

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Struttura e Cinematica della Via Lattea

Tesi di Laurea

Presentata da:
Gaia Brignoli

Relatrice:
Prof.ssa Marcella Brusa

Indice

1	Introduzione	2
1.1	La Scoperta della Profondità Cosmica: Cenni Storici	2
1.2	Classificazione Morfologica delle Galassie	3
1.3	Proprietà Astrofisiche Fondamentali della Via Lattea	5
2	Struttura della Via Lattea	5
2.1	Centro Galattico e Bulge	6
2.2	Disco Galattico	7
2.3	Alone Galattico	8
3	Cinematica della Via Lattea	9
3.1	Rotazione Differenziale e Winding Dilemma	10
3.2	Curva di Rotazione della Via Lattea	11
3.3	Il Calcolo della Velocità di Rotazione e l'Intuizione della Materia Oscura	14
3.4	Le Costanti di Oort	15
3.5	Conclusione	16
	Appendici	17
A	Dimostrazione delle Costanti di Oort	18

Capitolo 1

Introduzione

Una galassia è definita come un vasto e complesso sistema auto-gravitante, composto da stelle, ammassi stellari, gas e polveri. La nostra Galassia, la Via Lattea, costituisce l'oggetto di studio centrale del presente elaborato che si propone di analizzarne in dettaglio la morfologia e la dinamica; in particolare, concentrandosi sulla sua complessa morfologia strutturale e sulle leggi dinamiche che ne governano la Cinematica.

1.1 La Scoperta della Profondità Cosmica: Cenni Storici

Fin dall'antichità, la debole banda luminosa e lattiginosa che solca la volta celeste, da cui deriva il nome greco " $\gamma\alpha\lambda\alpha\xi\iota\alpha\sigma$ " (galaxies, ovvero "di latte, lattèo"), ha suscitato interrogativi riguardo alla nostra posizione nell'universo. La storia dell'astronomia è infatti costellata da innumerevoli tentativi di definire il contesto *spaziale* in cui l'umanità è collocata.

Nel mondo antico, il dibattito sulla natura della Via Lattea era già vivo: i filosofi pluralisti, tra cui Anassagora (circa 500-428 a.C) e Democrito (450-370 a.C), ipotizzarono che la fascia lattiginosa fosse, in realtà, un aggregato di stelle lontane. Questa intuizione fu temporaneamente smentita da figure influenti come Aristotele, il quale, nelle sue opere, sostenne che la Via Lattea fosse un fenomeno atmosferico generato nella parte più alta dell'atmosfera terrestre.

Il salto qualitativo si ebbe con l'invenzione del telescopio. Fu Galileo Galilei, nel 1610, a fornire la prova diretta di queste speculazioni, confermando che la Via Lattea fosse '*un ammasso di innumerevoli stelle disseminate a mucchi*' (Sidereus Nuncius, Galileo Galilei 1610).

Nei tre secoli successivi, il dibattito si concentrò sulla collocazione di questo sistema stellare nell'universo. Già a metà del XVII secolo, le prime osservazioni telescopiche rivelarono l'esistenza di oggetti diffusi e sfocati, definite nebulose. Nel 1750, Thomas Wright ipotizzò che la Via Lattea fosse uno strato piatto di stelle e suggerì che tali nebulose potessero essere sistemi analoghi situati a enormi distanze. Fu il filosofo Immanuel Kant (1755) a sviluppare ulteriormente questa teoria, proponendo che la Via Lattea fosse uno di questi 'universi isola' e spiegando che oggetti come la Galassia di Andromeda apparissero nebulosi a causa delle loro immense distanze, impedendo di distinguere le singole stelle.

Questa ipotesi divenne il fulcro della cosiddetta *Grande Contesa Astronomica* dei primi anni Venti del Novecento.

Da un lato, Harlow Shapley, studiando la distribuzione degli ammassi globulari ¹, osservò che tale distribuzione non fosse isotropa², ma risultasse concentrata verso la costellazione del Sagittario, dove egli ipotizzò correttamente la presenza del Centro Galattico. Tuttavia, Shapley sosteneva che tutte le nebulose a spirale³ facessero parte del nostro unico sistema stellare, la Via Lattea.

Dall'altro lato, Heber Curtis supportava la teoria degli Universi Isola, argomentando che oggetti come la nebulosa di Andromeda dovessero trovarsi a distanze enormi, esterne alla Via Lattea. Tale conclusione derivava dal fatto che la loro luminosità apparente, dedotta dalla magnitudine

¹Sistemi stellari antichi, legati gravitazionalmente e caratterizzati da elevate densità. Costituiscono una componente delle galassie, associate in particolare all'alone galattico.

²L'isotropia è la proprietà di un sistema o di una distribuzione per cui non esistono direzioni privilegiate nello spazio

³Il termine venne successivamente sostituito da 'galassia a spirale'.

apparente⁴ delle *novae*⁵ osservate in esse, risultava troppo bassa per oggetti appartenenti alla nostra galassia.

Il dibattito trovò soluzione grazie ai lavori di Edwin P. Hubble (1889-1953). A partire dal 1926, Hubble condusse uno studio sistematico e una classificazione morfologica delle galassie, nota come Sequenza di Hubble, o diagramma a diapason. (*tuning fork*).

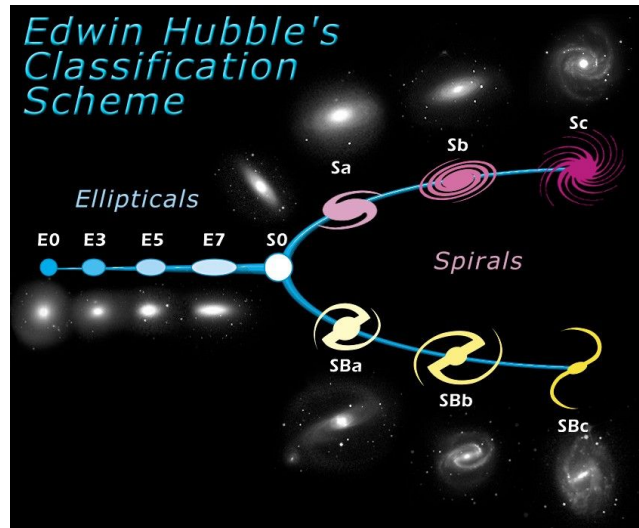


Figura 1.1. Classificazione di Hubble per la morfologia delle galassie. ©NASA e ESA.

1.2 Classificazione Morfologica delle Galassie

Seguendo il diagramma illustrato in figura 1.1, le galassie possono essere suddivise in tre classi principali: ellittiche(E), lenticolari(S0) e spirali(S), a cui si aggiunge una piccola frazione di irregolari (Irr).

Questa classificazione non è puramente formale, ma riflette proprietà fisiche fondamentali dei sistemi galattici.

- **Galassie Ellittiche(E) e Lenticolari(S0):** Collocate sul lato sinistro del diagramma (note come *Early-Type Galaxies*, ETGs), queste galassie presentano *isofote*⁶ approssimabili a ellissi.

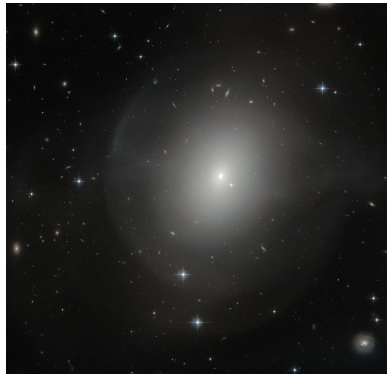
Le galassie ellittiche vengono ulteriormente classificate in base alla loro ellitticità ϵ , da E0 (perfettamente rotonde, $\epsilon \approx 0$) a E7 (le più' schiacciate). Le ETGs sono tipicamente sistemi di colore rosso, composti da popolazioni stellari vecchie, con formazione stellare debole o del tutto assente (vengono infatti definite galassie *quiescenti* o *passive*).

Le S0, o lenticolari, rappresentano una forma di transizione morfologica tra le ellittiche e le spirali: possiedono un rigonfiamento centrale (bulge) e un disco privo di bracci a spirale e contenente una quantità ridotta di gas freddo.

⁴La magnitudine apparente (m) è una misura logaritmica della luminosità osservata di un oggetto astronomico, correlata al flusso osservato (F) secondo la relazione $m = -2.5 \log(\frac{F}{F_0})$, dove F_0 è un flusso di riferimento (ad esempio quello della stella Vega)

⁵Le novae sono stelle variabili eruttive appartenenti a sistemi binari, in cui una nana bianca accresce materia dalla sua compagna, dando origine a un improvviso aumento di luminosità (*outburst*)

⁶Le isofote sono curve che congiungono punti di uguale brillantezza superficiale (I_λ) di un oggetto esteso proiettato sulla volta celeste.



(a) NGC 2865, Hubble Space Telescope. Galassia ellittica posta a circa 100 milioni di anni luce.



(b) NGC 4886, galassia lenticolare osservata da Hubble.

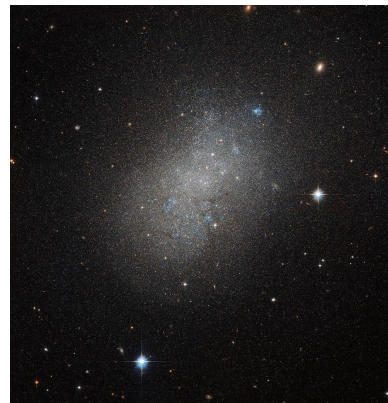
Figura 1.2. Esempi di galassie ellittiche e lenticolari.

- **Galassie a Spirale(S) e Irregolari(Irr):** Collocate sul lato destro del diagramma a diapason (note come *Late-Type Galaxies*, LTGs o *Star-Forming Galaxies*, SFGs), queste galassie si distinguono per il loro colore blu, la maggiore presenza di gas freddo e un'intensa attività di formazione stellare in corso. Le galassie a spirale sono caratterizzate da un disco appiattito attraversato da bracci a spirale e da un rigonfiamento centrale (bulge). Esse si suddividono in due sottoclassi principali: le spirali normali (Sa, Sb, Sc) e le spirali barrate (SBa, SBb, SBc). Hubble classificò i tipi Sa-Sc in base a due criteri principali: la diminuzione della prominenza del bulge rispetto al disco e l'aumento dell'apertura dei bracci a spirale lungo la sequenza.

All'estremità della sequenza si trovano infine le galassie irregolari, che non rientrano in alcuna delle categorie morfologiche precedenti e presentano strutture caotiche, prive di simmetria o organizzazione apparente.



(a) Galassia a spirale M101 (Pinwheel Galaxy, HST).



(b) NGC 5264, galassia nana irregolare (HST).

Figura 1.3. Esempi di galassie a spirale e irregolari.

La classificazione proposta da Hubble fu successivamente rivisitata ed espansa da Gérard de Vaucouleurs (1959), il quale introdusse classi intermedie, come Sm e Im, per descrivere in modo più dettagliato le galassie con caratteristiche morfologiche di transizione.

Queste categorie fanno riferimento a prototipi come le Nubi di Magellano⁷, permettendo una rappresentazione più continua e realistica della varietà osservata nelle strutture galattiche.

⁷Le Nubi di Magellano sono le galassie più vicine alla Via Lattea, tanto da essere considerate suoi satelliti. Sono classificate come galassie nane di tipo irregolare.

1.3 Proprietà Astrofisiche Fondamentali della Via Lattea

La Via Lattea è classificata come una galassia a spirale barrata (tipo Sb nella scala di Hubble) e presenta le seguenti caratteristiche principali:

Tabella 1.1. Proprietà astrofisiche fondamentali della Via Lattea.

Proprietà Generale	Valore Tipico
Magnitudine Assoluta (M_V)	≈ -21
Luminosità (banda B)	$3 \times 10^{10} L_\odot$
Massa Totale	$\approx 10^{12} M_\odot$ (Materia Oscura + Barionica)
Massa Stellare Totale (M_\star)	$\approx 5 \times 10^{10} M_\odot$ (principalmente nel disco)
Diametro Totale	≈ 25 kpc (disco stellare)
Raggio dell'Halo di Materia Oscura	≈ 300 kpc
Distanza Sole-Centro (R_\odot)	≈ 8.7 kpc
Periodo di Rotazione del Sole	≈ 250 Myr
Tasso di Formazione Stellare (SFR)	$\approx 1-3 M_\odot \text{ yr}^{-1}$

La struttura e la cinematica delle diverse componenti della Via Lattea (disco, bulge, alone stellare e alone di materia oscura), nonché le interazioni che avvengono tra di esse, definiscono l'attuale morfologia e dinamica della Galassia.

Questi aspetti saranno analizzati in modo approfondito nei capitoli successivi del presente elaborato.

Capitolo 2

Struttura della Via Lattea

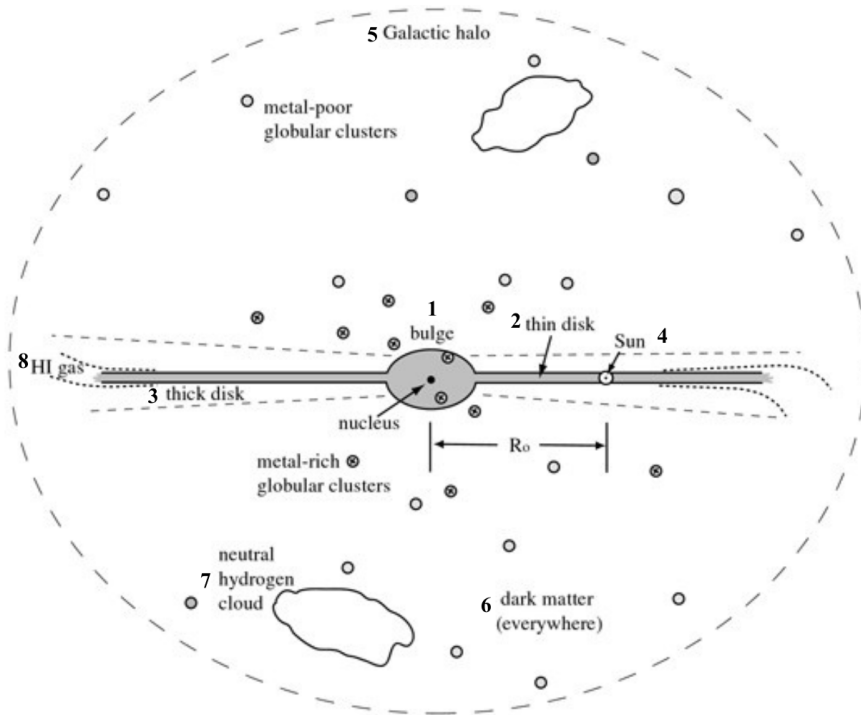


Figura 2.1. Descrizione della struttura della Via Lattea da [9]

La Via Lattea rappresenta l'unica galassia che offre agli studiosi l'opportunità di essere osservata dall'interno. Questo punto di vista costituisce un notevole vantaggio, in particolare nell'ambito dell'approccio *archeologico*, poiché consente di studiare in dettaglio la cinematica, le varie componenti stellari (come il *thin disc* e il *thick disc*) la complessità del Mezzo Interstellare (*Interstellar Medium*, ISM) e la sua composizione chimica.

Tuttavia, la nostra posizione all'interno del *thin disc* comporta significative difficoltà osservative. Le osservazioni rivolte verso le regioni del disco sono infatti fortemente ostacolate dall'estinzione della polvere interstellare, che può raggiungere un'attenuazione di circa 30 magnitudini in direzione del Centro Galattico. Ciò implica che solo un fotone ottico ¹ su 10^{12} riesce a raggiungere la Terra.

Nonostante la missione *Gaia* abbia rivoluzionato la nostra conoscenza della componente stellare, fornendo misure estremamente accurate di distanze e moti propri per oltre un miliardo di stelle, permangono ancora incertezze riguardo ad aspetti fondamentali della struttura galattica. Tra questi si annoverano la scala dimensionale esatta del disco stellare, il numero e la disposizione precisa dei bracci a spirale, nonché le proprietà dettagliate della barra centrale.

Questo capitolo si concentra sulle proprietà fisiche della Via Lattea che possono essere studiate, descrivendo le caratteristiche morfologiche e dinamiche di ciascuna macro-regione: Centro Galattico e Bulge (nella 2.1, punto 1), Disco galattico (nella 2.1, punto 2 e 3) e Alone Galattico (nella 2.1, punto 5).

2.1 Centro Galattico e Bulge

Contrariamente all'aspetto che si osserverebbe da una prospettiva esterna, il Bulge galattico non è una struttura sferoidale ma presenta una morfologia allungata a forma di barra. Questa barra si estende per circa 4-5 kpc dal Centro Galattico e la sua struttura, osservata in proiezione, risulta spesso compatibile con le forme *boxy/peanut-shaped*, tipiche delle instabilità del disco e delle barre nelle galassie viste di taglio. La massa stellare del bulge è stimata intorno a $1 - 1.5 \times 10^{10} M_{\odot}$.

La popolazione stellare del Bulge è dominata da stelle vecchie, con età generalmente superiori a 9 Gyr, coeve a quelle dell'alone galattico. Sebbene la metallicità mostri un'ampia dispersione, il Bulge risulta mediamente *metal-poor* ($[Fe/H] \gtrsim 0$), con una metallicità media complessiva sub-solare ($\langle [Fe/H] \rangle = -0.2$).

Dal punto di vista cinematico, le stelle del Bulge mostrano una rotazione coerente (*disc-like*), con velocità che possono superare i 100 km/s. Questa rotazione ordinata, combinata con una dispersione di velocità intrinseca relativamente elevata ($\sigma \approx 100 km/s$), rappresenta un importante indizio della sua origine, verosimilmente legata all'evoluzione dinamica del disco e non esclusivamente solo a fenomeni di *merging*².

Nel cuore della Galassia, all'interno del Bulge, risiede il Buco Nero Supermassiccio (SMBH), denominato *Sagittarius A** (Sgr A*). La sua massa è stata stimata essere $M_{\bullet} \simeq 4.1 \times 10^6 M_{\odot}$, rappresentando la migliore determinazione di massa di un buco nero in una galassia, ottenuta

¹Un fotone ottico è il quanto di energia associato alla radiazione elettromagnetica (EM) nella banda dello spettro del visibile, con una lunghezza d'onda compresa approssimativamente tra 4×10^{-5} e $9 \times 10^{-5} cm$

²Mostrando una rotazione ordinata significativa (intermedia tra un rapporto $\frac{v_{rot}}{\sigma} \gg 1$, tipico dei dischi "freddi" e $\frac{v_{rot}}{\sigma} \lesssim 1$, caratteristico degli sferoidi puri o degli aloni), la maggior parte degli astrofisici ritiene che la massa stellare del Bulge sia di un pseudobulge, formatosi principalmente tramite processi interni al disco.

mediante il tracciamento delle orbite kepleriane di singole stelle (come S2) che gli ruotano attorno.

Nonostante l'enorme massa, Sgr A* è un nucleo galattico attivo (AGN³) estremamente debole in termini di emissione radio e X, specialmente se confrontato con i quasar (gli AGN più potenti e luminosi, capaci di raggiungere luminosità fino a 10^{48}ergs^{-1}).

La potenza di Sgr A* è di poche migliaia di volte superiore a quella del Sole ($\sim 3.96 \times 10^{33} \text{ergs}^{-1}$).

Per quanto riguarda l'ambiente circumnucleare (ossia la regione entro poche centinaia di parsec dal GC), esso è estremamente attivo e sostiene una frazione significativa (pari al 5-10%) del tasso totale di formazione stellare della Galassia. La zona di gas freddo in questa regione è caratterizzata da un anello rotante di gas molecolare e atomico con massa compresa tra $10^7 - 10^8 M_{\odot}$. Essa ospita anche un plasma caldo ($T \approx 10^7 K$) la cui pressione confina le nubi molecolari generando un vento galattico.

Tali venti, insieme alle esplosioni di supernove (SNe) e agli episodi di starburst⁴, accelerano elettroni a velocità relativistiche. L'interazione tra questi elettroni e i fotoni del campo di radiazione interstellare, attraverso il processo di *Compton inverso*, è ritenuta uno dei responsabili della produzione dell'emissione gamma che origina le Bolle di Fermi (gigantesche strutture di emissione γ che si estendono per circa 10 Kpc sopra e sotto il piano Galattico).

2.2 Disco Galattico

Il disco Galattico rappresenta la componente principale che ospita la maggior parte delle stelle visibili e del Mezzo Interstellare (ISM). La massa totale di stelle contenuta in questo disco è stimata intorno alle $5 \times 10^{10} M_{\odot}$. Nella regione locale, dove si trova il Sole, la densità stellare nel disco è di circa 0.1pc^{-3} e cresce sensibilmente verso il centro galattico e seguendo una distribuzione che può essere approssimata a una funzione esponenziale di tipo $n(R) \propto e^{-R/h_R}$. Il disco si estende fino a un raggio di almeno 15 kpc, oltre tale limite la densità stellare diminuisce rapidamente. Le stelle nel disco seguono orbite quasi circolari attorno al Centro Galattico con velocità medie di circa 200km s^{-1} .

Thin Disc (Disco Sottile)

Il Disco sottile costituisce la componente più giovane e prominente del disco galattico, contenendo circa il 95% delle stelle totali e con un'altezza di scala verticale (h_z) ridotta (tipicamente compresa tra 300 e 400 pc, può scendere sotto i 150 pc per la componente di gas neutro). La formazione stellare (SFR) è infatti fortemente concentrata in questa componente: la continua nascita di nuove stelle è fondamentale per mantenere il disco dinamicamente "freddo". Queste, infatti, sono caratterizzate da una bassa dispersione di velocità e da una rotazione media di circa 200km s^{-1} . Il disco quindi ospita tutte le stelle giovani e massicce, come quelle di tipo spettrale A, la cui vita media è inferiore a un Gyr. E' a causa della loro breve durata che queste mantengono dispersioni di velocità molto ridotte, nell'ordine di pochi km s^{-1} inoltre, presentano generalmente un'alta metallicità (abbondanza di elementi più pesanti di He) coerente con un'età compresa tra 0.1 Gyr e 10 Gyr e con un'evoluzione chimica avanzata, dovuta ai continui processi di arricchimento.

³Un Nucleo Galattico Attivo è una sorgente di intensa emissione energetica situata nel nucleo compatto di una galassia. Tale emissione non è dovuta alla normale radiazione stellare, ma è alimentata dall'accrescimento di materia (gas o stelle) su un Buco Nero Supermassiccio ($\log(M_{\bullet}/M_{\odot}) \approx 6 - 10$).

⁴Uno *starburst* è un episodio di formazione stellare eccezionalmente intenso ma transitorio (di durata tipicamente inferiore, $t_{burst} 10^8 \text{yr}$), che coinvolge grandi quantità di gas e polveri

L'idrogeno molecolare (H_2) e neutro (HI) (nella 2.1, punto 8), insieme alla polvere interstellare, sono invece confinati in uno strato molto sottile di circa 200 pc di spessore. Le braccia a spirale, le strutture più luminose e riconoscibili della Galassia, sono strettamente legate proprio a questo strato di gas e polvere. Esse non rappresentano strutture materiali fisse, ma onde di densità in cui gas e polveri vengono compressi, favorendo la formazione di nuove stelle. In queste regioni nascono le stelle massicce e brillanti di tipo O e B, la cui intensa radiazione ultravioletta ionizza il gas circostante, dando origine alle regioni di HII (figura 2.1, punto 7), che rendono visibili le spirali.

Thick Disc (Disco Spesso)

Il Disco Spesso è una componente più antica e meno densa del Disco Galattico. A differenza del *thin disk*, si tratta di una struttura dinamicamente "calda", caratterizzata da una dispersione di velocità verticale σ_z notevolmente maggiore rispetto a quella del Disco Sottile. Di conseguenza, il Disco Spesso è verticalmente più esteso, con un'altezza di scala h_z tipica compresa tra 900 pc o 1 Kpc.

Le stelle più antiche, con età superiori a 7-8 Gyr, mostrano dispersioni di velocità maggiori poiché le loro orbite sono state perturbate nel tempo dalle fluttuazioni gravitazionali causate dalle nubi di gas molecolare e dalle braccia a spirale. In generale, tali stelle presentano una metallicità inferiore, con valori compresi tra $Z_{\odot}/10$ e $Z_{\odot}/2$.

L'assenza di stelle massicce e giovani (di tipo O, B e A) indica che la formazione stellare nel disco spesso si è interrotta almeno 3 miliardi di anni fa. Una delle ipotesi più accreditate è che questo rappresenti il residuo di un primo disco Galattico, successivamente "riscaldato" cinematicamente a seguito dell'accrescimento o della fusione con una piccola galassia satellite. Tale evento avrebbe trasferito energia alle orbite stellari, aumentato i moti casuali e portato alla configurazione attualmente osservata.

2.3 Alone Galattico

L'Alone Galattico (o alone stellare) rappresenta una delle componenti più estese e meno dense della Via Lattea. Si tratta di una struttura di forma approssimativamente sferoidale che, a differenza del disco sottile, è supportata dalla rotazione. L'alone è infatti dinamicamente "caldo": le stelle che lo compongono seguono orbite casuali ed eccentriche, sostenendo la struttura attraverso la dispersione di velocità piuttosto che attraverso la rotazione ordinata (figura 2.2). Nel complesso, l'alone costituisce la parte meno massiva della Galassia: la massa totale delle stelle che lo compongono è stimata inferiore a circa $1 \times 10^9 M_{\odot}$.

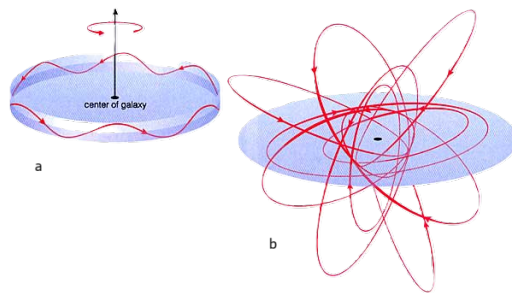


Figura 2.2. Orbite stellari caratteristiche della componente del disco (a) e della componente sferoidale (b).

Ammassi Globulari (Pop II)

L'alone stellare è formato da stelle diffuse, ammassi stellari e flussi di stelle residui di antiche interazioni mareali. Tra questi, gli Ammassi Globulari rappresentano una componente fondamentale: essi sono sistemi stellari molto compatti e popolosi che seguono orbite fortemente eccentriche e distribuite in modo quasi casuale, non partecipando alla rotazione del disco. La loro distribuzione spaziale, approssimativamente sferica, si estende fino a distanze di almeno

35 Kpc dal CG.

Insieme alle stelle diffuse dell'alone, gli ammassi globulari costituiscono la cosiddetta Popolazione II. Le stelle di questa popolazione sono estremamente antiche, con età compresa tra i 12 e i 13.5 Gyr, e si ritiene che la loro formazione sia avvenuta nelle prime fasi del collasso iniziale della protogalassia, in parte attraverso processi interni e in parte tramite l'accrescimento di piccole galassie satelliti. La loro nascita precoce è confermata anche dal punto di vista chimico; queste stelle sono infatti caratterizzate da una bassa metallicità: la frazione di elementi pesanti Z è in genere inferiore a 0.002, corrispondenti a valori fino a $1/100$ o $1/300$ dell'abbondanza solare. Tale povertà di metalli ne fa dei veri e propri "fossili" dell'Universo primordiale, fornendo preziose informazioni sulle prime fasi della formazione galattica.

Introduzione alla Materia Oscura

L'Alone Galattico (Halo) non è composto esclusivamente da materia barionica (stelle e gas), ma ospita anche la frazione dominante della massa complessiva della Via Lattea. La massa totale della Galassia è infatti stimata intorno a $10^{12}M_{\odot}$ e la parte preponderante di essa è attribuita alla Materia Oscura (*Dark Matter*, DM). Questa componente, non interagendo con la radiazione elettromagnetica, è invisibile alle osservazioni e non emette né assorbe luce. La DM costituisce circa l'80% della materia totale dell'Universo e si ipotizza sia distribuita in un vasto Alone Oscuro (dark Halo) di forma quasi sferica, che avvolge completamente il disco e il bulge barionico.

L'esistenza della Materia Oscura non può essere confermata attraverso osservazioni dirette, ma viene dedotta dai suoi effetti gravitazionali sulle componenti visibili dalle galassie. Essa gioca un ruolo cruciale nella stabilizzazione dei dischi galattici e risulta indispensabile per spiegare le principali caratteristiche cinematiche della Via Lattea e delle altre galassie a spirale.

La prova più convincente della presenza di un alone di DM deriva dallo studio delle curve di rotazione. Se la massa galattica fosse limitata alla sola materia luminosa, la velocità orbitale del gas e delle stelle diminuirebbe con la distanza dal CG, seguendo un andamento di tipo Kepleriano⁵. Le osservazioni mostrano invece che la velocità di rotazione rimane pressoché costante (una curva piatta) anche ben oltre i limiti del disco visibile. Questa costanza implica che la massa racchiusa entro un certo raggio continua ad aumentare linearmente con il raggio stesso, suggerendo la presenza di una grande quantità di materia non luminosa che si estende ben oltre il bordo del disco stellare.

Pertanto, l'analisi dettagliata della curva di rotazione e della cinematica del gas nel disco galattico rappresenta uno strumento fondamentale per vincolare la distribuzione spaziale della Materia Oscura, un tema che verrà approfondito nel capitolo successivo.

Capitolo 3

Cinematica della Via Lattea

L'evoluzione e la struttura delle galassie, in particolare di quelle a disco, sono strettamente connesse alla loro cinematica. Le galassie osservate nell'universo locale (a $z \approx 0$) rappresentano infatti il risultato finale di un lungo processo di evoluzione cosmica, che si è protratto per circa 13,8 miliardi di anni. Lo studio delle proprietà cinematiche delle galassie a disco, come la Via

⁵L'andamento kepleriano di una curva di rotazione in cui la velocità circolare (v_c) di un corpo orbitante decresce con la distanza (R) dal centro come $v_c \propto R^{-1/2}$. Questo è caratteristico del campo gravitazionale generato da un oggetto puntiforme o si manifesta nelle regioni esterne di un sistema esteso, dove la massa inclusa può essere considerata concentrata al centro.

Lattea, riveste un ruolo fondamentale in astrofisica, poiché consente di indagare i meccanismi fisici che regolano la distribuzione della massa, la dinamica interna e l'interazione tra le diverse componenti (stellare, gassosa e di materia oscura). Per cinematica si intende la descrizione del moto delle varie componenti della galassia, analizzato in funzione della posizione e del tempo, indipendentemente dalle forze che ne determinano il movimento. Tra le grandezze cinematiche fondamentali vi è la curva di rotazione, definita come l'andamento della velocità circolare v_c in funzione della distanza R dal centro galattico. Essa rappresenta una proprietà diretta del campo gravitazionale generato dalla distribuzione di massa complessiva e costituisce uno strumento chiave per ipotizzare la presenza di materia non visibile, come la materia oscura.

Si procede quindi all'analisi dettagliata della cinematica delle galassie a disco, con particolare attenzione alla Via Lattea. L'obiettivo principale è quello di comprendere il comportamento della rotazione differenziale e di affrontare il cosiddetto *Winding Dilemma*, un problema classico dell'astrofisica galattica che riguarda la persistenza delle strutture a spirale nel tempo.

3.1 Rotazione Differenziale e Winding Dilemma

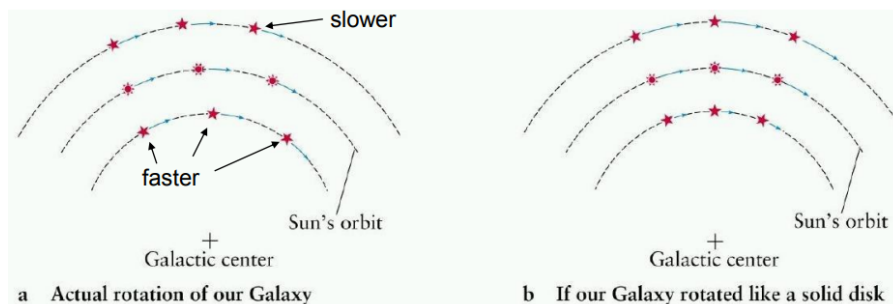


Figura 3.1. Rotazione differenziale della MW [1]

La rotazione differenziale, o rotazione non rigida, è un concetto cinematico fondamentale nella dinamica galattica. Essa si manifesta quando la velocità angolare di rotazione (Ω) di un corpo dipende dalla distanza R dal centro galattico, a differenza di un corpo rigido in cui Ω è costante. In altre parole, le stelle più lontane dal centro percorrono orbite di raggio maggiore e, di conseguenza, impiegano più tempo per completare una rivoluzione: questo fa sì che esse "rimangano indietro" rispetto a quelle più vicine al centro galattico (figura 3.1).

Per una galassia a disco, la velocità di rotazione tangenziale $V(R)$ di un elemento di massa m in orbita circolare a distanza R dal centro è legata alla velocità angolare $\Omega(R)$ dalla relazione:

$$\Omega(R) = \frac{V(R)}{R}.$$

Nelle galassie a disco, come la Via Lattea, si osserva generalmente un rapido incremento della velocità di rotazione nelle regioni interne (regime che può essere approssimato a rotazione quasi rigida) seguito da un appiattimento della curva di rotazione ($V_{rot}(R) \simeq V_{flat}$) a grandi raggi. Quest'ultimo regime è quello dominato dalla rotazione differenziale.

La scoperta della rotazione della MW e del suo carattere differenziale, risale agli studi pionieristici di J.Oort (1927) che analizzò la cinematica stellare in prossimità del Sole. Questo risultato fu conseguito prima ancora della scoperta dell'emissione a 21 cm dell'idrogeno Neutro (HI), oggi fondamentale per tracciare la cinematica galattica fino a regioni ben oltre il vicinato solare, grazie al fatto che tale radiazione non sia influenzata dall'estinzione della polvere interstellare.

L'esistenza della rotazione differenziale portò alla formulazione di un'importante problema di-

namico, noto come *Winding Dilemma* (o Problema dell'avvolgimento). La maggior parte delle galassie a disco mostra infatti una struttura a spirale persistente, difficile da spiegare considerando che, nelle regioni esterne, la velocità angolare Ω decresce come $\approx 1/R$. Il dilemma può essere riassunto come segue: se i bracci a spirale fossero strutture materiali composte da stelle e gas che rimangono rigidamente associate al braccio stesso, la rotazione differenziale causerebbe un rapido avvolgimento dei bracci. Le regioni interne ruoterebbero molto più velocemente di quelle esterne, portando a una distorsione crescente della spirale che, nel giro di poche centinaia di milioni di anni, si avvolgerebbe completamente, scomparendo dopo poche rivoluzioni galattiche. Una soluzione elegante a questo problema fu proposta da Lin e Shu (1964) attraverso la Teoria dell'Onda di Densità. Secondo questa teoria, i bracci a spirale non rappresentano strutture materiali permanenti, ma onde di densità che si propagano nel disco galattico. In un'onda di densità, stelle e gas si accumulano temporaneamente in regioni a maggiore densità, una sorta di "ingorgo" (*traffic jam*) gravitazionale (ma continuano a fluire dentro e fuori dal braccio stesso). Il pattern a spirale ruota come un corpo rigido con una velocità di pattern costante (Ω_{sp}) generalmente diversa dalla velocità angolare del gas e delle stelle (Ω_{gas}). Poiché solo il pattern ruota rigidamente e non il materiale, si evita l'avvolgimento rapido indotto dalla rotazione differenziale. All'interno dei bracci, la compressione del gas favorisce il collasso gravitazionale e la conseguente formazione stellare. Per questo motivo, le regioni di nascita stellare attiva (come nubi molecolari, regioni H II e giovani stelle massicce) risultano localizzate lungo i bracci a spirale.

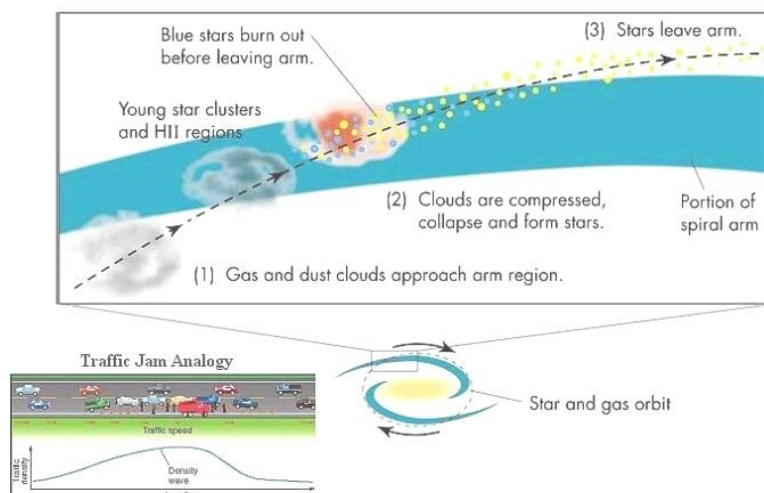


Figura 3.2. Teoria delle curve di densità e analogia con "l'ingorgo".

Sebbene la teoria delle onde di densità rappresenti un passo fondamentale nella comprensione della morfologia a spirale, essa non fornisce ancora una spiegazione completa del fenomeno. Modelli più recenti suggeriscono che le spirali possano essere strutture dinamiche transitorie, che si rigenerano ciclicamente nel tempo o siano sostenute da perturbazioni interne (come le nubi molecolari giganti (GMCs)) che alimentano continuamente la formazione di nuovi bracci.

3.2 Curva di Rotazione della Via Lattea

Inizialmente, la dinamica galattica venne studiata assumendo che la maggior parte della massa fosse concentrata nelle regioni centrali, in analogia con i sistemi planetari. In tale approssimazione, il moto delle stelle del gas può essere descritto da una dinamica di tipo Kepleriano. Sotto questa ipotesi, la velocità circolare (V_c) di un oggetto in orbita a una distanza R dal CG

si ottiene eguagliando la forza centrifuga con quella gravitazionale:

$$F_c = F_g \Rightarrow \frac{mV^2}{R^2} = \frac{GmM}{R^2} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{GM_{enc}}{R}}$$

Ne risulta che la velocità di rotazione dovrebbe diminuire inversamente con la radice quadrata del raggio ($V_c \propto R^{-1/2}$), comportamento noto come "caduta Kepleriana". Da tale relazione si può ricavare la massa M racchiusa entro un determinato raggio R :

$$V(R) = \sqrt{\frac{GM_{enc}(R)}{R}} \Rightarrow M(R) = \frac{V^2(R)R}{G} \quad (3.1)$$

Utilizzando i valori raccomandati dall'IAU¹ nel 1985 per la distanza Sole-Centro Galattico $R_0 = 8.5 \text{ Kpc}$ e per la velocità di rotazione del Sole $V_0 = 220 \text{ km s}^{-1}$, si ottiene una stima della massa racchiusa all'interno dell'orbita solare pari a circa $1.0 \times 10^{11} M_\odot$.

Considerando invece un sistema esteso e sfericamente simmetrico, il secondo teorema di Newton permette di calcolare la velocità circolare tenendo conto solo della massa $M(R)$ contenuta entro il raggio R : $V_c = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}$. Questo modello è utile per comprendere come diversi profili di densità ($\rho(r)$) influenzino la curva di rotazione. Ad esempio:

- Rotazione da corpo rigido: se la densità è costante ($\rho \propto R^0$), la massa racchiusa cresce come R^3 e la velocità V aumenta linearmente con il raggio ($V \propto R$).
- Rotazione Kepleriana: per ottenere un profilo kepleriano ($V \propto R^{-1/2}$), la densità deve decrescere rapidamente, come $\rho \propto R^{-3}$.
- Curva Piatta: per una curva di rotazione costante ($V \simeq \text{cost}$), la densità deve decrescere come $\rho \propto R^{-2}$.

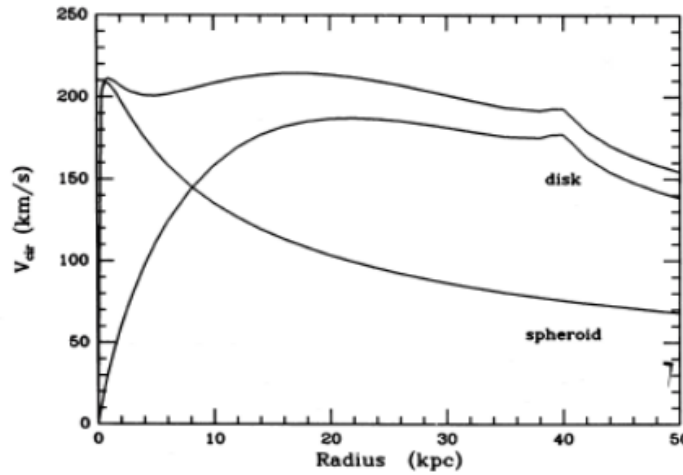


Figura 3.3. Esempio di curva di rotazione ottenuta dalla somma delle componenti del bulge (spheroid) e del disco (disk) [10]

Sebbene i modelli sferici siano utili dal punto di vista teorico, la Via Lattea è una galassia a disco, ossia un sistema geometricamente appiattito. L'assunzione di simmetria sferica semplifica i calcoli grazie all'applicazione diretta dei teoremi di Newton, ma non rappresenta fedelmente la distribuzione di massa del disco galattico. Nei sistemi appiattiti, infatti, i contributi gravitazionali dovuti alla massa situata al di fuori del raggio R non sono trascurabili e influenzano significativamente la velocità $V(R)$. L'analisi dimostra che un disco infinitamente sottile e a densità esponenziale produce una curva di rotazione che, dopo aver raggiunto un massimo,

¹The International Astronomical Union

tende a declinare, avvicinandosi alla caduta kepleriana solo a grandi raggi (a condizione che la massa sia limitata al solo disco visibile).

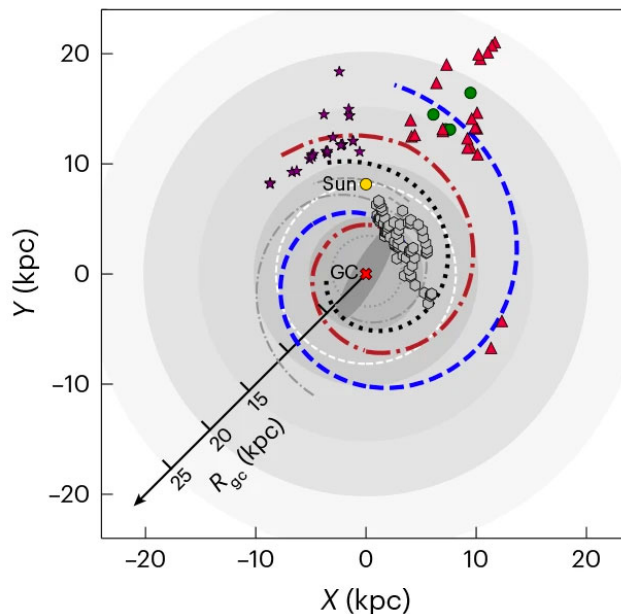


Figura 3.4. Distribuzione sul piano galattico delle nubi molecolari analizzate da Lingrui e dai suoi collaboratori. Il cerchio giallo e la croce rossa individuano rispettivamente il Sole e il Centro galattico. Le stelle viola, i triangoli rossi e i punti verdi rappresentano le nubi molecolari del disco esterno osservate rispettivamente con Alma. Gli esagoni grigi indicano invece le nubi molecolari del disco interno. Le distanze sono espresse in kiloparsec (kpc): un kpc corrisponde a circa 3200 anni luce. [7]

La verifica osservativa di tali modelli si basò inizialmente sulla cinematica delle stelle nel vicinato solare. Tuttavia, la luce visibile emessa dalle stelle è fortemente attenuata dalle polveri interstellari, che limitano le osservazioni a circa 4000-5000 pc dal Sole. Per superare questo limite, venne impiegata la radiazione a 21 cm emessa dall'idrogeno neutro (HI), la componente più abbondante del mezzo interstellare (ISM) nelle galassie a disco. Questa radiazione, appartenendo al dominio radio, non è soggetta all'estinzione dovuta alla polvere e consente di tracciare la cinematica galattica su scale molto più ampie. L'idrogeno neutro, inoltre, rappresenta una componente cinematicamente fredda dell'ISM, caratterizzata da basse dispersioni di velocità (tipicamente circa 10 km s^{-1}), molto inferiori rispetto alla velocità di rotazione. La sua estensione radiale, che spinge ben oltre il disco stellare visibile, permette di esplorare il potenziale gravitazionale della Galassia a grandi distanze, dove i componenti barionici (come le stelle) svaniscono. Vediamo quindi come si è arrivati alla determinazione della curva di rotazione galattica tramite l'uso combinato di osservazioni stellari e radio e quali implicazioni ciò ha rivelato.

3.3 Il Calcolo della Velocità di Rotazione e l'Intuizione della Materia Oscura

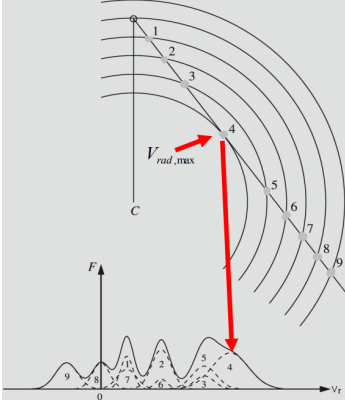


Figura 3.5. Calcolo della $V_{rad,max}$ tramite effetto Doppler della nube di HI.[6]

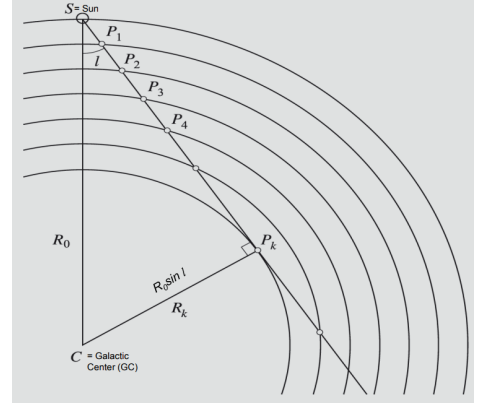


Figura 3.6. Nubi P_1, P_2, \dots viste nella stessa direzione a varie distanze.[6]

Per la determinazione della velocità di rotazione galattica, si assume che il gas neutro HI costituisca una componente cinematicamente fredda ($V/\sigma \gg 1$), le cui particelle si muovono su orbite quasi circolari in un potenziale assialmente simmetrico. In queste condizioni, la velocità di rotazione misurata (V_{rot}) può essere considerata equivalente alla velocità circolare (V_c). Il metodo utilizzato per il calcolo di tale velocità è noto come metodo dei punti di tangenza. Esso prevede la scelta di una linea di vista caratterizzata da una longitudine l e da una latitudine $b = 0^\circ$ in modo che, nel piano galattico, il moto della nube di HI sia perpendicolare alla linea di vista (i.o.s, *line of sight*²). Si individua quindi la velocità radiale massima ($V_{rad,max}$) associata a una certa nube di HI, tramite la misura dello spostamento Doppler della sua riga di emissione³(Figura 3.5). A longitudine l e $b = 0^\circ$ fissate, il raggio galattocentrico della nube corrispondente alla $V_{rad,max}$ è dato da: $R_k = R_0 \sin(l)$ poiché in tale posizione la velocità è interamente radiale rispetto al Sole. La relazione tra la velocità radiale e la velocità angolare è quindi: $V_{rad} = R_k(\omega - \omega_0) = [\omega(R) - \omega_0]R_0 \sin(l)$ dove ω_0 rappresenta la velocità angolare del sistema di riferimento solidale con il Sole (Figura 3.6). La velocità radiale massima si ottiene nel punto di tangenza R_k :

$$V_{rad,max} = V(R_k)R_0 \sin(l) - \omega_0 R_0 \sin(l) = \omega(R_k)R_k - \omega_0 R_0 \sin(l) \Rightarrow$$

$$V_{rad,max} = V(R_k) - V_0 \sin(l) \quad \text{con} \quad R_k = R_0 \sin(l)$$

Ripetendo questo procedimento per un ampio intervallo di longitudini l comprese tra -90° e $+90^\circ$ (mantenendo $b = 0^\circ$), è possibile ricostruire la curva di rotazione galattica come funzione del raggio R :

$$V_{rad,max} = V(R) - V_0 \sin(l) \Rightarrow V(R) = V_{rad,max} + V_0 \sin(l)$$

$$\text{con} \quad \sin(l) = \frac{R}{R_0} \quad \text{allora} \quad V(R) = V_{rad,max} + \left(\frac{R}{R_0}\right)V_0$$

²La line of sight è la linea immaginaria che congiunge l'osservatore all'oggetto osservato.

³Lo spostamento Doppler è la variazione della frequenza e della lunghezza d'onda della radiazione dovuta alla velocità radiale della sorgente. In prima approssimazione, tale spostamento è proporzionale alla velocità radiale.

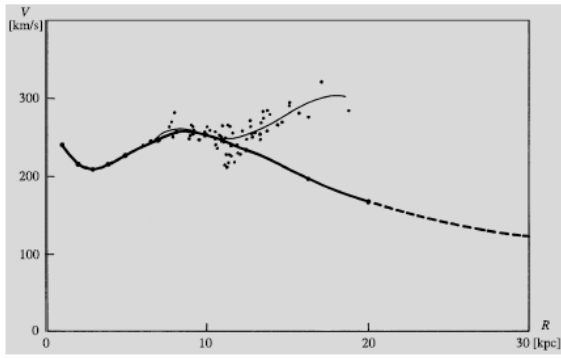


Figura 3.7. Curva di rotazione della MW basata sul moto delle nubi di idrogeno. Ogni punto rappresenta una nube. La linea spessa rappresenta la curva di rotazione determinata da Maarten Schmidt nel 1965. Se tutte le masse fossero concentrate all'interno di un raggio di 20 kpc, la curva continuerebbe secondo la terza legge di Keplero (linea tratteggiata). La curva di rotazione di Leo Blitz sulla base di più recenti osservazioni inizia a risalire a 12 Kpc.[6]

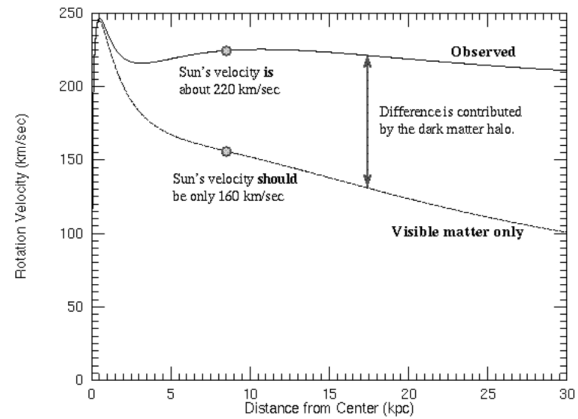


Figura 3.8. Differenza tra la curva di rotazione osservata e quella dedotta dalla materia visibile: la differenza è dovuta dagli aloni di materia oscura che circondano la galassia.[1]

L'analisi delle curve di rotazione così ottenute rivela una discrepanza significativa rispetto alle previsioni come in figura 3.3. Contrariamente all'andamento kepleriano atteso (in cui la velocità dovrebbe decrescere come la distanza dal centro) si osserva che la velocità di rotazione rimane quasi costante anche a grandi raggi (figura 3.7). Secondo la relazione 3.1, tale comportamento implica che la massa totale M continui a crescere linearmente con il raggio R , anche ben oltre il limite del disco stellare visibile.

Questo risultato fu cruciale: la persistenza di curve di rotazione piatte costituì la prima prova osservativa diretta dell'esistenza di una quantità di massa non visibile, non riducibile ai componenti barionici. Tale massa invisibile, necessaria per spiegare il campo gravitazionale osservato nelle regioni esterne della galassia, venne identificata come materia oscura (figura 3.8).

3.4 Le Costanti di Oort

La teoria dell'esistenza di un alone di materia oscura è ulteriormente supportata dall'analisi delle costanti di Oort (riconosciute come A e B). Sebbene queste costanti descrivano le proprietà cinematiche locali nelle vicinanze del Sole, esse riflettono direttamente l'andamento della legge di rotazione del disco galattico. Il fatto che i valori osservati di A e B risultino coerenti con un gradiente di velocità circolare $dV/dR \approx 0$ (ossia con una curva di rotazione piatta), conferma che la massa della galassia sia distribuita su ampi raggi, piuttosto che concentrata nel nucleo centrale.

Le costanti di Oort rappresentano due parametri fondamentali che caratterizzano il moto differenziale del disco galattico nella regione solare, fornendo informazioni cruciali sul campo di velocità locale. Oort derivò le relazioni che le definiscono partendo da un modello idealizzato, formulato per rispondere a un quesito fondamentale: è possibile comprendere il moto globale della Galassia osservandolo dall'interno? Nel suo modello, Oort ipotizzò che gli elementi galattici non possedessero velocità assolute ma solo relative; assunse inoltre che la Galassia potesse essere approssimata ad un disco infinitamente sottile, in cui le stelle si muovono su

orbite perfettamente circolari e il sistema si trova in uno stato stazionario.

Indicando con $\bar{\omega} = \omega \hat{e}_z$ il vettore di rotazione della Galassia, l'obiettivo era determinare la funzione di velocità angolare $\omega(R)$, non costante, delle stelle. In un punto qualsiasi della Galassia, la velocità è quindi data da $\bar{v} = \bar{\omega}(R) \wedge \bar{R}$. Poiché dalle osservazioni è possibile ricavare solo velocità relative, Oort espresse la velocità della stella S rispetto al Sole separandola in due componenti: una radiale, lungo la linea di vista, determinabile tramite l'effetto Doppler ($v_{\parallel} = \langle v, \hat{e}_{\parallel} \rangle$), e una tangenziale, perpendicolare alla linea di vista, ottenibile dal moto proprio ($\bar{v}_{\perp} = \langle \bar{v}, \hat{e}_{\perp} \rangle$).

Sviluppando un'espansione di Taylor della velocità angolare $\bar{\omega}$ e assumendo l'approssimazione di campo vicino, Oort ottenne due relazioni approssimate (dove l rappresenta la distanza della stella S dal Sole e R_0 la distanza del Sole dal CG):

- Velocità Radiale Relativa:

$$v_{\parallel} \sim l \frac{\omega'_0 R_0}{2} \sin(2\theta) \quad \text{con} \quad A = \frac{\omega'_0 R_0}{2} \quad (3.2)$$

- Velocità Tangenziale Relativa:

$$v_{\perp} \sim (\omega_0 + \frac{\omega'_0 R_0}{2})l + l \frac{\omega'_0 R_0}{2} \cos(2\theta) \quad \text{con} \quad B = \omega_0 + \frac{\omega'_0 R_0}{2} \quad (3.3)$$

Le costanti A e B (dette come prima e seconda costante di Oort) possono essere espresse in funzione della velocità circolare $\bar{v}_c(R)$ e del suo gradiente $d\bar{v}_c/dR$:

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{V_c}{R} - \left(\frac{dV_c}{dR} \right) \right] \quad , \quad B = -\frac{1}{2} \left[\frac{V_c}{R} + \left(\frac{dV_c}{dR} \right) \right] \quad (3.4)$$

Combinandole, si ottengono due relazioni di grande rilevanza fisica:

- $A + B$: rappresenta il gradiente della curva di Rotazione, ossia la sua inclinazione;
- $A - B$: definisce la velocità angolare, come nel caso del Sole se $v_c = v_0$ e $R = R_0$.

I valori osservativi, $A(\approx 15 Kms^{-1}kpc^{-1})$ e $B(\approx -10/ -12 Kms^{-1}kpc^{-1})$, risultano quasi opposti: la loro somma prossima a zero implica che $dv_c/dR \approx 0$. Ciò conferma che la curva di rotazione della Via Lattea è localmente piatta, evidenziando direttamente una massa distribuita su ampie scale e, conseguentemente, la presenza dominante di materia oscura.

3.5 Conclusione

Lo studio della struttura e della cinematica della Via Lattea (considerata il punto di riferimento fondamentale per la comprensione delle galassie a spirale) ha confermato che la sua dinamica sia dominata dalla materia oscura. Le osservazioni delle curve di rotazione e l'analisi delle costanti di Oort indicano infatti che la massa galattica sia distribuita su ampi raggi e non concentrata nel nucleo, evidenziando la presenza di un esteso alone oscuro.

Le misurazioni ad alta precisione fornite dalle ultime missioni, come Gaia hanno migliorato in modo significativo la conoscenza della formazione e dell'evoluzione del disco stellare, rafforzando il legame tra cinematica e storia galattica. Tuttavia, l'estinzione dovuta alla polvere interstellare e la nostra posizione interna nel disco continuano a limitare la visione completa della struttura della Via Lattea.

Il futuro della ricerca risiede nell'integrazione di modelli numerici avanzati e osservazioni multi-lunghezza d'onda. Strumenti come il *James Webb Space telescope (JWST)* o lo *Square Kilometre Array (SKA)* saranno cruciali per sondare la materia oscura e completare la comprensione della nostra Galassia nel contesto cosmologico.

Appendici

Capitolo A

Dimostrazione delle Costanti di Oort

Il calcolo delle costanti di Oort si basa su tre principali ipotesi fondamentali: la Galassia è un disco infinitamente sottile, le orbite percorse dalle stelle sono perfettamente circolari e la Galassia è un sistema stazionario. In questa rappresentazione, si considera il Sole posto a una distanza media di circa 8.5 kpc dal centro galattico.

$$\bar{R} = (x, y, 0)$$

$$R = \|\bar{R}\|$$

$$\bar{R}_0 := \text{posizione del Sole } S_\odot (R \sim 8.5 \text{ kpc})$$

$$\hat{e}_0 := \text{versore dell'anticentro galattico}$$

$$\bar{R} = R\hat{e}_R$$

dove \hat{e}_\parallel è il versore parallelo alla linea di vista.

Il Sole (S_\odot) gira sulla sua orbita circolare, come una stella; Oort si chiese se fosse possibile calcolare a quale velocità si muove il "nostro sistema" e quindi la velocità della galassia. Egli decise di introdurre a questo punto il vettore di rotazione della galassia $\bar{\omega} = \omega\hat{e}_z$, ovvero l'incognita del dilemma. L'obiettivo era quindi quello di trovare $\omega(R)$, cioè la funzione non costante delle velocità angolari delle stelle all'interno della galassia chiamato anche come il campo vettoriale delle velocità angolari. Pertanto in un punto qualsiasi di una galassia si avrà: $\bar{V} = \bar{\omega}(R) \wedge \bar{R}$ ¹.

Le uniche informazioni ottenibili dalle osservazioni sono le velocità relative, indicate come: $\bar{v} = \bar{V} - \bar{V}_0$ e, analogamente alla definizione dei versori, possiamo definire le due componenti della velocità come:

$$v_\parallel = \langle \bar{v}, \hat{e}_\parallel \rangle \quad v_\perp = \langle \bar{v}, \hat{e}_\perp \rangle \quad (\text{A.1})$$

dove v_\parallel viene misurata tramite effetto Doppler mentre v_\perp dal moto proprio, essendo gli unici disponibili ricavabili tramite l'angolo θ (conoscendo dove si trova il CG).

SI procede la dimostrazione non approssimando a campo vicino, come altri preferiscono scegliere, per motivi storici: le distanze, posizioni utilizzate in tale approssimazione non sarebbero mai state raggiunte all'epoca del calcolo delle costanti di Oort.

Dopo questa precisazione, si procede a calcolare le due componenti della velocità relativa in funzione di $\Delta\bar{\omega} = \bar{\omega} - \bar{\omega}_0$ con $\bar{\omega}_0$ velocità angolare del Sole:

$$\bar{v} = \bar{V} - \bar{V}_0 = \bar{\omega} \wedge \bar{R} - \bar{\omega}_0 \wedge \bar{R}_0 \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \bar{\omega} \wedge (\bar{R} - \bar{R}_0 + \bar{R}_0) - \bar{\omega}_0 \wedge \bar{R}_0 = \bar{\omega} \wedge (\bar{R} - \bar{R}_0) + \bar{\omega} \wedge \bar{R}_0 - \bar{\omega}_0 \wedge \bar{R}_0 \\ &= \bar{\omega} \wedge \bar{l} + \Delta\bar{\omega} \wedge \bar{R}_0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Si calcolano quindi:

$$v_\parallel = \langle \bar{\omega} \wedge \bar{l} + \Delta\bar{\omega} \wedge \bar{R}_0, \hat{e}_\parallel \rangle$$

Con $\bar{\omega} \wedge \bar{l} \perp \hat{e}_\parallel$, il prodotto scalare è nullo.

$$v_\parallel = \langle \Delta\bar{\omega} \wedge \bar{R}_0, \hat{e}_\parallel \rangle = \Delta\omega R_0 \langle \hat{e}_z \wedge \hat{e}_0, \hat{e}_\parallel \rangle$$

¹Dove con \wedge si indica il prodotto vettoriale

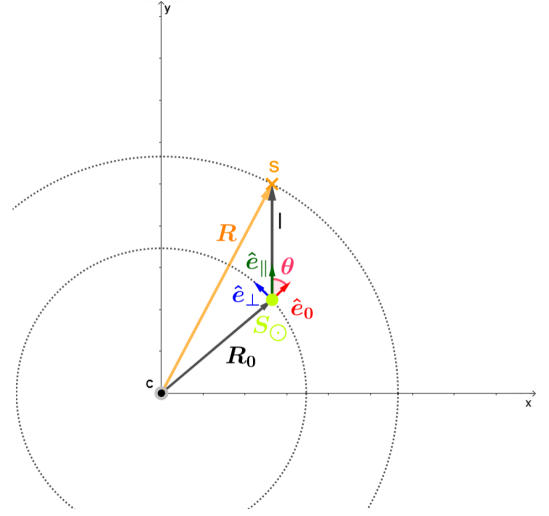


Figura A.1. Descrizione del sistema.

Dove $\langle \hat{e}_z \wedge \hat{e}_0, \hat{e}_\parallel \rangle$ è definito come prodotto misto (prodotto scalare tra un vettore e il prodotto vettoriale di due vettori). Questo in particolare gode della seguente proprietà: data una permutazione ciclica dei tre vettori coinvolti nel prodotto misto, o lo scambio dei due operatori, questa non ne modifica il risultato (e dunque il segno). Si procede quindi permutando i versori, mantenendo il risultato:

$$v_\parallel = \Delta\omega R_0 \langle \hat{e}_0 \wedge \hat{e}_\parallel, \hat{e}_z \rangle = \Delta R_0 \langle \sin \theta, \hat{e}_z \rangle = \Delta\omega R_0 \sin \theta \hat{e}_z \quad (\text{A.4})$$

Si è così ottenuto la formula rigorosa di v_\parallel senza approssimazione. Si procede analogamente per il calcolo di v_\perp :

$$v_\perp = \langle \bar{\omega} \wedge \bar{l} + \overline{\Delta\omega} \wedge \bar{R}_0, \hat{e}_\perp \rangle = \langle \bar{\omega} \wedge \bar{l}, \hat{e}_\perp \rangle + \Delta\omega R_0 \langle \hat{e}_z \wedge \hat{e}_0, \hat{e}_\perp \rangle$$

Calcoliamo quindi separatamente i due termini ottenuti:

$$\langle \bar{\omega} \wedge \bar{l}, \hat{e}_\perp \rangle = \omega l \langle \hat{e}_z \wedge \hat{e}_\parallel, \hat{e}_z \rangle = \omega l \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \Delta\omega R_0 \langle \hat{e}_z \wedge \hat{e}_0, \hat{e}_\perp \rangle &= \Delta\omega R_0 \langle \hat{e}_z \wedge \hat{e}_0, \hat{e}_z \wedge \hat{e}_0 \rangle = \Delta\omega R_0 \langle \hat{e}_z, \hat{e}_\parallel \wedge (\hat{e}_z \wedge \hat{e}_0) \rangle = \\ &= \langle \hat{e}_z, \hat{e}_z \langle \hat{e}_\parallel, \hat{e}_0 \rangle - \hat{e}_0 \langle \hat{e}_\parallel, \hat{e}_z \rangle \rangle = \Delta\omega R_0 \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Si sono ricavate così due formule (dalle equazioni A.4, A.5 e A.6) della rotazione differenziale del tutto generiche che possono ora essere utilizzate nel caso specifico di campo vicino, ovvero quando $\|\bar{l}\| \ll R_0$ (la stella è molto vicina al Sole):

$$v_\parallel = \Delta\omega R_0 \sin \theta \quad (\text{A.7})$$

$$v_\perp = \omega R + \Delta\omega R_0 \cos \theta \quad (\text{A.8})$$

Nell'ipotesi di campo vicino viene modificata $\Delta\omega$ espandendola in serie di Taylor per punti vicini al Sole:

$$\omega(R) = \omega(R_0) + \langle \nabla\omega|_{R_0}, \bar{l} \rangle + \mathcal{O}(l^2) \quad \text{dove} \quad \nabla\omega = \frac{d\omega}{dR} \nabla R \Rightarrow \nabla\omega|_{R_0} = \omega'_0 \frac{\bar{R}}{R}|_{R_0} = \omega'_0 \hat{e}_0$$

All'ordine più basso di troncamento dell'errore si ottiene:

$$\Delta\omega = \omega'_0 \langle \hat{e}_0, l \hat{e}_\parallel \rangle = l \omega'_0 \langle \hat{e}_0, \hat{e}_\parallel \rangle = l \omega'_0 \cos \theta \Rightarrow \Delta\omega = \omega'_0 l \cos \theta + \mathcal{O}(l^2) \quad (\text{A.9})$$

ponendolo nelle equazioni esatte A.7 e A.8:

$$v_\parallel \sim \omega'_0 l R_0 \sin \theta \cos \theta = l \frac{\omega'_0 R_0}{2} \sin 2\theta$$

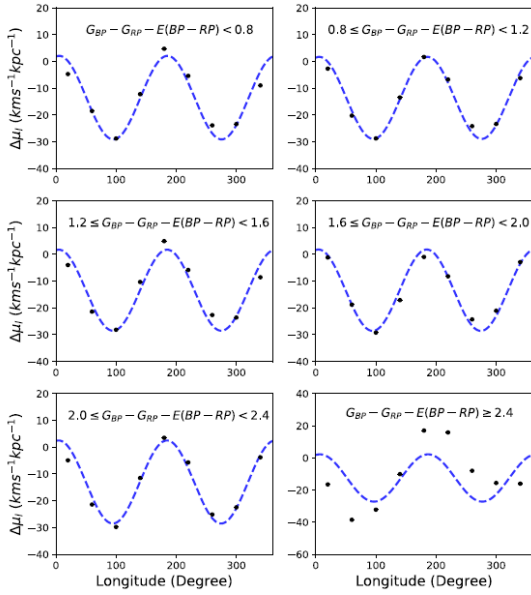
$$v_\perp \sim \omega_0 l + \omega'_0 l R_0 \cos^2 \theta = \omega_0 l + \frac{\omega'_0 l R_0}{2} (1 + \cos 2\theta) = (\omega_0 + \frac{\omega'_0 R_0}{2}) l + l \frac{\omega'_0 R_0}{2} \cos 2\theta$$

Si noti che le formule approssimate contengono entrambi le stesse dipendenze: dall'angolo θ , dalla distanza della stella l che si sta osservando e dal sistema del Sole (ω_0, ω'_0, R_0). Da queste si ricavano la prima e la seconda *costante di Oort*:

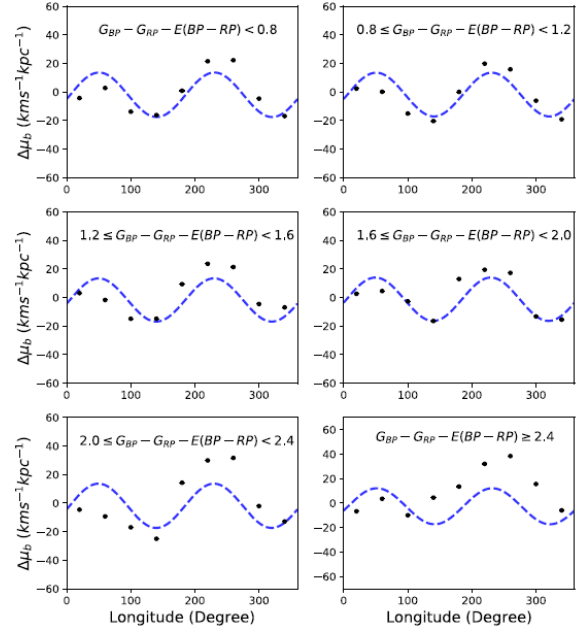
$$\begin{cases} v_\parallel = l \cdot A \cdot \sin 2\theta \\ v_\perp = l \cdot B + l \cdot A \cdot \cos 2\theta \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{\omega'_0 R_0}{2} \\ B = \omega_0 + \frac{\omega'_0 R_0}{2} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Si sottolinea il fatto che tali valori non siano direttamente misurabili ma devono valer per le osservazioni, altrimenti le ipotesi per il calcolo cederebbero.

Le figure che illustrano le relazioni sinusoidali tra i moti proprio stellari e la longitudine Galattica (θ) rappresentano la prova osservativa diretta che supporta il modello cinematico utilizzato per derivare le costanti di Oort. In particolare, queste figure mostrano l'andamento osservativo dei moti propri stellari in longitudine ($v_\perp/l = \Delta\mu_l$, figura A.2a) e in latitudine ($v_\parallel/l = \Delta\mu_b$, figura A.2b), dopo la correzione per il moto solare.



(a) Il moto proprio longitudinale è direttamente correlato alle costanti A e C. Il fitting di questa funzione sinusoidale sui dati stellari entro una certa latitudine ($|b| < 20^\circ$) permette di vincolare i valori di A e C.



(b) Il moto proprio in latitudine è cruciale per vincolare la costante di divergenza.

Figura A.2. (a) e (b) — Dall'articolo [4]

Il loro scopo primario è dimostrare che le osservazioni cinematiche (ottenute dai dati ad alta precisione di Gaia DR2) si adattano in modo coerente alle ipotesi di calcolo (o modello cinematico) che definiscono le Costanti di Oort². Sulla base di queste osservazioni, sono stati ottenuti i seguenti valori per le costanti di Oort nella vicinanza solare (entro 500 pc):

Tabella A.1. Valori delle Costanti di Oort ottenuti dai dati *Gaia* DR2.

Costante di Oort	Valore [km s ⁻¹ kpc ⁻¹]
<i>A</i>	15.1 ± 0.1
<i>B</i>	-13.4 ± 0.1
<i>C</i>	-2.7 ± 0.1
<i>K</i>	-1.7 ± 0.2

²Nei calcoli moderni con un'espansione al primo ordine le costanti di Oort sono 4: A, B, C e K. C è definito come lo shear radiale mentre K misura la divergenza, queste derivano principalmente dall'assunzione di un modello non-assialsimmetrico

Bibliografia

- [1] *Appunti e dispense del corso di Astronomia*. Andrea Cimatti e Michele Moresco, Anno Accademico 2022/2023.
- [2] *Appunti e dispense del corso di Storia dell'Astronomia*. Brusa,M., Anno Accademico 2024/20205.
- [3] *Appunti del corso di Astrofisica Extragalattica*. Ciotti,L., Anno Accademico 2024/2025.
- [4] Chengqun Y. Chengdong L., Gang Z. Galactic rotation and the oort costants in the solar vicinity. *The Astrophysical Journal*, 2019.
- [5] L. Ciotti. *Introduction to Stellar Dynamics*. Cambridge University Press, 2021.
- [6] H. Karttunen. *Fundamental astronomy*. Springer, 2017.
- [7] Junzhi W. Lingrui L., Zhi-Yu Z. Inadequate turbulent support in low-metallicity molecular clouds. *Nature Atronomy*, 2025.
- [8] A. Pannekoek. *A hiatory of astronomy*. Dover, 1989.
- [9] Gallagher Sparke, L. S. *Galaxies in the universe an introduction (2. ed.)*. Cambridge University Press., 2007.
- [10] Begeman K. Van Albada T.S., Bahcall J.N. Distribution of dark matter in the spiral galaxy ngc 3198. *The Astrophysical Journal*, 1985.