

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”
Corso di Laurea in Fisica

Formulazione Lagrangiana e Hamiltoniana della Relatività Generale

Relatore:
Prof. Roberto Casadio

Presentata da:
Domenico Sofrà

Anno Accademico 2024/2025

*Al prof. Andrea Naso
per avermi trasmesso la
passione per la mate-
matica, alla mia fami-
glia per il supporto e al-
le persone straordinarie
che ho incontrato lungo
il percorso.*

Sommario

Si mostra come riformulare la teoria della Relatività Generale in forma Lagrangiana e Hamiltoniana. A tale fine, vengono presentati i risultati della geometria differenziale necessari. Segue l'analisi dei vari contributi all'azione del campo gravitazionale. Si conclude con la presentazione del formalismo canonico, fondamento di una possibile teoria quantistica della gravità.

Indice

Notazione e Convenzioni	i
Introduzione	ii
1 Elementi di Geometria Differenziale	1
1.1 Vettori, Covettori e Tensori	2
1.2 Derivata Covariante	3
1.3 Geodetiche	5
1.4 Derivata di Lie	6
1.5 Planarità Locale	8
1.6 Determinante della Metrica	8
1.7 Curvatura	9
1.8 Superfici	11
1.9 Integrazione sulle Superfici	13
1.10 Teorema di Gauss-Stokes	14
1.11 Derivata Covariante Intrinseca	16
1.12 Curvatura Estrinseca	17
1.13 Equazioni di Gauss-Codazzi	18
1.14 Scalare di Ricci	20
2 Formulazione Lagrangiana	21
2.1 Formalismo Lagrangiano per una Teoria di Campo	21
2.2 Formalismo Lagrangiano per la Relatività Generale	22
2.3 Variazione del Termine di Hilbert	23
2.4 Variazione del Termine di Frontiera	25
2.5 Variazione del Termine di Massa-Energia	25
2.6 Termine non Dinamico	26
3 Formulazione Hamiltoniana	27
3.1 Decomposizione $3 + 1$	27
3.2 Formalismo Hamiltoniano per una Teoria di Campo	29
3.3 Foliatura della Frontiera	31
3.4 Azione del Campo Gravitazionale	33
3.5 Hamiltoniana del Campo Gravitazionale	35
3.6 Variazione dell'Hamiltoniana Gravitazionale	36
3.7 Equazioni di Hamilton	39
Conclusione	41

Notazione e Convenzioni

- Si adottano le unità di misura geometrizzate in cui la velocità della luce nel vuoto e la costante di Newton sono pari a uno, $c = G = 1$.
- La metrica di Minkowski è scelta con la convenzione $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.
- Gli indici rappresentati da lettere greche assumono i valori $\alpha = 0, 1, 2, 3$, mentre quelli latini $i = 1, 2, 3$.
- Si adotta la convenzione di Einstein che prevede l'omissione del simbolo di sommatoria per indici ripetuti, ad esempio $A^\alpha p_\alpha \equiv \sum_{\alpha=0}^3 A^\alpha p_\alpha$.
- le derivate parziali rispetto alle coordinate x^μ sono indicate dalla virgola, ad esempio:

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \equiv g_{\alpha\beta,\mu}.$$

- si usano le parentesi tonde per indicare la simmetrizzazione degli indici e le quadre per l'antisimmetrizzazione:

$$A_{\alpha(\beta\gamma)} = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta\gamma} + A_{\alpha\gamma\beta}),$$
$$A_{\alpha[\beta\gamma]} = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta\gamma} - A_{\alpha\gamma\beta}).$$

Introduzione

La Relatività Generale è la teoria moderna dello spazio, del tempo e della gravitazione, quest'ultima si rivela essere la manifestazione della *curvatura* dello spaziotempo causata dalla presenza di massa ed energia. Le basi teoriche vennero poste da Albert Einstein nel 1905 con i seguenti principi:

- **Principio della Relatività Ristretta:** le leggi fisiche assumono la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
- la velocità della luce è una costante indipendente dal sistema di riferimento.

Dal punto di vista matematico, questi si traducono nella richiesta che le leggi vengano espresse mediante quantità tensoriali invarianti per trasformazioni di Lorentz. Nasce così la Relatività Ristretta, gioiello della fisica moderna che, tuttavia, non include la gravitazione Newtoniana e risulta valida solamente per una classe particolare di osservatori. Nel tentativo di risolvere queste problematiche, il principio di relatività venne ampliato al:

- **Principio di Relatività Generale:** le leggi fisiche assumono la stessa forma in qualsiasi sistema di riferimento.

La sua implementazione richiede che si faccia chiarezza sul concetto di osservatore inerziale. Per fare ciò si ricorre al:

- **Modello standard delle particelle elementari:** l'intensità delle interazioni mediate da campi di gauge è governata da cariche di entrambi i segni.

Secondo il quale, preparando un apparato sperimentale con cariche totali nulle ci si assicura che l'unica forza agente sia l'attrazione gravitazionale. Esperimenti mostrano come questa non possa mai svanire, ma i suoi effetti risultino trascurabili per osservatori in *caduta libera*. Questo fatto è formalizzato dal:

- **Principio di Equivalenza:** il moto all'interno di un campo gravitazionale uniforme è indistinguibile da uno uniformemente accelerato.

Si giunge alla conclusione che gli osservatori inerziali coincidono con quelli in caduta libera, pertanto è sempre possibile stabilire un sistema di coordinate *locale* in cui la fisica venga descritta dalla Relatività Ristretta.

Per il principio di Relatività Generale, in tutti gli altri riferimenti, la forma delle leggi rimane invariata, ma le quantità tensoriali e le operazioni vengono reinterpretate nel senso della geometria differenziale in accordo con:

- **Principio di Covarianza Generale:** le leggi fisiche in un riferimento generico si ottengono dalle corrispondenti in Relatività Ristretta reinterpretando le quantità tensoriali e le operazioni nel senso della geometria differenziale.

Avendo formulato i principi fisici fondanti della teoria, non resta che addentrarsi nel mondo della geometria differenziale per acquisire familiarità con la sua struttura matematica.

Capitolo 1

Elementi di Geometria Differenziale

La geometria differenziale si fonda sulla nozione di *spazio topologico*. Sia $\mathcal{M}$ un insieme di "punti", lo spazio topologico $(\mathcal{M}, \{A_i\})$ è una famiglia di insiemi $A_i \subseteq \mathcal{M}$, detti *aperti*, contenente l'insieme vuoto $\emptyset$, tutto $\mathcal{M}$, le unioni arbitrarie e le intersezioni finite degli A_i .

Si definisce *mappa* un'applicazione da un elemento $D \subseteq \mathcal{M}$ della topologia in $\mathbb{R}^n$, ovvero $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Trattandosi di un'applicazione tra spazi topologici, questa si dice *continua* se mette in corrispondenza sottoinsiemi aperti di $\mathcal{M}$ con altrettanti di $\mathbb{R}^n$.

Una *carta* è una coppia (A, ϕ) , con $A \subseteq \mathcal{M}$ aperto e ϕ mappa continua ed invertibile spesso indicata con la notazione $\phi(P) = x^\alpha(P)$; in altre parole la mappa di una carta è un insieme di coordinate reali per A .

Un *atlante* è una collezione di carte capaci di ricoprire tutto $\mathcal{M}$: $\mathcal{A} = \{(A_i, \phi_i)\} : \mathcal{M} \subseteq \bigcup_i A_i$. Sia $P \in A_1 \cap A_2$, allora deve esistere una corrispondenza tra le coordinate $\phi_1(P)$ e $\phi_2(P)$ sotto forma di un'applicazione invertibile $f : \phi_1(A_1) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \phi_2(A_2) \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che:

$$(\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1) = \mathbb{I}, \quad (\phi_1^{-1} \circ f^{-1} \circ \phi_2) = \mathbb{I}, \quad (1.1)$$

dove $\mathbb{I}$ è l'identità in $\mathcal{M}$. Una *varietà* è una classe di equivalenza di atlanti e l'intero n che caratterizza il cambio di coordinate f si dice *dimensione* della varietà ed è lo stesso per ogni carta.

Una *curva* γ è un'applicazione continua da un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathcal{M}$:

$$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}. \quad (1.2)$$

La composizione con una mappa ϕ fornisce:

$$\phi \circ \gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.3)$$

che viene solitamente scritta come:

$$x^\alpha = x^\alpha(\lambda). \quad (1.4)$$

Una *funzione* f , definita su una varietà, è un'applicazione $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Dotando la varietà di carte, si recuperano i risultati del calcolo differenziale ordinario tramite la composizione $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Questo chiarisce l'uso della notazione:

$$f = f(x^\alpha) \quad (1.5)$$

che non distingue tra f e $f \circ \phi^{-1}$.

1.1 Vettori, Covettori e Tensori

Si consideri una curva γ parametrizzata da λ e descritta da coordinate $x^\alpha(\lambda)$.

Sia $f(x^\alpha)$ una funzione, il suo tasso di variazione lungo γ è:

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = f_{,\alpha} u^\alpha. \quad (1.6)$$

A seguito di un cambio di coordinate $f_{,\alpha}$ e $u^\alpha \equiv dx^\alpha/d\lambda$ diventano:

$$f_{,\alpha'} = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} f_{,\alpha} \quad (1.7)$$

e

$$u^{\alpha'} = \frac{dx^{\alpha'}}{d\lambda} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} u^\alpha. \quad (1.8)$$

Qualunque oggetto A^α che si trasformi come:

$$A^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha \quad (1.9)$$

si dice *vettore* o tensore di rango $(1,0)$ ed, in base al segno assunto dalla norma quadra $A^\alpha A_\alpha$, si distingue in:

$$A^\alpha A_\alpha \begin{cases} > 0 & \Rightarrow A^\alpha \text{ è di tipo spazio.} \\ = 0 & \Rightarrow A^\alpha \text{ è di tipo luce.} \\ < 0 & \Rightarrow A^\alpha \text{ è di tipo tempo.} \end{cases} \quad (1.10)$$

Ogni oggetto p_α tale che:

$$p_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} p_\alpha, \quad (1.11)$$

per via della medesima trasformazione, si dice *covettore* o tensore di rango $(0,1)$. La contrazione $A^\alpha p_\alpha$ tra un vettore e un covettore è invariante rispetto ad un cambio di coordinate e funge da prototipo di *scalare* o tensore di rango $(0,0)$. Generalizzando, un *tensore* di rango (n,m) è un oggetto $T^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta}$ che si trasforma come:

$$T^{\alpha'\dots\beta'}_{\gamma'\dots\delta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \dots \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \dots \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\delta'}} T^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta}, \quad (1.12)$$

l'intero n indica il numero di indici controvarianti(in alto) e m quelli covarianti(in basso); si noti che l'ordine è importante e generalmente $T^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} \neq T^{\beta\dots\alpha}_{\gamma\dots\delta}$.

Di particolare interesse è il tensore metrico $g_{\alpha\beta}$ che permette di definire il prodotto

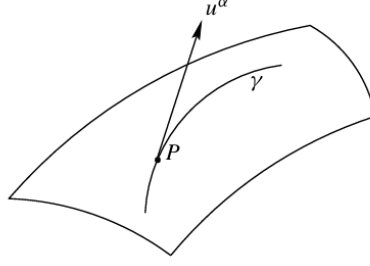


Figura 1.1: un vettore in un punto P è un elemento dello spazio tangente alla varietà in quel punto.

interno tra vettori e anche di alzare o abbassare gli indici come $A_\alpha \equiv g_{\alpha\beta} A^\beta$ e $p^\alpha \equiv g^{\alpha\beta} p_\beta$; dove $g^{\alpha\mu}$ è il *tensore metrico inverso* che soddisfa $g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta^\alpha_\beta$. Ad ogni punto P della varietà è associato uno spazio vettoriale detto *spazio tangente* (si veda figura 1.1) all'interno del quale è possibile eseguire somme e sottrazioni tra tensori. Operazioni del tipo $A^\alpha(P)B^\beta(Q)$ o $A^\alpha(Q) - A^\alpha(P)$, con Q, P punti distinti, non sono ammesse. Segue che, per essere definita, la differenziazione necessita di una regola sulla varietà che permetta di confrontare oggetti appartenenti a spazi tangenti distinti.

1.2 Derivata Covariante

Una tale regola è quella che permette il *trasporto parallelo* . Si consideri una curva γ (si veda figura 1.2) con u^α vettore tangente e A^α campo vettoriale definito in un suo intorno. Sia P un punto sulla curva di coordinate x^α e Q un altro contrassegnato da $x^\alpha + dx^\alpha$. L'operazione:

$$\begin{aligned} dA^\alpha &\equiv A^\alpha(Q) - A^\alpha(P) \\ &= A^\alpha(x^\beta + dx^\beta) - A^\alpha(x^\beta) \\ &= A^\alpha_{;\beta} dx^\beta \end{aligned} \quad (1.13)$$

non è tensoriale dal momento che, effettuando un cambio di coordinate, si trova:

$$A^{\alpha'}_{;\beta'} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} A^\alpha_{;\beta} + \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} A^\alpha \quad (1.14)$$

che non coincide con 1.12. Affinché lo sia, 1.13 dovrebbe avere la forma $DA^\alpha = A^\alpha_T(P) - A^\alpha(P)$, dove $A^\alpha_T(P)$ si ottiene "trasportando" A^α da Q a P lungo γ ; 1.13 si può scrivere come $DA^\alpha = dA^\alpha + \delta A^\alpha$ con $\delta A^\alpha \equiv A^\alpha_T(P) - A^\alpha(Q)$. A questo punto si introduce la regola per effettuare il trasporto parallelo richiedendo la linearità di δA^α in A^μ e dx^β così che $\delta A^\alpha = \Gamma^\alpha_{\mu\beta} A^\mu dx^\beta$; per qualche campo non tensoriale $\Gamma^\alpha_{\mu\beta}$, detto *connessione affine* , da specificare.

In questo modo $DA^\alpha = A^\alpha_{;\beta} dx^\beta + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} A^\mu dx^\beta$ e dividendo per $d\lambda$ si trova:

$$\frac{DA^\alpha}{d\lambda} = A^\alpha_{;\beta} u^\beta, \quad (1.15)$$

dove $u^\beta = dx^\beta/d\lambda$ è il vettore tangente alla curva e:

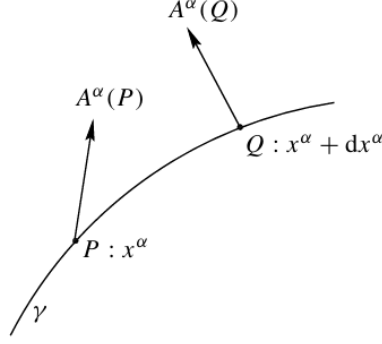


Figura 1.2: differenziazione di un tensore

$$A^\alpha_{;\beta} \equiv A^\alpha_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} A^\mu. \quad (1.16)$$

L'ultima equazione definisce la *derivata covariante* di un vettore A^α , altre notazioni in uso sono $A^\alpha_{;\beta} \equiv \nabla_\beta A^\alpha$ e $DA^\alpha/d\lambda \equiv \nabla_u A^\alpha$.

Il fatto che $A^\alpha_{;\beta}$ sia un tensore permette di dedurre le leggi di trasformazione della connessione, infatti, a partire da $\Gamma^\alpha_{\mu\beta} A^\mu = A^\alpha_{;\beta} - A^\alpha_{,\beta}$, è facile mostrare che:

$$\Gamma^{\alpha'}_{\mu'\beta'} A^{\mu'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \Gamma^\alpha_{\mu\beta} A^\mu - \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\mu \partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} A^\mu. \quad (1.17)$$

Esprimendo $A^{\mu'}$ in termini di A^μ ed essendo il campo vettoriale arbitrario:

$$\Gamma^{\alpha'}_{\mu'\beta'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \Gamma^\alpha_{\mu\beta} - \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\mu \partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}, \quad (1.18)$$

moltiplicando per $\partial x^\mu / \partial x^{\gamma'}$ e riordinando gli indici:

$$\Gamma^{\alpha'}_{\mu'\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \Gamma^\alpha_{\mu\beta} - \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\mu \partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}. \quad (1.19)$$

Da quest'ultima si evince come la connessione non sia un tensore per via della presenza del secondo termine a destra.

La differenziazione covariante può essere estesa ad altri tensori richiedendo che l'operatore D soddisfi la regola di derivazione del prodotto. Per i covettori:

$$d(A^\alpha p_\alpha) \equiv D(A^\alpha p_\alpha) = (DA^\alpha) p_\alpha + A^\alpha D(p_\alpha), \quad (1.20)$$

scrivendo l'espressione a sinistra come $A^\alpha_{,\beta} p_\alpha dx^\beta + A^\alpha p_{\alpha,\beta} dx^\beta$ ed usando 1.15 e 1.16 si trova:

$$\frac{Dp_\alpha}{d\lambda} = p_{\alpha;\beta} u^\beta, \quad (1.21)$$

dove:

$$p_{\alpha;\beta} \equiv p_{\alpha,\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} p_\mu. \quad (1.22)$$

La procedura si generalizza ad un tensore di rango arbitrario. Ad esempio, la derivata covariante di un tensore di rango (1, 1) è:

$$T^\alpha_{\beta;\gamma} = T^\alpha_{\beta,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} T^\mu_\beta - \Gamma^\mu_{\beta\gamma} T^\alpha_\mu, \quad (1.23)$$

ovvero compare un termine di connessione per ogni indice: positivo se l'indice è controvariante e negativo se covariante.

Nella teoria della relatività generale si adotta una connessione *simmetrica e compatibile* con la metrica:

$$\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}, \quad g_{\alpha\beta;\gamma} = 0, \quad (1.24)$$

proprietà che derivano dal principio di equivalenza. Le condizioni precedenti implicano:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (g_{\mu\beta;\gamma} + g_{\mu\gamma;\beta} - g_{\beta\gamma;\mu}) \quad (1.25)$$

e la connessione è interamente determinata dalla metrica; in questo contesto i simboli $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ sono noti come *simboli di Christoffel*.

Un campo tensoriale $T_{\beta\dots}^{\alpha\dots}$ è trasportato parallelamente lungo una curva γ , se la sua derivata covariante risulta nulla: $DT_{\beta\dots}^{\alpha\dots}/d\lambda = T_{\beta\dots;\mu}^{\alpha\dots} u^{\mu} = 0$.

1.3 Geodetiche

Sia γ una curva descritta dalle relazioni $x^{\alpha}(\lambda)$ e siano P e Q due suoi punti, la distanza tra questi può essere calcolata come:

$$\ell = \int_P^Q \sqrt{\pm g_{\alpha\beta} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta}} d\lambda, \quad (1.26)$$

dove $\dot{x}^{\alpha} \equiv dx^{\alpha}/d\lambda$. All'interno della radice quadrata, il segno è positivo(negativo) se la curva è di tipo spazio(tempo); sono escluse quelle di tipo luce.

La curva che minimizza il funzionale 1.26, detta *geodetica*, si ottiene sostituendo $L(x^{\mu}, \dot{x}^{\mu}) = (\pm g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu})^{1/2}$ nelle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}} = 0. \quad (1.27)$$

I calcoli mostrano che le $x^{\alpha}(\lambda)$ devono soddisfare le equazioni differenziali:

$$\ddot{x}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} \dot{x}^{\gamma} = \kappa(\lambda) \dot{x}^{\alpha}, \quad (1.28)$$

dove $\kappa \equiv d \ln L / d\lambda$. L'equazione precedente può anche essere scritta come $u^{\alpha}_{;\beta} u^{\beta} = \kappa u^{\alpha}$, dove $u^{\alpha} = \dot{x}^{\alpha}$ è il vettore tangente alla geodetica. Una scelta particolarmente utile per la parametrizzazione è il *tempo proprio* τ , se la geodetica è di tipo tempo, oppure la *distanza propria* s , se di tipo spazio. Poiché $d\tau^2 = -g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$ per le prime e $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$ per le seconde, $L = 1$ in entrambi i casi; ciò implica $\kappa = 0$ e 1.28 diventa:

$$\ddot{x}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} \dot{x}^{\gamma} = 0, \quad (1.29)$$

oppure $u^{\alpha}_{;\beta} u^{\beta} = 0$, dalla quale si evince che il vettore tangente è trasportato parallelamente a se stesso. Le equazioni 1.29 sono invarianti per riparametrizzazioni del tipo $\lambda \rightarrow \lambda' = a\lambda + b$ con a, b costanti, parametri legati a s e τ da queste trasformazioni si dicono *affini*. A partire da 1.28 è sempre possibile introdurre un nuovo parametro λ^* legato al precedente tramite:

$$\frac{d\lambda^*}{d\lambda} = \exp \left[\int^{\lambda} \kappa(\lambda') d\lambda' \right] \quad (1.30)$$

e tale che l'equazione delle geodetiche assuma la forma 1.29. Lungo una geodetica, la quantità scalare $\varepsilon = u^\alpha u_\alpha$ è una costante infatti:

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = (u^\alpha u_\alpha)_{;\beta} u^\beta = (u^\alpha_{;\beta} u^\beta) u_\alpha + u^\alpha (u_{\alpha;\beta} u^\beta) = 0. \quad (1.31)$$

L'importanza delle geodetiche in Relatività Generale risiede nel fatto che si tratta delle traiettorie seguite dalle particelle in caduta libera. Infatti, indicando con u^α la loro quadrivelocità, in un riferimento comovente, il moto deve essere rettilineo uniforme per il principio di relatività generale:

$$0 = \gamma^2 \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = u^\alpha_{;\mu} u^\mu, \quad (1.32)$$

dato che $\gamma\tau = x^0 \equiv t$, dove $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ è l'usuale fattore relativistico per una particella in moto con velocità costante $\vec{u} = d\vec{x}/dt$ e $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu,\beta} = 0$ nel riferimento scelto.

1.4 Derivata di Lie

Nella sezione precedente è stata definita la derivata covariante introducendo una legge, detta connessione, per trasportare parallelamente tensori sulla varietà, ma in geometria differenziale è possibile un'altra nozione di derivabilità. Si consideri una curva γ con vettore tangente $u^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ e un campo vettoriale A^α definito in un suo intorno (si veda nuovamente figura 1.2). Come prima, il punto P sarà dotato delle coordinate x^α , mentre il punto Q di $x^\alpha + dx^\alpha$. L'equazione:

$$x'^\alpha \equiv x^\alpha + dx^\alpha = x^\alpha + u^\alpha d\lambda \quad (1.33)$$

può essere interpretata come una trasformazione infinitesima dal sistema x a x' per via della quale, il vettore A^α diventa:

$$\begin{aligned} A'^\alpha(x') &= \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta(x) \\ &= (\delta^\alpha_\beta + u^\alpha_{;\beta} d\lambda) A^\beta(x) \\ &= A^\alpha(x) + u^\alpha_{;\beta} A^\beta(x) d\lambda, \end{aligned} \quad (1.34)$$

ovvero:

$$A'^\alpha(Q) = A^\alpha(P) + u^\alpha_{;\beta} A^\beta(P) d\lambda. \quad (1.35)$$

Il valore del campo vettoriale $A^\alpha(Q)$ può essere espresso come:

$$\begin{aligned} A^\alpha(Q) &= A^\alpha(x + dx) \\ &= A^\alpha(x) + A^\alpha_{;\beta}(x) dx^\beta \\ &= A^\alpha(P) + u^\beta A^\alpha_{;\beta}(P) d\lambda \end{aligned} \quad (1.36)$$

che in generale non coincide con $A'^\alpha(Q)$. La loro differenza definisce la *derivata di Lie* del campo A^α lungo la curva γ :

$$\mathcal{L}_u A^\alpha(P) \equiv \frac{A^\alpha(Q) - A'^\alpha(Q)}{d\lambda}. \quad (1.37)$$

Combinando le ultime tre equazioni si trova:

$$\mathcal{L}_u A^\alpha = A^\alpha_{;\beta} u^\beta - u^\alpha_{;\beta} A^\beta. \quad (1.38)$$

La derivata $\mathcal{L}_u A^\alpha$ è un tensore, infatti 1.38 è equivalente a:

$$\mathcal{L}_u A^\alpha = A^\alpha_{;\beta} u^\beta - u^\alpha_{;\beta} A^\beta \quad (1.39)$$

la cui natura tensoriale è evidente. L'operazione così definita può essere estesa facilmente agli scalari come $\mathcal{L}_u f \equiv df/d\lambda = f_{;\alpha} u^\alpha$, ai covettori:

$$\mathcal{L}_u p_\alpha = p_{\alpha;\beta} u^\beta + u^\beta_{;\alpha} p_\beta = p_{\alpha;\beta} u^\beta + u^\beta_{;\alpha} p_\beta, \quad (1.40)$$

e ai tensori di rango $(1, 1)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u T^\alpha_\beta &= T^\alpha_{\beta;\mu} u^\mu - u^\alpha_{;\mu} T^\mu_\beta + u^\mu_{;\beta} T^\alpha_\mu \\ &= T^\alpha_{\beta;\mu} u^\mu - u^\alpha_{;\mu} T^\mu_\beta + u^\mu_{;\beta} T^\alpha_\mu, \end{aligned} \quad (1.41)$$

ulteriori generalizzazioni sono ovvie. Si può verificare che la derivata di Lie soddisfa la legge di derivazione del prodotto:

$$\mathcal{L}_u (A^\alpha p_\beta) = (\mathcal{L}_u A^\alpha) p_\beta + A^\alpha (\mathcal{L}_u p_\beta). \quad (1.42)$$

Un campo tensoriale $T^\alpha_{\beta\dots}$ si dice *Lie dragged* lungo γ , con vettore tangente u^α , se la sua derivata di Lie è identicamente nulla: $\mathcal{L}_u T^\alpha_{\beta\dots} = 0$. Scegliendo un sistema di coordinate nel quale x^1, x^2 e x^3 sono costanti lungo la curva e $x^0 \equiv \lambda$:

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \stackrel{*}{=} \delta^\alpha_0, \quad (1.43)$$

dove il simbolo " $\stackrel{*}{=}$ " indica che l'espressione precedente è valida solamente in un riferimento particolare. Segue che $u^\alpha_{;\beta} \stackrel{*}{=} 0$, così che:

$$\mathcal{L}_u T^\alpha_{\beta\dots} \stackrel{*}{=} T^\alpha_{\beta\dots;\mu} u^\mu \stackrel{*}{=} \frac{\partial}{\partial x^0} T^\alpha_{\beta\dots}. \quad (1.44)$$

Se $\mathcal{L}_u T^\alpha_{\beta\dots} = 0$, dunque se un tensore è Lie dragged lungo γ nella direzione u^α , è possibile trovare delle coordinate nelle quali $u^\alpha \stackrel{*}{=} \delta^\alpha_0$ e $T^\alpha_{\beta\dots} \stackrel{*}{=} 0$. Viceversa, se le componenti di un tensore non dipendono da una coordinata particolare x^0 , allora la derivata di Lie nella direzione di u^α si annulla.

Se il tensore considerato è quello metrico si trova $\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = 0$ con $\xi \stackrel{*}{=} \delta^\alpha_0$ e il vettore ξ^α si dice *vettore di Killing*.

Affinchè ξ^α sia di Killing deve soddisfare:

$$0 = \mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} \quad (1.45)$$

e il tensore $\xi_{\alpha;\beta}$ è antisimmetrico se ξ^α è di Killing. I vettori di Killing permettono di determinare delle costanti del moto lungo le geodetiche:

$$\frac{d}{d\lambda} (u^\alpha \xi_\alpha) = (u^\alpha \xi_\alpha)_{;\beta} u^\beta = u^\alpha_{;\beta} u^\beta \xi_\alpha + \xi_{\alpha;\beta} u^\alpha u^\beta = 0. \quad (1.46)$$

A destra, il primo termine si annulla in virtù dell'equazione delle geodetiche e il secondo svanisce a causa della contrazione tra $\xi_{\alpha;\beta}$ antisimmetrico e $u^\alpha u^\beta$ simmetrico.

1.5 Planarità Locale

Per ogni punto P dello spaziotempo è sempre possibile trovare un sistema di coordinate $x^{\alpha'}$ tale che:

$$g_{\alpha'\beta'}(P) = \eta_{\alpha'\beta'}, \quad \Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'}(P) = 0, \quad (1.47)$$

dove $\eta_{\alpha'\beta'} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ è la metrica di Minkowski; un tale riferimento è detto *localmente Lorentziano*. Si noti come non sia possibile annullare le derivate prime della connessione in uno spaziotempo curvo. L'interpretazione fisica della planarità locale è fornita dal principio di equivalenza: osservatori in caduta libera non percepiscono gli effetti del campo gravitazionale nelle immediate vicinanze. Per ricavare la 1.47 si consideri un secondo riferimento x^α e si assuma, senza perdita di generalità, che il punto P sia l'origine di entrambi. Le coordinate sono legate tra loro da:

$$\begin{aligned} x^{\alpha'} &= A_{\beta'}^{\alpha'} x^\beta + O(x^2), \\ x^\alpha &= A_{\beta'}^\alpha x^{\beta'} + O(x'^2), \end{aligned} \quad (1.48)$$

con $A_{\beta'}^{\alpha'}$ e $A_{\beta'}^\alpha$ matrici ad elementi costanti che soddisfano:

$$A_{\mu}^{\alpha'} A_{\beta'}^{\mu} = \delta_{\beta'}^{\alpha'}, \quad A_{\mu'}^{\alpha} A_{\beta}^{\mu'} = \delta_{\beta}^{\alpha}. \quad (1.49)$$

A seguito della trasformazione $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$, la metrica diventa:

$$g_{\alpha'\beta'}(P) = A_{\alpha'}^\alpha A_{\beta'}^\beta g_{\alpha\beta}(P) \quad (1.50)$$

e ponendo $g_{\alpha'\beta'}(P) = \eta_{\alpha'\beta'}$ si ottiene un sistema di 10 equazioni per i 16 elementi di $A_{\alpha'}^\alpha$. Questo ammette una soluzione unica una volta fissati i rimanenti 6 che specificano una trasformazione di Lorentz (3 parametri per i boost e altrettanti per le rotazioni).

Avendo determinato $A_{\alpha'}^\alpha$ si trova $A_{\alpha}^{\alpha'}$ per inversione. Al secondo ordine 1.48 diventa:

$$x^{\alpha'} = A_{\beta}^{\alpha'} x^\beta + \frac{1}{2} B_{\beta\gamma}^{\alpha'} x^\beta x^\gamma + O(x^3), \quad (1.51)$$

per coefficienti $B_{\beta\gamma}^{\alpha'}$ costanti e simmetrici nei simboli covarianti. Ricordando che i simboli di Christoffel si trasformano secondo:

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'}(P) = A_{\alpha'}^\alpha A_{\beta'}^\beta A_{\gamma'}^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(P) - B_{\beta'\gamma}^{\alpha'} A_{\beta'}^\beta A_{\gamma'}^\gamma, \quad (1.52)$$

la connessione $\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'}(P)$ si annulla quando:

$$B_{\beta\gamma}^{\alpha'} = A_{\alpha'}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(P). \quad (1.53)$$

1.6 Determinante della Metrica

La quantità $\sqrt{-g}$, con $g \equiv \det[g_{\alpha\beta}]$, compare frequentemente in geometria differenziale. Il calcolo differenziale ordinario, infatti, prescrive che, a seguito di un cambio di coordinate $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}(x^\alpha)$, l'elemento di volume infinitesimo si trasforma

come $d^4x = Jd^4x'$; dove $J = \det[\partial x^\alpha / \partial x'^\alpha]$ è lo Jacobiano. La metrica nel nuovo riferimento è:

$$g_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} g_{\alpha\beta} \quad (1.54)$$

e ricordando che il determinante del prodotto di matrici è uguale al prodotto dei determinanti si conclude che $g' = gJ^2$.

Se x'^α è localmente Lorentziano, $g' = -1$ e l'elemento di volume quadridimensionale $d^4x' = J^{-1}d^4x = \sqrt{g/g'}d^4x$ si scrive come:

$$d^4x' = \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.55)$$

Di seguito si ricaverà il risultato particolarmente utile:

$$\Gamma^\mu_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g})_{,\alpha}. \quad (1.56)$$

Per la dimostrazione si consideri, data una matrice M , la variazione di $\ln |\det M|$ indotta da quella degli elementi di M :

$$\begin{aligned} \delta \ln |\det M| &\equiv \ln |\det(M + \delta M)| - \ln |\det M| \\ &= \ln \frac{\det(M + \delta M)}{\det M} \\ &= \ln \det M^{-1}(M + \delta M) \\ &= \ln \det(1 + M^{-1}\delta M) \end{aligned} \quad (1.57)$$

e ricorrendo all'identità $\det(1 + \epsilon) = 1 + \text{Tr } \epsilon + O(\epsilon^2)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta \ln |\det M| &= \ln(1 + \text{Tr } M^{-1}\delta M) \\ &= \text{Tr } M^{-1}\delta M. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Sostituendo il tensore metrico al posto di M si giunge a $\delta \ln |g| = g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}$ o:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \ln |g| = g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu}, \quad (1.59)$$

questo dimostra l'equazione 1.56 dalla quale si ricava la *formula della divergenza* per un campo vettoriale A^α :

$$A^\alpha_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} A^\alpha)_{,\alpha}; \quad (1.60)$$

un risultato analogo vale per campi tensoriali antisimmetrici $B^{\alpha\beta}$:

$$B^{\alpha\beta}_{;\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} B^{\alpha\beta})_{,\beta}. \quad (1.61)$$

1.7 Curvatura

Il tensore di Riemann $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ è definito dalla relazione:

$$A^\mu_{;\alpha\beta} - A^\mu_{;\beta\alpha} = -R^\mu_{\nu\alpha\beta} A^\nu, \quad (1.62)$$

valida per qualsiasi campo vettoriale A^α . Sviluppando le derivate covarianti nell'equazione precedente si trova:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\mu\delta} \Gamma^\mu_{\beta\gamma} \quad (1.63)$$

che risulta antisimmetrica negli ultimi due indici covarianti. Le altre proprietà di simmetria si possono stabilire valutando $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ in un riferimento localmente Lorentziano:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} \stackrel{*}{=} \frac{1}{2} (g_{\alpha\delta,\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta}) \quad (1.64)$$

dalla quale seguono:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \quad (1.65)$$

e:

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} + R_{\mu\gamma\alpha\beta} + R_{\mu\beta\gamma\alpha} = 0; \quad (1.66)$$

valide in un riferimento qualsiasi.

Il tensore di Riemann soddisfa, in aggiunta alle *identità di Bianchi*:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta;\gamma} + R_{\mu\nu\gamma\alpha;\beta} + R_{\mu\nu\beta\gamma;\alpha} = 0, \quad (1.67)$$

le relazioni:

$$p_{\mu;\alpha\beta} - p_{\mu;\beta\alpha} = R^\nu_{\mu\alpha\beta} p_\nu \quad (1.68)$$

e:

$$T^\mu_{\nu;\alpha\beta} - T^\mu_{\nu;\beta\alpha} = -R^\mu_{\lambda\alpha\beta} T^\lambda_\nu + R^\lambda_{\nu\alpha\beta} T^\mu_\lambda. \quad (1.69)$$

Contrazioni di $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$ producono il tensore simmetrico *di Ricci* $R_{\alpha\beta}$ e lo *scalare di Ricci* R :

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu_{\alpha\mu\beta}, \quad R = R^\alpha_\alpha \quad (1.70)$$

che compongono il *tensore di Einstein*:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}; \quad (1.71)$$

anche questo simmetrico. Da 1.67 seguono:

$$G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0, \quad (1.72)$$

note come identità di Bianchi contratte. Le equazioni di campo di Einstein:

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta} \quad (1.73)$$

legano la curvatura dello spaziotempo, descritta da $G^{\alpha\beta}$, al contenuto di massa ed energia del *tensore energia-impulso* $T^{\alpha\beta}$. L'equazione 1.72 implica $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$ che formalizza la conservazione dell'energia in uno spaziotempo curvo. Per via della simmetria di $G^{\alpha\beta}$ e delle identità di Bianchi, solamente 6 delle 16 equazioni 1.73 sono indipendenti e la metrica è determinata a meno di quattro costanti arbitrarie dovute alla libertà nella scelta del riferimento. Le equazioni di campo si possono anche riscrivere nella forma:

$$R^{\alpha\beta} = 8\pi \left(T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g^{\alpha\beta} \right), \quad (1.74)$$

dove $T \equiv T^\alpha_\alpha$ è la traccia del tensore energia-impulso.

1.8 Superfici

In una varietà spaziotemporale quadridimensionale, una *superficie* Σ è una sottovarietà tridimensionale descritta da restrizioni sulle coordinate:

$$\Phi(x^\alpha) = 0, \quad (1.75)$$

oppure tramite equazioni parametriche:

$$x^\alpha = x^\alpha(y^a); \quad (1.76)$$

dove y^a ($a = 1, 2, 3$) sono coordinate intrinseche a Σ .

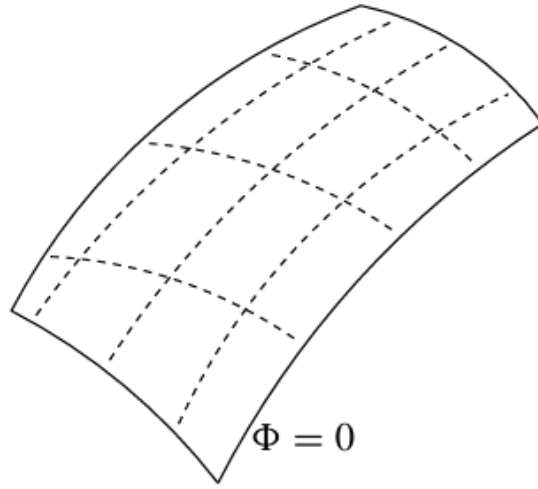


Figura 1.3: Una superficie tridimensionale nello spaziotempo.

Il vettore $\Phi_{,a}$ è normale alla superficie dal momento che il valore di Φ cambia solamente lungo una direzione ortogonale ad essa. Un *versore normale* n_α , diretto nella direzione di Φ crescente ($n^\alpha \Phi_{,\alpha} > 0$), si può definire, se $n^\alpha n_\alpha \equiv \varepsilon \neq 0$, come:

$$n_\alpha = \frac{\varepsilon \Phi_{,\alpha}}{|g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu}|^{1/2}}. \quad (1.77)$$

Ciò non è possibile se Σ è di tipo luce perché $g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} = 0$ ed in questo caso si sceglie:

$$k_\alpha = -\Phi_{,\alpha} \quad (1.78)$$

come vettore normale; il segno negativo garantisce che k^α sia diretto verso il futuro quando Φ aumenta nella stessa direzione. A partire da $k_{\alpha;\beta} k^\beta = \Phi_{;\alpha\beta} \Phi^{,\beta} = \Phi_{;\beta\alpha} \Phi^{,\beta} = \frac{1}{2}(\Phi_{,\beta} \Phi^{,\beta})_{;\alpha}$ si dimostra che k^α deve essere tangente alle geodetiche di tipo luce su Σ : essendo $(\Phi_{,\beta} \Phi^{,\beta})$ identicamente nullo sulla superficie, il suo gradiente deve essere diretto lungo k^α così che $(\Phi_{,\beta} \Phi^{,\beta})_{;\alpha} = 2\kappa k_\alpha$; per qualche scalare κ .

Si conclude che il vettore normale soddisfa:

$$k^\alpha_{;\beta} k^\beta = \kappa k^\alpha \quad (1.79)$$

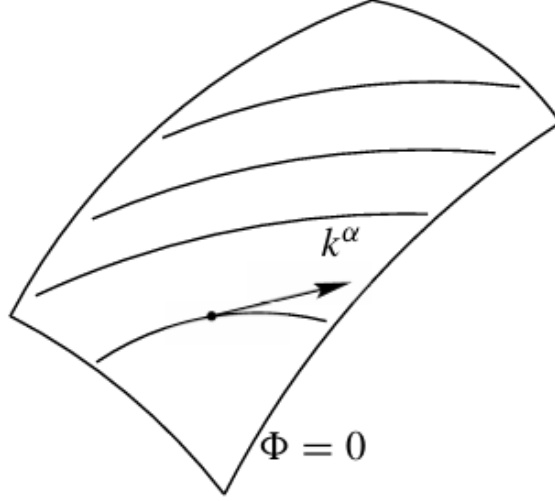


Figura 1.4: Curve generatrici su una superficie di tipo luce.

che coincide con 1.28 e la superficie è generata da geodetiche di tipo luce con vettore tangente k^α . Risulta conveniente dotare Σ di un sistema di coordinate composto dal parametro λ e θ^A ($A = 2, 3$) in modo da poter scrivere:

$$y^a = (\lambda, \theta^A), \quad (1.80)$$

variare λ mantenendo θ^A costanti produce spostamenti lungo le generatrici, nel caso contrario quelli ortogonali alle curve.

A partire dalle equazioni parametriche 1.76 si ricavano i vettori:

$$e_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \quad (1.81)$$

tangenti a Σ ($e_a^\alpha k_\alpha = 0$, se di tipo luce e $e_a^\alpha n_\alpha = 0$ altrimenti) e gli intervalli infinitesimi sono descritti da:

$$\begin{aligned} ds_\Sigma^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} dy^a \right) \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} dy^b \right) \\ &= h_{ab} dy^a dy^b, \end{aligned} \quad (1.82)$$

dove:

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \quad (1.83)$$

è la *metrica indotta*, nota anche come *prima forma fondamentale*, sulla superficie. Questa si comporta come uno scalare rispetto alle trasformazioni $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$ delle coordinate spaziotemporali, ma come un tensore per trasformazioni $y^a \rightarrow y^{a'}$ di quelle intrinseche; oggetti di questo si dicono *tre-tensori*.

Le relazioni precedenti si semplificano quando la superficie considerata è di tipo luce poiché da 1.80 seguono $e_1^\alpha = (\partial x^\alpha / \partial \lambda)_{\theta^A} \equiv k^\alpha$, $h_{11} = g_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0$ e $h_{1A} = g_{\alpha\beta} k^\alpha e_A^\beta = 0$; essendo $e_A^\alpha \equiv (\partial x^\alpha / \partial \theta^A)_\lambda$ ortogonale a k^α per costruzione. In questo caso dunque:

$$ds_\Sigma^2 = \sigma_{AB} d\theta^A d\theta^B \quad (1.84)$$

con:

$$\sigma_{AB} = g_{\alpha\beta} e_A^\alpha e_B^\beta, \quad e_A^\alpha = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta^A} \right)_\lambda \quad (1.85)$$

e la metrica indotta σ_{AB} è un *due-tensore*.

Per concludere, la metrica inversa si può decomporre come:

$$g^{\alpha\beta} = \varepsilon n^\alpha n^\beta + h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (1.86)$$

nota come relazione di completezza. Per Σ di tipo luce si introduce un campo vettoriale ausiliario N^α tale che $N_\alpha k^\alpha = -1$, $N_\alpha e_A^\alpha = 0$ e l'equazione precedente diventa:

$$g^{\alpha\beta} = -k^\alpha N^\beta - N^\alpha k^\beta + \sigma^{AB} e_A^\alpha e_B^\beta. \quad (1.87)$$

1.9 Integrazione sulle Superfici

Se Σ non è di tipo luce:

$$d\Sigma \equiv |h|^{1/2} d^3y, \quad (1.88)$$

dove $h \equiv \det[h_{ab}]$. La quantità $d\Sigma$ è un volume infinitesimo invariante della superficie detto *elemento di superficie*. La combinazione $n_\alpha d\Sigma$ fornisce un vettore *orientato* nella direzione di Φ crescente; nel caso di tipo luce queste quantità non sono definite perché $h = 0$ e n_α non esiste. La generalizzazione di 1.88 è:

$$d\Sigma_\mu = \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} e_1^\alpha e_2^\beta e_3^\gamma d^3y, \quad (1.89)$$

dove $\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} = \sqrt{-g}[\mu \alpha \beta \gamma]$ è il tensore di Levi-Civita e il simbolo $[\mu \alpha \beta \gamma]$ vale:

$$[\alpha \beta \gamma \delta] = \begin{cases} +1 & \text{se } \alpha\beta\gamma\delta \text{ è una permutazione pari di } 0123. \\ -1 & \text{se } \alpha\beta\gamma\delta \text{ è una permutazione dispari di } 0123. \\ 0 & \text{se due indici qualsiasi coincidono.} \end{cases} \quad (1.90)$$

L'equazione 1.89, valida in generale, si può scrivere come:

$$d\Sigma_\alpha = \varepsilon n_\alpha d\Sigma \quad (1.91)$$

per superfici di tipo spazio o tempo. Poiché $d\Sigma_\alpha$ è proporzionale al tensore di Levi-Civita, il suo segno dipende dall'ordinamento di y^1, y^2 e y^3 ed, essendo questo arbitrario, si adotta la convenzione che rende lo scalare $f \equiv \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} n^\mu e_1^\alpha e_2^\beta e_3^\gamma$ positivo. Quando Σ è di tipo luce si fissano le coordinate $(\lambda, \theta^2, \theta^3)$ così che $e_1^\alpha = k^\alpha$, $d^3y = d\lambda d^2\theta$ e 1.89 si scrive come:

$$d\Sigma_\mu = k^\nu dS_{\mu\nu} d\lambda, \quad (1.92)$$

dove:

$$dS_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\beta\gamma} e_2^\beta e_3^\gamma d^2\theta \quad (1.93)$$

è interpretato come un elemento di area superficiale bidimensionale. Questo ammette anche la forma alternativa:

$$dS_{\alpha\beta} = 2k_{[\alpha} N_{\beta]} \sqrt{\sigma} d^2\theta = (k_\alpha N_\beta - N_\alpha k_\beta) \sqrt{\sigma} d^2\theta, \quad (1.94)$$

dove N_α è il campo vettoriale introdotto in 1.87 e $\sigma = \det[\sigma_{AB}]$. Combinando 1.92 con 1.94 si trova:

$$d\Sigma_\alpha = -k_\alpha \sqrt{\sigma} d^2\theta d\lambda. \quad (1.95)$$

A meno del segno, l'elemento di superficie è orientato come k_α , $d\lambda$ rappresenta una distanza infinitesima lungo le generatrici mentre $\sqrt{\sigma}d^2\theta$ è un elemento di area bidimensionale trasversale a queste. Come prima si adotta la convenzione che rende $f \equiv \varepsilon_{\mu\nu\beta\gamma} N^\mu k^\nu e_2^\beta e_3^\gamma$ positivo.

L'interpretazione di 1.93 come elemento di area superficiale ha validità generale. Una superficie bidimensionale S , infatti, è una sottovarietà di Σ descritta da $\psi(y^a) = 0$ e da equazioni parametriche $y^a(\theta^A)$ nelle quali le θ^A sono coordinate intrinseche a S , segue che $r_a \propto \partial_a \psi$ è il versore normale e $e_A^a = \partial y^a / \partial \theta^A$ sono i vettori tangenti.

La metrica indotta su S da h_{ab} è $\sigma_{AB} = h_{ab} e_A^a e_B^b$ e vale la relazione di completezza $h^{ab} = r^a r^b + \sigma^{AB} e_A^a e_B^b$.

Le relazioni parametriche $y^a(\theta^A)$ e $x^\alpha(y^a)$ si possono combinare per fornire $x^\alpha(\theta^A)$ e i vettori:

$$e_A^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta^A} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \frac{\partial y^a}{\partial \theta^A} = e_a^\alpha e_A^a \quad (1.96)$$

tangenti a S , mentre quelli ortogonali sono n^α di tipo tempo e $r^\alpha \equiv r^a e_a^\alpha$ di tipo spazio; quest'ultimo si può esprimere come $r_\alpha \propto \partial_\alpha \Psi$ tramite una funzione $\Psi(x^\alpha)$ tale che $\Psi|_\Sigma \equiv \psi$. La metrica indotta è ancora:

$$\begin{aligned} \sigma_{AB} &= h_{ab} e_A^a e_B^b = \left(g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \right) e_A^a e_B^b \\ &= g_{\alpha\beta} (e_a^\alpha e_A^a) (e_b^\beta e_B^b) \\ &= g_{\alpha\beta} e_A^\alpha e_B^\beta \end{aligned} \quad (1.97)$$

e vale la relazione di completezza.

$$g^{\alpha\beta} = -n^\alpha n^\beta + r^\alpha r^\beta + \sigma^{AB} e_A^\alpha e_B^\beta. \quad (1.98)$$

Per concludere, $dS_{\alpha\beta}$ si può esprimere tramite i vettori n^α e r^α e la quantità $\sqrt{\sigma}d^2\theta$ come:

$$dS_{\alpha\beta} = -2n_{[\alpha} r_{\beta]} \sqrt{\sigma} d^2\theta = -(n_\alpha r_\beta - r_\alpha n_\beta) \sqrt{\sigma} d^2\theta. \quad (1.99)$$

1.10 Teorema di Gauss-Stokes

Si consideri una regione $\mathcal{V}$ della varietà spaziotemporale limitata da una superficie chiusa $\partial\mathcal{V}$, per ogni campo vettoriale A^α definito in $\mathcal{V}$ vale:

$$\int_{\mathcal{V}} A^\alpha{}_{;\alpha} \sqrt{-g} d^4x = \oint_{\partial\mathcal{V}} A^\alpha d\Sigma_\alpha, \quad (1.100)$$

dove $d\Sigma_\alpha$ è l'elemento di superficie definito come in 1.89. Per derivare questo risultato, noto come *teorema di Gauss*, si ricorre al sistema di riferimento in $\mathcal{V}$ mostrato in figura 1.5. Questo si costruisce a partire da una foliazione di $\mathcal{V}$ per mezzo di superfici chiuse indicizzate dalla coordinata radiale x^0 (con $x^0 = 1$ sulla frontiera $\partial\mathcal{V}$ e $x^0 = 0$ su quella avente volume nullo situata al centro di $\mathcal{V}$). Le rimanenti si

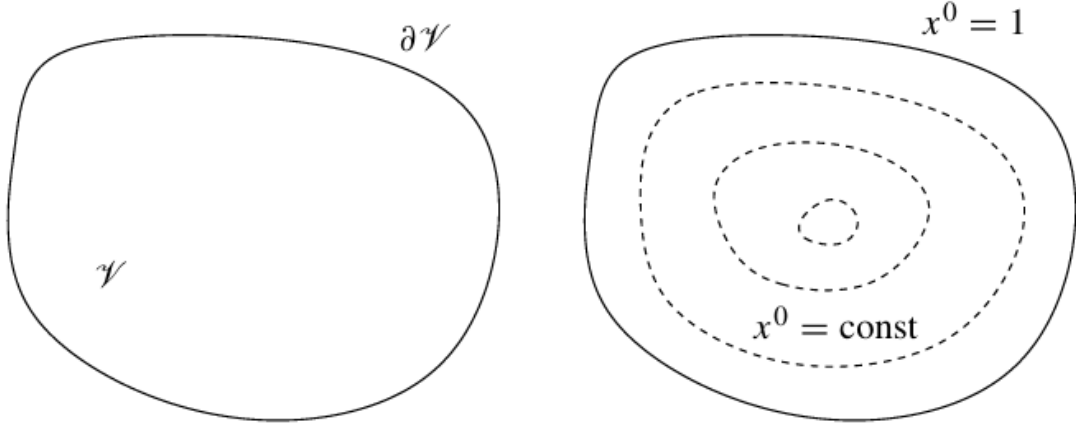


Figura 1.5: dimostrazione del teorema di Gauss-Stokes.

comportano come angoli sulle foliazioni $x^0 = \text{costante}$ e coincidono con le y^a fissate su $\partial\mathcal{V}$.

In questo riferimento, l'integrale sinistro di 1.100 diventa:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{V}} A^\alpha_{;\alpha} \sqrt{-g} d^4x &= \int_{\mathcal{V}} (\sqrt{-g} A^\alpha)_{,\alpha} d^4x \\
 &\stackrel{*}{=} \int dx^0 \oint (\sqrt{-g} A^0)_{,0} d^3x + \int dx^0 \oint (\sqrt{-g} A^a)_{,a} d^3x \\
 &\stackrel{*}{=} \int dx^0 \frac{d}{dx^0} \oint \sqrt{-g} A^0 d^3x \\
 &\stackrel{*}{=} \oint \sqrt{-g} A^0 d^3x \Big|_{x^0=0}^{x^0=1} \\
 &\stackrel{*}{=} \oint_{\partial\mathcal{V}} \sqrt{-g} A^0 d^3y.
 \end{aligned} \tag{1.101}$$

Nella prima riga si è fatto uso della formula della divergenza 1.60 per il campo vettoriale A^α . Il secondo integrale nella seconda svanisce poiché le x^a sono coordinate angolari e l'integrazione viene effettuata su una superficie tridimensionale chiusa. Nella quarta, il contributo $x^0 = 0$ si semplifica perché la superficie corrispondente ha volume nullo. Nelle coordinate scelte $d\Sigma_\alpha \stackrel{*}{=} \delta^0_\alpha \sqrt{-g} d^3y$ così che:

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} A^\alpha d\Sigma_\alpha \stackrel{*}{=} \oint_{\partial\mathcal{V}} A^0 \sqrt{-g} d^3y \tag{1.102}$$

ed essendo questa un'equazione tensoriale, la sua validità è indipendente dal riferimento adottato, dimostrando così 1.100.

Una seconda versione del teorema, nota come *teorema di Stokes*, riguarda superfici tridimensionali Σ limitate da frontiere bidimensionali chiuse $\partial\Sigma$. Questa afferma che per ogni campo tensoriale *antisimmetrico* $B^{\alpha\beta}$ in Σ :

$$\int_{\Sigma} B^{\alpha\beta}_{;\beta} d\Sigma_\alpha = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Sigma} B^{\alpha\beta} dS_{\alpha\beta}, \tag{1.103}$$

dove $dS_{\alpha\beta}$ è l'elemento di superficie bidimensionale definito in 1.93.

La dimostrazione procede in maniera simile al caso precedente: si costruisce un riferimento tale che x^0 sia costante su Σ , $x^1 = \text{costante}$ descriva superfici bidimensionali chiuse innestate in Σ (con $x^1 = 1$ che rappresenta $\partial\Sigma$ e $x^1 = 0$ quella ad area nulla al centro) e le x^A siano nuovamente coordinate angolari coincidenti con le θ^A su $\partial\Sigma$. Con questa scelta $d\Sigma_\alpha \stackrel{*}{=} \delta_\alpha^0 \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3$ e l'integrale a sinistra diventa:

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma B^{\alpha\beta}_{;\beta} d\Sigma_\alpha &= \int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} B^{\alpha\beta})_{,\beta} d\Sigma_\alpha \\
&\stackrel{*}{=} \int_\Sigma (\sqrt{-g} B^{0\beta})_{,\beta} dx^1 dx^2 dx^3 \\
&\stackrel{*}{=} \int dx^1 \oint (\sqrt{-g} B^{01})_{,1} dx^2 dx^3 + \int dx^1 \oint (\sqrt{-g} B^{0A})_{,A} dx^2 dx^3 \\
&\stackrel{*}{=} \oint \sqrt{-g} B^{01} dx^2 dx^3 \Big|_{x^1=0}^{x^1=1} \\
&\stackrel{*}{=} \oint_{\partial\Sigma} \sqrt{-g} B^{01} d^2\theta,
\end{aligned} \tag{1.104}$$

dove si è usata la formula della divergenza 1.61; i calcoli restanti sono del tutto analoghi al caso precedente. Nel riferimento adottato $B^{\alpha\beta} dS_{\alpha\beta} \stackrel{*}{=} (B^{01} - B^{10}) \sqrt{-g} d^2\theta = 2B^{01} \sqrt{-g} d^2\theta$ e l'integrale a destra diventa:

$$\frac{1}{2} \oint_{\partial\Sigma} B^{\alpha\beta} dS_{\alpha\beta} \stackrel{*}{=} \oint_{\partial\Sigma} B^{01} \sqrt{-g} d^2\theta, \tag{1.105}$$

dimostrando così il teorema.

1.11 Derivata Covariante Intrinseca

Data una superficie Σ si consideri un campo tensoriale $A^{\alpha\beta\cdots}$ tangente ad essa. Questo ammette la decomposizione:

$$A^{\alpha\beta\cdots} = A^{ab\cdots} e_a^\alpha e_b^\beta \cdots, \tag{1.106}$$

dove $e_a^\alpha = \partial x^\alpha / \partial y^a$ sono i vettori di base su Σ . L'equazione precedente implica che $A^{\alpha\beta\cdots} n_\alpha = A^{\alpha\beta\cdots} n_\beta = \cdots = 0$. Qualsiasi tensore $T^{\alpha\beta\cdots}$ può essere proiettato sulla superficie tramite la metrica $h^{\alpha\beta} \equiv h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta = g^{\alpha\beta} - \varepsilon n^\alpha n^\beta$ come $h_\mu^\alpha h_\nu^\beta \dots T^{\mu\nu\cdots}$.

Le proiezioni:

$$A_{\alpha\beta\cdots} e_a^\alpha e_b^\beta \cdots = A_{ab\cdots} \equiv h_{am} h_{bn} \cdots A^{mn\cdots} \tag{1.107}$$

forniscono il tre-tensore $A^{ab\cdots}$ associato a $A^{\alpha\beta\cdots}$. Si ricordi che $A^{ab\cdots}$ si comporta come uno tensore per trasformazioni $y^a \rightarrow y^{a'}$ delle coordinate intrinseche a Σ e come uno scalare per $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$. La derivata covariante di $A^{\alpha\beta\cdots}$ può essere associata a quella di $A^{ab\cdots}$ tramite una connessione compatibile con la metrica indotta h_{ab} . Si consideri, per semplicità, un campo vettoriale tangente A^α così che:

$$A^\alpha = A^a e_a^\alpha, \quad A^\alpha n_\alpha = 0, \quad A_a = A_\alpha e_a^\alpha. \tag{1.108}$$

Si definisce *derivata covariante intrinseca* di un tre-vettore A_a la proiezione di $A_{\alpha;\beta}$ sulla superficie:

$$A_{a|b} \equiv A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (1.109)$$

L'oggetto $A_{a|b}$ non è altro che la derivata covariante di A_a definita in termini della connessione Γ_{bc}^a compatibile con h_{ab} :

$$\begin{aligned} A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta &= (A_\alpha e_a^\alpha)_{;\beta} e_b^\beta - A_\alpha e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta \\ &= A_{a,\beta} e_b^\beta - e_{a\gamma;\beta} e_b^\beta A^c e_c^\gamma \\ &= \frac{\partial A_a}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} - e_c^\gamma e_{a\gamma;\beta} e_b^\beta A^c \\ &= A_{a,b} - \Gamma_{cab} A^c, \end{aligned} \quad (1.110)$$

dove:

$$\Gamma_{cab} = e_c^\gamma e_{a\gamma;\beta} e_b^\beta \quad (1.111)$$

e 1.109 diventa:

$$A_{a|b} = A_{a,b} - \Gamma_{ab}^c A_c. \quad (1.112)$$

La connessione Γ_{cab} , definita in 1.111, si può ricavare da:

$$\Gamma_{cab} = \frac{1}{2} (h_{ca,b} + h_{cb,a} - h_{ab,c}) \quad (1.113)$$

e risulta compatibile con h_{ab} :

$$\begin{aligned} h_{ab|c} &\equiv h_{\alpha\beta;\gamma} e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma = (g_{\alpha\beta} - \varepsilon n_\alpha n_\beta)_{;\gamma} e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma \\ &= -\varepsilon (n_{\alpha;\gamma} n_\beta + n_\alpha n_{\beta;\gamma}) e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma = 0 \end{aligned} \quad (1.114)$$

per via di $n_\alpha e_a^\alpha = 0$. Dunque la derivata covariante intrinseca coincide con la derivata covariante di un tre-tensore.

1.12 Curvatura Estrinseca

Le quantità $A_{a|b} = A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$ sono le componenti tangenziali del vettore $A_{;\beta}^\alpha e_b^\beta$. Esprimendo $A_{;\beta}^\alpha e_b^\beta$ come $g_\mu^\alpha A_{;\beta}^\mu e_b^\beta$ e facendo uso di 1.86 si ottiene:

$$\begin{aligned} A_{;\beta}^\alpha e_b^\beta &= (\varepsilon n^\alpha n_\mu + h^{am} e_a^\alpha e_{m\mu}) A_{;\beta}^\mu e_b^\beta \\ &= \varepsilon \left(n_\mu A_{;\beta}^\mu e_b^\beta \right) n^\alpha + h^{am} \left(A_{\mu;\beta} e_m^\mu e_b^\beta \right) e_a^\alpha. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Usando 1.109 ed il fatto che A^μ è ortogonale a n^μ , l'equazione precedente diventa:

$$\begin{aligned} A_{;\beta}^\alpha e_b^\beta &= -\varepsilon \left(n_{\mu;\beta} A_{;\beta}^\mu e_b^\beta \right) n^\alpha + h^{am} A_{m|b} e_a^\alpha \\ &= A_{|b}^a e_a^\alpha - \varepsilon A^a \left(n_{\mu;\beta} e_a^\mu e_b^\beta \right) n^\alpha \end{aligned} \quad (1.116)$$

e introducendo il tre-tensore:

$$K_{ab} \equiv n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (1.117)$$

detto *curvatura estrinseca*, o *seconda forma fondamentale*, è possibile riscrivere 1.116 come:

$$A^\alpha{}_{;\beta} e_b^\beta = A^a{}_{|b} e_a^\alpha - \varepsilon A^a K_{ab} n^\alpha \quad (1.118)$$

dalla quale si evince che $A^a{}_{|b}$ coincide con la componente puramente tangenziale del campo vettoriale, mentre $-\varepsilon A^a K_{ab}$ rappresenta quella normale.

Sostituendo e_a^α al posto di A^α , $A^c = \delta_a^c$ e le 1.112, 1.118 implicano l'equazione di Gauss-Weingarten:

$$e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta = \Gamma_{ab}^c e_c^\alpha - \varepsilon K_{ab} n^\alpha. \quad (1.119)$$

La curvatura estrinseca è un tensore simmetrico:

$$K_{ba} = K_{ab}, \quad (1.120)$$

ciò è dovuto all'ortogonalità dei vettori e_a^α e n^α e alla relazione $e_{a;b}^\alpha e_b^\beta = e_{b;\beta}^\alpha e_a^\beta$ così che:

$$\begin{aligned} n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta &= -n_\alpha e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta \\ &= -n_\alpha e_{b;\beta}^\alpha e_a^\beta \\ &= n_{\alpha;\beta} e_b^\alpha e_a^\beta. \end{aligned} \quad (1.121)$$

Dalla proprietà di simmetria della curvatura estrinseca deriva:

$$K_{ab} = n_{(\alpha;\beta)} e_a^\alpha e_b^\beta = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_n g_{\alpha\beta}) e_a^\alpha e_b^\beta \quad (1.122)$$

che esplicita la dipendenza di K_{ab} dalla derivata normale del tensore metrico. Sono valide anche le relazioni:

$$K \equiv h^{ab} K_{ab} = n^\alpha{}_{;\alpha} \quad (1.123)$$

dalle quali si conclude che K è legato all'espansione di una famiglia di geodetiche che intersecano la superficie ortogonalmente (così che il vettore tangente sia n^α). Una superficie si dice *convessa* se $K > 0$, *concava* altrimenti. Mentre h_{ab} descrive gli aspetti intrinseci della geometria di una superficie, K_{ab} riguarda quelli estrinseci ovvero il modo in cui questa è immersa all'interno dello spaziotempo quadridimensionale circostante.

1.13 Equazioni di Gauss-Codazzi

Una volta introdotta la metrica indotta h_{ab} e la derivata covariante intrinseca si costruisce un tensore di curvatura intrinseca R_{dab}^c tale che:

$$A^c{}_{|ab} - A^c{}_{|ba} = -R_{dab}^c A^d \quad (1.124)$$

che implica:

$$R_{dab}^c = \Gamma_{db,a}^c - \Gamma_{da,b}^c + \Gamma_{ma}^c \Gamma_{db}^m - \Gamma_{mb}^c \Gamma_{da}^m. \quad (1.125)$$

Il tre-tensore di Riemann R_{dab}^c si ottiene restringendo la sua versione quadridimensionale $R_{\delta\alpha\beta}^\gamma$ su Σ . Per fare questo si parte dall'identità:

$$(e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta)_{;\gamma} e_c^\gamma = (\Gamma_{ab}^d e_d^\alpha - \varepsilon K_{ab} n^\alpha)_{;\gamma} e_c^\gamma \quad (1.126)$$

che segue da 1.119. L'espressione a sinistra è pari a:

$$\begin{aligned}
\left(e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta\right)_{;\gamma} e_c^\gamma &= e_{a;\beta\gamma}^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma + e_{a;\beta}^\alpha e_{b;\gamma}^\beta e_c^\gamma \\
&= e_{a;\beta\gamma}^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma + e_{a;\beta}^\alpha \left(\Gamma_{bc}^d e_d^\beta - \varepsilon K_{bc} n^\beta\right) \\
&= e_{a;\beta\gamma}^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma + \Gamma_{bc}^d (\Gamma_{ad}^e e_e^\alpha - \varepsilon K_{ad} n^\alpha) - \varepsilon K_{bc} e_{a;\beta}^\alpha n^\beta,
\end{aligned} \tag{1.127}$$

mentre quella a destra:

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{ab}^d e_d^\alpha - \varepsilon K_{ab} n^\alpha)_{;\gamma} e_c^\gamma &= \Gamma_{ab,c}^d e_d^\alpha + \Gamma_{ab}^d e_{d;\gamma}^\alpha e_c^\gamma - \varepsilon K_{ab,c} n^\alpha - \varepsilon K_{ab} n_{;\gamma}^\alpha e_c^\gamma \\
&= \Gamma_{ab,c}^d e_d^\alpha + \Gamma_{ab}^d (\Gamma_{dc}^e e_e^\alpha - \varepsilon K_{dc} n^\alpha) \\
&\quad - \varepsilon K_{ab,c} n^\alpha - \varepsilon K_{ab} n_{;\gamma}^\alpha e_c^\gamma.
\end{aligned} \tag{1.128}$$

Eguagliando tra loro 1.127 e 1.128, risolvendo per $e_{a;\beta\gamma}^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma$ e sottraendo un'espressione simile per $e_{a;\gamma\beta}^\alpha e_c^\gamma e_b^\beta$ si trova:

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\mu e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma = R_{abc}^m e_m^\mu + \varepsilon (K_{ab|c} - K_{ac|b}) n^\mu + \varepsilon K_{ab} n_{;\gamma}^\mu e_c^\gamma - \varepsilon K_{ac} n_{;\beta}^\mu e_b^\beta \tag{1.129}$$

che, proiettata lungo $e_{d\mu}$, fornisce la relazione cercata:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma e_d^\delta = R_{abcd} + \varepsilon (K_{ad} K_{bc} - K_{ac} K_{bd}). \tag{1.130}$$

Proiettando lungo n_μ si trova:

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} n^\mu e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma = K_{ab|c} - K_{ac|b}. \tag{1.131}$$

Le 1.130 e 1.131 sono note come equazioni di *Gauss-Codazzi* e mostrano come esprimere alcune componenti del tensore di curvatura in termini della curvatura estrinseca ed intrinseca di una superficie; eccezione fatta per $R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu e_a^\alpha n^\nu e_b^\beta$. Le equazioni 1.130 e 1.131 si possono riformulare in termini del tensore di Einstein $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$.

Il tensore di Ricci è dato da:

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta} &= g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} \\
&= (\varepsilon n^\mu n^\nu + h^{mn} e_m^\mu e_n^\nu) R_{\mu\alpha\nu\beta} \\
&= \varepsilon R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu + h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^\mu e_n^\nu
\end{aligned} \tag{1.132}$$

e lo scalare di Ricci:

$$\begin{aligned}
R &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \\
&= \left(\varepsilon n^\alpha n^\beta + h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta\right) (\varepsilon R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu + h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^\mu e_n^\nu) \\
&= 2\varepsilon h^{ab} R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu e_a^\alpha n^\nu e_b^\beta + h^{ab} h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^\mu e_a^\alpha e_n^\nu e_b^\beta.
\end{aligned} \tag{1.133}$$

Con un pò di algebra si ricavano:

$$-2\varepsilon G_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = {}^3R + \varepsilon (K^{ab} K_{ab} - K^2) \tag{1.134}$$

e:

$$G_{\alpha\beta} e_a^\alpha n^\beta = K_{a|b}^b - K_{,a}, \tag{1.135}$$

dove ${}^3R = h^{ab} R_{amb}^m$ è lo scalare tridimensionale di Ricci. Le 1.134 e 1.135 formano parte delle equazioni di campo di Einstein su una superficie Σ .

1.14 Scalare di Ricci

Per il calcolo dello scalare di Ricci si fa uso della relazione:

$$R = 2\varepsilon h^{ab} R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu e_a^\alpha n^\nu e_b^\beta + h^{ab} h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^\mu e_a^\alpha e_n^\nu e_b^\beta. \quad (1.136)$$

Per via di 1.86 e $R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\alpha n^\nu n^\beta = 0$, il primo termine diventa $2\varepsilon R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta$. Dalla definizione del tensore di Riemann segue:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta &= -n_{;\alpha\beta}^\alpha n^\beta + n_{;\beta\alpha}^\alpha n^\beta \\ &= -(n_{;\alpha}^\alpha n^\beta)_{;\beta} + n_{;\alpha}^\alpha n_{;\beta}^\beta + (n_{;\beta}^\alpha n^\beta)_{;\alpha} - n_{;\beta}^\alpha n_{;\alpha}^\beta. \end{aligned} \quad (1.137)$$

Nel secondo termine dell'ultima espressione compare K^2 , il quadrato della traccia $K = n_{;\alpha}^\alpha$. Il quarto può essere espresso come:

$$\begin{aligned} n_{;\beta}^\alpha n_{;\alpha}^\beta &= g^{\beta\mu} g^{\alpha\nu} n_{\alpha;\beta} n_{\mu;\nu} \\ &= (\varepsilon n^\beta n^\mu + h^{\beta\mu})(\varepsilon n^\alpha n^\nu + h^{\alpha\nu}) n_{\alpha;\beta} n_{\mu;\nu} \\ &= (\varepsilon n^\beta n^\mu + h^{\beta\mu}) h^{\alpha\nu} n_{\alpha;\beta} n_{\mu;\nu} \\ &= h^{\beta\mu} h^{\alpha\nu} n_{\alpha;\beta} n_{\mu;\nu} \\ &= h^{bm} h^{an} n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta n_{\mu;\nu} e_m^\mu e_n^\nu \\ &= h^{bm} h^{an} K_{ab} K_{mn} \\ &= K_{ab} K^{ba} \\ &= K^{ab} K_{ab}. \end{aligned} \quad (1.138)$$

Nella prima riga si è fatto uso di 1.86 e della notazione $h^{\alpha\beta} = h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta$. Nella terza e quarta di $n^\alpha n_{\alpha;\beta} = \frac{1}{2}(n^\alpha n_\alpha)_{;\beta} = 0$. Nella sesta compare la definizione di curvatura estrinseca e nell'ultima si usa la simmetria di K_{ab} .

Il secondo termine in 1.136 si semplifica sostituendo le 1.130:

$$\begin{aligned} h^{ab} h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^\mu e_a^\alpha e_n^\nu e_b^\beta &= h^{ab} h^{mn} [R_{manb} + \varepsilon(K_{mb} K_{an} - K_{mn} K_{ab})] \\ &= {}^3R + \varepsilon(K^{ab} K_{ab} - K^2) \end{aligned} \quad (1.139)$$

e mettendo tutto insieme si trova lo scalare di Ricci sulla superficie Σ :

$$R = {}^3R + \varepsilon(K^2 - K^{ab} K_{ab}) + 2\varepsilon(n_{;\beta}^\alpha n^\beta - n^\alpha n_{;\beta}^\beta)_{;\alpha}. \quad (1.140)$$

Capitolo 2

Formulazione Lagrangiana

La formulazione Lagrangiana della meccanica Newtoniana prevede la conoscenza di una funzione delle coordinate generalizzate q e delle velocità $\dot{q} \equiv dq/dt$, detta Lagrangiana $L = L(q, \dot{q})$, con la quale si costruisce il funzionale d'azione $S[q]$:

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt. \quad (2.1)$$

La traiettoria che soddisfa le equazioni del moto si ottiene dalla condizione di stazionarietà $\delta S = 0$ con il vincolo $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Variando 2.1 si trova:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt. \end{aligned} \quad (2.2)$$

La variazione δq svanisce agli estremi di integrazione e, data la sua arbitrarietà, si deduce l'equazione di Eulero-Lagrange per sistemi meccanici unidimensionali:

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0; \quad (2.3)$$

la sua generalizzazione a più dimensioni è immediata.

2.1 Formalismo Lagrangiano per una Teoria di Campo

Si consideri adesso la dinamica di un campo $q = q(x^\alpha)$ (assunto scalare per semplicità) all'interno di uno spaziotempo curvo. Nel formalismo Lagrangiano di una teoria di campo, si costruisce il funzionale d'azione integrando una densità di lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, q_{,\alpha})$ su un volume $\mathcal{V}$ della varietà spaziotemporale delimitato da una superficie $\partial\mathcal{V}$:

$$S[q] = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{L}(q, q_{,\alpha}) \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.4)$$

Le equazioni dinamiche del campo si ottengono introducendo una variazione $\delta q(x^\alpha)$ arbitraria all'interno di $\mathcal{V}$ che si annulli sulla frontiera $\partial\mathcal{V}$:

$$\delta q \Big|_{\partial\mathcal{V}} = 0. \quad (2.5)$$

Il calcolo della variazione di 2.4 fornisce:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\mathcal{V}} (\mathcal{L}' \delta q + \mathcal{L}^\alpha \delta q_{,\alpha}) \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[\mathcal{L}' \delta q + (\mathcal{L}^\alpha \delta q)_{;\alpha} - \mathcal{L}^\alpha_{;\alpha} \delta q \right] \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int_{\mathcal{V}} (\mathcal{L}' - \mathcal{L}^\alpha_{;\alpha}) \delta q \sqrt{-g} d^4x + \oint_{\partial\mathcal{V}} \mathcal{L}^\alpha \delta q d\Sigma_\alpha. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dove si è usato il teorema di Gauss nell'ultimo passaggio insieme alla notazione $\mathcal{L}' \equiv \partial\mathcal{L}/\partial q$ e $\mathcal{L}^\alpha \equiv \partial\mathcal{L}/\partial q_{,\alpha}$. L'integrale sulla frontiera svanisce per via di 2.5 ed, essendo la variazione arbitraria all'interno del volume, si ricava l'equazione di Eulero-Lagrange per il campo:

$$\delta S = 0 \Rightarrow \nabla_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{,\alpha}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad (2.7)$$

2.2 Formalismo Lagrangiano per la Relatività Generale

Il funzionale d'azione della Relatività Generale contiene un contributo $S_G[g]$ proveniente dal campo gravitazionale $g_{\alpha\beta}$ e uno dovuto al contenuto di materia ed energia ϕ , $S_M[\phi; g]$.

Il primo si suddivide ulteriormente nel termine di Hilbert $S_H[g]$, quello di frontiera $S_B[g]$ e il non dinamico S_0 come:

$$S_G[g] = S_H[g] + S_B[g] - S_0. \quad (2.8)$$

dove:

$$\begin{aligned} S_H[g] &= \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{V}} R \sqrt{-g} d^4x, \\ S_B[g] &= \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\mathcal{V}} \varepsilon K \sqrt{|h|} d^3y, \\ S_0 &= \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\mathcal{V}} \varepsilon K_0 \sqrt{|h|} d^3y. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nelle equazioni precedenti: R è lo scalare di Ricci in $\mathcal{V}$, K la traccia della curvatura estrinseca di $\partial\mathcal{V}$, h il determinante della metrica indotta su $\partial\mathcal{V}$ e ε vale +1 sulle porzioni di tipo tempo della frontiera e -1 su quelle di tipo spazio.

Il contributo $S_M[\phi; g]$ è dato da:

$$S_M[\phi; g] = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{L}(\phi, \phi_{,\alpha}; g_{\alpha\beta}) \sqrt{-g} d^4x \quad (2.10)$$

e, mettendo tutto insieme, 2.8 assume la forma:

$$S[g; \phi] = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{R}{16\pi} + \mathcal{L} \right) \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\mathcal{V}} \varepsilon(K - K_0) \sqrt{|h|} d^3y. \quad (2.11)$$

Le equazioni di campo di Einstein si recuperano variando $S[g; \phi]$ rispetto a $g_{\alpha\beta}$ con la condizione:

$$\delta g_{\alpha\beta} \Big|_{\partial\mathcal{V}} = 0, \quad (2.12)$$

questa implica che la metrica indotta $h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$ non è modificata dalla variazione.

2.3 Variazione del Termine di Hilbert

Risulta conveniente usare, invece che $\delta g_{\alpha\beta}$, le variazioni $\delta g^{\alpha\beta}$, legate alle prime dalla relazione $g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta^\alpha_\beta$ che implica:

$$\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

La variazione del determinante della metrica è data da:

$$\delta \ln|g| = g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}, \quad (2.14)$$

da questa segue:

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}. \quad (2.15)$$

Si noti che la differenza tra simboli di Christoffel $\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ è una quantità tensoriale. La variazione del termine di Hilbert è:

$$\begin{aligned} (16\pi) \delta S_H &= \int_{\mathcal{V}} \delta (g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \sqrt{-g}) d^4x \\ &= \int_{\mathcal{V}} (R_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \delta R_{\alpha\beta} + R \delta \sqrt{-g}) d^4x \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x + \int_{\mathcal{V}} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Il calcolo del termine $\delta R_{\alpha\beta}$ in un riferimento Lorentziano locale fornisce:

$$\begin{aligned} \delta R_{\alpha\beta} &\stackrel{*}{=} \delta (\Gamma_{\alpha\beta,\mu}^\mu - \Gamma_{\alpha\mu,\beta}^\mu) \\ &\stackrel{*}{=} (\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu)_{,\mu} - (\delta \Gamma_{\alpha\mu}^\mu)_{,\beta} \\ &\stackrel{*}{=} (\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu)_{;\mu} - (\delta \Gamma_{\alpha\mu}^\mu)_{;\beta} \end{aligned} \quad (2.17)$$

che, essendo tensoriale, risulta valida in qualsiasi riferimento. Segue che:

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} &= \Delta v^\mu_{;\mu} \\ \Delta v^\mu &= g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - g^{\alpha\mu} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\beta \end{aligned} \quad (2.18)$$

e usando le equazioni precedenti, il secondo integrale in δS_H diventa:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{V}} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x &= \int_{\mathcal{V}} \Delta v^\mu_{;\mu} \sqrt{-g} d^4x \\
&= \oint_{\partial\mathcal{V}} \Delta v^\mu d\Sigma_\mu \\
&= \oint_{\partial\mathcal{V}} \varepsilon \Delta v^\mu n_\mu \sqrt{|h|} d^3y;
\end{aligned} \tag{2.19}$$

dove n_μ è il versore normale a $\partial\mathcal{V}$ e $\varepsilon \equiv n^\mu n_\mu = \pm 1$. Facendo uso del vincolo $\delta g^{\alpha\beta} = \delta g_{\alpha\beta} = 0$ su $\partial\mathcal{V}$ si conclude che:

$$\delta \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \Big|_{\partial\mathcal{V}} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\delta g_{\nu\alpha,\beta} + \delta g_{\nu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}) \tag{2.20}$$

e inserendo il risultato precedente in 2.18 si trova $\Delta v_\mu = g^{\alpha\beta} (\delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu})$ che implica:

$$\begin{aligned}
n^\mu \Delta v_\mu \Big|_{\partial\mathcal{V}} &= n^\mu (\varepsilon n^\alpha n^\beta + h^{\alpha\beta}) (\delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}) \\
&= n^\mu h^{\alpha\beta} (\delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Nella prima riga si è fatto uso della relazione di completezza $g^{\alpha\beta} = \varepsilon n^\alpha n^\beta + h^{\alpha\beta}$, dove $h^{\alpha\beta} \equiv h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta$, mentre nella seconda si moltiplica $n^\alpha n^\mu$ con la parte antisimmetrica in parentesi. Procedendo, poiché $\delta g_{\alpha\beta} = 0$ su $\partial\mathcal{V}$, le sue derivate tangenziali devono annullarsi $\delta g_{\alpha\beta,\gamma} e_c^\gamma = 0$, di conseguenza $h^{\alpha\beta} \delta g_{\mu\beta,\alpha} = 0$ e:

$$n^\mu \Delta v_\mu \Big|_{\partial\mathcal{V}} = -h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\mu} n^\mu. \tag{2.22}$$

Questo termine è non nullo in quanto la derivata normale di $\delta g_{\alpha\beta}$ non svanisce necessariamente sulla superficie. Mettendo tutto insieme si ottiene:

$$(16\pi) \delta S_H = \int_{\mathcal{V}} G_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x - \oint_{\partial\mathcal{V}} \varepsilon h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\mu} n^\mu \sqrt{|h|} d^3y, \tag{2.23}$$

l'integrale di contorno viene semplificato dalla variazione di $S_B[g]$, ciò spiega la sua presenza nell'azione 2.8. Un'altra motivazione deriva dal fatto che R contiene derivate seconde del tensore metrico; un fatto atipico tra le teorie di campo che solitamente sono formulate con Lagrangiane contenenti al più derivate prime.

2.4 Variazione del Termine di Frontiera

Il passo successivo consiste nel valutare la variazione del termine di frontiera $S_B[g]$. Poiché la metrica indotta su $\partial\mathcal{V}$ è fissata, l'unica quantità da variare è la traccia della curvatura estrinseca K :

$$\begin{aligned} K &= n^\alpha_{;\alpha} \\ &= (\varepsilon n^\alpha n^\beta + h^{\alpha\beta}) n_{\alpha;\beta} \\ &= h^{\alpha\beta} n_{\alpha;\beta} \\ &= h^{\alpha\beta} (n_{\alpha;\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} n_\gamma). \end{aligned} \quad (2.24)$$

La sua variazione risulta essere:

$$\begin{aligned} \delta K &= -h^{\alpha\beta} \delta \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} n_\gamma \\ &= -\frac{1}{2} h^{\alpha\beta} (\delta g_{\mu\alpha,\beta} + \delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}) n^\mu \\ &= \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\mu} n^\mu \end{aligned} \quad (2.25)$$

poiché le derivate tangenziali di $\delta g_{\alpha\beta}$ si annullano su $\partial\mathcal{V}$. Mettendo tutto insieme si ottiene:

$$(16\pi) \delta S_B = \oint_{\partial\mathcal{V}} \varepsilon h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\mu} n^\mu \sqrt{|h|} d^3y \quad (2.26)$$

che semplifica l'integrale di contorno prodotto dalla variazione del termine di Hilbert. Essendo $\delta S_0 \equiv 0$, la variazione completa dell'azione 2.8 fornisce:

$$\delta S_G = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{V}} G_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x \quad (2.27)$$

che riproduce il primo membro delle equazioni di Einstein.

2.5 Variazione del Termine di Massa-Energia

La variazione di $S_M[\phi; g]$ è data da:

$$\begin{aligned} \delta S_M &= \int_{\mathcal{V}} \delta(\mathcal{L} \sqrt{-g}) d^4x \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} + \mathcal{L} \delta \sqrt{-g} \right) d^4x \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{1}{2} \mathcal{L} g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Definendo il tensore energia-impulso $T_{\alpha\beta}$ come:

$$T_{\alpha\beta} \equiv -2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}} + \mathcal{L} g_{\alpha\beta}, \quad (2.29)$$

la 2.28 diventa:

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} T_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x \quad (2.30)$$

che riproduce correttamente il secondo membro delle equazioni di campo di Einstein le quali, in ultima analisi, derivano dal principio variazionale:

$$\delta(S_G + S_M) = 0 \Rightarrow G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}. \quad (2.31)$$

2.6 Termine non Dinamico

Resta da chiarire quale sia il ruolo di S_0 . Questo non contribuisce a determinare le equazioni del moto, infatti, dipendendo unicamente dalla metrica indotta h_{ab} , la sua variazione rispetto a $g_{\alpha\beta}$ risulta nulla e pertanto può solamente contribuire al valore dell'azione 2.8.

Supponendo che $g_{\alpha\beta}$ sia una soluzione delle equazioni di campo nel vuoto, $R = 0$ e l'azione si riduce a:

$$S_G = \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\mathcal{V}} \varepsilon K \sqrt{|h|} d^3y, \quad (2.32)$$

dove, per il momento, non compare la sottrazione per K_0 .

Per valutare questa espressione nel caso di uno spaziotempo piatto, si scelga una frontiera $\partial\mathcal{V}$ composta da due superfici a $t = \text{costante}$ e da un cilindro tridimensionale posizionato in $r = R$ come in figura 2.1. Sulle superfici a tempo costante

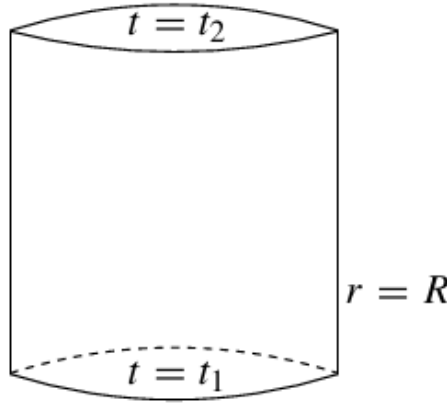


Figura 2.1: Frontiera di una regione $\mathcal{V}$ in uno spaziotempo piatto.

$K = 0$, mentre, sul cilindro, la metrica indotta è $ds^2 = -dt^2 + R^2 d\Omega^2$ così che $\sqrt{|h|} = R^2 \sin \theta$. Il versore normale $n_\alpha = \partial_\alpha r$ implica $\varepsilon = 1$ e $K = n^\alpha_{;\alpha} = 2/R$ perciò:

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \varepsilon K \sqrt{|h|} d^3y = 8\pi R(t_2 - t_1). \quad (2.33)$$

L'integrale diverge per $R \rightarrow \infty$ e 2.8 non risulta finita per uno spaziotempo piatto anche quando $\mathcal{V}$ è limitato da due superfici del tipo $t = \text{costante}$.

La presenza di curvatura non risolve tale divergenza e l'azione non è ben definita per varietà spaziotemporali asintoticamente piatte.

L'aggiunta del termine S_0 permette di ovviare al problema, infatti la differenza $S_B - S_0$ rimane finita per $R \rightarrow \infty$. Ponendo K_0 pari alla curvatura estrinseca di $\partial\mathcal{V}$ si cura la divergenza di 2.8 che, con questa scelta, risulta nulla per uno spaziotempo piatto.

Capitolo 3

Formulazione Hamiltoniana

Il concetto fondamentale per la formulazione Hamiltoniana è quello di *momento coniugato* p definito come:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \quad (3.1)$$

Assumendo che la relazione precedente possa essere invertita per ricavare $\dot{q}$ in funzione di p e q , si definisce l'Hamiltoniana come:

$$H(p, q) = p\dot{q} - L. \quad (3.2)$$

Le equazioni del moto si ricavano variando nuovamente 2.8 rispetto a p e q :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta(p\dot{q} - H) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(p \delta \dot{q} + \dot{q} \delta p - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q \right) dt \\ &= p \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[- \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q + \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p \right] dt. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Essendo le variazioni arbitrarie tra t_1 e t_2 e $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ si deducono le equazioni di Hamilton:

$$\delta S = 0 \Rightarrow \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (3.4)$$

3.1 Decomposizione $3 + 1$

La formulazione Hamiltoniana di una teoria di campo è più complicata in quanto $H[p, q]$ è un funzionale della configurazione q e del momento coniugato p su una superficie di tipo spazio Σ .

Per esprimere l'azione in termini dell'Hamiltoniana è necessario foliare il volume $\mathcal{V}$ con una famiglia di superfici di tipo spazio, una per ciascun "istante di tempo"; questo è lo scopo della "decomposizione $3 + 1$ ".

Si procede scegliendo un campo scalare $t(x^\alpha)$ tale che la condizione $t = \text{costante}$ descriva superfici di tipo spazio non intersecanti Σ_t .

La scelta è completamente arbitraria, purché $t(x^\alpha)$ sia una funzione monodroma e

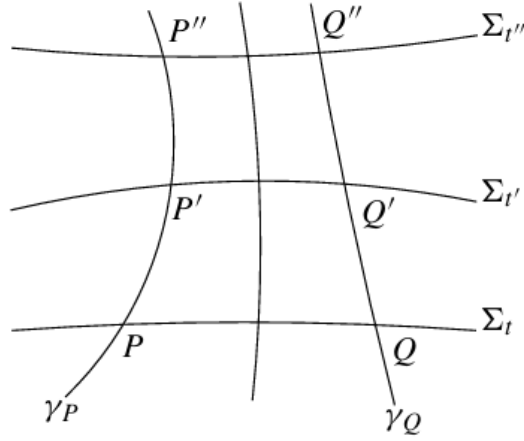


Figura 3.1: Foliatura dello spaziotempo attraverso superfici di tipo spazio.

il versore normale $n_\alpha \propto \partial_\alpha t$ sia diretto verso il futuro.

Su ciascuna superficie si definiscono delle coordinate y^α prive di una correlazione a priori, tuttavia risulta conveniente introdurre una relazione tra queste.

A tale scopo si consideri una congruenza di curve γ che intersecano le superfici Σ_t , non è necessario che queste siano geodetiche né che l'intersezione avvenga ortogonalmente. La funzione t può fungere da parametro così che t^α sia il vettore tangente e:

$$t^\alpha \partial_\alpha t = 1. \quad (3.5)$$

In questo modo, una curva γ_p definisce una mappa da un punto $P \in \Sigma_t$ a $P' \in \Sigma_{t'}$, $P'' \in \Sigma_{t''}$ e così via (si veda figura 3.1).

Date $y^\alpha(P)$ su Σ_t si fissano le coordinate di P' e P'' imponendo $y^\alpha(P'') = y^\alpha(P') = y^\alpha(P)$ così che y^α rimangano costanti su ciascun membro della congruenza.

Questa costruzione definisce un sistema di riferimento (t, y^α) in $\mathcal{V}$ ed esiste una trasformazione tra questo e quello originario $x^\alpha = x^\alpha(t, y^\alpha)$ tale che:

$$t^\alpha = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \right)_{y^a} \quad (3.6)$$

e i vettori tangenti su Σ_t sono:

$$e_a^\alpha = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \right)_t. \quad (3.7)$$

Queste relazioni implicano $t^\alpha \stackrel{*}{=} \delta_t^\alpha$, $e_a^\alpha \stackrel{*}{=} \delta_a^\alpha$ nelle coordinate (t, y^a) e:

$$\mathcal{L}_t e_a^\alpha = 0. \quad (3.8)$$

Per i versori normali n_α valgono:

$$n_\alpha = -N \partial_\alpha t, \quad n_\alpha e_a^\alpha = 0, \quad (3.9)$$

dove la funzione scalare N è detta *lapse* e garantisce che n_α sia correttamente normalizzato. Poiché le curve γ non intersecano Σ_t ortogonalmente, il quadrivettore t^α

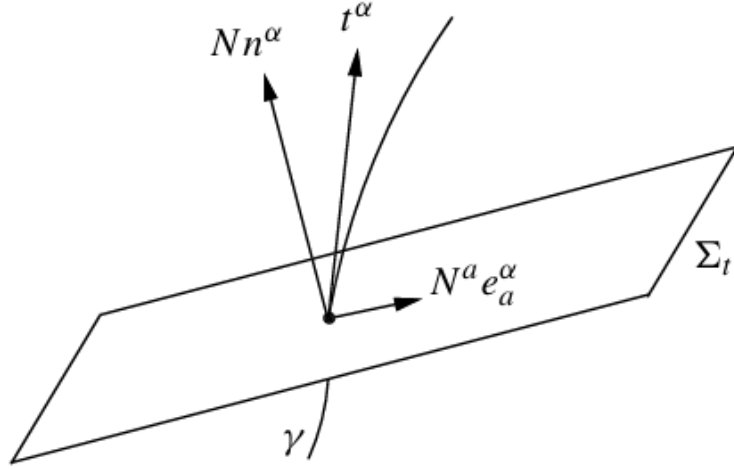


Figura 3.2: Decomposizione di t^α in *lapse* e *shift*.

non risulta parallelo a n^α ed ammette una decomposizione del tipo (si veda figura 3.2):

$$t^\alpha = N n^\alpha + N^a e_a^\alpha, \quad (3.10)$$

dove il vettore N^a è detto *shift*.

Usando il cambio di coordinate $x^\alpha = x^\alpha(t, y^a)$ si esprime la metrica nelle (t, y^a) sostituendo:

$$dx^\alpha = t^\alpha dt + e_a^\alpha dy^a = (N dt) n^\alpha + (dy^a + N^a dt) e_a^\alpha \quad (3.11)$$

nell'intervallo spaziotemporale:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ab} (dy^a + N^a dt) (dy^b + N^b dt). \quad (3.12)$$

Il determinante della metrica g può essere espresso tramite $h \equiv \det[h_{ab}]$ e N dato che $g^{tt} = \text{cofattore}(g_{tt})/g = h/g$, ma $g^{tt} = g^{\alpha\beta} t_{,\alpha} t_{,\beta} = N^{-2} g^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta$ e l'espressione cercata è:

$$\sqrt{-g} = N \sqrt{h}. \quad (3.13)$$

3.2 Formalismo Hamiltoniano per una Teoria di Campo

Il punto di partenza della formulazione Hamiltoniana di una teoria di campo (che per semplicità si assumerà scalare), consiste nel definire la *derivata temporale* di q eguagliandola alla derivata di Lie lungo le curve del campo vettoriale t^α :

$$\dot{q} \equiv \mathcal{L}_t q. \quad (3.14)$$

Nelle coordinate (t, y^a) , $\mathcal{L}_t q \stackrel{*}{=} \partial q / \partial t$ e $\dot{q}$ si riduce alla derivata temporale ordinaria. Le derivate spaziali del campo sono $q_{,a} \equiv q_{,\alpha} e_a^\alpha$, la densità di Lagrangiana assume la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, q_{,a})$ e il momento coniugato:

$$p = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}). \quad (3.15)$$

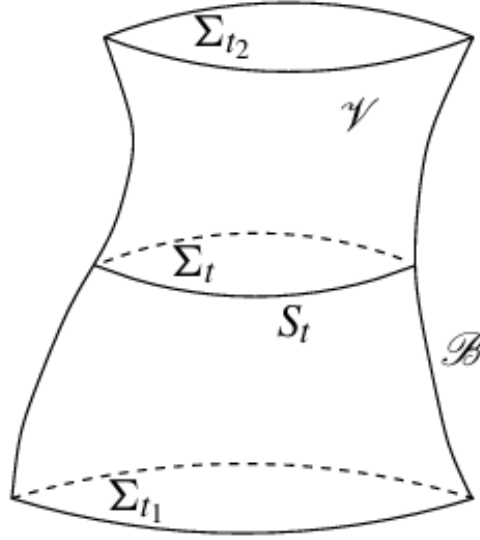


Figura 3.3: la regione $\mathcal{V}$, la sua frontiera $\partial\mathcal{V}$ e le loro foliazioni.

Si suppone che la relazione precedente possa essere invertita per ottenere $\dot{q}$ in funzione di q, q_a e p .

La densità di Hamiltoniana risulta essere:

$$\mathcal{H}(p, q, q_a) = p\dot{q} - \sqrt{-g}\mathcal{L}, \quad (3.16)$$

la presenza di $\sqrt{-g}$ nell'espressione implica che questa non sia uno scalare rispetto alla trasformazione $y^a \rightarrow y^{a'}$.

Il funzionale Hamiltoniano è definito come:

$$H[p, q] = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}(p, q, q_a) d^3y. \quad (3.17)$$

Si consideri una regione $\mathcal{V}$ dello spaziotempo foliata da superfici Σ_t di tipo spazio limitate dalle S_t (si veda figura 3.3), la frontiera di $\mathcal{V}$ è composta da $\Sigma_{t_1}, \Sigma_{t_2}$ e $\mathcal{B}$: l'unione di tutte le S_t . Per ottenere la forma Hamiltoniana delle equazioni di campo si varia l'azione rispetto a q e p con la condizione che δq si annulli su $\Sigma_{t_1}, \Sigma_{t_2}$ e $\mathcal{B}$. Il funzionale d'azione è:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} (p\dot{q} - \mathcal{H}) d^3y \quad (3.18)$$

e la sua variazione:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \left(p\delta\dot{q} + \dot{q}\delta p - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}\delta p - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}\delta q - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_a}\delta q_a \right) d^3y. \quad (3.19)$$

Il primo termine nell'espressione precedente si può integrare per parti tenendo conto che $\delta q = 0$ su Σ_{t_1} e Σ_{t_2} :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} p \delta \dot{q} d^3y &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} p \delta q d^3y - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \dot{p} \delta q d^3y \\ &= \int_{\Sigma_{t_2}} p \delta q d^3y - \int_{\Sigma_{t_1}} p \delta q d^3y - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \dot{p} \delta q d^3y \quad (3.20) \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \dot{p} \delta q d^3y, \end{aligned}$$

mentre l'ultimo si riscrive come:

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{,a}} \delta q_{,a} d^3y &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \frac{\partial \mathcal{H}_{scalare}}{\partial q_{,a}} \delta q_{,a} \sqrt{h} d^3y \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \oint_{S_t} \frac{\partial \mathcal{H}_{scalare}}{\partial q_{,a}} \delta q dS_a \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_{scalare}}{\partial q_{,a}} \right)_{|a} \delta q \sqrt{h} d^3y \quad (3.21) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{,a}} \right)_{,a} \delta q d^3y; \end{aligned}$$

con $\mathcal{H} = \sqrt{h} \mathcal{H}_{scalare} = \sqrt{-g} \mathcal{H}_{scalare} / N$. Nella seconda riga di 3.21 è stata usata la versione tridimensionale del teorema di Gauss, con dS_a che denota l'elemento di superficie di S_t , mentre nella terza la formula della divergenza $A_{|a}^a = h^{-1/2} (h^{1/2} A^a)_{,a}$ e il fatto che $\delta q = 0$ su S_t .

Mettendo tutto insieme si trova:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \left\{ - \left[\dot{p} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{,a}} \right)_{,a} \right] \delta q + \left[\dot{q} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right] \delta p \right\} d^3y \quad (3.22)$$

e imponendo la condizione di stazionarietà:

$$\delta S = 0 \Rightarrow \dot{p} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{,a}} \right)_{,a}, \quad \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}; \quad (3.23)$$

queste sono le equazioni di Hamilton per un campo scalare q e il suo momento coniugato p .

3.3 Foliazione della Frontiera

Prima di affrontare il caso del campo gravitazionale è necessario fornire ulteriori dettagli sulla foliazione di $\mathcal{B}$: la frontiera di tipo tempo di $\mathcal{V}$ composta dalle superfici S_t .

Ciascuna Σ_t è dotata di coordinate y^a , vettori tangenti e_a^α e metrica indotta h_{ab} . La frontiera S_t è descritta da un'equazione del tipo $\Phi(y^a) = 0$ o tramite relazioni

parametriche $y^a(\theta^A)$; dove θ^A sono le coordinate intrinseche di S_t .

Di seguito, si indica con r_a il versore normale di S_t con quadrivettore associato r^α :

$$r^\alpha = r_a e_a^\alpha \quad (3.24)$$

che soddisfa $r^\alpha r_\alpha = 1$ e $r^\alpha n_\alpha = 0$; dove n^α è il versore normale a Σ_t . I vettori $e_A^\alpha = \partial y^a / \partial \theta^A$ sono tangenti a S_t così che $r_a e_A^\alpha = 0$ dalla quale segue $r_\alpha e_A^\alpha = 0$; con:

$$e_A^\alpha \equiv e_a^\alpha e_A^a = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta^A}. \quad (3.25)$$

Nell'equazione precedente, per x^α si intende $x^\alpha(y^a(\theta^A))$, dove $x^\alpha(y^a)$ sono le relazioni parametriche che descrivono Σ_t .

La metrica indotta su S_t è:

$$ds^2 = \sigma_{AB} d\theta^A d\theta^B, \quad (3.26)$$

con $\sigma_{AB} = h_{ab} e_A^a e_B^b = (g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta) e_A^a e_B^b$ o, usando 3.25:

$$\sigma_{AB} = g_{\alpha\beta} e_A^\alpha e_B^\beta. \quad (3.27)$$

Il suo inverso σ^{AB} compare in $h^{ab} = r^a r^b + \sigma^{AB} e_A^a e_B^b$ e la relazione di completezza $g^{\alpha\beta} = -n^\alpha n^\beta + h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta$ si esprime come:

$$g^{\alpha\beta} = -n^\alpha n^\beta + r^\alpha r^\beta + \sigma^{AB} e_A^\alpha e_B^\beta. \quad (3.28)$$

La curvatura estrinseca di S_t immersa in Σ_t è $k_{AB} = r_{a|b} e_A^a e_B^b$ o alternativamente:

$$k_{AB} = r_{\alpha;\beta} e_A^\alpha e_B^\beta; \quad (3.29)$$

il simbolo k ne indica la traccia: $k = \sigma^{AB} k_{AB}$.

A priori, le coordinate θ^A non sono correlate, per ovviare a ciò si considera una congruenza di curve β su $\mathcal{B}$ che intersecano le superfici S_t ortogonalmente così che n^α sia il vettore tangente. Successivamente si impone che le coordinate θ^A assegnate ai punti P' e P'' , ottenuti dall'intersezione di una delle curve con $S_{t'}$ e $S_{t''}$ rispettivamente, coincidano. Dato che θ^A non varia lungo i membri della congruenza e che questi possono essere parametrizzati da t vale:

$$n^\alpha = N^{-1} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \right)_{\theta^A}; \quad (3.30)$$

questa costruzione assicura che n^α e e_A^α siano dappertutto ortogonali.

Su $\mathcal{B}$ si introducono le coordinate z^i , i vettori tangenti $e_i^\alpha = \partial x^\alpha / \partial z^i$ e la metrica indotta:

$$\gamma_{ij} = g_{\alpha\beta} e_i^\alpha e_j^\beta, \quad (3.31)$$

con inversa γ^{ij} . La relazione di completezza assume la forma:

$$g^{\alpha\beta} = r^\alpha r^\beta + \gamma^{ij} e_i^\alpha e_j^\beta \quad (3.32)$$

e sebbene le coordinate siano arbitrarie, la scelta $z^i = (t, \theta^A)$ è ovviamente conveniente. In queste, uno spostamento su $\mathcal{B}$ è descritto da:

$$\begin{aligned} dx^\alpha &= \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \right)_{\theta^A} dt + \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta^A} \right)_t d\theta^A \\ &= N n^\alpha dt + e_A^\alpha d\theta^A \end{aligned} \quad (3.33)$$

e l'intervallo spaziotemporale diventa:

$$\begin{aligned} ds_{\mathcal{B}}^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= g_{\alpha\beta} (N n^\alpha dt + e_A^\alpha d\theta^A) (N n^\beta dt + e_B^\beta d\theta^B) \\ &= (g_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta) N^2 dt^2 + (g_{\alpha\beta} e_A^\alpha e_B^\beta) d\theta^A d\theta^B. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Da questa si ricava:

$$\gamma_{ij} dz^i dz^j = -N^2 dt^2 + \sigma_{AB} d\theta^A d\theta^B \quad (3.35)$$

che implica $\sqrt{-\gamma} = N\sqrt{\sigma}$, dove γ e σ sono i determinanti di γ_{ij} e σ_{AB} rispettivamente. Infine, si definisce la curvatura estrinseca $\mathcal{K}_{ij}$ di $\mathcal{B}$ come:

$$\mathcal{K}_{ij} = r_{\alpha;\beta} e_i^\alpha e_j^\beta \quad (3.36)$$

e il simbolo $\mathcal{K}$ ne indica la traccia $\mathcal{K} = \gamma^{ij} \mathcal{K}_{ij}$.

3.4 Azione del Campo Gravitazionale

Il primo passo nella costruzione dell'Hamiltoniana del campo gravitazionale consiste nell'applicare la decomposizione 3 + 1 all'azione:

$$(16\pi)S_G = \int_{\mathcal{V}} R\sqrt{-g} d^4x + 2 \oint_{\partial\mathcal{V}} \varepsilon K \sqrt{|h|} d^3y; \quad (3.37)$$

dove è stato omesso il termine non dinamico S_0 che verrà reinserito alla fine. La frontiera $\partial\mathcal{V}$ è l'unione delle superfici di tipo spazio Σ_{t_1} e Σ_{t_2} con quella di tipo tempo $\mathcal{B}$:

$$\partial\mathcal{V} = \Sigma_{t_2} \cup (-\Sigma_{t_1}) \cup \mathcal{B}, \quad (3.38)$$

il segno meno su Σ_{t_1} è necessario perché, mentre la normale a $\partial\mathcal{V}$ deve essere diretta verso l'esterno, quella di Σ_{t_1} va orientata verso il futuro e dunque all'interno.

L'azione può essere riscritta come:

$$\begin{aligned} (16\pi)S_G &= \int_{\mathcal{V}} R\sqrt{-g} d^4x - 2 \int_{\Sigma_{t_2}} K \sqrt{h} d^3y + 2 \int_{\Sigma_{t_1}} K \sqrt{h} d^3y \\ &\quad + 2 \int_{\mathcal{B}} \mathcal{K} \sqrt{-\gamma} d^3z. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Su Σ_t , lo scalare di Ricci assume la forma:

$$R = {}^3R + K^{ab}K_{ab} - K^2 - 2(n^\alpha_{;\beta}n^\beta - n^\alpha n^\beta_{;\beta})_{;\alpha} \quad (3.40)$$

e riscrivendo 3.13 come $\sqrt{-g} d^4x = N\sqrt{h} dt d^3y$ si trova:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} R\sqrt{-g} d^4x &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} ({}^3R + K^{ab}K_{ab} - K^2) N\sqrt{h} d^3y \\ &\quad - 2 \oint_{\partial\mathcal{V}} (n^\alpha_{;\beta}n^\beta - n^\alpha n^\beta_{;\beta}) d\Sigma_\alpha. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Il nuovo termine di frontiera si può separare in integrali su Σ_{t_1} , Σ_{t_2} e $\mathcal{B}$.
 Su Σ_{t_1} , $d\Sigma_\alpha = n_\alpha \sqrt{h} d^3y$ e:

$$-2 \int_{\Sigma_{t_1}} (n^\alpha_{;\beta} n^\beta - n^\alpha n^\beta_{;\beta}) d\Sigma_\alpha = -2 \int_{\Sigma_{t_1}} n^\beta_{;\beta} \sqrt{h} d^3y = -2 \int_{\Sigma_{t_1}} K \sqrt{h} d^3y \quad (3.42)$$

che semplifica l'integrale su Σ_{t_1} proveniente dal termine di frontiera originale; la stessa conclusione è valida anche per Σ_{t_2} .

Sopravvive un contributo da $\mathcal{B}$ per il quale $d\Sigma_\alpha = r_\alpha \sqrt{-\gamma} d^3z$ che implica:

$$\begin{aligned} -2 \int_{\mathcal{B}} (n^\alpha_{;\beta} n^\beta - n^\alpha n^\beta_{;\beta}) d\Sigma_\alpha &= -2 \int_{\mathcal{B}} n^\alpha_{;\beta} n^\beta r_\alpha \sqrt{-\gamma} d^3z \\ &= 2 \int_{\mathcal{B}} r_{\alpha;\beta} n^\alpha n^\beta \sqrt{-\gamma} d^3z. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Mettendo tutto insieme:

$$\begin{aligned} (16\pi) S_G &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} (^3R + K^{ab} K_{ab} - K^2) N \sqrt{h} d^3y \\ &\quad + 2 \int_{\mathcal{B}} (\mathcal{K} + r_{\alpha;\beta} n^\alpha n^\beta) \sqrt{-\gamma} d^3z. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Sostituendo $\sqrt{-\gamma} d^3z = N \sqrt{\sigma} dt d^2\theta$ ed esprimendo $\mathcal{K}$ come:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \gamma^{ij} \mathcal{K}_{ij} \\ &= \gamma^{ij} (r_{\alpha;\beta} e_i^\alpha e_j^\beta) \\ &= r_{\alpha;\beta} (\gamma^{ij} e_i^\alpha e_j^\beta) \\ &= r_{\alpha;\beta} (g^{\alpha\beta} - r^\alpha r^\beta), \end{aligned} \quad (3.45)$$

l'integrando diventa:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} + r_{\alpha;\beta} n^\alpha n^\beta &= r_{\alpha;\beta} (g^{\alpha\beta} - r^\alpha r^\beta + n^\alpha n^\beta) \\ &= r_{\alpha;\beta} (\sigma^{AB} e_A^\alpha e_B^\beta) \\ &= \sigma^{AB} (r_{\alpha;\beta} e_A^\alpha e_B^\beta) \\ &= \sigma^{AB} k_{AB} \\ &= k \end{aligned} \quad (3.46)$$

che sostituita in 3.44 restituisce:

$$\begin{aligned} S_G &= \frac{1}{16\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_{\Sigma_t} (^3R + K^{ab} K_{ab} - K^2) N \sqrt{h} d^3y \right. \\ &\quad \left. + 2 \oint_{S_t} (k - k_0) N \sqrt{\sigma} d^2\theta \right]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

La presenza di k_0 previene la divergenza per $S_t \rightarrow \infty$ e garantisce che l'azione si annulli su uno spaziotempo piatto.

La decomposizione 3+1 dovrebbe essere applicata anche al termine di massa-energia nell'azione 2.8, ma questo passaggio verrà omesso per semplicità.

3.5 Hamiltoniana del Campo Gravitazionale

Per costruire l'Hamiltoniana del campo gravitazionale è necessario esprimere S_G in termini di:

$$\dot{h}_{ab} \equiv \mathcal{L}_t h_{ab}. \quad (3.48)$$

Usando la definizione della metrica indotta 3.8, l'espressione precedente diventa:

$$\dot{h}_{ab} = \mathcal{L}_t(g_{\alpha\beta}e_a^\alpha e_b^\beta) = (\mathcal{L}_t g_{\alpha\beta})e_a^\alpha e_b^\beta \quad (3.49)$$

per via di 3.10, la derivata di Lie della metrica è pari a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t g_{\alpha\beta} &= t_{\alpha;\beta} + t_{\beta;\alpha} \\ &= (Nn_\alpha + N_\alpha)_{;\beta} + (Nn_\beta + N_\beta)_{;\alpha} \\ &= n_\alpha N_{;\beta} + N_{;\alpha} n_\beta + N(n_{\alpha;\beta} + n_{\beta;\alpha}) + N_{\alpha;\beta} + N_{\beta;\alpha}; \end{aligned} \quad (3.50)$$

dove $N^\alpha = N^a e_a^\alpha$. Proiettando su $e_a^\alpha e_b^\beta$ si ottiene:

$$\dot{h}_{ab} = 2NK_{ab} + N_{a|b} + N_{b|a} \quad (3.51)$$

dalla quale si ricava:

$$K_{ab} = \frac{1}{2N}(\dot{h}_{ab} - N_{a|b} - N_{b|a}). \quad (3.52)$$

L'azione gravitazionale dipende da $\dot{h}_{ab}$ attraverso la curvatura estrinseca, ma non dipende da $\dot{N}$ e $\dot{N}^a$ e i rispettivi momenti coniugati risultano nulli.

Dunque, a differenza di h_{ab} , *lapse* e *shift* non sono variabili dinamiche, questo è ovvio dal momento che N e N^a servono unicamente a specificare la foliazione di $\mathcal{V}$ che è interamente arbitraria.

Il momento coniugato a h_{ab} è definito come:

$$p^{ab} = \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ab}}(\sqrt{-g}\mathcal{L}_G), \quad (3.53)$$

dove $\mathcal{L}_G$ è il termine "di volume" della Lagrangiana gravitazionale.

Risulta conveniente esprimere 3.53 nella forma:

$$(16\pi)p^{ab} = \frac{\partial K_{mn}}{\partial \dot{h}_{ab}} \frac{\partial}{\partial K_{mn}}(16\pi\sqrt{-g}\mathcal{L}_G), \quad (3.54)$$

con:

$$16\pi\sqrt{-g}\mathcal{L}_G = [{}^3R + (h^{ac}h^{bd} - h^{ab}h^{cd})K_{ab}K_{cd}]N\sqrt{h}. \quad (3.55)$$

Valutando le derivate parziali di 3.54 si ricava:

$$(16\pi)p^{ab} = \sqrt{h}(K^{ab} - Kh^{ab}) \quad (3.56)$$

e il termine "di volume" della densità di Hamiltoniana è:

$$\mathcal{H}_G = p^{ab}\dot{h}_{ab} - \sqrt{-g}\mathcal{L}_G. \quad (3.57)$$

Dai risultati precedenti:

$$\begin{aligned}
(16\pi)\mathcal{H}_G &= \sqrt{h}(K^{ab} - Kh^{ab})(2NK_{ab} + N_{a|b} + N_{b|a}) \\
&\quad - ({}^3R + K^{ab}K_{ab} - K^2)N\sqrt{h} \\
&= (K^{ab}K_{ab} - K^2 - {}^3R)N\sqrt{h} + 2(K^{ab} - Kh^{ab})N_{a|b}\sqrt{h} \\
&= (K^{ab}K_{ab} - K^2 - {}^3R)N\sqrt{h} + 2[(K^{ab} - Kh^{ab})N_a]_{|b}\sqrt{h} \\
&\quad - 2(K^{ab} - Kh^{ab})_{|b}N_a\sqrt{h}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

e l'Hamiltoniana completa si ottiene integrando $\mathcal{H}_G$ su Σ_t con l'aggiunta dei termini di frontiera:

$$\begin{aligned}
(16\pi)H_G &= \int_{\Sigma_t} 16\pi\mathcal{H}_G d^3y - 2 \oint_{S_t} (k - k_0)N\sqrt{\sigma} d^2\theta \\
&= \int_{\Sigma_t} \left[N(K^{ab}K_{ab} - K^2 - {}^3R) - 2N_a(K^{ab} - Kh^{ab})_{|b} \right] \sqrt{h} d^3y \\
&\quad + 2 \oint_{S_t} (K^{ab} - Kh^{ab})N_a dS_b - 2 \oint_{S_t} (k - k_0)N\sqrt{\sigma} d^2\theta.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Ricordando che $dS_b = r_b\sqrt{\sigma} d^2\theta$, l'espressione precedente diventa:

$$\begin{aligned}
(16\pi)H_G &= \int_{\Sigma_t} \left[N(K^{ab}K_{ab} - K^2 - {}^3R) - 2N_a(K^{ab} - Kh^{ab})_{|b} \right] \sqrt{h} d^3y \\
&\quad - 2 \oint_{S_t} \left[N(k - k_0) - N_a(K^{ab} - Kh^{ab})r_b \right] \sqrt{\sigma} d^2\theta,
\end{aligned} \tag{3.60}$$

dove K^{ab} è la funzione di h^{ab} , p^{ab} e $p \equiv h_{ab}p^{ab}$ data da:

$$\sqrt{h}K^{ab} = 16\pi \left(p^{ab} - \frac{1}{2}ph^{ab} \right). \tag{3.61}$$

3.6 Variazione dell'Hamiltoniana Gravitazionale

Le equazioni del moto del campo gravitazionale si ottengono variando 3.47 rispetto a N , N^a , h_{ab} e p^{ab} e applicando le condizioni:

$$\delta N = \delta N^a = \delta h_{ab} = 0 \quad \text{su } S_t. \tag{3.62}$$

La variazione rispetto a N e N^a può essere calcolata tenendo conto di 3.62, in questo modo 3.60 fornisce:

$$(16\pi)\delta_N H_G = \int_{\Sigma_t} (-\tilde{C}\delta N - 2\tilde{C}_a\delta N^a)\sqrt{h} d^3y, \tag{3.63}$$

dove:

$$\tilde{C} \equiv {}^3R + K^2 - K^{ab}K_{ab}, \quad \tilde{C}_a \equiv (K_a^b - K\delta_a^b)_{|b}. \tag{3.64}$$

Per calcolare quelle corrispondenti a h_{ab} e p^{ab} si esprime H_G in funzione di queste variabili. Da 3.61 segue che:

$$(16\pi)H_G = \tilde{H}_\Sigma + \tilde{H}_S, \tag{3.65}$$

dove:

$$\tilde{H}_\Sigma = \int_{\Sigma_t} \left[N h^{-1/2} \left(\tilde{p}^{ab} \tilde{p}_{ab} - \frac{1}{2} \tilde{p}^2 \right) - N h^{1/2} {}^3R - 2 N_a h^{1/2} (h^{-1/2} \tilde{p}^{ab})_{|b} \right] d^3y \quad (3.66)$$

è il termine di volume, mentre:

$$\tilde{H}_S = -2 \oint_{S_t} \left[N (k - k_0) - N_a h^{-1/2} \tilde{p}^{ab} r_b \right] \sqrt{\sigma} d^2\theta \quad (3.67)$$

quello di frontiera.

Nelle equazioni precedenti, sono stati introdotti i simboli $\tilde{H}_\Sigma \equiv (16\pi)H_\Sigma$, $\tilde{p}^{ab} \equiv (16\pi)p^{ab}$ e così via.

Facendo uso di 3.66, la variazione di $\tilde{H}_G$ rispetto a $\tilde{p}^{ab}$ è:

$$\delta_p \tilde{H}_\Sigma = \int_{\Sigma_t} N h^{-1/2} \delta_p \left(\tilde{p}^{ab} \tilde{p}_{ab} - \frac{1}{2} \tilde{p}^2 \right) d^3y - 2 \delta_p \int_{\Sigma_t} N_a (h^{-1/2} \tilde{p}^{ab})_{|b} h^{1/2} d^3y, \quad (3.68)$$

sostituendo:

$$\delta_p \left(\tilde{p}^{ab} \tilde{p}_{ab} - \frac{1}{2} \tilde{p}^2 \right) = 2 \left(\tilde{p}_{ab} - \frac{1}{2} \tilde{p} h_{ab} \right) \delta \tilde{p}^{ab} \quad (3.69)$$

all'interno del primo integrale che compare in 3.68 e integrando per parti il secondo si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta_p \tilde{H}_\Sigma &= \int_{\Sigma_t} 2 \left[N h^{-1/2} \left(\tilde{p}_{ab} - \frac{1}{2} \tilde{p} h_{ab} \right) + N_{(a|b)} \right] \delta \tilde{p}^{ab} d^3y \\ &\quad - 2 \oint_{S_t} N_a h^{-1/2} \delta \tilde{p}^{ab} r_b \sqrt{\sigma} d^2\theta. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Il termine di frontiera nell'espressione precedente è l'opposto della variazione di $\tilde{H}_S$, pertanto:

$$\delta_p \tilde{H}_G = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}_{ab} \delta \tilde{p}^{ab} d^3y, \quad (3.71)$$

dove:

$$\mathcal{H}_{ab} = 2 N h^{-1/2} \left(\tilde{p}_{ab} - \frac{1}{2} \tilde{p} h_{ab} \right) + 2 N_{(a|b)}. \quad (3.72)$$

Per variare $\tilde{H}_G$ rispetto a h_{ab} si integra per parti l'ultimo termine di 3.66 ottenendo:

$$\begin{aligned} \delta_h \tilde{H}_\Sigma &= \int_{\Sigma_t} \left[- N h^{-1} \left(\tilde{p}^{ab} \tilde{p}_{ab} - \frac{1}{2} \tilde{p}^2 \right) \delta_h h^{1/2} + N h^{-1/2} \delta_h \left(\tilde{p}^{ab} \tilde{p}_{ab} - \frac{1}{2} \tilde{p}^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - N \delta_h (h^{1/2} {}^3R) \right] d^3y - 2 \delta_h \oint_{S_t} N_a h^{-1/2} \tilde{p}^{ab} r_b \sqrt{\sigma} d^2\theta \\ &\quad + 2 \delta_h \int_{\Sigma_t} N_{a|b} \tilde{p}^{ab} d^3y; \end{aligned} \quad (3.73)$$

si noti che la variazione dell'integrale su S_t svanisce dal momento che h_{ab} è fissata. Nel primo termine del risultato precedente si sostituisce:

$$\delta_h h^{1/2} = \frac{1}{2} h^{1/2} h^{ab} \delta h_{ab}, \quad (3.74)$$

mentre nel secondo:

$$\delta_h \left(\tilde{p}^{ab} \tilde{p}_{ab} - \frac{1}{2} \tilde{p}^2 \right) = 2 \left(\tilde{p}_c^a \tilde{p}^{cb} - \frac{1}{2} \tilde{p} \tilde{p}^{ab} \right) \delta h_{ab} \quad (3.75)$$

e la versione tridimensionale dell'equazione 2.18 nel terzo:

$$\delta_h \left(h^{1/2} {}^3R \right) = -h^{1/2} G^{ab} \delta h_{ab} + h^{1/2} \Delta v_{|c}^c; \quad (3.76)$$

dove $G^{ab} = R^{ab} - \frac{1}{2} {}^3R h^{ab}$ è il tre-tensore di Einstein e $\Delta v^c = h^{ab} \delta \Gamma_{ab}^c - h^{ac} \delta \Gamma_{ab}^b$. Infine, nell'ultimo si sostituisce:

$$\delta_h N_{a|b} = N_{|b}^c \delta h_{ac} + h_{ac} N^d \delta \Gamma_{bd}^c \quad (3.77)$$

e dopo qualche passaggio algebrico si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta_h \tilde{H}_\Sigma = & \int_{\Sigma_t} \left[-\frac{1}{2} N h^{-1/2} \left(\tilde{p}^{cd} \tilde{p}_{cd} - \frac{1}{2} \tilde{p}^2 \right) h^{ab} + 2 N h^{-1/2} \left(\tilde{p}_c^a \tilde{p}^{bc} - \frac{1}{2} \tilde{p} \tilde{p}^{ab} \right) \right. \\ & + N h^{1/2} G^{ab} + 2 \tilde{p}^{c(a} N_{|c}^{b)} \left. \right] \delta h_{ab} d^3 y \\ & + \int_{\Sigma_t} \left[-N h^{1/2} \Delta v_{|c}^c + 2 \tilde{p}_c^b N^d \delta \Gamma_{bd}^c \right] d^3 y. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Un'integrazione per parti del primo termine nel secondo integrale e la versione tridimensionale di 2.22 restituiscono:

$$\begin{aligned} - \int_{\Sigma_t} N h^{1/2} \Delta v_{|c}^c d^3 y &= \int_{\Sigma_t} N_{,c} \Delta v^c h^{1/2} d^3 y - \oint_{S_t} N \Delta v^c r_c \sqrt{\sigma} d^2 \theta \\ &= \int_{\Sigma_t} N_{,c} \Delta v^c h^{1/2} d^3 y + \oint_{S_t} N h^{ab} \delta h_{ab,c} r^c \sqrt{\sigma} d^2 \theta. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Per esprimere il primo integrale dell'equazione precedente in termini di δh_{ab} si usa:

$$\delta \Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} h^{cd} [(\delta h_{da})_{|b} + (\delta h_{db})_{|a} - (\delta h_{ab})_{|d}] \quad (3.80)$$

dalla quale si ricava:

$$\Delta v^c = \frac{1}{2} (h^{ab} h^{cd} - h^{ac} h^{bd}) [(\delta h_{da})_{|b} + (\delta h_{db})_{|a} - (\delta h_{ab})_{|d}] \quad (3.81)$$

e successivamente:

$$\begin{aligned} N_{,c} \Delta v^c &= \frac{1}{2} (h^{ab} N^{,d} - N^{,a} h^{bd}) [(\delta h_{da})_{|b} + (\delta h_{db})_{|a} - (\delta h_{ab})_{|d}] \\ &= - (h^{ab} N^{,d} - N^{,a} h^{bd}) (\delta h_{ab})_{|d}; \end{aligned} \quad (3.82)$$

la seconda riga è conseguenza dell'antisimmetria negli indici a e b del primo fattore. Dopo un'ulteriore integrazione per parti si ottiene:

$$\begin{aligned} - \int_{\Sigma_t} N h^{1/2} \Delta v_{|c}^c d^3 y &= \int_{\Sigma_t} (h^{ab} N^{,d} - N^{,ab}) \delta h_{ab} h^{1/2} d^3 y \\ &+ \oint_{S_t} N h^{ab} \delta h_{ab,c} r^c \sqrt{\sigma} d^2 \theta \end{aligned} \quad (3.83)$$

che rende conto del primo termine all'interno del secondo integrale per $\delta_h \tilde{H}_\Sigma$ e per quanto riguarda il secondo:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} 2\tilde{p}^b{}_c N^d \delta \Gamma^c{}_{bd} d^3y &= \int_{\Sigma_t} \tilde{p}^{ab} N^d [(\delta h_{ab})|_d + (\delta h_{ad})|_b - (\delta h_{bd})|_a] d^3y \\ &= \int_{\Sigma_t} h^{-1/2} \tilde{p}^{ab} N^d (\delta h_{ab})|_d h^{1/2} d^3y \\ &= - \int_{\Sigma_t} (h^{-1/2} \tilde{p}^{ab} N^d)|_d \delta h_{ab} h^{1/2} d^3y. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Mettendo tutto insieme si trova che la variazione del termine di volume è data da:

$$\delta_h \tilde{H}_\Sigma = \int_{\Sigma_t} \tilde{\mathcal{P}}^{ab} \delta h_{ab} d^3y + \oint_{S_t} N h^{ab} \delta h_{ab,c} r^c \sqrt{\sigma} d^2\theta, \quad (3.85)$$

mentre per quello di frontiera:

$$\delta_h \tilde{H}_S = -2 \oint_{S_t} N \delta k \sqrt{\sigma} d^2\theta, \quad (3.86)$$

dove $\delta k = \frac{1}{2} h^{ab} \delta h_{ab,c} r^c$ è l'analogo tridimensionale di 2.25, dunque:

$$\delta_h \tilde{H}_S = - \oint_{S_t} N h^{ab} \delta h_{ab,c} r^c \sqrt{-\sigma} d^2\theta \quad (3.87)$$

e quest'ultimo semplifica l'integrale di frontiera in $\delta_h \tilde{H}_\Sigma$. La variazione rispetto a h_{ab} è:

$$\delta_h \tilde{H}_G = \int_{\Sigma_t} \tilde{\mathcal{P}}^{ab} \delta h_{ab} d^3y, \quad (3.88)$$

dove:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}^{ab} &= N h^{1/2} G^{ab} - \frac{1}{2} N h^{-1/2} \left(\tilde{p}^{cd} \tilde{p}_{cd} - \frac{1}{2} \tilde{p}^2 \right) h^{ab} + 2 N h^{-1/2} \left(\tilde{p}^a{}_c \tilde{p}^{bc} - \frac{1}{2} \tilde{p} \tilde{p}^{ab} \right) \\ &\quad - h^{1/2} (N^{[ab} - h^{ab} N^{c]}{}_c) - h^{1/2} (h^{-1/2} \tilde{p}^{ab} N^c)|_c + 2 \tilde{p}^{c(a} N^{b)}|_c. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Combinando 3.63, 3.71 e 3.88, la variazione completa dell'Hamiltoniana gravitazionale con le condizioni 3.62 è data da:

$$\delta H_G = \int_{\Sigma_t} \left(\mathcal{P}^{ab} \delta h_{ab} + \mathcal{H}_{ab} \delta p^{ab} - \mathcal{C} \delta N - 2 \mathcal{C}_a \delta N^a \right) d^3y, \quad (3.90)$$

con $\mathcal{P}^{ab} \equiv \tilde{\mathcal{P}}^{ab}/(16\pi)$, $\mathcal{C} \equiv \tilde{\mathcal{C}}/(16\pi)$ e $\mathcal{C}^a \equiv \tilde{\mathcal{C}}^a/(16\pi)$.

3.7 Equazioni di Hamilton

Per ricavare le equazioni di Hamilton si esprime 2.8 rispetto alle variabili indipendenti N, N^a, h_{ab} e p^{ab} :

$$S_G = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_{\Sigma_t} p^{ab} \dot{h}_{ab} d^3y - H_G \right]. \quad (3.91)$$

La variazione dell'espressione precedente è:

$$\delta S_G = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_{\Sigma_t} \left(p^{ab} \delta \dot{h}_{ab} + \dot{h}_{ab} \delta p^{ab} \right) d^3y - \delta H_G \right], \quad (3.92)$$

dove δH_G è data da 3.90. L'integrazione per parti del primo termine restituisce:

$$\delta S_G = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \left[\left(\dot{h}_{ab} - \mathcal{H}_{ab} \right) \delta p^{ab} - \left(\dot{p}^{ab} + \mathcal{P}^{ab} \right) \delta h_{ab} + \mathcal{C} \delta N + 2 \mathcal{C}_a \delta N^a \right] d^3y \quad (3.93)$$

e, richiedendo che l'azione sia stazionaria, si ricavano le equazioni di Einstein per il vuoto in forma Hamiltoniana:

$$\dot{h}_{ab} = \mathcal{H}_{ab}, \quad \dot{p}^{ab} = -\mathcal{P}^{ab}, \quad \mathcal{C} = 0, \quad \mathcal{C}_a = 0 \quad (3.94)$$

Le prime due governano l'evoluzione delle variabili coniugate h_{ab} e p^{ab} ; $\dot{h}_{ab} = \mathcal{H}_{ab}$, in particolare, riproduce le relazioni tra $\dot{h}_{ab}$ e p^{ab} espresse dalle equazioni 3.52 e 3.61. le altre, $\mathcal{C} = 0$ e $\mathcal{C}_a = 0$, sono rispettivamente note come *vincolo Hamiltoniano* e *vincolo del momento* della Relatività Generale.

Per risolvere le equazioni 3.94 si seleziona una foliazione arbitraria dello spaziotempo scegliendo il lapse N e lo shift N^a come funzioni delle $x^\alpha = (t, y^a)$ così che la metrica assuma la forma:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ab}(dy^a + N^a dt)(dy^b + N^b dt). \quad (3.95)$$

Successivamente si scelgono dei valori iniziali per i campi tensoriali h_{ab} e K_{ab} , assicurandosi che rispettino i vincoli:

$${}^3R + K^2 - K^{ab}K_{ab} = 0, \quad (K^{ab} - Kh^{ab})_{|b} = 0. \quad (3.96)$$

Infine si evolvono questi attraverso le equazioni di Hamilton $\dot{h}_{ab} = \mathcal{H}_{ab}$ e $\dot{p}^{ab} = -\mathcal{P}^{ab}$ che possono essere riscritte nella forma:

$$\dot{h}_{ab} = 2NK_{ab} + \mathcal{L}_N h_{ab} \quad (3.97)$$

e:

$$\dot{K}_{ab} = N_{|ab} - N(R_{ab} + KK_{ab} - 2K^c_a K_{bc}) + \mathcal{L}_N K_{ab}; \quad (3.98)$$

con la derivata di Lie diretta lungo N^a .

Conclusione

Sviluppate le formulazioni alternative della teoria, resta da chiarirne l'utilità teorica. Sebbene queste permettano di indagare la dinamica del campo gravitazionale con i metodi della relatività numerica, la loro importanza emerge nella costruzione di una teoria quantistica dell'interazione gravitazionale.

Infatti, la procedura di quantizzazione tramite integrali di cammino necessita del formalismo Lagrangiano, mentre la canonica di quello Hamiltoniano.

La ricerca in questo campo è motivata da:

1. il successo dell'approccio riduzionista con le *teorie quantistiche di campo* che hanno unificato le restanti interazioni fondamentali.
2. L'universalità dell'accoppiamento della gravità ad ogni forma di energia.
3. il fallimento delle teorie semiclassiche.
4. la speranza che l'inclusione della gravità nel regime quantistico, possa finalmente curare le divergenze patologiche delle teorie quantistiche di campo.
5. la necessità di un approccio propriamente quantistico per lo studio delle condizioni iniziali dell'universo in prossimità del Big Bang e degli istanti finali della vita dei buchi neri.
6. la contraddizione tra la meccanica quantistica, nella quale il tempo è una grandezza esterna e assoluta, e la relatività generale che prevede uno spaziotempo dinamico.

Ad oggi, le strade intraprese per la costruzione di tale teoria sono molteplici, tra queste figurano la *gravità quantistica a loop* e la *teoria delle stringhe*.

Solamente ulteriori indagini e verifiche sperimentali potranno mostrare quale approccio descriva effettivamente l'universo, ma è innegabile che i risultati esposti in queste pagine svolgeranno un ruolo notevole nello svelare la vera natura della realtà.

Bibliografia

- S. Carroll, *Spacetime and Geometry*(Cambridge, 2019).
- R. Casadio, *note del corso Elements of General Relativity*(Alma Mater Studiorum-Università di Bologna, 2024).
- C. Kiefer, *quantum gravity*, International Series of Monographs on Physics(OUP, Oxford, 2007).
- E. Poisson, *A Relativist's Toolkit*(Cambridge University Press, 2004).
- B. Schutz, *Geometrical Methods of Mathematical Physics*(Cambridge University Press, 1980).
- B. Schutz, *A First Course in General Relativity*(Cambridge University Press, 2022).
- Robert M. Wald, *General Relativity*(The University of Chicago Press, 1984).