

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”
Corso di Laurea in Fisica

Dinamica classica della cosmologia inflazionaria

Relatore:
Prof. Roberto Casadio

Presentata da:
Rebecca Punzo

Anno Accademico 2024/2025

*"The most beautiful experience we can have is the mysterious.
It is the fundamental emotion that stands at the cradle of true
art and true science."*

- Albert Einstein

Sommario

Lo scopo di questa tesi è illustrare il paradigma dell'inflazione come soluzione ai problemi propri della cosmologia standard e introdurre la dinamica classica della cosmologia inflazionaria.

Dopo una revisione della relatività generale e come questa conduce alla cosmologia Friedmann-Robertson-Walker, si evidenziano i problemi relativi alla teoria convenzionale del Big Bang: la necessità di precise condizioni iniziali, il problema dell'orizzonte e il problema della piattezza.

Si spiega poi come l'inflazione risolva queste problematiche e si introducono le condizioni necessarie perché questa si verifichi, prima di analizzarne la dinamica, ponendo particolare attenzione al modello *slow-roll*.

Vengono infine introdotte possibili estensioni del modello trattato, concludendo con le principali predizioni del paradigma inflazionario.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	La relatività generale	1
1.2	Il principio cosmologico	2
1.3	Omogeneità e isotropia	3
1.4	La radiazione cosmica di fondo	4
1.5	Il flusso di Hubble	5
1.6	L'inflazione	6
2	L'universo omogeneo	7
2.1	Metrica cosmologica	7
2.2	Parametro di Hubble	10
2.3	Cinematica: tempo e orizzonte conforme	11
2.3.1	Tempo conforme e geodesiche nulle	11
2.3.2	Orizzonte di particella	11
2.3.3	Orizzonte degli eventi	12
2.4	Equazioni di Einstein	12
2.4.1	Energia, impulso e pressione	12
2.5	Modello Lambda-CMB	15
3	I problemi del Big Bang	16
3.0.1	Il problema di Cauchy dell'universo	16
3.1	Il problema dell'orizzonte	17
3.2	Il problema della piattezza	18
3.3	Il problema delle condizioni iniziali	19
4	L'inflazione	20
4.1	La sfera di Hubble	20
4.1.1	Orizzonte comovente durante l'inflazione	21
4.1.2	Il problema della piattezza rivisitato	21
4.1.3	Il problema dell'orizzonte rivisitato	22
4.2	Condizioni per l'inflazione	22
4.3	Diagramma conforme dell'inflazione	24
5	La fisica dell'inflazione	26
5.1	Dinamica dei campi scalari	26
5.2	Inflazione <i>slow-roll</i>	27
5.2.1	Inflazione $m^2\phi^2$	29
5.3	Riscaldamento	30

5.4	Modelli di inflazione	31
5.4.1	Inflazione <i>slow-roll</i> a campo singolo	31
5.4.2	Oltre l'inflazione a campo singolo <i>slow-roll</i>	34
6	Conclusione	35
6.1	Onde Gravitazionali	36
6.2	Anisotropia nella CMB	37

Capitolo 1

Introduzione

La cosmologia è lo studio dell'universo nel suo insieme: la sua storia, la sua evoluzione, la sua composizione, la sua dinamica. Il suo obbiettivo primario è comprendere le strutture su larga scala dell'universo, ma essa fornisce anche l'arena per lo sviluppo di tutte le strutture su piccola scala che sono sorte durante la sua espansione: galassie, stelle, pianeti, persone.

L'origine di ogni sistema e struttura del mondo naturale, e possibilmente anche l'origine delle leggi fisiche che lo governano, può essere rimandata a qualche aspetto della cosmologia.

1.1 La relatività generale

La nostra capacità di comprendere l'universo su larga scala dipende in maniera essenziale dalla relatività generale: la teoria Newtoniana costituisce una descrizione adeguata della gravità solo fintanto che la massa M del sistema è ridotta rispetto al suo raggio R : $M/R \ll 1$; si entra nel regime della relatività generale quando il sistema varia in maniera tale che il rapporto M/R si avvicini a uno.

Questo può accadere se il raggio R diminuisce più rapidamente di M , che costituisce il dominio di oggetti compatti o collassati, come le stelle di neutroni e i buchi neri. Però può accadere anche se la massa del sistema cresce più rapidamente del suo raggio: questo è il caso della cosmologia. Se lo spazio è riempito di materia con la stessa densità ovunque, allora, a mano a mano che si considerano volumi con raggio R crescente, la massa cresce come R^3 e il rapporto M/R diventa così grande che la relatività generale diventa significativa.

I nostri telescopi sono in grado di osservare distanze superiori a 10Gpc (un parsec, abbreviato pc, è circa 3×10^{16} m). Su questa scala l'universo osservato è omogeneo. La densità media massa-energia è all'incirca $\rho = 10^{-26}$ Kg m⁻³.

Con questa densità, la massa $M = 4\pi R^3 \rho / 3$ è uguale ad R per $R \sim 6$ Gpc, che è all'interno dell'universo osservabile. Quindi perché l'universo visibile sia compreso, deve essere studiato con la relatività generale.

Esistono infatti metriche che descrivono universi che incarnano l'omogeneità osservata: non hanno confini, vincoli e sono omogenei ovunque.

La legge della gravità Newtoniana non potrebbe creare questi modelli in maniera

consistente, perché la soluzione dell'equazione fondamentale di Newton $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ è ambigua se non c'è confine esterno su cui imporre una condizione al contorno per l'equazione differenziale. Dunque solo grazie ad Einstein la cosmologia è diventata un ramo della fisica e dell'astronomia.

Ci si può però porre la seguente domanda: se viviamo in un universo la cui struttura complessiva è altamente relativistica, com'è possibile studiare regioni locali senza ricorrere alla cosmologia? Com'è possibile applicare la relatività generale a stelle di neutroni o buchi neri come se fossero inseriti in uno spaziotempo vuoto e asintoticamente piatto, se esistono in una cosmologia altamente relativistica?

La risposta sta nel fatto che, in relatività generale, lo spaziotempo è localmente piatto: fintanto che un esperimento è confinato ad una regione locale, non è necessario conoscere la geometria su larga scala.

Questa separazione tra locale e globale non è possibile nella gravità Newtoniana, dove anche il campo gravitazionale locale in un sistema a densità uniforme dipende da condizioni al contorno lontane, ovvero dalla forma del confine distante dell'universo.

1.2 Il principio cosmologico

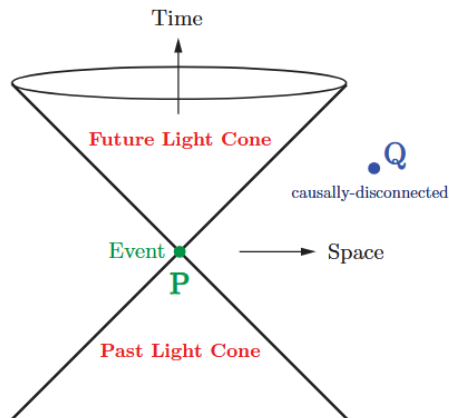


Figura 1.1: Cono luce e causalità [1]; la regione interna costituisce la regione di spaziotempo in relazione causale con l'evento.

Se si vuole costruire un modello a larga scala dell'universo, occorre fare alcune assunzioni sulle regioni non osservabili perché troppo lontane. Si devono infatti distinguere due regioni inaccessibili. La prima è quella così distante che nessuna informazione (che percorre una geodesica nulla) possa raggiungerci, non importa a che istante nel passato abbia iniziato a viaggiare: se si accetta che l'universo è iniziato una quantità di tempo fa finita, infatti, c'è un limite a quanto lontano è possibile osservare.

Questa regione è costituita da tutto ciò che si trova al di fuori del nostro cono luce; di solito esiste se l'universo ha un'età finita, come in questo caso.

Questa regione sconosciuta è di scarsa importanza, nella misura in cui tutto ciò che

accade lì non ha effetto sull'interno del cono luce passato, dunque il modo in cui viene incorporata nella modellizzazione dell'universo non ha effetto su come il modello descrive la storia osservabile. Il nostro cono luce passato è una sorta di orizzonte: a mano a mano che il tempo passa, sempre più regioni precedentemente sconosciute entrano al suo interno e diventano osservabili. Le regioni lungo l'orizzonte di particella, quindi, possono avere influenza sul futuro.

Si assume dunque che queste siano simili a quelle osservate, in particolare che siano omogenee e isotrope.

Questa versione moderna del principio copernicano [7] è chiamata *principio cosmologico*, o *assunzione di mediocrità*: rappresenta l'ordinarietà della nostra posizione nell'universo. Matematicamente è un'assunzione molto potente; la si adotta, tenendo a mente che le predizioni sul futuro dipendono fortemente da questa.

La seconda regione inaccessibile è costituita dalla parte del nostro cono luce passato su cui gli strumenti non sanno darci informazioni. Questa comprende galassie così distanti che sono troppo fioche per essere viste, processi che emettono radiazione (come le onde gravitazionali) che non si è stati in grado di rilevare ed eventi che sono nascosti alla vista, come quelli che hanno emesso radiazione elettromagnetica prima dell'epoca del disaccoppiamento tra materia e radiazione.

Il limite del disaccoppiamento è a volte chiamato *orizzonte ottico*, visto che nessuna luce proveniente da tempi precedenti ad esso può essere osservata.

1.3 Omogeneità e isotropia

Grazie alla crescente capacità degli osservatori astronomici, sia a terra che nello spazio, è stato possibile osservare con precisione l'universo.

A scale superiori a 10 Mpc, non solo la densità media osservata è uniforme, ma lo sono anche altre proprietà: i tipi di galassie presenti, le densità dei loro ammassi, la composizione chimica e stellare. Inoltre l'evoluzione osservata è la stessa in tutte le direzioni, anche quando si osservano parti dell'universo primordiale molto distanti l'una dall'altra. Si può concludere dunque che, su larga scala, l'universo è effettivamente omogeneo e isotropo.

Più formalmente [6,8], una varietà M è isotropa attorno a un punto p se, dati due vettori qualsiasi V e W , in $T_p M$ c'è un'isometria di M tale che il vettore *pushforward* di W sotto l'isometria è parallelo a V .

Omogeneità significa invece che la metrica è la stessa in tutta la varietà. In altre parole, dati due punti p e q in M , c'è un'isometria che porta p in q .

Si può notare che non c'è una relazione necessaria tra omogeneità e isotropia: una varietà può essere omogenea ma non isotropa (come $\mathbf{R} \times S^2$ nella metrica usuale), oppure può essere isotropa attorno ad un punto, ma non essere omogenea (come accade in un cono, che è isotropo attorno al vertice, ma non omogeneo).

D'altra parte, se uno spazio è isotropo ovunque, allora è necessariamente omogeneo. Analogamente, se è isotropo in un punto ma omogeneo, sarà isotropo ovunque.

Un'applicazione estrema del principio copernicano sarebbe affermare che lo spaziotempo stesso è massimalmente simmetrico. Questo però non è vero: tramite le osservazioni è stato evinto che l'universo è omogeneo e isotropo nello spazio, non nello spaziotempo. Per descrivere il mondo reale si è dunque obbligati a mettere da

parte il principio copernicano perfetto, che implica simmetria attraverso lo spazio e il tempo, e richiedere qualcosa di meno rigido.

Risulta essere consistente con le osservazioni postulare che l'universo sia spazialmente omogeneo e isotropo, ma in evoluzione nel tempo.

1.4 La radiazione cosmica di fondo

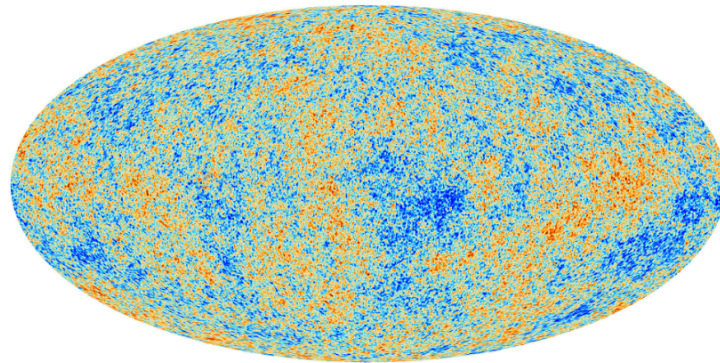


Figura 1.2: Immagine della radiazione cosmica di fondo (CMB) acquisita durante la missione "Planck Surveyor" [2].

Osservazioni sulla radiazione cosmica di fondo rivelano che questa ha uno spettro di corpo nero quasi perfetto, con una temperatura $T = 2.725$ K. Tuttavia, mostrano anche irregolarità di temperatura piccole ma significative, deviazioni dall'omogeneità, foriere della formazione di ammassi di galassie. Queste irregolarità di temperatura sono dell'ordine di 10^{-5} rispetto alla temperatura di background e sono causate da irregolarità nella distribuzione della materia della stessa dimensione relativa. Anche se possono sembrare piccole, studi numerici mostrano che sono abbastanza per governare le strutture che si vedono oggi.

Espansione significa che l'universo ha un'età finita, o almeno che si è espanso, in un tempo finito, da uno stato a densità molto elevata. Lo spettro di radiazione suggerisce che l'universo era inizialmente molto più caldo di com'è oggi, e durante l'espansione si è raffreddato. Questo solleva altre domande su come l'universo si è evoluto fino al suo stato attuale e com'era nel passato: da cosa siano sorte le irregolarità nella densità che hanno portato alla formazione delle strutture variegata dell'universo; cosa si può evincere sulle leggi della fisica ad energie superiori di quelle esplorabili con gli acceleratori di particelle; se l'omogeneità e l'isotropia osservate hanno origine fisica.

Rispondere a queste domande ha portato i fisici ad esplorare problematiche profonde alla frontiera della nostra comprensione della fisica fondamentale.

1.5 Il flusso di Hubble

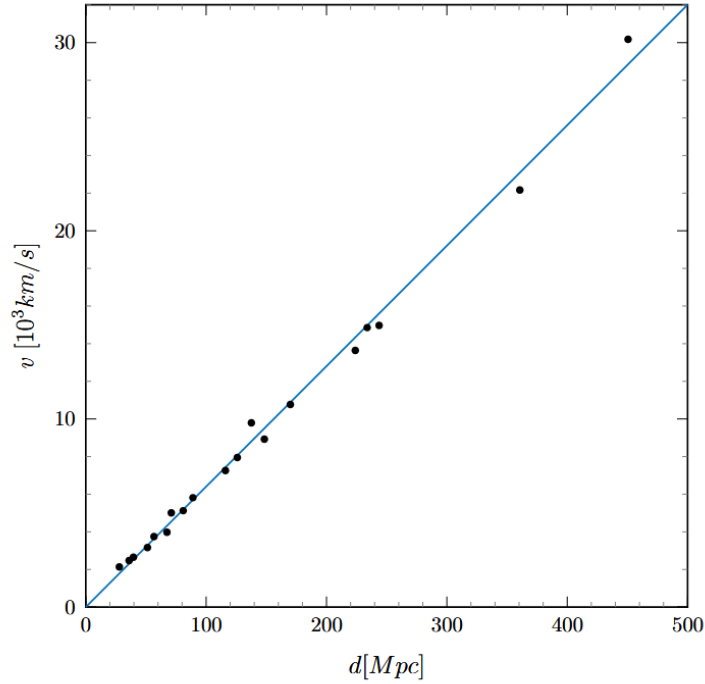


Figura 1.3: Grafico della velocità di allontanamento delle galassie in funzione della loro distanza dalla terra.

Una terza caratteristica dell'universo osservabile è l'uniformità della sua espansione: le galassie, in media, sembrano allontanarsi con una velocità proporzionale alla loro distanza da noi, chiamata *velocità di recessione*, o *flusso di Hubble*, in nome di Edwin Hubble. Il *flusso di Hubble*, cioè, è compatibile con il *principio copernicano*.

Per via della sua straordinaria semplicità, si può descrivere la relazione tra la velocità di recessione e la distanza con una singola costante di proporzionalità H

$$v = Hd \quad (1.1)$$

chiamata dagli astronomi *parametro di Hubble*. Il suo valore attuale, noto come *costante di Hubble* H_0 è $H_0 = (71 \pm 4) \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$.

Associato alla costante di Hubble è il tempo di Hubble $t_H = H_0^{-1} = (4.3 \pm 0.2) \times 10^{17}\text{s}$. Questo vale circa 14 miliardi di anni, ed è la scala temporale per l'espansione cosmologica. L'età dell'universo non sarà esattamente questa, visto che nel passato la velocità di espansione è variata, però fornisce un ordine di grandezza del tempo che è stato disponibile affinché l'universo osservato nel presente si sia evoluto.

Si potrebbe obiettare che la precedente discussione ignora la relatività della simultaneità: se l'universo varia nel tempo espandendosi, allora potrebbe essere possibile trovare qualche definizione di tempo così che le ipersuperfici a tempo costante

sono omogenee e isotrope, ma questo non sarebbe vero per altre scelte della coordinata temporale. Inoltre, l'equazione (1.1) non può essere esatta, visto che per $d > 1.3 \times 10^{26} \text{m}$, ovvero 4200 Mpc, la velocità supererebbe quella della luce.

Queste obiezioni sono corrette: la discussione fatta è locale (applicabile per $v \ll 1$) ed è fatta assumendo il punto di vista di un osservatore particolare, noi stessi.

Fortunatamente la velocità media relativa tra galassie vicine è tipicamente inferiore a 100 kms^{-1} , non relativistica e molto più piccola della velocità di espansione a distanze cosmologiche. Dunque la descrizione relativistica corretta dell'universo in espansione prevede che, nelle nostre prossimità, esista una scelta preferenziale del tempo, le cui ipersuperfici sono omogenee e isotrope, e l'equazione (1.1) sia valida nel sistema di riferimento inerziale locale per ciascun osservatore a riposo rispetto a queste ipersuperfici in ciascun punto.

1.6 L'inflazione

Queste osservazioni hanno portato i fisici a ipotizzare che un periodo di inflazione cosmica [3-5], ovvero un'espansione esponenzialmente rapida dell'universo primordiale, abbia avuto luogo circa 10^{-34} secondi dopo la singolarità del Big Bang, e che questa sia responsabile sia dell'omogeneità su larga scala osservata che delle piccole fluttuazioni che hanno portato alla formazione delle strutture ora presenti, come la nostra galassia.

Qui si introduce la metrica che descrive un universo omogeneo in espansione, come le osservazioni astronomiche misurano la storia dell'espansione e si sviluppa il framework necessario per discutere i processi fisici nell'universo in espansione.

Capitolo 2

L'universo omogeneo

2.1 Metrica cosmologica

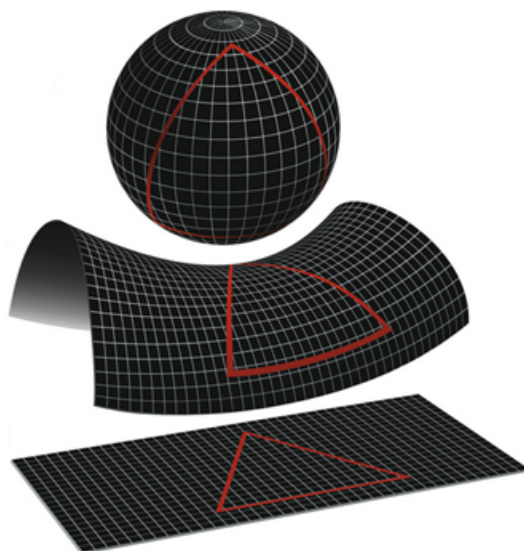


Figura 2.1: Esempio di spazi curvi in due dimensioni. Dall'alto: $k = +1$, $k = -1$, $k = 0$.

Il tensore metrico che rappresenta un modello cosmologico deve incorporare l'omogeneità e l'isotropia osservate [9]. Si adottano dunque le seguenti idealizzazioni per l'universo:

- lo spaziotempo può essere tagliato in ipersuperfici a tempo costante perfettamente omogenee e isotrope
- il sistema di riferimento medio a riposo della galassie rispetta questa definizione di simultaneità

Il problema viene semplificato il più possibile adottando le coordinate comoventi: ogni galassia è idealizzata e a ciascuna di esse si dà un set fissato di coordinate $x^i, i = 1, 2, 3$. Si sceglie la coordinata temporale t affinché sia il tempo proprio per ogni galassia. L'espansione dell'universo, ovvero la variazione della distanza propria

tra galassie, è rappresentata da coefficienti metrici dipendenti dal tempo. Dunque se ad un istante t_0 , l'ipersuperficie a tempo costante ha come elemento di linea

$$dl^2(t_0) = h_{ij}(t_0)dx^i dx^j \quad (2.1)$$

allora l'espansione dell'ipersuperficie può essere rappresentata da

$$dl^2(t_0) = f(t_1, t_0)h_{ij}(t_0)dx^i dx^j = h_{ij}(t_1)dx^i dx^j \quad (2.2)$$

Questa forma garantisce che tutte le h_{ij} crescono allo stesso ritmo; altrimenti l'espansione sarebbe anisotropa.

In generale l'equazione (2.1) può essere scritta come

$$dl^2(t) = a^2(t)h_{ij}dx^i dx^j \quad (2.3)$$

dove a è un fattore di scala che equivale a 1 a t_0 e h_{ij} è una metrica costante equivalente all'ipersuperficie a t_0 .

Innanzitutto si estende l'elemento di linea dell'ipersuperficie a tempo costante ad un elemento di linea per l'intero spaziotempo.

In generale sarebbe

$$ds^2 = -dt^2 + g_{0i}dt dx^i + a^2(t)h_{ij}dx^i dx^j \quad (2.4)$$

dove $g_{00} = -1$ perché t è tempo proprio lungo una linea $dx^i = 0$. Tuttavia, se la definizione di simultaneità data da $t = \text{const.}$ è in accordo con quella data dal sistema di riferimento locale di Lorentz attaccato alla galassia, allora $\vec{e}_0$ deve essere ortogonale a $\vec{e}_i$ nelle coordinate comoventi.

Questo significa che $g_{0i}\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_i$ deve svanire e si ottiene

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)h_{ij}dx^i dx^j \quad (2.5)$$

Poiché si tratta di un sistema isotropo, h_{ij} deve essere sfericamente simmetrico rispetto all'origine delle coordinate, che può essere fissata in ciascun punto.

Una metrica sfericamente simmetrica ha come elemento di linea il seguente

$$dl^2 = e^{2\Lambda(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.6)$$

Questa forma implica isotropia rispetto ad un punto. Se si vuole una condizione più forte, ad esempio che la metrica sia omogenea, è necessario che la curvatura scalare di Ricci della metrica tridimensionale, R_j^j , sia la stessa in ogni punto: ogni scalare deve essere indipendente dalla posizione ad un tempo fissato. Si ottiene

$$G_{rr} = -\frac{1}{r^2}e^{2\Lambda}(1 - e^{-2\Lambda}) \quad (2.7)$$

$$G_{\theta\theta} = -re^{-2\Lambda}\Lambda' \quad (2.8)$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2\theta G_{\theta\theta} \quad (2.9)$$

La traccia di questo tensore è uno scalare e deve essere costante. Dunque, invece di valutare la curvatura scalare di Ricci, si richiede che la traccia G del tensore

tridimensionale di Einstein sia costante.

La traccia è

$$G = G_{ij}g^{ij} = -\frac{1}{r^2}e^{2\Lambda}(1 - e^{-2\Lambda})e^{-2\Lambda} - 2re^{-2\Lambda}\Lambda'r^{-2} = -\frac{1}{r^2}[1 - (re^{-2\Lambda})'] \quad (2.10)$$

Richiedere l'omogeneità significa fissare G ad una costante κ :

$$k = -\frac{1}{r^2}[1 - (re^{-2\Lambda})'] \quad (2.11)$$

Questo si integra facilmente ottenendo

$$g_{rr} = e^{2\Lambda} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\kappa r^2 - \frac{A}{r}} \quad (2.12)$$

dove A è una costante di integrazione. Si richiede poi piatezza locale a $r = 0$: $g_{rr}(r = 0) = 1$. Questo implica $A = 0$.

Definendo la costante di curvatura più convenzionale $k = -\kappa/3$ restituisce

$$g_{rr} = \frac{1}{1 - kr^2} \quad (2.13)$$

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \quad (2.14)$$

Non è stato provato che questo spazio è isotropo attorno ad ogni punto; si è mostrato che l'equazione (2.14) è lo spazio unico che soddisfa la condizione necessaria che lo scalare di curvatura sia omogeneo. Dunque, se uno spazio isotropo e omogeneo esiste, deve avere tale metrica, per almeno un k .

Inoltre, è vero il contrario: la metrica dell'equazione (2.14) è omogenea e isotropa per ciascun valore di k .

Dunque assumendo questo risultato si conclude che lo spaziotempo cosmologico nel suo insieme è dotato della metrica seguente

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (2.15)$$

questa è la metrica di Friedmann-Robertson-Walker.

Senza perdere di generalità, si può scalare la coordinata r in modo che k assuma solo uno dei tre valori seguenti $+1, 0, -1$; ci sono dunque solo tre ipersuperfici spaziali da considerare. Tutte le tre ipersuperfici rappresentano metriche omogenee e isotrope che hanno diverse geometrie su larga scala.

Si consideri inizialmente $k = 0$. Ad ogni istante t_0 l'elemento di linea dell'ipersuperficie (ponendo $dt = 0$) è

$$dl^2 = a^2(t_0)[dr^2 + r^2 d\Omega^2] = d(r')^2 + (r')^2 d\Omega \quad (2.16)$$

dove $r' = a(t_0)r$. Questa è la metrica di uno spazio euclideo; rappresenta l'universo piatto di FRW. Questo è ovviamente omogeneo e isotropo.

Si consideri poi $k = +1$. Si definisce una nuova coordinata $\chi(r)$ tale che

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2} \quad (2.17)$$

e $\chi = 0$ dove $r = 0$. Integrando si ottiene

$$r = \sin\chi \quad (2.18)$$

così che l'elemento di linea per lo spazio $t = t_0$ è

$$dl^2 = a^2(t_0)[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad (2.19)$$

Questa metrica rappresenta l'universo chiuso, o sferico, di FRW. Anche questo è omogeneo e isotropo.

L'ultima possibilità è $k = -1$. Una trasformazione di coordinate porta all'elemento di linea

$$dl^2 = a^2(t_0)(d\chi^2 + \sinh^2\chi d\Omega^2) \quad (2.20)$$

Questa metrica rappresenta l'universo iperbolico, o aperto, di FRW. Si noti una particolare proprietà: a mano a mano che la coordinata propria radiale χ cresce, allontanandosi dall'origine, la circonferenza delle sfere cresce come $\sinh\chi$. Poichè $\sinh\chi > \chi$ per ogni $\chi > 0$, segue che queste circonferenze crescono più rapidamente con il raggio proprio rispetto allo spazio piatto.

Per questa ragione questa ipersuperficie non è realizzabile come una ipersuperficie tridimensionale in uno spazio euclideo quadridimensionale (o a dimensione superiore). Lo spazio è detto aperto perché, a differenza di $k = +1$, le sfere e le circonferenze crescono in maniera monotona con χ : non c'è fine naturale allo spazio. Questa geometria è la geometria di un'ipersuperficie inserita in uno spaziotempo di Minkowski. In particolare è un'ipersuperficie di eventi che hanno tutti lo stesso intervallo di tipo tempo rispetto all'origine. Visto che l'ipersuperficie ha lo stesso intervallo dall'origine in ciascun sistema di riferimento di Lorentz (gli intervalli sono Lorentz-invarianti), questa ipersuperficie è omogenea e isotropa.

2.2 Parametro di Hubble

Per la FRW l'evoluzione dell'universo omogeneo si riduce al parametro di scala $a(t)$. La sua forma è dettata dal contenuto di materia dell'universo attraverso le equazioni di campo di Einstein.

Una quantità fondamentale che caratterizza lo spaziotempo FRW è il rate di espansione, altrimenti chiamato *parametro di Hubble*

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.21)$$

Il parametro di Hubble H così definito è positivo per un universo in espansione e negativo per un universo in collasso.

Esso fissa la scala fondamentale dello spaziotempo FRW: la scala temporale caratteristica dell'universo omogeneo è il *tempo di Hubble*, $t \sim H^{-1}$ e la scala fondamentale di lunghezza è la *lunghezza di Hubble* $d \sim H^{-1}$ (in unità naturali, ovvero per $c = 1$). Il tempo di Hubble fissa la scala per l'età dell'universo, mentre la lunghezza di Hubble fissa la dimensione dell'universo osservabile.

2.3 Cinematica: tempo e orizzonte conforme

Avendo definito la metrica per lo spaziotempo dell'universo si possono analizzare le proprietà cinematiche della propagazione della luce e delle particelle materiali.

2.3.1 Tempo conforme e geodesiche nulle

La struttura causale dell'universo è determinata dalla propagazione della luce nello spaziotempo FRW. I fotoni, senza massa, seguono geodesiche nulle $ds^2 = 0$. Le loro traiettorie sono analizzabili facilmente definendo il tempo conforme

$$\tau = \int \frac{dt}{a(t)} \quad (2.22)$$

per cui la metrica FRW diventa

$$ds^2 = a^2(\tau)[-d\tau^2 + (d\chi^2 + \phi_k(\chi^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2))] \quad (2.23)$$

In un universo isotropo si può considerare la propagazione radiale della luce come determinata dall'elemento di linea due dimensionale

$$ds^2 = a(\tau)^2[-d\tau^2 + d\chi^2] \quad (2.24)$$

Le geodesiche nulle radiali della luce nella metrica FRW, espresse in tempo conforme, soddisfano dunque la relazione

$$\chi(\tau) = \pm r + \text{const.} \quad (2.25)$$

ovvero rappresentano le corrispondenti bisettrici a $\pm 45^\circ$ nel piano $(\tau - \chi)$.

Se invece si usasse il tempo fisico t per studiare la propagazione della luce, i coni luce per spaziotempo curvi sarebbero curvi.

2.3.2 Orizzonte di particella

La distanza massima che la luce può percorrere tra un tempo iniziale t_i e un tempo successivo t è data da

$$\chi_p(\tau) = \tau - \tau_i = \int_{t_i}^t \frac{dt}{a(t)} \quad (2.26)$$

Questo è l'*orizzonte di particella*, comovente con essa. Il tempo iniziale t_i è fissato all'origine dell'universo, $t_i \equiv 0$, definito dalla singolarità iniziale $a(t_i \equiv 0) \equiv 0$. La dimensione fisica dell'orizzonte di particella è

$$d_P(t) = a(t)\chi_p \quad (2.27)$$

L'orizzonte di particella è di importanza cruciale per comprendere la struttura causale dell'universo ed è fondamentale nell'introduzione dell'inflazione.

Il modello convenzionale del Big Bang, infatti, inizia ad un tempo finito nel passato e ipotizza che ad ogni istante nel passato l'orizzonte di particella fosse finito, ponendo un limite alla distanza in cui regioni dello spaziotempo potrebbero essere entrate in contatto causale.

2.3.3 Orizzonte degli eventi

L'*orizzonte degli eventi* definisce un insieme di punti per cui segnali inviati ad un dato istante di tempo τ non saranno mai ricevuti da un osservatore nel futuro. Nelle coordinate comovienti questi punti soddisfano

$$\chi > \chi_e = \int_{\tau}^{\tau_{max}} d\tau = \tau_{max} - \tau \quad (2.28)$$

dove τ_{max} denota il 'l'istante finale del tempo', che può essere finito o infinito. La dimensione fisica dell'orizzonte degli eventi è

$$d_e(t) = a(t)\chi_e \quad (2.29)$$

2.4 Equazioni di Einstein

La dinamica dell'universo, caratterizzata dall'evoluzione del fattore di scala dello spaziotempo FRW $a(t)$, è determinata dalle equazioni di Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.30)$$

dove si assumeranno unità in cui $8\pi G \equiv 1$.

Si richiama la definizione del tensore di Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.31)$$

in termini del tensore di Ricci $R_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \quad (2.32)$$

e dello scalare di Ricci R

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (2.33)$$

con

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \equiv \frac{g^{\mu\nu}}{2}[g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}] \quad (2.34)$$

dove le virgole denotano derivate parziali, per esempio $(\dots)_{,\mu} = \frac{\partial(\dots)}{\partial x^{\mu}}$.

2.4.1 Energia, impulso e pressione

Per definire il tensore energia-impulso dell'universo $T_{\mu\nu}$, si introducono un insieme di osservatori le cui linee di universo sono tangenti al quadrivettore velocità di tipo tempo

$$u^{\mu} \equiv \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \quad (2.35)$$

dove τ è il tempo proprio degli osservatori, così che $g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} = -1$.

Si definisce allora il tensore $\gamma_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + u_{\mu}u_{\nu}$ come la metrica delle sezioni spaziali tre-dimensionali ortogonali a u_{μ} , utilizzato per proiettare quantità ortogonali alla

quadrivelocità nel sistema di riferimento solidale con gli osservatori.

Il tensore energia-impulso di un fluido perfetto è

$$T_{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}T_{\alpha\nu} = (\rho + p)u^\mu u_\nu - p\delta_\nu^\mu \quad (2.36)$$

dove $\rho = T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ è la densità di energia propria, $p = \frac{1}{3}T_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}$ è la pressione isotropa propria nel sistema di riferimento di riposo del fluido, e u^μ è la quadrivelocità del fluido.

In un sistema di riferimento comovente con il fluido si può scegliere $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, di modo che il tensore energia-impulso assuma la forma

$$T_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Le equazioni di Einstein diventano quindi due equazioni differenziali non lineari ordinarie accoppiate, chiamate *Equazioni di Friedmann*

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (2.38)$$

e

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p) \quad (2.39)$$

dove la derivazione è rispetto al tempo.

In un universo in espansione (ovvero $\dot{a} > 0$) riempito di materia ordinaria (materia che soddisfa la condizione di energia forte $\rho + 3p \geq 0$), l'equazione (2.39) implica $\ddot{a} < 0$, indicando l'esistenza di una singolarità nel passato finito: $a(t \equiv 0) = 0$. Questa conclusione si basa sull'assunzione che la relatività generale e le equazioni di Friedmann sono applicabili ad energie arbitrariamente elevate e nessuna forma esotica di materia diventa rilevante ad alte energie.

Le equazioni (2.38) e (2.39) possono essere combinate a formare l'equazione di continuità

$$\frac{d\rho}{dt} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (2.40)$$

che può essere riscritta come

$$\frac{d \ln \rho}{d \ln a} = -3(1 + w) \quad (2.41)$$

Se si definisce il parametro dell'equazione di stato

$$w \equiv \frac{p}{\rho} \quad (2.42)$$

l'equazione (2.41) può essere integrata, restituendo

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (2.43)$$

Insieme alle equazioni di Friedmann (2.38), questo conduce all'evoluzione temporale del fattore di scala

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{2/3(1+w)} & w \neq -1 \\ e^{Ht} & w = -1 \end{cases} \quad (2.44)$$

Per esempio $a(t) \propto t^{2/3}$, $a(t) \propto t^{1/2}$ e $a(t) \propto e^{Ht}$, per un universo piatto ($k = 0$), per un universo dominato da materia non-relativistica ($w = 0$) e per un universo dominato da radiazione o materia relativistica ($w = \frac{1}{3}$) rispettivamente.

Se più di una specie di materia (barioni, protoni, neutroni, materia oscura, etc.) contribuisce significativamente alla densità di energia e pressione, ρ e p si riferiscono alla somma delle i componenti

$$\rho \equiv \sum_i \rho_i \quad (2.45)$$

e

$$p \equiv \sum_i p_i \quad (2.46)$$

Per ciascuna specie ' i ', si definisce il rapporto attuale di densità di energia rispetto alla densità critica di energia, definita come $\rho_{crit} \equiv H_0^2$ nel seguente modo

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_0^i}{\rho_{crit}} \quad (2.47)$$

ottenendo la corrispondente equazione di stato

$$w_i \equiv \frac{p_i}{\rho_i} \quad (2.48)$$

dove il pedice ' 0 ' indica la valutazione di una quantità all'istante presente t_0 .

Si è normalizzato il fattore di scala così che $a_0 = a(t_0) = 1$.

Questo permette di scrivere le equazioni di Friedmann (2.38) come

$$\left(\frac{H}{H_0} \right)^2 = \sum_i \Omega_i a^{-3(1+w_i)} + \Omega_k a^{-2} \quad (2.49)$$

con $\Omega_k \equiv -k/a_0^2 H_0^2$ curvatura parametrizzante; valutare l'equazione (2.49) all'istante presente implica la consistenza della relazione

$$\sum_i \Omega_i + \Omega_k = 1 \quad (2.50)$$

La seconda equazione di Friedmann (2.39) valutata a $t = t_0$ diventa

$$\frac{1}{a_0 H_0^2} \frac{d^2 a_0}{dt^2} = -\frac{1}{2} \sum_i \Omega_i (1 + 3w_i) \quad (2.51)$$

che definisce le condizioni per l'espansione accelerata nel presente.

2.5 Modello Lambda-CMB

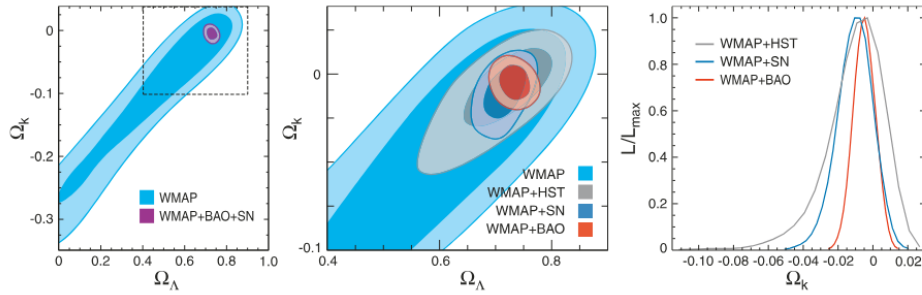


Figura 2.2: Osservazioni di CMB e LSS [11] da cui si evince che l'universo è piatto.

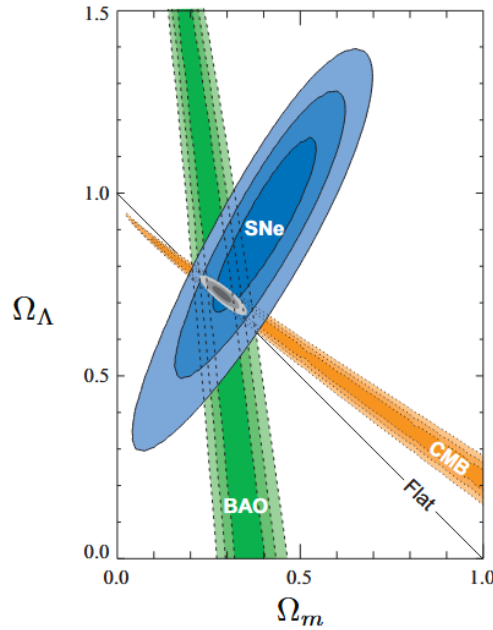


Figura 2.3: Combinazione di osservazioni di radiazione cosmica di fondo (CMB), Supernove (SNe) e oscillazioni barioniche acustiche (BAO) [12]; dimostrano l'esistenza dell'energia oscura.

Le osservazioni sulla radiazione cosmica di fondo (CMB) e le strutture di larga scala (LSS) mostrano che l'universo osservato è piatto

$$\Omega_k \sim 0 \quad (2.52)$$

e composto al 4% da atomi (o *barioni* 'b'), al 23% da materia oscura fredda ('dm') e al 73% da energia oscura 'Λ'

$$\Omega_b = 0.04 \quad \Omega_{dm} = 0.23 \quad \Omega_\Lambda = 0.73 \quad (2.53)$$

Capitolo 3

I problemi del Big Bang

L'obiettivo della fisica è predire l'evoluzione futura di un sistema dato un insieme di condizioni iniziali: ad esempio la legge della gravitazione di Newton predice la traiettoria di un corpo se si definiscono la sua posizione e la sua velocità iniziali. Non è chiaro se la cosmologia dovrebbe predire o anche solo spiegare le condizioni iniziali dell'universo.

D'altra parte, sarebbe deludente se solo delle condizioni iniziali speciali portassero all'universo oggi conosciuto, rendendo l'universo osservabile un 'incidente improbabile'.

In questa sezione si tratta come la teoria convenzionale del Big Bang richieda un set di condizioni iniziali estremamente precise per permettere all'universo di evolversi fino al suo stato corrente. Uno dei traguardi maggiori dell'inflazione è quello di spiegare le condizioni iniziali dell'universo conosciuto e permettere che questo possa nascere da condizioni generiche.

3.0.1 Il problema di Cauchy dell'universo

Per specificare le condizioni iniziali dell'universo si considera una tre-superficie Σ a tempo costante, e su di essa si definiscono le posizioni e velocità delle particelle materiali. Per far evolvere il sistema nel tempo si utilizzano le leggi della gravitazione e della fluidodinamica.

Omogeneità iniziale

Si descrive la distribuzione spaziale di materia tramite la sua densità e pressione come funzioni delle coordinate $\mathbf{x}$, ovvero $p(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$. Nella precedente sezione sono state assunte implicitamente omogeneità e isotropia. Questa è una buona assunzione, in quanto le inomogeneità sono instabili da un punto di vista gravitazionale, dunque aumentano nel tempo. Osservazioni sulla radiazione cosmica di fondo mostrano che queste inomogeneità erano molto più piccole nel passato (al *last-scattering*) rispetto ad oggi. Ci si aspetta dunque che fossero ancora più piccole a tempi precedenti. Come si può spiegare la piattezza dell'universo primordiale?

Questo è particolarmente sorprendente visto che nell'immagine convenzionale del Big Bang, l'universo primordiale (ad esempio la CMB al *last-scattering*), consisteva di un grande numero di regioni di spazio causalmente disconnesse. Non c'è, cioè, alcuna

ragione, dal punto di vista dinamico, per spiegare perché queste zone causalmente separate mostrano condizioni fisiche simili.

L'omogeneità è il problema chiamato *problema dell'orizzonte*.

Velocità iniziale

La caratterizzazione completa del problema di Cauchy richiede la conoscenza delle velocità del fluido in ogni punto dello spazio.

Per assicurare l'omogeneità dell'universo a tempi successivi, è necessario che le velocità iniziali del fluido assumano valori precisi: se queste fossero troppo piccole, l'universo collasserebbe in una frazione di secondo, se fossero troppo grandi, invece, l'universo si espanderebbe troppo rapidamente e diventerebbe velocemente pressoché vuoto.

Fissare con precisione le velocità iniziali è reso più drammatico dalla sua combinazione con il problema dell'orizzonte: le velocità del fluido devono essere fisse tra regioni di spazio causalmente separate.

Visto che la differenza tra l'energia potenziale e cinetica definisce la curvatura locale di una regione di spazio, il problema di fissare le velocità è detto *problema della piattezza*.

3.1 Il problema dell'orizzonte

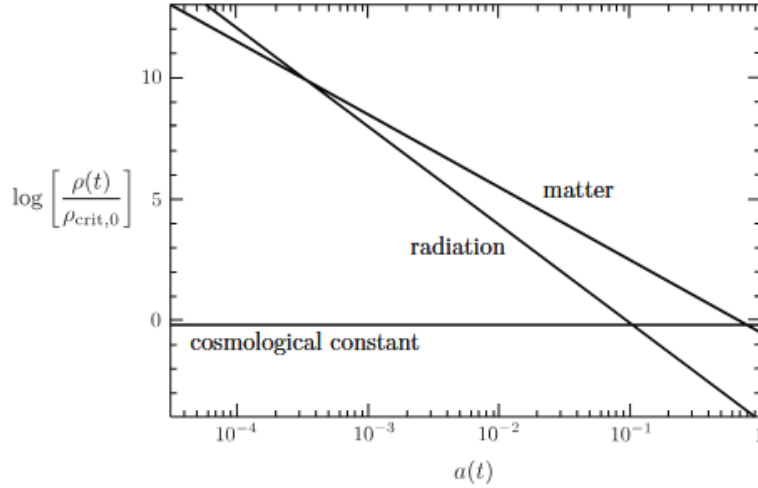


Figura 3.1: Evoluzione della densità di energia per universo RD e MD [14].

Nel precedente capitolo è stato definito l'orizzonte di particella comoviente τ come l'orizzonte causale, o la massima distanza che un raggio di luce può percorrere tra un tempo $t = 0$ e un tempo t

$$\tau \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^a \frac{da'}{H a'^2} = \int_0^a d \ln a' \left(\frac{1}{a' H} \right) \quad (3.1)$$

dove l'orizzonte comoviente è stato espresso come integrale del raggio di Hubble comoviente $(aH)^{-1}$, che ha un ruolo fondamentale nell'inflazione.

Per un universo dominato da un fluido con equazione di stato w , si ha

$$(aH)^{-1} = H_0 a^{\frac{1}{2}(1+3w)} \quad (3.2)$$

dove è possibile notare la dipendenza dell'esponente dalla combinazione $(1 + 3w)$. Il comportamento qualitativo dipende, dunque, dal valore assunto da $(1 + 3w)$: se è positivo o negativo. Durante l'espansione del Big Bang convenzionale ($w \geq 0$), $(aH)^{-1}$ cresce monotonicamente e l'orizzonte comoviente τ (o la frazione di universo in contatto causale), cresce col tempo secondo la dipendenza

$$\tau \propto a^{\frac{1}{2}(1+3w)} \quad (3.3)$$

In particolare, per universi dominati dalla radiazione (RD) e dominati dalla materia (MD) si trova

$$\tau = \int_0^a \frac{da'}{Ha'^2} \propto \begin{cases} a & \text{RD} \\ a^{1/2} & \text{MD} \end{cases} \quad (3.4)$$

Questo significa che l'orizzonte comoviente cresce monotonicamente col tempo. Tuttavia, la quasi omogeneità della CMB prova che l'universo era estremamente omogeneo al tempo del *last-scattering* su scale comprendenti molte regioni a priori causalmente indipendenti. Com'è possibile?

3.2 Il problema della piattezza

Lo spaziotempo in relatività generale è dinamico, poiché la sua curvatura dipende dalla materia nell'universo.

Per comprendere perché è possibile approssimarlo a uno spazio Euclideo, si considera l'equazione di Friedmann

$$H^2 = \frac{1}{3}\rho(a) - \frac{k}{a^2} \quad (3.5)$$

scritta come

$$1 - \Omega(a) = \frac{-k}{(aH)^2} \quad (3.6)$$

dove

$$\Omega(a) \equiv \frac{\rho(a)}{\rho_{crit}(a)}, \quad \rho_{crit}(a) \equiv 3H(a)^2 \quad (3.7)$$

Si noti che $\Omega(a)$ è definita in maniera da dipendere dal tempo, mentre nelle definizioni precedenti le Ω erano costanti, $\Omega(a_0)$.

Nella cosmologia standard il raggio comoviente di Hubble $(aH)^{-1}$ cresce nel tempo e, dall'equazione (3.6), la quantità $|\Omega - 1|$ deve divergere nel tempo.

Il valore critico $\Omega = 1$ è un punto fisso instabile. Dunque, senza inflazione, la quasi-piattezza osservata oggi, $\Omega(a_0) \sim 1$ richiede di fissare Ω prossima ad 1 nell'universo primordiale.

Un altro modo di comprendere il problema della piattezza è tramite l'equazione differenziale

$$\frac{d\Omega}{d \ln a} = (1 + 3w)\Omega(\Omega - 1) \quad (3.8)$$

Questa è derivata differenziando l'equazione (3.6) e utilizzando l'equazione di continuità (2.41). Questo rende apparente che $\Omega = 1$ è un punto fisso instabile se è soddisfatta la condizione di energia forte

$$\frac{d|\Omega - 1|}{d \ln a} > 0 \iff 1 + 3w > 0 \quad (3.9)$$

3.3 Il problema delle condizioni iniziali

Occorre sottolineare che il problema dell'orizzonte e della piattezza non sono incoerenze nel modello cosmologico standard. Se si assume che il valore iniziale Ω sia estremamente prossimo all'unità e che l'universo sia cominciato in maniera omogenea su distanze oltre l'orizzonte (con il grado di non omogeneità necessario per spiegare la formazione di strutture su larga scala) allora questo evolverà in maniera omogenea, in accordo con le osservazioni.

Il problema della piattezza e dell'orizzonte sono mancanze nel potere predittivo del modello del Big Bang: la piattezza non può essere predetta nel modello standard ma deve essere assunta come condizione iniziale; allo stesso modo, l'omogeneità su larga scala non è spiegata perfettamente dal modello ma semplicemente assunta.

Capitolo 4

L'inflazione

4.1 La sfera di Hubble

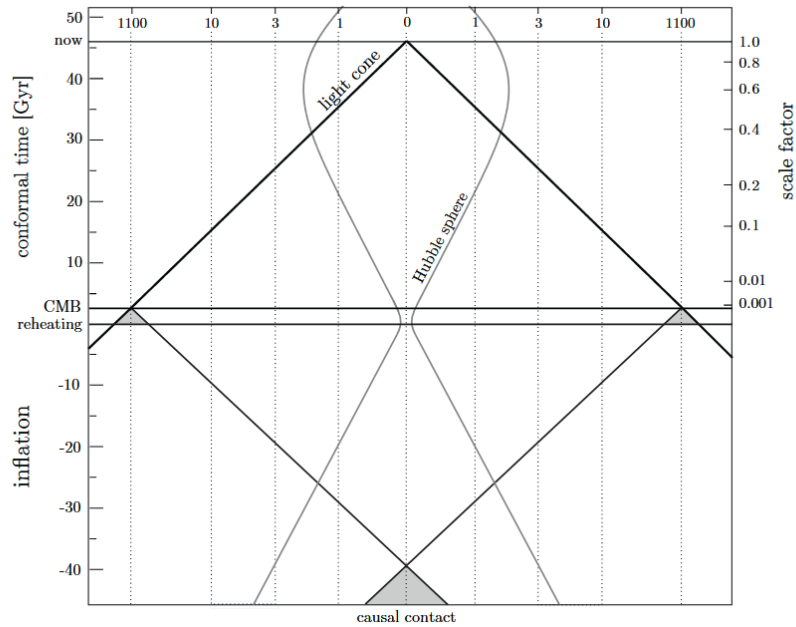


Figura 4.1: Soluzione del modello inflazionario al problema dell'orizzonte [14]. La sfera di Hubble si restringe durante l'inflazione e si espande subito dopo.

Nei paragrafi precedenti è stato evidenziato il ruolo fondamentale del raggio comoviente di Hubble $(aH)^{-1}$ nel problema della piattezza e dell'orizzonte nella cosmologia standard del Big Bang. Entrambi i problemi sorgono perché, nella cosmologia convenzionale, il raggio comoviente di Hubble è strettamente crescente. Questo suggerisce che i problemi del Big Bang possano essere risolti da una semplice idea: invertire il comportamento del raggio comoviente di Hubble, ad esempio facendolo decrescere a sufficienza nell'universo primordiale.

4.1.1 Orizzonte comoviente durante l'inflazione

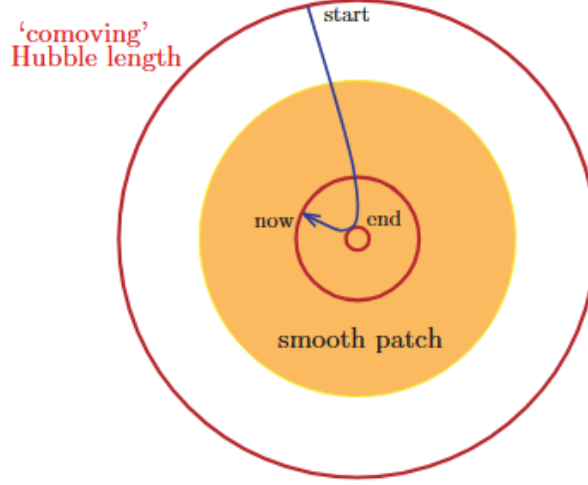


Figura 4.2: Evoluzione del raggio di Hubble comoviente (aH^{-1}) nella cosmologia inflazionaria [1].

L'evoluzione dell'orizzonte comoviente ha un'importanza cruciale nell'idea di inflazione.

Riprendendo la definizione di orizzonte comoviente, ovvero tempo conforme, come integrale logaritmico del raggio comoviente di Hubble

$$\tau = \int_0^a d \ln a' \frac{1}{a' H(a')} \quad (4.1)$$

si può enfatizzare la differenza tra l'orizzonte comoviente τ e il raggio comoviente di Hubble $(aH)^{-1}$ [13]: particelle separate da distanze maggiori di τ non saranno mai entrate in contatto l'una con l'altra, mentre particelle separate da distanze superiori a $(aH)^{-1}$ non sono in contatto nell'istante presente. Questa distinzione è di fondamentale importanza: è possibile che τ sia molto più grande di $(aH)^{-1}$ ora, così che particelle che non possono entrare in contatto causale oggi lo fossero nel passato.

Dall'equazione (4.1) si vede che ciò può accadere se si assume il raggio comoviente di Hubble nell'universo primordiale molto più grande di quanto è nel presente, così che τ abbia ricevuto la maggior parte dei suoi contributi in tempi primordiali.

Dunque si richiede una fase in cui il raggio di Hubble è decrescente: poiché H è pressoché costante, mentre a cresce esponenzialmente durante un periodo d'inflazione, si vede che il raggio comoviente di Hubble necessariamente decresce.

4.1.2 Il problema della piattezza rivisitato

Riprendendo l'equazione di Friedmann (3.6) per un universo non piatto, ovvero

$$|1 - \Omega(a)| = \frac{1}{(aH)^2} \quad (4.2)$$

si osserva che, se il raggio comoviente di Hubble decresce, l'universo è portato verso la piattezza, risolvendo il problema: la soluzione $\Omega = 1$ rappresenta l'attrazione durante l'inflazione.

4.1.3 Il problema dell'orizzonte rivisitato

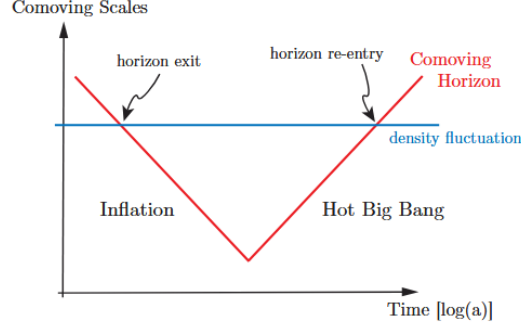


Figura 4.3: Soluzione al problema dell'orizzonte [1]. Le scale rilevanti per le osservazioni cosmologiche attuali erano superiori al raggio di Hubble fino a $a \sim 10^{-5}$. A tempi sufficientemente antichi erano più piccole del raggio di Hubble, dunque connesse.

Un orizzonte comoviente che si riduce significa che larghe scale che entrano nell'universo nel presente erano all'interno dell'orizzonte prima dell'inflazione. La fisica causale prima dell'inflazione ha cioè stabilito l'omogeneità spaziale. Con un periodo d'inflazione viene spiegata l'uniformità della CMB.

4.2 Condizioni per l'inflazione

Tramite le equazioni di Friedmann, il raggio comoviente di Hubble può essere messo in relazione con la pressione e l'accelerazione dell'universo nella maniera seguente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{H^{-1}}{a} \right) < 0 \implies \frac{d^2 a}{dt^2} > 0 \implies \rho + 3p < 0 \quad (4.3)$$

Le tre condizioni equivalenti per l'inflazione sono dunque:

1. *Orizzonte comoviente decrescente*

La sfera di Hubble che si riduce è definita come

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) < 0 \quad (4.4)$$

qui utilizzata come definizione fondamentale dell'inflazione, visto che si collega in maniera diretta al problema della piattezza e dell'orizzonte

2. *Espansione accelerata*

Dalla relazione

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right)^{-1} = \frac{-\ddot{a}}{(aH)^2} \quad (4.5)$$

si vede immediatamente che un raggio di Hubble comovente che si riduce implica espansione accelerata

$$\frac{d^2 a}{dt^2} > 0 \quad (4.6)$$

Questo spiega perché l'inflazione è spesso definita come un periodo di espansione accelerata.

La derivata seconda rispetto al tempo del fattore di scala può essere messa in relazione con la derivata prima rispetto al tempo del parametro di Hubble H

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \epsilon) \quad (4.7)$$

dove

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad (4.8)$$

Dunque l'accelerazione corrisponde alla richiesta che

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d \ln H}{dN} < 1 \quad (4.9)$$

dove è stato definito $dN = H dt = d \ln a$, che misura il numero di *e-folds* (ovvero il numero di intervalli temporali in cui una quantità esponenziale cresce o decresce di un fattore e) N dell'espansione inflazionaria, . L'equazione (4.9) significa perciò che la variazione frazionaria del parametro di Hubble per *e-fold* è piccola.

3. *Pressione negativa*

Consultando l'equazione (2.39) si deduce che $\ddot{a} > 0$ richiede

$$p < -\frac{1}{3}\rho \quad (4.10)$$

ovvero pressione negativa, o una violazione della condizione di energia forte (che può essere violata).

4.3 Diagramma conforme dell'inflazione

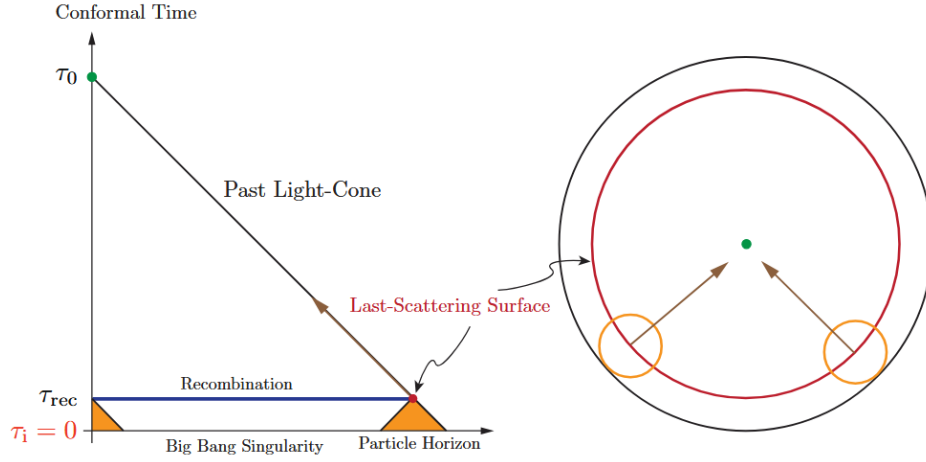


Figura 4.4: Diagramma conforme della cosmologia del Big Bang [1].

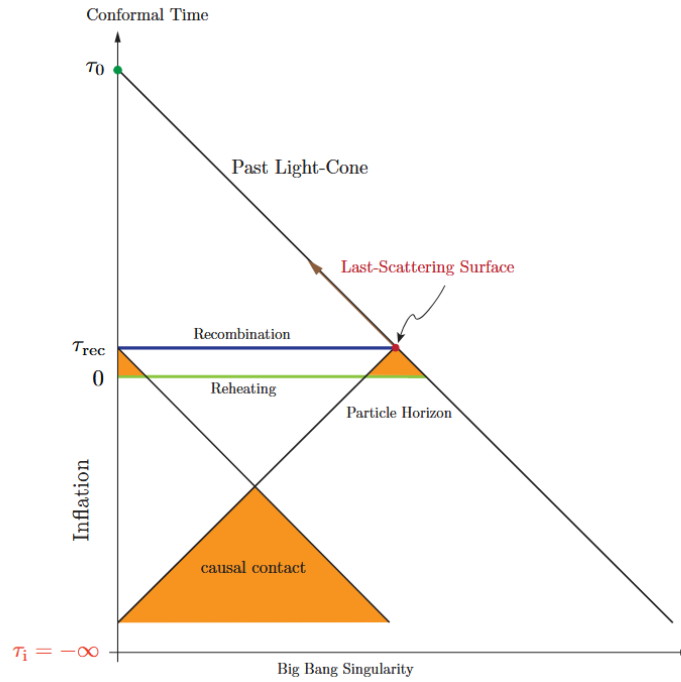


Figura 4.5: Diagramma conforme della cosmologia inflazionaria [1]: l'inflazione estende il tempo conforme a valori negativi creando un Big Bang apparente a $\tau = 0$ poiché in quel punto non c'è alcuna singolarità.

Un modo illuminante di visualizzare l'inflazione è con l'aiuto di un diagramma conforme dello spaziotempo.

Riprendendo la metrica in funzione del tempo conforme

$$ds^2 = a^2(\tau)[-d\tau^2 + d\mathbf{x}^2] \quad (4.11)$$

si ricordi che in coordinate conformi le geodesiche nulle ($ds^2 = 0$) sono sempre ad angoli di 45, $d\tau = \pm\sqrt{d\mathbf{x}^2} \equiv \pm dr$.

Poichè la luce determina la struttura causale dello spaziotempo, questo fornisce un modo per studiare gli orizzonti nella cosmologia inflazionaria. Il fattore di scala evolve, per universi dominati rispettivamente da materia e radiazione, come

$$\begin{cases} \tau & \text{RD} \\ \tau^2 & \text{MD} \end{cases} \quad (4.12)$$

Se l'universo fosse stato dominato sempre da materia o sempre da radiazione, questo implicherebbe l'esistenza della singolarità del Big Bang a $\tau_i = 0$

$$a(\tau_i \equiv 0) = 0 \quad (4.13)$$

Il diagramma conforme corrispondente alla cosmologia standard del Big Bang è raffigurato in figura 6.2.

Il problema dell'orizzonte è apparente. Ciascun punto dello spaziotempo nel diagramma conforme ha un cono luce passato associato che definisce il suo passato causale.

Due punti su una data superficie a $\tau = \text{cost.}$ sono in contatto causale se i loro coni luce passati si intersecano al Big Bang, $\tau_i = 0$. Questo significa che la superficie di *last-scattering* (τ_{CMB}) consisteva di molte regioni causalmente sconnesse che non sono in equilibrio termico. L'uniformità della CMB su larga scala diventa dunque un problema importante. Durante l'inflazione ($H \approx \text{const.}$), il fattore di scala è pari a

$$a(\tau) = -\frac{1}{H\tau} \quad (4.14)$$

e la singolarità, $a = 0$, è spinta al passato infinito, $\tau_i \rightarrow -\infty$. Il fattore di scala (4.14) diventa infinito a $\tau = 0$. Questo perché è stato assunto uno spazio di de Sitter (ovvero l'analogo, nello spaziotempo di Minkowski, di una sfera per lo spazio euclideo) con $H = \text{const.}$, che significa che l'inflazione può continuare per sempre, con $\tau = 0$ corrispondente al futuro infinito $t \rightarrow +\infty$.

In realtà l'inflazione finisce ad un certo istante di tempo finito, e l'approssimazione (4.14), anche se valida a tempi iniziali, perde di validità in prossimità della sua fine. Quindi la superficie a $\tau = 0$ non è il Big Bang, ma la fine dell'inflazione. La singolarità iniziale è stata spostata arbitrariamente indietro nel tempo, in un tempo conforme $\tau \ll 0$, e i coni luce possono essere estesi attraverso il Big Bang apparente, così che punti apparentemente disconnessi siano in contatto causale.

In altre parole, per via dell'inflazione, c'è stato un tempo conforme prima della ricombinazione maggiore di quello che si era immaginato.

Capitolo 5

La fisica dell'inflazione

L'inflazione è un fenomeno fisico poco familiare: in una frazione di secondo l'universo è cresciuto esponenzialmente ad un ritmo accelerato.

Nella gravità di Einstein questo richiede una sorgente di pressione negativa o un'equivalente densità di energia costante negativa. In questo capitolo si descriveranno le condizioni fisiche in cui ciò può accadere.

5.1 Dinamica dei campi scalari

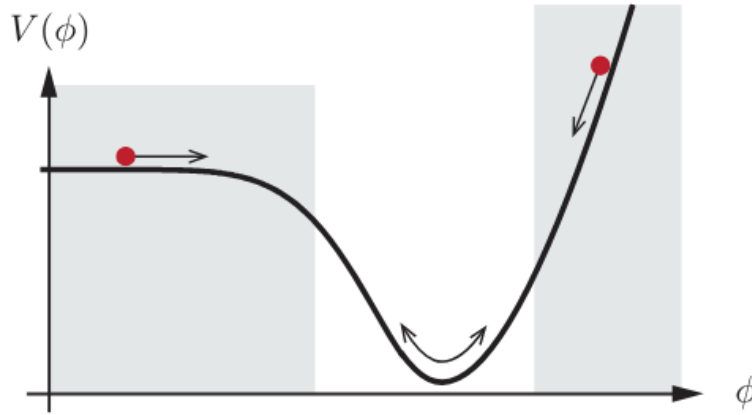


Figura 5.1: Esempio di un potenziale inflazionario *slow-roll* [14].

Il modello più semplice di inflazione include un singolo campo scalare, ϕ , l'inflatone. Non è specificata la natura fisica del campo ϕ , ma è utilizzato come parametro d'ordine (o orologio) per parametrizzare l'evoluzione temporale della densità di energia inflazionaria.

La dinamica di un campo scalare (minimamente) accoppiato alla gravità è governata dall'azione

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] = S_{EH} + S_\phi \quad (5.1)$$

Essa è la somma dell'azione gravitazionale Einstein-Hilbert, S_{EH} , e l'azione di un campo scalare con termine cinetico canonico, S_ϕ ; il potenziale $V(\phi)$ descrive la

interazioni del campo scalare con se stesso.

Il tensore energia-impulso per un campo scalare è

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi + V(\phi) \right) \quad (5.2)$$

L'equazione del moto è

$$\frac{\delta S_\phi}{\delta \phi} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \phi) + V_{,\phi} = 0 \quad (5.3)$$

dove $V_{,\phi} = \frac{dV}{d\phi}$.

Assumendo la metrica FRW per $g_{\mu\nu}$ e restringendosi ad un campo omogeneo $\phi(t, \mathbf{x}) \equiv \phi(t)$, il tensore energia-impulso assume la forma di quello per un fluido perfetto (2.37) con

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (5.4)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (5.5)$$

La risultante equazione di stato

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V} \quad (5.6)$$

mostra che un campo scalare può portare a pressione negativa ($w_\phi < 0$) ed espansione accelerata ($w_\phi < -1/3$) se l'energia potenziale V domina rispetto all'energia cinetica $\frac{1}{2} \dot{\phi}^2$.

La dinamica del campo scalare omogeneo e della geometria FRW è determinata dalle relazioni

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 \quad (5.7)$$

e

$$H^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (5.8)$$

Per grandi valori del potenziale, il campo risente di pressione di Hubble significativa, portata dal termine $H\dot{\phi}$.

5.2 Inflazione *slow-roll*

L'equazione dell'accelerazione per un universo dominato da un campo scalare omogeneo può essere scritta come segue

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho_\phi + 3p_\phi) = H^2(1 - \epsilon) \quad (5.9)$$

dove

$$\epsilon \equiv \frac{3}{2}(w_\phi + 1) = \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} \quad (5.10)$$

Il parametro di *slow-roll* ϵ può essere messo in relazione con l'evoluzione del parametro di Hubble

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d \ln H}{dN} \quad (5.11)$$

dove $dN = H dt$.

L'espansione accelerata avviene se $\epsilon < 1$. Il limite di de Sitter, $p_\phi \rightarrow -\rho_\phi$ corrisponde a $\epsilon \rightarrow 0$. In questo caso l'energia potenziale domina sulla cinetica

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \quad (5.12)$$

L'espansione accelerata sarà sostenuta per un periodo di tempo sufficientemente lungo solo se la derivata seconda rispetto al tempo di ϕ è sufficientemente piccola

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|, |V_{,\phi}| \quad (5.13)$$

questo richiede che un secondo parametro di *slow-roll* sia sufficientemente piccolo

$$\eta = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} = \epsilon - \frac{1}{2\epsilon} \frac{d\epsilon}{dN} \quad (5.14)$$

dove $|\eta| < 1$ assicura che la variazione frazionale di ϵ per *e-fold* sia piccola.

Le condizioni di *slow-roll*, $\epsilon, |\eta| < 1$, possono essere espresse come condizioni della forma del potenziale inflazionario

$$\epsilon_V(\phi) \equiv \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 \quad (5.15)$$

e

$$\eta_V \equiv M_{pl}^2 \frac{V_{,\phi\phi}}{V} \quad (5.16)$$

$$\epsilon_V, |\eta_V| \ll 1 \quad (5.17)$$

l'evoluzione di background è

$$H^2 \approx \frac{1}{3} V(\phi) \approx \text{const.} \quad (5.18)$$

$$\dot{\phi} \approx -\frac{V_{,\phi}}{3H} \quad (5.19)$$

e lo spaziotempo è approssimativamente di de Sitter

$$a(t) \sim e^{Ht} \quad (5.20)$$

I parametri ϵ_V e η_V sono chiamati parametri di *slow-roll* del potenziale, per distinguerli dai parametri di *slow-roll* di Hubble ϵ e η .

Nell'approssimazione di *slow-roll*, la relazione tra i parametri di *slow-roll* di Hubble e del potenziale è la seguente

$$\epsilon \approx \epsilon_V \quad \eta \approx \eta_V - \epsilon_V \quad (5.21)$$

L'inflazione termina quando le condizioni di *slow-roll* sono violate

$$\epsilon(\phi_{end}) \equiv 1 \quad \epsilon_V(\phi_{end}) \approx 1 \quad (5.22)$$

Il numero di *e-folds* prima che l'inflazione termini è

$$N(\phi) \equiv \ln \frac{a_{end}}{a} = \int_t^{t_{end}} H dt = \int_{\phi}^{\phi_{end}} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \approx \int_{\phi_{end}}^{\phi} \frac{V}{V_{,\phi}} d\phi \quad (5.23)$$

dove sono state utilizzate le relazioni delle equazioni (5.18) e (5.19). Il risultato (5.23) può essere scritto come

$$N(\phi) = \int_{\phi_{end}}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon}} \approx \int_{\phi_{end}}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon_V}} \quad (5.24)$$

Per risolvere il problema della piattezza è necessario che il numero totale di *e-folds* inflazionarie ecceda circa 60,

$$N_{tot} \equiv \ln \frac{a_{end}}{a_{start}} > 60 \quad (5.25)$$

Il valore preciso dipende dalla scala di energia dell'inflazione e i dettagli del riscaldamento dopo essa.

Le fluttuazioni osservate nella CMB sono create $N_{CMB} \approx 40 - 60$ *e-folds* prima della fine dell'inflazione (anche in questo caso il valore preciso dipende dai dettagli del riscaldamento e della storia termica post-inflazionaria dell'universo).

Il seguente vincolo restituisce il valore corrispondente del campo ϕ_{CMB}

$$\int_{\phi_{end}}^{\phi_{CMB}} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon_V}} = N_{CMB} \approx 40 - 60 \quad (5.26)$$

5.2.1 Inflazione $m^2\phi^2$

Si consideri il modello più semplice di inflazione: inflazione a campo singolo guidata da un termine di massa

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (5.27)$$

I parametri di *slow-roll* sono

$$\epsilon_V(\phi) = \eta_V(\phi) = 2 \left(\frac{M_{pl}}{\phi} \right)^2 \quad (5.28)$$

Per soddisfare le condizioni di *slow-roll* $\epsilon_V, |\eta_V| < 1$ si devono considerare valori super-Planckiani per l'inflatone

$$\phi > \sqrt{2}M_{pl} = \phi_{end} \quad (5.29)$$

La relazione tra il campo dell'inflatone e il numero di *e-folds* prima della fine dell'inflazione è

$$N(\phi) = \frac{\phi^2}{4M_{pl}^2} - \frac{1}{2} \quad (5.30)$$

Infine, le fluttuazioni osservate nella CMB sono create a

$$\phi_{CMB} = 2\sqrt{N_{CMB}}M_{pl} \sim 15M_{pl} \quad (5.31)$$

5.3 Riscaldamento

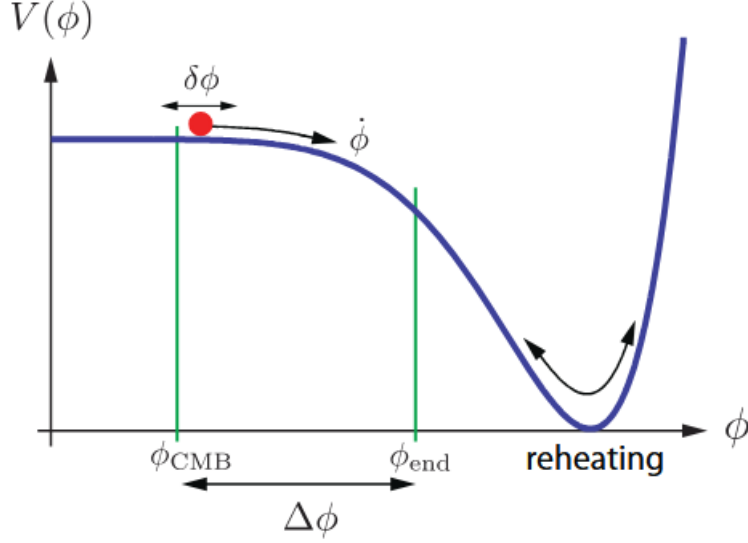


Figura 5.2: Andamento di un potenziale inflazionario [1]: durante il riscaldamento la densità di energia dell'inflazione è convertita in radiazione.

Durante l'inflazione la maggior parte della densità di energia nell'universo sta nella forma del potenziale dell'inflazione $V(\phi)$. L'inflazione termina quando il potenziale diventa più ripido e il campo dell'inflatone aumenta la sua energia cinetica. Questa viene trasferita alle particelle del Modello Standard tramite il processo di *riscaldamento*, che costituisce l'inizio del Big Bang caldo.

Dunque, dopo l'inflazione, il campo scalare inizia ad oscillare attorno al minimo del potenziale. Durante questa fase di oscillazioni coerenti, il campo agisce come materia senza pressione

$$\frac{d\bar{\rho}_\phi}{dt} + 3H\bar{\rho}_\phi = 0 \quad (5.32)$$

Per evitare che l'universo finisca per essere vuoto, l'inflatone deve accoppiarsi ai campi del modello standard: l'energia immagazzinata nel campo sarà trasformata in particelle ordinarie. Se il decadimento è lento (come nel caso in cui l'inflatone può decadere solo in fermioni), la densità di energia inflazionaria segue l'equazione

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\rho_\phi = -\Gamma_\phi\rho_\phi \quad (5.33)$$

dove Γ_ϕ parametrizza il rate di decadimento dell'inflatone.

Se l'inflatone può decadere in bosoni, infatti, il decadimento potrebbe essere molto rapido, coinvolgendo un meccanismo chiamato *risonanza parametrica*, causata da effetti di condensazione di Bose. Questo decadimento rapido è chiamato *preheating*. Le particelle prodotte dal decadimento dell'inflatone interagiscono poi, creando altre particelle tramite reazioni, e la zuppa di particelle risultante raggiungerà l'equilibrio termico ad una temperatura T_{rh} . Questa è determinata dalla densità di energia ρ_{rh} alla fine dell'epoca di riscaldamento. Necessariamente $\rho_{rh} < \rho_{\phi,E}$, dove $\rho_{\phi,E}$ è la densità di energia al termine dell'inflazione. Se il riscaldamento accade in tempi

lunghi, si potrebbe avere $\rho_{rh} \ll \rho_{\phi,E}$.

Il gas di particelle evolve, poi, fino a raggiungere uno stato termico di equilibrio tramite un processo detto *termalizzazione*. Tuttavia, è possibile che alcune particelle non raggiungano mai l'equilibrio termico, poiché le loro interazioni sono troppo deboli. In ogni caso, finché i momenti delle particelle sono molto più elevati delle loro masse, la densità di energia dell'universo si comporta come radiazione, indipendentemente dalla distribuzione spaziale dei momenti. Dopo la termalizzazione di barioni, fotoni e neutrini, l'era del Big Bang caldo ha inizio.

5.4 Modelli di inflazione

L'origine microscopica dell'inflazione è ancora un mistero. Alcune domande, come cosa sia l'inflatone, che forma abbia il potenziale inflazionario e perché l'universo sia iniziato in uno stato di alta energia restano senza risposta.

Si ritiene che l'inflazione sia avvenuta a scale di energia enormi (dell'ordine di $\sim 10^{15}$ GeV), molto lontane da quelle raggiungibili dagli acceleratori di particelle terrestri. Qualsiasi descrizione dell'inflazione, dunque, richiede un'estrapolazione considerevole delle leggi conosciute della fisica e, fino a poco tempo fa, solo una parametrizzazione fenomenologica della dinamica inflazionaria era possibile. Di recente sono stati fatti progressi, sia per quanto riguarda una descrizione della cosmologia in termini di teoria dei campi [15, 16], che di derivazione del potenziale inflazionario tramite la teoria delle stringhe [17]

In questo approccio, un potenziale inflazionario possibile $V(\phi)$ è postulato e le previsioni sperimentali sono computate sulla base di esso. Si vedrà che i dettagli sullo spettro di fluttuazione primordiale dipendono dalla forma precisa del potenziale.

5.4.1 Inflazione *slow-roll* a campo singolo

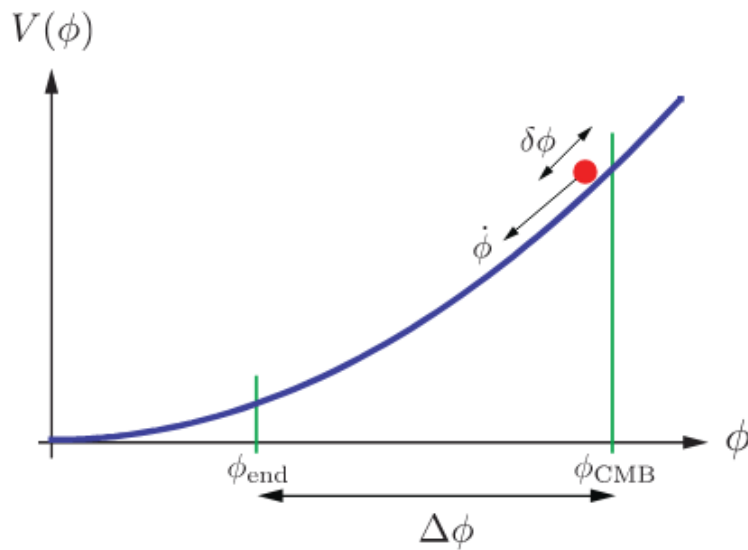


Figura 5.3: Inflazione a campo grande [1].

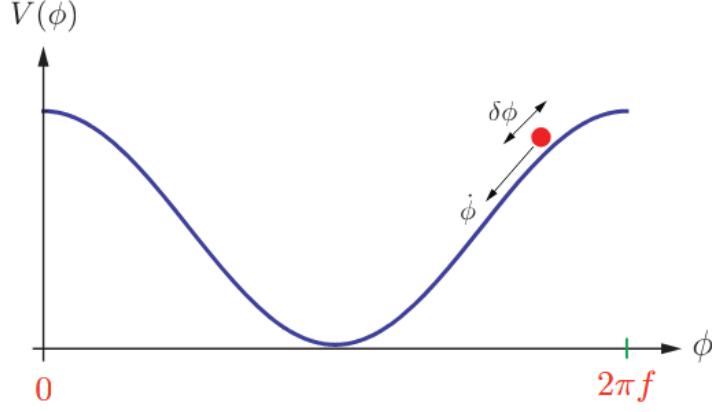


Figura 5.4: Inflazione naturale [1]. Se la periodicità $2\pi f$ è super-Planckiana il modello supporta naturalmente una grande ampiezza di onde gravitazionali.

La definizione di un modello inflazionario è data da una specificazione dell'azione dell'inflatone (ovvero i termini potenziale e cinetico) e il suo accoppiamento con la gravità.

Fin'ora è stato trattato il modello più semplice, l'inflazione *slow-roll* a campo singolo, caratterizzata dall'azione

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] \quad (5.34)$$

La dinamica del campo dell'inflatone, dal tempo in cui le fluttuazioni di CMB sono state create a ϕ_{CMB} alla fine dell'inflazione a ϕ_{end} , è determinata dalla forma del potenziale inflazionario $V(\phi)$.

Le diverse possibilità per $V(\phi)$ possono essere classificate in maniera utile determinando se permettono o meno al campo dell'inflatone di muoversi su una distanza, grande o piccola, $\Delta\phi \equiv \phi_{CMB} - \phi_{end}$.

1. Inflazione a campo piccolo

Nel modelli a campo piccolo, il campo si muove su una distanza piccola (sub-Planckiana): $\Delta\phi < M_{pl}$.

Il potenziale che genera l'evoluzione di campo piccolo spesso sorge dal meccanismo di rottura spontanea della simmetria, dove il campo si allontana da un punto di equilibrio instabile verso un vuoto.

Un esempio semplice è il potenziale di tipo Higgs

$$V(\phi) = V_0 \left[1 - \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^2 \right]^2 \quad (5.35)$$

Più in generale, i modelli a campo piccolo possono essere approssimati localmente tramite l'espansione seguente

$$V(\phi) = V_0 \left[1 - \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^p \right] + \dots \quad (5.36)$$

dove sono stati omessi i termini di ordine superiore, che diventano importanti in prossimità della fine dell'inflazione e durante il riscaldamento.

Storicamente, un potenziale importante è quello di Coleman-Weinberg

$$V(\phi) = V_0 \left[\left(\frac{\phi}{\mu} \right)^4 \left(\ln \left(\frac{\phi}{\mu} - \frac{1}{4} \right) \right) + \frac{1}{4} \right] \quad (5.37)$$

che sorge come potenziale per simmetrie radialmente indotte in teorie elettrodeboli e teorie unificate grandi.

Anche se il valore originario dei parametri V_0 e μ basati sulla teoria $SU(5)$ sono incompatibili con l'ampiezza piccola delle fluttuazioni inflazionarie, il potenziale di Coleman-Weinberg resta un modello fenomenologico popolare.

2. Inflazione a campo grande

Nei modelli a campo grande il campo dell'inflatone parte da valori del campo grandi e poi evolve a un minimo all'origine $\phi = 0$. Se l'evoluzione del campo è super-Planckiana, $\Delta\phi > M_{pl}$, l'onda gravitazionale prodotta dall'inflazione dovrebbe essere osservata nel futuro prossimo.

Il prototipo del modello a campo grande è l'inflazione caotica, dove un singolo termine monomiale domina il potenziale

$$V(\phi) = \lambda_p \phi^p \quad (5.38)$$

Per un potenziale di questo tipo i parametri di *slow-roll* sono piccoli per valori del campo super-Planckiani, $\phi \gg M_{pl}$ (si noti che le condizioni di *slow-roll* sono indipendenti dalla costante di accoppiamento λ_p).

Tuttavia, per via della piccola ampiezza delle fluttuazioni di densità, l'autoaccoppiamento dell'inflatone deve essere molto piccolo, $\lambda_p \ll 1$.

Questa condizione garantisce automaticamente che l'energia potenziale sia sub-Planckiana, $V \ll M_{pl}^4$, e gli effetti della gravità quantistica non siano necessariamente importanti.

Uno dei modelli più eleganti è l'inflazione naturale, dove il potenziale ha la seguente forma

$$V(\phi) = V_0 \left[\cos \left(\frac{\phi}{f} \right) + 1 \right] \quad (5.39)$$

Questo potenziale spesso sorge se il campo dell'inflatone è considerato essere un assione (ovvero una particella elementare).

In base al parametro f il modello può essere a campo piccolo o a campo grande. Tuttavia, è particolarmente allettante considerare l'inflazione naturale per variazioni di campo grande, $2\pi f > M_{pl}$, visto che, per gli assioni, una simmetria traslazionale può essere utilizzata per proteggere la forma del potenziale da termini correttivi, anche su range di campo grande.

5.4.2 Oltre l'inflazione a campo singolo *slow-roll*

Le possibilità per ottenere un'espansione inflazionaria sono svariate.

L'inflazione è un paradigma, un framework per una teoria dell'universo primordiale, ma non è una teoria unica. Un gran numero di modelli fenomenologici è stato proposto con diverse ragioni teoriche e predizioni osservative [18].

L'azione inflazionaria più semplice (5.34) può essere estesa in vari modi:

1. *Accoppiamento non-minimale con la gravità*

L'azione (5.34) è chiamata *minimalmente accoppiata*, nel senso che non c'è accoppiamento diretto tra il campo dell'inflatone e la metrica.

In principio si potrebbe immaginare un accoppiamento non-minimale tra l'inflatone e il gravitone, tuttavia, in pratica, teorie di accoppiamento non-minimale possono essere riscritte come teorie minimalmente accoppiate tramite una ridefinizione del campo.

2. *Gravità modificata*

Allo stesso modo, si può considerare la possibilità che la parte dell'azione di Einsein-Hilbert sia modificata ad alte energie.

Tuttavia, gli esempio più semplici per questa modifica della gravità, le teorie chiamate $f(R)$, possono essere trasformate in campi scalari minimalmente accoppiati con il potenziale $V(\phi)$.

3. *Termine cinetico non canonico*

L'azione (5.34) ha termine cinetico canonico

$$\mathcal{L}_\phi = X - V(\phi) \quad (5.40)$$

dove

$$X \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \quad (5.41)$$

l'inflazione può allora avvenire solo se il potenziale $V(\phi)$ è molto piatto.

In generale, tuttavia, si può immaginare che la teoria ad alta energia abbia campi con termini cinetici non canonici

$$\mathcal{L}_\phi = F(\phi, X) - V(\phi) \quad (5.42)$$

dove $F(\phi, X)$ è una qualche funzione del campo dell'inflatone e delle sue derivate.

Per azioni del tipo (5.42) è possibile che l'inflazione sia guidata dal termine cinetico e avvenga anche in presenza di un potenziale ripido.

4. *Presenza di più di un campo*

Se si permette a più di un campo di essere rilevante durante l'inflazione, allora le possibilità per la dinamica inflazionaria (e i meccanismi che producono le fluttuazioni) si espandono in maniera drammatica e la teoria perde gran parte del suo potere predittivo. Alcune possibilità di modelli inflazionari a più campi sono trattate in Ref.[19].

Capitolo 6

Conclusione

Il paradigma dell'inflazione sembra risolvere i problemi della cosmologia standard del Big Bang: il problema dell'orizzonte e il problema della piattezza sono riconducibili al fatto che, durante l'evoluzione dell'universo, il raggio comoviente di Hubble $(aH)^{-1}$ cresce monotonamente col tempo. Durante l'inflazione, invece, questo ha una temporanea decrescita.

Questo cambia la struttura dell'universo primordiale, rendendo il problema dell'orizzonte un fatto di estrapolazione dell'espansione FRW convenzionale a tempi arbitrariamente antichi.

Si è mostrato, tramite le equazioni di Einstein, che un raggio comoviente decrescente corrisponde ad un'espansione accelerata, poiché avviene in un universo con una componente di pressione negativa. Le tre condizioni equivalenti dell'inflazione trovate sono dunque

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{H^{-1}}{a} \right) < 0 \implies \frac{d^2 a}{dt^2} > 0 \implies p < -\frac{\rho}{3} \quad (6.1)$$

Vi sono attualmente numerosi modelli inflazionari teorici, che possono essere testati sperimentalmente utilizzando dati cosmologici presenti e futuri.

Una grande opportunità è data dal fatto che l'inflazione *slow-roll* a campo singolo predice risultati nulli per molti osservabili cosmologici, poiché è previsto che le fluttuazioni scalari primordiali siano invarianti in scala, gaussiane e adiabatiche in larga misura. Una rilevazione opposta a quanto predetto, cioè, escluderebbe definitivamente la possibilità di inflazione *slow-roll* a campo singolo.

Correzioni al modello inflazionario che permettono la violazione di queste previsioni richiedono interazioni con derivate di ordini superiori e/o più di un campo debole; queste correzioni sorgono spontaneamente nella teoria delle stringhe [1], che fornisce un framework promettente per comprendere tali interazioni [20,21].

6.1 Onde Gravitazionali

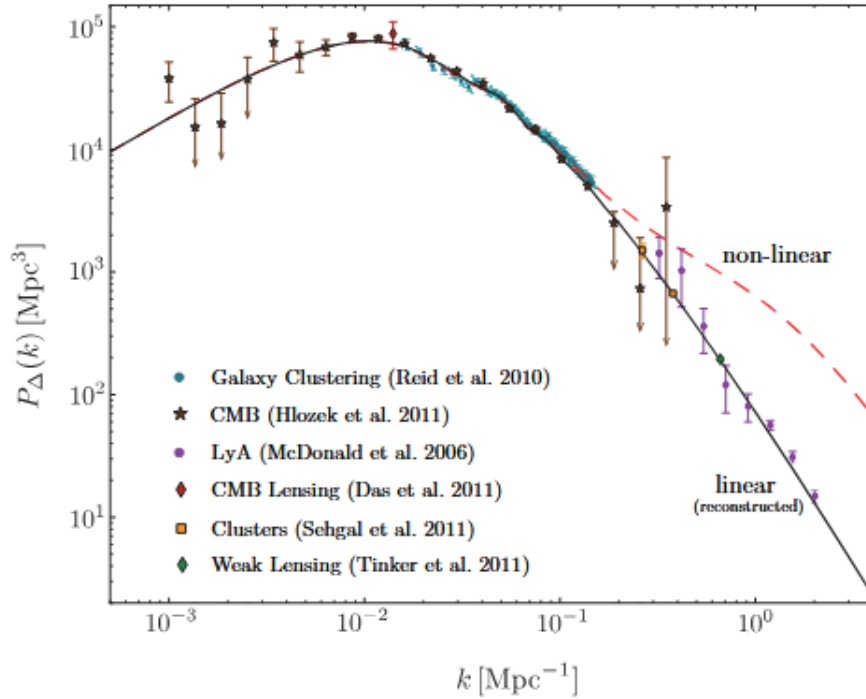


Figura 6.1: Spettro del momento angolare della materia [14].

Una delle più importanti predizioni dell'inflazione è costituita dallo spettro delle onde gravitazionali, che sono perturbazioni tensoriali della metrica spaziale. Queste evolvono diversamente per universi dominati dalla radiazione o dalla materia, portando ad uno spettro caratteristico del momento angolare della materia.

Un obiettivo della cosmologia osservativa è misurare tale componente tensoriale delle fluttuazioni primordiali. La sua ampiezza dipende dalla scala di energia dell'inflazione e non è dunque prevista precisamente in quanto varia tra i vari modelli, rendendone la rilevazione più complessa. Misurare queste oscillazioni rivelerebbe la scala di energia a cui l'inflazione è avvenuta, fornendo importanti informazioni sulla fisica che ha portato a questa espansione.

La maggior parte delle ricerche sulle onde gravitazionali si concentra sul loro effetto sulla polarizzazione della CMB, generata attraverso lo *scattering* del campo di radiazione anisotropo dagli elettroni liberi. La presenza di tali fluttuazioni, cioè, crea un'estensione anisotropa dello spaziotempo che induce un pattern di polarizzazione speciale, il *B-mode* pattern. Questo non può essere creato da fluttuazioni scalari ed è dunque un indicatore di tensori primordiali, le onde gravitazionali.

6.2 Anisotropia nella CMB

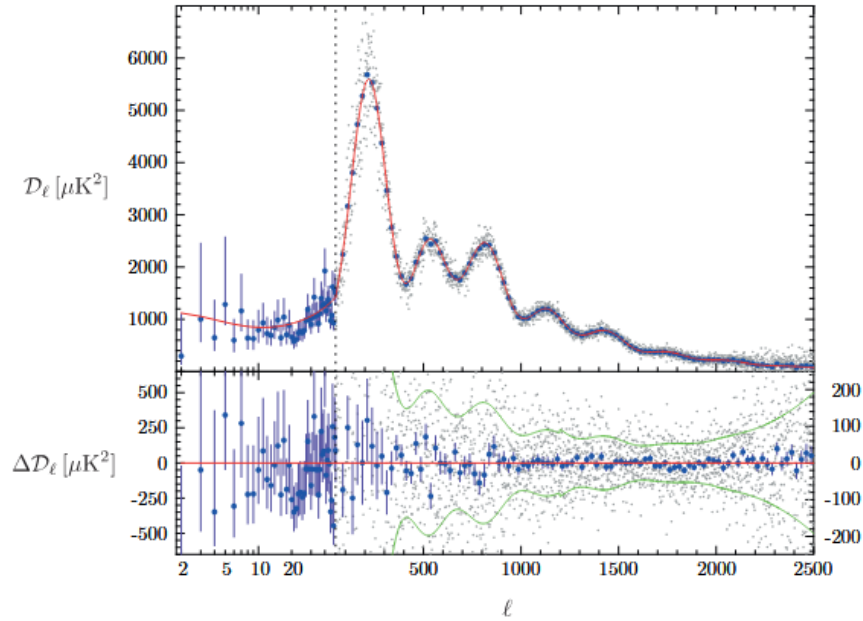


Figura 6.2: Spettro del momento angolare della CMB [14].

Fondamentali sono, infine, le fluttuazioni di temperatura nella radiazione cosmica di fondo, causate principalmente da fluttuazioni scalari della densità.

Oscillazioni acustiche nel plasma primordiale prima della ricombinazione portano alla struttura caratteristica dello spettro del momento angolare della CMB, la cui forma dipende dalle condizioni iniziali e dai parametri cosmologici.

Misure dello spettro della radiazione cosmica di fondo rivelerebbero dunque informazioni sia sulla geometria che sulla composizione dell'universo.

Numerosi esperimenti sono stati condotti e sono attualmente alla ricerca dei segnali predetti dall'inflazione, che costituisce un modello teorico valido di quanto avvenuto nei primi istanti dell'universo primordiale. L'importanza di queste investigazioni è enorme e va ben oltre la cosmologia stessa, avendo a che fare con la nostra comprensione delle interazioni fondamentali della natura.

Bibliografia

- [1] D. Baumann, *Tasi Lectures on Inflation*, (2012).
- [2] P.A.R. Ade et al., Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results, *Astron.Astrophys.* 571 (2014), A1.
- [3] A. H. Guth, *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, *Phys. Rev. D* 23, 347 (1981).
- [4] A. D. Linde, *A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems*, *Phys. Lett. B* 108, 389 (1982).
- [5] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* 48, 1220 (1982).
- [6] S.M. Carroll, *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*, Addison Wesley, (2004).
- [7] B. F. Schutz, *Gravity from the Ground Up, An Introductory Guide to Gravity and General Relativity*, Cambridge University Press, (2003).
- [8] B. F. Schutz, *Geometrical Methods in Mathematical Physics*, Cambridge University Press, (1980).
- [9] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press, (2009).
- [10] P.P. Coles and F. Lucchin, *Cosmology: The origin and evolution of cosmic structure*, Wiley, (2003).
- [11] WMAP, E. Komatsu et al., (2008), 0803.0547.
- [12] M. Kowalski et al., (2008), 0804.4142.
- [13] S. Dodelson, *Modern Cosmology* Amsterdam, Netherlands: Academic Press, (2003).
- [14] D. Baumann, ”*Cosmology, Part III*”, Lecture Notes, Cambridge.

- [15] C. Cheung, P. Criminelli, A. L. Fitzpatrick, J. Kaplan, L. Senatore, JHEP 03, 014 (2008), 0709.0293.
- [16] S. Weinberg, Phys. Rev. D77, 123541(2008).
- [17] D. Baumann and L. McAllister, (2009).
- [18] D. H. Lyth and A. Riotto, Phys. Rept. 314, 1 (1999), hep-ph/9807278.
- [19] D. Wands, Lect. Notes Phys. 738, 275 (2008), astro-ph/0702187.
- [20] M. Alishahiha, E. Silverstein, and D. Tong, Phys. Rev. D70, 123505 (2004), hep-th/0404084.
- [21] C. Gordon, D. Wands, B. A. Bassett, and R. Maartens, Phys. Rev. D63, 023506 (2001), astro-ph/0009131.