

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Dinamica delle Galassie a Spirale e delle Galassie Ellittiche

Tesi di Laurea

Presentata da:
Francesco Montanari

Relatrice:
Prof.ssa Marcella Brusa

Sessione di laurea III
Anno Accademico 2024-2025

Indice

1	Introduzione	1
2	Dinamica di Sistemi a N-corpi	1
2.1	Definizione dinamica della galassia	1
2.2	Fondamenti di Gravità Newtoniana	2
2.3	Sistema a N-corpi	2
2.4	Tempo di Rilassamento a Due Corpi	3
2.4.1	Approccio cinetico al calcolo di t_{2b}	3
2.4.2	Calcolo Approssimativo in Esempi Astrofisici	4
2.5	Teorema del Viriale e Catastrofe Gravotermica	4
2.5.1	Teorema del Viriale	5
2.5.2	Catastrofe Gravotermica	5
3	Dinamica delle Galassie	6
3.1	Classificazione di Hubble	6
3.2	Dinamica delle Galassie Ellittiche	7
3.2.1	Fotometria	7
3.2.2	Moti delle stelle	8
3.3	Dinamica delle Galassie a Spirale	9
3.3.1	Rotazione ordinata del Disco	10
3.3.2	Bracci a Spirale	13
A	Appendice	16
A.1	Probabilità Statistica di Urto Geometrico	16
A.2	Calcolo Approssimativo del t_{2b}	16
A.3	Teorema Viriale Tensoriale	17
A.4	Misura della curva di rotazione	17

Capitolo 1

Introduzione

Le galassie sono sistemi di proporzioni immense che legano gravitazionalmente stelle, gas e l'enigmatica materia oscura. In termini di scala, una galassia contiene tipicamente un numero di stelle che varia da circa 10^9 per i sistemi più piccoli fino a 10^{12} per le galassie giganti, con masse totali che possono estendersi da 10^7 fino a 10^{14} masse solari [1]. Questi sistemi stellari rappresentano, perciò, un ottimo esempio fisico dei cosiddetti *sistemi a N-corpi*.

La dinamica stellare è il campo di studio che mira alla comprensione qualitativa della struttura e dell'evoluzione di questi sistemi, sviluppando metodi matematici (analitici e numerici) per previsioni quantitative. Basata sui principi fondamentali di Newton della dinamica e sulla gravitazione, questa disciplina è costruita a partire dalle equazioni differenziali del problema degli N-corpi. Data la vastità del numero di stelle, la dinamica stellare deve però adottare tecniche più potenti che vadano oltre l'utilizzo diretto di tali equazioni.

Un presupposto cruciale per la modellizzazione delle galassie deriva dalla stima del tempo di rilassamento a due corpi (t_{2b}), la quale dimostra che le galassie costituiscono *sistemi non-collisionali*, in cui il potenziale gravitazionale può essere approssimato ad un valore medio.

In questo regime non collisionale, le galassie manifestano dinamiche diverse a seconda della loro morfologia. Il presente lavoro introduce le caratteristiche principali del modello adottato per la descrizione delle galassie e successivamente si focalizza sulla dinamica dei due gruppi principali: galassie ellittiche, dinamicamente "calde", e galassie a spirale, dinamicamente " fredde".

Capitolo 2

Dinamica di Sistemi a N-corpi

2.1 Definizione dinamica della galassia

In questo capitolo vengono mostrate le proprietà dinamiche fondamentali che caratterizzano una galassia e le conseguenze sulla sua struttura e evoluzione, attraverso lo studio del sistema a N-corpi, del tempo di rilassamento a due corpi e del Teorema del Viriale applicati al caso fisico della galassia. Una galassia è definita dinamicamente come un sistema **autogravitante, non-collisionale e virializzato** [1]:

- **Autogravitante**: il potenziale gravitazionale totale Φ sotto cui si muovono le stelle è generato dalla distribuzione di massa del sistema stesso (cioè dalle stelle, dal gas e dalla materia oscura al suo interno);
- **Non-collisionale**: le collisioni geometriche e l'effetto cumulativo delle interazioni gravitazionali a distanza sono trascurabili su scale temporali cosmologiche, e l'evoluzione stellare è dominata dalle forze del *campo gravitazionale liscio* su larga scala;
- **Virializzato**: è un sistema in equilibrio stazionario in cui vale il Teorema del Viriale, che stabilisce una relazione fondamentale tra l'energia cinetica totale e l'energia potenziale totale e implica che l'energia totale baricentrica sia non positiva.

Per sostenere che le galassie siano descrivibili come sistemi a N-corpi, è innanzitutto necessario verificare che siano formate da **punti materiali** e non da corpi estesi rispetto alla scala del sistema. Nell'Appendice A.1 è dimostrato che l'effetto delle collisioni geometriche è trascurabile. La galassia può essere considerata dinamicamente come un "oggetto fantasma", principalmente vuoto e costituito da stelle che possono essere trattate come punti materiali. Tuttavia, non

sono trascurabili le possibili interazioni gravitazionali.

Nelle prossime sezioni sono volte a mostrare i fondamenti di gravità di Newton su cui si basa la dinamica stellare, dimostrare l'ipotesi di non-collisionalità e descrivere le proprietà dei sistemi virializzati e le loro conseguenze sull'evoluzione degli ammassi stellari.

2.2 Fondamenti di Gravità Newtoniana

I punti di partenza della trattazione sono la Legge di Gravitazione Universale di Newton e i metodi per calcolare le forze gravitazionali. La **legge di gravità di Newton** stabilisce che una massa puntiforme M attrae una seconda massa m separata da essa dalla distanza \bar{r} , variando la velocità \bar{v} di m in base a:

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = -\frac{GmM}{r^3}\bar{r} \quad (2.1)$$

con G costante gravitazionale di Newton. Il **principio di sovrapposizione** afferma che il campo (o la forza) gravitazionale totale esercitato su una stella da tutte le altre stelle è semplicemente la somma vettoriale dei campi (o forze) gravitazionali esercitati individualmente da ciascuna delle altre stelle sul punto in questione. Esso permette così di calcolare, in un ammasso di N stelle, la forza totale agente sulla stella α da tutte le altre $N-1$ stelle con masse m_α ($\alpha = 1, \dots, N$):

$$\frac{d}{dt}(m_\alpha \bar{v}_\alpha) = -\sum_{\beta, \alpha \neq \beta} \frac{Gm_\alpha m_\beta}{|\bar{x}_\alpha - \bar{x}_\beta|} (\bar{x}_\alpha - \bar{x}_\beta) \quad (2.2)$$

La forza dell'ammasso su una stella di massa m in posizione \bar{x} può essere scritta come gradiente del *potenziale gravitazionale* $\Phi(\bar{x})$:

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = -m\nabla\Phi(\bar{x}), \quad \text{con } \Phi(\bar{x}) = -\sum_\alpha \frac{Gm_\alpha}{|\bar{x} - \bar{x}_\alpha|} \text{ per } \bar{x} \neq \bar{x}_\alpha \quad (2.3)$$

dove si è scelto una costante di integrazione arbitraria in modo che $\Phi(x) \rightarrow 0$ a grandi distanze. Se si pensa a una distribuzione continua della materia in un ammasso stellare, il potenziale nel punto \bar{x} è dato da un integrale sulla densità $\rho(\bar{x}')$ in tutti gli altri punti, mentre la forza \bar{F} per unità di massa è data dal gradiente del potenziale:

$$\Phi(\bar{x}) = -\int \frac{G\rho(\bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|} d^3\bar{x}', \quad \bar{F}(\bar{x}) = -\nabla\Phi(\bar{x}) = -\int \frac{G\rho(\bar{x}')(\bar{x} - \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3} d^3\bar{x}' \quad (2.4)$$

2.3 Sistema a N-corpi

Il punto di partenza della dinamica stellare è rappresentato dalle *equazioni differenziali* che descrivono il *problema degli N-corpi*, derivate dall'applicazione della Legge di Gravitazione Universale di Newton a un sistema di N masse puntiformi. L'equazione 2.2 mostra la formulazione newtoniana (in coordinate cartesiane) che descrive il moto di ciascuna delle N particelle in un sistema di riferimento inerziale. Tuttavia, la loro soluzione analitica non è generalmente disponibile per $N \geq 3$, la soluzione non può essere ridotta a $6N - 1$ integrazioni indipendenti [1]. Nonostante la complessità intrinseca al problema dei N -corpi, per le galassie è possibile adottare una descrizione ideale che semplifica la trattazione, sfruttando il concetto di *tempo di rilassamento a due corpi*. In un sistema a N -corpi, la traiettoria di ogni stella è determinata in linea di principio dall'influenza gravitazionale reciproca di tutte le altre stelle. Il comportamento delle stelle in una galassia omogenea può essere inizialmente rappresentato da due diverse descrizioni, schematizzate in Figura 2.1:

- **Descrizione Ideale:** le stelle si muovono su orbite influenzate da un potenziale Φ_{Boltz} , che rappresenta il **poteziale medio** dato da distribuzione di densità continua e in grado di portare la trattazione $6N$ -dimensionale alla trattazione in uno **spazio delle fasi 6-dimensionale**.
- **Descrizione Reale:** le orbite reali sono influenzate da un **campo gravitazionale vero** Φ_{true} dato dalle stelle stesse e che possiede anche una **componente irregolare**, dovuta alla granularità del sistema, ossia alle interazioni a breve raggio tra singole stelle.

Le orbite delle **due descrizioni coincidono** finché non si accumulano gli effetti delle interazioni gravitazionali a distanza, chiamate anche collisioni gravitazionali o *rilassamenti a due corpi*. Questi passaggi ravvicinati, sebbene deboli singolarmente, lentamente trasferiscono energia e deviano le orbite stellari dalla descrizione ideale. Dopo numerosi incontri, la stella "perde memoria" della sua orbita originale e delle sue condizioni iniziali, finendo su una nuova orbita random.

Il tempo caratteristico che impiegano le due orbite per differenziarsi è chiamato **tempo di rilassamento a due corpi** t_{2b} . Se il sistema che si sta studiando possiede un "età" minore al t_{2b} allora questo è ancora descrivibile con il caso ideale ed è detto **sistema non-collisionale**. Bisogna specificare però che, nonostante l'approccio riduca drasticamente la complessità del problema originale, *questo nuovo problema risulta ancora irrisolto* [1].

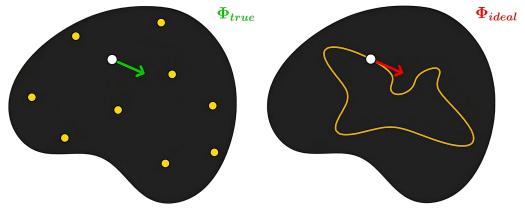


Figura 2.1: Rappresentazione della galassia come un sistema a N-corpi: a sinistra è schematizzata la descrizione reale discreta, a destra è schematizzata la descrizione ideale continua.

2.4 Tempo di Rilassamento a Due Corpi

2.4.1 Approccio cinetico al calcolo di t_{2b}

L'approccio cinetico adottato per il calcolo del tempo di rilassamento a due corpi è basato su risultati del problema dei due corpi e sul calcolo dell'*effetto fionda* [2].

Questo approccio si concentra sull'interazione di una massa di test con ognuna delle N masse appartenenti al sistema a N-corpi. Ci si pone in un sistema di riferimento inerziale S_0 . Si prende una stella m_{test} con una certa velocità \bar{v}_t e si studia la sua interazione con una stella di massa m_{field} e con velocità \bar{v}_f , ignorando le altre $N - 1$ masse. La soluzione è un'**orbita iperbolica** nel caso di **forza gravitazionale**. Si studia l'interazione per ciascuna delle masse del sistema e si ottiene un **fascio di orbite**, da cui, eventualmente, è possibile ricavare asintoticamente la traiettoria vera.

Ogni interazione deflette la m_t dalla sua traiettoria originale. Come prima cosa ci si occupa di calcolare la variazione dell'energia di m_t da un'interazione con la massa del sistema m_f , adottando il sistema di riferimento dell'**orbita relativa**, ovvero il sistema in cui m_f è fermo (Figura 2.2). L'**orbita relativa** $\bar{r} = \bar{x}_t - \bar{x}_f$, è uguale per tutti i sistemi di riferimento inerziali e caratterizzata dall'equazione differenziale $\mu \ddot{r} = -\nabla U$, in cui $\mu = \frac{m_t m_f}{m_t + m_f}$ è la *massa ridotta*. In questo modo si studia solo la velocità relativa \bar{v} . Dopo l'interazione, la \bar{v} ruota, ovvero cambia direzione, ma il suo modulo rimane lo stesso ($\|\bar{v}^i\| = \|\bar{v}^f\|$) perché l'energia dell'orbita relativa E_r è conservata [2]. Il **parametro d'impatto** b rappresenta la distanza minima alla quale le due stelle passerebbero se non interagissero, quantità diversa dalla distanza minima \bar{r}_{min} che raggiungono durante l'urto. Oltre ad una componente parallela alla velocità iniziale, la velocità finale possiede una componente perpendicolare. Misurando la variazione dell'energia cinetica delle due componenti dopo l'interazione, si nota che l'orbita relativa si è **"scaldata"** **perpendicolarmente** e si è **"raffreddata"** **parallelamente**, conservando l'energia.

Nel calcolo del t_{2b} nel **caso gravitazionale** è necessario svolgere una complicata integrazione dell'orbita iperbolica poiché bisogna considerare l'effetto di una **forza variabile nel tempo** e un **intervallo di tempo infinito**. Perciò viene adottata l'approssimazione impulsiva detta *"Born Approximation"*, che assume l'azione di una **forza costante nel tempo** $\|\bar{F}_\perp\| = \frac{G m_t m_f}{b^2}$

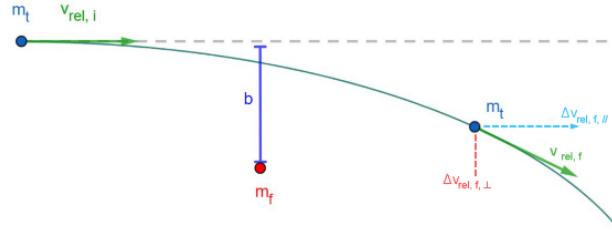


Figura 2.2: Sistema di riferimento dell'orbita relativa.

in un **intervallo di tempo finito** $\Delta t = 2b/||\bar{v}||$. I valori approssimati sono basati su **parametri intriseci** del problema: b e $||\bar{v}|| = ||\bar{v}^i||$ ed è tanto più corretta quanto più grande è la distanza tra le due stelle, ovvero quanto più l'urto è lontano. Si calcola la sommatoria dei riscaldamenti perpendicolari, schematizzando la galassia come un **sistema infinito e omogeneo** con densità n , sistema non realistico ma utile per la trattazione:

$$\sum ||\Delta \bar{v}_{t,\perp}||^2 = T 8\pi G^2 n m_f^2 \ln \bar{\Lambda} \Psi(||\bar{v}_t||) \quad (2.5)$$

in cui $\ln \bar{\Lambda} \sim 15$ è il valore medio del **logaritmo di Coulomb** e $\Psi(||\bar{v}_t||)$ è il **potenziale di Rosenbluth** [2]. Il t_{2b} rappresenta il tempo cumulativo T necessario affinché il riscaldamento perpendicolare sia pari all'energia cinetica iniziale della massa di test: $\sum ||\Delta \bar{v}_{t,\perp}||^2 = ||\bar{v}_t||^2$. Si ottiene:

$$t_{2b} = \frac{||\bar{v}_t||^2}{8\pi G^2 n m_f^2 \ln \bar{\Lambda} \Psi(||\bar{v}_t||)} \quad (2.6)$$

Si distinguono così i due tipi di sistemi:

- **Sistema non-collisionale** è un sistema con età minore del t_{2b} . Le interazioni tra le stelle non influenzano in modo significativo le loro orbite nel corso della loro "vita" e la **dinamica è derivata dal campo gravitazionale complessivo della galassia**. Dal punto di vista dinamico, la galassia è considerata un "soggetto giovane".
- **Sistema collisionale** è un sistema con età maggiore del t_{2b} . Le interazioni a due corpi sono sufficientemente frequenti e intense da redistribuire significativamente l'energia tra le stelle, portando il sistema **verso un equilibrio termodinamico**.

Tuttavia, è importante sottolineare che il t_{2b} **non è un valore universale** e che non rappresenta una transizione immediata, bensì un **processo di accumulo**.

2.4.2 Calcolo Approssimativo in Esempi Astrofisici

Per poter verificare la non-collisionalità delle galassie si utilizza una formula approssimativa per il calcolo del t_{2b} ricavata dal **Teorema del Viriale**, un argomento approfondito meglio nella prossima sezione.

Si considera una galassia come un sistema autogravitante sferico all'equilibrio, con massa totale $M = Nm$, data dalle sue N stelle assunte con massa uguale m , e con raggio R e con **dispersione delle velocità** σ . Per mostrare un confronto del t_{2b} tra diversi sistemi si introduce il **tempo dinamico** $t_{dyn} = \frac{2R}{\sigma}$, un tempo di riferimento intrinseco della galassia necessario a una stella con velocità σ per attraversare tutto il sistema. Il rapporto tra i due tempi è:

$$\frac{t_{2b}}{t_{dyn}} = \frac{0.1N}{\ln N} \quad (2.7)$$

La formula è dimostrata nell'Appendice A.2. Le galassie rappresentano sistemi che contengono in media $N = 10^{11}$ stelle e posseggono un $t_{dyn} = 250 \text{ Myr}$ [3]. Il rapporto approssimato è $\frac{t_{2b}}{t_{dyn}} = 10^{10}$ perciò si ricava approssimativamente $t_{2b} = 2.50 \cdot 10^{18} \text{ yr}$. Ciò significa che il t_{2b} di una galassia è di gran lunga maggiore dell'età dell'Universo, determinata con alta precisione tramite le moderne misurazioni cosmologiche $t_0 \sim 13.7 \cdot 10^9 \text{ yr}$ [4]. Al contrario, per sistemi stellari come gli **ammassi globulari**, più piccoli delle galassie e con $N \sim 10^6$ stelle, il tempo di rilassamento a due corpi è minore a parità di t_{dyn} : $\frac{t_{2b}}{t_{dyn}} \sim 10^4$. Perciò gli ammassi aperti sono considerati sistemi dinamicamente più vecchi delle galassie.

2.5 Teorema del Viriale e Catastrofe Gravotermica

In questa sezione è descritto brevemente il fenomeno dell' **evaporazione gravitazionale**, una conseguenza termodinamica che caratterizza l'evoluzione a lungo termine dei sistemi collisionali quali gli ammassi globulari. Si tratta di un fenomeno teoricamente e praticamente inosservabile nelle galassie su scale temporali cosmologiche. Questa mancanza è la conferma attesa (e neces-

saria) del fatto che le galassie sono eccellenti esempi di sistemi perfettamente non-collisionali. Prima di illustrare tale fenomeno è necessario introdurre il **Teorema del Viriale**.

2.5.1 Teorema del Viriale

Il Teorema del Viriale costituisce un insieme infinito di identità tensoriali. La traccia della più semplice identità è $2T = -U$, in cui T rappresenta l'energia cinetica calcolata nel centro di massa del sistema descritto e U l'energia potenziale del sistema. L'applicabilità del teorema deve rispettare due requisiti:

- **Sistema Autogravitante:** tutti gli elementi del sistema sono mossi esclusivamente sotto azione di tale campo.
- **Forza Virializzata:** la forza che agisce sugli elementi deve avere un andamento proporzionale a $\frac{1}{R^2}$.

È necessario specificare che un sistema detto "all'equilibrio dinamico" coincide con un sistema detto "virializzato", mentre non si può dire lo stesso con un sistema detto "rilassato". Un sistema rilassato, oltre ad essere virializzato, ha raggiunto uno stato termodinamico dove la distribuzione di velocità dei suoi elementi segue la *curva di Maxwell-Boltzmann* (caso di sistemi collisionali). Per studiare l'evoluzione di un sistema è utile il grafico del **Piano Viriale**, il quale mette in relazione l'energia cinetica totale T con l'energia potenziale gravitazionale U , in cui il sistema fisico è rappresentato con un punto [2]. Il piano è mostrato in Figura 2.3. L'identità del teorema $T = \frac{|U|}{2}$ è rappresentata dalla "retta del viriale" e costituisce la condizione necessaria per l'equilibrio di un sistema. La bisettrice del piano rappresenta i sistemi con energia totale $E = T + U = 0$ e separa il piano in sistemi con $E > 0$ (sopra la retta) e in sistemi con $E < 0$ (sotto la retta). Un sistema fuori equilibrio, se sottoposto a forze conservative conserva l'energia totale E e perciò è rappresentato da un punto che si può muovere su una retta $T = E + |U|$, parallela alla bisettrice. Anche se non si conosce l'evoluzione di un sistema qualunque, è certo che questo si evolverà per raggiungere l'equilibrio, ovvero la retta del viriale. Si nota che solo i sistemi conservativi con energia totale strettamente negativa $E < 0$, come i sistemi gravitazionali, si trovano su rette che intersecano la retta del viriale e quindi hanno la possibilità di trovarsi all'equilibrio.

2.5.2 Catastrofe Gravotermica

Il fenomeno della catastrofe gravotermica rappresenta una conseguenza diretta della termodinamica unica dei sistemi autogravitanti. Consiste nel processo attraverso il quale le regioni centrali di un ammasso stellare subiscono una contrazione progressiva (detta *core collapse*) mentre l'involucro esterno si espande, portando a un aumento illimitato della densità centrale se non intervengono altre fonti di energia. In astrofisica, gli **ammassi globulari** sono gli oggetti che mostrano meglio l'evoluzione stellare in sistemi collisionali. Un ammasso globulare con $N \sim 10^6$ stelle possiede generalmente un t_{2b} molto breve (se $t_{dyn} = 1 \text{ Myr}$ allora $t_{2b} = 1 \text{ Gyr}$, secondo il calcolo approssimato dell'equazione 2.7) [1]. Questo tempo è sufficientemente breve per permetterci di osservare ammassi globulari dinamicamente "vecchi", ovvero con età maggiore del t_{2b} e in cui la termodinamica ha influenzato l'evoluzione dell'ammasso.

Con il tempo, le popolazioni stellari all'interno degli ammassi globulari si muovono verso un'equilibrio termodinamico, formando una *distribuzione di Maxwell* delle velocità. I trasferimenti di energia dalle interazioni a due corpi portano allo stabilirsi dell'*equipartizione dell'energia cinetica* tra le diverse popolazioni, che richiede che l'energia cinetica media $\langle K \rangle = \frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle$ sia

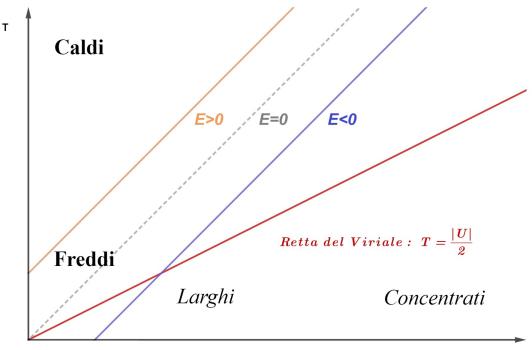


Figura 2.3: Piano Viriale. Ad alti U corrispondono i sistemi più concentrati mentre a bassi U si posizionano sistemi più allargati. Ad alti T corrispondono sistemi più caldi mentre a bassi T si trovano sistemi più freddi.

uguale per tutti gli elementi del sistema. Le stelle più pesanti perdono energia cinetica a favore delle stelle più leggere, rallentando e affondando verso il centro dell'ammasso. Al contrario, le stelle di piccola massa guadagnano energia cinetica e la loro velocità aumenta notevolmente, posizionandosi nella coda ad alta velocità della distribuzione Maxwelliana. Superano la *velocità di fuga* e abbandonano l'ammasso, provocando la cosiddetta **evaporazione gravitazionale**. Un fenomeno osservabile che evidenzia l'evaporazione gravitazionale è la **diminuzione del rapporto luce-massa** $\frac{L}{M}$, poiché la fuita di piccole stelle comporta maggiormente una perdita di luce $L \propto M^3$ [4]. La perdita di stelle ad alta velocità si traduce nella **perdita di energia cinetica totale** T dell'ammasso globulare e anche una minima perdita di energia potenziale totale U . Seguendo lo schema del Piano del Viriale, il sistema autogravitante si posiziona su una retta con energia totale E minore e per tornare all'equilibrio tende a **riscaldarsi e contrarsi**. L'accumulo di stelle pesanti al centro e la perdita di energia causata dall'evaporazione rendono il nucleo sempre più denso e caldo. L'instabilità creata, nota come *instabilità di equipartizione*, accelera ulteriormente il collasso del nucleo. In questo processo "a valanga" il nucleo si disaccoppia dal resto dell'ammasso, evolvendo a stati di maggiore concentrazione e dispersione di velocità, mentre parte dell'energia iniziale viene asportata dalle stelle evaporate.

Capitolo 3

Dinamica delle Galassie

3.1 Classificazione di Hubble

Una delle classificazioni fondamentali per le galassie, ancora ampiamente utilizzata, è la Classificazione di Hubble, proposta da Edwin Hubble nel 1926 e successivamente nel suo libro *The Realm of the Nebulae* del 1936 [5]. Questa classificazione morfologica divide le galassie in categorie in base al loro aspetto generale. Hubble organizzò queste categorie in un celebre diagramma a diapason, che distingue tre tipi principali:

- **Galassie Ellittiche (E):** Appaiono come sistemi stellari lisci e privi di strutture come i bracci a spirale o gas freddo. Sono divise in base alla loro ellitticità (ϵ), definita dal rapporto tra l'asse minore e maggiore, da E0 (apparenza sferica) a E7 (la forma più appiattita osservata).
- **Galassie a Spirale (S) e Spirali Barrate (SB):** Contengono un disco prominente di stelle, gas e polvere, caratterizzato dalla presenza di bracci a spirale. Sono suddivise in spirali normali (S o SA) e spirali barrate (SB), che possiedono una "barra" stellare centrale. La suddivisione lungo la sequenza (Sa, Sb, Sc, Sd, Sm) correla con il rapporto di luminosità tra il bulge (rigonfiamento centrale) e il disco (L_{bulge}/L_{disk}), il grado di avvolgimento dei bracci a spirale, e la loro frammentazione. Le spirali di tipo Sa hanno i bulge più prominenti e bracci più strettamente avvolti, mentre le Sc hanno bulge più piccoli e bracci più aperti e frammentati.
- **Galassie Irregolari (Irr o Im/Sm):** Non presentano una morfologia ben definita e mancano di una struttura organizzata a spirale. Esempi prototipici sono le Nubi di Magellano.

Esiste anche una classe di transizione tra le due principali, le Galassie Lenticolari S0.

L'analisi dinamica rivela una netta dicotomia tra i principali tipi morfologici di galassie, che si

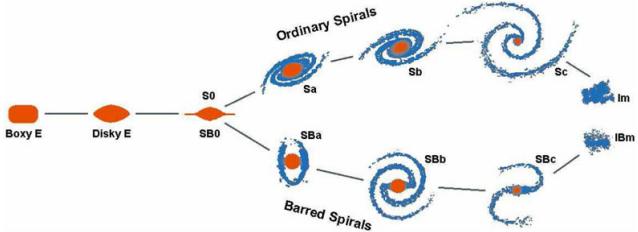


Figura 3.1: Diagramma della classificazione di Hubble.

manifesta nel modo in cui le loro strutture sono mantenute in equilibrio. Le galassie a spirale sono strutture dinamicamente "freddi" con stelle nel disco che seguono orbite quasi circolari con una dispersione di velocità molto ridotta. Al contrario, le galassie ellittiche (dette "early-type" o sferoidali) sono sistemi dinamicamente "caldi" sostenuti dai moti casuali delle stelle (dispersione di velocità σ) e non dalla rotazione. Nelle prossime sezioni è illustrata la dinamica di questi due tipi morfologici.

3.2 Dinamica delle Galassie Ellittiche

Le galassie ellittiche, pur essendo considerate i sistemi stellari più semplici, presentano una notevole diversità e complessità strutturale e cinematica. Come suggerisce il loro nome, appaiono rotonde nel cielo e la loro luce è distribuita in modo uniforme, essendo prive di brillanti ammassi di giovani stelle blu e delle macchie di polvere oscurante.

Il loro aspetto uniforme suggerirebbe che le loro stelle hanno abbiano avuto il tempo di raggiungere uno stato di **equilibrio termodinamico**. Inizialmente, la comprensione della loro forma schiacciata, ovvero della loro cosiddetta "ellitticità" ϵ , era correlata all'ipotesi che tali sistemi si comportassero come sistemi collisionali e termalizzati e che lo schiacciamento fosse direttamente causato dalla rotazione ordinata [3]. L'applicazione del **Teorema del Viriale tensoriale** ha rivelato una **realità dinamica più complessa** e le osservazioni successive hanno stabilito che molte delle galassie ellittiche più luminose esibiscono rotazione media trascurabile o significativamente più lenta di quanto previsto dall'ipotesi di schiacciamento sostenuto dalla rotazione. La marcata **ellitticità non rotazionale** ha portato alla conclusione che le galassie ellittiche non sono sistemi dinamici isotropi e che lo schiacciamento di questi oggetti non è sostenuto dalla rotazione, ma è spiegabile grazie all'**anisotropia del tensore di dispersione delle velocità** [1].

La prima parte di questa sezione è dedicata alla fotometria: come appaiono le immagini delle galassie ellittiche nella luce visibile e cosa rivelano sulla distribuzione delle stelle al loro interno. La parte successiva discute i moti stellari e come la rotazione di una galassia ellittica sia collegata alle sue altre proprietà. La parte finale mostra l'applicazione del Teorema del Viriale tensoriale e fornisce una spiegazione sull'ellitticità di queste galassie basata sul concetto di anisotropia.

3.2.1 Fotometria

Per la classificazione morfologica delle galassie è fondamentale il concetto di **isofote**, definite come i contorni di luminosità superficiale costante su un'immagine di galassia. Le isofote delle galassie ellittiche sono notevolmente vicine ad essere vere **ellissi**. Il rapporto tra il semiasse maggiore a e il semiasse minore b quantifica quanto l'isofota differisce da un cerchio: l'**ellitticità** è definita come $\epsilon = 1 - \frac{b}{a}$.

Spostandosi dalle isofote interne luminose ai contorni esterni deboli, solitamente l'ellitticità rimane abbastanza costante e la posizione del centro e la direzione dell'asse maggiore rimangono stabili.

Queste ci permettono di classificare le galassie ellittiche secondo il **tipo di Hubble** En , dove $n = 10(1 - \frac{b}{a})$; le galassie E0 appaiono circolari nel cielo, mentre per una galassia E5 il diametro corto dell'immagine è la metà del diametro lungo. L'indice n è solitamente arrotondato al numero intero più vicino, che corrisponde all'incirca alla precisione con cui possiamo classificare le galassie a occhio nudo dalle lastre fotografiche. A differenza della classificazione di una galassia a disco, il tipo di Hubble di una galassia ellittica dipende dalla nostra direzione di osservazione. La luce nelle galassie ellittiche è studiata attraverso il profilo di luminosità

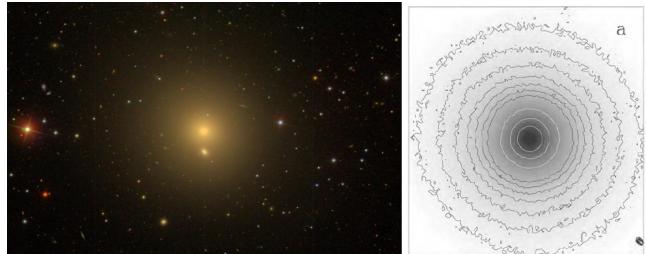


Figura 3.2: A sinistra, un'immagine di NGC 5846, galassia ellittica di tipo E0. A destra, le sue isofote nella banda R [3].

superficiale delle galassie. Viene usata la **formula empirica di Sersic**, una tra le formule più efficaci, utile in particolare per i bulge delle galassie a spirale e per le galassie ellittiche di grandi dimensioni. La formula è anche nota come *profilo di de Vaucouleurs generalizzato* $R^{1/m}$. Più comunemente è utilizzata la forma che collega la luminosità direttamente al raggio effettivo R_e , raggio entro il quale è contenuta metà della luce dell'immagine della galassia [4]:

$$I(R) = I(R_e) \exp \left[-b(m) \left(\frac{R}{R_e} \right)^{1/m} - 1 \right] \quad (3.1)$$

3.2.2 Moti delle stelle

A differenza delle galassie a disco, le stelle delle galassie ellittiche non seguono un modello di rotazione ordinato. Al contrario, la maggior parte della loro energia cinetica è investita in movimenti casuali. Proprio come la luminosità di una galassia a spirale è legata alla sua velocità di rotazione, le galassie ellittiche più luminose hanno una maggiore dispersione di velocità [3].

Legge di Faber-Jackson

L'intervallo della dispersione di velocità σ per le galassie ellittiche è simile a quello per la velocità di rotazione massima delle galassie a disco. Proprio come per le spirali, le stelle si muovono più velocemente nelle galassie più luminose. Al centro delle ellittiche luminose, la dispersione può raggiungere $\sigma \sim 500 \text{ kms}^{-1}$, mentre negli oggetti meno luminosi $\sigma \sim 50 \text{ kms}^{-1}$. La relazione **relazione di Faber-Jackson** descrive il rapporto tra luminosità e dispersione di velocità di una galassia ellittica [4]:
$$\frac{L_V}{2 \cdot 10^{10} L_\odot} \approx \left(\frac{\sigma}{200 \text{ kms}^{-1}} \right)^4 \quad (3.2)$$

Come la relazione di Tully-Fisher per le spirali, la relazione di Faber-Jackson può essere utilizzata per **stimare la distanza di una galassia** dalla misura della sua dispersione di velocità. Tuttavia, è difficile determinare la quantità totale di luce che riceviamo da una galassia poiché gran parte di essa proviene dalle parti esterne più deboli; le distanze derivate dalla relazione di Faber-Jackson non sono molto precise.

Rotazione delle galassie ellittiche

Inizialmente, si riteneva che l'appiattimento (ellitticità ϵ) osservato nelle galassie ellittiche fosse causato principalmente dalla loro rotazione, in analogia con quanto avviene nei sistemi fluidi o gassosi. In un fluido comune, gli urti tra le particelle sono frequentissimi e l'energia cinetica in eccesso lungo una direzione verrebbe rapidamente ridistribuita attraverso gli urti molecolari, portando il sistema a una **distribuzione sferica**. Inoltre, se un sistema fluido ruota, l'equilibrio richiede che esso si appiattisca lungo l'**asse di rotazione**. Le teorie sviluppate per descrivere le masse fluide rotanti prevedevano una relazione diretta tra l'appiattimento (ellitticità) e la velocità di rotazione.

Tale relazione è derivata dal **teorema del viriale tensoriale** $2 \langle K \xi_{zz} \rangle + \langle U \xi_{zz} \rangle = 0$, di cui è esposto un breve calcolo nell'Appendice A.3. Le parentesi angolari indicano una media a lungo termine mentre z indica la componente in cui è espressa la relazione. Equazioni analoghe valgono per le componenti x e y del moto. Questo teorema stabilisce che non solo le energie cinetica e potenziale medie devono essere in equilibrio, ma anche che i contributi nelle diverse direzioni devono essere separatamente uguali. Se una galassia è molto appiattita, $U \xi_{zz}$ sarà di grandezza molto minore rispetto a $U \xi_{xx}$ e l'energia nelle velocità casuali nella direzione z deve essere minore di quella del moto casuale e della rotazione che costituiscono la componente x dell'energia cinetica.

Si suppone che una galassia ellittica sia **assialsimmetrica**, con una densità delle stelle e che ruoti attorno all'asse di simmetria z . Allora si suddivide l'energia cinetica nella direzione x nella somma dei moti di rotazione e casuali. Con l'ipotesi che la **velocità di rotazione** V e le **dispersioni di velocità** σ_x e σ_z in queste due direzioni siano quasi costanti in tutta la galassia, si ottiene:

$$\frac{\langle U\xi_{zz} \rangle}{\langle U\xi_{xx} \rangle} = \frac{\langle K\xi_{zz} \rangle}{\langle K\xi_{xx} \rangle} \approx \frac{\sigma_z^2}{\frac{1}{2}V^2 + \sigma_x^2} \quad (3.3)$$

poiché l'energia cinetica di rotazione è suddivisa tra le direzioni x e y . Il rapporto tra i due termini di energia potenziale dipende solo dal **rapporto tra gli assi** B/A o dall'ellitticità $\epsilon \equiv 1 - B/A$ e non è influenzato dalla distribuzione della massa all'interno della galassia [3].

Approssimativamente:

$$\frac{\langle U\xi_{zz} \rangle}{\langle U\xi_{xx} \rangle} \approx (B/A)^{0.9} = (1 - \epsilon)^{0.9}. \quad (3.4)$$

Poiché le osservazioni della rotazione galattica dipendono dalla sola componente della velocità lungo la linea di vista (velocità radiale), la velocità di rotazione media misurata V_{max} è inferiore alla velocità di rotazione totale V . Per correggere questa sottostima dovuta all'effetto di proiezione e stimare la velocità intrinseca, si applica un fattore di correzione geometrico approssimativo: $V_{max} \approx \pi V/4$. Se i moti casuali sono *isotropici*, $\sigma_x = \sigma_z = \sigma$, l'equazione 3.3 diventa:

$$\left(\frac{V_{max}}{\sigma} \right) = \left(\frac{V}{\sigma} \right)_{iso} \equiv \frac{\pi}{4} \sqrt{2[(1 - \epsilon)^{-0.9} - 1]} \approx \sqrt{\epsilon/(1 - \epsilon)} \quad (3.5)$$

l'approssimazione è valida quando ϵ è piccolo. Secondo questa relazione, anche le galassie abbastanza rotonde dovrebbero ruotare piuttosto velocemente; ad esempio, $B/A = 0.7$ dovrebbe implicare $V_{max}/\sigma \approx 0.68$. Il **rapporto teorico atteso** V_{max}/σ doveva aumentare significativamente con l'**appiattimento** ϵ .

Si cercarono le prove di questo legame teorico tra rotazione e attraverso le **osservazioni**, e si scoprì che molte galassie ellittiche (in particolare quelle più luminose e massicce) mostravano un rapporto V_{max}/σ **significativamente inferiore** a quanto previsto per la loro ellitticità apparente. Le galassie ellittiche ruotano molto più lentamente di quanto dovrebbero se fossero **rotatori isotropi**. Ciò indicò che il **movimento ordinato non era la causa dominante** della loro forma, e che, per mantenere il loro stato di equilibrio virializzato, l'appiattimento doveva essere compensato da un'energia cinetica interna maggiore nella direzione del piano galattico rispetto alla direzione perpendicolare ($\sigma_x \gg \sigma_z$).

Si concluse, quindi, che l'appiattimento delle galassie ellittiche luminose non è causato dalla rotazione ma è sostenuto dall'**anisotropia del tensore di dispersione di velocità**, caratteristica principale dei sistemi non collisionali. In altre parole, la dispersione di velocità (la "temperatura" dinamica) non è uguale in tutte le direzioni e l'appiattimento è mantenuto dal fatto che le stelle sono "più calde" lungo l'asse maggiore del sistema e "più fredde" lungo l'asse minore. Poiché il loro tempo di rilassamento a due corpi è estremamente lungo (milioni di volte l'età dell'universo), non avviene la **termalizzazione**, e questa disuniformità non viene annullata. In un fluido collisionale, invece, questa anisotropia scomparirebbe rapidamente. Questo risultato è stato di notevole impatto in astrofisica e ha stabilito che le galassie ellittiche sono in larga misura sistemi supportati dal "disordine" piuttosto che dalla rotazione ordinata. Vengono definite come sistemi **"fossili"** che conservano il loro stato dinamico risultante dai processi di formazione di miliardi di anni fa [1].

3.3 Dinamica delle Galassie a Spirale

Le galassie a spirale o a disco sono caratterizzate dalla presenza di un disco stellare esteso in cui il moto dominante è la **rotazione ordinata**. Le stelle si muovono sotto l'influenza del potenziale gravitazionale medio e liscio del sistema. In questa configurazione, la velocità angolare Ω diminuisce con il raggio, una proprietà nota come *rotazione differenziale*.

Tradizionalmente, per l'analisi orbitale si ricorreva a un'approssimazione di simmetria assiale per il potenziale, utilizzando strumenti come la teoria epiciclica per descrivere le orbite stellari come piccole oscillazioni radiali e verticali attorno a un centro guida rotante. Tuttavia, le galassie a spirale presentano una struttura a bracci a spirale luminosa e una barra centrale lineare. Queste caratteristiche sono intrinsecamente non assisimmetriche e mettono in crisi l'ipotesi di

un sistema in perfetto equilibrio stazionario. Il principale enigma dinamico è rappresentato dal *problema dell'avvolgimento*: a causa della rotazione differenziale, qualsiasi struttura materiale dovrebbe avvolgersi rapidamente in una spirale strettissima in un tempo breve rispetto all'età della galassia, rendendo necessario un meccanismo di rinnovamento continuo della struttura a spirale. Di conseguenza, la dinamica delle galassie a spirale deve essere compresa non in termini di equilibrio assisimmetrico stabile, ma attraverso l'interazione tra la rotazione ordinata del disco e le strutture non assisimmetriche come la barra centrale e le spirali.

3.3.1 Rotazione ordinata del Disco

Le stelle nel disco seguono orbite quasi circolari con pochissimo movimento casuale e la rotazione ordinata rappresenta quasi tutta l'energia del movimento, con velocità casuali che contribuiscono meno del 5%: il disco è dinamicamente **"freddo"** [3]. Nelle galassie più piccole, i movimenti casuali sono proporzionalmente più grandi, ma la maggior parte dell'energia cinetica del disco è ancora in rotazione. Poiché le stelle hanno poco movimento verticale perpendicolare al piano del disco, il disco può essere piuttosto **sottile**.

Questa sezione mostra lo studio della curva di rotazione del disco galattico, sia da un punto di vista interno come nel caso del calcolo per la Via Lattea, sia per galassie lontane. Successivamente è trattata brevemente la Teoria degli Epicicli.

Misura della curva di rotazione

Per studiare il comportamento cinematico e dinamico del disco delle galassie a spirale, si prende in esempio il disco della nostra galassia, la **Via Lattea**. Le stelle più vicine al centro galattico completano le loro orbite in meno tempo rispetto a quelle più lontane. Questa rotazione differenziale è stata scoperta per la prima volta nella Via Lattea considerando i moti propri delle stelle vicine. Guardando verso l'interno, si osservano stelle che ci sorpassano nelle loro orbite; il loro movimento rispetto a noi è nella stessa direzione della velocità orbitale del Sole V_0 . Guardando verso l'esterno, si vedono stelle cadere dietro di noi, quindi hanno movimenti propri nella direzione opposta. Le stelle con lo stesso raggio galattocentrico orbitano alla stessa velocità del Sole, quindi mantengono una distanza fissa e hanno un movimento "laterale". Questo modello era stato notato già nel 1900; l'astronomo olandese Jan Oort lo spiegò nel 1927 come un effetto della rotazione galattica [3].

All'interno di una galassia, è possibile calcolare la velocità radiale V_r e il moto proprio V_t di una stella o di una nube di gas a distanza d dall'osservatore che si avvicina o si allontana, supponendo che tutti gli oggetti compiano orbite esattamente circolari. I calcoli di tali quantità sono riportati nell'Appendice A.4. Si ottengono:

$$V_r \approx dA\sin(2l), \quad V_t \approx d[A\cos(2l) + B] \quad (3.6)$$

con l distanza angolare dell'oggetto dal centro galattico e con $A = [-\frac{R}{2}(\frac{V}{R})']_{R_0}$ e $B = -\frac{1}{2}[\frac{1}{R}(RV)']_{R_0}$, valori che rappresentano la prima e la seconda costante di Oort. Ponendo l'osservatore nella posizione del Sole nella Via Lattea, le costanti calcolate sono $A = 14.8 \pm 0.8 \text{ } \text{km s}^{-1} \text{kpc}^{-1}$ e $B = -12.4 \pm 0.6 \text{ } \text{km s}^{-1} \text{kpc}^{-1}$ [3]. Le costanti di Oort A e B misurano rispettivamente la deviazione dalla rotazione rigida e il gradiente del momento angolare nel disco.

Se si potesse misurasse la velocità V_r per le stelle di nota distanza sparse in tutto il disco, si potrebbe lavorare all'indietro per trovare $V(R)$, la curva di rotazione della Via Lattea. Sfortunatamente, la luce visibile delle stelle del disco e degli ammassi è bloccata dalla polvere. Per la

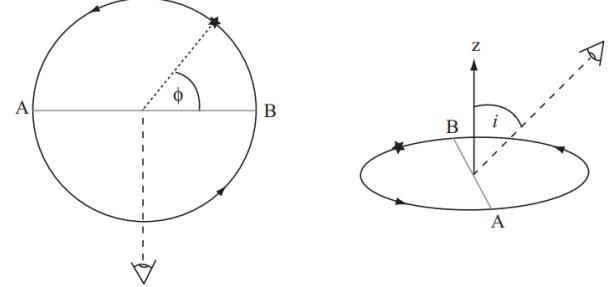


Figura 3.3: A sinistra, un disco rotante visto dall'alto. L'azimut ϕ dà la posizione di una stella nella sua orbita. A destra, la linea di vista dell'osservatore crea l'angolo i con l'asse di rotazione z del disco.

Galassia interna ($R < R_0$), il **metodo del punto tangente** elude questa difficoltà e permette di trovare la curva di rotazione. La velocità angolare V/R scende con il raggio. Quindi l'equazione $V_r = R_0 \sin(l) \left(\frac{V}{R} - \frac{V_0}{R_0} \right)$ dice che, quando si guarda nel disco lungo una direzione fissa con $0^\circ < l < 90^\circ$, la velocità radiale $V_r(l, R)$ è maggiore nel punto tangente T dove la linea di vista passa più vicino al centro galattico. Qui si ha $R = R_0 \sin(l)$, $V(R) = V_r + V_0 \sin(l)$. Quindi, se il gas emette in ogni punto del disco, si può trovare $V(R)$ misurando la massima velocità alla quale si vede l'emissione per ogni longitudine l . Se il punto tangente cade vicino a un braccio, allora la velocità di rotazione trovata usando l'equazione precedente sarà diversa dalla velocità media di un'orbita a quel raggio.

Misurare la velocità di rotazione nella **Galassia esterna** è più difficile. Le distanze delle stelle sono stimate con metodi della *parallasse spettroscopica* o *fotometrica* mentre la loro velocità V_r viene misurata dalle *linee di emissione* di gas caldo o freddo intorno alle stesse stelle [3]. Per studiare la curva di rotazione di una galassia a disco da un punto di vista esterno, si suppone di osservare un disco in rotazione circolare pura, inclinato di un angolo i a faccia in su, come in Figura 3.3. È possibile specificare la posizione di una stella o di una nube di gas in base al suo raggio R e azimut ϕ , misurata nel disco dal diametro AB che giace perpendicolare alla direzione di visione dell'osservatore. Tutto ciò che si può rilevare di questo movimento è la velocità radiale V_r verso o lontano dall'osservatore; il suo valore al centro della galassia, V_{sys} , è la velocità sistematica. La velocità radiale è:

$$V_r(R, i) = V_{sys} + V(R) \sin(i) \cos(\phi) \quad (3.7)$$

Da questa equazione cinematica, si possono graficare linee che collegano punti con stesso V_r , ipotizzando una specifica funzione $V(R)$ e un angolo di inclinazione i . Questi valori sono poi aggiustati utilizzando un processo di **fitting con dati osservativi**, in modo che le "linee di isovelocità" (il modello teorico) si sovrappongano il più fedelmente possibile a quelle misurati [3]. Quando il fitting è ottimale, la curva $V(R)$ e l'inclinazione i sono considerate determinate, permettendo di "deproiettare" la velocità radiale osservata per ottenere la vera velocità di rotazione della galassia. Un esempio di la curva di rotazione $V(R)$ è riportato nella Figura 3.4. Questa **rotazione differenziale** è tipica delle galassie a spirale.

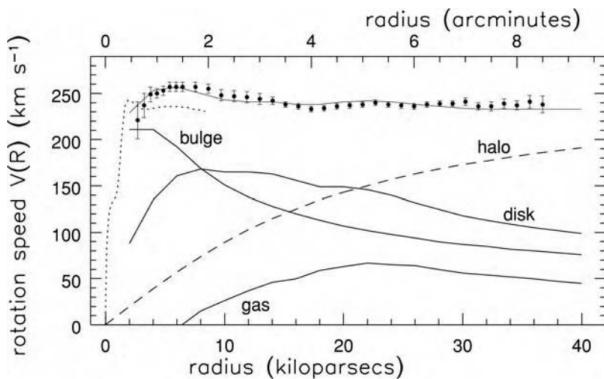


Figura 3.4: I punti rappresentano la curva di rotazione di NGC 7331, le barre verticali mostrano incertezza. Il gas CO (punteggiato), osservato con una risoluzione spaziale più fine, traccia un aumento più veloce. Le curve solide inferiori mostrano i contributi a $V(R)$. Un alone scuro (trattini) deve essere aggiunto prima che la velocità di rotazione combinata (curva più alta) corrisponda alle velocità misurate [3].

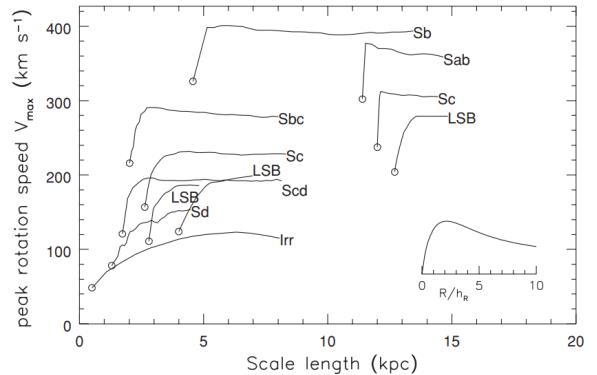


Figura 3.5: Curve di rotazione per galassie disco di vario tipo. I cerchi aperti mostrano la lunghezza della scala h_R del disco stellare e la velocità di rotazione di picco V_{max} per ogni galassia. Le curve sono tracciate in unità di R/h_R , mostrando $V(R)$ per il disco esponenziale [3].

Materia Oscura nelle Galassie a Disco

Per un sistema sferico, la velocità V in un'orbita circolare a raggio R è correlata alla massa ($< R$) interna a quel raggio dall'equazione esatta $M(< R) = \frac{RV^2}{G}$. Per orbite in un disco

piatto, questa formula dà $M(< R)$ entro il 10% -15% [3]. Poiché $V(R)$ non diminuisce, la massa della Via Lattea deve aumentare quasi linearmente con il raggio, anche molto oltre il Sole dove vi sono pochissime stelle. Ci si riferisce a questo problema come il **”problema della massa mancante”** o della **”materia oscura”**. Le galassie presumibilmente contengono una grande quantità di materia che non emette alcuna luce e che si presume si trovi in un alone scuro non rilevabile, se non attraverso la sua attrazione gravitazionale. Poiché i dischi stellari e gassosi sono appiattiti, la loro forza può puntare verso l’interno o verso l’esterno. Solitamente, a $R \ll 6 \text{ kpc}$, la forza dal disco del gas è verso l’esterno, dando un contributo negativo a $V^2(R)$. La Figura 3.4 mostra la curva di rotazione osservata della galassia a disco NGC 7331 e i contributi delle varie componenti della galassia. La curva etichettata **”halo”** mostra come un alone sferico di materia oscura potrebbe fornire una forza verso l’interno sufficiente a spiegare la velocità di rotazione misurata. Almeno il 75% della massa totale sembra essere oscura. La Figura 3.5 mostra le curve di rotazione di un certo numero di galassie a disco di vario tipo, trovate osservando il gas HI.

Relazione di Tully-Fisher

Una curva di rotazione piatta implica che la massa contenuta all’interno di un raggio R sia proporzionale a $V_{max}^2 R/G$, con V_{max} quantità ricavabile tramite osservazioni di radiotelescopio.

Le galassie più luminose ruotano in media più velocemente, il che ci dice che sono più massicce. B. Tully e J. R. Fisher hanno dimostrato che la velocità di rotazione di una galassia aumenta con la sua luminosità, approssimativamente come $L \propto V_{max}^\alpha$, con $\alpha \sim 4$: questa è la relazione **empirica** di Tully-Fisher (TFR)

[3]. La Figura 3.6 traccia la larghezza del profilo globale rispetto alla magnitudine apparente misurata a $K \approx 2,2 \mu\text{m}$ per le galassie del gruppo Maggiore dell’Orsa; la luminosità aumenta poco più lentamente della quarta potenza di V_{max} .

Poiché V_{max} è stabilita in gran parte dalla massa totale (inclusa la materia oscura), mentre la luminosità L deriva dalla massa stellare visibile (il disco), il fatto che L e V_{max} siano così strettamente correlate suggerisce che la **quantità di materia oscura è in qualche modo coordinata con la massa luminosa**, un rompicapo chiave per la comprensione della dinamica e della formazione galattica. La TFR è uno strumento dinamico essenziale per quantificare le proprietà delle galassie a spirale: permette di stimare le **masse** delle galassie a spirale grazie alla misurazione di V_{max} e può essere utilizzata per stimare le distanze delle galassie e dei gruppi di galassie, contribuendo alla definizione della **scala delle distanze cosmiche**.

Teoria degli Epicicli

La teoria degli epicicli descrive il moto di una stella attorno al centro galattico sotto l’ipotesi di un potenziale liscio assalsimmetrico, orbite quasi-circolari e nessuna variazione radiale nella densità delle stelle. Questo moto è approssimato come la combinazione di due componenti: il movimento del centro guida R_g , che è un’orbita perfettamente circolare attorno al centro galattico con una velocità angolare $\Omega(R)$, e piccole oscillazioni della stella attorno a questo deferente. Viene illustrato matematicamente. Usando le coordinate galattocentriche (R, ϕ, z) , si ha $\partial\Phi/\partial\phi = 0$: non c’è forza nella direzione Φ e una stella conserva il suo momento angolare attorno all’asse z $L_z \equiv R^2\phi = \text{cost}$. Il potenziale $\Phi = \Phi(R, z)$ non cambia con il tempo e l’equazione del moto nella direzione radiale può essere scritta in funzione del cosiddetto

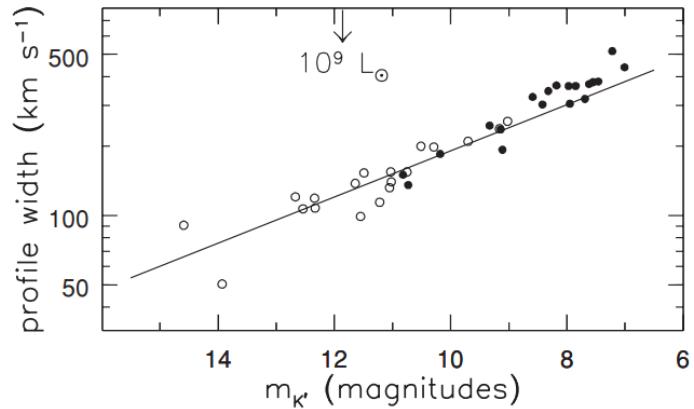


Figura 3.6: Per le galassie nel gruppo maggiore dell’Orsa. Le galassie a bassa luminosità superficiale (cerchi aperi) seguono la stessa relazione di quelle ad alta luminosità superficiale (cerchi pieni) [3].

potenziale efficace: $\ddot{R} = \dot{R}\phi^2 - \frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial R}, \quad \Phi_{eff} \equiv \Phi(R, z) + \frac{L_z^2}{2R^2}$ (3.8)

Moltiplicando per R e integrando mostra che, per una stella che si muove nel piano centrale $z = 0$, $\frac{1}{R}\dot{R}^2 + \Phi_{eff}(R, z = 0; L_z) = \text{cost}$, con $\dot{R}^2 \geq 0$. Il termine centrifugo del Φ_{eff} diverge per $R \rightarrow 0$ e la stella è respinta dall'asse perché il moto è limitato a $E \geq \Phi_{eff}$. La stella è confinata da un **raggio perigalattico** in cui $\dot{R}^2 = 0$ e $E = \Phi_{eff}$. La stella è anche confinata da un limite esterno, il **raggio apogalattico**, se l'energia E è minore dell'energia di fuga.

Tra queste due distanze è definito il **centro guida** R_g , detto anche deferente, ovvero il punto di equilibrio che corrisponde al raggio dell'orbita perfettamente circolare per un dato momento angolare assiale. Questo ha velocità angolare $\Omega(R)$ appropriata a tale raggio e in esso si trova il minimo del potenziale efficace (Φ_{eff}).

La teoria dell'Epiciclo è un'espansione di Taylor di Φ_{eff} al secondo ordine intorno al minimo (R_g , $z=0$), valida per piccoli spostamenti radiali ($x = R - R_g$). Le equazioni del moto nella direzione radiale (R) si riduce a quelle di un **oscillatore armonico semplice**. La stella esegue piccole oscillazioni attorno deferente e il **moto radiale** diventa $\ddot{x} \approx -\kappa^2(R_g)x$ dove κ è la **frequenza epiciclica** (o radiale), che determina la frequenza di oscillazione della stella dentro e fuori dal raggio del centro guida.

L'epiciclo è generalmente un'ellisse il cui moto è retrogrado (in senso opposto) rispetto al moto di rotazione del centro guida. La traiettoria risultante della stella, vista da un sistema di riferimento inerziale, è tipicamente una figura a rosetta, a meno che il rapporto tra la frequenza epiciclica (κ) e la velocità angolare (Ω) non sia un rapporto di numeri interi [3].

3.3.2 Bracci a Spirale

Quasi tutte le galassie giganti con gas nei loro dischi hanno una sorta di spirale, anche se semplici argomentazioni implicano che i bracci a spirale dovrebbero scomparire rapidamente. Due proprietà del disco sembrano essere essenziali: la **rotazione differenziale**, che fa sì che qualsiasi braccio materiale venga rapidamente avvolto in una spirale sempre più stretta, e l'**auto-gravità**, che alimenta le spirale.

Strutture a spirale osservate

I bracci di una galassia a spirale sono più blu del resto del disco poiché costituiscono siti di formazione stellare attiva. Alcune galassie hanno uno

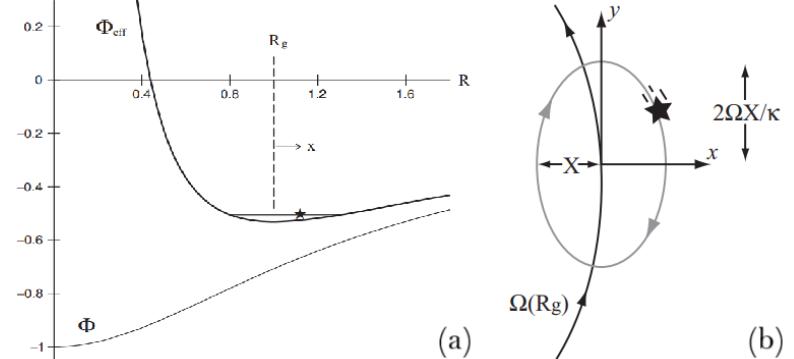


Figura 3.7: (a) Il potenziale effettivo Φ_{eff} (curva superiore) per una stella con momento angolare $L_z = 0.595$, in orbita in un "potenziale di Plummer" Φ (curva inferiore).
(b) La stella si muove in un epiciclo ellittico attorno al suo centro guida a ($x = 0, y = 0$), che viene trasportato attorno al centro galattico con velocità angolare $\Omega(R_g)$.

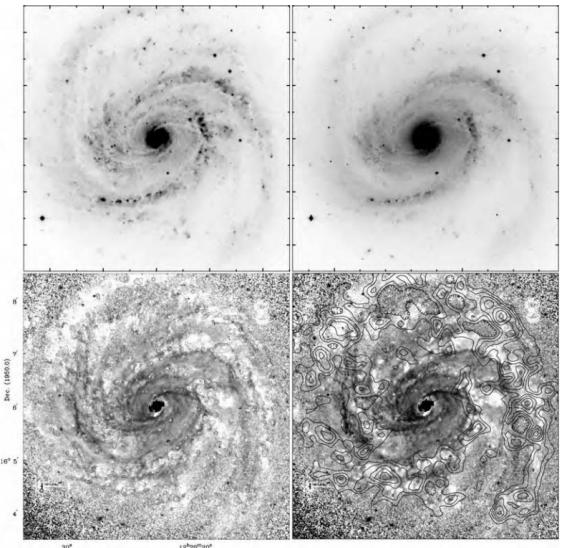


Figura 3.8: M100, galassia di tipo Sbc. In alto, banda B (sinistra) e banda I (destra); in queste immagini negative, le strisce di polvere scura appena all'interno dei bracci a spirale luminosi appaiono come sottili filamenti di luce. I pannelli inferiori mostrano il colore B - K. Le aree chiare sono blu con giovani stelle massicce e le regioni scure mostrano regioni rosse in cui le corsie di polvere si snodano nel centro della galassia [3].

schema *a fiocco di neve*, con molti segmenti di braccio corti invece di una spirale continua. Le galassie a spirale *grand-design*, invece, hanno l'architettura dei bracci di spirale ben organizzata ed una struttura particolarmente definita e prominente. Questi bracci possono essere tracciati per molti radianti in azimut e su una significativa estensione radiale. Usando le coordinate polari galattocentriche (R, ϕ) , possiamo descrivere la forma di una spirale con m bracci con l'equazione [3]:

$$\cos\{m[\phi + f(R, t)]\} = 1 \quad (3.9)$$

La funzione $f(R, t)$ descrive come la spirale è avvolta: se $|\partial f / \partial R|$ è grande, le braccia sono strettamente avvolte, mentre se è piccola, sono aperte. L'angolo di inclinazione i , l'angolo tra il braccio e la tangente al cerchio al raggio R , è dato da $\frac{1}{\tan(i)} = |R \frac{\partial \phi}{\partial R}| = |R \frac{\partial f}{\partial R}|$. Nelle spirali Sa, i ha una media di circa 5° , mentre nelle galassie Sc è generalmente nell'intervallo $10^\circ < i < 30^\circ$ [3]. Una spirale è detta *“leading”*, se ha le punte dei bracci che puntano in avanti nella direzione della rotazione della galassia, o *“trailing”*, se ha le punte rivolte nella direzione opposta alla rotazione. Dove è possibile determinare il senso, i bracci a spirale quasi sempre trailing. Nella Figura 3.8, le strette corsie di polvere sui lati interni concavi dei bracci a spirale mostrano che il gas contenente polvere viene compresso lì. Questo è un segno che le braccia non contengono una popolazione fissa di stelle e gas, ma formano un'onda di densità, un "ingorgo stellare" in cui le stelle sono *“imballate”* più densamente e si muovono più lentamente lungo le orbite. Uno dei motivi per cui si crede che molti bracci a spirale siano onde di densità è il cosiddetto **“Problema dell'Avvolgimento”**: se fossero oggetti fisici la rotazione differenziale della galassia li avvolgerebbe rapidamente in un ricciolo molto stretto.

Per capire perché, si suppone che le stelle siano inizialmente distribuite lungo una linea retta attraverso il centro della galassia, dato da $\phi = \phi_0$, mostrato in Figura 3.9. Ogni stella si muove nella sua orbita con velocità $V(R)$ e velocità angolare $\Omega(R) = V(R)/R$. Dopo il tempo t si trovano su una spirale data dalla curva $\phi = \phi_0 + \Omega(R)t$. Nel linguaggio dell'equazione 3.9, si ha $f(R, t) = -\phi_0 - \Omega(R)t$. Poiché la velocità angolare $\Omega(R)$ generalmente scende con il raggio, allora, se si prende $\Omega(R) > 0$, $f(R, t)$ aumenta spostandosi lungo il braccio verso R più grande, quindi ϕ deve diminuire. Col passare del tempo, questa spirale diventa sempre più avvolta. Dopo solo $t = 1 \text{ Gyr}$, questa spirale dovrebbe essere molto più stretta di quelle osservate in galassie Sc come la nostra [3]. Qualsiasi modello iniziale a spirale fisica subirebbe un simile avvolgimento e perciò le **stelle dei bracci a spirale devono essere continuamente rinnovate**.

Teorie per le strutture a spirale

La struttura a spirale è un fenomeno complesso ed è probabile che nessun singolo processo sia responsabile dell'intera gamma di strutture osservate.

Un modello, chiamato **modello a spirale cinematica**, può durare più a lungo se le stelle che lo compongono non sono su orbite circolari, ma sono disposte in un ordine particolare nei loro percorsi leggermente eccentrici [3]. Come già mostrato in questa sezione, la teoria degli epicicli descrive il percorso di una stella su un'orbita quasi circolare come la somma del movimento circolare di un centro guida, alla velocità $\Omega(R_g)$, e un'oscillazione epicicloidale che muove la stella dentro e fuori. L'azimut del centro guida è $\phi_{gc} = \Omega(R_g)t$, mentre il moto epicicloidale fa variare il raggio della stella come:

$$R = R_g + x = R_g + X \cos(\kappa t + \psi) \quad (3.10)$$

Qui X è l'ampiezza del moto radiale, κ è la frequenza epicicloidale e la costante ψ indica il raggio iniziale. Si inizia posizionando le stelle su diversi epicicli con i loro centri guida sparsi attorno al cerchio in R_g e si imposta $\psi = 2\phi_{gc}(0)$ per ciascuna di esse, in modo che giacciono

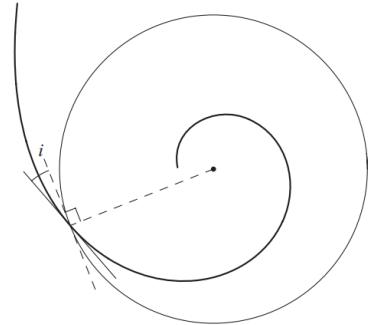


Figura 3.9: In un disco rotante in senso antiorario, dove la velocità di rotazione $\Omega(R)$ cade con raggio R , le stelle che inizialmente si trovano lungo una linea radiale sono avvolte in una spirale finale; l'angolo i è l'angolo di inclinazione della spirale.

su un ovale con suo asse maggiore che punta lungo $\phi = 0$. In questo modo si imposta una perturbazione iniziale nel disco stellare. In un secondo momento t , i centri di guida si muovono, in modo che $\phi_{gc}(t) = \phi_{gc}(0) + \Omega t$. Le stelle avanzano sui loro epicicli al raggio $R = R_g + x$, dove:

$$x = X \cos\{\kappa t + 2[\phi_{gc}(t) - \Omega t]\} = X \cos[(2\Omega - \kappa)t - 2\phi_{gc}(t)] \quad (3.11)$$

L'asse maggiore dell'ovale ora punta lungo la direzione in cui:

$$(2\Omega - \kappa)t - 2\phi = 0, \quad \text{oppure} \quad \phi = (\Omega - \kappa/2)t \equiv \Omega_p t \quad (3.12)$$

Si definisce la **velocità del modello** Ω_p in modo che la struttura costituita da stelle con centro guida R_g ritorni al suo stato originale dopo un tempo $2\pi/\Omega_p$, anche se le singole stelle completano le loro orbite attorno al centro nel tempo più breve $2\pi/\Omega$. Una spirale a due braccia può essere costituita da un insieme di ovali di stelle annidati con centri di guida a diversi raggi R_g , come mostrato a sinistra della Figura 3.10. Poiché la velocità del modello Ω_p varia con R_g , questa spirale nel tempo si avvolgerà anche in un modello finale stretto, ma lo farà più lentamente di un fattore Ω_p/Ω , che è di circa 0.3 quando la curva di rotazione è piatta.

Per descrivere una spirale con m braccia, si imposta $\psi = m\phi_{gc}(0)$ nell'equazione 3.11; le stelle con un dato centro di guida si trovano quindi su forme di m braccia che ruotano con una velocità del modello $\Omega_p = \Omega - \kappa/m$. La Figura 3.10 mostra una spirale cinematica a due braccia e una spirale a un braccio.

La **teoria delle onde di densità** della struttura a spirale si basa sulla premessa che l'attrazione gravitazionale reciproca di stelle e nubi di gas a raggi diversi può compensare la tendenza della spirale cinematica a finire e causerà la crescita di un modello che ruota rigidamente con una singola velocità Ω_p [3]. Un modo per verificare se un modello a spirale può svilupparsi spontaneamente è quello di esaminare come influenzerebbe le orbite delle stelle del disco: la **spirale crescerà solo se le stelle rispondono alla sua gravità muovendosi in modo da rafforzare il modello**. Il calcolo è lungo e scoprire come i moti forzati di tutte le stelle influenzino a loro volta il potenziale gravitazionale del disco della galassia è molto più difficile. Tale calcolo mostra che le stelle rispondono in modo da rafforzare la spirale solo se la frequenza perturbante $m|\Omega_p - \Omega(R)|$ è più lenta della frequenza $\kappa(R)$ a quel raggio. La Figura 3.11 mostra una simulazione gravitazionale di N-corpi, seguendo ciò che accade a un disco di "stelle" che si attraggono a vicenda per gravità. Inizialmente è assimmetrica, con le stelle su orbite quasi circolari. Il modello a spirale crescente è a due braccia e si forma anche una barra centrale. Man mano che le velocità casuali stellari crescono, il disco si "riscalda" e la spirale alla fine scompare. L'aggiunta continua di queste nuove stelle può essere importante per prolungare la vita di un modello a spirale, o per ricrearlo periodicamente. Infine, un'altra possibilità è che la spirale sia guidata dall'**attrazione gravitazionale di una galassia compagna**. Infatti, le galassie con i migliori modelli a spirale grand-design hanno compagni vicini. Il passaggio ravvicinato di una galassia vicina può creare almeno una spirale a due braccia temporanea [3].

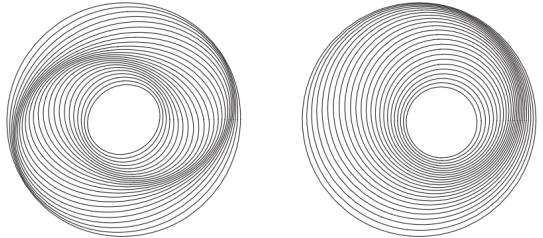


Figura 3.10: Sinistra, orbite ovali nidificate per formare una spirale a due braccia. Destra, una spirale ad un braccio.

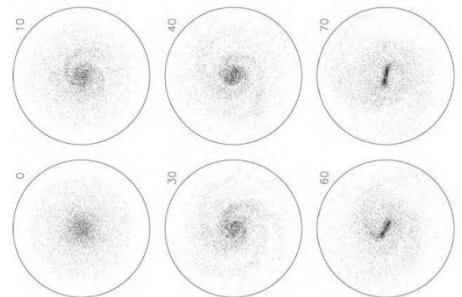


Figura 3.11: La simulazione gravitazionale a N-corpi mostra come un disco di 50 mila particelle che si attraggono a vicenda per gravità sviluppa prima un modello a spirale a due braccia, poi una barra. Il rigonfiamento galattico e l'alone scuro sono rappresentati da una forza interna fissa [3].

Capitolo A

Appendice

A.1 Probabilità Statistica di Urto Geometrico

Viene presentato un semplice calcolo del **cammino libero medio** λ dopo il quale due stelle in una galassia si scontrano, al fine di mostrare che l'**effetto delle collisioni geometriche è trascurabile**. Una rappresentazione grafica utile è presentata in Figura A.1.

Si assume come modello di galassia un sistema di N di stelle, ognuna caratterizzata da un raggio pari a quello del sole $r = R_\odot$, distribuite *omogeneamente* in una sfera di raggio R . Il volume della sfera che rappresenta la galassia è $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Definendo la *sezione d'urto geometrica* per l'impatto tra due stelle $\sigma = 4\pi r^2$ e il libero cammino medio tra le stelle λ , il volume efficace vale anche $V = N \cdot 4\pi r^2 \cdot \lambda$. Da queste due espressioni del volume si ottiene:

$$\frac{\lambda}{R} = \frac{R^2}{Nr^2} \quad (\text{A.1})$$

una stima del libero cammino medio rispetto alla dimensione della galassia. Assumendo come valori del nostro modello ragionevole di galassia $N = 10^{11}$, $r = R_\odot = 7 \cdot 10^{10} \text{ cm}$, $R = 3 \cdot 10^{22} \text{ cm}$, il **valore numerico** calcolato è $\frac{\lambda}{R} = 10^{13}$.

Il libero cammino medio che separa le stelle in una generica galassia è 10^{13} volte la dimensione della galassia e perciò la **probabilità di urto è mediamente nulla** su scale temporali cosmologiche. Tuttavia, è importante ricordare che in determinate situazioni astrofisiche ad alta densità stellare (ad esempio nelle regioni centrali delle galassie) la probabilità di collisioni geometriche tra le stelle non è trascurabile [1].

A.2 Calcolo Approssimativo del t_{2b}

In questa sezione viene sviluppato un calcolo approssimativo del t_{2b} per poter verificare la non-collisionalità delle galassie.

Si considera una galassia come un sistema autogravitante sferico all'equilibrio, con massa totale $M = Nm$, data quindi dalle sue N stelle assunte con massa uguale m , e con raggio R . Si utilizza inoltre la **dispersione delle velocità** degli elementi della galassia σ . Questa viene ricavata dal **teorema del Viriale**:

$$M\sigma^2 = \frac{GM^2}{R} \quad (\text{A.2})$$

Nella formula del t_{2b} (eq. 2.6), si adotta come velocità $\|\bar{v}_t\| = \|\bar{v}_f\| = \sigma$ e come potenziale di Rosenbluth $\Phi(\|\bar{v}_t\|) = \frac{1}{\sigma}$, sapendo che a grandi velocità $\Psi(\|\bar{v}_t\|) \xrightarrow{\|\bar{v}_t\|^2 \rightarrow \infty} \frac{1}{\|\bar{v}_t\|}$ [2]. Si ricava:

$$t_{2b} = \frac{\sigma^3}{8\pi G^2 m_f^2 n \ln \Lambda} \quad (\text{A.3})$$

Si mostra un confronto del t_{2b} per diversi sistemi e perciò si introduce nel calcolo un **tempo di riferimento intrinseco** quale il **tempo dinamico** $t_{dyn} = \frac{2R}{\sigma}$, ossia il tempo necessario a una stella con velocità σ per attraversare tutto il sistema. Quindi, si studia il rapporto tra i tempi $\frac{t_{2b}}{t_{dyn}}$. Si assume una **densità omogenea** di stelle e si usa $n = \frac{N}{4/3\pi R^3}$. Si ottiene:

$$\frac{t_{2b}}{t_{dyn}} = \frac{R^2 \sigma^4}{12 G^2 m^2 \ln \Lambda} \frac{N}{4/3\pi R^3} \quad (\text{A.4})$$

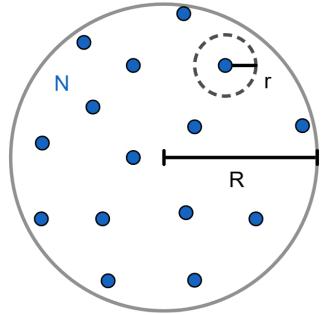


Figura A.1: Rappresentazione del calcolo di λ .

Sempre per il teorema del Viriale si nota che vale l'identità $(\frac{GM}{R\sigma^2})^2 = 1$ perciò si semplifica l'espressione: $\frac{t_{2b}}{t_{dyn}} = \frac{N}{12\ln\Lambda}$. Anche il valore di logaritmo di Coulomb $\ln\Lambda = b_{max}/b_{min}$ può essere semplificato a $\ln\Lambda = \ln N$ utilizzando le formule del problema a due corpi e il Teorema del Viriale [2]. Si ricava:

$$\frac{t_{2b}}{t_{dyn}} = \frac{0.1N}{\ln N} \quad (\text{A.5})$$

A.3 Teorema Viriale Tensoriale

Viene ricavato il **teorema viriale tensoriale** in una direzione z . Il punto di partenza è l'equazione 2.2 mostrata nel primo capitolo, che esprime la forza gravitazionale esercitata sulla stella α nella posizione x_α dalle altre stelle della galassia, nelle posizioni x_β , con masse m_β . Si moltiplica la componente z dell'equazione per la coordinata z z_α e si somma su tutte le stelle, per ottenere:

$$\sum_\alpha \frac{d}{dt} (m_\alpha v_{z\alpha}) z_\alpha = - \sum_{\alpha, \beta, \alpha \neq \beta} \frac{Gm_\alpha m_\beta}{|\bar{x}_\alpha - \bar{x}_\beta|^3} (\bar{z}_\alpha - \bar{z}_\beta) z_\alpha \quad (\text{A.6})$$

dove $v_{z\alpha}$ è la componente z di v_α , la velocità della stella α . Si potrebbe anche partire dalla forza sulla stella β :

$$\sum_\beta \frac{d}{dt} (m_\beta v_{z\beta}) z_\beta = - \sum_{\alpha, \beta, \alpha \neq \beta} \frac{Gm_\alpha m_\beta}{|\bar{x}_\alpha - \bar{x}_\beta|^3} (\bar{z}_\beta - \bar{z}_\alpha) z_\beta \quad (\text{A.7})$$

Facendo la media di questi due si ottiene un'equazione simile:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{zz}}{dt^2} = 2K\xi_{zz} + U\xi_{zz} \quad (\text{A.8})$$

dove la componente z del momento di inerzia è definita come $I_{zz} \equiv \sum_\alpha m_\alpha z_\alpha z_\alpha$, l'energia cinetica associata al moto nella direzione z è $K\xi_{zz} \equiv \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha v_{z\alpha} v_{z\alpha}$, (6.24) e il contributo zz all'energia potenziale è $U\xi_{zz} \equiv - \sum_{\alpha, \beta, \alpha \neq \beta} \frac{1}{2} \frac{Gm_\alpha m_\beta}{|\bar{x}_\alpha - \bar{x}_\beta|^3} (\bar{z}_\alpha - \bar{z}_\beta)^2$.

Se tutte le stelle sono legate all'interno della galassia, si può scrivere:

$$2 \langle K\xi_{zz} \rangle + \langle U\xi_{zz} \rangle = 0 \quad (\text{A.9})$$

dove le parentesi angolari indicano una media a lungo termine.

A.4 Misura della curva di rotazione

È illustrato il calcolo della curva di rotazione della **Via Lattea** dal suo interno, ponendo l'osservatore sulla posizione del Sole. Si suppone di osservare un oggetto che si avvicina o si allontana dall'osservatore che segue un'orbita esattamente circolare; si veda Figura A.2.

Il Sole orbita a raggio R_0 con velocità V_0 , mentre una stella P a raggio R ha velocità orbitale $V(R)$. La stella si allontana da noi con velocità $V_r = V\cos(\alpha) - V_0\sin(l)$. Usando la regola del seno, si ha $\sin(l/R) = \sin(90 + \alpha)/R_0$, e così:

$$V_r = R_0\sin(l) \left(\frac{V}{R} - \frac{V_0}{R_0} \right) \quad (\text{A.10})$$

Se la Via Lattea ruotasse rigidamente come un giradischi, le distanze tra le stelle non cambierebbero e la V_r sarebbe sempre zero. In effetti, le stelle più lontane dal centro impiegano più tempo per completare le loro orbite; la velocità angolare V/R scende con il raggio R . Quando la stella è vicina al Sole, in modo che $d \ll R$, si può trascurare i termini in d^2 ; usando la regola del coseno per il triangolo S-P-GC quindi dà $R \approx R_0 - d\cos(l)$. La velocità radiale dell'equazione A.10 diventa:

$$V_r \approx R_0\sin(l) \left(\frac{V}{R} \right) (R - R_0) \approx d\sin(2l) \left[-\frac{R}{2} \left(\frac{V}{R} \right)' \right]_{R_0} \equiv dA\sin(2l) \quad (\text{A.11})$$

dove si usa il simbolo \prime per la differenziazione rispetto a R . L'oggetto A è la prima costante di Oort, che calcolata è $A = 14.8 \pm 0.8 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ [3].

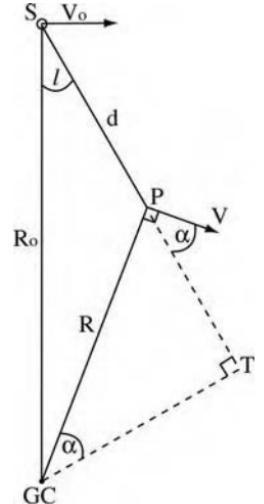


Figura A.2
Diagramma geometrico illustrante la curva di rotazione della Via Lattea.

Il moto proprio di una stella a P rispetto al Sole può essere ricavato in modo simile. Dalla Figura A.2, la velocità tangenziale è $V_t = V \sin(\alpha) - V_0 \cos(l)$. Notando che $R_0 \cos(l) = R \sin(\alpha) + d$, si ha:

$$V_t = R_0 \cos(l) \left(\frac{V}{R} - \frac{V_0}{R_0} \right) - V \frac{d}{R} \quad (\text{A.12})$$

Vicino al Sole, si sostituisce $R_0 - R \approx d \cos(l)$, per mostrare che V_t varia quasi linearmente con la distanza d :

$$V_t \approx d \cos(2l) \left[-\frac{R}{2} \left(\frac{V}{R} \right)' \right]_{R_0} - \frac{d}{2} \left[\frac{1}{R} (RV)' \right]_{R_0} \equiv d[A \cos(2l) + B] \quad (\text{A.13})$$

dove B è la seconda costante di Oort $B = -12.4 \pm 0.6 \text{ } \text{km s}^{-1} \text{kpc}^{-1}$ [3]. Le costanti di Oort A e B misurano rispettivamente la **deviazione dalla rotazione rigida** e il **gradiente del momento angolare nel disco**.

Bibliografia

- [1] Ciotti Luca. Alcune questioni matematiche riguardanti la dinamica stellare. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 5-A(11):97–141, 11 2002.
- [2] Ciotti Luca. An introduction to stellar dynamics. *Cambridge University Press*, 2021.
- [3] Sparke Linda S. e Gallagher John S. III. Galaxies in the universe. *Cambridge University Press*, 2017.
- [4] Binney James e Tremaine Scott. Galactic dynamics: Second edition. *Princeton University Press*, 2008.
- [5] Carroll Bradley e Dale A. An introduction to modern astrophysics. *Cambridge University Press*, 2017.