ ha una dipendenza esplicita dal paramtro della trasformazione continua, alle formule precedenti occorre aggiungere un contributo dovuto alla derivata parziale $\partial/\partial\alpha$. Assumiamo ancora che la generatrice $X(q, p, t)$ non dipenda da α. Lungo le orbite generate da X sarà $u(\alpha) = u(q(\alpha), p(\alpha), \alpha)$ e derivando questa espressione,

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\alpha} &= \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{dq_i}{d\alpha} + \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{dp_i}{d\alpha}\right) + \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \\ &= \{u, X\} + \frac{\partial u}{\partial \alpha} = D_X u + \frac{\partial u}{\partial \alpha} = L_{X,\alpha} u,\end{aligned} \tag{2.59}$$

dove si è introdotto l'operatore $L_{X,\alpha} \equiv D_X + \frac{\partial}{\partial\alpha} = \{\ , X\} + \frac{\partial}{\partial\alpha}$. Notiamo che, poiché X non dipende da α, D_X e $\partial/\partial\alpha$ commutano,

$$\begin{aligned}D_X\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right) &= \{\frac{\partial f}{\partial \alpha}, X\} = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial X}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial X}{\partial q_i}\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial X}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial X}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\{f, X\} = \frac{\partial}{\partial\alpha}D_X f,\end{aligned} \tag{2.60}$$

la quale vale per ogni argomento $f(q, p, \alpha)$. In altri termini, possiamo scambiare la derivata con la parentesi: $\{\partial f/\partial\alpha, X\} = \partial/\partial\alpha\{f, X\}$.
Assumendo di poter sviluppare $u(\alpha)$ in serie di potenze attorno al punto iniziale, come si

è fatto in precedenza, calcoliamo le derivate successive.

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2u}{d\alpha^2} &= \{\frac{du}{d\alpha}, X\} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{du}{d\alpha} = \\
&= \{\{u, X\} + \frac{\partial u}{\partial\alpha}, X\} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\{u, X\} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right) = \\
&= D_X^2 u + 2D_X\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} = \\
&= \left(D_X + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^2 u = L_{X,\alpha}^2 u,
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

dove abbiamo usato la commutatività (2.60).
Per induzione si dimostra che

$$
\frac{d^n u}{d\alpha^n} = \left(D_X + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n u = L_{X,\alpha}^n u. \tag{2.62}
$$

Pertanto, la serie di Lie è uguale formalmente all'esponenziale dell'operatore $L_{X,\alpha}$,

$$
\begin{aligned}
u(\alpha) &= u_0 + \alpha L_{X,\alpha}u\Big|_0 + \frac{\alpha^2}{2!}L_{X,\alpha}^2 u\Big|_0 + ... + \frac{\alpha^n}{n!}L_{X,\alpha}^n u\Big|_0 + ... = \\
&= \exp(L_{X,\alpha})u_0 = \exp\left(D_X + \partial/\partial\alpha\right)u_0.
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

Mostriamo di seguito alcune semplici proprietà algebriche dell'operatore $L_{X,\alpha}$.

$$
\begin{aligned}
&\text{linearità}\quad L_{X,\alpha}(aF + bG) = aL_{X,\alpha}F + bL_{X,\alpha}G, \\
&\text{difetto di antisimmetria}\quad L_{X,\alpha}F + L_{F,\alpha}X = \partial_\alpha(F + X), \\
&\text{commutatore}\quad [L_{X,\alpha}\ ,\ L_{Y,\beta}] = [D_X, D_Y] + D_{\partial_\alpha Y} - D_{\partial_\beta X} = \\
&\qquad\qquad = D_{\{Y,X\}} + D_{\partial_\alpha Y} - D_{\partial_\beta X} = D_{\{Y,X\}+\partial_\alpha Y - \partial_\beta X},
\end{aligned}
\tag{2.64}
$$

dove D_X è l'operatore di Lie e $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial\alpha$. Nelle (2.64) si è lasciata aperta la possibilità che le funzioni X, Y, F, G dipendano esplicitamente dai parametri α, β. Si noti però che se la generatrice di una trasformazione continua dipende dal parametro della trasformazione stessa, allora l'operatore di evoluzione non è il semplice esponenziale che compare nella (2.63), ma ha una forma differente, che sarà discussa in una sezione successiva. Se X e Y non dipendono né da α né da β, il commutatore si riduce a

$$
[L_{X,\alpha}\ ,\ L_{Y,\beta}] = [D_X, D_Y] = D_{\{Y,X\}}. \tag{2.65}
$$

Dimostrazione. La linearità segue da quella degli operatori D_X e ∂_α:

$$
\begin{aligned}
L_{X,\alpha}(aF + bG) &= D_X(aF + bG) + \partial_\alpha(aF + bG) \\
&= a(D_X + \partial_\alpha)F + b(D_X + \partial_\alpha)G \\
&= aL_{X,\alpha}F + bL_{X,\alpha}G,
\end{aligned}
$$

dove a, b possono essere qualsiasi funzioni che non dipendando da (q, p, α).
Assumendo che $F(q, p, t)$ sia a sua volta una generatrice di trasformazione canonica di parametro α, possiamo associarle l'operatore $L_{F,\alpha}$. Avremo allora

$$\begin{aligned} L_{X,\alpha}F &= \{F, X\} + \partial_\alpha F \\ &= -\{X, F\} - \partial_\alpha X + \partial_\alpha(X + F) \\ &= -L_{F,\alpha}X + \partial_\alpha(X + F). \end{aligned}$$

Per calcolare il commutatore, applichiamolo su un generico argomento $f(q, p, \alpha)$. Usiamo l'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson.

$$\begin{aligned} [L_{X,\alpha}, L_{Y,\beta}]f = L_{X,\alpha}(\{f, Y\} + \partial_\beta f) - L_{Y,\beta}(\{f, X\} + \partial_\alpha f) = \\ \{\{f, Y\}, X\} + \partial_\alpha\{f, Y\} + \{\partial_\beta f, X\} + \partial^2_{\alpha\beta} f + \\ -\{\{f, X\}, Y\} - \partial_\beta\{f, X\} - \{\partial_\alpha f, Y\} - \partial^2_{\beta\alpha} f = \\ = \{f, \{Y, X\}\} + \{f, \partial_\alpha Y\} - \{f, \partial_\beta X\}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Infine, l'ultima uguaglianza segue ricordando la linearità di D_X rispetto a X, per cui $D_{\{Y,X\}} + D_{\partial\alpha Y} - D_{\partial_\beta X} = D_{\{Y,X\}+\partial_\alpha Y - \partial_\beta X}$. □

2.3.3 Evoluzione temporale con hamiltoniana indipendente dal tempo

Prendiamo come generatrice l'hamiltoniana del sistema $X = H$, e supponiamo che sia indipendente dal tempo. La ICT da essa generata è l'evoluzione temporale infinitesima dal tempo t a $t + dt$. Allora la serie di Lie corrispondente fornisce l'evoluzione temporale finita dal tempo iniziale t_0 (poniamo uguale a zero) al tempo $t_0 + t$. L'equazione del moto per una generica variabile dinamica $u(q, p)$ indipendente dal tempo è la (2.38), opportunamente riscritta,

$$\frac{du}{dt} = \{u, H\}. \tag{2.67}$$

Ragionando come nel precedente paragrafo, esprimiamo la sua soluzione come

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + t\{u, H\}|_0 + \frac{t^2}{2!}\{\{u, H\}, H\}|_0 + ... = \\ &= \exp(tD_H)\, u_0, \end{aligned} \tag{2.68}$$

dove $\exp(tD_H)$ gioca il ruolo di operatore di evoluzione temporale della meccanica classica. Se prendiamo come funzioni u le variabili canoniche,

$$q(t) = \exp(tD_H)\, q_0\ , \quad p(t) = \exp(tD_H)\, p_0, \tag{2.69}$$

forniscono il moto del sistema nel tempo. L'operatore di evoluzione commuta con le funzioni di fase,

$$\exp(tD_H)\, u(q_0, p_0) = u(q(t), p(t)) = u(\exp(tD_H)\, q_0, \exp(tD_H)\, p_0), \tag{2.70}$$

e l'insieme degli operatori $\{\exp(tD_H)\}$ al variare di t forma un gruppo abeliano. Infatti, è chiuso rispetto alla composizione,

$$\exp(tD_H)\exp(sD_H) = \exp((t+s)D_H)\,, \tag{2.71}$$

dato che l'operatore D_H è indipendente dal tempo perché H non dipende dal tempo per ipotesi, e ovviamente D_H commuta con se stesso. Il prodotto (2.71) è associativo e commutativo. L'identità corrisponde a $t = 0$, e ciascun operatore $\exp(tD_H)$ ha un inverso, $\exp(-tD_H)$.

2.3.4 Commutatore dell'evoluzione temporale

Esempio 2.1. *La seguente hamiltoniana descrive una particella in una dimensione sottoposta ad una forza esterna F costante*

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} - qF. \tag{2.72}$$

Consideriamo due hamiltoniane siffatte con valori di F distinti, diciamo $F_1 < F_2$, $H_1(q,p) = \frac{p^2}{2m} - qF_1$, $H_2(q,p) = \frac{p^2}{2m} - qF_2$. Queste hamiltoniane non commutano,

$$\{H_1, H_2\} = \frac{\partial H_1}{\partial q}\frac{\partial H_2}{\partial p} - \frac{\partial H_2}{\partial q}\frac{\partial H_1}{\partial p} = \frac{p}{m}(F_2 - F_1). \tag{2.73}$$

Assumiamo che al tempo $t = 0$ la particella sia ferma nell'origine, $(q(0), p(0)) = (0, 0)$. Supponiamo di far evolvere il sistema per un tempo t_0 lungo il flusso generato da H_1 e in seguito per un altro tempo t_0 lungo il flusso generato da H_2. Ora invece, partendo sempre dall'origine, eseguiamo le stesse operazioni in ordine opposto. Il risultato è diverso nei due casi, ossia lo stato del sistema al tempo $t = 2t_0$ è diverso. La (2.73) ci dice come e quanto le evoluzioni differiscono. Ricordando che l'impulso è il generatore delle traslazioni lungo la sua coordinata coniugata, la (2.73) significa che la differenza tra le due evoluzioni consiste in una traslazione della posizione della particella. Applichiamo infatti la (2.57) alle coordinate q, p, e supponendo che le trasformazioni agiscano per un tempo infinitesimo $t_0 = \delta t$,

$$\begin{aligned} \delta q &= \delta t^2\{q, \{H_1, H_2\}\} = \delta t^2(F_2 - F_1)/m, \\ \delta p &= \delta t^2\{p, \{H_1, H_2\}\} = 0, \end{aligned} \tag{2.74}$$

che mostrano come lo stato finale sia diverso, in quanto la particella si troverà in una posizione diversa. L'impulso invece non cambia, il che è coerente con l'osservazione precedente che la differenza è una pura traslazione spaziale. Fisicamente, la particella che è stata sottoposta per prima alla forza maggiore, ha passato più tempo con una velocità più alta, quindi alla fine dell'intervallo di tempo $2t_0$ ha percorso più distanza. La (2.73) mostra che le evoluzioni non commutano anche quando una (e una sola) delle forze sia identicamente nulla. Anche in questo caso la particella accelerata per prima passa più

tempo con una velocità più alta.
Quanto discusso è confermato dal calcolo esplicito delle soluzioni

$$\begin{aligned} &\textit{prima } H_1, \textit{ poi } H_2, \qquad && q_1(t) = \frac{1}{2}f_1t_0^2 + f_1t_0(t-t_0) + \frac{1}{2}f_2(t-t_0)^2, \\ & && p_1(t) = f_1t_0 + f_2(t-t_0), \\ &\textit{prima } H_2, \textit{ poi } H_1, \qquad && q_2(t) = \frac{1}{2}f_2t_0^2 + f_2t_0(t-t_0) + \frac{1}{2}f_1(t-t_0)^2, \\ & && p_2(t) = f_2t_0 + f_1(t-t_0), \end{aligned} \tag{2.75}$$

dove $f_1 \equiv F_1/m, f_2 \equiv F_2/m$. *La differenza calcolata al tempo* $t = 2t_0$ *risulta*

$$\begin{aligned} &q_2(2t_0) - q_1(2t_0) = (f_2 - f_1)t_0^2, \\ &p_2(2t_0) - p_1(2t_0) = 0, \end{aligned} \tag{2.76}$$

che è la (2.74) *con* $t_0 = \delta t$.

Nell'esempio precedente, invece di due hamiltoniane con forze esterne diverse, avremmo potuto prendere un'hamiltoniana con un potenziale dipendente dal tempo, valutata in due istanti diversi, $H(t_1),\ H(t_2)$. In generale, $H(t)$ non commuta con sé stessa a tempi diversi.
Sia $f(q,p,t)$ una arbitraria funzione di fase. Esplicitamente, l'operatore $L_{H(t),t}$ al tempo $t = t_1$ agisce su f come

$$L_{H(t_1),t}(f(q,p,t)) = \{f(q,p,t), H(q,p,t_1)\} + \frac{\partial f(q,p,t)}{\partial t}, \tag{2.77}$$

dove l'hamiltoniana $H(q,p,t_1)$ è calcolata al tempo t_1 costante, e la quantità $df = L_{H(t_1),t}dt$ misura la variazione di f nell'evoluzione temporale nell'intorno dell'istante t_1. Passando alla composizione con un altro operatore $L_{H(t_2),t}$, con $t_2 \neq t_1$, possiamo calcolare il commutatore grazie alla formula (2.64) ricavata in precedenza,

$$[L_{H(t_1),t}, L_{H(t_2),t}]f = D_{\{H(t_2),H(t_1)\}}f + D_{\partial tH(t_2)}f - D_{\partial tH(t_1)}f. \tag{2.78}$$

Le derivate parziali $\partial H(t_1)/\partial t = \partial H(t_2)/\partial t = 0$ perché le hamiltoniane sono calcolate a tempi costanti, e rimane

$$[L_{H(t_1),t}, L_{H(t_2),t}]f = D_{\{H(t_2),H(t_1)\}}f = \{f, \{H(t_2), H(t_1)\}\}. \tag{2.79}$$

La parentesi di Poisson delle hamiltoniane è in generale diversa da zero, perché $t_2 \neq t_1$, pertanto il commutatore non si annulla.

Esempio 2.2. *L'hamiltoniana*

$$H(q,p,t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 - qF(t) \tag{2.80}$$

descrive un oscillatore armonico forzato unidimensionale, di equazione $\ddot{q} = \dot{p}/m = -\omega^2 q + F(t)$*. Verifichiamo che la parentesi di Poisson a tempi diversi non si annulla.*

$$\frac{\partial H}{\partial q} = m\omega^2 q - F(t), \quad \frac{\partial H}{\partial p} = p/m, \tag{2.81}$$

$$\begin{aligned} \{H(t_1), H(t_2)\} &= \frac{\partial H(t_1)}{\partial q}\frac{\partial H(t_2)}{\partial p} - \frac{\partial H(t_2)}{\partial q}\frac{\partial H(t_1)}{\partial p} = \\ &= \left(m\omega^2 q - F(t_1)\right) p/m - \left(m\omega^2 q - F(t_2)\right) p/m = (F(t_2) - F(t_1))p/m. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Non si annulla identicamente proprio perché la forzante $F(t)$ *varia nel tempo.*

2.3.5 Operatore di evoluzione con generatrice dipendente dal tempo

Sia $f(q,p,t)$ un osservabile e sia $H(q,p,t)$ l'hamiltoniana, in generale dipendente dal tempo. Il flusso di fase generato da H muove il punto di fase lungo le orbite $(q(t), p(t))$. Ci interessa come varia f lungo l'orbita: $f(t) = f(q(t), p(t), t)$. L'evoluzione temporale è governata dall'equazione

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = L_H(t) f(t), \tag{2.83}$$

dove si è introdotto l'operatore lineare

$$L_H(t) \equiv L_{H,t} \equiv \{.,H\} + \frac{\partial}{\partial t}. \tag{2.84}$$

già affrontato in precedenza. Cerchiamo l'operatore di evoluzione associato a questa equazione, ossia l'operatore che mappa la condizione iniziale nella soluzione al tempo t,

$$f(t) = U(t, t_0) f(t_0). \tag{2.85}$$

Come abbiamo discusso, quando l'operatore $L_H(t)$ dipende dal tempo, gli operatori valutati a tempi diversi non commutano. L'equazione (2.83) non ammette una semplice soluzione esponenziale. Per poter scrivere l'operatore di evoluzione, consideriamo prima un caso più semplice unidimensionale, sostituendo l'operatore $L_H(t)$ con una semplice funzione numerica $a(t)$. Questo ci aiuterà a capire le complicazioni che insorgono quando passiamo ad operatori non commutanti.

$$\frac{df}{dt} = a(t) f(t). \tag{2.86}$$

È immediato risolverla per separazione delle variabili,

$$f(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(t')dt'\right) f(t_0). \tag{2.87}$$

Ora vorremmo però darne una "dimostrazione" intuitiva, che poi cercheremo di generalizzare, stando attenti a modificare i passaggi che dipendono dalla commutatività.
Immaginiamo di suddividere l'intervallo di tempo $[t_0, t]$ in tanti sottointervalli $[t_k, t_{k+1}]$ con $k = 0, 1, ..., N$ e con $t_{N+1} = t$. Gli intervalli siano sufficientemente piccoli da poter considerare $a(t)$ costante su ogni sottointervallo, uguale al valore nel primo estremo. In questo modo ci riconduciamo ad una funzione $a(t)$ costante a tratti, per la quale conosciamo la soluzione

$$\frac{df}{ds} = a(t_k)f(s) \longrightarrow f(s) = \exp(a(t_k)(s - t_k))f(t_k), \qquad s \in [t_k, t_{k+1}]. \tag{2.88}$$

La continuità è assicurata avendo imposto la condizione iniziale nel primo estremo degli intervalli. Pertanto, la soluzione nel punto t potrà essere scritta come

$$\begin{aligned} f(t) &= \exp(a(t_N)(t - t_N))f(t_N) = \\ &= \exp(a(t_N)(t - t_N)) \exp(a(t_{N-1})(t_N - t_{N-1}))f(t_{N-1}) = \ ... \\ ... \ &= \prod_{k=0}^{N} \exp(a(t_k)(t_{k+1} - t_k))f(t_0). \end{aligned} \tag{2.89}$$

Poiché stiamo lavorando con esponenziali numerici, gli argomenti commutano e possiamo impiegare la usuale proprietà dell'esponenziale, ottenendo

$$f(t) = \exp\left(\sum_{k=0}^{N} a(t_k)(t_{k+1} - t_k)\right) f(t_0). \tag{2.90}$$

Adesso, infittiamo la suddivisione dell'intervallo prendendo il limite $N \to \infty$ e $|t_{k+1} - t_k| \to 0$ mantenendo t costante. La continuità dell'esponenziale permette di portare il limite all'interno. La sommatoria tende così all'integrale, recuperando così la (2.87).
Proviamo a ripetere il precedente ragionamento nel caso dell'equazione (2.83). Otteniamo un insieme di equazioni della forma (2.88) con al posto di $a(t_k)$ l'operatore $L(t_k)$, che è un operatore costante. Quindi possiamo ancora applicare la soluzione esponenziale (2.88). Possiamo poi ripetere i passaggi che conducono alla analoga della (2.89),

$$\begin{aligned} f(t) =& \exp(L(t_N)\Delta t_N) \exp(L(t_{N-1})\Delta t_{N-1}) \cdots \exp(L(t_0)\Delta t_0)f(t_0) = \\ =& U f(t_0), \end{aligned} \tag{2.91}$$

dove si è indicato $\Delta t_k \equiv t_{k+1} - t_k$. A questo punto però sorge una difficoltà: gli operatori $L(t_k)$ sono valutati a tempi diversi e quindi non commutano. Questo implica che non possiamo usare la proprietà che avevamo con l'esponenziale numerico e passare alla (2.90).
Espandendo i singoli termini esponenziali operatoriali,

$$\exp(L(t_k)\Delta t_k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(L(t_k)\Delta t_k)^j, \tag{2.92}$$

riscriviamo l'operatore che figura nella (2.91) come

$$
\begin{aligned}
U &= \sum_{n_N=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_0=0}^{\infty} \frac{(\exp(L(t_N)\Delta t_N))^{n_N}}{n_N!} \cdots \frac{(\exp(L(t_0)\Delta t_0))^{n_0}}{n_0!} = \\
&= \sum_{n_N=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_0=0}^{\infty} \frac{(\Delta t_N)^{n_N} \cdots (\Delta t_0)^{n_0}}{n_N! \cdots n_0!} L(t_N)^{n_N} \cdots L(t_0)^{n_0}.
\end{aligned}
\tag{2.93}
$$

Mettiamo per un momento da parte U e consideriamo il seguente operatore

$$
\exp\left(\sum_{k=0}^{N} L(t_k)\Delta t_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{N} L(t_k)\Delta t_k\right)^n . \tag{2.94}
$$

Poiché gli operatori non commutano, nell'espandere la potenza dobbiamo conservare l'ordine:

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{N} L(t_k)\Delta t_k\right)^n &= \left(\sum_{k_1=0}^{N} L(t_{k_1})\Delta t_{k_1}\right) \cdots \left(\sum_{k_n=0}^{N} L(t_{k_n})\Delta t_{k_n}\right) = \\
= \left(\sum_{\substack{n_N=0 \\ n_N+\cdots+n_0=n}}^{n} \cdots \sum_{n_0=0}^{n}\right) & (\Delta t_N)^{n_N} \cdots (\Delta t_0)^{n_0} \sum_p p(L(t_N)^{n_N}, \ldots, L(t_0)^{n_0}).
\end{aligned}
\tag{2.95}
$$

Sviluppando la potenza n-esima dobbiamo moltiplicare i termini $L(t_k)\Delta t_k$ formando sequenze di n termini in tutti gli ordinamenti possibili. Si è indicato con $p(L(t_N)^{n_N}, \ldots, L(t_0)^{n_0})$ la generica permutazione di n oggetti, dei quali n_N uguali ad $L(t_N)$, n_{N-1} uguali ad $L(t_{N-1})$, ..., n_0 uguali ad $L(t_0)$ (si tenga presente che, dentro a p(), n_k non sono potenze, ma una notazione per indicare il numero di termini). La somma su p significa somma su tutte le possibili permutazioni siffatte. La somma sugli indici $n_0, ..., n_N$ è sottoposta al vincolo $n_0 + \cdots + n_N = n$, perché stiamo considerando una potenza n fissata. Fissati gli indici $n_0, ..., n_N$, le sequenze differiscono solo per l'ordine dei termini, i quali devono comparire in tutti gli ordini possibili. Il numero di queste sequenze è quindi

$$
\binom{n}{n_N, ..., n_0} = \frac{n!}{n_N! \cdots n_0!}, \tag{2.96}
$$

perché si contano le permutazioni di n oggetti (termine $n!$ a numeratore) senza contare quelle che scambiano termini uguali (fattoriali a denominatore). Per ogni k vanno escluse le permutazioni che scambiano gli n_k oggetti identici, quindi si divide per $n_k!$.
Introduciamo l'*operatore lineare di ordinamento temporale* T che riordina i prodotti di operatori $L(t_k)$ in ordine cronologico

$$
Tp(L(t_N)^{n_N}, \ldots, L(t_0)^{n_0}) = L(t_N)^{n_N} \cdots L(t_0)^{n_0}. \tag{2.97}
$$

Impiegando questo operatore,

$$T\sum_p p(L(t_N)^{n_N},\dots,L(t_0)^{n_0}) = \binom{n}{n_N,\dots,n_0} L(t_N)^{n_N}\cdots L(t_0)^{n_0}. \tag{2.98}$$

Se applichiamo T alla (2.94),

$$\begin{aligned} &T\exp\left(\sum_{k=0}^{N} L(t_k)\Delta t_k\right) = \\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{\substack{n_N=0\\ n_N+\cdots+n_0=n}}^{n}\cdots\sum_{n_0=0}^{n}\right)(\Delta t_N)^{n_N}\cdots(\Delta t_0)^{n_0}\binom{n}{n_N,\dots,n_0}L(t_N)^{n_N}\cdots L(t_0)^{n_0} = \\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{n_N=0\\ n_N+\cdots+n_0=n}}^{n}\cdots\sum_{n_0=0}^{n}\right)\frac{(\Delta t_N)^{n_N}\cdots(\Delta t_0)^{n_0}}{n_N!\cdots n_0!}L(t_N)^{n_N}\cdots L(t_0)^{n_0}. \end{aligned} \tag{2.99}$$

Infine osserviamo che sommare sugli $n_0,\dots,n_N$ col vincolo $n_0+\cdots+n_N = n$, e poi sommare su tutti i valori di n da 0 a infinito, è uguale a sommare direttamente su tutti i valori degli indici n_k da 0 a infinito. Quindi riscriviamo

$$T\exp\left(\sum_{k=0}^{N} L(t_k)\Delta t_k\right) = \sum_{n_N=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_0=0}^{\infty}\frac{(\Delta t_N)^{n_N}\cdots(\Delta t_0)^{n_0}}{n_N!\cdots n_0!}L(t_N)^{n_N}\cdots L(t_0)^{n_0}. \tag{2.100}$$

e notiamo come questo sia uguale all'operatore U della (2.93),

$$U = T\exp\left(\sum_{k=0}^{N} L(t_k)\Delta t_k\right). \tag{2.101}$$

Passando al limite $N\to\infty$ e $|\Delta t_k|\to 0$ mantenendo t fissato, l'operatore U tende all'operatore di evoluzione in base alla (2.91), e l'argomento dell'esponenziale nella (2.101) tende ad un integrale. L'operatore di evoluzione quando l'hamiltoniana dipende dal tempo sarà quindi

$$U(t,t_0) = T\exp\left(\int_{t_0}^{t} L(t')dt'\right). \tag{2.102}$$

Ricaviamo ora un'espansione in serie dell'operatore di evoluzione. Riprendiamo l'equazione (2.83) e sostituiamo $f(t) = U(t,t_0)f(t_0)$,

$$\frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t}f(t_0) = L(t)U(t,t_0)f(t_0). \tag{2.103}$$

Essendo l'argomento $f(t_0)$ arbitrario, otteniamo l'equazione per l'operatore di evoluzione

$$\frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t} = L(t)U(t,t_0). \tag{2.104}$$

che può essere riscritta in forma integrale,

$$U(t,t_0) = I + \int_{t_0}^{t} L(t')U(t',t_0)dt', \tag{2.105}$$

dove I è l'operatore identità. Questa equazione può essere integrata ricorsivamente. Se sostituiamo nuovamente l'equazione (2.105) nel membro destro della (2.105),

$$\begin{aligned} U(t,t_0) &= I + \int_{t_0}^{t} L(t_1)\left[I + \int_{t_0}^{t_1} L(t_2)U(t_2,t_0)dt_2\right]dt_1 = \\ &= I + \int_{t_0}^{t} L(t_1)dt_1 + \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 L(t_1)L(t_2)U(t_2,t_0). \end{aligned} \tag{2.106}$$

Procedendo iterativamente in questo modo, scriviamo U come una serie $U = \sum_{k=0}^{\infty} U_k$, dove il termine k-esimo è un integrale ordinato nel tempo di ordine k in $L(t)$. Questa espansione prende il nome di *serie di Dyson*,

$$U(t,t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{k-2}} dt_{k-1} \int_{t_0}^{t_{k-1}} dt_k L(t_1)L(t_2)\cdots L(t_{k-1})L(t_k), \tag{2.107}$$

dove abbiamo adottato la convenzione che il termine $k = 0$ sia l'identità.

Questa espansione è consistente con la rappresentazione esponenziale (2.102). L'azione dell'operatore di ordinamento sulla potenza di un integrale è

$$\begin{aligned} &T\left(\int_{t_0}^{t} L(t')dt'\right)^n = T\int_{[t_0,t]^n} dt_1 dt_2 \cdots dt_n L(t_1)L(t_2)\cdots L(t_n) = \\ &= \int_{[t_0,t]^n} dt_1 dt_2 \cdots dt_n T L(t_1)L(t_2)\cdots L(t_n) = \\ &= n! \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-2}} dt_{n-1} \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n L(t_1)L(t_2)\cdots L(t_{n-1})L(t_n). \end{aligned} \tag{2.108}$$

L'integrando $TL(t_1)L(t_2)\cdots L(t_n)$ è simmetrico rispetto alle permutazioni dei suoi argomenti, perché se scambiamo due t_j, l'operatore T li riposiziona in ordine crescente. Pertanto l'integrale sull'ipercubo si può ricondurre all'integrale sul simplesso $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq t$, che rappresenta una delle $n!$ suddivisioni dell'ipercubo corrispondenti ai possibili ordinamenti degli istanti t_j. Data la simmetria dell'integrando, l'integrale su ciascuna di queste regioni è uguale, perciò l'integrale sull'ipercubo è uguale a $n!$ volte l'integrale sul simplesso. Se dividiamo la (2.108) per $n!$ e sommiamo per n da zero a infinito, recuperiamo a primo membro la forma esponenziale dell'operatore U, e ad ultimo membro la rappresentazione come serie di Dyson.

2.3.6 Applicazione dell'operatore tempo-ordinato

Supponiamo che l'hamiltoniana del sistema si possa scrivere come somma di una parte indipendente dal tempo H_0 e di una piccola perturbazione dipendente dal tempo $W(t)$. Conviene separare i due problemi, fattorizzando la parte indipendente dal tempo in modo da ricondursi alla sola hamiltoniana $W(t)$. Omettendo per semplicità il termine di dipendenza esplicita $\partial/\partial t$, l'operatore L_H assume la forma

$$L_H(t) = \{\ , H_0 + W(t)\} = \{\ , H_0\} + \{\ , W(t)\} = L_{H_0} + L_W(t). \tag{2.109}$$

L'operatore di evoluzione associato al flusso di H_0 è, come sappiamo,

$$U_0(t, t_0) = \exp\left(L_{H_0}(t - t_0)\right). \tag{2.110}$$

Facciamo l'ipotesi che l'operatore di evoluzione associato ad $H(t)$ abbia la forma

$$U(t, t_0) = U_0(t, t_0)\tilde{U}(t, t_0). \tag{2.111}$$

Sostituendo l'ansatz nella (2.104) troviamo l'equazione che deve soddisfare $\tilde{U}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{U}(t, t_0)}{\partial t} &= \exp\left(-L_{H_0}(t - t_0)\right) L_W(t) \exp\left(L_{H_0}(t - t_0)\right) \tilde{U}(t, t_0) = \\ &= \Big(U_0(t, t_0)^{-1} L_W(t) U_0(t, t_0)\Big)\tilde{U}(t, t_0) = \tilde{L}_W(t)\tilde{U}(t, t_0).\end{aligned} \tag{2.112}$$

Possiamo quindi calcolare $\tilde{U}$ con la serie (2.107), prendendo $L(t) = \tilde{L}_W(t)$. Una volta ricavato $\tilde{U}$, l'operatore di evoluzione complessivo si ottiene dalla (2.111). L'espansione in serie è utile perché, quando la perturbazione $W(t)$ è "piccola", l'operatore $\tilde{L}_W(t)$, essendo proporzionale a $W(t)$, è anch'esso "piccolo", e possiamo approssimare la soluzione tenendo solo i primi termini della serie, come illustriamo nel prossimo esempio.

Esempio 2.3. *Consideriamo l'hamiltoniana di un oscillatore armonico unidimensionale con costante elastica con dipendenza sinusoidale dal tempo,*

$$H(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}(k_0 + \epsilon \sin(\omega t))q^2 = H_0 + W(t), \tag{2.113}$$

dove $k_0 \equiv m\omega^2$, $H_0 = p^2/2m + k_0 q^2/2$ è l'hamiltoniana dell'oscillatore imperturbato, $W(t) = \epsilon \sin(\omega t) q^2/2$ è la perturbazione dipendente dal tempo, ed ϵ è un parametro con le dimensioni di una costante elastica, piccolo rispetto a k_0.
Mostriamo che le hamiltoniane a tempi diversi hanno parentesi di Poisson diversa da zero,

$$\begin{aligned}&\{H(t_1), H(t_2)\} = \cancel{\{H_0, H_0\}} + \{H_0, W(t_2)\} + \{W(t_1), H_0\} + \cancel{\{W(t_1), W(t_2)\}} = \\ &= \epsilon q p(\sin(\omega t_1) - \sin(\omega t_2))/m.\end{aligned} \tag{2.114}$$

Come abbiamo discusso, questo implica che l'operatore di evoluzione non è l'esponenziale di $H(t)$, e dobbiamo ricorrere all'operatore tempo-ordinato.

Scegliamo il tempo iniziale $t_0 = 0$. Conviene adottare la rappresentazione matriciale degli operatori, che agiscono sul vettore $\eta \equiv (q,p)^T$. In questa rappresentazione, l'operatore di evoluzione relativo alla hamiltoniana imperturbata H_0 è

$$U_0(t,0) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{m\omega}\sin(\omega t) \\ -m\omega\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \tag{2.115}$$

Ricordiamo l'azione dell'operatore di Lie sul vettore η,

$$L_W(\eta) = \{\eta, W\} = \begin{pmatrix} \partial W/\partial p \\ -\partial W/\partial q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Delta k(t) q \end{pmatrix}, \tag{2.116}$$

dove abbiamo posto $\Delta k(t) \equiv \epsilon \sin(\omega t)$. Da questo deduciamo che $L_W(t)$ si rappresenta in forma matriciale come

$$L_W(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta k(t) & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.117}$$

Calcoliamo adesso

$$\begin{aligned} &\tilde{L}_W(t) \equiv U_0^{-1} L_W(t) U_0 = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\Delta k(t)}{m\omega}\sin(\omega t)\cos(\omega t) & \frac{\Delta k(t)}{(m\omega)^2}\sin^2(\omega t) \\ -\Delta k(t)\cos^2(\omega t) & -\frac{\Delta k(t)}{m\omega}\sin(\omega t)\cos(\omega t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.118}$$

Come mostra questa equazione, l'operatore $\tilde{L}_W(t)$ è proporzionale ad ϵ, e se ϵ è sufficientemente piccolo, possiamo limitarci a tenere i primi termini della serie di Dyson,

$$\tilde{U}(t,0) = I + \int_0^t dt_1 \tilde{L}_W(t_1) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \tilde{L}_W(t_1)\tilde{L}_W(t_2) + O(\epsilon^3). \tag{2.119}$$

Calcoliamo il termine del primo ordine,

$$A(t,0) \equiv \int_0^t dt_1 \tilde{L}_W(t_1) \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.120}$$

i cui elementi di matrice risultano

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{\epsilon}{4m\omega^2}\left(\sin(\omega t) - \frac{1}{3}\sin(3\omega t)\right), \\ A_{12} &= \frac{\epsilon}{2m^2\omega^3}\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\cos(\omega t) + \frac{1}{6}\cos(3\omega t)\right), \\ A_{21} &= \frac{\epsilon}{2\omega}\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cos(\omega t) + \frac{1}{6}\cos(3\omega t)\right), \\ A_{22} &= -A_{11}. \end{aligned} \tag{2.121}$$

Le correzioni del primo ordine da aggiungere all'operatore di evoluzione sono gli elementi di matrice di $U^{(1)}(t) \equiv U_0(t)A(t)$,

$$\begin{aligned}
U^{(1)}_{11} &= \frac{\epsilon}{6m\omega^2}\Big(\sin(2\omega t) - 2\sin(\omega t)\Big),\\
U^{(1)}_{12} &= \frac{\epsilon}{6m^2\omega^3}\Big(-\cos(2\omega t) + 4\cos(\omega t) - 3\Big),\\
U^{(1)}_{21} &= \frac{\epsilon}{3\omega}\Big(\cos(2\omega t) - \cos(\omega t)\Big),\\
U^{(1)}_{22} &= \frac{\epsilon}{3m\omega^2}\Big(\sin(2\omega t) - 2\sin(\omega t)\Big).
\end{aligned} \tag{2.122}$$

Passiamo ora al secondo ordine,

$$B(t,0) \equiv \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \tilde{L}_W(t_1)\tilde{L}_W(t_2). \tag{2.123}$$

Le correzioni sono gli elementi di matrice di $U^{(2)}(t) \equiv U_0(t)B(t)$. *Il calcolo dettagliato è riportato in appendice. Mostriamo qui il risultato,*

$$\begin{aligned}
U^{(2)}_{11} &= \frac{\epsilon^2}{24m^2\omega^4}\Big(4 - \omega t\sin(\omega t) - \frac{61}{12}\cos(\omega t) + \frac{4}{3}\cos(2\omega t) - \frac{1}{4}\cos(3\omega t)\Big),\\
U^{(2)}_{12} &= \frac{\epsilon^2}{24m^3\omega^5}\Big(-5\omega t\cos(\omega t) + \frac{5}{12}\sin(\omega t) + \frac{8}{3}\sin(2\omega t) - \frac{1}{4}\sin(3\omega t)\Big),\\
U^{(2)}_{21} &= \frac{\epsilon^2}{24m\omega^3}\Big(-\omega t\cos(\omega t) + \frac{49}{12}\sin(\omega t) - \frac{8}{3}\sin(2\omega t) + \frac{3}{4}\sin(3\omega t)\Big),\\
U^{(2)}_{22} &= \frac{\epsilon^2}{24m^2\omega^4}\Big(5\omega t\sin(\omega t) - \frac{55}{12}\cos(\omega t) + \frac{16}{3}\cos(2\omega t) - \frac{3}{4}\cos(3\omega t)\Big).
\end{aligned} \tag{2.124}$$

L'operatore $\tilde{U}$ *al secondo ordine si scrive*

$$\tilde{U}(t,0) = I + A(t,0) + B(t,0) + O(\epsilon^3), \tag{2.125}$$

e l'operatore di evoluzione associato all'hamiltoniana completa è

$$\begin{aligned}
U(t,0) &= U_0(t,0)(I + A(t,0) + B(t,0)) + O(\epsilon^3) =\\
&= U_0(t,0) + U^{(1)}(t,0) + U^{(2)}(t,0) + O(\epsilon^3).
\end{aligned} \tag{2.126}$$

Pertanto, gli elementi di matrice di U sono, al secondo ordine,

$$\begin{aligned}
U_{11} &= \cos(\omega t) + \frac{\epsilon}{6m\omega^2}\Big(- 2\sin(\omega t) + \sin(2\omega t)\Big) + \\
&+ \frac{\epsilon^2}{24m^2\omega^4}\Big(4 - \omega t\sin(\omega t) - \frac{61}{12}\cos(\omega t) + \frac{4}{3}\cos(2\omega t) - \frac{1}{4}\cos(3\omega t)\Big), \\
U_{12} &= \frac{\sin(\omega t)}{m\omega} + \frac{\epsilon}{6m^2\omega^3}\Big(- 3 + 4\cos(\omega t) - \cos(2\omega t)\Big) + \\
&+ \frac{\epsilon^2}{24m^3\omega^5}\Big(- 5\omega t\cos(\omega t) + \frac{5}{12}\sin(\omega t) + \frac{8}{3}\sin(2\omega t) - \frac{1}{4}\sin(3\omega t)\Big), \\
U_{21} &= -m\omega\sin(\omega t) + \frac{\epsilon}{3\omega}\Big(- \cos(\omega t) + \cos(2\omega t)\Big) + \\
&+ \frac{\epsilon^2}{24m\omega^3}\Big(- \omega t\cos(\omega t) + \frac{49}{12}\sin(\omega t) - \frac{8}{3}\sin(2\omega t) + \frac{3}{4}\sin(3\omega t)\Big), \\
U_{22} &= \cos(\omega t) + \frac{\epsilon}{3m\omega^2}\Big(- 2\sin(\omega t) + \sin(2\omega t)\Big) + \\
&+ \frac{\epsilon^2}{24m^2\omega^4}\Big(5\omega t\sin(\omega t) - \frac{55}{12}\cos(\omega t) + \frac{16}{3}\cos(2\omega t) - \frac{3}{4}\cos(3\omega t)\Big).
\end{aligned} \tag{2.127}$$

Si può verificare direttamente che ad ogni ordine di approssimazione valgono $U_{21} = m\partial U_{11}/\partial t$ e $U_{22} = m\partial U_{12}/\partial t$, perché continua a valere l'equazione $\dot{q} = p/m$. Il determinante di U è uguale ad 1 ad ogni ordine di approssimazione, il che significa che l'evoluzione conserva la misura nello spazio delle fasi anche ad ogni step dell'approssimazione.

Appendice A

Calcolo dei termini del secondo ordine nell'Esempio 2.3

Assumendo l'istante iniziale $t_0 = 0$, il termine del secondo ordine nella serie (2.119) è

$$B(t,0) \equiv \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \tilde{L}_W(t_1)\tilde{L}_W(t_2), \tag{A.1}$$

Abbiamo calcolato nell'esempio l'operatore $\tilde{L}_W(t)$, che qui riportiamo

$$\begin{aligned} \tilde{L}_W(t) &\equiv U_0^{-1} L_W(t) U_0 = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\Delta k(t)}{m\omega}\sin(\omega t)\cos(\omega t) & \frac{\Delta k(t)}{(m\omega)^2}\sin^2(\omega t) \\ -\Delta k(t)\cos^2(\omega t) & -\frac{\Delta k(t)}{m\omega}\sin(\omega t)\cos(\omega t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Scriviamo gli elementi del prodotto operatoriale

$$\tilde{L}_W(t_1)\tilde{L}_W(t_2) \equiv \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= \frac{\Delta k(t_1)\Delta k(t_2)}{(m\omega)^2}\sin(\omega t_1)\cos(\omega t_2)\sin(\omega(t_2-t_1)) = \\ &= \frac{\epsilon^2}{2(m\omega)^2}\sin^2(\omega t_1)\sin(2\omega t_2)\sin(\omega(t_2-t_1)), \\ M_{12} &= \frac{\Delta k(t_1)\Delta k(t_2)}{(m\omega)^3}\sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2)\sin(\omega(t_2-t_1)) = \\ &= \frac{\epsilon^2}{(m\omega)^3}\sin^2(\omega t_1)\sin^2(\omega t_2)\sin(\omega(t_2-t_1)), \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$
\begin{aligned}
M_{21} &= \frac{\Delta k(t_1)\Delta k(t_2)}{m\omega}\cos(\omega t_1)\cos(\omega t_2)\sin(\omega(t_1-t_2)) = \\
&= \frac{\epsilon^2}{4m\omega}\sin(2\omega t_1)\sin(2\omega t_2)\sin(\omega(t_1-t_2)), \\
M_{22} &= \frac{\Delta k(t_1)\Delta k(t_2)}{(m\omega)^2}\sin(\omega t_2)\cos(\omega t_1)\sin(\omega(t_1-t_2)) = \\
&= \frac{\epsilon^2}{2(m\omega)^2}\sin^2(\omega t_2)\sin(2\omega t_1)\sin(\omega(t_1-t_2)).
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

Calcoliamo ora gli integrali. Con un cambio di variabili, prendiamo $x_1 = \omega t_1, x_2 = \omega t_2$, e chiamiamo il secondo estremo $x \equiv \omega t$. Conviene ricondurre i prodotti di funzioni trigonometriche a somme per integrarli facilmente. Conviene prima ridurre il numero di fattori del singolo prodotto usando le identità trigonometriche. Per ricondurre i prodotti a somme possiamo applicare ripetutamente le formule di Werner o espandere in esponenziali immaginari.

$$
\begin{aligned}
&B_{11} = \frac{\epsilon^2}{2(m\omega)^2}\int_0^x \frac{dx_1}{\omega}\int_0^{x_1}\frac{dx_2}{\omega}\sin^2(x_1)\sin(2x_2)\sin(x_2-x_1), \\
&\text{dove}\quad \sin^2(x_1)\sin(2x_2)\sin(x_2-x_1) = \frac{1}{4}\Big(\cos(x_1+x_2)-\cos(3x_2-x_1)\Big)+ \\
&+\frac{1}{8}\Big(\cos(x_1+3x_2)+\cos(3x_1-3x_2)-\cos(x_1-x_2)-\cos(3x_1+x_2)\Big), \\
&B_{11} = \frac{\epsilon^2}{2(m\omega)^2\omega^2}\frac{1}{2}\int_0^x dx_1\Big(-\sin(x_1)+\frac{1}{3}\sin(2x_1)+\frac{1}{3}\sin(3x_1)-\frac{1}{6}\sin(4x_1)\Big) = \\
&= \frac{\epsilon^2}{4m^2\omega^4}\Big(\cos(x)-\frac{1}{6}\cos(2x)-\frac{1}{9}\cos(3x)+\frac{1}{24}\cos(4x)-\frac{55}{72}\Big).
\end{aligned}
\tag{A.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&B_{12} = \frac{\epsilon^2}{(m\omega)^3}\int_0^x \frac{dx_1}{\omega}\int_0^{x_1}\frac{dx_2}{\omega}\sin^2(x_1)\sin^2(x_2)\sin(x_2-x_1), \\
&\text{dove}\quad \sin^2(x_1)\sin^2(x_2)\sin(x_2-x_1) = \frac{3}{16}\sin(x_2-x_1)+ \\
&-\frac{1}{8}\Big(\sin(x_2-3x_1)+\sin(3x_2-x_1)\Big)+ \\
&+\frac{1}{16}\Big(\sin(x_1+3x_2)-\sin(x_2+3x_1)+\sin(3x_2-3x_1)\Big), \\
&B_{12} = \frac{\epsilon^2}{6(m\omega)^3\omega^2}\int_0^x dx_1\Big(\cos(x_1)+\cos(2x_1)-\cos(3x_1)+\frac{1}{4}\cos(4x_1)-\frac{5}{4}\Big) = \\
&= \frac{\epsilon^2}{6m^3\omega^5}\Big(\frac{1}{16}\sin(4x)-\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{2}\sin(2x)+\sin(x)-\frac{5}{4}x\Big).
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&B_{21} = \frac{\epsilon^2}{4m\omega} \int_0^x \frac{dx_1}{\omega} \int_0^{x_1} \frac{dx_2}{\omega} \sin(2x_1)\sin(2x_2)\sin(x_1 - x_2), \\
&\text{dove} \quad \sin(2x_1)\sin(2x_2)\sin(x_1 - x_2) = \frac{1}{4}\Big(\sin(3x_1 - 3x_2) + \\
&+ \sin(x_2 - x_1) - \sin(3x_1 + x_2) + \sin(x_1 + 3x_2)\Big), \\
&B_{21} = \frac{\epsilon^2}{4m\omega^3}\frac{1}{3} \int_0^x dx_1 \Big(\frac{1}{2}\cos(4x_1) - \cos(3x_1) + \cos(x_1) - \frac{1}{2}\Big) = \\
&= \frac{\epsilon^2}{12m\omega^3}\Big(\frac{1}{8}\sin(4x) - \frac{1}{3}\sin(3x) + \sin(x) - \frac{1}{2}x\Big).
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&B_{22} = \frac{\epsilon^2}{2(m\omega)^2} \int_0^x \frac{dx_1}{\omega} \int_0^{x_1} \frac{dx_2}{\omega} \sin(2x_1)\sin^2(x_2)\sin(x_1 - x_2), \\
&\text{dove} \quad \sin(2x_1)\sin^2(x_2)\sin(x_1 - x_2) = \frac{1}{4}\Big(\cos(x_1 + x_2) - \cos(3x_1 - x_2)\Big) + \\
&+ \frac{1}{8}\Big(\cos(3x_1 + x_2) - \cos(x_1 + 3x_2) - \cos(x_1 - x_2) + \cos(3x_1 - 3x_2)\Big), \\
&B_{22} = \frac{\epsilon^2}{2m^2\omega^4} \int_0^x dx_1 \Big(\frac{1}{12}\sin(4x_1) - \frac{1}{3}\sin(3x_1) + \frac{1}{2}\sin(2x_1) - \frac{1}{3}\sin(x_1)\Big) = \\
&= \frac{\epsilon^2}{2m^2\omega^4}\Big(- \frac{1}{48}\cos(4x) + \frac{1}{9}\cos(3x) - \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{3}\cos(x) - \frac{25}{144}\Big).
\end{aligned}
\tag{A.9}
$$

I risultati degli integrali sono quindi

$$
\begin{aligned}
B_{11} &= \frac{\epsilon^2}{24m^2\omega^4}\Big(6\cos(\omega t) - \cos(2\omega t) - \frac{2}{3}\cos(3\omega t) + \frac{1}{4}\cos(4\omega t) - \frac{55}{12}\Big), \\
B_{12} &= \frac{\epsilon^2}{24m^3\omega^5}\Big(\frac{1}{4}\sin(4\omega t) - \frac{4}{3}\sin(3\omega t) + 2\sin(2\omega t) + 4\sin(\omega t) - 5\omega t\Big), \\
B_{21} &= \frac{\epsilon^2}{24m\omega^3}\Big(\frac{1}{4}\sin(4\omega t) - \frac{2}{3}\sin(3\omega t) + 2\sin(\omega t) - \omega t\Big), \\
B_{22} &= \frac{\epsilon^2}{24m^2\omega^4}\Big(- \frac{1}{4}\cos(4\omega t) + \frac{4}{3}\cos(3\omega t) - 3\cos(2\omega t) + 4\cos(\omega t) - \frac{25}{6}\Big).
\end{aligned}
\tag{A.10}
$$

Ricordiamo l'operatore di evoluzione dell'hamiltoniana tempo-indipendente,

$$
U_0(t,0) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{m\omega}\sin(\omega t) \\ -m\omega\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \tag{A.11}
$$

Le correzioni del secondo ordine, $U^{(2)} \equiv U_0 B$, sono allora

$$\begin{aligned}
U_{11}^{(2)} &= \frac{\epsilon^2}{24m^2\omega^4}\Big(4 - \omega t \sin(\omega t) - \frac{61}{12}\cos(\omega t) + \frac{4}{3}\cos(2\omega t) - \frac{1}{4}\cos(3\omega t)\Big),\\
U_{12}^{(2)} &= \frac{\epsilon^2}{24m^3\omega^5}\Big(- 5\omega t \cos(\omega t) + \frac{5}{12}\sin(\omega t) + \frac{8}{3}\sin(2\omega t) - \frac{1}{4}\sin(3\omega t)\Big),\\
U_{21}^{(2)} &= \frac{\epsilon^2}{24m\omega^3}\Big(- \omega t \cos(\omega t) + \frac{49}{12}\sin(\omega t) - \frac{8}{3}\sin(2\omega t) + \frac{3}{4}\sin(3\omega t)\Big),\\
U_{22}^{(2)} &= \frac{\epsilon^2}{24m^2\omega^4}\Big(5\omega t \sin(\omega t) - \frac{55}{12}\cos(\omega t) + \frac{16}{3}\cos(2\omega t) - \frac{3}{4}\cos(3\omega t)\Big).
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Bibliografia

[1] V.I. Arnold. *Metodi matematici della meccanica classica*. 1 ed. Editori Riuniti University Press, 2010.

[2] Herbert Goldstein, Charles Poole e John Safko. *Meccanica classica*. Trad. da Nicola Cocca. 2ª ed. Seconda edizione italiana condotta sulla terza edizione americana del 2002. Bologna: Zanichelli, 2018.

[3] Nivaldo A. Lemos. *Analytical Mechanics*. 2nd Revised ed. Riferimento all'ultima edizione reperibile. Cambridge University Press, 2018.