Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

DAL PARADOSSO DI SAN PIETROBURGO AI MODERNI SVILUPPI DELL'UTILITA'

Tesi di Laurea in Teoria delle decisioni

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PAOLO NEGRINI

Presentata da:
CAMILLA PONI

I Sessione
Anno Accademico 2011/2012

Indice

Capitolo 1

Scelte in condizioni di incertezza

La teoria delle decisioni ha il compito di sviluppare un modello del comportamento del consumatore, cioè delle decisioni che vengono prese da uno o più individui compatibilmente con le opportunità di scelta che si possono effettuare. L'analisi delle decisioni del consumatore fornisce una base per interpretare e prevedere il funzionamento del sistema economico. La teoria microeconomica pone un'ipotesi chiave a fondamento della teoria del comportamento del consumatore: quella che il consumatore agisca in modo razionale sulla base di un ben definito sistema di preferenze. Possiamo ulteriormente precisare il significato dell'ipotesi di *comportamento razionale*: esso implica che, in presenza di più alternative possibili (a disposizione), il soggetto razionale scelga quella o quelle che soddisfino al meglio le sue preferenze. L'ipotesi può sembrare ovvia, ma è assai più forte di quanto possa apparire. Si presuppone, infatti, che il soggetto abbia sempre perfetta conoscenza delle proprie preferenze e che sia sempre in grado di stabilire quale delle alternative egli preferisce.

1.1 Il valore atteso

La **teoria della scelta in condizione di incertezza** studia il comportamento economico di agenti razionali di fronte a situazioni di incertezza, ossia situazioni nelle quali le conseguenze delle decisioni da prendere non sono certe. Se nella teoria del consumatore le scelte dei decisori sono tra diversi *paniere di mercato* (dove col termine paniere si vuole indicare un particolare gruppo di beni e servizi; più specificamente, un paniere di mercato è un elenco completo di specifiche quantità di uno o più beni), nella teoria della scelta in condizioni di incertezza le unità oggetto di scelta sono dette *lotterie*. Una lotteria è una distribuzione di probabilità dove per distribuzione di probabilità intendiamo un insieme di eventi/risultati e delle loro rispettive probabilità associate. La tipologia più semplice di lotteria è chiamata appunto lotteria semplice ed è definita come segue. Supponiamo vi siano n possibili risultati, $a_1, a_2, \cdots, a_n$, allora si abbia: $p_i \equiv Prob\{a = a_i\} \;\; \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Le conseguenze $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ devono essere costruite in modo tale da essere:

1. mutuamente esclusive, ossia tali che al più se ne verifichi una;
2. esaustive, ossia tali che necessariamente una si verifichi.

Il terzo assioma di Kolmogorov afferma che la probabilità dell'unione di un numero finito o infinito numerabile di eventi mutuamente esclusivi è pari alla somma delle probabilità di questi eventi e quindi, la probabilità che si verifichi una delle conseguenze, che abbiamo supposto essere tra loro 'disgiunte', è $p_1+p_2+\cdots+p_n$. Ora, siccome una delle conseguenze si verifica sicuramente e la probabilità dell'evento certo è 1 (secondo assioma di Kolmogorov), avremo che $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Infine, per il primo assioma di Kolmogorov, per cui le probabilità devono essere non negative, si ha $p_i \geq 0 \; \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Se le conseguenze le interpretiamo come possibili 'vincite' allora la somma di queste, ognuna pesata con la sua probabilità di accadere, è chiamata *valore atteso* di una certa decisione: $VA = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i$. Un inviduo che effettua una scelta, può comportarsi in modo da massimissare il valore atteso del profitto e in effetti, in certi casi, questo criterio è sufficiente a compiere scelte razionali.

Si pensi, per dare concretezza alla trattazione, alla scelta su come allocare il risparmio da parte di una famiglia. Nel nostro Paese, per esempio, le famiglie possono optare per i depositi bancari (BOT, CCT, BTP, ecc.) o per azioni ed obbligazioni emesse da imprese private, solo per citare le attività finanziarie più diffuse. Se i rendimenti di queste diverse attività fossero certi, tutte le attività dovrebbero fornire, in equilibrio, lo stesso rendimento, perché altrimenti nessuno sarebbe disposto a impiegare i propri risparmi nelle attività che offrono i rendimenti più bassi. In realtà, invece, i rendimenti di almeno alcune attività sono incerti. Si pensi, per esempio, ad un titolo azionario. Il rendimento annuo di una azione è dato dal dividendo distribuito in quell'anno più (o meno) l'incremento (o la diminuzione) nel valore di mercato dell'azione stessa (*capital gain*) nello stesso lasso di tempo. Chiaramente, al momento dell'acquisto dell'azione, l'investitore non può conoscere con esattezza né il valore del dividendo, né quello del *capital gain*. Oppure, si consideri un investitore che partecipa a un'asta per i titoli pubblici. In queste aste è possibile presentare offerte cosiddette *non competitive*, che impegnano il sottoscrittore ad acquistare il titolo (ad es., un BOT annuale) al prezzo di aggiudicazione dell'asta. Questo prezzo è chiaramente ignoto prima che l'asta sia conclusa, e corrispondentemente è incerto il rendimento dell'investimento. Consideriamo un investitore che disponga di un capitale pari a 100 e che deve decidere come impiegarlo per un periodo di tempo prefissato (poniamo un anno). Supponiamo che vi siano due alternative: depositare la somma in banca, oppure acquistare un'azione. Se il capitale viene depositato in banca, si evita qualunque rischio (supponendo che la banca sia pienamente affidabile) e si ottiene un rendimento pari al 10 per cento. In questo modo si potrà disporre *con certezza* dopo un anno di una somma pari a 110.

Prospetto delle alternative	Investimento iniziale	Capitale finale
Deposito in banca	100	110 con certezza
Acquisto di una azione	100	105+(20 con prob. 1/2) 105-(10 con prob. 1/2)

In alternativa, l'investitore può acquistare un'azione il cui prezzo corrente è 100. Come abbiamo visto, il rendimento dell'azione è costituito da due componenti: il dividendo e la variazione del prezzo dell'azione nel periodo di tempo considerato. Supponiamo che si preveda con certezza che il dividendo che sarà distribuito nel corso dell'anno sia pari a 5, ma che vi sia incertezza sul valore dell'azione alla fine del periodo considerato. Supponiamo, per fissare le idee, che si preveda che il prezzo possa salire a 120 con una probabilità del 50 per cento, e che possa scendere a 90 con una probabilità pari ugualmente al 50 per cento. Nel primo caso, l'investitore, vendendo l'azione alla fine del periodo considerato, si ritroverebbe con un capitale complessivo di 125 (120 più il dividendo pari a 5). Il rendimento ottenuto sarebbe quindi uguale al 25 per cento (5 per cento per il dividendo e 20 per cento di *capital gain*). Nel secondo caso, il capitale alla fine del periodo sarebbe solo 95, e quindi il rendimento ottenuto sarebbe negativo e pari a -5 per cento (5 per cento per il dividendo e -10 per cento di *capital gain*, che quindi in questo caso è in realtà una *capital loss*). Quale delle due alternative è preferibile? In prima approssimazione si potrebbe pensare di rispondere nel modo seguente. Ciò che conta è il rendimento che *in media* ciascuna alternativa offre. Investendo in banca si ottiene evidentemente un rendimento del 10 per cento. Acquistando un'azione si può ottenere un rendimento pari al 25 per cento oppure a -5 per cento, il che significa (ricordando che i due eventi hanno la stessa probabilità di verificarsi, pari a 1/2) che in media si ottiene un rendimento del 10 per cento. Dato che offrono lo stesso rendimento medio - così si potrebbe pensare di concludere - i due tipi di investimento sono equivalenti. Tuttavia questa conclusione è eccessivamente affrettata. Non è detto che il *rendimento medio di un investimento* o *valore atteso* sia il criterio appropriato per valutare le diverse opportunità anche se sicuramente è il più antico. Questo concetto era già noto a Pascal sin dalla metà del XVII secolo ed infatti egli, e contemporaneamente anche Huygens, lo adottò per trovare una soluzione al problema della ripartizione equa della posta in gioco nel caso che un gioco d'azzardo debba essere interrotto. Il problema della divisione della posta, nel caso di un gioco d'azzardo interrotto, era già noto più di un secolo prima e venne affrontato, senza trovare appieno una soluzione, da Luca Pacioli nella sua *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (pubblicata nel 1494) e successivamente da Tartaglia. L'utilizzo della *speranza matematica* o valore atteso viene riproposto, come criterio di scelta, da Pascal, anche nel noto argomento della 'scommessa sull'esistenza di Dio'. Il ragionamento di Pascal è che conviene credere a Dio perché, se si ammette l'esistenza di una probabilità (soggettiva), per quanto piccola ma non nulla, che Dio esista, allora bisogna sforzarsi di vivere una vita all'insegna dei valori cristiani per meritare il premio dell'eterna beatitudine. Infatti, la scelta di ricercare la salvezza ha una conseguenza il cui valor medio è infinito, poichè una frazione, anche piccolissima, di una quantità infinita (il valore della vita eterna) è comunque infinita. Pascal stesso afferma:

'*Qui c'è effettivamente un'infinità di vita infinitamente beata da guadagnare, una probabilità di vincita contro un numero finito di probabilità di perdita, e quel che rischiate è qualcosa di finito. Questo tronca ogni incertezza: dovunque ci sia l'infinito, e non ci sia un'infinità di probabilità di perdere contro quella di vincere, non c'è da esitare: bisogna dar tutto.*' (Blaise Pascal, '*I Pensieri*')

E ancora:

'[$\cdots$] *E cosí, la nostra offerta possiede una forza infinita, quando c'è da arrischiare il finito in un gioco in cui sono uguali le probabilità di perdita e di guadagno, e c'è un infinito da guadagnare.*' (Blaise Pascal, '*I Pensieri*')

Tuttavia, è risultato presto chiaro che questo criterio porta a dei paradossi, ossia vi sono situazioni che mettono in crisi il criterio del valor atteso come criterio di determinazione di una scelta ottimale in condizioni di incertezza. Un esempio è fornito dal fisico e filosofo Edwin T. Jaynes, nel suo libro *Probability Theory: The Logic of Science*, in cui egli prende in considerazione il caso di una moneta, le cui informazioni a riguardo ci portano ad assegnare una probabilità del 51 per cento all'evento 'esce testa.' Ora è data la possibilità di scegliere tra due azioni: (1) scommettere ogni centesimo posseduto che esca testa al prossimo lancio di questa moneta; (2) non scommettere. In accordo col criterio del valore atteso, bisognerebbe sempre azzardare se ci si trova di fronte a questa scelta, infatti il profitto atteso, se si decide di non giocare, è zero; ma se si decide di partecipare, è:

$$0.51M_0 + 0.49(-M_0) = 0.02M_0 > 0,$$

dove M_0 è il nostro patrimonio. Tuttavia, sembra ovvio, per qualsiasi lettore, che nessun indivivuo ragionevole sceglierebbe mai la prima alternativa. Questo perché la valutazione, effettuata attraverso il criterio di massimizzazione del rendimento atteso, non tiene conto del valore soggettivo di M_0; esso nell'esempio rappresenta l'intero patrimonio posseduto dal soggetto e quindi, il rischio piuttosto alto di perderlo interamente non può essere compensato dalla probabilità di raddoppiarlo, anche se quest'ultimo evento ha una probabilità più alta rispetto al primo. E ancora, Jaynes considera il caso in cui ci venga offerta la seguente opportunità. Si può scommettere qualsiasi importo che si desideri sulla base del fatto che, con probabilità $(1 - 10^{-6})$, si perda la posta in gioco (ovvero quasi certamente); ma con probabilità 10^{-6}, si può vincere 1000001 volte l'importo scommesso. Di nuovo, il valore atteso è positivo e la scelta ottimale sarebbe quella di scommettere tutti i nostri averi ma il buonsenso rifiuta questa soluzione ancor più fortemente che nell'esempio precedente. Tutto ciò per mettere in evidenza come, quando sono coinvolti grossi importi monetari oppure la probabilità di vincita di un importo 'alto' è particolarmente piccola, il criterio del valore atteso non risulta più attendibile.

Daniel Bernoulli in una fortunata memoria scritta nel 1731 e contenuta nel volume dei *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, pubblicato nel 1738, suggerì per primo di utilizzare, in luogo del valore atteso, un *valore morale* o *utilità attesa* che una persona è disposta a spendere e che dipende dal patrimonio che possiede. La proposta di Bernoulli ha avuta grande influenza in svariate discipline come filosofia, politica ed economia, ed è alla base della dottrina dell'*utilitarismo*, di cui Jeremy Bentham (1748-1832) viene generalmente considerato il fondatore, per la quale la massimizzazione dell'utilità sociale dovrebbe essere il fine ultimo della società, che dovrebbe tendere ad ottenere 'la felicità maggiore per il maggior numero di individui' (*maximum felicitas*). Secondo la prospettiva utilitarista, ogni decisione individuale dovrebbe essere ispirata dalla necessità di massimizzare la propria utilità attesa (intesa come misura della soddisfazione individuale) e l'insieme delle decisioni individuali dovrebbero andare nella direzione della massimizzazione del benessere collettivo.

Il seguente esempio, noto come *paradosso di S. Pietroburgo*, fu proposto da Daniel Bernoulli per mostrare come la maggior parte di noi non riterrebbe opportuno prendere le proprie decisioni sulla base del criterio del valore atteso.

1.2 Il paradosso di S. Pietroburgo

Il paradosso prende il nome dalla presentazione del problema da parte di Daniel Bernoulli, nel 1738, nei Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae (di San Pietroburgo). In verità, il problema fu inventato dal cugino di Daniel, Nicolas Bernoulli, che per primo lo enunciò in una lettera indirizzata al matematico parigino Pierre Raymond de Montmort. Riportiamo di seguito un estratto dalla corrispondenza relativa al paradosso di San Pietroburgo datata 9 settembre 1713:

'*Quarto problema. A promette di dare una moneta a B se con un dado onesto farà uscire 6 al primo lancio, due monete se farà uscire 6 al secondo lancio, tre monete se otterrà questo punteggio al terzo, quattro monete se il* *risultato sarà raggiunto al quarto e così via. Ci si chiede: quale è il valore aspettato di B?*'

Qui ancora il criterio del valore atteso sembra funzionare in quanto, sommando la probabilità di tutti gli eventi moltiplicata per il relativo premio che si riceve in caso di vincita, si ottiene:

$$1\frac{1}{6}+2\frac{5}{6}\frac{1}{6}+3(\frac{5}{6})^2\frac{1}{6}+4(\frac{5}{6})^3\frac{1}{6}+\cdots=\frac{1}{6}(1+2\frac{5}{6}+3(\frac{5}{6})^2+4(\frac{5}{6})^3+\cdots)$$

Ora, se poniamo $x=\frac{5}{6}$ passiamo riscrivere il valore atteso del gioco come $\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}x^n=\frac{1}{6}\frac{1}{(1-x)^2}$. E quindi, sostituendo ad x il suo valore si ottiene 6.

Ma la lettera procedeva ancora ponendo la seguente questione:

'*Quinto problema. Ci si chiederà la stessa cosa se A prometterà a B di dargli delle monete nella progressione 1,2,4,8,16, etc. [...] invece che nella progressione 1, 2, 3, 4, 5, etc. come precedentemente trattato. Sebbene per la maggior parte questi problemi non siano di difficile risoluzione, vi scoprirete tuttavia qualcosa di molto curioso.*'

Ora, il problema consiste nel determinare quale sia la tariffa equa da pagare per partecipare ad un gioco il cui premio è 2^n euro, con n pari al numero di lanci che si effettuano prima che si presenti testa con una moneta onesta. In un ipotetico gioco d'azzardo, basato sulla scommessa 'testa o croce' sul lancio di una moneta, bisogna far pagare una quota di ingresso Q, per partecipare ad una fase del gioco. Ciascuna fase consiste nel lanciare ripetutamente una moneta (onesta) fino a quando non appaia testa per la prima volta, che dà luogo alla vincita. La vincita dipende dal numero di lanci: se esce testa al primo lancio, si vince 2 euro; se esce croce, la vincita si raddoppia ad ogni lancio successivo. In breve, si paga Q e si vince 2^n, se la moneta è stata lanciata n volte quando compare testa per la prima volta. Dovrebbe essere chiaro che è nel nostro interesse che testa esca il più tardi possibile. Vediamo un prospetto nella tabella che ci aiuti nei calcoli.

Evento	**Probabilità dell'evento**	**Vincita**
T	1/2	2
CT	1/4	4
CCT	1/8	8
CCCT	1/16	16
CCCCT	1/32	32
CCCCCT	1/64	64
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Alla fine dei lanci si è certi di incassare un premio, ma quanto si è disposti a pagare per partecipare al gioco? Per calcolare il valore atteso di questo gioco dobbiamo sommare, per tutti i possibili eventi, la loro probabilità moltiplicata per il premio. Le probabilità dei vari eventi sono calcolate applicando la legge della probabilità composta (e supponendo che la moneta non sia truccata). Così, la probabilità dell'evento 'CT' è 1/4 perché la probabilità che esca croce al primo lancio è 1/2, e la probabilità che esca testa al secondo lancio (posto che sia uscito croce al primo) è ancora 1/2, e i due eventi sono indipendenti. Analogamente sono calcolate le probabilità degli altri eventi indicati nella tabella. Si noti che la lista degli eventi è esaustiva, e che la somma delle probabilità è quindi pari a 1. La probabilità di ottenere testa all'ennesimo lancio è $(1/2)^n$; il premio che si ottiene se si presenta testa all'ennesimo lancio è 2^n. Il prodotto della probabilità per il premio è $(1/2)^n * 2^n$, che è sempre pari ad 1, indipendentemente da quando si presenta testa. Tuttavia, è possibile che testa si presenti al primo lancio, al secondo,... fino all'infinito: così il valore atteso è dato dalla somma di infiniti 1, quindi è infinito. In formule:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(1/2)^n * 2^n = 2\frac{1}{2}+4\frac{1}{4}+8\frac{1}{8}+16\frac{1}{16}+32\frac{1}{32}+... = 1+1+1+1+1+... = \infty$$

Questo implica che, se si utilizzasse il valore atteso come criterio per determinare la scelta ottimale, dal punto di vista razionale, ogni persona dovrebbe essere disposta a pagare qualsiasi cifra pur di partecipare al gioco: ovvero ogni persona 'razionale' non dovrebbe rinunciare a questa possibilità per nessuna cifra. Infatti, dal punto di vista matematico, non sorgono difficoltà dalla situazione prospettata nel gioco; è perfettamente coerente accettare la possibilità piccolissima di una vincita molto grande, tale da bilanciare qualunque somma pagata nelle numerose volte in cui la vincita risulta insignificante. Ovviamente, nessuna persona 'avveduta' sarebbe disposta a pagare una cifra 'alta' e questo è giustificato dal fatto che, come si può facilmente calcolare, il 97 per cento $(1-(1/2)^5)$ delle volte esce testa prima del quinto lancio, con una vincita non superiore a 32 euro. Infatti, perderemmo sicuramente tutti i nostri averi prima che capiti la circostanza (certo con probabilità bassissima) di una vincita così eccezionale da ripagare tutte le altre quote pagate per ottenere piccole vincite. Questo significa che il comportamento prudente, che nel caso in questione sarebbe ritenuto ottimale da un gran numero di persone, sia necessariamente irrazionale? La risposta sarebbe positiva (di qui la natura paradossale dell'esempio) se il criterio di valutazione razionale fosse quello del rendimento medio. La considerazione del solo rendimento, trascurando complessivamente il rischio, è evidentemente insufficiente infatti essa assegna un valore esageratamente grande a premi di importo enorme, ma con una minina possibilità di essere pagati. Il paradosso potrebbe però essere risolto se si accettasse l'idea che quello del rendimento medio non sia l'unico possibile criterio di valutazione razionale delle scelte in condizioni di incertezza. Nello scambio epistolare fu coinvolto successivamente anche il matematico e professore di filosofia Gabriel Cramer che scrisse in risposta a Nicolas Bernoulli il 21 maggio 1728:

'*Ci si chiede la ragione della differenza tra il calcolo matematico e quello elaborato dalla gente comune. Credo che derivi dal fatto che i matematici valutano il denaro in proporzione alla sua quantità, mentre gli uomini di buon senso in proporzione all'uso che ne fanno.*'

1.3 La soluzione di Bernoulli: l'utilità attesa

Cramer per primo, in differenti passi della stessa lettera sopra riportata, utilizza espressioni come *valore morale* e *speranza morale*, espressioni riprese successivamente dallo stesso Bernoulli, che vanno nella direzione dell'utilizzo di una funzione *utilità*, crescente con l'importo ma più lentamente via via che questo aumenti, cioè una funzione crescente concava, per tener conto, al posto del valore atteso, di una utilità attesa. Anche Leonhard Euler, amico della famiglia Bernoulli, che visse a San Pietroburgo nel periodo in cui Daniel lavorava all'Accademia Imperiale, si interessò al tema e scrisse un articolo (*Vera aestimatio sortis in ludis*) che fu però pubblicato molti anni dopo, nel 1862. La soluzione di Daniel Bernoulli divenne subito famosa per l'appoggio che ricevette da parte di Laplace, che la condivise subito. Egli infatti, in riferimento al paradosso di San Pietroburgo, scrisse:

'[$\cdots$] *nessun uomo ragionevole esporrebbe a questo gioco una somma anche modesta, 50 franchi per esempio. A cosa è dovuta questa differenza tra il risultato del calcolo e l'indicazione del buon senso? Ci si è accorti già da tempo che è dovuta al fatto che il vantaggio morale che un bene ci procura non è proporzionale ad esso, ma dipende da mille circostanze spesso difficili a definirsi, tra cui la più generale è il patrimonio. Infatti è chiaro che 1 franco ha molto più valore per colui che ne ha solo 100 che per un milionario. Bisogna, perciò, distinguere nel bene che si spera il valore assoluto dal valore relativo: quest'ultimo dipende dai motivi che lo fanno desiderare, mentre il primo ne è indipendente. Non esistono princìpi generali per calcolare il valore relativo, qui è quello proposto da Daniel Bernoulli, che servirà in molti casi: Il valore relativo di una somma infinitamente piccola è uguale al suo valore assoluto diviso per la fortuna totale posseduta dalla persona interessata.*'

La soluzione classica del paradosso richiede l'introduzione esplicita del concetto di utilità attesa e di diminuzione dell'utilità marginale del denaro. Abbiamo precedentemente parlato di utilitarismo e del concetto di **utilità** che si riferisce al *valore numerico che rappresenta la soddisfazione che il consumatore ricava dalla conseguenza di un certo evento* (che può essere il consumo di un bene, il guadagno di una somma di denaro, etc.). In Bentham la nozione di utilità era assunta come una quantità misurabile; ogni individuo, per Bentham, è in grado di assegnare un valore esatto a ciascun bene su una scala ordinale. Quest'assunzione è alla base della cosiddetta impostazione *cardinalista* della teoria del consumatore. Al centro di questa impostazione vi sono i concetti di **utilità cardinale** e di **utilità marginale** dei beni. Quest'ultima è intesa come misura della capacità di una dose ulteriore di un bene di incrementare la soddisfazione dei bisogni del consumatore (misura la maggiore soddisfazione che si ottiene consumando un'unità aggiuntiva di un bene), sotto l'ipotesi che il loro soddisfacimento sia sempre riconducibile a una valutazione uniforme chiamata *utilità*. Le teorie dell'utilità cardinale sono quelle che attribuiscono un significato alla grandezza dell'utilità. Il passaggio dall'impostazione cardinalista a quella ordinalista che è avvenuta agli inizi del secolo scorso, in larga misura a opera del grande economista italiano Vilfredo Pareto, è segnato dalla consapevolezza che gli stessi risultati teorici che caratterizzano l'impostazione cardinalista possono essere ottenuti anche rinunciando all'ipotesi che ogni individuo sia in grado di misurare gli effetti, sul proprio benessere, del consumo di dosi successive di ciascun bene. Tutto ciò che l'impostazione ordinalista chiede al consumatore è che questi sia in grado di confrontare situazioni diverse e di esprimersi circa la preferibilità dell'una o dell'altra in vista del soddisfacimento dei propri bisogni: nessuna misurazione di tipo cardinale, quindi, ma solo l'indicazione di un ordine di preferenza.

Per calcolare l'utilità attesa di una decisione, l'idea di Bernoulli è quella di usare una formula molto simile a quella del valore atteso, ma di sostituire al valore monetario x_i l'utilità che tale valore x_i fornisce al soggetto decisore. L'utilità quindi riassume in sè stessa diverse dimensioni di valore: denaro, piacere, speranza, e tutto ciò che può contribuire all'aumento della nostra felicità. L'idea della diminuzione dell'utilità marginale del denaro fu una intuizione di Bernoulli. Secondo le sue parole:

'*La determinazione del valore di un oggetto deve essere basata non sul suo* *prezzo, ma piuttosto sulla utilità che può procurare ... Non c'è dubbio che un guadagno di mille ducati ha più valore per un povero che per un ricco, nonostante entrambi guadagnino la stessa quantità.*'

Riguardo al gioco di San Pietroburgo, Bernoulli ragiona come segue: si supponga che un individuo possegga una certa quantità di denaro x e ne riceva una certa altra quantità Δx. Il valore relativo di questo incremento è direttamente proporzionale a Δx, e inversamente proporzionale a x, ossia per un opportuno k (dove k è una costante) risulta $\Delta y = k\Delta x/x$. Da qui, considerando incrementi infinitesimi, si ricava la funzione di utilità logaritmica proposta da Bernoulli $y = a + k \lg x$, i cui parametri k e a sono ininfluenti per i confronti tra utilità attese.

Allora, per quanto detto sopra, l'utilità attesa risultante da un piccolo incremento della ricchezza è inversamente proporzionale alla somma dei beni già posseduti; al crescere della quantità di un bene x posseduta dall'individuo, l'utilità marginale di quantità aggiuntive di tale bene mostra un andamento decrescente. Ciò è alla base della legge fondamentale che regola le *variazioni dell'utilità* al variare della quantità del bene, per la prima volta enunciata da Hermann Gossen nel 1854, che afferma: l'aumento della quantità disponibile del bene comporta un aumento dell'utilità, ma in misura via via decrescente. In termini matematici questa legge afferma che *l'utilità come funzione è una funzione crescente concava.*

Bernoulli, quindi, supera l'impasse del valore infinito utilizzando come funzione utilità quella logaritmica, $u(x) = \ln(x)$, per calcolare l'utilità attesa per il giocatore che accetta di partecipare al gioco: $UA = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(2^n)\frac{1}{2^n}$. Siccome $\ln(2^n) = n\ln(2)$ e potendo estrarre dalla sommatoria il $\ln(2)$ otteniamo $UA = \ln(2)\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{2^n}$. Infine, siccome $\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{2^n}$ è una progressione che per $n \to \infty$ sarà pari a 2, si avrà $UA = \ln(2^2)$. Lo stesso risultato si può ottenere, in maniera approssimativa, anche attraverso il calcolo diretto, come riportato in tabella. Si noti come, mentre il valore atteso è costante e vale 1, l'utilità attesa diminuisce all'aumentare del numero di lanci e la somma dell'utilità attesa è limitata e tende al valore di 1,39.

n	P(vinvita)	Premio	P*Premio	Utilità(premio)	P*Utilità
1	0.5	2	1	0.69351	0.34657
2	0.25	4	1	1.3863	0.34657
3	0.125	8	1	2.0794	0.25993
3	0.0625	16	1	2.7726	0.17329
5	0.03125	32	1	3.4657	0.1083
6	0.015625	64	1	4.1589	0.064983
7	0.0078125	128	1	4.852	0.037906
8	0.0039063	256	1	5.5452	0.021661
9	0.0019531	512	1	6.2383	0.012184
10	0.00097656	1024	1	6.9315	0.006769

Laplace, nel discutere il paradosso di San Pietroburgo e il criterio proposto da Bernoulli, riporta il seguente risultato senza fornirne il calcolo: una persona, il cui patrimonio complessivo è di 200 franchi, non dovrebbe ragionevolmente scommetter più di 9 franchi a questo gioco. Verifichiamo i calcoli. Pensiamo ad un individuo che dispone inizialmente di una fortuna m; la tariffa congrua (onesta) da pagare $f(m)$ è determinata uguagliando la sua utilità attuale ($\ln(m)$) con la sua utilità attesa se paga la somma e prende parte al gioco; $f(m)$ è la soluzione di:

$$\ln(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln(m - f + 2^n).$$

La valutazione del computer da come risultato $f(200) = 8.7204$; Laplace, senza l'aiuto di un computer, riuscì a dare un'approssimazione molto buona. Allo stesso modo, assegnando valori differenti a m, $f(10^3) = 10.95$, $f(10^4) = 14.24$, $f(10^6) = 20.87$. Perfino un milionario non dovrebbe rischiare più di 21 euro a questo gioco. Tuttavia, l'assegnazione logaritmica dell'utilità non deve essere presa alla lettera (come regola), sia nel caso di somme estremamente piccole sia in quello di cifre enormi. Infatti, la soluzione proposta da Bernoulli non è ancora del tutto soddisfacente poiché si può sempre immaginare un gioco di San Pietroburgo con vincite che aumentano molto velocemente col numero di lanci, ad esempio come 2^{2^n}, in modo che l'utilità logaritmica attesa torni ad essere infinita. Un altro esempio è fornito da Savage (1954).

Consideriamo il caso in cui il nostro patrimonio attuale sia 1000000 di euro; se la nostra utilità riguardo all'ammontare di denaro è proporzionale al logaritmo della somma, si dovrebbe essere indifferenti ad accettare o meno una scommessa nella quale, con una probabilità del 50 per cento, si rimarrà con soli 1000 euro, e con la stessa probabilità, si otterrà un miliardo. La maggior parte di noi ritiene che tale scommessa sia nettamente sfavorevole ad una persona con quella ricchezza iniziale. Questo dimostra che la nostra 'utilità intuitiva' deve aumentare anche meno rapidamente di quanto lo faccia il logaritmo per valori estremamente elevati. Eventualmente, si può considerare una funzione di utilità che presenta un valore massimo limitato, come ad esempio potrebbe essere: $u(x) = 1 - \exp^{-\frac{x}{a}}$.

Riassumendo, il punto centrale del ragionamento di Bernoulli è che in questi casi, per una decisione razionale, si deve massimizzare l'utilità attesa e non il profitto in assoluto. In quanto tale, la teoria di Bernoulli è per lo più un modello descrittivo, fu solo con von Neumann e Morgenstern che la massimizzazione dell'utilità attesa fu dimostrata essere formalmente un criterio di decisione razionale, derivabile facendo appello ad alcuni assiomi.

Capitolo 2

Teoria dell'utilità attesa di Von Neumann e Morgenstern

Nel 1944 il fisico John von Neumann, in collaborazione con l'economista Oskar Morgenstern, presentò un modello della razionalità economica individuale che rappresentava le azioni umane come il prodotto di un calcolo che teneva in considerazione i desideri degli individui, le alternative a disposizione e le conseguenze delle loro scelte. Lo strumento introdotto da Von Neumann e Morgenstern, per analizzare le scelte in condizioni di incertezza, è la funzione utilità attesa, il cui fondamento è già presente nel contributo di Daniel Bernoulli. L'idea di base è che, se c'è incertezza sul futuro, il benessere del consumatore dipende, oltre che dall'alternativa a disposizione, anche da quale *stato di natura (del mondo)* si realizza. Ad esempio, se un consumatore può scegliere tra acquistare un gelato o un ombrello, e il tempo può essere piovoso o soleggiato, il benessere del consumatore dipenderà dal fatto che abbia acquistato il gelato o l'ombrello e dalle condizioni atmosferiche che si sono effettivamente verificate. La teoria dell'utilità attesa si basa sull'ipotesi che l'utilità di un agente in condizioni di incertezza possa essere calcolata come una media ponderata delle utilità in ogni stato possibile, utilizzando come pesi le probabilità del verificarsi dei singoli stati, come stimate dall'agente. In particolare, l'idea di Von Neumann e Morgenstern è che, innanzitutto, il consumatore sia in grado di valutare le probabilità di tutti i possibili stati del mondo. I desideri sono quindi interpretati come preferenze che soddisfano alcuni precisi requisiti formali che vedremo in dettaglio in seguito. A questo punto, date queste assunzioni, è possibile definire una funzione utilità che quantifica la relazione delle preferenze, tale che l'utilità attesa di una alternativa di scelta X è maggiore dell'utilità attesa di Y se e solo se l'individuo *preferisce* X a Y. Un individuo per cui valgono le condizioni descritte si comporta *razionalmente* se, vincolato a effettuare una scelta in condizioni di incertezza, scegli l'alternativa che *massimizza la sua utilità attesa.* Il criterio di Von Neumann e Morgenstern è in grado di tener conto del fatto che la maggior parte delle persone, soprattutto quando sono in gioco somme elevate, manifesta nella pratica una certa dose di *avversione al rischio.*

2.1 Costruzione assiomatica di von Neumann e Morgenstern

Per determinare le utilità secondo questo metodo, il decisore deve essere in grado di ordinare gerarchicamente le proprie preferenze, per quanto riguarda le alternative a disposizione, e devono essere introdotte delle ipotesi minimali circa tali preferenze. Introduciamo allora l'impostazione *assiomatica* della teoria delle preferenze.

Il concetto base di questa impostazione è quello di **relazione di preferenza** definita sull'insieme di consumo. Ammetteremo implicitamente che i numeri che esprimono quantità di beni acquistati e consumati possano essere numeri reali non negativi qualsiasi. Questo implica la *perfetta divisibilità* dei beni, ipotesi che è ben lontana dal verificarsi nella realtà, dove, al contrario, l'indivisibilità è prevalente. D'altra parte, in molti casi l'indivisibilità è rilevante per la scelta del consumatore: se uno dei beni considerati (il bene 1) è un'automobile, è ovvio che la scelta del consumatore è pesantemente condizionata dal fatto che egli può non acquistarne ($x_1 = 0$) o acquistarne una ($x_1 = 1$), o acquistarne un numero intero maggiore di 1, ma non acquistarne una frazione qualunque ($0 < x_i < 1$). In questo senso, un'analisi che presupponga la divisibilità può apparire inverosimile. Tuttavia, è possibile fornire un'interpretazione che permette di giustificare tale analisi. Il fatto è che x_1 misura la quantità del bene 1, acquistata in un certo intervallo di tempo (poniamo, un mese) e, d'altra parte, l'analisi non è interessata al comportamento del consumatore in uno specifico intervallo di tempo. Se un consumatore compra in media un'auto ogni 10 anni, il suo acquisto di auto in un mese sarà in media $x_1 = 1/120$; variando la frequenza di acquisto, x_1 potrà essere rappresentato da un qualunque numero razionale non negativo. Sempre con riferimento a un certo consumatore, dati due panieri x e y, con $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, diremo che x è preferito a y, e scriveremo **xRy**, se il consumatore, di fronte alla coppia x e y, preferisce x o si dichiara indifferente. Se, per una qualche coppia x, y di panieri, si ha contemporaneamente xRy e yRx, si dirà che, per il nostro consumatore, il paniere x è indifferente al paniere y, e si scriverà $x \sim y$. Se invece si avrà xRy ma non yRx, allora diremo che il paniere x è preferito (in senso forte) al paniere y e scriveremo **xPy**. Alla relazione di preferenza debole (e conseguentemente alla relazione di indifferenza e alla relazione di preferenza forte) si attribuiscono, per assioma, delle proprietà che rendono più agevole la trattazione della scelta del consumatore. Trattandosi di assiomi, essi non possono essere dimostrati; ma trattandosi di assiomi di una teoria che pretende di fornire una spiegazione del comportamento dei consumatori reali, essi andranno adeguatamente giustificati.

Assioma di completezza. Si ipotizza che le preferenze siano *complete*. In altre parole, i consumatori possono confrontare e classificare tutti i panieri possibili. Per ogni coppia x, y di panieri appartenenti all'insieme di consumo, risulta xRy e/o yRx. L'assioma prescrive che si verifichi sempre almeno una delle due condizioni xRy e yRx, senza escludere che si verifichino entrambe; nel qual caso risulterà $x \sim y$.

L'ipotesi è indubbiamente molto forte, poiché può facilmente accadere che un consumatore, non avendo mai sperimentato prima un certo paniere, non sia in grado di esprimere la propria preferenza.

Assioma di transitività. Le preferenze sono *transitive*. Per ogni terna di panieri x, y e z appartenenti all'insieme di consumo, tali che xRy e yRz, risulta anche xRz. Si noti che se la relazione R è transitiva, anche le relazioni di preferenza forte e di indifferenza lo sono. A prima vista l'assioma sembra facilmente accettabile; si dice che a volte il rispetto di questo assioma discende da un'ipotesi di *coerenza* nel comportamento del consumatore. Tuttavia, vediamo due esempi che segnalano come questo assioma sia in realtà piuttosto forte, e come sia plausibile comportarsi in modo da violare la transitività.

Esempio 2.1. Un consumatore potrebbe non essere in grado di distinguere tra due tazzine di caffè che differiscono solo per un granello di zucchero; non distinguendo egli si dichiarerebbe indifferente rispetto alle due tazzine. Consideriamo allora una successione di tazzine di caffè, ciascuna delle quali differisce dalla precedente per un solo granello di zucchero. Si avrà che ciascuna è indifferente alla successiva, ma tra due tazzine, sufficientemente lontane l'una dall'altra nella successione, il consumatore potrà preferire fortemente l'una dall'altra, contravvenendo così all'assioma di transitività.

Esempio 2.2. Consideriamo il caso di un consumatore collettivo, una famiglia; si attribuiscano a questa famiglia delle preferenze in base al principio della maggioranza: il paniere x sarà preferito al paniere y da parte della famiglia se la maggioranza dei membri della famiglia preferisce x a y.

Membri della famiglia	**Paniere x**	**Paniere y**	**Paniere z**
Padre	1	2	3
Madre	3	1	2
Figlio	2	3	1

In tal caso, anche se i singoli membri hanno preferenze complete e transitive, è possibile che le preferenze attribuite alla famiglia risultino non transitive, come vedremo nel caso seguente. Le preferenze individuali dei membri di una famiglia sono quelle indicate nella tabella, dove i numeri indicano l'ordine di preferenza. Se viene messa in votazione la coppia x, y, votano per x il Padre e il Figlio, e quindi, a livello familiare, si ha xPy; per la coppia y, z, votano per y il Padre e la Madre, e quindi, a livello familiare, si ha yPz; per la coppia x, z, votano per la z la Madre e il Figlio, e quindi, a livello familiare, si ha zPx. Dunque risulta xPy, yPz e zPx, un ciclo che viola l'assioma di transitività.

I due assiomi precedenti, pur essendo restrittivi, non sono sufficienti ossia esistono ordinamenti di preferenze che, nonostante rispettino i suddetti assiomi, non possono essere rappresentati tramite una funzione di utilità. Un esempio è sufficiente a dimostrare quanto sopra. L'esempio in questione è costituito dall'**ordinamento lessicografico** (così detto perché richiama l'ordine con cui le parole sono disposte nei vocabolari). Supponiamo dunque che un consumatore scelga tra panieri diversi prima di tutto in base alla quantità del bene 1 contenuto nei panieri stessi; solo a parità di quantità di bene 1, il consumatore terrà conto della quantità del bene 2, e sceglierà il paniere che ne contiene la quantità maggiore; a parità anche di bene 2, il consumatore terrà conto della quantità del bene 3, e così via. Con riferimento a panieri costituiti da due soli beni, sia $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, l'ordinamento lessicografico può essere formalizzato come segue: xPy se $x_1 > y_1$, oppure se $x_1 = y_1$ e $x_2 > y_2$. Si può verificare che un tale ordinamento rispetti tutti e due gli assiomi sopra indicati. D'altra parte, è anche facile verificare che due panieri diversi non possono mai essere indifferenti per il consumatore, e che pertanto rispetto a questo ordinamento non si danno curve di indifferenza in senso proprio (ogni punto costituisce da solo una *linea di indifferenza* degenere). Questo risultato ha dato luogo alla ricerca di ulteriori assiomi, sufficienti a fondare l'impostazione ordinalista. Un assioma che, in aggiunta ai precedenti, è sufficiente allo scopo, è il seguente:

Assioma di continuità. Dati due panieri x, y appartenenti all'insieme di consumo, con xRy, esistono un intorno di x e un intorno di y tali che ciascun punto del primo rappresenta un paniere preferito a ciascun punto del secondo.

I primi tre assiomi garantirebbero, da soli, l'esistenza di una funzione di utilità che rappresenta le preferenze; tuttavia tale funzione di utilità potrebbe avere delle proprietà sgradite che la renderebbero intrattabile, per cui viene aggiunto anche il quarto assioma.

Assioma di indipendenza. Se x, y, z sono panieri appartenenti all'insieme di consumo, con xRy, e $\Theta \in [0, 1]$, se indichiamo con $x\Theta + (1-\Theta)z$ un paniere ottenuto mescolando il paniere x nella proporzione Θ e il paniere z nella proporzione $(1-\Theta)$ e con $y\Theta + (1-\Theta)z$ un paniere ottenuto mescolando il paniere y nella proporzione Θ e il paniere z nella proporzione $(1-\Theta)$, risulta: $x\Theta + (1-\Theta)zRy\Theta + (1-\Theta)z$.

Un esempio concreto sul significato di tale assioma può essere il seguente: poniamo che un individuo abbia voglia di frutta e per questo apra il frigorifero. Nel frigo vi sono delle arance e delle banane. Le decisioni possibili sono (a) mangiare arance oppure (b) mangiare banane oppure (a+b) mangiare entrambe. Poniamo che egli abbia scelto di mangiare un'arancia (a). Ora, ipotizzando che dopo aver preso la decisione (a) venga a conoscenza che nel frigo sono presenti anche delle ciliegie (c), le decisioni possibili sono (a), (a+c), (c). Se decidesse di mangiare solo (b) non sarebbe rispettato l'assioma di indipendenza.

2.2 Un valore numerico per l'utilità

L'obiettivo della teoria dell'utilità attesa è quello di esprimere quantitativamente le *conseguenze* nei problemi di scelta in condizioni di incertezza. In un problema di scelta in condizioni di rischio è possibile descrivere un'azione mediante una *lotteria*. La lotteria semplice, già descritta all'inizio della nostra trattazione, può essere rappresentata mediante la seguente figura.

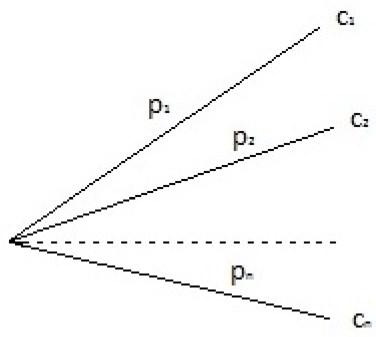

Figura 2.1: Lotteria semplice

In tale figura con probabilità p_1 si ottiene la conseguenza c_1, con probabilità p_2 si ottiene la conseguenza c_2 e così via. Se $C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ è un insieme di possibili risultati, una **lotteria semplice** L è un vettore di $\Re^n$, $L = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ tale che:

- $p_i \equiv Prob\{c = c_i\} \; \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$

- $p_i \geq 0 \; \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$

- $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Una lotteria composta è invece una lotteria i cui risultati sono lotterie semplici; ossia, date K lotterie semplici $L_i = (p_1^i, p_2^i, \cdots, p_n^i)$ e K probabilità $\alpha_i \geq 0$ con $\sum_i \alpha_i = 1$ e $i = 1, 2, \cdots, K$ una **lotteria composta** $(L_1, \cdots, L_K, \alpha_1, \cdots, \alpha_K)$ è un'alternativa rischiosa che dà come esiti le lotterie L_K con probabilità α_K. Vediamone un esempio che può essere rappresentato graficamente come in figura.

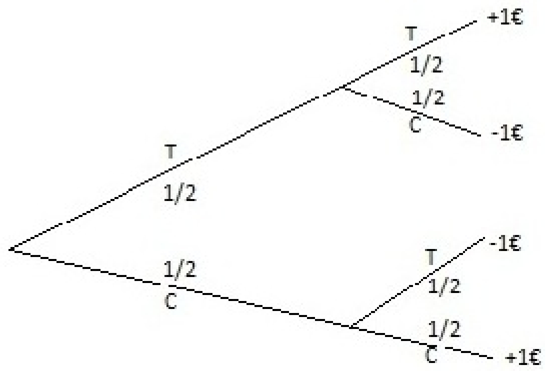

Figura 2.2: Lotteria composta

Consideriamo il caso del lancio di due monete oneste, una rossa e una nera. L'individuo lancia per prima la moneta rossa e, solo successivamente, dopo aver visto l'esito del lancio e indipendentemente da esso, lancia la moneta nera. Se il risultato di entrambi i lanci è 'testa' o 'croce' l'individuo vince 1 euro altrimenti si perde la stessa cifra. Questo è un chiaro esempio di 'lotteria di lotteria' in quanto il 'premio' associato all'esito 'testa' (o 'croce'), conseguente al lancio della moneta rossa, è a sua volta una lotteria. In un problema di scelta in condizioni di incertezza è necessario che sia valido l'*assioma di riduzione delle lotterie composte*, ossia ad ogni lotteria composta è associata una **lotteria ridotta**, cioè una lotteria semplice che dà la stessa distribuzione sugli esiti finali della lotteria composta. La lotteria ridotta corrispondente alla lotteria composta $(L_1, \cdots, L_K, \alpha_1, \cdots, \alpha_K)$, definita come prima, è una lotteria semplice $L' = (p'_1, \cdots, p'_n)$ le cui probabilità sugli esiti finali sono date da $p'_i = \alpha_1 p_i^1 + \alpha_2 p_i^2 + \cdots + \alpha_K p_i^K$. Vediamone un esempio.

La Figura 2.3 mostra una lotteria composta $(L_1, L_2; \alpha_1, \alpha_2)$ e la lotteria semplice $L' = (p'_1, p'_2, p'_3)$ cui la lotteria composta appena considerata può essere ridotta. Nel nostro contesto teorico, malgrado la loro diversa apparenza, le due figure rappresentano esattemente lo stesso oggetto ossia, nella nostra teoria, il consumatore *identifica* le due lotterie come lo stesso oggetto o, quantomeno, è indifferente tra di esse.

Figura 2.3: Lotteria composta $(L_1, L_2; \alpha_1, \alpha_2)$ e lotteria ridotta $L' = (p'_1, p'_2, p'_3)$

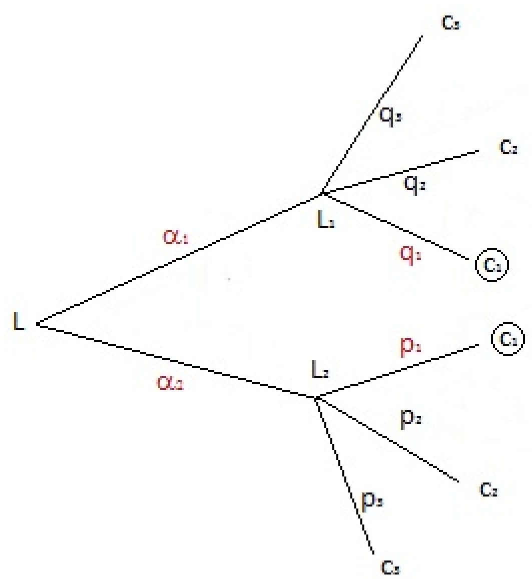

Figura 2.4: Lotteria ridotta

La lotteria ridotta $L' = (p'_1, p'_2, p'_3)$ è data da:

$$p'_1 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 q_1$$

$$p'_2 = \alpha_1 p_2 + \alpha_2 q_2$$

$$p'_3 = \alpha_1 p_3 + \alpha_2 q_3$$

Si noti che vale ancora $\sum_{i=1}^{n} p'_i = 1$; infatti svolgendo i calcoli si ha $\sum_{i=1}^{n} p'_i = \alpha_1 p_1^1 + \alpha_2 p_1^2 + \cdots + \alpha_K p_1^K + \alpha_1 p_2^1 + \alpha_2 p_2^2 + \cdots + \alpha_K p_2^K + \cdots\cdots + \alpha_1 p_n^1 + \alpha_2 p_n^2 + \cdots + \alpha_K p_n^K = \alpha_1(p_1^1 + p_2^1 + \cdots + p_n^1) + \cdots + \alpha_K(p_1^K + p_2^K + \cdots + p_n^K)$.

Ora, dato che $(p_1^i, \cdots, p_n^i)$ con $i \in (1, \cdots, K)$ sono tutte lotterie semplice si ha che $p_1^i + \cdots + p_n^i = 1 \; \forall i \in (1, \cdots, K)$. In conclusione, $\sum_{i=1}^{n} p'_i = \alpha_1 + \cdots + \alpha_K = 1$ per come è stata definita una lotteria composta.

Le lotterie composte sono equivalenti, dal punto di vista della scelta, alle corrispondenti lotterie ridotte; questa premessa è detta consequenzialista. Il *consequenzialismo* fu storicamente introdotto nella teoria economica da Elizabeth Anscombe, nel suo articolo del 1958 *Modern Moral Philosophy*, la quale lo introdusse per criticare quel tipo di dottrina della filosofia morale secondo la quale gli atti devono essere valutati unicamente in base alle loro conseguenze. Per il consequenzialismo l'unico criterio normativo sono le conseguenze e la valutazione di un'azione va rapportata ai suoi effetti, per cui un comportamento giusto è quello che produce buone conseguenze. La teoria consequenzialista fu considerata erroneamente come equivalente all'utilitarismo ma la differenza del consequenzialismo rispetto all'utilitarismo appare chiara in John Stuart Mill che, pur condividendo molti elementi della teoria utilitaristica, si propone come consequenzialista quando subordina al valore della regola morale quello dei risultati dell'agire per cui, se violando una legge morale si ottiene un qualche effetto positivo, '*non è affatto conveniente, per ottenere un qualche vantaggio immediato, violare una regola dotata di una convenienza così suprema*'. Così se per esempio mentissi per ottenere un profitto: in questo caso violerei la regola superiore del non mentire che ha maggiore convenienza complessiva rispetto al momentaneo vantaggio che ricaverei mentendo. Per il fondatore della teoria utilitaristica, Jeremy Bentham, le conseguenze buone di un'azione devono essere valutate quantitativamente in termini di piacere per cui tanto più se ne produrrà quanto più l'azione sarà buona: se invece l'azione non produrrà il piacere o il massimo di piacere possibile sarà ritenuta non morale. In questo senso le motivazioni di chi agisce moralmente non hanno nessuna importanza, ciò che conta sono i risultati e perciò '*non esiste qualcosa come un tipo di movente che sia in se stesso cattivo*'.

Questi assiomi permettono di rappresentare le nostre preferenze sulle lotterie (quindi sulle azioni da compiere) in termini di utilità attesa, ossia viene dimostrato che, data una lotteria $L = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ è sempre possibile associare una funzione di utilità sulle conseguenze $C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ a valori reali $u : C \rightarrow \Re$ tale che

$$U(p_1, p_2, \cdots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(c_i)$$

cioè l'utilità sulle lotterie è espressa in termini di utilità attesa. Una funzione $U : \wp \rightarrow \Re$ dove $\wp$ è l'insieme di tutte le possibili lotterie semplici su C è detta **funzione di utilità von Neumann-Morgenstern**. A questo punto siamo in grado, prese due generiche lotterie, di scegliere quale delle due è più vantaggiosa, ossia a quale corrisponde il valore di utilità attesa maggiore. Possiamo allora assegnare numeri reali alle conseguenze tali che il rapporto tra le utilità attese di due lotterie qualsiasi conservi il loro ordinamento (classificazione).

Per esempio, supponiamo che ogni giorno io debba spostarmi da casa per andare in ufficio; io affronto tre possibili risultati: arrivare sano e salvo al lavoro, avere un lieve incidente o avere un incidente grave. Supponiamo che possa andare al lavoro guidando o l'automobile o lo scooter. Ciascuna modalità di trasporto è associato ad una lotteria su questi tre risultati. Se utilizzo lo scooter la mia guida sarà molto attenta perchè dovrò prestare attenzione ai conducenti di automobili che non si accorgono di me. In questo modo, la probabilità di avere un incidente è più piccola di quanto non lo sia se guido l'auto (perchè al volante sono quello che si chiama pilota aggressivo). D'altronde, non c'è margine di errore utilizzando lo scooter, quindi la probabilità di un incidente grave è più alta che non con l'auto. Così, supponendo che le seguenti due lotterie riassumano tutte queste probabilità: $d = (0.87, 0.12, 0.01)$ nel caso dell'automobile, e $r = (0.94, 0.04, 0.02)$ se guido lo scooter, dal momento che guido lo scooter tutti i giorni, deve essere vero che rPd. La domanda adesso è, riusciamo a trovare dei valori (u_1, u_2, u_3) tali che, quando li assegniamo alle conseguenze (salvezza, incidente lieve, incidente grave) e calcoliamo le utilità attese, avremo $U(r) > U(d)$ (ossia, che preservino l'ordine di preferenza)? Il seguente teorema ci dice che ciò è possibile.

Teorema 2.2.1. *Teorema dell'utilità attesa*
Una relazione di preferenza $\succ$ sull'insieme $\wp$ delle lotterie semplici su C soddisfa gli assiomi di completezza, transitività, continuità e indipendenza se e solo se esiste una funzione $u : C \to \Re$ tale che, per due lotterie qualsiasi $L = (p_1, \cdots, p_n)$ e $L' = (p'_1, \cdots, p'_n)$, si abbia:

$$L \succ L' \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i u(c_i) > \sum_{i=1}^{n} p'_i u(c_i)$$

Con le parole di von Neumann e Morgenstern:

'*dai postulati [che abbiamo definito] possiamo derivare il carattere numerico dell'utilità* $[\cdots]$ *il valore numerico dell'utilità si combina (con la probabilità) allo stesso modo del valore atteso* $[\cdots]$. *Il fatto che si possa costruire [dai nostri assiomi] un'utilità numerica - con la formula che si usa in modo simile al valore atteso -, sembra indicare questo: abbiamo praticamente definito un'utilità numerica come quella entità per la quale il calcolo del valore atteso è legittimato.*'

Allora, un agente razionale in condizioni di rischio sceglierà la lotteria alla quale è associato il valore di utilità attesa più elevato, ossia massimizzerà la sua utilità attesa. Riassume chiaramente Lindley:

'$[\cdots]$ *esiste essenzialmente un unico modo per deliberare ragionevolmente. In primo luogo, le incertezze presenti debbono essere quantificate in termi-*

ni di valori detti probabilità. In secondo luogo, le varie conseguenze delle azioni possibili debbono essere descritte in termini di utilità. Infine, deve essere scelta quella decisione che ha la massima utilità prevista rispetto alle probabilità già calcolate. Il significato di dovere, usato ben tre volte, è semplicemente che ogni procedura di decisione che si discosti dalle nostre regole è dimostrabilmente assurda o [$\cdots$] *incoerente*' (*La logica della decisione*, 1990).

2.3 Critiche alla teoria

E' noto, e ne sono esempio i numerosi paradossi presenti in letteratura, come i comportamenti degli individui non siano spesso in accordo con i principi di razionalità sui quali si basa il modello classico dell'utilità attesa. Questo aspetto ha indotto molti autori a considerare il modello di von Neumann e Morgenstern inadeguato come strumento operativo; in particolare, il divario che spesso viene riscontrato fra il comportamento ideale ipotizzato in un modello normativo e il comportamento effettivo degli individui è stato il motivo principale di rivisitazioni e critiche, nonchè la base per lo sviluppo di teorie delle decisioni che si discostano da quella classica. I modelli decisionali normativi, infatti, pur traendo origine da comportamenti reali, si discostano dagli stessi comportamenti proprio per la loro idealizzazione e astrazione dalle situazioni reali, estraniandosi in tal modo da contesti decisionali concreti. Tuttavia, ciò non deve necessariamente indurre al rifiuto dei modelli normativi e all'accettazione di quelli descrittivi, il cui scopo è quello della identificazione della natura e struttura delle preferenze degli individui dai quali trarre modelli che permettano di configurare preferenze e decisioni non ancora manifestate. La semplice descrizione dei comportamenti individuali, infatti, risulta in alcuni contesti altrettanto insoddisfacente, in quanto, se posti di fronte alle proprie incoerenze, molti individui cercano di ovviare alle incoerenze proprio attraverso una rivisitazione e sistemazione delle proprie scelte in accordo con quanto previsto dai metodi normativi. A questo proposito, alcuni autori hanno evidenziato il fatto che l'analisi delle decisioni dovrebbe indirizzarsi sempre più verso una risposta alla domanda: **è possibile per gli individui operare in modo tale da non contraddire il proprio schema di preferenze?** In quest'ottica si colloca l'*approccio prescrittivo* alla teoria delle decisioni: un'analisi prescrittiva dovrebbe sviluppare procedure volte ad eliminare o ridurre violazioni dei principi cardine delle scelte razionali. I modelli prescrittivi sono dunque orientati ad avvicinare i comportamenti degli individui a schemi decisionali razionalmente coerenti; tali modelli contemplano solitamente assiomi più deboli rispetto a quelli classici o, addirittura, possono anche non trovare inizialmente una giustificazione su base assiomatica. La classificazione tra modelli normativi, descrittivi e prescrittivi venne introdotta da Tversky nel 1988 ed ebbe grandi implicazioni sul versante operativo. Infatti, se per un modello descrittivo è fondamentale la sua validità empirica, per un'impostazione normativa è importante soprattutto la sua coerenza teorica, mentre per un modello prescrittivo la valutazione è focalizzata sulla sua pragmaticità, cioè sulla capacità di tradursi in un efficace strumento decisionale.

Come già accennato, prendendo spunto dai numerosi paradossi e incoerenze comportamentali messi in luce in letteratura, sono stati elaborati modelli e teorie alternative a quella dell'utilità attesa, ognuno dei quali è volto a spiegare determinati aspetti del comportamento individuale che non rispondono agli assiomi proposti da von Neumann e Morgenstern.

2.3.1 Il paradosso di Allais

E' noto come sia l'assioma di indipendenza quello usualmente violato ed il celebre **paradosso di Allais**, risalente al 1953, ne è un esempio. Allais chiese ad un campione di individui di selezionare una tra due prospettive monetarie in due diverse lotterie. L'esperimento si svolge in due fasi; la prima scelta è tra un milione di euro con certezza e una distribuzione di probabilità con tre esiti: dà cinque milioni di euro con una probabilità dello 0.1, dà un milione di euro con una probabilità dello 0.89 oppure può dare zero con una probabilità dello 0.01. La seconda scelta è tra una distribuzione di probabilità in cui si può avere un milione con una probabilità dello 0.11 oppure zero con una probabilità dello 0.89 e un'altra distribuzione che dà con una probabilità dello 0.1 cinque milioni di euro oppure zero con una probabilità dello 0.9.

0	0
1 M	1
5 M	0

0	0.01
1 M	0.89
5 M	0.1

Tabella 2.1: Lotterie a) e b)

0	0.89
1 M	0.11
5 M	0

0	0.9
1 M	0
5 M	0.1

Tabella 2.2: Lotterie c) e d)

Nelle tabelle abbiamo indicato nella prima colonna i possibili profitti in euro e nella seconda colonna le probabilità associate. I soggetti a cui sono state sottoposte tali scelte hanno preferito per la maggior parte (negli esperimenti condotti originariamente da Allais intorno al 60 per cento) l'alternativa a) rispetto alla b) e l'alternativa d) alla c). Gli individui scelgono l'alternativa a) (certa) nonostante la b) (incerta) abbia un valore atteso maggiore poichè in b) esiste l'evenienza di non vincere nulla. Il fatto che la vincita di cinque milioni di euro è più probabile di non ottenere niente non è sufficiente per scegliere b). Nella seconda coppia di prospettive l'individuo, avendo una probabilità decisamente bassa di ottenere un premio, preferisce un premio più alto con una probabilità minore rispetto ad un premio più basso con una probabilità maggiore, e dà quindi più credito al premio che alle probabilità. Allais indicò che queste scelte non sono consistenti con la teoria dell'utilità attesa di von Neumann-Morgenstern. Infatti, l'assioma di indipendenza implica che se l'alternativa a) è preferita alla b) allora la c) deve essere preferita alla d). Infatti, la prima scelta implica che la somma delle utilità sulle conseguenze moltiplicate per le probabilità in a) sia maggiore maggiore della somma delle singole utilità delle conseguenze moltiplicate per le probabilità in b), ossia:

$$u(a) > u(b) \equiv u(10^6) > 0.1u(5 * 10^6) + 0.89u(10^6)$$

Se sottraiamo da entrambi i membri della relazione $0.89 * u(10^6)$ si ottiene:

$$0.11u(10^6) > 0.1u(5 * 10^6)$$

La preferenza di d) a c) significa che $u(c) < u(d)$ e questo implica

$$0.11u(10^6) < 0.1u(5 * 10^6)$$

Ma allora, per le scelte degli intervistati, dovrebbero valere entrambe le disuguaglianze, il che è assurdo. Quindi le scelte degli individui risultano incoerenti con la teoria dell'utilità attesa.

2.3.2 Le ricerche di Kahneman e Tversky

La Teoria del prospetto è una teoria della decisione formulata dagli psicologi israeliani Daniel Kahneman e Amos Tversky nel 1979. Essa rappresenta un'alternativa descrittiva alla Teoria dell'utilità attesa di von Neumann e Morgenstern.

Mentre la teoria classica aveva il fine di stabilire le condizioni ideali ('normative') secondo cui una decisione può essere definita 'razionale', la teoria del prospetto si propone invece di fornire una descrizione di come gli individui effettivamente si comportano di fronte a una decisione da prendere. La teoria del prospetto si focalizza in particolare sulle decisioni in condizione di rischio, che sono definite come le decisioni in cui è conosciuta (o si può stimare) la probabilità associata ai possibili esiti di ogni alternativa a disposizione. L'aspetto più innovativo di questa formulazione sta nel fatto che essa si basa su evidenze empiriche. Attraverso numerosi esperimenti di psicologia cognitiva, infatti, Kahneman e Tversky dimostrarono come le scelte degli esseri umani violassero sistematicamente i principi della razionalità economica; essi, esplorando la psicologia delle scelte e delle credenze *intuitive* (dove per intuizioni intendiamo quei pensieri che vengono alla mente velocemente e senza molta riflessione) e indagando i relativi principi che governano la creazione, la percezione e la valutazione delle alternative nei processi decisionali, hanno documentato diversi casi di apparenti anomalie e contraddizioni osservabili nel comportamento quotidiano delle persone. In particolare, i due autori posero l'accento su due importanti fenomeni psicologici, in realtà collegati tra loro:

- *L'effetto contesto*: il frame, cioè il contesto in cui l'individuo si trova a operare la scelta, ha un effetto determinante sulla scelta stessa. In particolare il modo in cui il problema viene formulato influisce sul modo in cui l'individuo percepisce il punto di partenza, rispetto a cui valutare i possibili esiti delle proprie azioni. Un celebre esempio di questo effetto è il problema della malattia asiatica, in cui due diverse formulazioni dello stesso problema conducono generalmente a due diverse decisioni da parte della maggioranza degli individui (lo esamineremo più approfonditamente in seguito).

- *L'avversione alle perdite*: per la maggior parte degli individui la motivazione ad evitare una perdita è superiore alla motivazione a realizzare un guadagno. Questo principio psicologico generale, che è probabilmente collegato ad una sorta di istinto di sopravvivenza, fa sì che la stessa decisione può dare origine a scelte opposte se gli esiti vengono rappresentati al soggetto come perdite piuttosto che come mancati guadagni. Ad esempio è più facile rinunciare a un possibile sconto piuttosto che accettare un aumento di prezzo, anche se la differenza tra il prezzo iniziale e quello finale è la stessa.

Alla base di queste ricerche vi è l'idea che i giudizi intuitivi occupino una posizione intermedia fra le operazioni automatiche della percezione e le operazioni deliberate del ragionamento. Come potremo constatare più avanti, in alcuni dei loro più noti lavori in questo campo, queste violazioni della razionalità non possono essere facilmente spiegate come una mancanza di attenzione o come 'abbagli della ragione', ma suggeriscono l'esistenza di strategie cognitive più semplici per elaborare giudizi e prendere decisioni dette *euristiche*. Il principio che giustifica l'esistenza di euristiche è quello secondo cui il sistema cognitivo umano è un sistema a risorse limitate che, non potendo risolvere problemi tramite processi algoritmici, fa uso di euristiche come efficienti 'scorciatoie' per semplificare decisioni e problemi. Sebbene le euristiche funzionino correttamente nella maggior parte delle circostanza quotidiane, risparmiandoci certamente ragionamenti e calcoli complessi, in certi casi possono portare a errori. Si ipotizza quindi l'esistenza di una serie di meccanismi mentali inconsapevoli che analizzano, processano e classificano l'informazione a disposizione e fanno sì che il soggetto acquisisca una conoscenza procedurale (pratica) che cade al di fuori della consapevolezza e che permette di fornire risposte in un tempo minore rispetto ai processi consapevoli.

In concreto, Kahneman e Tversky mostrano per la prima volta in modo davvero convincente, ed inattaccabile, come i giudizi degli individui siano il prodotto finale dell'azione di particolari meccanismi cognitivi quali la rappresentatività, la disponibilità e l'ancoraggio. La disponibilità, ad esempio, è un'euristica descritta ampiamente dagli autori, utilizzata quando, nel fornire una stima riguardo al possibile accadere di eventi futuri, le persone utilizzano la loro esperienza relativa all'accadimento di quegli eventi in passato. Tuttavia, in queste occasioni, le informazioni che vengono recuperate dalla memoria non sono quelle con il potere informativo maggiore ma spesso sono quelle più vivide, sono cioè le informazioni alle quali l'individuo ha associato i connotati emotivi più forti. Ciò significa che eventi che si sono verificati più spesso nella vita di un individuo, o che lo hanno maggiormente impressionato, tendono ad essere giudicati come più probabili anche se in realtà non lo sono. A dimostrazione di ciò, le persone in media giudicano la frequenza degli incidenti aerei significativamente superiore rispetto al reale rapporto tra voli aerei senza incidenti e voli con incidenti.

In questo modo Kahneman e Tversky, in prima persona, hanno dato inizio ad un lungo percorso che ha progressivamente messo in discussione la validità descrittiva dell'assunzione di razionalità e del modello normativo dell'utilità attesa, proposto da von Neumann e Morgenstern, di cui la teoria del prospetto rimane a tutt'oggi l'antagonista più convincente e completa. Gli autori sono arrivati a dimostrare come le preferenze vengano espresse nel momento stesso in cui viene posto il problema e in funzione del modo in cui le informazioni sono presentate di volta in volta, e che, quindi, non vi è modo per la nostra mente di garantire l'esistenza di un ordine di preferenze e credenze, che sia coerente e determinato a priori. Questo non significa, sottolinea Kahneman, che la scelta viene compiuta in maniera necessariamente irrazionale, ma è fondamentale per gli operatori del settore economico/decisionale riconoscere e tenere debitamente in considerazione l'asimmetria spesso evidente nelle scelte quotidiane degli uomini. Tale asimmetria è molto evidente nelle situazioni di rischio in cui il soggetto deve prendere una decisione e mettere in atto un certo comportamento in una situazione di incertezza; in queste situazioni, spesso, il comportamento sembra essere dettato da una valutazione soggettiva delle probabilità, molto diversa da quella oggettiva. A suggello del grande contributo all'economia e alle discipline psicologiche che si interessano dei processi decisionali in condizioni di incertezza, nel dicembre 2002 è stato conferito a Daniel Kahneman il Premio Nobel per l'Economia, premio che avrebbe sicuramente condiviso (come lui stesso ha ricordato, nel suo discorso presso l'Accademia di Svezia, in occasione dell'assegnazione del Nobel) con Tversky se egli non fosse prematuramente scomparso nel 1996.

Discutiamo subito qualche esempio. Dovrebbe essere ovvio, da un punto di vista razionale, che uno stesso problema decisionale non debba dipendere dal contesto, ovvero che in condizioni analoghe il decisore si comporti sempre allo stesso modo e che la formalizzazione del problema non ne influenzi l'esito finale; questo concetto fu denominato, dai due psicologi, *invarianza.* Come abbiamo già visto, una lotteria è la rappresentazione di tutti i risultati possibili con le loro relative probabilità associate. E' chiaro che possiamo rappresentare una medesima lotteria in molti modi diversi; l'invarianza ci dice che le preferenze dovrebbero essere indipendenti dalla rappresentazione utilizzata. Analizziamo ora un celebre caso di violazione dell'invarianza tratto da Kahnema e Tversky.

Gli USA sono minacciati da un'insolita malattia asiatica che mette in pericolo la vita di 600 persone. Sono in fase di elaborazione due possibili tipi di interventi sanitari rispettivamente designati con le lettere A e B.

- *Se si adotta il programma A, verranno salvate esattamente 200 vite umane.*
- *Se si adotta il programma B, c'è una possibilità di 1/3 di salvare 600 vite umane e una probabilità di 2/3 di non salvare nessuna vita umana.*

Sapendo questo, quale dei due programmi vi sentireste di raccomandare?

Questo test è stato anche presentato, in una forma leggermente diversa.

Gli USA sono minacciati da un'insolita malattia asiatica che mette in pericolo la vita di 600 persone. Sono in fase di elaborazione due possibili tipi di interventi sanitari rispettivamente designati con le lettere C e D.

- *Se si adotta il programma C, moriranno esattamente 400 persone.*
- *Se si adotta il programma D, c'è una possibilità di 1/3 che nessuno muoia e una probabilità di 2/3 che muoiano 600 persone.*

Sapendo questo, quale dei due programmi vi sentireste di raccomandare?

Quando questa coppia di domande è stata sottoposta a medici professionisti, le risposte più frequenti esprimevano una preferenza per il programma A nella prima domanda (esattamente il 72 per cento degli intervistati) e una preferenza per il programma D nella seconda domanda (esattamente il 78 per cento degli intervistati). Il punto è che nelle due domande sono del tutto identiche le conseguenze prodotte dalle alternative decisionali, l'unica differenza sta nelle parole usate per descrivere le scelte. Infatti, la teoria della decisione razionale ci dimostra che dovremmo essere indifferenti non solo nella scelta tra A e B, e in quella tra C e D, ma addirittura tra tutte e quattro le eventualità in quanto tutte le scelte hanno lo stesso valore atteso: 200 vite salvate. Dal punto di vista della presentazione invece, nella prima domanda l'eventualità che i soggetti tendono a prendere come punto di riferimento è quella in cui ci sono 600 persone che muoiono, e la maggior parte dei soggetti sceglie di 'ridar vita' anche soltanto a qualcuno di essi purchè con certezza; nella seconda domanda invece sembra piuttosto crudele mandare 400 persone verso una morte certa, e si finisce per scegliere la seconda alternativa.

Esperimenti messi a punto sempre da Kahneman e Tversky, confermarono l'idea già diffusa di una specifica asimmetria nel processo di valutazione e di giudizio individuale, che conduce alla formazione di preferenze differenti a seconda della modalità con cui un medesimo problema viene formulato, se in termine di possibili vincite oppure di possibili perdite; in particolar modo essi osservano che posti degli individui di fronte ad una scelta, essi si comportano in maniera significativamente diversa, mostrando una propensione al rischio oppure un'avversione ad esso, a seconda di come la scelta e le opzioni vengono presentate loro. Un esempio tipico è il seguente. Si chiede di scegliere tra:

- *Opzione a): un guadagno sicuro di 750 euro;*
- *Opzione b): una lotteria nella quale c'è una probabilità del 75 per cento di vincere 1000 euro e una probabilità del 25 per cento di non vincere niente.*

  La maggioranza dimostra di preferire *a)* a *b)* (quando invece il valore atteso è il medesimo) ma le preferenze del certo sull'incerto si ribaltano se si chiede di scegliere tra:

- *Opzione c): una perdita certa di 750 euro;*
- *Opzione d): una lotteria nella quale c'è una probabilità del 75 per cento di perdere 1000 euro e una probabilità del 25 per cento di non perdere niente.*

  Adesso l'opzione preferita è la *d)* rispetto alla *c)*.

Si vede come gli individui valutino diversamente la possibilità di aggiungere una somma al proprio patrimonio e quella di perdere una parte dei proprio beni; vi è un'avversione al rischio in situazioni di possibile guadagno e invece un amore per il rischio in situazioni di possibile perdita. Un altro chiaro esempio è quello della *segregazione delle decisioni.*

Ci viene prima offerto un premio di 300 euro. Dopo di che, ci viene chiesto di scegliere una delle seguenti possibilità:

A. Ricevere con certezza (altri) 100 euro.

B. Lanciare in aria una monetina e giocare a testa o croce: se vinciamo, riceviamo (altri) 200 euro, se perdiamo non riceviamo niente (altro).

La maggioranza degli individui intervistati preferisce A a B ma le preferenze si invertono se ci viene presentato il secondo problema di scelta.

Ci viene prima offerto un premio di 500 euro. Dopo di che, ci viene chiesto di scegliere una delle seguenti possibilità:

A. Perdere con certezza 100 euro.

B. Lanciare in aria una monetina e giocare a testa o croce: se perdiamo, dobbiamo pagare 200 euro, se vinciamo non dobbiamo pagare niente.

Adesso l'opzione preferita è la D rispetto alla C. Ovviamente, il campione di persone sottoposto a questa scelta, se non fosse stato preda della segregazione, sarebbe dovuto rimanere perfettamente indifferente non solo alla scelta tra A e B ma tra tutte le quattro eventualità; infatti, alla fine di tutti e quattro questi giochi, le probabilità sono rigorosamente le stesse di finire avendo in tasca 400 euro in più.

Capitolo 3

Utilitarismo e benessere

Nel suo libro del 1920, *L'economia del benessere*, l'economista inglese Arthur Cecil Pingou, scriveva:

oggetto dell'economia del benessere è l'indagine delle influenze predominanti attraverso le quali sia possibile aumentare il benessere economico del mondo o di un paese determinato. La pretesa di coloro che si dedicano a tale indagine è quella di suggerire forme di intervento - o di non intervento - da parte dello Stato o di privati, le quali possano favorire tali influenze.

Anche se è con l'affermazione della rivoluzione ordinalista, verso la fine del secolo, che l'economia del benessere si costituisce come una branca di studio parzialmente autonoma all'interno della scienza economica, è Pingou il sistematizzatore della Vecchia economia del benessere; così come è a Kenneth Arrow che si deve, a partire dagli anni trenta, la costruzione della Nuova economia del benessere. Scopo principale dell'economia del benessere è quello di fornire criteri sulla base dei quali è possibile giudicare e classificare le possibili diverse configurazioni del sistema economico al fine di formulare soluzioni tali da tendere ad una situazione di ottimo sociale. Una **configurazione del sistema economico** è una particolare allocazione di risorse, dove il termine, allocazione di risorse, è utilizzato nella sua accezione più ampia e sta ad indicare una specifica combinazione di beni e servizi che vengono allocati ai diversi attori del sistema economico.

Poiché è sul ceppo dell'**utilitarismo** che l'economia del benessere si costituisce come discorso scientifico, è utile che precisiamo cosa esattamente sia l'utilitarismo. Tre sono le tesi fondamentali della filosofia utilitarista di Jeremy Bentham. La prima tesi concerne la *valutazione di situazioni alternative* e afferma che la sola base corretta di tale valutazione è il benessere o la soddisfazione che i soggetti ottengono nel fare ciò che preferiscono. Questa prima componente dell'utilitarismo è chiamata **benesserismo**.

La seconda tesi riguarda la *base di scelta delle azioni* e afferma che le azioni devono essere confrontate o valutate solo sulla base delle conseguenze che esse producono; nessuna considerazione deve essere riservata alle intenzioni dell'agente, ovvero a motivazioni diverse da quelle del benessere; il valore dell'azione è interamente determinato dal valore delle sue conseguenze.

Infine, la terza tesi concerne il modo in cui mettere assieme il benessere dei singoli e afferma che il criterio di aggregazione deve essere quello della somma dei benesseri individuali. A questa terza componente si attribuisce il nome di **ordinamento per somma**: la valutazione di stati sociali alternativi va fatta in termini della somma delle utilità individuali a essi associati.

Come sappiamo, punto centrale della riflessione benthamiana è l'idea che l'utilità sia una grandezza misurabile in senso cardinale. Le utilità individuali devono essere sommate e la somma fornisce una misura del benessere sociale. Il criterio per giudicare tra situazioni o configurazioni economiche alternative è allora quello della *massimizzazione della somma delle utilità individuali.* Quindi, l'obiettivo generale rimane per l'utilitarismo sempre la massimizzazione del benessere sociale, ma il bene soggetto a massimizzazione è definito sulla base della nozione di *piacere* (collegato al concetto di *preferenza*) del *singolo individuo*: il 'principio di utilità' ci istruisce a scegliere sempre quella alternativa che promette di produrre la più grande somma netta di piacere.

L'utilitarismo, quindi, implica la specificazione di un obiettivo per la società che dipende dalle utilità dei singoli individui che la compongono. Allora, consideriamo di nuovo le preferenze dei singoli e assumiamo come sempre che siano transitive. Normalmente, le preferenze di un consumatore si definiscono in relazione al suo paniere di beni: estendiamo ora questo concetto, considerando che ciascun consumatore abbia preferenze relativamente a tutte le allocazioni di beni tra tutti i consumatori. Naturalmente questo include come caso particolare quello in cui il consumatore non si preoccupa di ciò che gli altri hanno. Indichiamo con x un'allocazione - che rappresenta la quantità di ciascun bene posseduta da ciascun individuo. Date due allocazioni x e y, ciascun individuo è in grado di dire se preferisce x a y. Date tutte le preferenze cerchiamo un modo per 'aggregarle' per ottenere una **preferenza sociale**: cioè, intendiamo partire dall'ordinamento individuale delle allocazioni per risalire ad un loro ordinamento sociale. Consideriamo qualche esempio.

Un modo per aggregare le preferenze individuali consiste nel ricorrere ad una votazione. Si potrebbe dire che x è 'socialmente preferito' a y se una maggioranza degli individui preferisce x a y. Ma, come abbiamo già visto nel capitolo precedente, questo metodo ha un problema in quanto è possibile che esso dia luogo ad un ordinamento sociale delle preferenze non transitivo.

Individuo A	**Individuo B**	**Individuo C**
x	y	z
y	z	x
z	x	y

Osservando la tabella, supponiamo che i tre individui decidano di scegliere dapprima tra x e y, e successivamente tra il vincitore di questa votazione e z. Poichè una maggioranza preferisce x a y, la seconda votazione sarà tra x e z, e quindi z vincerà. Cosa accade se invece decidono di scegliere tra z e x, e poi tra il vincitore e y? In questo caso, z vince nella prima votazione, ma y è preferito a z nella seconda. L'esito di questa votazione dipende in modo cruciale dall'ordine in cui si propongono le alternative ai votanti.

Possiamo considerare un altro sistema di votazione, che prevede un ordinamento numerico. Ciascun individuo classifica i beni secondo le sue preferenze e fa corrispondere a questa classifica un ordinamento numerico: per esempio, 1 per l'alternativa maggiormente preferita, 2 per la seconda alternativa preferita, e così via. Si sommano i punteggi di ciascuna alternativa, determinandone in tal modo il punteggio aggregato: l'alternativa socialmente preferita sarà quella che ottiene il punteggio più basso.

Nella tabella è riportato un possibile ordinamento delle preferenze per tre allocazioni x, y e z e due individui. Supponiamo dapprima che esistano solo due alternative, x e y. In tal caso A attribuisce 1 all'alternativa x mentre B attribuisce 2. Per l'alternativa y vale esattamente il contrario. L'esito della votazione sarà quindi un pareggio poichè il punteggio aggregato di ciascuna alternativa è 3.

Individuo A	**Individuo B**
x	y
y	z
z	x

Introduciamo ora anche l'alternativa z. A assegna 1, 2 e 3 rispettivamente a x, y e z, mentre B assegna lo stesso punteggio 1, 2 e 3 rispettivamente a y, z e x. Il punteggio aggregato di x sarà 4 e quello di y sarà 3: in questo caso y è preferito a x.

Sia la votazione a maggioranza che quella basata sull'ordinamento numerico presentano l'inconveniente che l'esito può essere manipolato. In effetti, la prima può essere manipolata modificando l'ordine in cui gli individui votano, mentre la seconda può essere manipolata introducendo nuove alternative che modificano il punteggio delle alternative rilevanti. Esistono meccanismi di decisione sociale (cioè modi di aggregare le preferenze) immuni da questo tipo di manipolazioni? Elenchiamo alcune proprietà desiderabili, delle quali dovrebbe godere un meccanismo di decisione sociale:

1. Dato un insieme qualsiasi di preferenze individuali complete, riflessive e transitive, il meccanismo di decisione sociale dovrebbe consentire di ottenere preferenze sociali che godano delle stesse proprietà.

2. Se tutti preferiscono l'alternativa x all'alternativa y, allora anche secondo le preferenze sociali x è preferita ad y.

3. Le preferenze tra x ed y dovrebbero dipendere solo dal modo in cui gli individui ordinano x rispetto a y, e non dal modo in cui ordinano le altre alternative.

Queste tre proprietà sembrano plausibile. Tuttavia, è difficile trovare un meccanismo che le soddisfi tutte. In effetti, Kenneth Arrow in un lavoro fondamentale del 1951 dimostra che non esiste un meccanismo di decisione sociale in grado di soddisfare questo insieme minimale di assiomi ragionevole. E' questo il contenuto del ben noto **teorema di impossibilità di Arrow**

Se un meccanismo di decisione sociale gode delle proprietà 1, 2 e 3, deve essere una dittatura: tutti gli ordinamenti sociali sono gli ordinamenti di un solo individuo.

Pertanto, si deve rinunciare a una delle proprietà desiderabili così da consentire l'impiego di una struttura informativa che vada oltre la mera coerenza delle preferenze individuali e la loro aggregazione in una funzione di scelta sociale che dipende unicamente dagli ordinamenti individuali. Il risultato di Arrow riveste importanza fondamentale poiché dimostra che proprietà etico-razionali minimali, ognuna delle quali poco restrittiva per la democraticità del processo di valutazione sociale, generano risultati paradossali se adottate contemporaneamente.

3.1 Funzioni di benessere sociale

Il lettore immagini che un soggetto esterno (ovvero non facente parte dell'insieme dei consumatori) sia stato nominato dittatore di una data società; tale soggetto ha la facoltà di scegliere, all'interno dell'insieme, quale esito sociale debba verificarsi. Supponiamo ora che il soggetto dittatore voglia essere benevolo, e cerchiamo di capire come sia possibile caratterizzare la sua scelta.

Con il termine 'società' noi indichiamo un numero finito di consumatori individuali indicizzati da $i = 1, 2, \cdots, n$. Ciascun elemento x di un insieme X di *esiti sociali* (l'intera gamma dei risultati sociali possibili è definita da tutti i tipi di decisioni economiche e dai connessi provvedimenti politici) descrive la situazione di ciascun membro della società. Ogni consumatore ha delle preferenze definite sui possibili esiti sociali. Supponiamo che tali preferenze possono essere rappresentate numericamente; indichiamo pertanto con $U_i : X \to \Re$ le preferenze dell'individuo i. Allora, se si assegna ad ogni consumatore una specifica rappresentazione numerica delle sue preferenze, a ogni esito sociale x corrisponde un vettore di utilità individuali $U(x) = (U_1(x), U_2(x), \cdots, U_n(x))$. Il nostro scopo è quello di rispondere alla seguente domanda: per un insieme X di esiti sociali, quale dovrebbe essere selezionato? Comunemente, l'obiettivo sociale è la massimizzazione di una funzione $U^* : X \to \Re$ che rappresenta le preferenze del dittatore sociale e che gli economisti chiamano **funzione del benessere sociale**; essa assume la forma

$$U^*(x) = W(U(x))$$

per una qualche funzione $W : \Re^n \to \Re$ con $\frac{\partial W}{\partial U_i} \geq 0, \forall i \in \{1, \cdots, n\}$, ossia che il benessere aumenta o al più rimane costante all'aumentare di una utilità individuale fermo restando le altre.

Alcuni esempi di funzione di benessere sociale sono:

- $W(U_1, \cdots, U_n) = \sum_{i=1}^{n} U_i$, questa funzione è detta, di solito, funzione di benessere *utilitarista* o *di Bentham*.

- $W(U_1, \cdots, U_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i$ per un dato insieme $\{\alpha_i\}$ di pesi strettamente positivi, la cosiddetta funzione di benessere sociale *utilitarista ponderata*.

  Nel primo caso, a tutti i membri della società è assegnato lo stesso peso, ossia viene attribuita la stessa importanza al benessere di tutti gli individui; nel secondo caso, è possibile assegnare pesi differenti ai vari consumatori. Un approccio alternativo alla determinazione dei pesi da assegnare alle varie utilità è quello di determinare l'assegnazione del peso associato all'utilità di un certo consumatore in base al livello di utilità relativa raggiunto da questo. Sia $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq 0$

una sequenza di pesi positivi, e per ogni dato vettore $(U_1, \cdots, U_n)$ si indichi con $U_{[i]}$ l'i-esimo numero più piccolo all'interno dell'insieme $\{U_1, \cdots, U_n\}$. (In altre parole, se $n = 4$ e U=(4, 5, 4, 3), allora abbiamo $U_{[1]} = 3$, $U_{[2]} = U_{[3]} = 4$, $U_{[4]} = 5$). Si ponga poi $W(U_1, \cdots, U_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_{[i]}$. In tal modo si assegna un peso relativamente superiore ai membri della società che si 'trovano in condizioni peggiori'.

- Una posizione ancora più spinta in tale direzione - una posizione associata al lavoro del celebre filosofo morale americano John Rawls [1971] - è quella di sostenere che il benessere della società dipende *solamente* dall'utilità del più povero o del più svantaggiato. La funzione di benessere **di Rawls** o **minimax** definita come $W(U_1, \cdots, U_n) = min\,\{U_i : i = 1, \cdots, n\}$ rispecchia questo principio. Il modo più rapido per comprendere come il filosofo americano sia pervenuto alla sua proposta è quello di pensare a un gruppo di individui che si riuniscono per fissare le regole di un gioco, poniamo a carte, al quale parteciperanno in seguito. Prima che il gioco abbia inizio, ciascuno ignora sia le carte che gli toccheranno sia le abilità degli altri giocatori. E' dunque lecito aspettarsi che ognuno favorirà l'adozione di regole neutrali, cioè imparziali rispetto alle possibilità di ciascun concorrente.

  Nella teoria rawlsiana la vita è come un gioco di sorte in cui la Natura distribuisce attributi e posizioni sociali in maniera casuale. Ora questa distribuzione naturale, di per sé, non è né giusta né sbagliata, ma è ingiusto che la società si limiti ad accettare questi risultati casuali o adotti istituzioni che tendono a perpetuarli, aggravandone le conseguenze. Ne deriva che un insieme di giuste istituzioni è un insieme che mitiga, se non proprio annulla, gli effetti della sorte circa le posizioni degli individui nella struttura sociale. Per arrivare a un tale insieme di istituzioni i soggetti devono divorziare dalla conoscenza dei proprio attributi personali, ponendosi dietro un 'velo di ignoranza' (*veil of ignorance*).

Al riparo di tale velo tutti i soggetti si trovano in una ‘posizione originaria’ di totale uguaglianza, nel senso che ognuno possiede la medesima informazione circa gli effetti probabili di regole distributive diverse sulla propria posizione futura. E’ in tale posizione originaria che prende forma la nozione rawlsiana di ‘giustizia come imparzialità’ (*justice as fairness*). Da essa discendono gli ormai famosi due principi di giustizia:

Primo: *ciascuna persona deve disporre di un eguale diritto alla più estesa libertà di base compatibile con una libertà simile per gli altri.* Secondo: *le ineguaglianze sociali ed economiche devono essere tali da risultare a un tempo, a) di vantaggio a ciascuno, b) associate a posizioni e uffici aperti a tutti [...] Questi due principi sono un caso speciale di una concezione più generale di giustizia che può esprimersi come segue. Tutti i valori sociali - libertà e opportunità, reddito e ricchezza - devono essere distribuiti egualmente a meno che una distribuzione ineguale di alcuni, o tutti, di questi valori non torni a vantaggio di ciascuno.*

Il secondo principio - che Rawls denomina *principio differenziale* - impone che il benessere dell’individuo meno abbiente risulti sempre massimizzato e che l’unico modo in cui eventuali ineguaglianze possono apparire giustificate è quello di accertare se esse migliorano la posizione di coloro che stanno peggio.

Conclusioni

Il precursore della logica matematica, Gottfried Wilhelm Leibniz, nel 1666 espresse nel suo lavoro *Dissertatio de arte combinatoria* l'idea utopica di creare un alfabeto universale di segni tale che tutti i possibili pensieri potessero essere espressi tramite stringhe di tali segni, così che lo stesso sillogismo avrebbe dovuto essere ridotto a una sorta di calcolo, espresso in un simbolismo universale comprensibile in tutte le lingue. La verità e l'errore si sarebbero ridotti allora semplicemente a una questione di calcoli esatti o errati all'interno del sistema, e si sarebbe posto fine a tutte le controversie filosofiche.

Di conseguenza, quando sorgeranno controversie tra due filosofi, non sarà più necessaria una discussione, come [non lo è] fra due calcolatori. Sarà sufficiente, infatti, che essi prendano in mano le penne, si siedano di fronte agli abachi e (se così piace, su invito di un amico) si dicano l'un l'altro: Calculemus!

Il grande e ambizioso obiettivo di Leibniz di trovare un metodo logico che matematizzi il pensiero, eliminando da esso ciò che vi è di soggettivo e riconducendo le operazioni mentali ad una sorta di calcolus ratiocinator, è alla base delle teorie che abbiamo affrontato.

Infatti, le teorie economiche tradizionali, ossia quelle presenti oggi nei manuali di economia di base, teorizzano modelli in cui il comportamento umano non è altro che il risultato di un calcolo razionale al fine di dar luogo ad una scelta che massimizzi l'utilità attesa; l'uomo è visto come un *homo oeconomicus* le cui principali caratteristiche sono la razionalità (intesa in un senso precipuo, soprattutto come precisione nel calcolo) e l'interesse esclusivo per la cura dei suoi propri interessi individuali. L'ipotesi che gli agenti siano effettivamente razionali è l'elemento che consente di utilizzare una teoria, come quella di von Neumann e Morgenstern, che è essenzialmente normativa (indica quindi quello che gli agenti dovrebbero fare) come anche positiva, adatta quindi a descrivere e prevedere il comportamento reale dei soggetti. In particolare, la razionalità attribuita all'homo oeconomicus consiste nel fatto che egli:

- ha certe preferenze che è in grado di disporre in sequenza;
- è capace di massimizzare la sua soddisfazione utilizzando al meglio le sue risorse: egli tenderà a massimizzare la sua utilità (e non il suo profitto);
- è in grado di analizzare e prevedere nel modo migliore la situazione e i fatti del mondo circostante, al fine di operare la scelta più corretta in ordine a detta massimizzazione.

Per capire meglio questo punto può essere utile riprendere l'analogia proposta da Milton Friedman, premio Nobel per l'economia nel 1976: si suppone che gli agenti economici siano, di fronte alle scelte, nella stessa condizione di un giocatore di biliardo. I tiri dei giocatori di biliardo e le modalità specifiche con cui tentano di effettuarli, osserva infatti Friedman, possono essere previsti con estrema precisione se si ipotizza che essi li decidano applicando tutte le leggi più importanti della fisica newtoniana. Naturalmente sono ben pochi i giocatori di biliardo che conoscono la fisica. Nonostante ciò, non sarebbero mai diventati degli esperti di questo gioco se non avessero operato nel pieno rispetto delle leggi della fisica, ossia come se conoscessero tali leggi. Così l'agente economico, anche senza risolvere formalmente il problema di ottimizzazione, dovrebbe, secondo l'economista statunitense, avvicinarsi molto alla scelta ottimale. Non si vuole con questo sostenere che i soggetti agenti su un mercato agiscano pensando effettivamente ai costi e benefici delle loro azioni, ma che agiscano come se lo facessero. Questo tipo di teoria è stata fra l'altro estremamente 'comoda' per gli economisti, data la relativa facilità di modellizzare matematicamente il comportamento razionale-ottimizzante: questa fondamentale caratteristica ha permesso di costruire gran parte dell'edificio della moderna microeconomia.

D'altra parte, è opinione diffusa che l'efficacia di questa teoria nel descrivere comportamenti reali sia modesta, perlomeno in certi contesti, e le critiche si sono susseguite. In particolare, la teoria dell'utilità attesa, sebbene abbia avuto grande successo e sia stata rapidamente integrata nel nucleo della teoria economica, è stata fin da subito attaccata. Avvalendosi di metodi sperimentali, molti economisti (a partire dal premio Nobel francese Maurice Allais nel suo contributo del 1953) hanno identificato importanti violazioni dei postulati su cui la teoria è costruita. Infatti, per riprendere l'analogia sviluppata sopra, è facile osservare che solo i giocatori di biliardo molto esperti si comporterebbero come vorrebbe la fisica del biliardo e i relativi calcoli. Volendo costruire un modello realistico del giocatore medio, bisognerebbe distaccarsi da questi elementi e considerare le molte procedure euristiche di cui i soggetti si servono. Da notare che il loro comportamento è ancora razionale, nel senso limitato che essi fanno meglio che possono e non tirano a caso, ma i loro limiti li condizionano, e il modello fisico-matematico farebbe un pessimo lavoro nel predirne il comportamento. Allo stesso modo, è plausibile pensare che la teoria neoclassica non faccia un buon lavoro nel prevedere il comportamento dei consumatori medi perchè troppo estrema, ma che vada bene solo per classi molto ristrette di soggetti, che effettivamente hanno le conoscenze per evitare le illusioni cognitive e comportarsi in modo ottimale.

Da alcuni decenni, infatti, si assiste ad un crescente interesse da parte della psicologia verso i fenomeni economici. Alla base di questi studi c'è proprio la consapevolezza maturata dell'inadeguatezza dei modelli della razionalità economica. Abbiamo ampiamente visto come diversi risultati sperimentali hanno evidenziato come gli individui non agiscono seguendo i principi economici razionali ma sono influenzati dalle loro esperienze passate, dalle loro credenze, dal contesto, dal formato di presentazione delle informazioni e dall'incompletezza informativa frequente nei contesti reali.

Una possibile spiegazione fa riferimento al concetto di 'razionalità limitata' di un altro premio Nobel, Herbert Simon. Secondo Simon, gli individui avrebbero delle risorse cognitive limitate che in molte occasioni li costringono a semplificare il problema, che sarebbe altrimenti ingestibile perchè eccessivamente complesso; se dovessimo ottimizzare ogni passo che facciamo nella vita, questo ci costerebbe probabilmente uno sforzo tale da impedirci ogni azione. Regole empiriche e standard di comportamento possono essere utili e farci risparmiare tempo e sforzi. Tuttavia il loro utilizzo non è consistente con un comportamento perfettamente ottimizzante, e suggerisce piuttosto che dentro di noi ci sia un meccanismo di approssimazione programmato per fermare la massimizzazione non appena si raggiunge un risultato soddisfacente.

Una svolta si è verificata con l'uscita dei primi lavori degli psicologi israeliani Daniel Kahneman e Amos Tversky; la loro 'Prospect Theory' cerca di porsi come paradigma alternativo alla tradizionale utilità attesa e nasce con lo scopo esplicito di essere teoria positiva e quindi di spiegare e prevedere il comportamento umano. Il concetto di razionalità limitata di Simon è superato: le distorsioni e le procedure euristiche spesso non sono più da considerare preziose scorciatoie della mente umana, ma veri e proprio difetti del nostro apparato cognitivo che inducono a scelte sistematicamente incoerenti. Nella visione di Simon l'essere umano è progettato in modo efficiente rispetto alle scelte economiche (il meccanismo che ferma l'ottimizzazione consente un risparmio di risorse), mentre dai nuovi studi emerge l'inadeguatezza della mente umana rispetto ad una quantità di situazioni.

La resistenza opposta dagli alfieri della teoria tradizionale è stata all'inizio molto forte poichè questi lavori hanno messo in subbuglio anche il campo della teoria della finanza, mettendo in luce l'esistenza di numerose anomalie e dando origine alla cosiddetta 'Finanza Comportamentale', che ha infastidito la ben nutrita schiera dei difensori della teoria classica dei mercati, che per decenni hanno dominato incontrastati.

In conclusione, catturare, tramite l'ausilio dell'evidenza sperimentale, una nozione più realistica delle capacità cognitive umane nella modellistica economica è il nucleo dei nuovi campi di ricerca in quanto l'*homo oeconomicus* appare tutto sommato in ritirata.

Ovviamente, poiché alla base dello studio vi è sempre la mente umana ed investigare nel processo del pensiero è una questione delicata, nessuna teoria è perfettamente corretta; ognuna parte da assunzioni di base o da approssimazioni più o meno ragionevoli o realistiche della realtà e tenta di spiegare e prevedere l'insieme dei fenomeni reali che si vogliono studiare. Dato questo obiettivo, le teorie sono continuamente messe a confronto con le osservazioni della realtà; in seguito a questo confronto, esse sono spesso soggette a modifica e riformulazione, e a volte anche al rigetto. Per valutare una teoria, è importante tenere presente che essa è necessariamente imperfetta.

Bibliografia

[1] David M. Kreps, *Corso di microecomomia*, Il Mulino (1993)

[2] F. Delbono, S. Zamagni, *Microeconomia*, Il Mulino (1999)

[3] Hal R. Varian, *Microeconomia*, Cafoscarina (1993)

[4] Robert S. Pindyck, Daniel L. Rubinfeld, *Microeconomia*, Zanichelli (2006)

[5] Alfred Marshall, *Principi di Economia*, Tipografia Toso (1972)

[6] Paolo Agnoli, Francesco Piccolo, *Probabilità e scelte razionali*, Armando (2008)

Ringraziamenti

Come tradizione vuole, mi sembra giusto rivolgere alcuni ringraziamenti a tutti coloro che in questi anni mi sono stati vicini, condividendo questa splendida avventura.

Desidero ringraziare il prof. Negrini, relatore di questa tesi, per la grande disponibilità e cortesia dimostratemi, e per tutto l'aiuto fornito durante la stesura.

Un sentito ringraziamento va a tutta la famiglia e, in particolare, ai miei genitori che, con il loro sostegno morale ed economico, mi hanno permesso di raggiungere questo traguardo.

Un grazie immenso a tutte le amiche e gli amici, troppo numerosi per essere elencati, per aver reso unici e indimenticabili questi anni; un ringraziamento va anche alle compagne di studio (Ary, Dany, Laura, Sara), per essermi state vicine sia nei momenti difficili, sia nei momenti felici (e soprattutto esilaranti): siete state per me più vere amiche che semplici compagne. Chiedo scusa alle amiche d'infanzia (Betta e Sere) per averle trascurate durante la stesura di questa tesi.

Un ultimo pensiero va a mio nonno Severino da cui purtroppo non potrò sentirmi chiamare 'Dottoressa!!'.

Grazie a tutti!