

Studio comparato circa le  
differenti definizioni di orientabilità  
e orientazione per varietà

Tesi di Laurea in Topologia Algebrica 1

Relatore:  
Prof.  
Massimo Ferri

Presentata da:  
Alessio Savini

Correlatore:  
Prof.  
Luca Migliorini

I Sessione  
Anno Accademico 2011-2012



*Al mio amico Matteo*



# Indice

<b>Premessa</b>	<b>ix</b>
<b>Introduzione</b>	<b>xi</b>
<b>1 Orientabilità per varietà omologiche</b>	<b>1</b>
<b>2 Orientabilità per varietà topologiche</b>	<b>7</b>
2.1 Orientabilità locale e globale . . . . .	7
2.2 Il fibrato di orientazione . . . . .	11
2.3 Sezioni locali e orientabilità . . . . .	14
2.4 Omologia e sezioni locali . . . . .	16
<b>3 Orientazione per varietà differenziabili</b>	<b>21</b>
3.1 Orientazione per spazi vettoriali . . . . .	21
3.2 Orientazione su varietà differenziabili . . . . .	24
3.3 Orientazione, atlanti e forme differenziali . . . . .	25
3.4 Rivestimento di orientazione . . . . .	28
<b>4 Confronto fra definizioni</b>	<b>33</b>
<b>A Fascio di orientazione</b>	<b>35</b>
A.1 Nozioni preliminari sui fasci . . . . .	35
A.2 Fascio generato da un prefascio . . . . .	36
A.3 Fascio di orientazione . . . . .	38
<b>Bibliografia</b>	<b>39</b>



# Elenco delle figure

1.1	Proprietà 3 del teorema 1.2 . . . . .	2
2.1	Intorni coordinati lemma 2.4 . . . . .	8
2.2	Costruzione rivestimento di orientazione $U_2$ . . . . .	12
3.1	Esempi di orientazioni: la prima consistente, la seconda no . . . . .	24
3.2	Intorno uniformemente rivestito in $\hat{M}$ . . . . .	30
3.3	Esempio di rivestimento generalizzato per il toro . . . . .	31
3.4	Automorfismo di rivestimento non banale per $\hat{M}$ . . . . .	32





# Premessa

Una sera, durante una cena con un amico, nel parlare dell'azione del contare, questi mi interruppe dicendo: "[...] *devi capire che io sono abituato a contare procedendo da sinistra verso destra*[...]". Tale affermazione mi lasciò inizialmente perplesso e, dopo pochi secondi, gli chiesi: "*Cosa intendi con procedendo da sinistra verso destra?*" Quello che stava implicitamente cercando di suggerirmi è che, immaginando di avere di fronte a sé la retta reale, le stava dando un'orientazione preferita.

I concetti di verso di percorrenza della retta reale, di rotazione in senso orario nel caso del piano, o di terna levogira per lo spazio sono tutti riconducibili ad un'unica proprietà: l'orientabilità degli spazi considerati e la successiva scelta di un'orientazione.

Tale concetto, che risulta particolarmente intuitivo (tanto da essere percepito per chiaro anche da chi non è costretto ad affrontare studi matematici) se riferito a  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ , diventa di più difficile definizione se desideriamo estendere i nostri ragionamenti ad oggetti come spazi vettoriali generici o a varietà (siano esse topologiche o differenziabili).

Ci si potrebbe chiedere da cosa nasce questo interesse nel voler definire rigorosamente e quanto più generalmente possibile l'orientabilità e l'orientazione. La risposta è semplice. In ambito differenziabile, ad esempio, è richiesta l'ipotesi di orientabilità di una varietà con bordo per l'applicazione del teorema di Stokes. Tale teorema ha importantissime conseguenze dal punto di vista fisico se pensiamo allo studio dei potenziali di forze conservative (più precisamente alla caratterizzazione di campi vettoriali conservativi come campi i cui integrali curvilinei sono indipendenti dal cammino con cui si sceglie di connettere due punti).

In ambito topologico parimenti l'orientabilità di una varietà e la successiva scelta di una classe fondamentale permettono la formulazione del teorema di dualità di Poincaré dal quale discendono interessantissime proprietà: si pensi al calcolo degli anelli di coomologia associati agli spazi proiettivi reali, complessi e quaternionici. Sono queste ragioni quindi ad avermi indotto ad interrogarmi sulla natura del concetto di orientabilità in ambito matematico e sulle sue diverse definizioni.



# Introduzione

Esiste una molteplicità di argomenti relativi alle varietà che possono essere affrontati sotto differenti profili: dal punto di vista topologico, da quello combinatorio oppure tramite un approccio differenziale. Ognuno di questi può portare, relativamente alle necessità, a risultati distinti, ma spesso riconducibili l'uno all'altro. Questo è quanto accade ad esempio nello studio dell'orientabilità.

Le definizioni di orientabilità, e conseguentemente di orientazione, formulate in ciascun ambito sopra citato, possono risultare distanti fra loro ad un primo sguardo. Se lette con più attenzione, in realtà, tali definizioni possono ricondursi, sotto opportune ipotesi, l'una all'altra. L'intento di questa tesi è perciò quello di analizzare in maniera chiara e approfondita le definizioni di orientabilità più comuni ricercandone un legame.

Nel primo capitolo si affronta la definizione di varietà omologica simpliciale e se ne descrivono le principali proprietà che permettono di dar luogo ad una definizione combinatoria di orientabilità.

Nel secondo capitolo l'attenzione si sposta sulle varietà topologiche. Dopo aver definito in breve il concetto di orientabilità locale e globale, si procede nella costruzione di un nuovo spazio topologico che risulterà essere un fibrato della varietà inizialmente data. L'esistenza di sezioni continue relative a tale fibrato permetterà di affrontare l'orientabilità locale e globale sotto un'altra prospettiva. Si stabilirà inoltre un isomorfismo fra le sezioni a supporto compatto e il gruppo di omologia relativo ad un dato sottospazio chiuso.

Nel terzo capitolo si conduce un'analisi dell'orientabilità tramite gli strumenti differenziali. A una breve descrizione dell'orientazione per spazi vettoriali segue quella data per varietà regolari, riconducibile a uno studio compiuto su carte o su forme differenziali.

Il capitolo conclusivo invece mira a coniugare le tre definizioni precedentemente esposte mostrandone l'equivalenza sotto opportune ipotesi.



# Capitolo 1

## Orientabilità per varietà omologiche

Le nozioni relative a questo capitolo sono state tratte da [10, cap. 5]

**Definizione 1.1** (Triangolazione di una varietà). Sia dato uno spazio topologico  $X$ . Una *triangolazione* di  $X$  è costituita da una coppia  $(K, f)$  dove  $K$  è un complesso simpliciale e  $f : |K| \rightarrow X$  è un omeomorfismo (con  $|K|$  intendiamo riferirci alla realizzazione geometrica del complesso  $K$ ). Uno spazio insieme alla scelta di una triangolazione si dirà *spazio triangolato*.

**Definizione 1.2** (Intorno simpliciale e cintura di un punto in un complesso simpliciale). Dato un qualunque punto  $x \in |K|$ , l'*intorno simpliciale* di  $x$ , indicato con  $N_K(x)$ , è l'insieme dei simplessi contenenti il punto  $x$ , insieme a tutte le loro facce. La *cintura* di  $x$ ,  $Lk_K(x)$ , è il sottoinsieme dei simplessi di  $N_K(x)$  che non contengono  $x$ .

**Definizione 1.3** (Varietà omologica). Uno spazio  $X$  connesso per archi si dice *varietà omologica  $n$ -dimensionale* se esiste una triangolazione  $K$  di  $X$ , tale che per ogni punto  $x \in |K|$  valga  $H_r(Lk(x)) \cong H_r(S^{n-1})$  per ogni  $r$ .<sup>1</sup>

Questo equivale ad affermare:

$$\tilde{H}_r(Lk(x)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & r = n - 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il seguente teorema, che ci limiteremo a enunciare, ci assicura che tale definizione è indipendente dalla scelta della triangolazione della varietà considerata e per tale ragione è ben posta.

---

<sup>1</sup>La definizione generale di varietà omologica non richiede l'ipotesi di triangolabilità, ma in questo capitolo ci limiteremo a varietà triangolabili per ottenere i risultati a noi necessari

**Teorema 1.1.** *Siano  $K$  e  $L$  due complessi simpliciali e sia  $f : |K| \rightarrow |L|$  un omeomorfismo rispetto a un sottospazio di  $|L|$ . Allora per ogni  $x \in |K|$  tale che  $f(x)$  è contenuto in un insieme aperto  $U \subset f(|K|)$  di  $|L|$  si ha*

$$|Lk_K(x)| \cong |Lk_L(f(x))|$$

Può essere molto interessante notare come ogni varietà topologica, connessa e triangolabile sia una varietà omologica, ma non viceversa: esistono varietà omologiche che non sono varietà topologiche (per un esempio si veda [10]).

**Teorema 1.2.** *Sia  $K$  una triangolazione di una varietà omologica  $n$ -dimensionale. Valgono le seguenti proprietà:*

1.  $\dim K = n$
2. Ogni punto di  $|K|$  è contenuto almeno in un  $n$ -simplexso
3. Ogni  $(n - 1)$ -simplexso è faccia esattamente di due  $n$ -simplexsi
4. Dati due  $n$ -simplexsi  $\sigma$  e  $\tau$  di  $K$ , esiste una successione di  $n$ -simplexsi  $\sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_r = \tau$ , tale che  $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$  è un  $(n - 1)$ -simplexso. (Tale proprietà è detta forte connessione).

*Dimostrazione.* Possiamo assumere che la dimensione della varietà sia  $n \geq 1$ , dato che una varietà omologica 0-dimensionale è solo un punto.

1. Di certo  $\dim K \geq n$ , poiché altrimenti  $\dim Lk(x)$  sarebbe inferiore a  $n - 1$  per ogni  $x \in |K|$ , e per questa ragione  $H_{n-1}(Lk(x)) = 0$ . Viceversa, se  $K$  avesse un  $m$ -simplexso  $\sigma$ , con  $m > n$ , allora per i punti  $x$  interni a  $\sigma$ ,  $|Lk(x)|$  sarebbe omeomorfo a  $S^{m-1}$ , contraddicendo la definizione di varietà omologica (stiamo sfruttando il fatto che  $S^{n-1}$  non è omeomorfo a  $S^{m-1}$  per il teorema di invarianza della dimensione).
2. La prova è immediata: se  $x$  non fosse in un  $n$ -simplexso,  $\dim Lk(x)$  sarebbe inferiore a  $(n - 1)$ .

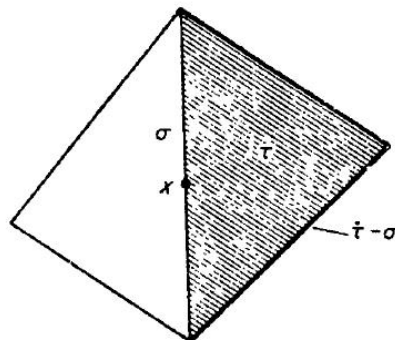


Figura 1.1: Proprietà 3 del teorema 1.2

3. Sia  $x$  un punto interno di un  $(n-1)$ -simpleso  $\sigma$ , e supponiamo che  $\sigma$  sia faccia esattamente di  $r$   $n$ -simplessi ( $r > 0$ ). Per ogni  $n$ -simpleso  $\tau_i$  che abbia  $\sigma$  come faccia possiamo osservare

$$\bigcup_{i=1}^r \dot{\tau}_i = Lk(x) \cup \bar{\sigma} \quad \bigcap_{i=1}^r \dot{\tau}_i = \bar{\sigma}$$

(con  $\dot{\tau}_i$  intendiamo la frontiera simpliciale di  $\tau_i$ , cioè l'unione di tutte le sue facce proprie, mentre con  $\bar{\sigma}$  ci riferiamo al complesso simpliciale generato da  $\sigma$ ).

Ora applicando induttivamente la sequenza di Mayer Vietoris per l'omologia ridotta otteniamo:

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_{n-1}\left(\bigcap_{i=1}^r \dot{\tau}_i\right) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r \tilde{H}_{n-1}(\dot{\tau}_i) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}\left(\bigcup_{i=1}^r \dot{\tau}_i\right) \rightarrow \cdots$$

Per quanto osservato in precedenza questo equivale a:

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(\bar{\sigma}) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r \tilde{H}_{n-1}(\dot{\tau}_i) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(Lk(x) \cup \bar{\sigma}) \rightarrow \cdots$$

Sfruttando la contrattilità di  $|\sigma|$  e il fatto che  $|\dot{\tau}_i| \cong S^{n-1}$  otteniamo:

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

Si ha quindi che  $r = 2$ , come volevamo.

*Osservazione 1.1.* Il gruppo di omologia di  $Lk(x) \cup \bar{\sigma}$  è stato calcolato tramite l'ausilio della sequenza di Mayer Vietoris ridotta come segue:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(\dot{\sigma}) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(Lk(x)) \oplus \tilde{H}_{n-1}(\bar{\sigma}) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(Lk(x) \cup \bar{\sigma}) \rightarrow \\ \tilde{H}_{n-2}(\dot{\sigma}) \rightarrow \tilde{H}_{n-2}(Lk(x)) \oplus \tilde{H}_{n-2}(\bar{\sigma}) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

dove si è osservato che  $Lk(x) \cap \bar{\sigma} = \dot{\sigma}$ . Sfruttando ora il fatto che  $|\dot{\sigma}| \cong S^{n-2}$  e che  $\tilde{H}_r(Lk(x)) \cong \tilde{H}_r(S^{n-1})$  per la definizione di varietà omologica si ha:

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus 0 \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(Lk(x) \cup \sigma) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

da cui segue  $\tilde{H}_{n-1}(Lk(x) \cup \sigma) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

4. Si scelga un particolare  $n$ -simpleso  $\sigma$  e sia  $L$  l'insieme degli  $n$ -simplessi di  $K$  congiungibili a  $\sigma$  come descritto nell'enunciato, considerati insieme alle proprie facce. Sia  $M$ , al contrario, l'insieme degli  $n$ -simplessi che non possono essere collegati a  $\sigma$  in tal modo (anche in questo caso consideriamo le relative facce). Osseviamo che  $L$  e  $M$  sono sottocomplessi di  $K$  e  $L \cup M = K$ . Inoltre, supponendo  $M$  non vuoto, anche  $L \cap M$  sarà non vuoto, dato che

$|K|$  è connesso per archi, e  $\dim(L \cap M) \leq n - 2$ , poiché un  $(n - 1)$ -simpleso di  $L \cap M$  sarebbe faccia sia di un  $n$ -simpleso di  $L$ , sia di un  $n$ -simpleso di  $M$ , giungendo a una contraddizione. Possiamo assumere che  $n \geq 2$ , in quanto per  $n=1$  sarebbe  $M$  necessariamente vuoto.

Sia  $a$  un vertice di  $L \cap M$  e si consideri  $Lk(a)$ :  $a$  deve essere un vertice di un  $n$ -simpleso di  $L$  e di un  $n$ -simpleso di  $M$ , così sia  $Lk(a) \cap L$  sia  $Lk(a) \cap M$  conterranno  $(n - 1)$ -simplessi. Anche  $\dim(Lk(a) \cap L \cap M) \leq n - 3$ , e per il punto 3 ogni  $(n - 2)$ -simpleso sarà faccia esattamente di 2  $(n - 1)$ -simplessi: se poniamo  $c_L = \sum \tau_L$ , per tutti gli  $(n - 1)$ -simplessi  $\tau_L$  di  $Lk(a) \cap L$ , e  $c_M = \sum \tau_M$ , per tutti gli  $(n - 1)$ -simplessi  $\tau_M$  di  $Lk(a) \cap M$ , allora  $c_L$  e  $c_M$  sono due cicli indipendenti di  $C(Lk(a)) \otimes \mathbb{Z}_2$  (in  $\partial(c_L)$  o in  $\partial(c_M)$  ogni  $(n - 2)$ -simpleso comparirà 2 volte). Da questo segue che  $H_{n-1}(Lk(a); \mathbb{Z}_2)$  ha dimensione almeno 2 come  $\mathbb{Z}_2$ -spazio vettoriale. Ma il teorema dei coefficienti universali ci assicura che  $H_{n-1}(Lk(a); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ , contraddicendo quanto visto. Tale contraddizione mostra che  $M$  deve essere vuoto e  $L = K$ .

□

Il teorema 1.2 ci permette ora di dare la seguente:

**Definizione 1.4** (Varietà omologica orientabile). Si dirà *orientabile* una varietà omologica  $n$ -dimensionale se esiste una triangolazione  $K$  di  $X$ , per la quale gli  $n$ -simplessi possono essere identificati con gli elementi di  $C_n(K)$ <sup>2</sup> in maniera tale che, se  $\sigma$  è un  $(n - 1)$ -simpleso e  $\tau_1$  e  $\tau_2$  sono i due  $n$ -simplessi aventi  $\sigma$  come faccia,  $\sigma$  compare in  $\partial\tau_1$  e  $\partial\tau_2$  con segni opposti (i simplessi adiacenti si diranno orientati coerentemente).

**Proposizione 1.1.** *Sia  $X$  una varietà omologica  $n$ -dimensionale. Allora  $H_n(X) \cong \mathbb{Z}$  se  $X$  è orientabile,  $H_n(X) \cong 0$  altrimenti.*

*Dimostrazione.* Sia  $K$  una triangolazione di  $X$ , e supponiamo di aver identificato gli  $n$ -simplessi come elementi di  $C_n(K)$  come descritto nella definizione 1.4. Allora  $z$ , la somma di tutti gli  $n$ -simplessi di  $K$ , è un ciclo, in quanto in  $\partial z$  compaiono due volte tutti gli  $(n - 1)$ -simplessi, ma con segno opposto. Lo stesso varrà per ogni multiplo intero di  $z$ . Viceversa se  $z'$  è un elemento di  $Z_n(C(K))$  in cui appare  $r\sigma$  per un qualche  $n$ -simpleso  $\sigma$ , allora in  $z'$  deve comparire  $r\tau$  per ogni  $n$ -simpleso  $\tau$  che incontra  $\sigma$  in un  $(n - 1)$ -simpleso. Per tale ragione, grazie al punto 4 del teorema 1.2, in  $z'$  sarà presente  $r\tau$  per ogni  $n$ -simpleso di  $K$ , cioè  $z' = rz$ , quindi  $H_n(X) \cong \mathbb{Z}$ .

Lo stesso argomento mostra che, comunque si identifichino gli  $n$ -simplessi di  $K$  con gli elementi di  $C_n(K)$ , ogni  $z' \in Z_n(C(K))$  deve essere della forma  $rz$ , dove  $z = \sum \pm \sigma$  e  $\sigma$  varia per tutti gli  $n$ -simplessi di  $K$ . Se  $H_n(K) \cong \mathbb{Z}$ , si deve avere  $\partial z = 0$ , quindi deve essere possibile cambiare se necessario l'identificazione degli  $n$ -simplessi in maniera tale da soddisfare la richiesta della definizione precedente. Lo stesso procedimento utilizzato per provare  $H_n(K) \cong \mathbb{Z}$  dimostra che in ogni caso  $H_n(K; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ . Per il teorema dei coefficienti universali si avrà  $H_n(K) \cong \mathbb{Z}$  oppure  $H_n(K) \cong 0$ . Allora  $H_n(K) \cong 0$  se  $X$  non è orientabile. □

<sup>2</sup>Con  $C_n(K)$  intendiamo il gruppo libero commutativo generato dai simplessi  $n$ -dimensionali contenuti in  $K$ .



La definizione di orientabilità per una varietà omologica produce in tal modo due vantaggi: in primo luogo ci permette di riconoscere una varietà orientabile dal suo  $n$ -esimo gruppo di omologia, in secondo luogo, nel caso si abbia una triangolazione della varietà, la dimostrazione ci fornisce un generatore di  $H_n(X)$ . Basta infatti considerare la somma dei semplici  $n$ -dimensionali identificati con gli elementi di  $C_n(K)$  per ottenere il generatore richiesto. Il ciclo così ottenuto è detto anche *classe fondamentale*.

Un'altra osservazione interessante risiede nel fatto che esistono solo due classi fondamentali, in quanto  $\mathbb{Z}$  ha solo due generatori. Da questo segue che esistono solo due orientazioni per  $X$ .



# Capitolo 2

## Orientabilità per varietà topologiche

Le nozioni relative a questo capitolo sono state tratte da [5, cap. 22]

In questo capitolo  $X$  sarà una varietà topologica  $n$ -dimensionale, con  $n \geq 1$ .

### 2.1 Orientabilità locale e globale

**Lemma 2.1.** *Per un punto  $x \in X$  si ha*

$$H_n(X, X - x) \cong \mathbb{Z}$$

*Dimostrazione.* Sia  $U$  un intorno aperto di  $x$ , omeomorfo alla palla aperta unitaria in  $\mathbb{R}^n$  (in altri termini un intorno coordinato di  $x$ ). Tramite escissione del chiuso  $X - U$  sottoinsieme dell'aperto  $X - x$  otteniamo:

$$H_n(U, U - x) \cong H_n(X, X - x)$$

Per la contrattilità di  $U$ , la sequenza esatta della coppia  $(U, U - x)$  fornisce:

$$H_n(U, U - x) \cong H_{n-1}(U - x)$$

Ma dato che  $U - x \simeq S^{n-1}$  per invarianza omotopica si ha  $H_{n-1}(U - x) \cong \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Definizione 2.1** (Orientazione locale). Un'orientazione locale di  $X$  è il dato di un generatore di  $H_n(X, X - x)$ .

**Lemma 2.2** (Lemma di estensione). Dato un elemento  $\alpha_x \in H_n(X, X - x)$ , esistono un intorno aperto  $U$  di  $x$  e  $\alpha \in H_n(X, X - U)$  tali che  $j_x^U(\alpha) = \alpha_x$  dove:

$$j_x^U : H_n(X, X - U) \rightarrow H_n(X, X - x)$$

è il morfismo indotto dall'inclusione.

*Dimostrazione.* Sia  $z$  un ciclo rappresentante  $\alpha_x$ . Il supporto di  $|\partial z|$ <sup>1</sup> è un sottoinsieme compatto di  $X$ , in quanto immagine continua di un compatto. Inoltre  $|\partial z| \subset X - x$ , così ponendo  $U = X - |\partial z|$  è un intorno aperto di  $x$  (è un aperto in quanto  $|\partial z|$  è chiuso, essendo compatto in  $X$  di Hausdorff). Basta prendere infine  $\alpha \in H_n(X, X - U)$  come la classe di omologia relativa di  $z \bmod X - U$ .  $\square$

Questo lemma sottolinea come sia possibile ottenere un elemento  $\alpha_y \in H_n(X, X - y)$  per  $y$  in un intorno opportuno di  $x$  (cioè  $y \in U$ ) da  $\alpha_x$  ponendo  $\alpha_y = j_y^U(\alpha)$ . D'ora in poi diremo che  $\alpha$  è un'estensione di  $\alpha_x$  su  $U$ .

**Lemma 2.3** (Lemma di coerenza). *Se  $\alpha_x$  è un generatore di  $H_n(X, X - x)$ , allora è possibile scegliere  $U$  e  $\alpha$  in maniera tale che  $\alpha_y$  generi  $H_n(X, X - y)$  per ogni  $y \in U$ .*

Tale lemma segue da un risultato più forte:

**Lemma 2.4** (Lemma di uniformità). *Ogni intorno  $W$  di  $x$  contiene un intorno  $U$  di  $x$  tale che per ogni  $y \in U$ ,  $j_y^U$  è un isomorfismo (quindi  $\alpha_x$  ha un'unica estensione in  $U$ ).*

*Dimostrazione.* Sia  $V$  un intorno coordinato di  $x$  in  $W$  (in particolare  $V \cong D^n$ ), e sia  $U$  un aperto più piccolo omeomorfo in  $D^n$  ad una palla aperta con raggio inferiore a 1.

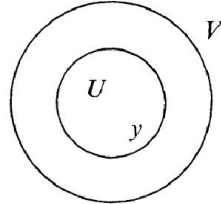


Figura 2.1: Intorni coordinati lemma 2.4

Abbiamo il seguente diagramma commutativo (per un qualsiasi  $y \in U$ ):

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, X - U) & \xrightarrow{\cong} & H_n(V, V - U) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-1}(V - U) \\ j_y^U \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(X, X - y) & \xrightarrow{\cong} & H_n(V, V - y) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-1}(V - y) \end{array}$$

dove gli isomorfismi di sinistra sono ottenuti per escissione, mentre quelli sulla destra tramite il morfismo di connessione ( $V$  è contrattile). Ora la freccia di destra è un isomorfismo poiché l'inclusione  $V - U \rightarrow V - y$  è un'equivalenza omotopica. Quindi  $j_y^U$  è un isomorfismo poiché composizione di isomorfismi.  $\square$

<sup>1</sup>Se  $\sigma$  è un  $q$ -simplexso singolare, il supporto di  $\sigma$  è  $|\sigma| := \sigma(\Delta_q)$ . Se  $c = \sum \sigma_j$  è una  $q$ -catena poniamo  $|c| := \cup |\sigma_j|$ .

*Osservazione 2.1.* Le uniche proprietà di  $U$  sfruttate nella dimostrazione precedente sono: (a)  $(X, V, U)$  è una terna escissiva, (b) l'inclusione  $i : V - U \rightarrow V - y$  induce un isomorfismo  $H_{n-1}(V - U) \rightarrow H_{n-1}(V - y)$  per ogni  $y$ . Tali proprietà sarebbero state soddisfatte anche nel caso in cui avessimo preso  $U$  omeomorfo a un plurirettangolo chiuso di dimensione  $d \leq n$  contenente il punto  $x \in X$ . (Con il termine plurirettangolo intendiamo un insieme del tipo  $\prod_{i=1}^r [a_i, b_i]$ , con  $r$  dimensione del plurirettangolo).

**Definizione 2.2** (Orientazione locale lungo un sottospazio). Sia dato un sottospazio  $U \subset X$ . Un elemento  $\alpha \in H_n(X, X - U)$  tale che  $j_y^U(\alpha)$  generi  $H_n(X, X - y)$  per ogni  $y \in U$  si dice *orientazione locale di  $X$  lungo  $U$* .

Se  $V \subset U$  sono entrambi sottospazi di  $X$  denoteremo con

$$j_V^U : H_n(X, X - U) \rightarrow H_n(X, X - V)$$

il morfismo indotto dall'inclusione. Se  $\alpha$  è un'orientazione locale lungo  $U$ , allora  $j_V^U(\alpha)$  sarà un'orientazione locale lungo  $V$ , dato che

$$j_y^V[j_V^U(\alpha)] = j_y^U(\alpha) \quad , \forall y \in V$$

Diamo ora la definizione di orientazione globale:

**Definizione 2.3** (Orientazione globale). Siano dati un ricoprimento aperto  $U_i$  di  $X$  e un'orientazione locale  $\alpha_i \in H_n(X, X - U_i)$  di  $X$  lungo  $U_i$  per ogni  $i$ . Si dirà che questo è un *sistema di orientazioni* se sussiste la seguente condizione di compatibilità:

$$\text{Per ogni } x \in X, \text{ se } x \in U_i \cap U_j, \text{ allora } j_x^{U_i}(\alpha_i) = j_x^{U_j}(\alpha_j)$$

In tale circostanza un'orientazione locale è ben definita per ogni  $x$  da

$$\alpha_x = j_x^{U_i}(\alpha_i) \quad x \in U_i$$

Dato un altro sistema di orientazioni  $(V_k, \beta_k)$ , diremo che definisce la medesima orientazione del precedente se

$$\alpha_x = \beta_x \quad x \in X$$

La condizione appena esposta definisce una relazione di equivalenza fra i sistemi orientanti. Un' *orientazione globale* sarà la scelta di una di tali classi di equivalenza. Diremo che  $X$  è orientabile se esiste un sistema di orientazioni

**Proposizione 2.1.** 1. Una sottovarietà aperta  $V$  di una varietà  $X$  orientabile, è anch'essa orientabile

2.  $X$  è orientabile se e solo se lo sono tutte le sue componenti connesse.

*Dimostrazione.* 1. Sia  $(U_i, \alpha_i)$  un sistema orientante per  $X$ . Per ogni  $x \in V$  sia  $\beta_x \in H_n(V, V - x)$  l'immagine di  $\alpha_x$  attraverso l'isomorfismo escissivo  $H_n(V, V - x) \cong H_n(X, X - x)$ . Grazie al lemma 2.4 esiste un intorno aperto

$V_x$  di  $x$  tale che  $V_x \subset V \cap U_i$  per qualche indice  $i$  e tale che  $\beta_x$  ha un'unica estensione a un'orientazione  $\bar{\beta}_x$  lungo  $V_x$ ; possiamo inoltre scegliere  $V_x$  così piccolo in maniera tale che  $X - V \subset \text{int}(X - V_x)$ . Allora per ogni  $y \in V_x$  il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} H_n(V, V - y) & \xrightarrow{\cong} & H_n(X, X - y) & \longrightarrow & H_n(X, X - U_i) \\ \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ H_n(V, V - V_x) & \xrightarrow{\cong} & H_n(X, X - V_x) & \longrightarrow & H_n(X, X - U_i) \end{array}$$

mostra che l'orientazione locale di  $V$  in  $y$  indotta da  $\bar{\beta}_x$  coincide con  $\beta_y$ . Ciò mostra che  $(V_x, \bar{\beta}_x)$  è un sistema orientante per  $V$ .

2. Segue da 1. osservando che le componenti connesse sono sottovarietà aperte di  $X$ . □

**Proposizione 2.2.** *Supponiamo che  $X$  sia connesso. Due orientazioni di  $X$  compatibili in un punto coincidono*

*Dimostrazione.* Sia  $A$  l'insieme dei punti in cui le due orientazioni sono compatibili. Grazie al lemma 2.4,  $A$  e  $X - A$  sono entrambi aperti, per cui  $X = A$ . □

**Corollario 2.1.** *Una varietà  $X$  orientabile ha esattamente due orientazioni*

## 2.2 Il fibrato di orientazione

**Teorema 2.1** (Rivestimento di orientazione). *Sia  $X$  una varietà non orientabile. Esiste un rivestimento a 2 fogli connesso per archi  $p : \Theta(1) \rightarrow X$ , con  $\Theta(1)$  <sup>2</sup> orientabile.*

*Dimostrazione.* Definiamo  $\Theta(1)$  come l'insieme delle coppie  $(x, \alpha_x)$  dove  $x \in X$  e  $\alpha_x$  è uno dei due generatori di  $H_n(X, X - x)$ . Poniamo poi  $p(x, \alpha_x) = x$ . Consideriamo le coppie  $(U, \alpha_U)$ , con  $U$  aperto di  $X$  e  $\alpha_U$  orientazione locale di  $X$  lungo  $U$ . Sia:

$$\langle U, \alpha_U \rangle = \{(x, \alpha_x) | x \in U, \alpha_x = j_x^U(\alpha_U)\}$$

Supponiamo che  $(x, \alpha_x) \in \langle U, \alpha_U \rangle \cap \langle U', \alpha_{U'} \rangle$ . Grazie al lemma 2.4 esiste un intorno aperto  $U'' \subset U \cap U'$  di  $x$  tale che  $\alpha_x$  ha un'unica estensione  $\alpha_{U''}$  su  $U''$ . Dobbiamo avere allora  $j_{U''}^U(\alpha_U) = \alpha_{U''} = j_{U''}^{U'}(\alpha_{U'})$ , così:

$$\langle U'', \alpha_{U''} \rangle \subset \langle U, \alpha_U \rangle \cap \langle U', \alpha_{U'} \rangle$$

Pertanto gli insiemi  $\langle U, \alpha_U \rangle$  formano una base per una topologia su  $\Theta(1)$ . Dato che  $p$  mappa  $\langle U, \alpha_U \rangle$  omeomorficamente su  $U$  e

$$p^{-1}(U) = \langle U, \alpha_U \rangle \sqcup \langle U, -\alpha_U \rangle$$

otteniamo così un rivestimento a 2-fogli.

Per ogni  $x \in X$  si scelgano degli intorni aperti  $V \supset U$  come nel lemma 2.4 per i quali esista un  $\alpha_V$ ; poniamo  $\alpha_U = j_U^V(\alpha_V)$ . Usiamo l'isomorfismo

$$H_{n-1}(\langle V, \alpha_V \rangle - \langle U, \alpha_U \rangle) \cong H_{n-1}(V - U)$$

per orientare  $\Theta(1)$  lungo  $\langle U, \alpha_U \rangle$ . Questo mostra che  $\Theta(1)$  è orientabile. <sup>3</sup>

Supponiamo ora  $\Theta(1)$  non connesso. Per ogni componente  $C$ ,  $p|_C : C \rightarrow X$  è un rivestimento che deve essere un omeomorfismo (dato che la fibra di  $\Theta(1)$  ha cardinalità 2). Ciò significa che  $C$  non è orientabile, giungendo ad una contraddizione.  $\square$

**Corollario 2.2.** *Ogni varietà 1-connessa è orientabile. Più generalmente ogni varietà connessa il cui gruppo fondamentale non ha sottogruppi di ordine 2 è orientabile.*

*Dimostrazione.* Segue dal fatto che  $p_*(\pi_1(\Theta(1)))$  ha indice 2 in  $\pi_1(X, x_0)$   $\square$

**Esempio 2.1.** Nel caso del piano proiettivo  $\mathbb{P}^2$ , il rivestimento di orientazione è  $\Theta(1) = S^2$ . Nel caso della bottiglia di Klein  $U_2$  il rivestimento sarà invece il toro  $T_1$ . Consideriamo la mappa quoziente  $q : I^2 \rightarrow U_2$  con le identificazioni sul bordo secondo la successione di lati  $bab^{-1}a$ . L'idea che soggiace alla costruzione sopra esposta in questo caso è di incollare due copie di  $I^2$  identificando una coppia di lati con la medesima lettera, precisamente i lati corrispondenti ad  $a$ .

<sup>2</sup>La notazione  $\Theta(1)$  verrà chiarita in seguito

<sup>3</sup>Quanto appena detto vale come conseguenza del lemma 26.7 di [4, cap. 26] il quale afferma:

**Lemma 2.5.** *Se  $M$  è orientata in maniera consistente lungo un ricoprimento aperto, esiste un'unica estensione dell'orientazione su  $M$*

Riportiamo di seguito una figura per meglio comprendere quanto detto:

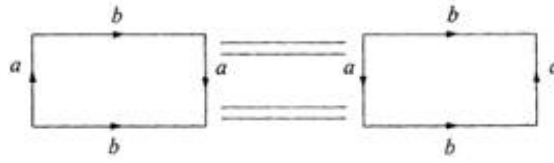


Figura 2.2: Costruzione rivestimento di orientazione  $U_2$

Definiamo in dettaglio la mappa  $p : T_1 \rightarrow U_2$  con:

$$p(e^{2\pi is}, e^{2\pi it}) := \begin{cases} q(2s, t) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ q(2s - 1, 1 - t) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Più generalmente è possibile mostrare che se  $X = U_h$ , cioè la somma connessa di  $h$  piani proiettivi, il rivestimento di orientazione associato è  $\Theta(1) = T_{h-1}$ ,  $h > 1$ .

Possiamo generalizzare la costruzione del rivestimento di orientazione. Notiamo in primo luogo che l'ipotesi di non orientabilità della varietà è stata sfruttata unicamente per provare che lo spazio totale del rivestimento fosse connesso. Se rinunciamo all'ipotesi di connessione, ammettendo che lo spazio totale possa essere non connesso, la costruzione sopra esposta diviene estendibile anche a varietà orientabili.

**Teorema 2.2** (Fibrato di orientazione). *Sia  $X$  una generica varietà  $n$  dimensionale. Sia  $\Theta$  l'insieme delle coppie  $(x, \alpha_x)$  con  $x \in X$ ,  $\alpha_x \in H_n(X, X - x)$ , senza assumere che  $\alpha_x$  sia un generatore di  $H_n(X, X - x)$ . Sia  $p : \Theta \rightarrow X$  con  $p(x, \alpha_x) := x$ . Per ogni aperto  $U \subset X$  definiamo  $\langle U, \alpha_U \rangle$  come nel teorema 2.1. Gli insiemi  $\langle U, \alpha_U \rangle$  sono una base per una topologia su  $\Theta$ , con la quale  $p : \Theta \rightarrow X$  diventa un fibrato. Le operazioni di gruppo risultano inoltre continue sulla fibra di ciascun punto.*

La mappa

$$\mu : \Theta \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \mu(x, \alpha_x) := |\alpha_x|$$

è continua, ovvero localmente costante. In particolare  $\Theta$  si decompone nella somma topologica

$$\Theta = \Theta(0) + \Theta(1) + \Theta(2) + \dots, \quad \Theta(r) := \mu^{-1}(r)$$

La restrizione della mappa  $p|_{\Theta(r)} : \Theta(r) \rightarrow X$  è un rivestimento.

*Dimostrazione.* Possiamo riapplicare il medesimo ragionamento effettuato nella dimostrazione del teorema di esistenza di un rivestimento di orientazione connesso per varietà non orientabili. Questo ci permette di affermare senza alcuna difficoltà che gli insiemi  $\langle U, \alpha_U \rangle$  sono una base per una topologia su  $\Theta$ . Proviamo ora che  $p : \Theta \rightarrow X$  risulta un fibrato. Consideriamo un punto  $x \in X$ . Grazie al lemma 2.4 sappiamo che esiste un opportuno intorno  $U \subset X$  del punto  $x$  per il quale

$$j_y^U : H_n(X, X - U) \rightarrow H_n(X, X - y), \quad \forall y \in U$$



sia un isomorfismo (quindi in particolare varrà anche per  $x$ ). Proviamo ora che nel diagramma commutativo <sup>4</sup> :

$$\begin{array}{ccc} U \times H_n(X, X - U) & \xrightarrow{\varphi} & p^{-1}(U) \\ \downarrow \pi_U & \swarrow p & \\ U & & \end{array}$$

$\varphi$  è un omeomorfismo, dove abbiamo definito  $\varphi(x, \alpha_U) := (x, j_x^U(\alpha_U))$ . La mappa è ben definita in quanto per la definizione stessa di  $\langle U, \alpha_U \rangle$  si ha che  $(x, \alpha_x) \in \langle U, \alpha_U \rangle$  se  $\alpha_x = j_x^U(\alpha_U)$ . Di certo il diagramma è commutativo in quanto

$$(p \circ \varphi)(x, \alpha_U) = p(x, j_x^U(\alpha_U)) = p(x, \alpha_x) = x = \pi_U(x, \alpha_U)$$

La funzione  $\varphi$  è aperta poiché se  $V \subset U$  è aperto e  $\alpha_V = j_V^U(\alpha_U)$  si ha  $\varphi(V \times \alpha_V) = \langle V, \alpha_V \rangle$ . Se  $\varphi(x, \alpha) = \varphi(y, \beta)$  per commutatività si deve avere  $x = y$  quindi riconducendoci a  $j_x^U(\alpha) = j_x^U(\beta)$  otteniamo  $\alpha = \beta$  in quanto  $j_x^U$  è un isomorfismo per come abbiamo scelto  $U$ . La suriettività di  $\varphi$  è data invece dal fatto che per ogni  $y \in U$  la mappa  $j_y^U : H_n(X, X - U) \rightarrow H_n(X, X - y)$  è un isomorfismo, pertanto per  $V \subset U$  aperto  $\varphi^{-1}(\langle V, \alpha_V \rangle) = V \times \alpha_V$ . Riassumendo  $\varphi$  è un omeomorfismo. Questo ci dice che per ogni  $x$  esiste un intorno aperto  $U$  e un omeomorfismo  $\varphi : U \times H_n(X, X - U) \rightarrow p^{-1}(U)$  tale che  $p \circ \varphi = \pi_U$ , cioè  $p : \Theta \rightarrow X$  è un fibrato di fibra  $\mathbb{Z}$ .

Sulla fibra  $\varphi$  è semplicemente  $j_x^U$ , che è un isomorfismo. Ne segue che le operazioni sulla fibra corrispondono alle operazioni sul secondo fattore di  $U \times H_n(X, X - U)$ , le quali sono continue poiché  $\mathbb{Z}$  è un gruppo topologico con la topologia discreta. Rimane da mostrare che  $\mu$  è localmente costante e ogni restrizione  $p|_{\Theta(r)}$  è un rivestimento. Dato  $x \in X$ , scegliamo un intorno  $U$  per cui  $j_y^U$  sia un isomorfismo per ogni  $y \in U$ . Se  $\alpha_U$  è un elemento di  $H_n(X, X - U)$ ,  $j_x^U(\alpha_U) = \alpha_x$  e conseguentemente:

$$\mu(x, \alpha_x) = |\alpha_x| = |j_x^U(\alpha_U)| = |\alpha_U|$$

e questo ci assicura che  $\mu$  è indipendente dalla scelta del punto  $x$  in  $U$ , quindi  $\mu$  è costante su  $U$ , cioè  $\mu$  è localmente costante e perciò continua.

Infine il fatto che  $p|_{\Theta(r)}$  sia un rivestimento è banale conseguenza di  $(p|_{\Theta(r)})^{-1}(V) = \langle V, \alpha_V^{(r)} \rangle \sqcup \langle V, -\alpha_V^{(r)} \rangle$  con  $V \subset X$  aperto. □

<sup>4</sup>Abbiamo dotato  $H_n(X, X - U)$  della topologia discreta

## 2.3 Sezioni locali e orientabilità

**Definizione 2.4** (Modulo delle sezioni locali). Sia  $A \subset X$ . L'insieme delle *sezioni locali* su  $A$  è:

$$\Gamma A := \{s : A \rightarrow \Theta \mid s \in C(A, \Theta), p \circ s = 1_A\}$$

Per  $x \in A$ , sia  $s'(x) \in H_n(X, X - x)$  la seconda coordinata di  $s(x)$  cioè:

$$s(x) = (x, s'(x))$$

Se  $s_1, s_2 \in \Gamma A$  allora  $x \rightarrow (x, s'_1(x) + s'_2(x)), x \in A$  è ancora una sezione su  $A$ , che denotiamo con  $s_1 + s_2$ . Se  $s \in \Gamma A$ ,  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , allora  $x \rightarrow (x, \lambda s'(x)), x \in A$  è ancora una sezione su  $A$  denotata con  $\lambda s$ . In questo modo  $\Gamma A$  guadagna una struttura di  $\mathbb{Z}$ -modulo. L'elemento nullo di  $\Gamma A$  è la sezione  $x \rightarrow (x, 0), x \in A$ . Le sezioni su  $X$  sono dette *sezioni globali*.

**Definizione 2.5** (Orientabilità lungo un sottoinsieme). Sia  $A \subset X$ . Diremo che  $X$  è *orientabile lungo*  $A$  se esiste una sezione  $\theta_A$  su  $A$  che mappi  $A$  in  $\Theta(1)$ . Parimenti  $X$  sarà orientabile se esiste una sezione globale in  $\Theta(1)$ . Un' *orientazione* di  $X$  lungo  $A$  è la scelta di una sezione  $\theta_A$ .

**Proposizione 2.3.**  $X$  è orientabile lungo  $A$  se e solo se esiste un omeomorfismo  $\varphi : p^{-1}(A) \rightarrow A \times \mathbb{Z}$  tale che il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(A) & \xrightarrow{\varphi} & A \times \mathbb{Z} \\ \downarrow p & \swarrow \pi_A & \\ A & & \end{array}$$

sia commutativo. In questo caso  $\Gamma A$  è isomorfo al modulo  $C(A, \mathbb{Z})$ , cioè al modulo delle mappe localmente costanti: se  $A$  ha  $k < \infty$  componenti connesse,  $\Gamma A \cong \bigoplus_{i=0}^k \mathbb{Z}$

*Dimostrazione.* Data una sezione  $s : A \rightarrow \Theta(1)$ , per ogni  $x \in A$ ,  $s'(x)$  è un generatore di  $H_n(X, X - x)$ . Se  $(x, \alpha_x) \in p^{-1}(A)$ , esiste un unico  $\lambda_x \in \mathbb{Z}$  tale che  $\alpha_x = \lambda_x s'(x)$ . Definiamo  $\varphi$  con  $\varphi(x, \alpha_x) := (x, \lambda_x), x \in A$ . Se  $U$  è un intorno aperto di  $x$  sul quale  $\alpha_x$  ha un'unica estensione  $\alpha_U$ , allora  $\varphi$  mappa  $\langle U, \alpha_U \rangle$  in maniera biunivoca su  $U \times \lambda_x$ , quindi è un omeomorfismo.

Viceversa, data  $\varphi$ , poniamo  $s(x) := \varphi^{-1}(x, 1), x \in A$ . □

*Osservazione 2.2* (Compatibilità delle definizioni). Finora abbiamo visto due definizioni di orientabilità per varietà topologiche: una basata sull'esistenza di un sistema di orientazioni  $(U_i, \alpha_i)$ , l'altra legata all'esistenza di una sezione globale da  $X$  in  $\Theta(1)$ . Sorge spontaneo chiedersi se le due definizioni siano equivalenti.

**Proposizione 2.4.** Le due definizioni date di orientabilità sono equivalenti.

*Dimostrazione.* Supponiamo che esista un sistema di orientazioni locali per  $X$ , cioè un ricoprimento aperto  $U_i$  e delle orientazioni locali  $\alpha_i \in H_n(X, X - U_i)$  per cui valga la condizione di compatibilità

$$j_x^{U_i}(\alpha_i) = j_x^{U_j}(\alpha_j), \text{ per } x \in U_i \cap U_j$$

Sappiamo che risulta ben definita un'orientazione locale  $\alpha_x$  per ogni punto di  $X$  ponendo  $\alpha_x = j_x^{U_i}(\alpha_i)$ . Possiamo dunque definire la sezione:

$$s : X \rightarrow \Theta(1), \quad s(x) := (x, \alpha_x)$$

La funzione sopra definita è continua. Infatti preso  $x \in X$  esiste un opportuno intorno  $U$  per cui  $\alpha_x$  ha un'unica estensione  $\alpha_U$ . Ne segue  $s(U) \subseteq \langle U, \alpha_U \rangle$ , dove quest'ultimo è un intorno aperto di  $(x, \alpha_x)$ . Vale inoltre che  $p \circ s = 1_X$ . Quindi  $s$  è una sezione globale.

Viceversa supponiamo sia data una sezione globale, cioè una mappa  $s : X \rightarrow \Theta(1)$ . Dato un ricoprimento aperto  $U_i$ <sup>5</sup> di  $X$ , possiamo utilizzare la restrizione di  $s$  ad un certo  $U_i$  per determinare un'orientazione locale su tale aperto (basta considerare la seconda componente della sezione). Si ottiene in tal modo un sistema orientante  $(U_i, \alpha_i)$  come richiesto (la condizione di compatibilità è banalmente verificata).  $\square$

*Osservazione 2.3.* Sono equivalenti anche le definizioni di orientabilità lungo un sottospazio.

*Osservazione 2.4.* Soffermiamoci sulla proposizione 2.3. Se supponiamo  $X$  orientabile vorrà dire che esiste un omeomorfismo  $\varphi : p^{-1}(X) \rightarrow X \times \mathbb{Z}$ . Essendo  $p^{-1}(X) = \Theta$ , avremo che  $\Theta \cong X \times \mathbb{Z}$ . Otteniamo quindi una nuova condizione di orientabilità:  $X$  è orientabile se e solo se il suo fibrato di orientazione  $\Theta$  è in realtà un fibrato banale cioè omeomorfo a  $X \times \mathbb{Z}$ .

**Esempio 2.2.** Se prendiamo in considerazione varietà orientabili come  $S^2$  o  $T_1$  allora si ottiene, per quanto visto in precedenza:

$$\Theta_{S^2} \cong S^2 \times \mathbb{Z} \quad \Theta_{T_1} \cong T_1 \times \mathbb{Z}$$

Viceversa considerando varietà non orientabili come  $\mathbb{P}^2$  e  $U_2$  si ha:

$$\Theta_{\mathbb{P}^2} \cong \mathbb{P}^2 + \sum_{i \geq 1} S^2 \not\cong \mathbb{P}^2 \times \mathbb{Z}$$

$$\Theta_{U_2} \cong U_2 + \sum_{i \geq 1} T_1 \not\cong U_2 \times \mathbb{Z}$$

---

<sup>5</sup>Per non incorrere in casi particolarmente delicati possiamo supporre gli aperti  $U_i$  connessi

## 2.4 Omologia e sezioni locali

Sia  $A \subset X$ . Esiste un morfismo canonico

$$j_A : H_n(X, X - A) \rightarrow \Gamma A$$

definito con  $j_A(\alpha) := (x, j_x^A(\alpha))$ ,  $x \in A$ . Dobbiamo verificare la continuità di  $j_A(\alpha)$ . Sia  $z$  un ciclo rappresentante  $\alpha$ . Se  $U = X - |\partial z|$ , allora  $U$  è aperto e contiene  $A$ , e se  $\alpha_U \in H_n(X, X - U)$  è la classe di omologia relativa a  $X - U$ , allora  $\alpha_U$  induce  $\alpha$  tramite l'inclusione di  $X - U$  in  $X - A$ . Preso  $x \in A$ , sia  $V \subset U$  intorno di  $x$  tale che  $j_x^A(\alpha)$  abbia un'unica estensione  $\alpha_V$  su  $V$ . Dato che  $\alpha_U$  induce  $\alpha_V$ ,  $j_A(\alpha)$  mappa  $V \cap A$  in  $\langle V, \alpha_V \rangle$ , ma tali insiemi sono un sistema fondamentale di intorni per  $(x, j_x^A(\alpha))$  in  $\Theta$ .

Se  $B \subset A$ , abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, X - A) & \xrightarrow{j_A} & \Gamma A \\ j_B^A \downarrow & & r \downarrow \\ H_n(X, X - B) & \xrightarrow{j_B} & \Gamma B \end{array}$$

dove la funzione  $r$  è definita restringendo le sezioni su  $A$  al sottoinsieme  $B$ .

**Teorema 2.3.** *Sia  $A \subset X$  un chiuso. Allora*

1.  $H_q(X, X - A) = 0$  se  $q > n$ .
2.  $j_A$  è un morfismo iniettivo la cui immagine è il sottomodulo  $\Gamma_c A$  delle sezioni a supporto compatto, ovvero

$$j_A : H_n(X, X - A) \cong \Gamma_c A$$

In particolare,  $j_X : H_n(X) \cong \Gamma_c X$  e  $H_q(X) = 0$  se  $q > n$ .

Una sezione  $s \in \Gamma A$  si dice a supporto compatto se coincide con la sezione nulla all'esterno di un sottoinsieme compatto di  $A$ . Se  $A$  è compatto  $\Gamma A = \Gamma_c A$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione verrà divisa in vari passi:

1.  $A = \emptyset$ .  
La dimostrazione è ovvia.
2. Se il teorema è valido per  $A_1, A_2$  e  $A_1 \cap A_2$ , allora è valido anche per  $A = A_1 \cup A_2$ .

Applichiamo il teorema di Mayer-Vietoris alla terna  $(X, X - A_1, X - A_2)$ . Per  $q > n$  abbiamo  $H_q(X, X - A) = 0$ , mentre per  $q = n$  abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(X, X - A) & \longrightarrow & H_n(X, X - A_1) \oplus H_n(X, X - A_2) & \longrightarrow & H_n(X, X - A_1 \cap A_2) \\ & & \downarrow j_A & & \cong \downarrow j_{A_1} \oplus j_{A_2} & & \cong \downarrow j_{A_1 \cap A_2} \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma_c A & \xrightarrow{(s_1, -s_2)} & \Gamma_c A_1 \oplus \Gamma_c A_2 & \xrightarrow{k_1 + k_2} & \Gamma_c(A_1 \cap A_2) \end{array}$$

dove con  $s_1$  (rispettivamente  $s_2$ ) abbiamo indicato la restrizione delle sezioni su  $A$  a sezioni su  $A_1$  (rispettivamente  $A_2$ ) e con  $k_1$  (rispettivamente  $k_2$ ) la restrizione delle sezioni su  $A_1$  (rispettivamente  $A_2$ ) a sezioni su  $A_1 \cap A_2$ . La seconda riga è esatta (è una semplice verifica). Il lemma dei 5 ci permette di concludere che  $j_A$  è un isomorfismo.

3.  $A$  è un compatto, connesso contenuto in un intorno coordinato che è uniformemente rivestito da  $p$ . Per escissione possiamo sostituire  $X$  con  $\text{int}(D^n)$ .

- $A$  è un plurirettangolo di dimensione  $\leq n$ . La proprietà 1. segue da  $H_q(\text{int}(D^n), \text{int}(D^n) - A) \cong H_{q-1}(\text{int}(D^n) - A) \cong H_{q-1}(S^{n-1})$ , mentre la proprietà 2. segue dall'osservazione 2.1 e dalla proposizione 2.3 dato che  $A$  è connesso e  $D^n$  è orientabile (questo poiché  $\Gamma A \cong C(A, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  e  $j_x^A$  è un isomorfismo).

- $A$  è un'unione finita di plurirettangoli  $A_1, \dots, A_m$  tali che ogni plurirettangolo  $A_i$  abbia le facce parallele ad un iperpiano coordinato di  $\mathbb{R}^n$ . Possiamo assumere  $m > 1$ .

Procediamo per induzione su  $m$ . Sia  $A' = A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}$ . Allora  $A' \cap A_m$  è un insieme della medesima tipologia, unione al più di  $m - 1$  plurirettangoli precedentemente descritti (di dimensione minore probabilmente, ma questo non influisce sulla dimostrazione), così possiamo applicare l'ipotesi induttiva a  $A'$  e  $A' \cap A_m$ . Per il passo 2 il teorema varrà per  $A$ .

- $A$  è un compatto contenuto in  $U$  aperto coordinato uniformemente ricoperto.

Sia data  $s \in \Gamma A$ . Possiamo assumere che  $s$  mappi  $A$  interamente in uno dei fogli che ricoprono  $U$ . Infatti una sezione  $s \in \Gamma A$  deve essere una funzione continua ed essendo  $A$  connesso, l'immagine  $s(A)$  è connessa. Inoltre  $s(A)$  sarà incluso in  $\bigsqcup_{\alpha} V_{\alpha}$  dato che  $A \subset U$ , dove con  $\bigsqcup_{\alpha} V_{\alpha}$  abbiamo indicato l'unione disgiunta degli aperti che ricoprono uniformemente  $U$ . Si dovrà avere quindi  $s(A) \subset V_{\alpha_0}$  per un certo indice  $\alpha_0$ . Se così non fosse potrei scrivere

$$s(A) = s(A) \cap \bigsqcup_{\alpha} V_{\alpha} = \bigsqcup_{\alpha} (V_{\alpha} \cap s(A))$$

che è una decomposizione in aperti disgiunti di  $A$ , da cui  $s(A) \subset V_{\alpha_0}$ .

Allora estendiamo  $s$  ad un elemento  $s^* \in \Gamma U$  (semplicemente l'inversa di  $p$  rispetto al foglio considerato in precedenza). Per ogni punto  $x \in A$  si scelga un plurirettangolo di dimensione  $n$  contenente  $x$  nel suo interno, con le facce parallele agli iperpiani coordinati, e contenuto in  $U$ . Sia  $A'$  l'unione dei parallelepipedi così ottenuti. Tale unione sarà finita grazie alla compattezza di  $A$ . Grazie al caso precedente abbiamo un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
H_n(X, X - A') & \xrightarrow[\cong]{j_A} & \Gamma A' \ni s * |_{A'} \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_n(X, X - A) & \xrightarrow{j_A} & \Gamma A \ni s
\end{array}$$

che mostra  $s \in \text{Im} j_A$ , cioè  $j_A$  è suriettiva.

Dato  $\alpha \in H_q(X, X - A)$  con  $q \geq n$ . Se  $q = n$ , supponiamo  $j_A(\alpha) = 0$ . Vogliamo provare che  $\alpha = 0$ . Sia  $z$  un ciclo relativo rappresentante  $\alpha$ . Allora  $X - |\partial z|$  è un aperto  $V \supset A$ . Sia  $\alpha'$  la classe di omologia di  $z$  in  $H_q(X, X - V)$ . Se  $q = n$ , dato che  $j_x^V(\alpha') = j_x^A(\alpha) = 0$  per ogni  $x \in A$ , il lemma 2.4 ci assicura che esiste un aperto  $V'$ ,  $A \subset V' \subset V$ , tale che  $j_x^V(\alpha) = 0$  per ogni  $x \in V'$ . Sia  $A'$  costruito come in precedenza con  $A \subset A' \subset V' \cap U$ . Allora

$$j_{A'}^V(\alpha') = 0$$

grazie al caso precedente, così  $\alpha = j_A^{A'}(j_{A'}^V(\alpha')) = 0$ .

4.  $A$  è compatto.

$A$  è un'unione finita di insiemi compatti  $A_1, \dots, A_m$  ognuno dei quali è contenuto in un aperto coordinato completamente rivestito da  $p$ . Basta utilizzare l'induzione e i passi 2. e 3.

5.  $A \subset U$ ,  $U$  aperto con chiusura compatta (cioè  $U$  è relativamente compatto). Il teorema sarà vero per  $A$  e  $U$ .

Usiamo la sequenza esatta relativa alla terna

$$(X, U \cup (X - \bar{U}), (U - A) \cup (X - \bar{U}))$$

Grazie all'escissione:

$$H_q(U, U - A) \cong H_q(U \cup (X - \bar{U}), (U - A) \cup (X - \bar{U}))$$

Per  $q > n$ , otteniamo:

$$H_{q+1}(X, U \cup (X - \bar{U})) \rightarrow H_q(U, U - A) \rightarrow H_q(X, (U - A) \cup (X - \bar{U}))$$

Il primo e il terzo modulo sono nulli per il passo precedente applicato alla varietà  $X$  e ai compatti  $\bar{U} - U$  e  $\bar{A} \cup (\bar{U} - U)$ , dunque il termine di mezzo è 0.

Per  $q = n$  abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H_n(U, U - A) & \longrightarrow & H_n(X, (U - A) \cup (X - \bar{U})) & \longrightarrow & H_n(X, U \cup (X - \bar{U})) \\
\downarrow & & \downarrow j_A & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \Gamma_c A & \xrightarrow{i} & \Gamma(\bar{A} \cup (\bar{U} - U)) & \xrightarrow{r} & \Gamma(\bar{U} - U)
\end{array}$$

dove il morfismo iniettivo  $i$  è così definito: sia  $s \in \Gamma_c A$  nulla al di fuori di un compatto  $K \subset A$ . Poniamo

$$i(s) := \begin{cases} s, & \text{all'interno di } A \\ 0, & \text{al di fuori di } K \end{cases}$$

Da tale diagramma ricaviamo che  $j_A$  è un isomorfismo.

#### 6. Caso generale

Sia data  $s \in \Gamma_c A$  nulla al di fuori di un compatto  $K \subset A$ . Esiste un aperto  $U \supset K$  tale che  $\bar{U}$  è compatto (basta coprire  $K$  con un insieme finito di aperti coordinati). Consideriamo  $A' = A \cap U$ ,  $s' = s|_{A'}$ . Dal passo 5., applicato a  $j_{A'}$ , e dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(U, U - A') & \longrightarrow & H_n(X, X - A) \\ j_{A'} \downarrow \cong & & \downarrow j_A \\ s' \in \Gamma_c A' & \xrightarrow{i} & s \in \Gamma_c A \end{array}$$

concludiamo che  $s \in \text{Im } j_A$ .

Consideriamo ora  $\alpha \in H_q(X, X - A)$ . Per  $q = n$  supponiamo  $j_A(\alpha) = 0$ . Vogliamo provare che  $\alpha = 0$ . Sia  $z$  un ciclo relativo rappresentante  $\alpha$ . Applicando l'argomento precedente a  $|z|$ , esiste un aperto  $U \supset |z|$  tale che  $\bar{U}$  sia compatto. Sia  $A' = A \cap U$ . Dal medesimo diagramma commutativo abbiamo concluso per  $q = n$ ; per  $q > n$  sappiamo che la classe di  $z$  in  $H_q(U, U - A')$  è zero dal passo 5., quindi  $\alpha = 0$ .

□

**Corollario 2.3.** *Se  $A$  è connesso e non compatto,  $H_n(X, X - A) = 0$ . In particolare se  $X$  è connesso ma non compatto  $H_n(X) = 0$ .*

*Dimostrazione.* Se  $\alpha \in H_n(X, X - A)$ , per connessione  $\mu j_A(\alpha)$  è costante e dato che  $j_A(\alpha)$  è nulla al di fuori di un compatto,  $\alpha = 0$ . □

**Corollario 2.4.** *Se  $A$  è compatto con  $n$  componenti connesse e  $X$  è orientabile lungo  $A$  allora  $H_n(X, X - A) \cong \bigoplus_{i=0}^k \mathbb{Z}$ .*

**Corollario 2.5.** *Se  $A$  è un sottoinsieme compatto di  $\mathbb{R}^n$  con  $k$  componenti connesse,  $k$  è anche il numero di Betti in grado  $(n - 1)$  del complementare di  $A$  in  $\mathbb{R}^n$ .*

*Dimostrazione.* Dato che  $\mathbb{R}^n$  è orientabile, sarà orientabile lungo  $A$  e  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - A) \cong H_{n-1}(\mathbb{R}^n - A)$ . □

**Corollario 2.6.** *Sia  $X$  una varietà connessa e compatta. Si ha:*

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } X \text{ è orientabile} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Abbiamo già visto che se  $X$  è orientabile il modulo  $\Gamma X$  è isomorfo a  $C(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ . Viceversa: supponiamo che esista una sezione globale  $s \in \Gamma X$ ,  $s \neq 0$ . Allora  $(\mu \circ s)(X)$  è costante in  $\mathbb{Z}_+$ , cioè per ogni  $x \in X$  si ha che  $s'(x) = \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{Z}$ . Ponendo  $\bar{s} = s/\lambda$  abbiamo una sezione  $\bar{s} : X \rightarrow \Theta(1)$ , cioè  $X$  è orientabile.  $\square$

*Osservazione 2.5.* Il corollario appena dimostrato ci suggerisce che l'unica sezione globale in una varietà non orientabile è quella nulla. Infatti per avere una sezione  $s : X \rightarrow \Theta(1)$  basta avere una sezione non nulla.

**Definizione 2.6** (Classe fondamentale). Un'orientazione per una varietà compatta e connessa è la scelta di un generatore di  $\Gamma X$ , o equivalentemente la scelta di un generatore  $\zeta$  del gruppo di omologia  $H_n(X)$ . Un tale generatore si dice *classe fondamentale*. Un'orientazione locale per ogni punto  $x \in X$  è data da  $j_x^X(\zeta)$ .



# Capitolo 3

## Orientazione per varietà differenziabili

Le nozioni relative a questo capitolo sono state tratte da [7, cap. 13]

### 3.1 Orientazione per spazi vettoriali

**Lemma 3.1.** *Sia  $Y$  uno spazio topologico connesso e  $f : X \rightarrow Y$  un'applicazione continua e suriettiva tale che  $f^{-1}(y)$  sia connesso per ogni  $y \in Y$ . Se  $f$  è aperta (o chiusa) allora  $X$  è connesso.*

*Dimostrazione.* Consideriamo il caso in cui  $f$  sia aperta e supponiamo di aver  $A_1, A_2 \subset X$  due aperti tali che  $X = A_1 \cup A_2$ . Poiché  $f$  è aperta e suriettiva si ha  $Y = f(A_1) \cup f(A_2)$ , ma per la connessione di  $Y$  si deve avere  $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$  e quindi  $f^{-1}(y) \cap A_i \neq \emptyset$ , per  $i = 1, 2$ . Siccome  $f^{-1}(y)$  è connesso deve essere  $f^{-1}(y) \cap A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ , quindi a maggior ragione  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ .  $\square$

**Lemma 3.2.**  *$GL_n(\mathbb{R})$  ha esattamente due componenti connesse.*

*Dimostrazione.* Consideriamo l'applicazione

$$\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

Tale applicazione è continua (il determinante ha forma polinomiale). Se consideriamo:

$$GL_n^+(\mathbb{R}) := GL_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(\mathbb{R}^+)$$

$$GL_n^-(\mathbb{R}) := GL_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(\mathbb{R}^-)$$

questa è una decomposizione di  $GL_n(\mathbb{R})$  in due aperti disgiunti. Quindi il gruppo delle matrici invertibili ha almeno due componenti connesse. Mostriamo

che sono esattamente due. Questo equivale a mostrare che  $GL_n^+(\mathbb{R})$  e  $GL_n^-(\mathbb{R})$  sono entrambi connessi.

Prendiamo ad esempio  $GL_n^+(\mathbb{R})$  (per  $GL_n^-(\mathbb{R})$  il procedimento sarà analogo). Procediamo per induzione sulla dimensione della matrice. Il gruppo  $GL_1^+(\mathbb{R})$  equivale all'intervallo  $(0, +\infty)$  ed è quindi connesso.

Supponiamo ora l'affermazione sia vera per  $n > 1$  e proviamola per  $n + 1$ . Consideriamo l'applicazione  $p : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  che associa ad ogni matrice la prima colonna: separando in ogni matrice la prima colonna dalle altre, possiamo scrivere  $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \times M_{n,n-1}(\mathbb{R})$  e quindi  $p$  coincide con la proiezione sul primo fattore del prodotto. Di conseguenza  $p$  è un'applicazione continua, suriettiva e aperta e anche la sua restrizione all'aperto  $GL_n^+(\mathbb{R})$  è aperta e ha come immagine  $Y := \text{Imp}p|_{GL_n^+(\mathbb{R})} = \mathbb{R}^n - 0$ .

Dimostriamo ora che le fibre di  $p$  sono tutte connesse: da questo e dal lemma 3.1 seguirà la tesi.

La fibra  $p^{-1}(1, 0, \dots, 0)$  è il prodotto  $\mathbb{R}^{n-1} \times GL_{n-1}^+(\mathbb{R})$  ed è quindi connessa. Dato  $y \in Y$  la fibra  $p^{-1}(y)$  è non vuota. Sia  $A \in GL_n^+(\mathbb{R})$  tale che  $p(A) = y$ . La moltiplicazione a sinistra per  $A$ , definita come  $L_A(B) := AB$ , è un omeomorfismo di  $GL_n^+(\mathbb{R})$  in sé. Poiché  $p(AB) = Ap(B)$  si ha che  $L_A(p^{-1}(1, 0, \dots, 0)) = p^{-1}(y)$  e quindi le fibre di  $p$  sono tutte omeomorfe fra loro.  $\square$

**Definizione 3.1** (Orientazione di uno spazio vettoriale). Sia dato un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $\dim_{\mathbb{R}} V = n \geq 1$ . Date due basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  diremo che queste sono *orientate in maniera consistente*, e scriveremo  $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ , se la matrice di cambiamento di base è tale per cui

$$\det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(1_V)) > 0$$

La relazione di orientazione consistente è una relazione di equivalenza, le cui classi sono esattamente due (questo grazie al lemma 3.2). Definiamo dunque un'*orientazione* su  $V$  la scelta di una classe di equivalenza. Il dato di uno spazio vettoriale  $V$  insieme alla scelta di una delle due classi di orientazione si dirà *spazio vettoriale orientato*. Se  $V$  è orientato, una base  $\mathcal{B}$  si dirà *positivamente orientata* se giace nella classe di equivalenza scelta, altrimenti si dirà *negativamente orientata*.

Per il caso speciale di uno spazio 0-dimensionale definiamo un'orientazione di  $V$  tramite la scelta di un segno, cioè tramite la scelta di  $\pm 1$ .

**Lemma 3.3** (Orientazione tramite covettori). *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n > 1$ , e supponiamo che  $\omega$  sia un elemento non nullo di  $\Lambda^n(V^*)$ . L'insieme delle basi ordinate  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  tali che  $\omega(v_1, \dots, v_n) > 0$  è un'orientazione per  $V$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{O}_\omega$  l'insieme delle basi ordinate per le quali  $\omega$  restituisce un risultato positivo. Vogliamo dimostrare che questa è esattamente una classe di equivalenza.

Siano  $\mathcal{B} := \{v_i\}_{i=1, \dots, n}$  e  $\mathcal{B}' := \{w_i\}_{i=1, \dots, n}$  due basi di  $V$  e consideriamo la matrice associata  $(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(1_V)) = a_{ij}$ . Si ha, grazie alle proprietà di multilinearità e alternanza:

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega\left(\sum_{j=1}^n a_{j1}w_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{jn}w_j\right) = \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(1_V))\omega(w_1, \dots, w_n)$$

Da ciò segue che  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  sono consistentemente orientate se e solo se  $\omega(v_1, \dots, v_n)$  e  $\omega(w_1, \dots, w_n)$  hanno lo stesso segno. Ma questo equivale ad affermare che  $\mathcal{O}_\omega$  è una classe di equivalenza.  $\square$

Se  $V$  è uno spazio orientato e  $\omega$  è una forma  $n$ -lineare alternante che determina la stessa orientazione su  $V$ , diremo che  $\omega$  è un  $n$ -covettore orientato positivamente. Osserviamo che due  $n$ -covettori determinano la medesima orientazione su  $V$  se e solo se  $\omega' = k\omega$ ,  $k \in \mathbb{R}^+$  (è una semplice verifica). Possiamo definire su  $\Lambda^n(V^*)$  la seguente relazione di equivalenza:

$$\omega \sim \omega' \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^+ : \omega' = k\omega$$

Tale relazione di equivalenza dà luogo esattamente a due classi di equivalenza: l'isomorfismo lineare  $\Lambda^n(V^*) \cong \mathbb{R}$  identifica gli  $n$ -covettori non nulli di  $\Lambda^n(V^*)$  con  $\mathbb{R} - 0$ , che ha due componenti connesse. Due  $n$ -covettori  $\omega$  e  $\omega'$  determinano la stessa orientazione su  $V$  se sono nella stessa componente connessa, cioè se e solo se  $\omega \sim \omega'$ . Quindi ogni componente connessa di  $\Lambda^n(V^*) - 0$  determina un'orientazione su  $V$ .

Oltre alla scelta di una classe di equivalenza di basi ordinate, anche la scelta di una classe di equivalenza di  $n$ -covettori determina un'orientazione su  $V$ .

## 3.2 Orientazione su varietà differenziabili

**Definizione 3.2** (Riferimento locale). Sia  $p : E \rightarrow M$  un fibrato vettoriale di rango  $r$  su  $M$ . Dato un aperto  $U$  di  $M$  definiamo *riferimento locale per  $E$  su  $U$*  una collezione  $s_1, \dots, s_r \in \Gamma(U, E)$  (insieme delle sezioni del fibrato relative a  $U$ ) tale che per ogni punto  $x$  in  $U$  i vettori  $s_1(x), \dots, s_r(x)$  costituiscano una base per la fibra  $E_x := p^{-1}(x)$ .

Un *riferimento globale per  $E$*  sarà una collezione di sezioni di  $\Gamma(M, E)$ .

Nel caso del fibrato tangente parleremo di riferimento locale su  $U$ .

**Definizione 3.3** (Varietà differenziabile orientabile e orientata). Sia  $M$  una varietà differenziabile. Un'*orientazione punto per punto* su  $M$  è la scelta di un'orientazione per ogni spazio tangente  $T_x M$ . Se su  $M$  è definita un'orientazione puntuale diremo che un riferimento locale  $(X_1, \dots, X_n)$ <sup>1</sup> per  $U \subset M$  è *positivamente orientato* se per ogni punto  $x \in U$  la base  $\{X_1|_x, \dots, X_n|_x\}$  è positivamente orientata in  $T_x M$ .

Un'orientazione puntuale si dirà *continua* in ogni punto  $x \in M$ , se per ogni  $x$  esiste un intorno  $U_x$  sul quale sia definito un riferimento positivamente orientato. Un'*orientazione* su  $M$  è un'orientazione puntuale continua. Una varietà orientata sarà il dato di una varietà differenziabile insieme alla scelta di un'orientazione.

Diremo che  $M$  è *orientabile* se esiste un'orientazione.

Nel caso  $M$  sia una varietà 0-dimensionale, un'orientazione è la scelta di  $\pm 1$  per ogni punto.

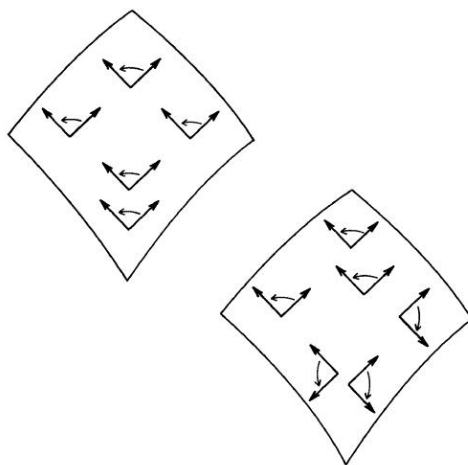


Figura 3.1: Esempi di orientazioni: la prima consistente, la seconda no

**Proposizione 3.1.** *Una varietà  $M$  connessa ammette esattamente due orientazioni.*

*Dimostrazione.* Siano  $\mu$  e  $\nu$  due orientazioni su  $M$ . Per ogni punto  $x \in M$ ,  $\mu_x$  e  $\nu_x$  siano le due orientazioni di  $T_x M$ . Queste possono coincidere oppure essere l'opposta dell'altra. Definiamo quindi la funzione  $f : M \rightarrow \{\pm 1\}$  come segue:

<sup>1</sup>Ogni  $X_i$  è un campo vettoriale su  $U$  cioè un elemento di  $\mathcal{X}(U)$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } \mu_x = \nu_x \\ -1 & \text{se } \mu_x = -\nu_x \end{cases}$$

Si fissi un punto  $x \in M$ . Per continuità, esiste un intorno connesso  $U$  di  $x$  sul quale  $\mu = [(X_1, \dots, X_n)]$  e  $\nu = [(Y_1, \dots, Y_n)]$  per qualche campo vettoriale  $X_i$  e  $Y_j$  su  $U$ . Per ogni punto  $y \in U$ , se  $\mathcal{B} = \{X_1|_y, \dots, X_n|_y\}$  e  $\mathcal{B}' = \{Y_1|_y, \dots, Y_n|_y\}$  sono le due basi determinate dai riferimenti locali, esisterà una matrice  $A(y)$  tale per cui valga

$$A(y) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(1_{T_y M})$$

Tale matrice varia con continuità al variare di  $y \in U$  e poiché anche il determinante è una funzione continua, grazie al teorema del valore intermedio, l'immagine di

$$\det : U \rightarrow \mathbb{R} - 0, \quad \det(y) := \det A(y)$$

è un intervallo che non contiene lo zero, pertanto o completamente positivo o completamente negativo, essendo  $U$  connesso, da cui  $\mu = \nu$  o  $\mu = -\nu$  su  $U$ . Ciò prova che  $f$  è localmente costante, ma essendo definita su un connesso è costante, quindi o  $\mu = \nu$  o  $\mu = -\nu$  su  $M$ .  $\square$

### 3.3 Orientazione, atlanti e forme differenziali

Una carta coordinata definita su una varietà orientata si dice *positivamente orientata* se il riferimento locale  $(\partial/\partial x_i)$  è positivamente orientato. Una collezione di carte regolari  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  si dice *orientata in maniera consistente* se per ogni  $\alpha, \beta$  la mappa di cambio di coordinate  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  ha determinante jacobiano positivo in ogni punto di  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ .

**Proposizione 3.2.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $\geq 1$ . Dato un ricoprimento aperto di  $M$  di carte  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  consistentemente orientate, esiste un'unica orientazione per  $M$  con la proprietà che ogni carta  $\varphi_\alpha$  sia positivamente orientata. Viceversa, se  $M$  è orientata, l'atlante delle carte regolari positivamente orientate è un ricoprimento di  $M$  orientato in maniera consistente.*

*Dimostrazione.* Sia  $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$  un ricoprimento aperto di  $M$  costituito da carte orientate in maniera consistente. Per ogni punto  $x \in M$ , la condizione di consistenza equivale ad affermare che la matrice di cambiamento di basi coordinate relativa a due carte qualsiasi ha determinante positivo. Quindi le basi coordinate per ogni carta determinano un'orientazione positiva su  $T_x M$ . Questo definisce un'orientazione puntuale. Ogni punto di  $M$  è contenuto in una carta coordinata, e il corrispondente riferimento locale  $(\partial/\partial x_i)$  è orientato positivamente per definizione. Quindi l'orientazione puntuale è anche continua.

Viceversa supponiamo  $M$  orientata. Sia  $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$  l'atlante delle carte regolari positivamente orientate. Dobbiamo mostrare che tale collezione è orientata in maniera consistente. Presi  $\alpha, \beta$  vogliamo provare che  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  ha determinante

jacobiano positivo in ogni punto di  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ . Sia  $x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ . Per ipotesi i riferimenti  $(\partial/\partial x_i^\alpha)$  e  $(\partial/\partial x_i^\beta)$  sono positivamente orientati. Pertanto la matrice di cambio di base in  $x$  ha determinante positivo. Ma questo equivale a dire che  $\det(\partial x_i^\beta/\partial x_j^\alpha) > 0$  nel punto  $x$ , cioè il determinante jacobiano di  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  è positivo.  $\square$

**Proposizione 3.3.** *Sia  $\pi : E \rightarrow M$  un fibrato vettoriale reale di rango  $k$  su una varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $n$ . Sia  $V$  un aperto di  $E$  tale che per ogni punto  $m \in M$ ,  $\pi^{-1}(m) \cap V \neq \emptyset$  e tale insieme è convesso. Allora esiste una sezione globale liscia la cui immagine giace interamente in  $V$ .*

*Dimostrazione.* Descriveremo unicamente una traccia della dimostrazione. Consideriamo un aperto banalizzato  $U$  e sia  $m_0 \in U$ . Per ipotesi la fibra  $p^{-1}(m_0)$  interseca l'aperto  $V$  almeno in un punto. Grazie alla banalizzazione possiamo supporre che tale punto sia della forma  $(m_0, x)$  con  $x \in \mathbb{R}^k$ . L'intersezione fra  $V$  e  $p^{-1}(U)$  è aperta, in quanto intersezione di insieme aperti, quindi anche l'immagine attraverso la banalizzazione sarà aperta in  $U \times \mathbb{R}^k$ . Per la definizione di topologia prodotto, tale insieme conterrà un intorno di  $(m_0, x)$  della forma  $U_0 \times W$  con  $U_0$  aperto in  $U$  e  $W$  aperto in  $\mathbb{R}^k$ . Poniamo  $s_0(m) = (m, x)$  per ogni  $m \in U_0$ . Abbiamo così ottenuto un ricoprimento aperto  $(U_i, s_i)$  dove ogni  $s_i$  è una sezione locale con immagine in  $V$ . Se  $\rho_i$  è una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento dato, poniamo

$$s(m) := \sum_i \rho_i s_i(m)$$

Tale sezione è liscia e ha immagine in  $V$  in quanto per ogni punto  $m \in M$  si ha solo un numero finito di  $\rho_i$  non nullo e la somma  $\sum_i \rho_i s_i$  sta in  $V$  poiché è una combinazione lineare convessa sulla fibra di  $m$  e quindi è un elemento di  $p^{-1}(m) \cap V$  per ipotesi.  $\square$

**Proposizione 3.4.** *Sia  $M$  una varietà regolare di dimensione  $\geq 1$ . Una qualsiasi  $n$ -forma  $\omega$  mai nulla su  $M$  determina un'unica orientazione su  $M$  per la quale  $\omega$  è orientata positivamente in ogni punto. Viceversa, se su  $M$  è data un'orientazione, esiste una  $n$ -forma  $\omega \in \mathcal{A}^n(M)$  positivamente orientata in ogni punto.*

*Dimostrazione.* Sia  $\omega$  una  $n$ -forma mai nulla su  $M$ . Tale  $n$ -forma definisce un'orientazione puntuale, in quanto per ogni punto esiste un  $n$ -covettore definito su  $T_x M$ . Dobbiamo unicamente verificare che tale orientazione sia continua. Sia  $(x_i)_{i=1, \dots, n}$  un sistema di coordinate locali definito su insieme  $U \subset M$  connesso. Su  $U$ ,  $\omega$  assume la forma locale  $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  per qualche funzione  $f \in C^\infty(U)$ . Il fatto che  $\omega$  non si annulli implica che non si annulli mai  $f$ , per cui

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = f \neq 0$$

per ogni punto di  $U$ . Dalla connessione di  $U$  segue che  $f$  è sempre positiva oppure sempre negativa su  $U$ , e quindi la carta coordinata è positivamente orientata o negativamente orientata. In quest'ultimo caso, possiamo sostituire la coordinata

$x_1$  con  $-x_1$  ottenendo una nuova carta per la quale il riferimento locale è positivamente orientato (stiamo sfruttando il fatto che esistono solo due orientazioni possibili). Da ciò segue che la forma  $\omega$  definisce anche un'orientazione continua. Supponiamo ora che  $M$  sia orientata, e sia  $\Lambda_+^n(T^*M)$  il sottoinsieme aperto costituito dagli  $n$ -covettori positivamente orientati in ogni punto di  $M$ . Per ogni  $x \in M$ , l'intersezione di  $\Lambda_+^n(T^*M)$  con la fibra di  $\Lambda^n(T_xM)$  è omeomorfa ad una semiretta aperta e quindi convessa. Questa proprietà garantisce l'esistenza di una sezione globale in  $\Lambda_+^n(T^*M)$  grazie alla proposizione 3.3 e quindi di una  $n$ -forma globale positivamente orientata.  $\square$

*Osservazione 3.1.* Grazie a questa proposizione ogni  $n$ -forma non nulla su una  $n$  varietà è una forma orientante. Se  $M$  è una varietà orientata e  $\omega$  è una forma orientante che determina l'orientazione data, diremo che  $\omega$  è positivamente orientata. Si verifica facilmente che se  $\omega$  e  $\omega'$  sono due forme orientate positivamente rispetto alla stessa orientazione su  $M$ , allora  $\omega' = f\omega$ , per qualche  $f \in C^\infty$  reale e strettamente positiva.

Se  $M$  è una 0-varietà, la proposizione rimane vera se accettiamo che una 0-forma non nulla assegni orientazione  $+1$  ai punti nei quali è positiva e  $-1$  ai punti nei quali è negativa.

**Definizione 3.4** (Mappe che preservano l'orientazione). Supponiamo che  $M$  e  $N$  siano due varietà orientate con dimensione  $\geq 1$  e sia  $F : M \rightarrow N$  un diffeomorfismo locale. Diremo che  $F$  *preserva l'orientazione* se per ogni punto  $x \in M$ ,  $F$  porta basi orientate positivamente di  $T_xM$  in basi orientate positivamente di  $T_{F(x)}N$ . Diremo al contrario che  $F$  *inverte l'orientazione* se per ogni  $x \in M$ ,  $F$  porta basi orientate positivamente di  $T_xM$  in basi orientate negativamente di  $T_{F(x)}N$ .

### 3.4 Rivestimento di orientazione

**Definizione 3.5** (Azione propria di un gruppo di Lie). Sia  $G$  un gruppo di Lie che agisce su una varietà  $M$ . L'azione di gruppo è *propria* se la mappa  $\theta : G \times M \rightarrow M \times M$  definita con  $\theta(g, x) := (g \cdot x, x)$  è propria.

**Proposizione 3.5.** *Sia  $G$  un gruppo di Lie che agisce in maniera continua su una varietà  $M$ . L'azione è propria se e solo se data una successione convergente  $x_i$  in  $M$  e una successione  $g_i$  in  $G$  tali che la successione  $g_i \cdot x_i$  sia convergente, allora esiste una sottosuccessione di  $g_i$  convergente.*

*Dimostrazione.* Sia  $\theta(g, x) := (g \cdot x, x)$ . Se  $\theta$  è propria e  $g_i$  e  $x_i$  soddisfano le ipotesi dell'enunciato, siano  $U$  e  $V$  due intorni relativamente compatti dei punti  $x = \lim_i x_i$  e  $y = \lim_i g_i \cdot x_i$ . L'ipotesi ci assicura che tutti gli elementi di entrambe le successioni stiano all'interno di  $\bar{U} \times \bar{V}$  per  $i$  sufficientemente grande, così una sottosuccessione di  $(g_i, x_i)$  converge (poiché la preimmagine di compatti sarà compatta grazie al fatto che l'azione è propria), quindi in particolare una sottosuccessione di  $g_i$  è convergente.

Viceversa supponiamo siano valide le ipotesi dell'enunciato e sia  $L \subset M \times M$  un compatto. Se  $(g_i, x_i)$  è una successione in  $\theta^{-1}(L)$ , la successione  $\theta(g_i, x_i) = (g_i \cdot x_i, x_i)$  giace in  $L$ , così passando ad una sua sottosuccessione, otteniamo successioni  $x_i$  e  $g_i$  che soddisfano le ipotesi. La sottosuccessione di  $(g_i, x_i)$  corrispondente converge in  $G \times M$ , e dato che  $\theta^{-1}(L)$  è chiuso in  $G \times M$  per continuità, il limite giace in  $\theta^{-1}(L)$ .  $\square$

Sia  $M$  una  $n$ -varietà differenziabile, e sia  $\Lambda_*^n(T^*M)$  il sottoinsieme di  $\Lambda^n(T^*M)$  degli  $n$ -covettori non nulli. Osserviamo che esiste un'azione naturale di  $\mathbb{R}^+$  su  $\Lambda_*^n(T^*M)$  tramite la moltiplicazione su ciascuna fibra.

**Lemma 3.4.** *L'azione naturale di  $\mathbb{R}^+$  su  $\Lambda_*^n(T^*M)$  è differenziabile, libera e propria.*

*Dimostrazione.* L'azione di  $\mathbb{R}^+$  su  $\Lambda_*^n(T^*M)$  è chiaramente libera, poiché se  $c \in \mathbb{R}^+$  e  $\omega_x$  è un  $n$ -covettore non nullo in  $x \in M$ , allora  $c\omega_x = \omega_x$  se e solo se  $c = 1$ . Per vedere che è differenziabile, sia  $x_i$  un sistema di coordinate locali su un aperto  $U$ . Poiché il fibrato  $\Lambda^n(T^*M)$  ha rango 1, la sezione locale  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  determina un riferimento locale per  $\Lambda^n(T^*M)$  su  $U$ . La mappa

$$udx_1 \wedge \dots \wedge dx_n|_x \rightarrow (x_1, \dots, x_n, u)$$

è una carta coordinata su  $\pi^{-1}(U)$  ( $\pi : \Lambda^n(T^*M) \rightarrow M$  è la solita proiezione). In termini di queste coordinate, l'azione di  $\mathbb{R}^+$  definita con  $\theta : \mathbb{R}^+ \times \Lambda^n(T^*M) \rightarrow \Lambda^n(T^*M)$  è data da

$$\theta(c, (x_1, \dots, x_n, u)) = (x_1, \dots, x_n, cu)$$

ed è chiaramente differenziabile.

Per verificare che l'azione sia propria sfruttiamo la caratterizzazione sequenziale. Supponiamo di avere una successione  $(x_j, \omega_j)$  convergente di punti di  $\Lambda_*^n(T^*M)$ , e  $c_j$  una successione in  $\mathbb{R}^+$  tale che  $(x_j, c_j\omega_j)$  sia convergente sempre in  $\Lambda_*^n(T^*M)$ .



La successione  $x_j$  convergerà a qualche punto  $x \in M$ . Scegliendo un sistema di coordinate locali intorno a  $x$  possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\omega_j &= u_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n|_{x_j} \\ c_j \omega_j &= c_j u_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n|_{x_j}\end{aligned}$$

Le ipotesi implicano  $u_j \rightarrow u \neq 0$  e  $c_j u_j \rightarrow u' \neq 0$ , così  $c_j$  converge a  $u'/u$ .  $\square$

Come conseguenza del lemma precedente, lo spazio quoziente  $\hat{M} = \Lambda_*^n(T^*M)/\mathbb{R}^+$  è una varietà differenziabile di dimensione  $n$  (poiché lo spazio totale ha dimensione  $n + 1$ ). Chiamiamo lo spazio  $\hat{M}$  *rivestimento di orientazione* per  $M$ . Poiché la proiezione  $\pi : \Lambda_*^n(T^*M) \rightarrow M$  è costante sulle  $\mathbb{R}^+$  orbite, esiste una mappa differenziabile  $\hat{\pi} : \hat{M} \rightarrow M$  tale che il seguente diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc}\Lambda_*^n(T^*M) & & \\ \downarrow q & \searrow \pi & \\ \hat{M} & \xrightarrow{\hat{\pi}} & M\end{array}$$

dove  $q$  è la mappa quoziente che definisce  $\hat{M}$ .

**Teorema 3.1** (Rivestimento di orientazione). *Sia  $M$  una varietà differenziabile connessa e sia  $\hat{\pi} : \hat{M} \rightarrow M$  il suo rivestimento di orientazione.*

1.  $\hat{\pi}$  è un rivestimento generalizzato, cioè soddisfa tutte le ipotesi relative alle mappe di rivestimento eccettuato il fatto che  $\hat{M}$  potrebbe non essere connesso.
2.  $\hat{M}$  ha un'orientazione canonica.
3.  $M$  è orientabile se e solo se esiste una sezione globale di  $\hat{\pi}$
4.  $\hat{M}$  è connesso se e solo se  $M$  non è orientabile, nel qual caso la mappa  $\hat{\pi}$  è un rivestimento differenziabile a due fogli.

*Dimostrazione.* 1. Poiché  $\hat{\pi}_* \circ q_* = \pi_*$  è suriettiva in ogni punto, anche  $\hat{\pi}_*$  sarà suriettiva, e quindi  $\hat{\pi}$  è una sommersione. Per ragioni di dimensioni ( $\dim \hat{M} = \dim M$ ) sarà un diffeomorfismo locale.

Per verificare che  $\hat{\pi}$  è un rivestimento generalizzato, consideriamo  $(U, x_1, \dots, x_n)$  carta coordinata definita su un connesso di  $M$ , così che  $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  sia un riferimento locale per  $\Lambda^n(T^*M)$  su  $U$ . Grazie alla corrispondenza fra riferimenti locali e banalizzazioni locali, si ha che  $\pi^{-1}(U)$  è diffeomorfo a  $U \times \mathbb{R}$ , e quindi  $\pi^{-1}(U) \cap \Lambda_*^n(T^*M)$  ha esattamente due componenti:

$$\begin{aligned}U_+ &:= \{\eta_x : x \in U, \eta_x = c\omega_x, c \in \mathbb{R}^+\} \\ U_- &:= \{\eta_x : x \in U, \eta_x = c\omega_x, c \in \mathbb{R}^-\}\end{aligned}$$

Poniamo  $\hat{U}_\pm := q(U_\pm) \subset \hat{M}$ . Dato che la mappa quoziente  $q : \Lambda^n(T^*M) \rightarrow M$  è una mappa aperta (quoziente sotto l'azione di gruppo topologico),  $\hat{U}_+$  e

$\hat{U}_-$  sono aperti in  $\hat{M}$ . Poiché sono anche connessi (essendo immagini continue di connessi) e disgiunti (come immagini di insiemi saturi disgiunti), sono esattamente le componenti connesse di  $\hat{\pi}^{-1}(U)$ .

Per mostrare che  $U$  è uniformemente rivestito, proveremo che la restrizione di  $\hat{\pi}$  a  $\hat{U}_+$  e a  $\hat{U}_-$  è un diffeomorfismo su  $U$ . Per farlo costruiamo delle sezioni locali. Consideriamo le mappe  $\sigma_{\pm} : U \rightarrow \Lambda_*^n(T^*M)$  definite con  $\sigma_{\pm}(x) := \pm\omega_x = \pm dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n|_x$ . Queste sono entrambe sezioni differenziabili in  $\Lambda_*^n(T^*M)$ . Poniamo  $\hat{\sigma}_{\pm} = q \circ \sigma_{\pm} : U \rightarrow \hat{U}_{\pm}$ . Più esplicitamente:

$$\hat{\sigma}_+(x) := [\omega_x], \quad \hat{\sigma}_-(x) := [-\omega_x]$$

dove le parentesi indicano le classi di equivalenza sotto l'azione di  $\mathbb{R}^+$ . Le mappe  $\hat{\sigma}_{\pm}$  sono differenziabili in quanto composizione di mappe differenziabili, e sono sezioni locali di  $\hat{\pi}$  poiché  $\hat{\pi} \circ \hat{\sigma}_{\pm}(x) = x$ .

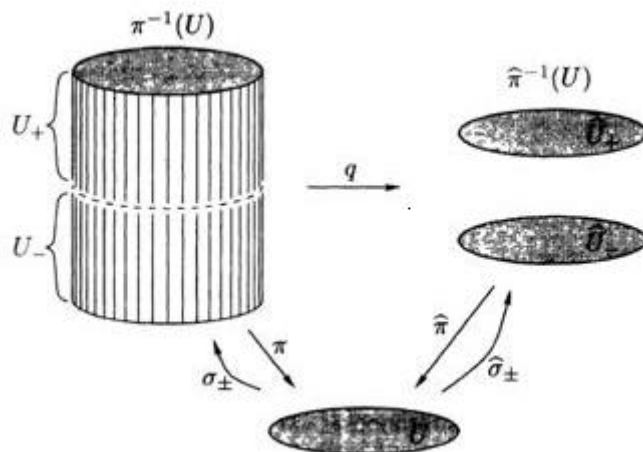


Figura 3.2: Intorno uniformemente rivestito in  $\hat{M}$

Inoltre, preso un punto arbitrario di  $\hat{U}_{\pm}$ , questo è della forma  $[c\omega_x]$  per qualche  $c > 0$  e per qualche  $x \in U$ , e quindi

$$\hat{\sigma}_+ \circ \hat{\pi}[c\omega_x] = \hat{\sigma}_+(x) = [\omega_x]$$

Dato che  $c\omega_x$  e  $\omega_x$  sono nella stessa orbita, ciò mostra che  $\hat{\sigma}_+ \circ \hat{\pi}$  è l'identità su  $\hat{U}_+$  (un argomento analogo mostra che  $\hat{\sigma}_- \circ \hat{\pi}$  è l'identità su  $\hat{U}_-$ ). Quindi  $\hat{\pi}$  è un diffeomorfismo locale su ogni componente di  $\hat{\pi}^{-1}(U)$ , per cui  $\hat{\pi}$  è un rivestimento generalizzato.

2. Sia  $\hat{y} \in \hat{M}$ , e sia  $y = \hat{\pi}(\hat{y}) \in M$ . Poiché  $\hat{y}$  è per definizione una classe di equivalenza di  $n$ -covettori su  $T_yM$  sotto la moltiplicazione per un numero reale positivo, determinerà un'unica orientazione su  $T_yM$ . Diamo a  $T_{\hat{y}}\hat{M}$  l'orientazione tale che  $\hat{\pi}_* : T_{\hat{y}}\hat{M} \rightarrow T_yM$  preservi l'orientazione. Per mostrare che l'orientazione puntuale appena definita sia continua, si consideri

$(U, x_1, \dots, x_n)$  una carta coordinata in  $y$  che determina la medesima orientazione su  $T_y M$  rispetto a quella indotta da  $\hat{y}$ ; sia  $\hat{\sigma}_+ : U \rightarrow \hat{M}$  una sezione locale ottenuta da  $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Per definizione per ogni  $x \in U$ ,  $\hat{\sigma}_+(x) = [\omega_x]$  è l'orientazione determinata da  $\omega_x$ , e quindi l'orientazione canonica su  $T_{\hat{\sigma}_+(x)} \hat{M}$  è proprio quella determinata da  $\hat{\pi}^*(\omega_x)$ . Da ciò segue che  $\hat{\pi}^*\omega$  è una  $n$ -forma positivamente orientata su un intorno di  $\hat{y}$ , per cui l'orientazione definita è continua.

3. Supponiamo sia data un'orientazione su  $M$ . Esisterà una  $n$ -forma  $\omega$  mai nulla su  $M$ , che possiamo pensare come sezione globale di  $\Lambda_*^n(T^*M)$ . La composizione  $q \circ \omega$  è una sezione globale su  $\hat{M}$ . Viceversa, data una sezione su  $\hat{M}$ , sia  $\hat{\omega}$  la relativa forma orientante su  $\hat{M}$ . Dato che  $\sigma$  è un diffeomorfismo locale,  $\sigma^*\hat{\omega}$  è una forma orientante su  $M$ .
4. Proviamo che  $M$  è orientabile se e solo se  $\hat{M}$  non è connesso. Supponiamo  $M$  orientabile. Grazie al punto precedente esiste una sezione globale  $\sigma : M \rightarrow \hat{M}$ . Poiché  $\sigma$  è un diffeomorfismo locale, è una mappa aperta, ed essendo una sezione relativa a  $\hat{\pi}$  è una mappa propria e quindi chiusa. Ciò significa che  $\sigma(M)$  è aperto e chiuso in  $\hat{M}$ . Dato che contiene esattamente un punto per ciascuna fibra, è non vuoto né coincidente con  $\hat{M}$ , quindi  $\hat{M}$  non è connesso.

Supponiamo ora  $\hat{M}$  non connesso. Sia  $W$  una componente di  $\hat{M}$ , e  $N : M \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione che assegna a ogni punto  $x \in M$  la cardinalità dell'insieme  $\hat{\pi}^{-1}(x) \cap W$ . Mostriamo che  $N$  è costante su  $M$ . Se  $x \in M$  è contenuto in un intorno  $U$  uniformemente rivestito, poniamo  $\hat{U}_1$  e  $\hat{U}_2$  le due componenti di  $\hat{\pi}^{-1}(U)$ . Per connessione, ogni  $\hat{U}_i$  deve essere contenuto in un'unica componente di  $\hat{M}$ ; quindi  $N$  è identicamente 0, 1 o 2 su  $U$ . Ne consegue che  $N$  è localmente costante e poiché  $M$  è connesso,  $N$  sarà costante.

Se  $N$  fosse 0 ovunque, avremmo che  $W$  sarebbe vuoto, assurdo poiché è una delle componenti di  $\hat{M}$ . Se  $N$  coincidesse con 2 ovunque,  $\hat{M} = W$ , ma questo contraddirebbe il fatto che  $\hat{M}$  non sia connesso. Quindi  $N = 1$  e  $W$  contiene esattamente un punto per ogni fibra. Possiamo perciò definire una sezione globale  $\sigma : M \rightarrow \hat{M}$  ponendo  $\sigma(x) \in \pi^{-1} \cap W$ . Per il punto precedente,  $M$  è orientabile.

□

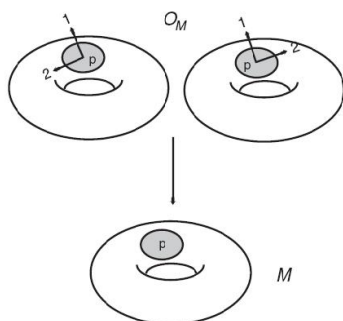


Figura 3.3: Esempio di rivestimento generalizzato per il toro

**Corollario 3.1.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile connessa, e supponiamo che il suo gruppo fondamentale non abbia sottogruppi di indice 2. Allora  $M$  è orientabile. In particolare ogni varietà 1-connessa è orientabile.*

*Dimostrazione.* Supponiamo  $M$  non orientabile, e sia  $\hat{\pi} : \hat{M} \rightarrow M$  il relativo rivestimento di orientazione. Si scelga un punto  $\hat{y} \in \hat{M}$  e sia  $y = \hat{\pi}(\hat{y}) \in M$ . Sia  $\alpha : \hat{M} \rightarrow \hat{M}$  la mappa che scambia i punti della fibra.

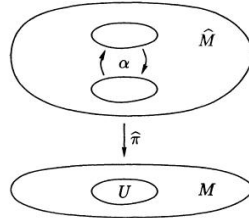


Figura 3.4: Automorfismo di rivestimento non banale per  $\hat{M}$

Se  $U \subset M$  è un aperto uniformemente rivestito,  $\alpha$  mappa ciascuna componente di  $\hat{\pi}^{-1}(U)$  sull'altra diffeomorficamente, così  $\alpha$  è un automorfismo di rivestimento. Infatti, poiché un automorfismo di rivestimento è completamente determinato dal suo comportamento in un punto,  $\alpha$  è l'unico elemento non banale del gruppo  $\Delta(\hat{\pi})$ , il quale è costituito da due elementi  $\{1_{\hat{M}}, \alpha\}$ . Poiché  $\Delta(\hat{\pi})$  agisce transitivamente sulla fibra,  $\hat{\pi}$  è un rivestimento normale. Sia  $H$  il sottogruppo  $\hat{\pi}_*(\pi_1(\hat{M}, \hat{y}))$  di  $\pi_1(M, y)$ . Poiché si ha l'isomorfismo  $\pi_1(M, y)/H \cong \Delta(\hat{\pi})$ ,  $H$  ha indice 2 in  $\pi_1(M, y)$ .  $\square$

# Capitolo 4

## Confronto fra definizioni

Le nozioni relative a questo capitolo sono state tratte da [2, cap. VI, sezione 7]

In questa sezione ci interroghiamo se le definizioni date finora per l'orientabilità siano fra loro interconnesse. Si ha infatti il seguente

**Teorema 4.1.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile.  $M$  è orientabile in senso differenziabile se e solo se è orientabile in senso topologico.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $M$  sia orientabile dal punto di vista differenziabile. Possiamo in particolar modo supporre che esista un atlante tale che tutte le funzioni di transizione abbiano determinante jacobiano positivo. In un punto  $x \in M$  si consideri l'inversa di una carta  $\phi$ , cioè un diffeomorfismo  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ . Possiamo assumere  $\phi(0) = x$ . Sia  $\theta \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \cong \mathbb{Z}$  un generatore scelto in maniera definitiva. Allora  $\phi_*(\theta) \in H_n(U, U - x)$  è un generatore. Supponiamo ora che  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset U$  sia l'inversa di un'altra carta e che si abbia  $\psi(0) = x$ . Allora  $\phi^{-1}\psi$  è un diffeomorfismo da  $\mathbb{R}^n$  in sé che fissa l'origine e ha determinante jacobiano positivo. Allora tale mappa è isotopa all'identità (per la dimostrazione si veda [1]). La mappa indotta in omologia è l'identità. Perciò l'elemento  $s_x = \phi_*(\theta)$  è indipendente dalla scelta della carta. La sezione  $s \in \Gamma M$  è continua: basta considerare la mappa  $\phi_* : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D^n) \rightarrow H_n(U, U - D)$  dove  $D \subset \phi(D^n)$  è un intorno circolare di  $x$ .

Viceversa supponiamo di avere una sezione  $s \in \Gamma M$ . Ci chiediamo se per ogni carta, l'elemento  $\phi_*(\theta)$  coincida con  $s_x$  oppure no. In caso negativo, componendo la carta con la riflessione per un iperpiano (cioè sostituendo nelle coordinate locali  $x_1$  con  $-x_1$  ad esempio) otteniamo la coincidenza cercata. L'insieme delle carte così ottenute è un atlante. Per come è stata effettuata la scelta di tali carte, il determinante jacobiano di un cambio di variabili (isotopo all'identità) dovrà essere positivo. Questo significa che  $M$  è orientabile dal punto di vista differenziale.  $\square$

Prendiamo ora in esame il rapporto che sussiste fra la definizione omologica e quella topologica. Dimosteremo in maniera differente che, data una classe fondamentale  $[M] \in H_n(M)$  di una varietà topologica triangolata  $n$ -dimensionale  $M$ , questa è esattamente la somma degli  $n$ -simplessi presenti nella triangolazione, come mostrato nel capitolo 1.

Sia  $x \in M$  e sia  $D$  un intorno di  $x$  tale che  $\phi : D \rightarrow D^n$  sia un omeomorfismo con  $\phi(x) = 0$ . Tale mappa induce una mappa  $\bar{\phi} : D \rightarrow S^n$  tramite la composizione con la proiezione al quoziente  $p : D^n \rightarrow D^n/S^{n-1} \cong S^n$ . Sia  $\bar{\phi}(x) = N$  il polo nord di  $S^n$ . Definiamo quindi  $f : M \rightarrow S^n$  come:

$$f(y) := \begin{cases} \bar{\phi}(y) & \text{se } y \in D \\ S & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

con  $S$ =polo sud.

**Lemma 4.1.** *Se  $M$  è una varietà compatta e orientata la mappa  $f_* : H_n(M) \rightarrow H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$  manda  $[M]$  nella classe fondamentale  $[S^n]$ , generatore di  $H_n(S^n)$ .*

*Dimostrazione.* La mappa  $f : M \rightarrow S^n$  manda  $x$  in  $N$ . Abbiamo così il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_n(M) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n) \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ H_n(M, M-x) & \xrightarrow{\cong} & H_n(S^n, S^n-N) \end{array}$$

Dato che per definizione la classe fondamentale  $[M]$  è mandata nel generatore  $\alpha_x \in H_n(M, M-x)$ ,  $f_*[M]$  dovrà essere un generatore di  $H_n(S^n)$ , e dunque sarà la classe fondamentale, per il medesimo ragionamento esposto in precedenza e applicato al morfismo di destra nel diagramma. □

**Teorema 4.2.** *Sia  $M$  una  $n$ -varietà triangolata, cioè si abbia  $h : M \cong |K|$ ,  $K$  complesso simpliciale  $n$ -dimensionale. Se  $M$  è compatta e orientata, sia  $[M] \in H_n(M)$  la sua classe fondamentale. Si ha per  $H_n(K)$ :*

$$[M] = \left[ \sum \pm \sigma_i \right]$$

*In altre parole l'unica  $n$ -catena rappresentante la classe di omologia  $[M]$  è la combinazione lineare di tutti gli  $n$ -simplessi della triangolazione con coefficienti  $\pm 1$ , in relazione all'orientazione data a ciascun semplice.*

*Dimostrazione.* Supponiamo  $[M] = \left[ \sum n_i \sigma_i \right]$ . Ogni  $\sigma_i$  è un  $n$ -simpleso e quindi omeomorfo ad un disco  $\phi_i : \sigma_i \cong D^n$ . La funzione  $f_i : M \rightarrow S^n$  definita nel lemma precedente mappa ogni altro simpleso diverso da  $\sigma_i$  nel polo sud. Così:

$$f_{i*}[M] = [S^n] = f_{i*} \left( \left[ \sum n_i \sigma_i \right] \right) = f_{i*}([n_i \sigma_i]) = n_i f_{i*}([\sigma_i]) = n_i [S^n]$$

Dato che questo è un generatore di  $H_n(S^n)$  dobbiamo avere  $n_i = \pm 1$  per qualunque  $i$ . □

# Appendice A

## Fascio di orientazione

Le nozioni relative a questo capitolo sono state tratte da [1, cap.1]

### A.1 Nozioni preliminari sui fasci

Un *prefascio di gruppi abeliani*  $A$  su uno spazio topologico  $X$  è il dato per ogni aperto  $U \subset X$  di un gruppo abeliano  $A(U)$  e per ogni coppia di aperti  $U \subset V$  di un morfismo chiamato *restrizione*

$$\rho_U^V : A(V) \rightarrow A(U)$$

in maniera tale che:

1.  $\rho_U^U = 1$
2.  $\rho_U^W = \rho_V^W \circ \rho_U^V$  per ogni  $U \subset V \subset W$

Più precisamente:

**Definizione A.1** (Prefascio di gruppi abeliani). Sia  $X$  uno spazio topologico. Un *prefascio di gruppi abeliani*  $A$  su  $X$  è un funtore controvariante dalla categoria degli aperti su  $X$  e delle inclusioni in quella dei gruppi abeliani.

*Osservazione A.1.* Possiamo immediatamente notare che se  $X$  è uno spazio topologico, l'assegnazione  $U \rightarrow H_n(X, X - U)$ , con  $U$  aperto in  $X$ , risulta essere un prefascio di gruppi abeliani grazie alle proprietà funtoriali dell'omologia.

Gli elementi di  $A(U)$  verranno, in alcune occasioni, indicati con il termine di *sezioni* di  $A$  rispetto ad  $U$ . Se  $s \in A(V)$  e  $U \subset V$  useremo la notazione  $s|_U := \rho_U^V(s)$  e la denomineremo *restrizione* di  $s$  a  $U$ .

**Definizione A.2** (Fascio di gruppi abeliani). Un *fascio di gruppi abeliani* su  $X$  è il dato di una coppia  $(\mathcal{A}, \pi)$  dove:

1.  $\mathcal{A}$  è uno spazio topologico, non necessariamente di Hausdorff, denominato *étale space*
2.  $\pi: \mathcal{A} \rightarrow X$  è un omeomorfismo locale
3. Ogni  $\mathcal{A}_x = \pi^{-1}(x)$  per  $x \in X$  è un gruppo abeliano (chiamato *spiga* di  $\mathcal{A}$  nel punto  $x$ ).
4. Le operazioni di gruppo sono continue

Nel parlare di un fascio si sottointenderà il riferimento alla mappa  $\pi$  esplicitando unicamente  $\mathcal{A}$ . La proprietà 4 deve essere intesa come segue: sia  $\mathcal{A} \Delta \mathcal{A}$  il sottospazio di  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$  costituito dalle coppie  $\langle \alpha, \beta \rangle$  con  $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$ . La funzione definita  $\mathcal{A} \Delta \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  che associa  $\langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \alpha + \beta$  è continua.

**Definizione A.3** (Restrizione di un fascio). Sia  $\mathcal{A}$  un fascio su  $X$  e sia  $Y \subset X$ . Allora  $\mathcal{A}|_Y = \pi^{-1}(Y)$  è un fascio su  $Y$  chiamato *restrizione* di  $\mathcal{A}$  a  $Y$ .

**Definizione A.4** (Fascio costante e localmente costante). Sia  $G$  un gruppo abeliano. Il *fascio costante* su  $X$  con spiga  $G$  è il fascio  $X \times G$  (con  $G$  dotato della topologia discreta). Un fascio  $\mathcal{A}$  su  $X$  si dice *localmente costante* se ogni punto  $x \in X$  ammette un intorno  $U$  tale che  $\mathcal{A}|_U$  è costante.

**Definizione A.5** (Sezione di un fascio). Se  $\mathcal{A}$  è un fascio su  $X$  e se  $Y \subset X$ , una *sezione* di  $\mathcal{A}$  su  $Y$  è una mappa  $s: Y \rightarrow \mathcal{A}$  tale che  $\pi \circ s = 1_Y$ .

Per la proprietà 4 la somma o la differenza puntuali di due sezioni su  $Y$  è ancora una sezione su  $Y$ . Si osservi che ogni punto  $x \in Y$  ammette una sezione  $s$  definita su qualche intorno  $U$  di  $x$  per la proprietà 2. Da ciò segue che  $s - s$  è una sezione su  $U$  che assume valore 0 per ogni spiga. Esiste quindi una *sezione nulla*  $0: X \rightarrow \mathcal{A}$ . Per queste ragioni, per ogni  $Y \subset X$ , l'insieme  $\Gamma(Y)$  delle sezioni su  $Y$  è un gruppo abeliano e si ha inoltre che la restrizione  $\Gamma(Y) \rightarrow \Gamma(Y')$ , per  $Y' \subset Y$ , è un omeomorfismo. Quindi l'assegnazione  $U \rightarrow \Gamma(U)$ , per  $U$  aperto in  $X$ , è un prefascio su  $X$  chiamato *prefascio delle sezioni su  $\mathcal{A}$* .

## A.2 Fascio generato da un prefascio

Descriveremo in poche righe, rimandando i dettagli a [1], la costruzione del fascio generato da un prefascio dato.

Sia  $A$  un prefascio su  $X$ . Per ogni aperto  $U \subset X$  si consideri lo spazio  $U \times A(U)$ , dove  $U$  ha la topologia del sottospazio e  $A(U)$  la topologia discreta. Consideriamo la somma topologica:

$$E := \sum_{U \subset X} U \times A(U)$$



Consideriamo ora la seguente relazione di equivalenza  $\mathcal{R}$  su  $E$ : se  $\langle x, s \rangle \in U \times A(U)$  e  $\langle y, t \rangle \in V \times A(V)$  allora  $\langle x, s \rangle \mathcal{R} \langle y, t \rangle \Leftrightarrow (x = y \text{ ed esiste un intorno aperto } W \text{ di } x \text{ con } W \subset U \cap V \text{ con } s|_W = t|_W)$ .

Sia  $\mathcal{A}$  lo spazio quoziente  $E/\mathcal{R}$  e sia  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow X$  la proiezione indotta dalla mappa  $p : E \rightarrow X$  definita  $\langle x, s \rangle \rightarrow x$ . Si ottiene il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{q} & \mathcal{A} \\ \downarrow p & & \swarrow \pi \\ X & & \end{array}$$

Si verifica agevolmente che  $\mathcal{A}$  soddisfa le proprietà di un fascio. <sup>1</sup> Precisamente  $\mathcal{A}$  è il fascio generato dal prefascio  $A$  e si indica con  $\mathcal{A} = Sh(A)$ .

*Osservazione A.2.* Lo spazio  $\mathcal{A}$  appena costruito è difficilmente comprensibile così presentato. Cercheremo quindi di analizzare tale spazio perlomeno dal punto di vista insiemistico. In primo luogo è necessario dare una definizione:

*Definizione A.6* (Germe in un punto). Consideriamo l'insieme  $\mathcal{M}$  di tutti gli elementi  $s \in A(U)$  per ogni aperto  $U \subset X$  e fissiamo  $x \in U$ . Due elementi  $s \in A(U)$  e  $t \in A(V)$  si diranno equivalenti se esiste un intorno  $W$  di  $x$  tale che  $W \subset U \cap V$  e  $s|_W = t|_W$ . La classe di equivalenza di  $s \in A(U)$  si dirà *germe* di  $s$  nel punto  $x$ . L'insieme dei germi di  $A$  in un punto  $x$  verrà indicato con  $\mathcal{A}_x$ . Tale insieme può essere interpretato come:

$$\mathcal{A}_x := \lim_{\rightarrow} A(U)$$

dove  $U$  varia fra gli aperti di  $X$  contenenti  $x$ .

Possiamo ora riconoscere lo spazio  $\mathcal{A}$ . Fissiamo un punto  $x \in X$ . La relazione  $\mathcal{R}$  una volta fissato un punto non è altro che la relazione di equivalenza fra germi. Quindi, fissato un punto  $x$ , la coppia  $\langle x, s_x \rangle$  rappresenterà tutte le possibili classi di equivalenza dei germi su  $x$ , cioè  $\mathcal{A}_x$ . Possiamo concludere:

$$E/\mathcal{R} := \bigcup_x \mathcal{A}_x$$

Una prima applicazione di quanto finora visto si ha nel caso seguente: sia  $\mathcal{A}_0$  un fascio su  $X$  e sia  $A$  il prefascio delle sezioni su  $\mathcal{A}_0$ . Poniamo  $\mathcal{A} = ShA$ . Si verifica che i due fasci  $\mathcal{A}_0$  e  $\mathcal{A}$  sono fasci omeomorfi, cioè esiste un omeomorfismo  $\lambda : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}$  tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_0 & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{A} \\ \downarrow \pi_0 & & \swarrow \pi \\ X & & \end{array}$$

<sup>1</sup>Inoltre tale costruzione gode della proprietà universale: se esistono  $\mathcal{A}'$  e  $\pi'$  che soddisfano le stesse ipotesi esiste un omeomorfismo  $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  che commuta con le proiezioni.

con  $\pi$  e  $\pi_0$  le rispettive mappe di proiezione. Per questo si è soliti non distinguere fra un fascio e il fascio generato dal prefascio delle sue sezioni.

Consideriamo ora un prefascio  $A$  e il relativo fascio generato  $\mathcal{A}$ . Per ogni aperto si ha una mappa  $\theta_U : A(U) \rightarrow \mathcal{A}(U)$  che commuta con le restrizioni, e quindi naturale. Sotto quali ipotesi  $\theta_U$  è un isomorfismo? Si ha:

**Proposizione A.1.** 1.  $\theta_U$  è un morfismo iniettivo per ogni aperto  $U \subset X$  se e solo se dati  $U = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ , con  $U_{\alpha}$  aperto di  $X$ , e  $s, t \in A(U)$  tali che  $s|_{U_{\alpha}} = t|_{U_{\alpha}}$  per ogni  $\alpha$ , allora  $s = t$ .

2.  $\theta_U$  è un morfismo suriettivo per ogni aperto  $U \subset X$  se e solo se data una collezione  $\{U_{\alpha}\}$  di insieme aperti in  $X$  e posto  $U = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ , se  $s_{\alpha} \in A(U_{\alpha})$  soddisfa  $s_{\alpha}|_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}} = s_{\beta}|_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}}$  per ogni indice  $\alpha, \beta$ , allora esiste un elemento  $s \in A(U)$  con  $s|_{U_{\alpha}} = s_{\alpha}$  per ogni  $\alpha$ .

Per una dimostrazione si rimanda a [1].

### A.3 Fascio di orientazione

Un importante esempio di fascio naturale su una  $n$ -varietà  $M$  è il *fascio d'orientazione*. Considerando l'omologia singolare, questo può essere definito come il fascio generato dal prefascio  $U \rightarrow H_n(M, M - U)$  cioè

$$\mathcal{O}_n := Sh(U \rightarrow H_n(M, M - U))$$

Grazie al lemma 2.4 si osserva subito che questo è un fascio localmente costante con spiga  $\mathbb{Z}$ . In particolare sarà costante se e solo se la varietà  $M$  è orientabile.

In realtà quanto emerge dalla trattazione fatta finora mette in evidenza qualcosa di più forte: lo spazio  $\Theta$ , spazio totale del fibrato di orientazione, non è altro che l'étales space del relativo fascio di orientazione.

Questo spiega per quale ragione il fibrato e il fascio di orientazione siano in realtà equivalenti, tanto da indurre alcuni autori a riferirsi indistintamente a  $\Theta$  con il termine *orientation bundle/sheaf*.

# Bibliografia

- [1] Bredon, Glen E. (1997), *Sheaf Theory*, Springer-Verlag, Second Edition
- [2] Bredon, Glen E. (1993) *Topology and Geometry*, Springer-Verlag
- [3] Dold, Albrecht (1980), *Lectures on Algebraic Topology*, Springer-Verlag, Second Edition
- [4] Gray, Brayton (1975), *Homotopy theory: an introduction to algebraic topology*, Academic Press
- [5] Greenberg, Marvin J. e Harper, John R. (1981) *Algebraic Topology, A first course*, Benjamin Cummings Publishing Company
- [6] Hatcher, Allen (2002), *Algebraic Topology*, Cambridge University Press
- [7] Lee, John M. (2006), *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag
- [8] Manetti, Marco (2005), *Note di Topologia 2005/2006*
- [9] Massey, William S. (1991), *A Basic Course of Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag
- [10] Maunder, C.R.F. (1980), *Algebraic Topology*, Cambridge University Press
- [11] Munkres, James R. (1984), *Elements of Algebraic Topology*, Benjamin Cummings Publishing Company
- [12] Tu, Loring W. (2011), *An Introduction to Manifolds*, Universitext, Springer-Verlag