Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

I PRINCIPI DELL'OTTICA GEOMETRICA IN CARTESIO E FERMAT

Tesi di Laurea in Storia della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PAOLO FREGUGLIA

Presentata da:
MARTA FALASCHI

Sessione I
Anno Accademico 2011-2012

A Tommy
e alla
mia famiglia...

Introduzione

"Anche la matematica è una scienza fatta da esseri umani, e perciò ogni tempo, così come ogni popolo, ha un suo proprio spirito."
Hermann Hankel

Studiando un teorema o una proposizione abbiamo la sensazione che quel trafiletto sia nato stampato in quel libro. Le poche righe iniziano con la presentazione delle ipotesi per concludersi, come una sorta di botta e risposta, con lenunciazione del teorema.
Tutto finisce li.
Se siamo fortunati un piccolo riquadro a bordo pagina ci riassume la vita dellautore.
Lo studio perde di interesse.
Invece un'analisi storica della vita dell'autore e della nascita di un teorema, in primo luogo riduce quel senso di distanza che prima abbiamo avvertito e diventa la chiave di lettura per una corretta comprensione.
In questo modo lautore e la sua opera sono inseriti in un percorso che, non limitandosi a descrivere ipotesi e teoremi, accompagna il lettore.
L'approccio storico offre, inoltre, l'opportunità di presentare la matematica come un continuo sforzo di ripensamento e di miglioramento da parte dell'uomo, piuttosto che come"un edificio che raccoglie verità certe e immutabili".

Nella mia tesi ho messo a confronto due personaggi che hanno dato una valido contributo alla matematica: Renè Descartes e Pierre de Fermat.

Il mio elaborato si concentra esclusivamente sui loro studi di ottica.

La tesi è composta da quattro capitoli.

Il primo introduce i punti fondamentali della storia dell'ottica; il secondo, dedicato a Cartesio, riassume la sua vita e analizza lo studio dei principi di riflessione e rifrazione scritti nella *Diottrica*.

Il terzo capitolo, in analogia con il precedente, è dedicato a Fermat, e analizza i due trattati *"Analyse pour les réfraction"* e *"Synthèse pour les réfractions"* che il tolosano scrive inerenti all'ottica geometrica.

L'elaborato si conclude sviluppando la "famosa" polemica che intercorre all'inizio, tra i due francesi e, in seguito, tra Fermat e i cartesiani.

Indice

Elenco delle figure

Abbreviazioni

D: Renè Descartes, “Discorso sul metodo: La diottrica, Le meteore , La geometria”, U.T.E.T. 1983.

F: Pierre de Fermat, “Œuvres de Pierre Fermat”, publies par les soins de Mm. Paul Tannery et Charles Henry ; sous les auspices du Ministere de l’Instruction publique, Paris, Gauthier-Villars.

Capitolo 1

Premesse generali sull'ottica

1.1 Il Periodo Ellenico

Le prime notizie sulla natura della luce risalgono al mondo ellenico, periodo in cui si sviluppa la matematica come disciplina organizzata, indipendente e razionale.
In questo periodo, prima nella scuola pitagorica VI secolo a.C., poi nella scuola democritea V secolo a.C., si sviluppano due differenti teorie sulla natura della luce.

1.1.1 Scuola pitagorica

I pitagorici sostengono la così detta *teoria emmissionista dall'occhio*: i nostri occhi emettono un qualcosa che può assomigliare ad un fluido (un fuoco invisibile), che colpisce gli oggetti circostanti per poi ritornare all'occhio.
Questa teoria è sostenuta dall'osservazione della luminescenza degli occhi degli animali notturni.
Il grande successo riscosso da questa teoria, probabilmente, può essere motivato dall'osservazione delle scintille scagliate dal fuoco, che fanno pensare all'occhio come ad una lanterna dalla quale vengono emessi i raggi di luce che ci permettono di vedere.
La teoria ha, però, una facile obiezione: *Come mai non bastano gli occhi e*

gli oggetti da vedere ma per vederli serve la luce?
Tale obiezioni non impedisce comunque che, con modifiche, la teoria continui ad essere sostenuta.

1.1.2 Scuola democritea

La scuola democritea non sostiene l'emissione dall'occhio, ma dall'oggetto guardato: un flusso di corpuscoli si stacca dai corpi conservandone la forma ed investe gli occhi determinando la visione.
"La nostra anima non esce dal nostro interno per andare a toccare gli oggetti, sono gli oggetti che vengono a toccare la nostra anima passando attraverso i sensi, ma noi non vediamo gli oggetti avvicinarsi: bisogna che essi mandino alla nostra anima delle immagini, specie di ombre o simulacri materiali che rivestono i corpi, si agitano sulla loro superficie e possono staccarsene, per portare alle nostre anime le forme, i colori e tutte le altre qualità degli oggetti."[13]

1.1.3 Empedocle di Agrigento

In seguito, nel IV secolo a.C., Empedocle di Agrigento unisce le due teorie conosciute affermando che l'emissione avviene sia dagli occhi sia dagli oggetti.
Il primo flusso è di natura corpuscolare e porta tutte le informazioni sull'oggetto (ordine, forma, colore); l'altro è emesso dall'occhio per mezzo di un fuoco.
Quindi la luce è un fuoco che s'incontra con un altro fuoco: *"la fine e dolce fiamma che l'Amore ha captato entro l'acqua dell'occhio e che esce dai piccoli fori della pupilla."*[13]

1.1.4 Aristotele di Stagira

Anche Aristotele di Stagira (384 a.C. o 383 a.C. - 322 a.C.) si interessa alla natura della luce. Rifiuta l'ipotesi di Empedocle e Platone dell'emissione

della luce dall'occhio (a motivo, argomenta, dell'impenetrabilità dei corpi) e avanza l'idea di un movimento che si propaga tra l'oggetto e l'occhio e che modifica lo stato dei corpi diafani (trasparenti).
"Ma se l'occhio fosse di fuoco, come dice Empedocle e come è scritto nel Timeo; se la visione avesse luogo per mezzo di un fuoco uscente dall'occhio, come per mezzo della luce uscente da una lanterna, perché non ci si deve vedere in mezzo alle tenebre?
Dire che questa luce si estingue spandendosi nelle tenebre, come è detto nel Timeo, è un ragionamento completamente privo di significato.
Infatti come può avvenire l'estinzione della luce?
Il caldo e il secco si estinguono nel freddo e nell'umido, e come tali sembrano essere il fuoco e la fiamma che si formano nei carboni incandescenti. Ma né il caldo né il secco sembrano appartenere alla luce.
Se vi si trovassero e se ci fossero invisibili a causa della loro quiete, ne verrebbe di conseguenza che in una giornata di pioggia la luce si dovrebbe estinguere, e che in tempo di gelo dovremmo avere le tenebre più profonde.
Perché tali sono gli effetti che subiscono le fiamme e i corpi incandescenti.
Ora, non avviene nulla di simile."
"È affatto assurdo sostenere che si vede per qualche cosa che sorte dall'occhio e, che questo qualche cosa si estenda fino agli astri o fino a che incontra qualche altra cosa che gli viene incontro, come lo pretende qualcuno.
Perché semmai sarebbe preferibile ammettere questa unione dapprincipio, nell'occhio stesso. Ma anche questa sarebbe una sciocchezza, perché non si capisce il significato di questa unione di luce a luce, e non si capisce come potrebbe effettuarsi ...
Una volta per tutte, è preferibile convenirne che la sensazione nasce dal movimento eccitato dal corpo sensibile nel mezzo intermedio, piuttosto che riportarla a un contatto diretto o a una emissione."[13]

1.2 Il Periodo Ellenistico

Nel periodo ellenistico, situato convenzionalmente tra il III secolo a.C. e il IV-V secolo d.C., si riscontrano notevoli sviluppi riguardante l'ottica e, soprattutto, possiamo far riferimento a documenti più consistenti.
I personaggi che maggiormente contribuiscono agli studi di ottica sono: Euclide (323 a.C.- 285 a.C.), Tolomeo (100-175 circa) e Damiano (IV secolo) figlio di Elidoro di Larissa.

1.2.1 Euclide

Ad Euclide vengono attribuiti, solitamente, due trattati sull'ottica: l'*Ottica* e la *Catottrica*, il primo è senza dubbio autografo, mentre il secondo quasi sicuramente si può attribuire a Teone di Alessandria.
Euclide, da rigoroso matematico, come già negli *Elementi*, presenta 14 ipotesi a fondamento della sua teoria:

- I raggi emessi dall'occhio procedono per via diritta.
- La figura compresa dai raggi visivi è un cono che ha il vertice all'occhio, e la base al margine dell'oggetto guardato.
- Si vedono quegli oggetti a cui arrivano i raggi visivi.
- Non si vedono quegli oggetti ai quali i raggi visivi non arrivano.
- Gli oggetti che si vedono sotto angoli maggiori, si giudicano maggiori.
- Gli oggetti che si vedono sotto angoli minori, si giudicano minori.
- Gli oggetti che si vedono sotto angoli uguali, si giudicano uguali.
- Gli oggetti che si vedono con raggi più alti, si giudicano più alti
- Gli oggetti che si vedono con raggi più bassi, si giudicano più bassi.
- Gli oggetti che si vedono con raggi diretti a destra, si giudicano a destra.

- Gli oggetti che si vedono con raggi diretti a sinistra, si giudicano a sinistra.
- Gli oggetti che si vedono con più angoli, si distinguono più chiaramente.
- Tutti i raggi hanno la stessa velocità.
- Non si possono vedere gli oggetti sotto qualsiasi angolo.

Anche la *Catottrica* inizia con 7 ipotesi:

- Il raggio è una linea retta di cui i mezzi toccano le estremità.
- Tutto ciò che si vede, si vede secondo una direzione rettilinea.
- Se lo specchio sta su di un piano, e su questo sta un'altezza qualsiasi elevata ad angoli retti, la retta interposta tra lo spettatore e lo specchio ha la stessa ragione con la retta interposta tra lo specchio e l'altezza considerata, che l'altezza dello spettatore con l'altezza presa in considerazione.
- Negli specchi piani l'occhio posto sulla perpendicolare condotta dall'oggetto allo specchio, non vede l'oggetto.
- Negli specchi convessi, l'occhio posto sulla retta condotta dall'oggetto al centro della sfera, di cui lo specchio è una porzione, non vede l'oggetto.
- Lo stesso accade per gli specchi concavi.
- Se si pone un oggetto qualunque al fondo di un vaso, e si allontana il vaso dall'occhio, finché l'oggetto non si vede più, l'oggetto torna visibile a quella distanza se si versa dell'acqua nel vaso.

1.2.2 Claudio Tolomeo

Tolomeo, autore dell'*Ottica*, andata in parte perduta, aderisce alla teoria emissionista (emissione di raggi da parte dell'occhio) di Euclide, con ampio uso della geometria, modificandola ampiamente, sostituendo i coni che hanno vertice nell'occhio con delle piramidi.
Secondo Tolomeo, infatti, il modello di Euclide, inteso come visione per raggi discreti, porta ad un assurdo: non si possono infatti vedere cose colpite da singoli raggi visivi perché singoli raggi incidono in singoli punti, ed essendo il punto senza dimensione, nulla si può vedere.
Tolomeo analizza anche la visione binoculare e lo sdoppiamento delle immagini quando le due piramidi con vertici nei due occhi non si combinano opportunamente.
Considera i colori come proprietà superficiali dei corpi ed infine passa alla determinazione della grandezza degli oggetti osservati mediante costruzioni geometriche che mettono in relazione l'altezza della piramide con la sua base.
La novità principale dell'*Ottica* di Tolomeo è il principio di rifrazione.
Tolomeo riconosce che i raggi di luce entranti in un mezzo più denso si avvicinano alla normale, e quelli entranti in un mezzo meno denso si allontanano.
Sostiene che il rapporto tra l'angolo di incidenza e l'angolo di rifrazione rimane costante negli stesso mezzi.

1.2.3 Damiano

Damiano è l'autore di un piccolo libro (Damianoû toû Heliodoroû Kephalaia ton optikôn hypotheseion) dove vengono trattati i seguenti punti:

1. La nostra emanazione influenza gli oggetti che vediamo.
2. Ciò che emaniamo è luce.
3. Questa luce si muove in linea retta.
4. La luce appare nella forma di un cono.

5. Il cono in cui si muove la luce è ad angolo retto.
6. Il cono di vista non è uniformemente riempito di luce.
7. Quello che vediamo è all'interno di un angolo retto, angolo acuto.
8. Gli oggetti appaiono più grandi quando vengono viste da un angolo maggiore.
9. In genere si vede attraverso la luce che circonda l'asse del cono.
10. Il potere della vista funziona in avanti.
11. L'apice del cono si trova all'interno della pupilla e costituisce il centro di una sfera, di cui il cono occupa un quarto di superficie.
12. Il nostro raggio di vista cade direttamente sull'oggetto, o si piega e torna indietro, o passa attraverso un mezzo, e poi si piega.
13. C'è un'affinità fra il nostro occhio e il sole.
14. Il raggio di vista forma angolo uguali nel punto in cui si piega e questo vale anche per il sole.

Le proposizioni 1,3,4,6 e 8 corrispondono alle ipotesi di Euclide.
La 1,7 e 11 spiegano la dimensione del campo visivo, la 9 e la 10 la chiarezza nel campo e la direzione in cui si vedono gli oggetti.
La 12 e la 14 hanno a che fare con la riflessione e la 13 confronta la luce dell'occhio con la luce solare.
Nello sviluppo di 3 si pone l'accento sul fatto che la luce si muove in linea retta, al fine di raggiungere l'oggetto visibile il più velocemente possibile, e d'altra parte il cono di vista ha una base circolare in modo da includere il più possibile.

1.3 Dal VI al XVII Secolo

Per incontrare altri personaggi che diano un contributo agli studi sull'ottica bisogna aspettare il Rinascimento, periodo di profondi cambiamenti intellettuali e politico-sociali, che occupa gli anni dal 1400 alla fine del 1600. In questo breve paragrafo analizziamo gli studi di G.B.Porta (1536-1615), Galileo (1564-1642) e Keplero (1571-1630).

1.3.1 Porta

G.B.Porta, nel suo *Magia naturalis* (1558), descrive un esperimento sorprendente che illustra la propagazione rettilinea della luce.
In una stanza buia, dove c'è un piccolo foro nall'imposta della finestra, l'immagine illuminata fuori della stanza appare, nella parete bianca di fronte all'apertura, invertita colorata e prospettica. Questa manifestazione fa un'im-

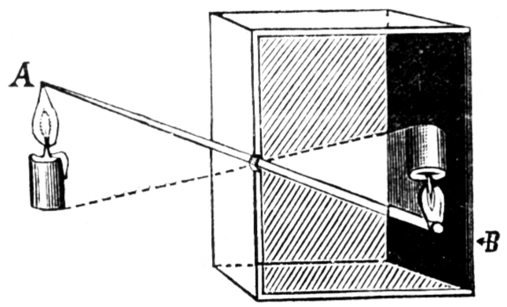


Figura 1.1: Camera oscura

pressione davvero magica. Per comprenderla occorre pensare che ogni punto A, esterno e colorato, ematta luce in tutte le direzioni, di cui una piccola parte passa attraverso il foro O e cade in un punto B del muro come riflesso colorato, dove AOB è una linea retta.
Porta considera l'occhio come una camera oscura e le lenti come lo schermo bianco.[1]

[1] Errore rimediato da Keplero

Il Libro di Porta, in alcuni passaggi, contiene “non sensi”: per spiegare i fenomeni richiama fatti miracolosi.

1.3.2 Keplero

Keplero, diversamente da Porta, ma in accordo con Descartes, crede nella propagazione istantanea della luce.
Keplero paragona il centro, il raggio e la superficie della sfera con la Trinità.
In diverse proposizioni analizza le caratteristiche della luce:

- Da ogni punto luminoso partono infiniti raggi.
- La propagazione della luce è istantanea perchè la luce non ha massa ne peso.
- La luce non si espande longitudinalmente.
- I raggi di luce sono più concentrati vicino al centro.
- La forza e la concentrazione della luce sono differenti a secondo della distanza dal centro.
  In particolare, l'intensità della fonte di luce è proporsionale al quadrato della distanza.[2]
- La luce non proviene da un corpo solido, in quanto essa stessa non è un corpo.
- Il colore è luce inclusa in un materiale trasparente.
- I raggi di luce non sono illuminati e colorati e non si intralciano fra loro.
- Il calore è una peculiarità della luce.

Keplero studia intensivamento anche il fenomeno della rifrazione, cercando di illustrare i risultati della sua ricerca per mezzo di generali considerazioni fisiche, e scopre il fenomeno della riflessione totale.

[2]Bouguer (1698-1758) è in accordo con Keplero

1.3.3 Galileo

Galileo non credendo nell'istantanea propagazione della luce elabora la prima proposta per determinarne sperimentalmente la velocità.
Suggerisce la formazione di due osservatori A e B con lanterne schermate in modo tale che quando A scopre la sua lanterna, B deve immediatamente scoprire la sua.
Galileo prevede che, se gli osservatori sono stati collocati a grande distanza gli uni dagli altri, di notte, A dovrebbe vedere la lanterna B in un momento ritardato rispetto a quando scopre la sua lanterna.
Con distanza di meno di un miglio l'esperimento fornisce un risultato negativo, ma Galileo suggerisce l'osservazione per mezzo di telescopi su una distanza di 8 o 10 miglia.
Galileo deduce che la propagazione della luce occupa tempo, ma è molto rapida.[3]

In seguito esamineremo in dettaglio gli studi di Renè Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665).

[3] Romer fu il primo a stimare velocità della luce, grazie all'eclissi del primo satellite di Giove nel 1675.

Capitolo 2

Renè Descartes

2.1 Biografia

2.1.1 Famiglia e infanzia

Renè Descartes nacque, secondo la biografia di Lipstorp, il 31 marzo del 1596 a La Haye, in una casa *" considerata fino ad allora come una delle più nobili, delle più antiche e delle più in vista della Turenna"*[1].
Pierre Borel riteneva invece che fosse nato nella casa che i Descartes possedevano a Chatellerault, nel Poitou (residenza abituale della famiglia): entrambe le case esistono ancora. Del Poitou erano originari gli avi del filosofo, che non erano però nobili.
Il nonno, Pierre Descartes, fu medico, mentre il padre, Joachim (1563-1640), esercitò l'avvocatura a Parigi, nel 1585 acquistò la carica di consigliere del Parlamento di Bretagna a Rennes, dove si trovava quando la moglie Jeanne Brochard (1570-1597) partorì Renè, terzo figlio dopo le nascite di Jeanne (1590-1640) e di Pierre (1591-1660).
Renè fu battezzato a Parigi il 3 aprile del 1596 nella chiesa di Saint-Georges. Descartes prese il nome dal padrino, Renè Brochard des Fontaines, zio materno e giudice a Poitiers.

[1]Adrien Baillet, Vie de Monsieur Descartes, I, p. 4

Renè fu affidato fino al terzo o al quarto anno d'età, secondo l'usanza del tempo, ad una nutrice. Il legame con la nutrice fu cosi forte che Renè con-

Figura 2.1: Cartesio

tinuò ad aiutarla economicamente per tutta la vita, chiedendo ai fratelli di continuare ad inviarle soldi anche dopo la sua morte.
La madre di Renè morì l'anno dopo, il 13 maggio 1597, dando alla luce un altro figlio che sopravvisse solo tre giorni (di cui Renè ha sempre ignorato l'esistenza), mentre il padre, Joachim, si risposò intorno al 1600 con Anne Morin, una bretone conosciuta a Rennes, dalla quale ebbe due figli: Joachim (1602-1680) e Anne.
Orfano di madre e con il padre spesso assente, furono soprattutto la nonna materna e la nutrice a prendersi cura di Renè, che passò l'infanzia a La Haye con i due fratelli. Qui ricevette l'istruzione elementare da un precettore. Il costante pallore e una frequente tosse secca fecero dubitare ai medici che egli potesse vivere a lungo e ritardarono l'inizio dei suoi studi regolari.

2.1.2 Gli studi

Renè Descartes entrò al collegio di La Flache (fondato da Enrico IV nel 1603 e assegnato ai gesuiti) a Pasqua del 1607 e ne uscì nel settembre del 1615.

Gli studenti, provenienti da ogni parte della Francia, senza distinzione di classe sociale, erano tenuti al solo pagamento della pensione e i corsi prevedevano tre anni di studio della grammatica, un anno di studi umanistici, uno di retorica e tre anni di filosofia. Coloro che avessero voluto intraprendere la carriera ecclesiastica vi avrebbero continuato a studiare per altri cinque anni la teologia e le Scritture.
Descartes rimase in collegio quasi nove anni. Scarso era l'insegnamento della matematica, impartito per meno di un'ora al giorno ai soli studenti del secondo anno di filosofia.
S'insegnava esclusivamente la filosofia aristotelica in un corso triennale ripartito nell'apprendimento della logica, basato sui manuali di Francisco Toledo e di Pedro da Fonseca, della fisica e della metafisica, quest'ultima insieme con nozioni di filosofia morale.
Descartes si mostrerà poi deluso dell'insegnamento ottenuto:
"Sono stato allevato nello studio delle lettere fin dalla fanciullezza, e poichè mi si faceva credere che con esse si poteva conseguire una conoscenza chiara e sicura di tutto ciò che è utile nella vita, avevo un estremo desiderio di apprendere.
Ma non appena ebbi concluso questo intero corso di studi, al termine del quale si è di solito annoverati tra i dotti, cambiai completamente opinione: mi trovavo infatti in un tale groviglio di dubbi e di errori da avere l'impressione di non aver ricavato alcun profitto, mentre cercavo di istruirmi, se non scoprire sempre più la mia ignoranza"[2].
Tale critica mossa da Cartesio rivela come nelle scuole di allora non veniva incentivato lo spirito critico degli allievi.
Una tale volontà di ricerca personale fu già presente nel giovane Renè: *"Da giovane, quando mi si presentava qualche scoperta ingegnosa, mi domandavo se io stesso non fossi in grado di trovarla da solo, anche senza apprenderla dai libri"*[3].

[2]D, VI, 4
[3]D, X, 214

Uscì dal collegio gesuita nel settembre del 1615, conservando un affetto riconoscente nei confronti del rettore, padre Etienne Chalet, che gli fece *"le veci del padre per tutto il periodo della gioventù"*[4], e per il regime di vita osservato nella scuola, durante il quale la sua salute si ristabilì completamente. Si stabilì a pensione presso un sarto di Poitiers per studiare giurisprudenza e il 9 e 10 novembre 1616 fu ammesso cum laude a due esami consecutivi del baccalaureato e della laurea.
Una serie di citazioni confermano l'amore del giovane collegiale per la poesia e la sua familiarità con il corpus latino.
Terminati i suoi studi, Descartes raggiunse la famiglia a Rennes e sempre più spesso domiciliò presso la sorella, signora di Crevis.

2.1.3 Due anni decisivi

Descartes si arruolò volontario nel 1618 in uno dei due reggimenti francesi di stanza a Breda, in Olanda, sotto il comando del principe d'Orange: fortunatamente fu un periodo di tregua della guerra che oppone la Francia alla Spagna.
Descartes, che fin dal collegio aveva beneficiato di una camera dove poteva riflettere in pace, si lamentava dell'ambiente tumultuoso dell'ignoranza e della volgarità dei compagni,che non gli fecero amare l'ambiente militare.
Tuttavia quel soggiorno si rivelerà importante sotto un altro aspetto: il 10 novembre conobbe casualmente il medico Isaac Beeckman, venuto da Middelburg a Breda per aiutare lo zio.
Beeckman aiutò Descartes ad ampliare la portata scientifica, non fatta solo di applicazioni tecniche.
Il loro primo incontro avvenne davanti ad un cartello in fiammingo che proponeva un problema matematico, sul quale il giovane francese domandò in latino qualche spiegazione all'olandese che lo stava leggendo. Questi glielo tradusse in latino, e Descartes propose di lavorare subito alla soluzione, una reazione che Beeckman non si aspettava affatto da quel giovane militare.

[4] 9 febbraio 1645 Oeuvres Descartes I pp.570-571

Descartes, grazie agli studi di matematica e soprattutto alle doti personali sorpassò Beeckman in molti punti. Beeckman gli fece scoprire il legame tra la fisica e la matematica, che all'epoca veniva rifiutato insieme a tutta la filosofia scolastica.
Tra i grandi temi che l'olandese propose a Renè, i due principali sono la caduta dei grav di Galilei e le leggi sulla pressione di Stevin.
Beeckman annotava quasi tutto in un diario, e proprio in questo, riportò l'essenziale delle soluzioni di Descartes sulla caduta dei gravi, con la correzione indicata.
Più tardi riportò nel diario anche i due sviluppi che Renè gli aveva mostrato sull'idrostatica e sulla caduta di una pietra nel vuoto.
Cartesio concluse il 31 dicembre un breve trattato sulla musica intitolato *Compendium musicae* che offrì a Beeckman come regalo per il nuovo anno, ricevette in cambio un piccolo registro in pergamena, descritto nell'inventario delle carte che aveva portato con se a Stoccolma.
Due note tracciate da Beeckman sul manoscritto del Compendium indicano che l'operetta fu il risultato di scambi di idee tra i due amici.
Nel Compendium Cartesio si disse convinto che le diverse passioni suscitate dalla musica abbiano una giustificazione nelle variazione delle misure dei suoni e nei rapporti tonali: se alla base dell'effetto emotivo prodotto dalla musica sull'ascoltatore sono meri rapporti quantitativi, egli riconobbe l'esigenza di una più precisa analisi della natura dell'anima umana e dei suoi movimenti per comprendere compiutamente le emozioni indotte dalla musica.
I due amici rimasero in contatto epistolare: il 26 marzo 1619 Cartesio informò Beeckman di aver inventato dei compassi grazie ai quali aveva potuto formulare nuove dimostrazioni sui problemi relativi alla divisione degli angoli in parti uguali e alle equazioni cubiche, ripromettendosi di sviluppare queste scoperte in un trattato ove egli avrebbe esposto *"una scienza del tutto nuova, con la quale si possano risolvere in generale tutte le questioni proponibili in qualsiasi specie di quantità, sia continua che discreta"*.

E' la prima testimonianza dell'intuizione della geometria analitica: *"nell'oscuro caos di questa scienza ho percepito non so quale luce, con l'aiuto della quale ritengo poter dissipare le tenebre più profonde"*[5].
A questo proposito, sebbene egli non ne sia stato l'inventore, Cartesio è conosciuto anche per la diffusione del cosiddetto Diagramma cartesiano il cui uso risale ad epoche antiche.
Il 29 aprile 1619, Descartes s'imbarcò da Amsterdam per Copenaghen: contava di visitare la Danimarca, poi la Polonia e l'Ungheria per raggiungere di qui la Boemia, ma rinunciò al lungo viaggio per dirigersi alla fine di luglio a Francoforte, dove il 27 agosto assistette all'incoronazione di Ferdinando II e s'intrattenne nella città brandeburghese per tutta la durata dei festeggiamenti.
Durante l'inverno del 1619 conobbe nella vicina Ulm il matematico Johannes Faulhaber, che potrebbe aver avuto qualche influenza nelle ricerche intraprese da Cartesio sulle proprietà dei poliedri e pubblicate in Progymnasmata de solidorum elementis.
Probabilmente sempre nello stesso inverno è da considerare la nascita del Discorso sul metodo, come egli stesso scrisse, *"pieno di entusiasmo"*, nel registro regalatogli dal Beeckman. Nella sezione Olympica narra della scoperta dei *"fondamenti di una scienza mirabile e dei sogni e visioni che resero agitata la notte"*[6].

2.1.4 Nove anni di viaggi e di esercizi sul metodo

Durante il periodo che va dal 1620 al 1629 Descartes *"non fece altro che vagare qua e là per il mondo, cercando di essere spettatore piuttosto che attore in tutte le commedie che vi si rappresentavano"*, di acquisire conoscenze certe, scartando le dubbie, secondo i precetti del suo metodo, che egli applicava *"in particolare a problemi di matematica o anche in altri che poteva assimilare ai problemi matematici, scindendoli da tutti i principi delle altre*

[5] D, X, 156-158
[6] D, X, 179

scienze che non trovava abbastanza solidi"[7].
Difatti secondo Descartes lo studio di noi stessi ci rende consapevoli di quante nozioni abbiamo accumulato nella nostra mente sin dall'infanzia, senza che esse siano state sottoposte a un preventivo vaglio critico: perciò, *"è quasi impossibile che i nostri giudizi siano così genuini e così solidi come sarebbero stati se avessimo avuto l'uso completo della nostra ragione sin dalla nascita e se fossimo stati sempre guidati soltanto dalla ragione"*[8].
Occorre una revisione delle opinioni acquisite e la loro sostituzione, se necessario, con quelle legittimate da un criterio di verità. Descartes visitò anche l'Italia dopo aver letto in collegio un testo allora famoso, *Le pelerin de Lorete* del gesuita Louis Richeome, interessato in particolare a Loreto per visitare la leggendaria casa di Betlemme. Nel complesso, non ricavò una buona impressione della penisola e dei suoi abitanti: *"la calura del giorno è insopportabile, il fresco della sera malsano e l'oscurità della notte copre furti e omicidi"*[9].
Cartesio, decise di rinunciare alla carriera militare e ad occupare qualsiasi magistratura, vivendo dei proventi dei suoi possedimenti terrieri che gli assicurarono una condizione libera dal bisogno e gli permisero di dedicarsi ai suoi studi.
Si mantenne in corrispondenza con Beeckman ed entrò in relazione con i matematici Jean Baptiste Morin e Florimond Debeaune, oltre che con il Mydorge, e con i letterati Jean de Silhon, Jacques de Serisay, Guez de Balzac e col padre Mersenne, gia autore di un trattato sull'ottica.
Si pensa che la sollecitazione di quest'ultimo possa averlo indotto a studiarne i problemi di ottica, giungendo a determinare la legge della costanza del rapporto dei seni degli angoli di incidenza e di rifrazione, scoperta da Cartesio successivamente ma indipendentemente da Willebrord Snell. (diario di Beeckman)
Nel novembre del 1627 fu invitato a prendere parte a una riunione di scienziati e filosofi nella casa del nunzio pontificio Gianfrancesco Guidi di Bagno,

[7]D, VI, 28
[8]D, VI, 13
[9]D, I, 204

dove erano presenti, tra gli altri, il cardinale Berulle e il Mersenne.
Descartes si trovò a confutare la nuova teoria filosofica di un certo Chandoux e quella scolastica (generalmente accettata dagli studiosi) attraverso l'esposizione del suo *"metodo naturale"* fondato sulle *Regulae ad directionem ingenii* che stava elaborando in quel periodo.
L'unificazione di tutte le scienze per mezzo dello spirito umano sarà il tema della prima delle Regulae ad directionem ingenii: *"Tutte le scienze non sono altro che l'umana sapienza che permane sempre unica e identica per quanto differenti siano gli oggetti cui si applica [...] Tutte le scienze sono così connesse tra loro che è molto più facile apprenderle insieme piuttosto che separarne una sola dalle altre"*[10].
Alla ricerca di maggiore tranquillità, partì per la Bretagna e si trasferì in una sua proprietà nel Poitou dove completò la stesura delle Regulae. Il testo è costituito da 21 proposizioni, di cui le prime 18 sono commentate.
In realtà anche questo testo è stato lasciato incompiuto, in vista dello sviluppo organico del tema del metodo che Descartes darà nel successivo Discours.
L'intenzione è quella di orientare gli studi in modo che *"la mente giunga a giudizi solidi e veri su tutto ciò che le si presenta"*[11].
Il metodo è *"la via che la mente umana deve seguire per raggiungere la verità"*[12]: esso consiste nell'ordinare e disporre gli oggetti sui quali s'indirizza la mente per giungere alla verità. Le proposizioni involute e oscure devono essere ridotte a proposizioni più semplici e poi, partendo dall'intuizione di queste ultime, progredire alla conoscenza di quelle più complesse.
Le proposizioni semplici, comprese intuitivamente e senza ricorrere a dimostrazioni per la loro evidenza, sono equivalenti ai postulati e agli assiomi matematici e costituiscono i principi della conoscenza.

[10]D, X, 360-361
[11]I regola
[12]IV regola

2.1.5 In Olanda

Nell' ottobre del 1928 si recò in visita in Olanda presso l'amico Beeckman a Dordrecht. Renè rimase talmente impressionato da questo paese che decise di trasferirsi nei Paesi Bassi. Dopo un nuovo ritorno a Parigi nell'inverno del 1628, partì per l'Olanda nel marzo del 1629. Rimase in Olanda fino al settembre del 1649, con solo tre viaggi di qualche mese in Francia, nel 1644, nel 1647,e nel 1648.
Anche in questo periodo intrattanne relazioni con molte persone manifestando la sua apertura e il desiderio di essere utile a tutti.
Si stabilì a Franeker, iscrivendosi il 26 aprile 1629 nell'Università di quella città per frequentarvi i corsi di filosofia.
Probabilmente la scelta di quella Università fu dovuta al fatto che vi insegnava il matematico Adrien Metius, fratello di quel Jacques Metius che inventò, a giudizio di Cartesio, il primo cannocchiale.
Descarte continuò a lavorare sui problemi dell'ottica e in agosto fu messo a conoscenza, dal professore di filosofia Henricus Reneri, che diventarà uno dei suoi migliori amici, dell'osservazione del fenomeno ottico-astronomico dei pareli, effettuata il 20 marzo a Frascati dall'astronomo gesuita Cristoph Scheiner.
Dal 1630 cominciò a lavorare al *Le Monde ou traite de la lumiere* che avrebbe dovuto rappresentare l'esposizione della propria filosofia naturale, ma la notizia della condanna, nel 1633, del Galilei e della messa all'Indice del Dialogo sopra i due massimi sistemi lo dissuasero dal completare e pubblicare l'opera che in più parti sposava le tesi di Copernico condannate anch'esse dalla Chiesa.
Dopo un'edizione parziale postuma in traduzione latina nel 1662 a Leida, il trattato fu pubblicato nella versione originale francese a Parigi nel 1664 in due parti separate, con il titolo, rispettivamente, di *Le Monde ou le traite de la lumiere et des autres principaux objects des sens e di L'Homme.* Finalmente, nel 1667, l'opera fu pubblicata integralmente a Parigi insieme con il frammento *La formation du foetus.*

Nelle *Regulae* Cartesio individuò nella *matematica universale* la *scienza dell'ordine*, ossia quella scienza che, stabilendo la disposizione nella quale tutte le varie conoscenze vanno disposte, essendo tra di loro legate da comuni principi, è la scienza alla quale tutte le altre fanno capo. Dopo la matematica, ne Il Mondo Cartesio affronta il problema della fisica, individuando il principio al quale tutti i fenomeni fisici obbediscono.
Tale principio è la conoscenza *"chiara e distinta"* degli elementi semplici che costituiscono i corpi. I corpi sono materia dotata di movimento che occupa uno spazio determinato e gli elementi primi della materia sono la terra, l'aria e il fuoco.
La materia è dunque esprimibile quantitativamente con *"il movimento, la grandezza, la figura e la disposizione delle parti"*, e solo da questi deve derivare la spiegazione delle sue qualità. Le leggi della natura obbediscono a tre principi: *"ogni parte della materia conserva sempre lo stesso stato finchè le altre non la costringono a cambiarlo"*, che è il principio d'inerzia; *"quando un corpo spinge un altro corpo, non gli trasmette nè sottrae movimento senza perderne o acquistarne una quantità eguale"*, e *"quando un corpo è in movimento, ciascuna delle sue parti, presa separatamente, tende sempre a continuare il proprio movimento in linea retta"*.
Nel 1635 conobbe la gioia di diventare padre con la nascita della figlia Francine (concepita con una serva di nome Helene) battezzata il 7 agosto dello stesso anno, la piccola sarebbe morta per la scarlattina nel settembre del 1640.
Nel 1637 pubblicò il Discorso sul metodo e i saggi *La Diottrica*, *La Geometria* e *Le Meteore*. Ben presto l'amico Reneri (che morì o il 15 o il 16 marzo 1639) comunicò ai suoi studenti di Utrecht le spiegazioni della scienza nuova su alcuni punti precisi, leggendo la Diottrica e le Meteore.
Il 1640 fu un anno molto doloroso per Descartes infatti oltre alla straziante morte della figlia, il 20 ottobre muore anche il padre: *"Da poco ho subito la perdita di due persone che mi erano molto vicine, e ho provato che chi mi voleva proteggere dalla tristezza la acuiva, mentre ero confortato dalla parte-*

cipazione di chi vedevo toccato dal mio dispiacere".
Nel 1641 diede alle stampe la prima edizione delle *Meditazioni metafisiche* corredate dalle prime sei *Obiezioni e risposte*.
Quest'ultima opera fu sottoposta a diverse obiezioni da parte del filosofo Harleem Jan de Kater (I obiezione), di Mersenne (II obiezione), di Hobbes (III obiezione), di Arnauld (IV obiezione), di Gassendi (V obiezione) e di un gruppo di geometri e di teologi (VI obiezione).
Con la seconda edizione delle Meditationes (1642) vengono aggiunte anche delle settime obiezioni, opera del gesuita Pierre Bourdine, e risposte. Queste ultime obiezioni, alle quali risponde in modo secco, differiscono molto dalle precedenti.
Alla polemica del gesuita si affianca quella che subisce l'insegnamento cartesiano all'università di Utrecht da parte del rettore, il pastore Voet.
Queste due polemiche avranno esiti molto diversi.
L'Epistola a Dinet, provinciale dei Gesuiti, non provocò nessuna risposta pubblica, nè di Bourdin nè di Dinet. Quest'ultimo, tanto abile quanto caritatevole, in occasione del viaggio a Parigi compiuto da Descartes nel 1644, gli farà incontrare Bourdin e li farà riconciliare. Al contrario l'aggravarsi della situazione a Utrecht spingerà Descartes a pubblicare nel 1643 l'*Epistola a Voetium*.
Le difficoltà si moltiplicheranno con diverse università olandesi, e scoppierà il malinteso tra Regius e Descartes. Colui che, nelle vesti di discepolo, lo aveva difeso, lo attaccherà pubblicamente: da qui la loro violenta rottura nel 1647.
La vita di Descartes molto turbata da questo duplice attacco, sarà comunque illuminata dalle sue nuove amicizie che avranno un effetto positivo sulla diffusione e sullo sviluppo delle sue opere: a partire dal 1641 quella con Picot, futuro traduttore dei *Principi*; nel 1642 quella con la principessa Elisabetta di Boemia, ispiratrice di un'importante corrispondenza morale e di un trattato sulle *Passioni* e nel 1644 quella con Luynes, futuro traduttore delle *Meditazioni*.
Nel 1647 la corona di Francia gli riconobbe una pensione.

L'anno successivo, da una lunga conversazione con Frans Burman nacque il libro omonimo.

2.1.6 La fine in Svezia

Nel 1649 accettò l'invito della regina Cristina di Svezia, sua discepola e desiderosa di approfondire i contenuti della sua filosofia, e si trasferì a Stoccolma.
Quello stesso anno dedicò il trattato sulle *Passioni dell'anima* alla principessa Elisabetta.
Il rigido inverno svedese e gli orari in cui Cristina lo costringeva ad uscire di casa per impartirle lezione - prime ore del mattino quando il freddo era più pungente - minarono il suo fisico. Cartesio si spense l'11 febbraio 1650 a causa, secondo il racconto tradizionale e l'ipotesi più accreditata, di una sopraggiunta polmonite.
La regina Cristina offrì a Descartes una tomba nel tempio di Riddenholm, dove sono sepolti i principi e i personaggi illustri. Chanut , temendo di urtare i cattolici e i luterani, scelse il cimitero di Nord-Malmoe.
Nel 1667 avvenne il trasferimento del corpo di Descartes in Francia, venne scelto *"il luogo più elevato della capitale e [...] la sommita della prima università del regno, l'abbazzia di Sainte-Genevieve"*.[13]

[13] Baillet citato in Oeuvres, XII

2.2 La Diottrica

In seguito riporto il primo e il secondo capitolo de La Diottrica.

2.2.1 Discorso Primo - Della Luce

Ogni comportamento nella nostra vita dipende dai nostri sensi e, poichè la vista tra questi è il più universale e nobile, non v'è alcun dubbio che le invenzioni che servono ad accrescerne la potenza siano tra le più utili che si possano dare. È difficile trovarne altra che accresca la vista più di quei meravigliosi cannocchiali che, pur da poco in uso, ci hanno già permesso di scoprire nuovi astri nel cielo e altri nuovi oggetti sulla terra, in numero maggiore di quanti prima se ne fossero visti: in tal modo, questi strumenti, portando la nostra vista molto più lontano di quel che l'immaginazione dei nostri padri fosse solita andare, sembrano averci aperto la strada per giungere ad una conoscenza della natura molto più vasta e compiuta di quella che essi possedevano.
A vergogna delle nostre scienze, però, questa invenzione, tanto utile e degna d'ammirazione, non si deve in un primo tempo che all'esperienza e alla fortuna.
Circa trenta anni fa viveva nella città di Alcmar, in Olanda, un certo Jacques Metius, uomo privo di qualsiasi dottrina, quantunque avesse un padre ed un fratello cultori di matematica. Il suo maggior piacere consisteva però nel costruire specchi e lenti ustorie, e ne costruiva anche d'inverno servendosi del ghiaccio, cosa che l'esperienza ha mostrato possibile. Possedendo per questo motivo molte lenti di diverse forme, gli venne in mente, per un caso fortunato, di guardare attraverso due di esse, che avevano la proprietà di essere l'una un po' più spessa al centro che all'estremità, e l'altra, al contrario, molto più spessa all'estremità che al centro, e le applicò con tanta fortuna, ai due estremi di un tubo, che con esse fu composto il primo dei cannocchiali di cui stiamo parlando.
È infatti basandosi solo su quell'archetipo che sono stati costruiti tutti quelli

che si sono visti in seguito, senza che nessuno ancora, a quanto so, abbia determinato con sufficiente precisione le forme che le lenti debbono avere.
Infatti, nonostante si siano dati poi molti valenti ingegni che hanno intensamente coltivato tale materia e che hanno arricchito l'ottica di parecchie cose migliori di quelle che in tal campo gli antichi ci avevano lasciato, tuttavia, dato che le invenzioni un po' difficili non raggiungono immediatamente il loro massimo grado di perfezione, per quel che riguarda il cannocchiale per mangono ancora abbastanza difficoltà, perchè io abbia motivo di scriverne.
Considerando poi che l'esecuzione delle cose che dirò dipende dall'opera di artigiani, i quali in genere non hanno affatto studiato, mi sforzerò di essere comprensibile a tutti e di non omettere o supporre cosa alcuna che dovrebbe esser nota per la conoscenza di altre scienze.
È per questo che comincerò dalla spiegazione della luce e dei suoi raggi; poi, descritte brevemente le parti dell'occhio, esporrò accuratamente in qual modo avviene la visione; in seguito, dopo aver messo in luce tutte le cose che son capaci di migliorarla, insegnerò con quali artifici, che non mancherò di descrivere, esse possano esserle adattate.
Così, non dovendo qui parlar della luce se non per spiegare come i suoi raggi entrino nell'occhio e come possano esser deviati dai diversi corpi che incontrano, non v'è bisogno che mi accinga ad esporre quale sia veramente la sua natura, ma stimo che due o tre paragoni, che aiutino a concepirla nel modo che mi sembra più agevole, mi basteranno per spiegame tutte le proprietà che l'esperienza ci fa conoscere e per dedurre in seguito le altre che non posson con uguale facilità venir osservate.
In tal modo non faccio che imitar gli astronomi, che, pur muovendo da supposizioni quasi tutte false o poco sicure, tuttavia, dato che queste si riferiscono a diverse osservazioni da essi fatte, non mancano di trame molte conseguenze verissime e certissime.
Qualche volta, procedendo di notte, senza torcia, per luoghi un po' malagevoli, vi sarà certamente accaduto, per saper dove mettere i piedi, di dovervi aiutare con un bastone: allora, avrete potuto notare che percepivate, per l'interpo-

sizione di questo bastone, i vari oggetti che vi circondavano e che potevate perfino distinguere se erano alberi, pietre, sabbia, acqua, erba, fango o altre cose di questo genere.
È vero che questa specie di sensazione, per chi non ne abbia lunga consuetudine, risulta un po' confusa ed oscura, ma consideratela in quelli che, nati ciechi, se ne san serviti per tutta la loro vita e in essi la troverete così perfetta ed esatta da poter quasi dire che vedono con le mani o che il bastone che usano è l'organo di qualche sesto senso concesso loro al posto della vista.
Per trarre da ciò un paragone,desidero che pensiate che la luce, nei corpi che si dicono luminosi, altro non sia che un certo movimento o azione rapidissima e vivissima che si trasmette ai nostri occhi attraverso l'aria ed altri corpi trasparenti, nello stesso modo in cui il movimento o la resistenza dei corpi, che incontra quel cieco, , si trasmetterebbe alla sua mano attraverso il bastone.
Questo esempio vi impedirà innanzi tutto di trovare strano che la luce possa in un istante diffondere i suoi raggi dal sole fino a noi: sapete infatti che l'azione per cui si muove una dell'estremità di un bastone deve in tal modo passare in un istante fino all'altra e che dovrebbe passarvi nello stesso modo anche se tra l'una e l'altra vi fosse maggior distanza di quella che c'è dalla terra al cielo.
Neppure troverete strano che per suo mezzo sia possibile vedere ogni sorta di colori; e forse crederete anche che questi colori, nei corpi che si dicon colorati, altro non siano che i diversi modi in cui tali corpi ricevono la luce e la rinviano contro i nostri occhi , se considerate che le differenze che un cieco nota tra alberi, pietre, acqua e simili cose mediante l'interposizione del suo bastone non gli sembrano minori di quelle che per noi sussistono tra il rosso, il giallo, il verde e tutti gli altri colori e che, tuttavia, queste differenze in tutti quei corpi altro non sono che i diversi modi di muovere quel bastone o di resistere ai suoi movimenti.
Da tutto ciò avrete modo di giudicare che non v'è bisogno di supporre fra gli oggetti e i nostri occhi un effettivo passaggio di qualcosa di materiale perchè

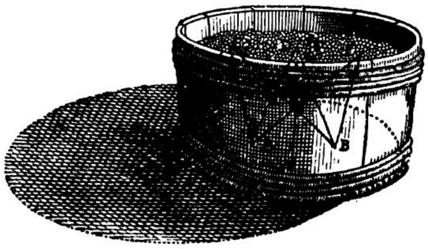
ci sia possibile vedere i colori e la luce e neppure che vi sia in quegli oggetti qualcosa di simile alle idee o alle sensazioni che ne abbiamo: nello stesso modo dai corpi percepiti da un cieco nulla esce che debba passare lungo il bastone fino alla mano e la resistenza o il movimento di tali corpi, sola causa delle sensazioni che ne ha. Non è in alcun modo simile alle idee che se ne forma. In tal modo il vostro spirito sarà liberato da tutte quelle piccole immagini volteggianti per l'aria, dette specie intenzionali, che tanto affaticano l'immaginazione dei filosofi.

Potrete ugualmente risolvere senza difficoltà il problema da essi dibattuto relativo al luogo di provenienza dell'azione che causa la sensazione della vista: come infatti il nostro cieco può percepire i corpi che gli stanno intorno non solo per l'azione di questi corpi quando si muovono contro il suo bastone, ma anche per quelle della sua mano, quando essi si limitano solo a opporglisi, così si deve riconoscere che gli oggetti della vista possono esser percepiti non solo per mezzo dell'azione che, essendo in loro, tende verso gli occhi, ma anche per mezzo di quella che, essendo negli occhi, tende verso gli oggetti. Tuttavia, dato che questa azione altro non è che la stessa luce, bisogna notare che questa si trova soltanto negli occhi di quelli che possono vedere nelle tenebre della notte, come i gatti, mentre gli uomini, in genere, vedono soltanto per l'azione che viene dagli oggetti: l'esperienza infatti ci mostra che sono gli oggetti a dover esser luminosi o illuminati per essere visti, e non già i nostri occhi per vederli.

Considerando però che vi è una grande differenza tra il bastone di questo cieco e l'aria o gli altri corpi trasparenti per la cui interposizione vediamo, mi è necessario ricorrere ancora a un altro paragone.

Immaginate un tino in tempo di vendemmia, tutto pieno d'uva semipigiata, sul fondo del quale siano stati praticati uno o due fori, come A e B, per esempio, attraverso i quali possa scorrere il dolce vino che contiene.

Poi pensate che, non essendoci assolutamente vuoto in natura, come quasi tutti i filosofi riconoscono, mentre vi sono molti pori in tutti i corpi che vediamo d'intorno, come l'esperienza può mostrare molto chiaramente, è necessario che questi pori siano riempiti da qualche materia sottilissima e fluidissima, che si estende senza interruzione dagli astri fino a noi.

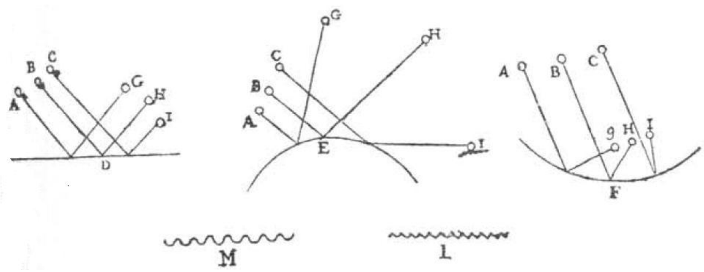


Se paragonate pertanto questa materia sottile al vino del tino, e le parti meno fluide e più spesse, sia dell'aria che degli altri corpi trasparenti, ai grappoli d'uva che vi si trovano in mezzo, comprenderete facilmente che, come le parti del vino che si trovano per esempio verso C, tendono a discendere in linea retta per il foro A, nello stesso istante in cui è aperto, e contemporaneamente per il foro B, e quelle che si trovano verso D e verso E tendono esse pure, nello stesso tempo, a discendere per quegli stessi due fori, senza che nessuna di queste azioni sia impedita dalle altre e neppure dalla resistenza dei grappoli che sono nel tino (nonostante questi, sostenendosi a vicenda, non tendano in nessun modo a discendere per i fori A e B, come il vino, e possano pure, nel contempo, esser mossi dai pigiatori in parecchi altri modi); così tutte le parti della materia sottile contigue alla parte del sole rivolta verso di noi tendono in linea retta verso i nostri occhi, nell'istante stesso in cui questi sono aperti, senza ostacolarsi vicendevolmente ed anche senza essere impedite dalle parti più spesse dei corpi trasparenti che stanno nel mezzo, sia che questi corpi si muovano in diversi modi, come l'aria, che è quasi sempre mossa da qualche vento, sia che stiano immobili, come il vetro o il cristallo.

E qui notate che occorre distinguere tra il movimento e l'azione o tendenza a muoversi; si può infatti perfettamente concepire che le parti del vino che si trovano, ad esempio, verso C tendano verso B e insieme verso A, per quanto in realtà non possano muoversi simultaneamente verso queste due parti e che vi tendano esattamente in linea retta, per quanto non possano muoversi

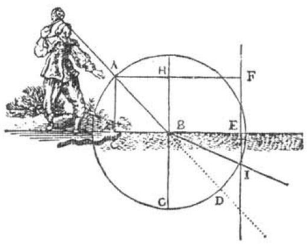
esattamente in linea retta a causa dei grappoli che stanno nel mezzo: così, considerando che non è tanto il movimento, quanto l'azione dei corpi luminosi ciò che si deve ritenere come loro luce, dovete concludere che i raggi di questa luce altro non sono che le linee secondo cui questa azione tende.
In tal modo si danno un'infinità di simili raggi provenienti da tutti i punti dei corpi potete immaginare verso tutti i punti dei corpi che illuminano, così come potete immaginare un'infinità di linee rette secondo le quali le azioni, che provengono da tutti i punti della superficie CDE del vino, tendono verso A, e un'infinità di altre secondo lequali le azioni, che provengono da quegli stessi punti, tendono esse pure verso B senza che le une siano di impedimento alle altre.
Peraltro tali raggi, quando passano solo per un unico corpo trasparente, che è dovunque uguale a se stesso, devono essere davvero sempre immaginati come esattamente retti; ma quando incontrano altri corpi, sono soggetti ad esser sviati da questi o frenati, come dai corpi che incontra il movimento di una palla o di una pietra scagliata in aria.
È infatti molto facile pensare che quell'azione o inclinazione a muoversi, che ho detto doversi considerare come luce, deve in ciò seguire le stesse leggi del moto.
E per spiegare distesamente questo terzo paragone, considerate che i corpi che può incontrare una palla scagliata in aria sono o molli o duri o liquidi; se sono molli, arrestano o smorzano interamente il suo moto, come quando incontra dei teli, della sabbia o del fango; se, invece, sono duri, la respingono da un'altra parte senza fermarla, e fan ciò in molti svariati modi. La loro superficie infatti o è tutta uguale e levigata, o è scabra e ruvida. Inoltre, se è uguale, è o piatta o curva; se è ineguale, la sua ineguaglianza consiste soltanto nel fatto che è composta da più parti diversamente curve, ciascuna delle quali in sé abbastanza levigata, oppure, oltre a ciò, dipende dal fatto che presenta molti diversi angoli o punte, o di diversa durezza o in movimento nei mille diversi modi che si possono immaginare.
Si deve poi notare che la palla, oltre al suo movimento semplice ed ordinario,

che la porta da un luogo a un altro, ne può avere anche un secondo, che la fa ruotare intorno al suo centro, e che la velocità di questo può stare in parecchi diversi rapporti con la velocità del precedente.
Quando, dunque, diverse palle provenienti da una stessa parte si imbattono in un corpo di superficie tutta uguale e levigata, si riflettono uniformemente e nello stesso ordine, in modo che, se tale superficie è perfettamente piana, conservano tra loro, dopo averla incontrata, la stessa distanza che avevano prima; se invece è curva, cioè concava o convessa, le palle si avvicinano o si allontanano più o meno le une dalle altre, sempre però nello stesso ordine, in ragione di questa incurvatura.
Potete vedere qui che le palle ABC, dopo aver incontrato le superficie dei corpi DEF, si riflettono verso GHI.



E se le palle incontrano una superficie ineguale, come L o M, si riflettono in diverse direzioni, ciascuna secondo la posizione del luogo della superficie che tocca. Questo è l'unico cambiamento che interviene nella maniera del loro movimento, quando la ineguaglianza della superficie consiste solo nel fatto che le sue parti sono diversamente incurvate.
L'ineguaglianza, però, può pur consistere in parecchie altre cose e a causa di ciò, far sì che se queste palle avevano prima soltanto un semplice moto rettilineo, ne perdano una parte, e ne acquistino in sua vece uno circolare, che può assumere con quella parte di movimento rettilineo che ancora conservano un diverso rapporto a seconda della differente disposizione della superficie dei corpi che incontrano.
Di ciò fan sufficiente esperienza quelli che giocano a pallacorda quando la

palla incontra una piastrella sconnessa oppure quando la colpiscono obliquamente con la loro racchetta, ciò che essi chiamano, mi pare, tagliare o frisare. Infine, considerate che, se una palla in movimento incontra obliquamente la superficie di un corpo liquido attraverso cui passa più o meno facilmente di come attraversi quello da cui esce, essa, entrandovi, devia e muta il suo corso: così, ad esempio, se si trova nell'aria nel punto A, e la spingiamo verso B, va senz'altro in linea retta da A a B, a meno che non glielo impedisca il suo peso o qualche altra causa particolare; ma, se si trova nel punto B, dove suppongo che incontri la superficie dell'acqua CBE, essa devia e si dirige verso I, procedendo di nuovo in linea retta da B ad I, come è agevole verificare



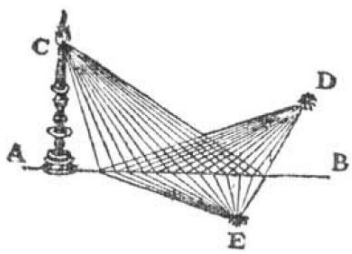
mediante esperienza.

Ora, nello stesso I modo, dobbiamo pensare che vi sono corpi che, colpiti dai raggi luminosi, li smorzano e tolgon loro tutta la forza, cioè i corpi neri, che, come le tenebre, non hanno colori, e che se ne danno altri ancora che li riflettono, alcuni nello stesso ordine in cui li ricevono (quei corpi cioè che, avendo la superficie perfettamente levigata, posson servire da specchi, sia piani che curvi), altri, confusamente, verso parecchie parti.

Inoltre, tra questi, alcuni li riflettono senza portare alcun altro mutamento alla loro azione, i corpi bianchi, mentre altri vi apportano un mutamento simile a quello che subisce una palla quando viene frisata, quelli cioè che son rossi o gialli o azzurri o di altri simili colori.

Penso infatti di poter determinare in che consista la natura di ciascuno di quei colori e farlo vedere mediante esperienza; ma ciò oltrepassa i limiti del mio argomento.

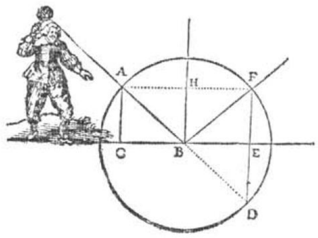
Basti qui ricordare che i raggi che cadono sui corpi colorati e non levigati si riflettono di solito da tutte le parti, anche quando vengano da un sol lato. Così, quelli che cadono sulla superficie del corpo bianco AB, quantunque provengano esclusivamente dalla torcia C, non mancano di riflettersi da ogni parte, in tal modo che dovunque si ponga l'occhio, come ad esempio verso D, se ne trovano sempre parecchi, provenienti da ciascun luogo della superficie AB, che tendono verso di esso. E anche se supponiamo questo corpo sottile come un foglio di carta o come una tela, tale che la luce lo attraversi anche se l'occhio non è dalla stessa parte della torcia, ma, ad esempio, verso E, vi saranno sempre alcuni raggi, che da ogni parte di questo corpo si rifletteranno verso di esso.
Infine, considerate che anche i raggi, come abbiamo detto di una palla, deviano quando cadono obliquamente sulla superficie di un corpo trasparente, attraverso cui passano con più o meno facilità rispetto a quello donde provengono; questo modo secondo cui vengono deviati nel loro caso si dice Rifrazione.



2.2.2 Discorso Secondo - Della Rifrazione

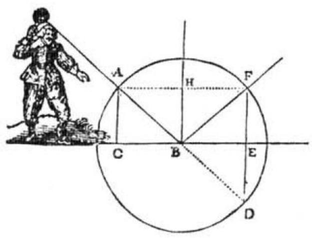
Poichè fra poco avremo bisogno di conoscere esattamente la quantità di questa rifrazione e giacchè essa può essere più facilmente intesa mediante quel paragone di cui mi sono appena servito, mi par opportuno cercar di darne subito la spiegazione e di parlare anzitutto della riflessione al fine di render più facile la comprensione della rifrazione.
Immaginiamo dunque che una palla, spinta da A verso B, incontri nel punto

B la superficie della terra CBE che, impedendole di passar oltre, è causa della sua deviazione: vediamo verso qual parte.



Al fine tuttavia di non invischiarci in nuove difficoltà, supponiamo che il terreno sia perfettamente piano e duro e che la palla proceda sempre con ugual velocità tanto nel discendere quanto nel risalire, senza indagare in nessun modo sulla forza che continua a muoverla quando non è più toccata dalla racchetta e senza considerare gli effetti del suo peso, della sua grandezza e della sua forma; infatti non è il caso di considerare qui tutto minutamente, dato che nessuna di queste cose ha parte nell'azione della luce cui questo discorso deve riferirsi.
Bisogna soltanto notare che, qualunque sia la forza che fa continuare il moto della palla, essa è diversa dalla forza che ne determina il movimento in una direzione piuttosto che in un'altra, come si comprende con gran facilità dal fatto che il movimento della palla dipende dalla forza che la racchetta le ha impresso e che questa stessa forza avrebbe potuto costringerla a muoversi in tutt'altra direzione con la stessa facilità con cui la sospinge verso B, mentre è la posizione della racchetta che fa muover la palla proprio verso B e che avrebbe ugualmente potuto determinarvela, anche se a spingerla fosse stata un'altra forza.
Già questo dimostra che non è impossibile che questa palla sia deviata dall'incontro con la terra e che la sua determinazione a tendere verso B sia così mutata, senza che per questo vi sia nulla di cambiato nella forza che la fa muovere, giacchè si tratta di due cose diverse.
Conseguentemente, non si deve pensare che sia necessario che la palla si fer-

mi qualche istante nel punto B prima di rimbalzare verso F, come stimano parecchi nostri Filosofi; infatti, se il suo movimento fosse una volta interrotto da questo arresto, non si troverebbe causa alcuna capace di farlo rincominciare.
Inoltre, dobbiamo notare che la determinazione a muoversi verso qualche parte può, come il movimento e, in genere, qualsiasi altra specie di quantità, essere suddivisa in tutte le parti di cui possiamo immaginare sia composta; e si può facilmente pensare che la determinazione a muoversi, propria della palla che si dirige da A verso B, sia composta da altre due, di cui una la fa discendere dalla linea AF verso la linea CE, e l'altra, nello stesso tempo, la fa andare dal lato sinistro AC al lato destro FE, in modo che queste due, unite insieme, la conducano verso B, seguendo la retta AB.



In seguito è facile comprendere che l'incontro con la terra può impedire solo una di queste due determinazioni e in alcun modo l'altra.
La terra, infatti, deve completamente impedire quella che faceva discendere la palla da AF verso CE, per il fatto che occupa tutto lo spazio che sta sotto CE; ma perchè dovrebbe impedire l'altra determinazione, quella che la faceva procedere verso destra, dato che in questa direzione non le si oppone in alcun modo?
Per trovare dunque con esattezza verso qual parte tale palla deve rivolgersi, descriviamo, con centro in B, un cerchio che passa per il punto A, e diciamo che essa, per ritornare da B a un qualsiasi altro punto della circonferenza, dovrà immancabilmente impiegare lo stesso tempo che avrà impiegato per andare da A a B, dato che i punti che distano da B quanto ne dista A si

trovano tutti su questa circonferenza e che supponiamo il moto di questa palla sempre ugualmente veloce.

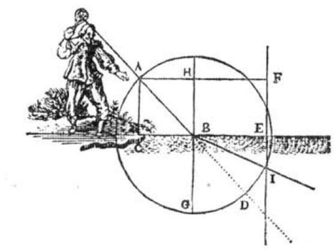
Poi, per conoscere precisamente verso qual punto, tra tutti quelli di questa circonferenza, deve rivolgersi, tracciamo tre rette AC, HB e FE, perpendicolari a CE e tali che la distanza tra AC e HB sia uguale a quella tra HB e FE, e diciamo che nello stesso tempo che ha impiegato a muoversi da A (uno dei punti della linea AC) verso destra fino a B (uno dei punti della linea HB) tale palla deve pure spostarsi dalla linea HB fino a raggiungere un punto della linea FE; tutti indistintamente i punti di questa linea FE sono infatti in quella direzione ugualmente lontani da HB quanto quelli della linea AC e la palla è pur determinata a muoversi da quella parte nella stessa misura in cui lo è stata prima.

Accade però che questa non possa pervenire in un punto della retta FE e nello stesso tempo in un punto della circonferenza del cerchio AFD se non nel punto D o nel punto F, perchè solo in questi due punti la retta e la circonferenza si intersecano; per questo, giacchè la terra non permette alla palla di procedere verso D, dobbiamo concludere che essa deve immancabilmente dirigersi verso F.

Vedete così facilmente come avviene la riflessione: cioè secondo un angolo sempre uguale a quello che si dice angolo di incidenza.

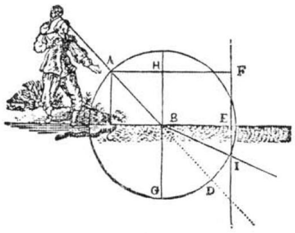
Nello stesso modo se un raggio, proveniente dal punto A, cade nel punto B sulla superficie dello specchio piano CBE, si riflette verso F, in modo che l'angolo di riflessione FBE nonè né più né meno grande di quello di incidenza ABC.

Passiamo ora alla rifrazione.



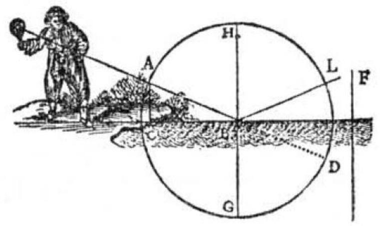
Prima di tutto supponiamo che una palla, spinta da A verso B, incontri nel punto B non più la superficie della terra, ma una tela CBE, così debole e sottile che la palla abbia la forza di romperla e di attraversarla, perdendo solo una parte della sua velocità, per esempio la metà.
Ciò posto, al fine di conoscere quale via essa debba seguire, ricordiamo ora di nuovo che, differendo il suo movimento interamente dalla sua determinazione a muoversi da una parte piuttosto che da un'altra, sarà necessario esaminarne separatamente la quantità.
Consideriamo anche che, delle due parti di cui si può pensare che questa determinazione sia composta, solo quella che faceva tendere la palla dall'alto in basso può in qualche modo esser mutata dall'incontro con la tela, mentre quella che la sospingeva verso destra deve sempre rimanere la stessa, perchè in questo senso la tela non le offre nessuna opposizione.
Poi, descritto con centro in B il cerchio AFD, e condotte ad angoli retti su CBE le tre linee rette AC, BB, FE, in modo tale che la distanza fra FE e BB sia doppia rispetto a quella che intercorre tra BB e AC, vedremo che la palla deve tendere verso il punto I.

Infatti, poichè la palla nell'attraversare la tela CBE perde metà della sua velocità, per passare, quando è sotto, da B fino a un punto della circonferenza del cerchio AFD deve impiegare il doppio del tempo che ha impiegato al di sopra per giungere da A fino a B. E giacchè non perde assolutamente nulla della determinazione che aveva a procedere verso il lato destro, in un tempo doppio rispetto a quello impiegato per passare dalla linea AC fino ad BB



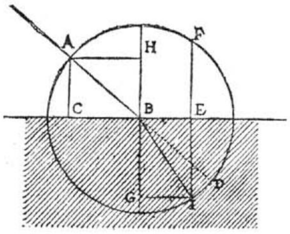
essa deve percorrere verso questo stesso lato un cammino lungo il doppio e, conseguentemente, giungere in un certo punto della linea retta FE nello stesso istante in cui raggiunge un certo punto della circonferenza del cerchio AFD; cosa che non sarebbe possibile se la palla non si dirigesse verso I, dato che questo è il solo punto, sottostante alla tela CBE, in cui il cerchio AFD e la retta FE si intersecano.
Immaginiamo ora che la palla proveniente da A in direzione di D, incontri, nel punto B, non già una tela, ma dell'acqua, la cui superficie CBE le sottragga esattamente la metà della sua velocità, come accadeva nel caso della tela. Tutto il resto rimanendo come sopra, dico che la palla deve passare in linea retta, non già da B verso D, ma da B verso I.
Infatti, in primo luogo, è certo che la superficie dell'acqua la devierà verso quel punto esattamente come fa la tela, dato che le sottrae un'uguale quantità di forza e le è opposta nello stesso senso.
Poi, per quanto riguarda il restante corpo dell'acqua che riempie tutto lo spazio compreso fra B ed I, anche se la resistenza che le offre è maggiore o minore di quella dell'aria che prima vi supponevamo, non per questo si deve dire che debba deviarla più o meno: infatti il corpo dell'acqua può aprirsi e permetterle un passaggio tanto in un senso che in un altro con la stessa facilità, almeno se si suppone sempre, come facciamo, che né la pesantezza, né la leggerezza di tale palla, né la sua grandezza, né la sua forma, né alcun'altra simile causa estranea, cambi il suo corso.

E qui possiamo notare che la palla è tanto più deviata dalla superficie dell'acqua o della tela quanto più obliquamente l'incontra, in modo che, se

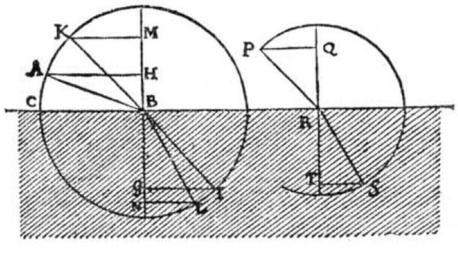


l'incontra ad angoli retti, come quando è spinta da B verso B, deve passare oltre in linea retta verso G senza subire nessuna deviazione. Se però è spinta secondo una linea come AB, che sia talmente inclinata rispetto alla superficie dell'acqua o della tela CBE, che la linea FE, tracciata come abbiamo fatto qui sopra, non intersechi in nessun punto il cerchio AD, questa palla non deve in alcun modo penetrarla, ma rimbalzare dalla superficie B verso un punto L in aria, esattamente come se avesse incontrato la superficie della terra.
Cosa che purtroppo qualche volta è stata sperimentata, quando, fatti sparare per diletto alcuni proiettili d'artiglieria verso il fondo di un fiume, vennero feriti quelli che si trovavano sulla riva dall'altra parte.
Facciamo qui però un'altra supposizione ancora, e immaginiamo che la palla, spinta in un primo tempo da A verso B, sia di nuovo spinta, una volta in B, dalla racchetta CBE che aumenta la forza del suo moto, per esempio, di un terzo e fa così in modo che quella percorra poi in due momenti tanta strada quanta prima ne percorreva in tre.
Lo stesso effetto si produrrebbe se incontrasse nel punto B un corpo di tal natura da poterne attraversare la superficie CBE un terzo più agevolmente di quel che farebbe attraverso l'aria.

Da ciò che è stato già dimostrato consegue poi manifestamente che se si descrive il cerchio AD come sopra e le linee AC, HB, FE, in tal modo che la distanza tra FE e HB sia di un terzo inferiore a quella tra HB e AC, il punto I, dove si intersecano la retta FE e la linea circolare AD, designerà il luogo verso cui questa palla, essendo nel punto B, deve deviare.
Potremmo anche rovesciare tale conclusione e dire che, poichè la palla che si

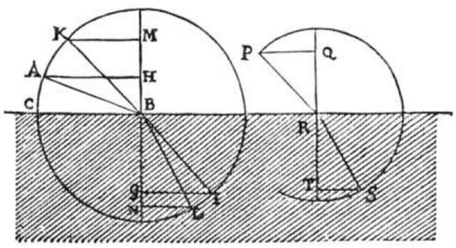


muove in linea retta dal punto A verso B devia quando è al punto B dirigendosi verso I, ciò significa che la forza o l'agevolezza con cui entra nel corpo CBEI sta a quella con cui esce dal corpo ACBE come la distanza tra AC e HB sta alla distanza tra HB e FI, cioè come la linea CB sta a BE.
Infine, giacchè l'azione della luce segue in ciò le stesse leggi che determinano anche il moto di questa palla, si dovrà dire che, quando i suoi raggi passano obliquamente da un corpo trasparente in un altro, che li riceve più o meno facilmente del primo, vi subiscono una tale deviazione che, rispetto alla superficie di questi corpi, essi si trovano sempre meno inclinati dalla parte in cui si trova quello che li riceve più facilmente che dalla parte dov'è l'altro: e ciò esattamente nella proporzione in cui quello li accoglie più facilmente dell'altro. è necessario solo far attenzione che tale inclinazione deve esser misurata dalla lunghezza delle rette CB o AH e EB e IG e simili, raffrontate le une alle altre, e non dall'ampiezza di angoli, come ABH o GBI, e ancor meno dall'ampiezza di angoli come DBI, che son chiamati angoli di Rifrazione.



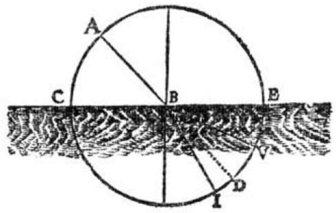
La ragione, infatti, o proporzione che sussiste tra questi angoli varia in rapporto a tutte le diverse inclinazioni dei raggi, mentre quella tra le linee

AH e IG, o simili, rimane sempre la stessa in tutte le rifrazioni che sono causate dagli stessi corpi. Così, per esempio, se un raggio nell'aria passa da A verso B, incontrando nel punto B la superficie del vetro CBR, devia in questo vetro verso I, e se ne viene un altro da K verso B che devia verso L e un altro ancora da P verso R che devia verso S, tra le linee KM e LN o PQ e ST deve esserci la stessa proporzione che c'è tra AH e IG. Tra gli angoli KBM e LBN o PRQ e SRT non c'è invece la stessa proporzione di quella che sussiste tra ABH e IBG.
In tal modo ora sapete come le rifrazioni debbono misurarsi; e anche se, per determinare la loro quantità, in quanto dipende dalla particolare natura dei corpi ove si producono, occorre far ricorso all'esperienza, non manchiamo di poterlo fare con sufficiente certezza e facilmente, dopo che tutte son ridotte così a una stessa misura.



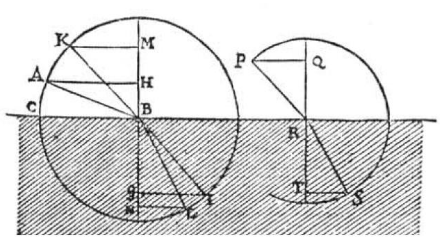
Basta infatti esaminare la rifrazione di un sol raggio per conoscere tutte quelle che si producono su di una stessa superficie, e si può evitare ogni errore se le esaminiamo anche in qualche altro raggio.
Così, se vogliamo sapere la quantità delle rifrazioni che si producono sulla superficie CBR, che separa l'aria AKP dal vetro LIS, basterà provarla in quella del raggio ABI, cercando la proporzione che sussiste tra le linee AH e IG. Poi, se in questa esperienza temiamo di esserci ingannati, dobbiamo ancora provarla in qualche altro raggio, per esempio nel raggio KBL e PRS e, trovando tra KM e LN e PQ e ST la stessa proporzione che v'è tra AH e IG, non avremo più nessun motivo di dubitare della verità.
Forse però, nell'attuare queste esperienze, vi stupirete di scoprire che rispetto

alla superficie di rifrazione i raggi della luce sono più inclinati nell'aria che nell'acqua e ancor più nell'acqua che nel vetro, al contrario di una palla, che si inclina maggiormente nell'acqua che nell'aria e non può in alcun modo attraversare il vetro.



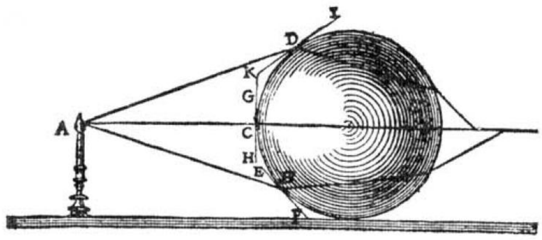
Infatti, ad esempio, se è una palla ad essere spinta attraverso l'aria da A verso B e ad incontrare nel punto B la superficie dell'acqua CBE, essa devierà da B verso V; se invece è un raggio, questo da B si dirigerà verso I. Tutto ciò tuttavia non vi apparirà più strano se richiamate alla mente la natura che ho attribuito alla luce, quando ho detto essa non esser altro che un certo moto o un'azione ricevuta da una materia sottilissima che riempie i pori degli altri corpi, e se considerate che, come una palla perde più movimento urtando un corpo molle che uno duro e meglio rotola su una tavola levigata che su un tappeto, così l'azione di questa materia sottile può essere molto più ostacolata dalle parti dell'aria che, essendo come molli e mal congiunte, non le oppongono molta resistenza, che da quelle dell'acqua che gliene oppongono una maggiore; e ancor più da quelle dell'acqua che da quelle del vetro o del cristallo.
Così, quanto più le particelle d'un corpo trasparente sono dure e stabili, tanto più facilmente lasciano passar la luce; questa infatti non deve cacciarne nessuna dal rispettivo posto come invece deve fare una palla per aprirsi un varco tra le particelle dell'acqua.
Per il resto, conoscendo in tal modo la causa delle rifrazioni che si producono nell'acqua, nel vetro e, generalmente, in tutti gli altri corpi trasparenti intorno a noi, si può notare che esse debbon essere tutte simili, sia quando i raggi

escono da questi corpi, sia quando vi entrano.
Così, se il raggio proveniente da A e diretto verso B devia da B verso I, passando dall'aria nel vetro, quello che tornerà da I verso B deve pure deviare verso A.



Possono tuttavia esserci altri corpi, soprattutto nel cielo, nei quali le rifrazioni, procedendo da altre cause, non sono in tal modo reciproche.
Possono darsi anche casi in cui i raggi debbono curvarsi, benchè passino per un solo corpo trasparente, come spesso si incurva il movimento di una palla, che è deviata in una direzione a causa del suo peso e in un'altra a causa della forza stessa che l'ha lanciata o per altre diverse ragioni.
Infatti come conclusione oso affermare che i tre paragoni di cui mi sono appena servito sono così pertinenti che tutte le particolarità che vi si possono trovare si riportano a certe altre che si trovano in modo del tutto simile nella luce; ma in queste pagine mi sono preoccupato di spiegare soltanto quelle maggiormente adatte al mio argomento.
E l'unica cosa che voglio far ancora notare è che le superficie dei corpi trasparenti che son curve deviano i raggi che passano per ciascuno dei loro punti esattamente come farebbero le superficie piane che possiamo immaginare tangenti a quei corpi negli stessi punti.
Per esempio, la rifrazione dei raggi AB, AC, AD, che venendo dalla fiamma della candela A, cadono sulla superficie curva del globo di cristallo BCD, dev'essere considerata come se AB cadesse sulla superficie piatta EBF, e AC su GCH, e AD su IDK, ed ugualmente negli altri casi.
Da ciò vedete che questi raggi possono in vari modi riunirsi o separarsi a

seconda che cadano su superficie diversamente curve.
È tempo che incominci a descrivervi qual è la struttura dell'occhio, affinchè possa farvi comprendere come i raggi, che penetrano all'interno di esso, vi si dispongano per dar luogo alla sensazione della vista.



2.3 Analisi dell'opera

La Diottrica [14] è pubblicata nel 1637 in contemporanea a *Le Meteore* ed a *La Geometria*, come seguito ed esemplificazione del *Discorso sul metodo*.
L'opera è composta da dieci capitoli, in forma di dialogo, ed è incentrata sullo studio dei fenomeni quali la rifrazione e la diffrazione.
In questo compendio l'autore sviluppa, inoltre, l'idea originale di Leonardo Da Vinci sulla possibile creazione di lenti a diretto contatto della cornea, le odierne lenti a contatto.
In questo capitolo analizzeremo la teoria della luce, in particolar modo il principio di rifrazione, descritto da Descartes nel primo e secondo capitolo della Diottrica.

Descartes ha come interesse quello di realizzare un'opera a carettere divulgativo: si propone di *"essere comprensibile a tutti senza omettere o supporre cosa alcuna che dovrebbe essere nota per la conoscenza di altre scienze"*.[15]
Infatti, *La Diottrica* ha come diretti interessati artigiani, i quali, per metterla in pratica, devono poterla comprendere pur non avendo nessuna preparazione scientifica.
Descartes utilizza per facilitare la comprensione dell'opera paragoni ed esempi della vita di tutti i giorni, utili didatticamente ma lontani dalle ferree formalità del Metodo, illustrate nella premessa del *"Discorso"*.
Le analogie sono tre: il cieco, il vino e la palla.

- Il cieco ha come unico strumento per esplorare il mondo il suo bastone. Con esso è in grado di comprendere immediatamente la presenza e natura degli oggetti che lo circondano.
  Come la vibrazione raggiunge immediatamente la mano del cieco, non appena la punta del bastone viene a contatto con un oggetto, allo stesso modo la luce si trasmette istantaneamente dall'oggetto fino all'occhio.

[14] Nel XVII secolo *Diottrica* significava teoria della rifrazione e si distingueva da *Catottrica*, teoria della riflessione.

[15] *La Diottrica*, p.189, Classici U.T.E.T.

Questo esempio permette all'autore di spiegare la diversa natura dei colori, i quali non sono propri dei corpi ma conseguenza del diverso modo in cui *"il movimento della luce"* viene riflesso per tornare ai nostri occhi.
L'importanza dell'analogia del cieco risiede nella trasmissione istantanea della luce, che, come Descartes sostiene, *"in un istante diffonde i suoi raggi dal sole fino a noi"*[16].
Tale pensiero è conseguenza della concezione cartesiana della materia e, quindi, come vedremo con l'analogia del vino, del medio (etere), veicolo della luce. Infatti Descartes, in accordo con la teoria aristotelica, rifiuta quella empedoclea, dove i raggi luminosi sono emessi dagli occhi e in movimento verso le cose secondo una velocità finita[17].

- Per analizzare la propagazione della luce, Descartes si serve dell'esempio della spremitura del vino.
  Il viticoltore esercitando una pressione sui grappoli d'uva raccolti nel tino, determina la fuoriuscita del vino dai fori.
  Il vino scorre via dal tino, per qualsiasi direzione di pressione, riuscendo a superare corpi rigidi quali grappoli e acini che ne impediscono il passaggio.
  Cosi, come il vino riesce a fluire in linea retta nonostante la presenza di acini e grappoli, allo stesso modo la luce si propaga senza *"essere impedita dalle parti più spesse dei corpi trasparenti"*.[18].
  Descartes, in accordo con molti filosofi scolastici, ritiene infatti che in natura non esista il vuoto, e l'esempio del vino spiega come la luce

[16]La Diottrica, Discorso Primo,U.T.E.T.

[17]Teoria seguita anche da Galeano, Philoponus, Al Kindi, Avicenna, Averroe e i Conimbricenses. Se ne staccarono Ibn al-Haytam, noto come Alhazen, che sosteneva che la luce non poteva trasmettersi senza impiegare un certo tempo, fosse anche minimo; e in ciò fu seguito da Ruggero Bacone e da I. Beeckman, mentre Vitelio e lo stesso Keplero si tennero sulla base aristotelica.

[18]*La Diottrica*, p.200, Classici U.T.E.T.

riesca a propagarsi attraverso *"qualcosa di etereo*[2] ... *una sostanza estremamente fluida e sottile che riempe i pori degli altri corpi"*[2].

- Il terzo paragone riguarda la modalità di riflessione e rifrazione della luce. Descartes prende come esempio una palla che, lanciata con una racchetta, devia il proprio corso a seconda del corpo che incontra.
  Questa ipotesi cartesiana si basa sulla concezione aristotelica dell'istantanea trasmissione della luce, pur abbandonandone ogni giustificazione verbale e introducendo una spiegazione meccanica del fenomeno luminoso: la luce non è determinata dal passaggio dalla potenza all'atto, ma è determinata da una pressione che si esercita su un corpo reale assolutamente privo di compressibilità e che, per conseguenza, giunge immediatamente sino agli organi che la percepiscono.

Analizziamo in seguito i principi di riflessione e rifrazione espressi da Descartes.

2.3.1 Riflessione

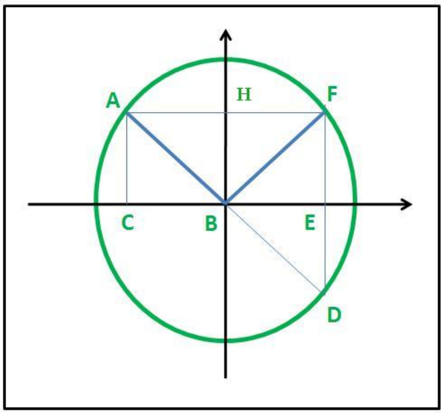


Figura 2.2: Riflessione Cartesio

La palla viene lanciata verso A in direzione AB. Nel punto B incontra il terreno (la retta CBE delimita il passaggio tra aria e terra), che impedendole di passar oltre, è causa della sua deviazione.

Descartes focalizza il proprio interesse sulla direzione che prende la palla dopo aver rimbalzato nel terreno.
Ipotesi assunte da Descartes:

- Il terreno è perfettamente piano e duro.
- La palla procede con la stessa velocità prima e dopo l'urto con il terreno.
- Il movimento della palla dipende dalla forza con la quale si colpisce la racchetta.
- La direzione della palla dipende dalla posizione della racchetta.

Descartes afferma che la palla non arresta il proprio moto in B in quanto, se il movimento fosse arrestato, non ci sarebbe nessuna causa in grado di farlo ripartire.[19]
La determinazione a muoversi[20], propria della palla che si dirige da A verso B è somma di due componenti:[21]

- la componente verticale da AF a CE;
- la componente orizzontale da AC a FE.

[19] *Per il rimbalzo delle palle, non ho detto che tutta la causa debba essere attribuita all'aria rinchiusa all'interno, ma principalmente alla continuazione del movimento che a luogo in tutti i corpi che rimbalzano, cioè, dal fatto stesso che una cosa incomincia a muoversi, perciò lo stesso continua a farlo quanto a lungo può, e se non può continuare in linea retta si riflette in senso opposto piuttosto che rimanere in riposo* (a Mersenne, 25 Febbraio 1630,[2]

[20] Cartesio nella *Diottrica* sottolinea che tale determinazione si può scomporre in infinite parti.

[21] Questa suddivisione del movimento si trova già in Alhazen e Witelio, come riconosce lo stesso Keplero: *Essi [si tratta appunto di Alhazen e Witelio] aggiungono un non so che di sottile : il moto della luce incidente obliqua è composta da un movimento perpendicolare e da uno parallelo alla superficie del corpo denso e quel moto così composto non cessa per l'incontro di un corpo più denso di uno trasparente, ma ne è soltanto ostacolato*(Ad Vit. Paral., ed. cit.,II, p.181,[2]).

La terra annulla solamente la prima determinazione (verticale), ma non impedisce l'altra.
Senza dubbio, afferma l'autore, il punto dove la palla arriva deve trovarsi nella circonferenza di centro B e raggio AB. Infatti il suo moto è stato supposto sempre ugualmente veloce.
Inoltre, il punto cercato, deve trovarsi anche nella retta FD in quanto la distanza tra la retta AC e la retta HB è uguale a quella tra la retta HB e la retta FD.
Per le considerazioni sopra riportate e non potendo la palla oltrepassare il terreno e giungere in D, è coerente affermare che arrivi in F.

Conclusioni

L'angolo di incidenza $A\hat{B}C$ è uguale all'angolo di rifrazione $E\hat{B}F$[22]

Teorema 2.3.1.

$$A\hat{B}C = E\hat{B}F$$

Dimostrazione. Consideriamo i due triangoli ABC e EBF.

- $\overline{AB} = \overline{BF}$ raggi della stessa ciconferenza.
- $\overline{AC} = \overline{FE}$ per costruzione.
- $\overline{CB} = \overline{BE}$ per costruzione.

Per il terzo principio di conguenza dei triangoli:

$$ABC \cong EBF \Longrightarrow A\hat{B}C = E\hat{B}F$$

c.v.d □

[22] Questa legge era stata più volte trovata e confermata anche in passato.

2.3.2 Rifrazione

Primo Caso

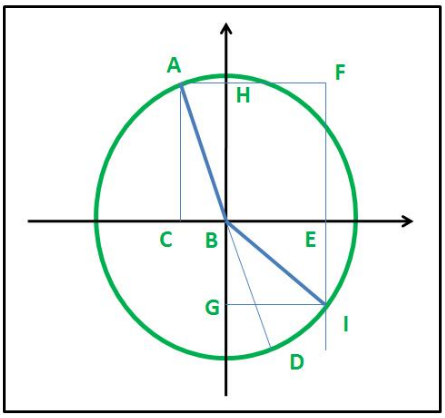


Figura 2.3: Rifrazione Cartesio: primo caso

La palla viene lanciata verso A in direzione AB. Nel punto B incontra non più il terreno ma una tela sottile che la palla trova la forza di rompere e attraversare perdendo solo una parte della sua velocità.
Descartes suppone che attraversando la tela **la palla perda la metà della sua velocità** e devii il suo corso verso il punto I.
Riprendiamo e analizziamo separatamente le componenti della determinazione a muoversi della palla:

- la componente orizzontale da AC a EF rimane la stessa, poichè la tela non offre nessun impedimento al moto. (1)

- la componente verticale da AF a CE risente del passaggio attraverso la tela.

Dato che la palla attraversando la tela perde metà della sua velocità, impiegherà per percorrere il tratto BI il doppio del tempo che ha impiegato da A a B. Quindi per (1) la distanza tra le rette HB ed FE sarà il doppio della distanza

tra AC e HB[23].
Di conseguenza la posizione del punto I è data dall' intersezione fra la retta FE e la circonferenza di centro B e raggio AB ($G\hat{B}D < G\hat{B}I$).

N.B. Nel caso in cui la palla venga lanciata in una direzione AB, molto inclinata rispetto alla retta CBE (angolo di incidenza abbastanza grande), la retta FE non intersecherebbe in nessun punto la circonferenza e quindi la palla verrebbe solamente riflessa e non rifratta.

Secondo Caso

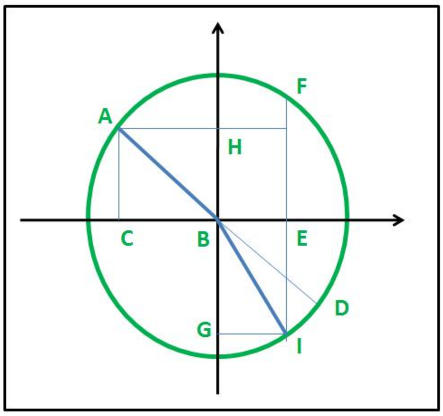


Figura 2.4: Rifrazione Cartesio: secondo caso

La palla viene lanciata verso A in direzione AB. Nel punto B riceve una seconda spinta in modo tale da aumentare la sua velocità.
Descartes suppone che per effetto della seconda spinta **la palla aumenti di un terzo la sua velocità** dirigendosi verso il punto I.
Seguendo un ragionamento simile[24] al precedente (Primo Caso) conclude che

[23]La palla lungo la componente orizzontale, non influenzata dalla tela, percorrerà nel doppio del tempo il doppio dello spazio.
[24]Nel primo caso secondo le ipotesi e le considerazione attuate dall'autore è coerente affermare che la distanza fra HB e FE debba essere il doppio di quella fra HB e AC, mentre in questo caso la distanza corretta sarebbe tre quarti e non due terzi.

la distanza fra le rette HB e FE deve essere i due terzi della distanza fra HB e AC.
Per cui il punto I, determinato dall'intersezione della retta FE con la solita circonferenza, si troverà spostato verso la retta HB ($G\hat{B}D > G\hat{B}I$).

Conclusioni

- L'angolo di rifrazione $G\hat{B}I$ si discosta dalla retta HB differentemente a seconda della variazione di velocità della palla nel punto B:

  - se il secondo mezzo (primo caso) rallenta la palla, l'ampiezza dell'angolo di rifrazione sarà maggiore dell'ampiezza dell'angolo di incidenza[25]:
  $$G\hat{B}I > A\hat{B}H$$
  - se invece la palla aumenta la velocità (secondo caso), l'ampiezza dell'angolo di rifrazione sarà minore dell'ampiezza dell'angolo di incidenza:
  $$G\hat{B}I < A\hat{B}H$$

- La palla ha una velocità maggiore nei mezzi meno densi e minore in quelli più densi.
  Descartes afferma che **la luce si comporta in modo opposto**: la luce, poichè non è altro che *"un moto o azione ricevuta da una materia sottilissima che riempie i pori degli altri corpi"*[26], farà più fatica a passare in un mezzo come l'aria, formato da parti molli e disconesse, che in um mezzo più denso, formato da particelle dure e stabili, come l'acqua.

- Il rapporto tra i segmenti $\overline{AH}$ e $\overline{GI}$ è costante in *tutte le rifrazioni causate dagli stessi corpi.*[27]

[25] L'angolo $A\hat{B}H$ ha la stessa ammpiezza dell'angolo $G\hat{B}D$ in quanto opposti al vertice.
[26] *La Diottrica*, p.219, Classici U.T.E.T.
[27] *La Diottrica*, p.217, Classici U.T.E.T.

Questa affermazione esplicita la legge di rifrazione senza utilizzare il termine *seno*[28].

Riscriviamo il principio di rifrazione espresso da Descartes attraverso il simbolismo di oggi.

Teorema 2.3.2. *L'uguaglianza* $\frac{\overline{AH}}{\overline{GI}} = C$ *equivale a* $\frac{\sin(\hat{\imath})}{\sin(\hat{r})} = C$ *con* $A\hat{B}H = \hat{\imath}$ *e* $G\hat{B}I = \hat{r}$

Dimostrazione. Consideriamo i triangoli ABH e BGI, rettangoli per costruzione. Per i teoremi sui triangoli rettangoli si ha:

$$\overline{AH} = \overline{AB}\sin(A\hat{B}H)$$

$$\overline{GI} = \overline{BI}\sin(G\hat{B}I)$$

Inoltre $\overline{AB} = \overline{BI}$ poichè raggi della stessa circonferenza. Quindi

$$\frac{AH}{GI} = \frac{AB\sin(A\hat{B}H)}{BI\sin(G\hat{B}I)} = C$$

Infine, dato che $A\hat{B}H = \hat{\imath}$ e $G\hat{B}I = \hat{r}$, risulta:

$$\frac{\sin\hat{\imath}}{\sin\hat{r}} = C$$

□

Secondo il ragionamento cartesiano il rapporto fra i segmenti AH e GI equivale al rapporto fra la velocità di rifrazione e quella di incidenza, quindi $C = \frac{v_r}{v_i}$.

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_r}{v_i}$$

[28]Si ricorda l'intento da parte dell'autore di realizzare un'opera divulgativa

Capitolo 3

Pierre de Fermat

3.1 Biografia

3.1.1 La vita

Pierre de Fermat nasce molto probabilmente il 20 agosto 1601 a Beaumont-de-Lomagne, cittadina del sud della Francia, a 57 chilometri a nord-ovest di Tolosa, in Linguadoca, anche se la famiglia sembra essere oroginaria della Catalogna.
Anthoine Fermat, il nonno di Pierre Fermat, nel XVI secolo aveva un negozio di ferramenta, che gli valse una modesta fortuna, in seguito ereditata dal figlio Dominique (padre di Pierre).
Dominique, Secondo Console di Beaumont, raggiunge sia un grande successo economico, investendo su campi e fattorie, che sociale, sposando con la nobil donna Claire de Long.
Claire apparteneva alla "noblesse de robe", ovvero la sua famiglia aveva acquisito il titolo nobiliare perché uno o più dei suoi membri avevano svolto la funzione di magistrato.
Sembra che Pierre abbia un fratello, Clément, e due sorelle, Louise e Marie.
Pierre trascorre l'infanzia a Beaumont dove riceve l'istruzione primaria e secondaria al Monastero di Grandselve, allora dei Cordelieri. In seguito si iscrive

all'Università di Tolosa, scegliendo la carriera legale.
Dopo una "pausa dagli studi" a Bordeaux, si trasferisce all'Università di Orléans, ritenuta a quel tempo essere di notevole fama, conseguendo la laurea in diritto il 1 maggio 1631. Della sua formazione scientifica e della nascita

Figura 3.1: Fermat

dell'interesse per la matematica, in particolare per la prediletta "scienza dei numeri", sappiamo pochissimo, ma è probabile che le sue ricerche si siano intensificate verso la fine degli anni venti del Seicento, prima del conseguimento della laurea in diritto.
Dominique Fermat muore il 20 Giugno 1628 lasciando in eredità a Pierre una notevole ricchezza, utilizzata dal figlio, nel 1630, per acquistare la carica di "Conseiller au Parlement de Toulouse" e di "Commissaire aux Requêtes du Palais", versando 43 500 livres alla vedova di un certo Pierre de Carrier per occuparne il posto.
Il 14 maggio 1631 inizia ufficialmente la sua carriera come Consigliere nel Parlamento di Tolosa, cioè nell'Alta Corte di Giustizia della Provincia, e da quel momento sarà "Monsieur de Fermat".
Nello stesso anno sposa Louise de Long, lontana cugina della madre, figlia di Clemente, consigliere al parlamento di Tolosa, e di Giovanna di Garac.
I Long possedevano non solo una casa a Tolosa in the Street Arts 9, ma anche

una casa a Beaumont-de-Lomagne, non lontano dalla famiglia Fermat.
Dal matrimonio con Louise nascono cinque figli, due maschi e tre femmine: il maggiore, Clément-Samuel, erediterà dal padre la carica di Consigliere al Parlamento di Tolosa, che passerà a sua volta al proprio figlio.
Clément-Samuel condivide gli interessi paterni per la matematica, anche se non ha il talento di Pierre.
L'altro figlio, Jean, prenderà gli ordini e diverrà canonico nella Cattedrale di Castres.
Delle figlie, solo la maggiore, Claire, si sposerà; le altre due, Cathérine e Louise, si faranno suore.
Il primo *arrêt* conosciuto, firmato da Pierre, risale al 6 dicembre 1632.
Pierre resta membro della Chambre des Requêtes, cioè la "camera bassa" del Parlamento, fino al 16 gennaio 1638, quando viene ammesso alla Chambre des Enquêtes come "Conseiller", per sostituire un certo Pierre de Renaldi.
Nel 1642 si rivolge al Cancelliere Pierre Séguier per essere nominato a una carica superiore, forse quella di Président des Enquêtes o a un posto permanente nella Chambre de l'Édit. Il cancelliere, membro della commisione bireligiosa prevista dall'Editto di Nantes per garantire "in modo equo" i diritti della comunità cattolica e soprattutto di quella ugonotta, nel 1648 propone a Pierre di presiedere una riunione "con i presidenti e i consiglieri della pretesa religione riformata".
Portavoce ufficiale del Parlamento di Tolosa, il 18 agosto, Fermat presenta al Cancelliere Pierre Séguier, un memoriale nel quale prende le difese della popolazione, riguardo la riscossione forzata della "taille in Aquitania".
Tale ordinanza era necessaria per "mantenere la calma" in una popolazione vessata da imposte sempre più elevate e poco propensa a pagarle dopo che si era diffusa la voce che il Re avesse accordato notevoli sgravi fiscali.
Nel 1653 Pierre raggiunge il vertice dell'istituzione passando alla *Tornelle*, cioè alla Corte Criminale.
Iniziano in questo stesso anno a manifestarsi problemi di salute che si aggravano fino a spingere Pierre a nominare nel testamento come unico erede ed

esecutore il figlio Clément-Samuel.
Inoltre per garantirgli l'accesso all'incarico che per lungo tempo ha esercitato si rivolge al Cancelliere Pierre Séguier chiedendogli di appoggiare la candidatura di Clément-Samuel.
L'ultima lettera di carattere scientifico risale all'estate del 1662.
Il 9 gennaio 1665 firma l'ultimo *arrêt* per la Chambre de l'Èdit ed il 12 muore.

Lunedì 9 febbraio 1665 in "Journal des Savants":"*Apprendiamo con dolore della scomparsa del Signor de Fermat, Consigliere al Parlamento di Tolosa. È stato uno degli spiriti più belli di questo secolo, e un genio così universale che se tutti i dotti non avessero dato testimonianza dei suoi meriti straordinari, si farebbe fatica a credere alle cose che bisognerebbe dire di lui per nulla togliere alle lodi che gli sono dovute." ... "Le sue opere di matematica e le sue curiose ricerche nel campo dell'Antichità [classica] non [gli] impedirono di attendere alla propria carica con grandissima assiduità, sì da passare per uno dei più grandi giureconsulti della propria epoca"*.[7]

3.1.2 Scoperte matematiche

Pierre lavora duramente e scrupolosamente, ma nonostante questo nel tempo libero si occupava di letteratura (compose persino alcuni versi) e, soprattutto, di matematica.
Questa dedizione gli vale il soprannome di "principe dei dilettanti", poichè, pur dedicandosi alla matematica solo nel tempo libero, la sua influenza sulla storia della disciplina è notevolissima:" *Eccelleva in tutti i campi della matematica, principalmente nella scienza dei numeri e nella bella geometria. Gli si deve un metodo per la quadratura delle parabole di ogni grado, nonchè un metodo dei massimi e minimi, che serve non solo per la determinazione dei problemi piani e solidi, ma anche per l'invenzione delle tangenti alle linee curve, dei centri di gravità dei solidi e per le questioni di teoria dei numeri. È autore di un'introduzione ai luoghi piani e solidi, che è stato letto prima che il Signor Desdartes pubblicasse qualcosa al riguardo; inoltre ha scritto un*

trattato in cui sono restituiti e dimostrati i due libri di Apollonio di Perga sui luoghi piani.
Infine ha scoperto un metodo generale per la misura delle linee curve ..." [7]
Pierre pubblica le sue idee molto raramente. La maggior parte delle scoperte ci sono pervenute grazie alla corrispondenza scambiata con altri matematici, come Mersenne o Pascal, e alla pubblicazione postuma da parte del figlio.
Nel 1670 appare *Varia opera matematica* comprendente una edizione dell' *Aritmetica* di Diofanto annotata da Fermat e poi, nel 1679, una serie di articoli e una selezione della sua corrispondenza.
All'inizio del ventesimo secolo, Charles Henry e Paul Tannery pubblicano le *Œuvres de Fermat* in quattro volumi e C. de Waard, nel 1922, aggiunge un supplemento.

Come si intuisce dall'elogio precedente, Fermat ha dato importanti contributi allo sviluppo della matematica moderna. Il suo interesse non si focalizza su un solo campo, ma prendeva in considerazione diversi aspetti.

Geometria analitica

- Fermat, già prima della pubblicazione de *La Geomatria* da parte di Cartesio, è in grado di rappresentare curve matematiche tramite equazioni. Questa scoperta, che sta alla base della geometria analitica, viene sviluppata da Fermat indipendentemente da Cartesio, al quale, solitamente, viene attribuita.
  I due autori, però, raggiungono tale scoperta in modo del tutto diverso: Cartesio infatti la considera una rottura con la matematica antica, mentre Fermat la vede, piuttosto, come una sorta di continuazione, con riferimenti ad Apollonio.

- Risolve il problema delle tangenti ad una curva in modo differente da Cartesio, utilizzando strumenti molto vicini a quelli di limite e derivata. Questo metodo permette, inoltre, di trovare massimi e minimi di una funzione data l'equazione della retta tangente.

- Studia in coordinate polari la spirale di Fermat.

Calcolo delle probabilità

Fermat, come si evince dal carteggio con Pascal, sviluppa il calcolo delle probabilità, del quale è considerato uno dei fondatori.
Questa corrispondenza verte, principalmente, sui problemi del gioco d'azzardo. In tale carteggio si trova anche la prima soluzione al problema della divisione della posta, che consiste nella divisione dei soldi in gioco se si è costretti ad interrompere una partita d'azzardo senza essere arrivati alla fine.

Teoria dei numeri

Il campo in cui Fermat è più attivo è sicuramente la teoria dei numeri, di cui si può, in effetti, considerare uno dei fondatori.
Esprime molte della sue scoperte sotto forma di congettura, senza provvedere a darne dimostrazione. Infatti, per avere alcune dimostrazioni, bisogna attendere il XVIII secolo con Eulero, mentre per altre, ad esempio il noto "Ultimo teorema di Fermat", si deve aspettare ancora oltre.

Ottica

In ottica è noto il principio di Fermat, il quale afferma: *"Il percorso scelto dalla luce per andare da un punto ad un altro è quello che attraversa nel minor tempo"*.
Questo principio è molto utile per spiegare vari fenomeni luminosi quali la rifrazione.

Da ricordare è l'importante polemica prima direttamente con Cartesio, e in seguito, con i cartesiani o, come si chiamavano loro, *descartistes*.
La polemica si sviluppa in due direzioni: Fermat critica la derivazione del principio di rifrazione da parte di Descartes, e Descartes, già infastidito per la contemporanea rappresentazione da parte di Fermat di una curva matematica tramite un'equazione, sostiene che il suo metodo delle tangenti ad una curva sia più generale di quello di Fermat.
Descartes dovrà cedere su tutta la linea.


ŒUVRES
DE FERMAT

MM. PAUL TANNERY ET CHARLES HENRY

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME TROISIÈME.
Traductions par M. Paul TANNERY :

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
Quai des Grands-Augustins, 55.
MDCCCXCVI

R00185 48169

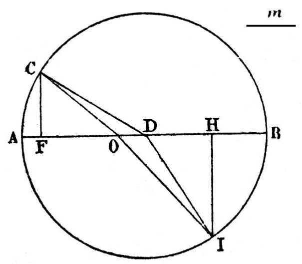
Figura 3.2: Oeuvres de Fermat

3.2 L'opera

Tutte le scoperta di Fermat sono raccolte in *"Œuvres de Fermat"*, opera rivista da Paul Tannery et Charles Henry.
Di seguito riporto gli unici trattati sulla rifrazione.

3.2.1 Analyse pour les réfraction

Soit $ACBI$ un cercle dont le diamètre $AFDB$ sépare deux milieux de nature différente, le moins dense étant du coté ACB, le plus dense du côté AIB.



Soient D le centre du cercle et CD le rayon incident tombant sur ce centre du point C donné; on demande le rayon réfracté DI, ou autrement le point I par où passera le rayon après la réfraction.
Abaissez sur le diamètre les perpendiculaires CF, IH. Le point C étant donné âinsi que le diamètre AB et le centre D, le point F et la droite FD seront également donnés.
Supposons que le rapport de la résistance du milieu plus dense à celle du milieu moins dense soit celui de la droite donnée DF à une autre droite m donnée en dehors de la figure. On devra avoir $m < DF$, la résistance du milieu moins dense devant être inférieure à celle du milieu plus dense, par un axiome plus que naturel.
Nous avons maintenant à mesurer, au moyen des droites m et DF, les mouvements suivant les droites CD et DI; nous pourrons ainsi représenter comparativement l'ensemble du mouvement sur ces deux droites par la somme

de deux produits : $CD \cdot m + DI \cdot DF$.
Ainsi la question est ramenée à partager le diamètre AB en un point H de telle sorte que si en ce point on élève la perpendiculaire HI, puis qu'on joigne DI , l'aire $CD \cdot m + DI \cdot DF$ soit minima. Nous emploierons à cet effet notre méthode, déjà répandue parmi les géomètres et exposée depuis environ vingt ans par Hérigone dans son Cursus mathematicus.
Appelons n le rayon CD ou son égal DI, b la droite DF, et posons $DH = a$. Il faut que la quantité $nm + nb$ soit mimma.
Soit, pour l'inconnue e, une droite arbitraire DO; joignons CO, OI. En notations analytiques : $CO^2 = n^2 + e^2 - 2be$, et $OI^2 = n^2 + e^2 + 2ae$; donc

$$mCO = \sqrt{m^2n^2 + m^2e^2 - 2m^2be}$$

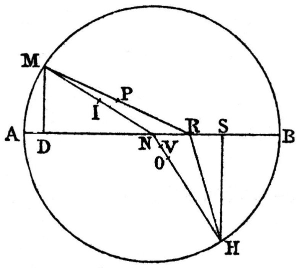
$$bOI = \sqrt{b^2n^2 + b^2e^2 + 2b^2ae}$$

La somme de ces deux radicaux doit être adegalée, d'après les règles de l'art, à la somme $mn + bn$.
Pour faire disparîatre les radicaux, on élèvera au carré, on supprimera les termes communs et l'on transposera de faon à ne laisser dans tin des-membres que le radical qui subsistera; puis on élèvera de nouveau au carré; après nouveau retranchement des termes communs de part et d'autre, division de tous les termes par e et suppression de ceux où e entrera encore, selon les règles de notre méthode généralement connue depuis longtemps, on arrivera, en ôtant les facteurs communs, àl'équation la plus simple possible entre a et m, c'est-à-dire qu'après avoir fait disparaître les obstacles opposés par les radicaux, on trouvera que la droite DH de la figure est égale à la droite m.
Par conséquent, pour trouver le point de réfraction, il faut, ayant mené les droites CD et CF, prendre les droites DF et DH dans le rapport de la résistance du milieu plus dense à celle du milieu moins dense, soit dans le rapport de b à m.
On élèvera ensuite en FI la perpendiculaire HI au diamètre; elle rencontrera le cercle en I, point oit passera le rayon rèfractè ; et ainsi d'ailleurs le rayon , passant d'un milieu moins dense dans un plus dense, s'inflàchira

du côté de la perpendiculaire : ce qui concorde absolument et sans exception avec le théorème découvert par Descartes; l'analyse ci-dessus, dérivée de notre principe, donne donc de ce théorème une démonstration rigoureusement exacte.

3.2.2 Synthèse pour les réfractions

Le savant Descartes a proposé pour les réfractions une loi qui est, comme on dit, conforme à l'expérience; mais, pour la démontrer, il a dû s'appuyer sur un postulat absolument indispensable à ses raisonnements, à savoir que le mouvement de la lumière se ferait plus facilement et plus vite dans les milieux denses que dans les rares ; or ce postulat semble contraire à la lumière naturelle.
En cherchant, pour établir la véritable loi des réfractions, à partir du principe contraire, - à savoir que le mouvement de la lumière se fait plus facilement et plus vite dans les milieux rares que dans les denses, - nous sommes retombés précisément sur la loi que Descartes a énoncée. Est-il possible d'arriver sans paralogisme à une même vérité par deux voies absolument opposées, c'est une question que nous laissons à examiner aux géomètres assez subtils pour la résoudre rigoureusement; car, sans entrer dans de vaines discussions, la possession assurée de la vérité nous suffit et nous l'estimons préférable à une plus longue continuation de querelles inutiles et illusoires.
Notre démonstration s'appuie sur ce seul postulat que la nature opère par les moyens et les voies les plus faciles et les plus aisées. Car c'est ainsi que nous croyons qu'il doit être énoncé et non pas comme on le fait d'ordinaire en disant que la nature opère toujours par les lignes les plus courtes. En effet, de même qu'en spéculant sur les mouvements naturels des graves, Galilée en mesure les rapports aussi bien par le temps que par l'espace, de même nous ne considérerons pas les espaces ou les lignes les plus courtes, mais celles qui peuvent être parcourues le plus facilement, le plus commodément et clans le temps le plus court.
Cela supposé, soient deux milieux de nature différente séparés parle diamètre



ANB du cercle $AHBM$, le milieu le moins dense étant du côté de M, le plus dense du côté de H; menons de M vers H les lignes quelconques MNH, MRH, briées sur le diamètre aux points N et H.
La vitesse du mobile sur MN dans le milieu rare étant plus grande, d'après l'axiome ou le postulat, que la vitesse du même mobile sur MI, et les mouvements étant supposés uniformes dans chacun des deux milieux, le rapport du temps du mouvement sur MN au temps du mouvement sur NH sera, comme on sait, le produit du rapport de MN il NH et du rapport inverse des vitesses sur NH et sur MN.
Soit donc posé $\frac{vitesse MN}{vitesse NH} = \frac{MN}{NI}$, on aura $\frac{temps MN}{temps NH} = \frac{IN}{NH}$.
On prouvera de même que si le rapport de la vitesse dans le milieu rare à la vitesse dans le milieu dense est $\frac{MR}{RP}$, on aura $\frac{temps MR}{temps RH} = \frac{PR}{RH}$.
D'où il suit que $\frac{temps MNH}{temps MRH} = \frac{IN+NH}{PR+RH}$.
Or, puisque c'est la nature qui dirige la lumière du point M vers le point H, nous devons chercher un point, soit N, par lequel la lumière, en s'infléchissant ou se réfractant, parviendra dans le temps le plus court du point M au point R; car on doit admettre que la nature, qui méne le plus vite possible ses opérations, visera d'elle-même ce point-là.
Si donc la somme $IN + NH$, qui mesure le temps du mouvement sur la ligne brisée MNH, est une quanti'e minima, nous aurons atteint notre but.
L'énoncè du théorème de Descartes donne ce minimum, comme nous allons aussitôt le prouver par un véritable raisonnement géomètrique et sans aucune ambiguité. Voici en effet cet énoncè :
Si du point M on mène le rayon MN, que du même point M on abaisse

la perpendiculaire MD, puis que l'on prenne $\frac{DN}{NS}$ dans le rapport de la plus grande vitesse à la moindre, qu'enfin on élève en S la perpendiculaire SH et que l'on mène le rayon NH, la lumière incidente au point N dans le milieu rare se réfractera dans le milieu dense du côté de la perpendiculaire vers le point H.

C'est ce théorème qui est en accord avec notre Géométrie, comme il résulte de la proposition suivante purement géométrique. Soit le cercle $AHBM$, dont ANB est un diamètre et N le centre; sur la circonférence de ce cercle je prends un point M quelconque, je mène le rayon MN et j'abaisse sur le diamètre la perpendiculaire MD.

Soit donné d'autre parât le rapport $\frac{DN}{NS}$, en supposant $DN > NS$; en S j'élève au diamètre la perpendiculaire SH qui rencontre la circonférence au point H; je joins ce point au centre par le rayon HN.

Posons $\frac{DN}{NS} = \frac{MN}{NI}$; je dis que la somme $IN + NH$ est minima; c'est-à-dire que si l'on prend un autre point quelconque, R par exemple, sur le rayon NB, que l'on joigne MR, RH et que l'on fasse $\frac{DN}{NS} = \frac{MR}{RP}$ on aura $PR + RH > IN + NH$.

Pour le démontrer, faisons $\frac{MN}{DS} = \frac{RN}{NO}$ et $\frac{DN}{NS} = \frac{NO}{NV}$. Il est clair que, par construction, puisque DN est plus petit que le rayon MN, on aura $NO < NR$; de même, puisque $NS < ND$, on aura $NV < NO$.

Cela posé, on a, d'après Euclide : $MR^2 = MN^2 + NR^2 + 2DN \cdot NR$; mais puisque, par construction, $\frac{MN}{DS} = \frac{RN}{NO}$, on aura $MN \cdot NO = DN \cdot NR$ donc $2MN \cdot NO = 2DN \cdot NR$; donc $MR^2 = MN^2 + NR^2 + 2MN \cdot NO$.

Mais, puisque $NR > NO$, $NR^2 > NO^2$; donc

$$MR^2 > MN^2 + NO^2 + 2MN \cdot NO$$

Mais la somme $MN^2 + NO^2 + 2MN \cdot NO = (MN + NO)^2$. Donc

$$MR > MN + NO$$

D'autre part, par construction,$\frac{DN}{NS} = \frac{MN}{NI} = \frac{NO}{NV}$; donc

$$\frac{DN}{NS} = \frac{MN + NO}{NI + NV}$$

Mais on a aussi $\frac{DN}{NS} = \frac{MR}{RP}$; donc $\frac{MN+NO}{NI+NV} = \frac{MR}{RP}$. Or $MR > MN + NO$; donc aussi $RP > IN + NV$.
Il reste à prouver que $RH > HV$; car, s'il en est ainsi, il est clair que $PR + RH > IN + NH$.
Or dans le triangle NHR, d'après Euclide,

$$RH^2 = HN^2 + NR^2 - 2SN \cdot NR$$

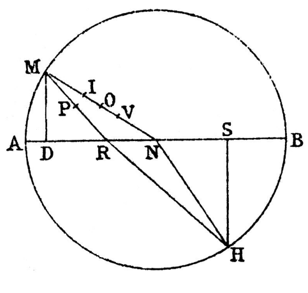
Mais par construction $\frac{MN(=NH)}{DN} = \frac{NR}{NO}$, et $\frac{DN}{NS} = \frac{NO}{NV}$; donc, *ex aequo*, $\frac{HN}{NS} = \frac{NR}{NV}$. Donc $HN \cdot NV = NS \cdot NR$ et $2HN \cdot NV = 2NS \cdot NR$; donc

$$RH^2 = HN^2 + NR^2 - 2HN \cdot NV$$

Mais on a prouvé que $NR^2 > NV^2$; donc

$$RH^2 > HN^2 + NV^2 - 2HN \cdot NV$$

Or $HN^2 + NV^2 - 2HN \cdot NV = NV^2$, d'après Euclide; donc $HR^2 > HV^2$ et $HR > HV$. Ce qu'il restait à prouver.
Si l'on prend le point R sur le rayon AN, quand même les droite MR, RH se trouveraient dans le prolongement l'une de l'autre, comme dans la figure suivante,- la démonstration étant d'ailleurs indépendante de ce cas partivulier,- le résultat sera le même, c'est-à-dire que l'on aura toujours $PR + RH > IN + NH$.



Faisons, comme ci-dessus, $\frac{MN}{DN} = \frac{RN}{NO}$ et $\frac{DN}{NS} = \frac{NO}{NV}$; il est clair que $RN > NO$ et $NO > NV$.
$MR^2 = MN^2 + NR^2 - 2DN \cdot NR$. A $2DN \cdot NR$ on peut, d'après le même

raisonnement que ci-dessus, substituer $2MN \cdot NO$; d'ailleurs $NR^2 > NO^2$; donc $MR^2 > MN^2 + NO^2 + 2MN \cdot NO$. Mais $MN^2 + NO^2 + 2MN \cdot NO = MO^2$ Donc $MR^2 > MO^2$ et $MR^2 > MO^2$.
D'autre part, on a, par construction, $\frac{DN}{NS} = \frac{MN}{NI} = \frac{NO}{NV}$; donc *vicissim*: $\frac{MN}{NI} = \frac{NO}{NV}$, et *dividendo*: $\frac{MO}{ON} = \frac{IV}{NV}$, et *vicissim*:

$$\frac{MO}{IV} = \frac{NO}{NV} = \frac{DN}{NS} = \frac{MR}{RP}$$

Mais on a prouvé que $MR > MO$; donc $PR > IV$. Il reste à prouver, pour étabilir la proposition, que $RH > HN + NV$; ce qui est très facile d'après ce qui précède.
En effet $RH^2 = HN^2 + NR^2 + 2SN \cdot NR$ on peut substituer, comme on l'a vu, $2Hn \cdot NV$; d'ailleurs $NR^2 > NV^2$. Donc

$$RH^2 = HN^2 + NR^2 + 2HN \cdot NV$$

donc, comme ci-dessus, $HR > HN + NV$.
Il est donc certain que la somme des deux droites PR, RH, quand même elles ne formeraient qu'une droite unique PRH, est toujours supérieure à la somme $IN + NH$.

3.3 Analisi dell'opera

Nel 1662 Pierre de Fermat scrive due brevi trattati sulla rifrazione: *"Analyse pour les réfraction"* e *"Synthèse pour les réfractions"*.
Fermat nel primo trattato, partendo dall'ipotesi opposta a quella di Descartes, mostra come il raggio di luce si riflette in accordo con la cosidetta *legge di Snell* e nel secondo dimostra sinteticamente il percorso minimo.

3.3.1 Analisi della rifrazione

Il fenomeno della rifrazione viene analizzato da Fermat utilizzando un cerchio passante per i punti A e B e centro in D, come in figura 3.3.

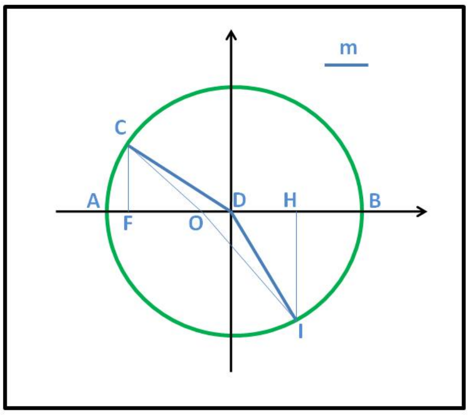


Figura 3.3: Rifrazione Fermat: 1

Il diametro ADB separa il mezzo meno denso, che si trova nella parte superiore della circonferenza, da quello più denso.
L'obiettivo di Fermat è riuscire ad individuare il punto I, per il quale, dopo la rifrazione, passa il raggio CD.
Le ipotesi da cui parte Fermat sono due:

- Il rapporto fra la resistenza del mezzo più denso ($r2$) e la resistenza del mezzo meno denso ($r1$) è uguale al rapporto fra la proiezione di CO su

AB e m (linea arbitraria disegnata fuori dalla figura).

$$\frac{r2}{r1} = \frac{DF}{m} = k > 1^1 \tag{3.1}$$

- L'area $CD \cdot m + DI \cdot DF$ deve essere un minimo: **la natura passa per le vie più brevi e semplici**.[2]

Dalla prima ipotesi si ricava naturalmente $DF > m$ infatti $r2 > r1$.
Ora, misurando con l'aiuto di m e DF i moti lungo CD e DI, Fermat rappresenta l'intero moto con l'espressione $CD \cdot m + DI \cdot DF$.
Il problema si risolve dividendo AB nel punto H, proiezione del punto I in AB, in modo tale che $CD \cdot m + DI \cdot DF$ sia un minimo.
Per rendere l'espressione precedente minima Pierre afferma che *" è necessario impiegare il nostro metodo che é giá diffuso tra i matematici e fu presentato circa 20 anni fa da Herigone nel suo Cursus Mathematicus"*.[3]
Per semplificare i calcoli usiamo le seguenti notazioni:

- $CD = DI = n$
- $DF = b$
- $DH = a$
- $DO = e$ rappresenta l'incognita.

Per far si che la somma $nm + nb$ sia minima è necessario, per il metodo dei massimi e minimi, porla uguale alla somma $m \cdot CO + b \cdot OI$.

[1] Il rapporto viene maggiore di uno poichè Fermat assume che la resistenza in un mezzo più denso sia maggiore rispetto ad un mezzo meno denso. Ipotesi opposta a quella di Descartes.

[2] Questa ipotesi deriva dal postulsato che Fermat esspliciterà nel trattato *"Synthèse pour les réfractions"*. Il segreto, infatti, non è minimizzare lo spazio percorso, perchè in tal caso il cammino da percorrere è una retta, ma minimizzare il tempo di percorrenza.

[3] Fermat utilizza il metodo dell'adequazione che analizzeremo in appendice. La prima pubblicazione a stampa del metodo dell'adequazione si ebbe nel quinto volume del *"Supplementum Cursus Mathematici"* pubblicato nel 1642 da Pierre Herigone; nel 1679 apparve nelle *"Varia opera matematica"* di Fermat, pubblicate postume dal figlio.

Per Pitagora si ha:

- $(b-e)^2 + CF^2 = CO^2 \Rightarrow b^2 + e^2 - 2be + CF^2 = CO^2$
- $b^2 + CF^2 = n^2$

Sottraendo alla prima equazione la seconda otteniamo:

$$CO^2 = n^2 + e^2 - 2be$$

Analogamente ricaviamo:

- $(a+e)^2 + HI^2 = OI^2 \Rightarrow a^2 + e^2 + 2ae + HI^2 = OI^2$
- $a^2 + HI^2 = n^2$

Da cui sottraendo risulta:

$$OI^2 = n^2 + e^2 + 2ae$$

Sostituendo otteniamo:

$$m \cdot CO + b \cdot OI = m\sqrt{n^2 + e^2 - 2be} + b\sqrt{n^2 + e^2 + 2ae}$$

Dovendo essere $m \cdot CO + b \cdot OI = mn + bn$ si ha:

$$mn + bn = m\sqrt{n^2 + e^2 - 2be} + b\sqrt{n^2 + e^2 + 2ae}$$

elevando tutto al quadrato:

$$m^2n^2 + b^2n^2 + 2n^2mb = m^2n^2 + m^2e^2 - 2m^2be + n^2b^2 + e^2b^2 + 2aeb^2 +$$

$$+2mb\sqrt{n^4 + n^2e^2 + 2aen^2 + e^2n^2 + e^4 + 2ae^3 - 2ben^2 - 2be^3 - 4abe^2}$$

Eliminando i termini simili otteniamo:

$$-2mb\sqrt{n^4 + n^2e^2 + 2aen^2 + e^2n^2 + e^4 + 2ae^3 - 2ben^2 - 2be^3 - 4abe^2} =$$

$$= m^2e^2 + e^2b^2 - 2m^2be + 2b^2ae - 2n^2mb$$

Elevando ambo i membri al quadrato:

$$4m^2b^2(n^4 + n^2e^2 + 2aen^2 + e^2n^2 + e^4 + 2ae^3 - 2ben^2 - 2be^3 - 4abe^2) =$$

$$= m^4e^4 + e^4b^4 + 4m^4b^2e^2 + 4b^4a^2e^2 + 4n^4m^2b^2 + 2e^4b^2m^2 - 4m^2b^3e^3 +$$

$$+8m^2b^3ae^2 + 8b^3n^2aem - 4m^3n^2e^2b$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$4n^4m^2b^2 + 8n^2m^2e^2b^2 + 8n^2m^2eb^2a + 4m^2e^4b^2 + 8m^2e^3b^2a - 8n^2m^2eb^3 -$$
$$-8m^2e^3b^3 - 16m^2e^2b^3a = m^4e^4 + b^4e^4 + 4m^4b^2e^2 + 4b^4e^2a^2 + 4n^4m^2b^2 +$$
$$+2e^4m^2b^2 - 4m^4e^3b + 4m^2e^3b^2a - 4m^3n^2e^2b - 4m^2b^3e^3 + 4b^4e^3a -$$
$$-4n^2mb^3e^2 - 8m^2b^3e^2a + 8m^3n^2b^2e - 8mn^2b^3ea$$

Eliminando i fattori uguali e dividendo tutto per e otteniamo:

$$m^4e^3 + b^4e^3 + 4m^4b^2e + 4b^4ea^2 - 2e^3m^2b^2 - 4m^4e^2b + 4m^2e^2b^2a -$$
$$-4m^3n^2ea + 4m^2b^3e^2 + 4b^4e^2a - 4n^2mb^3e + 8m^2eb^3a + 8m^3n^2b^2 -$$
$$-8mn^2b^3a - 8n^2m^2eb^2 - 8n^2m^2b^2a - 8m^2e^2b^2a + 8n^2m^2b^3 = 0$$

Prendendo in considerazione solo i termini senza la e [4] si ricava:

$$8m^3n^2b^2 - 8mn^2b^3a - 8n^2m^2b^2a + 8n^2m^2b^3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$m^3n^2b^2 - mn^2b^3a - n^2m^2b^2a + n^2m^2b^3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$b^2mn^2(m^2 - ba - ma + mb) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$b^2mn^2(m(m+b) - a(m+b)) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$b^2mn^2(m-a)(m+b) = 0$$

Da cui risulta:

$$m = a$$

Fermat conclude in questo modo il suo primo trattato sulla rifrazione.

[4]Per il principio dell'adequazione

Conclusioni

A prima vista il risultato sembra differente dal principio di rifrazione conosciuto oggi, in realtà riscrivendolo in modo diverso ci accorgiamo che è proprio lo stesso:

- Per la 3.1 si ha
$$\frac{DF}{a} = \frac{DF}{DH} = k$$
con k costante;

- Applicando i teoremi sui triangoli rettangoli si ottiene
$$\frac{DF}{CD} = \sin i$$
$$\frac{a}{DI} = \frac{DH}{DI} = \sin r$$
con i angolo di incidenza formato da CD con la normale ad AB e r angolo di rifrazione formato da DI con la normale ad AB;

- $CD = DI$ raggi della stessa circonferenza.

$$\Downarrow$$
$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{DF}{DH} = k$$

Per la 3.1 si ha $k = \frac{r2}{r1} = \frac{v_i}{v_r}$ dove v_i e v_r sono rispettivamente la velocità di incidenza e quella di rifrazione.

$$\Downarrow$$
$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_i}{v_r}$$

3.3.2 Sintesi della rifrazione

Fermat pone le basi di questo secondo trattato su un unico postulato: **La luce si propaga lungo cammini per i quali il tempo di percorrenza è minimo**.
Analogamente all'analisi precedente, Fermat si serve del cerchio $AHBM$ di diametro ANB e con il mezzo meno denso dalla parte di M (figura 3.4). Dato che la velocità di un oggetto è inversamente proporzionale alla densità

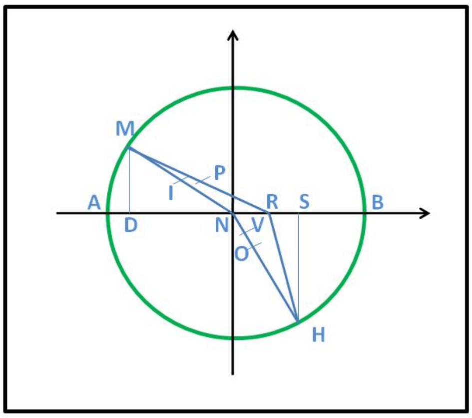


Figura 3.4: Rifrazione Fermat: 2

del mezzo che attraversa [5] e poste v_{MN}, v_{NH}, v_{MR} e v_{RH} rispettivamente le velocità su MN, NH, MR, RH e t_{MN}, t_{NH}, t_{MR} e t_{RH} rispettivamente i tempi su MN, NH, MR, RH, Fermat pone:

$$\frac{v_{MN}}{v_{NH}} = \frac{MN}{NI}$$

$$\frac{v_{MR}}{v_{RH}} = \frac{MR}{RP}$$

Sapendo che:

$$\frac{v_{MN}}{v_{NH}} = \frac{MN}{NH}\frac{t_{NH}}{t_{MR}}$$

[5] Cartesio nel suo compendio parte dal principio opposto: la velocità di un oggetto è maggiore in un mezzo più denso e minore in un mezzo meno denso.

$$\frac{v_{MR}}{v_{RH}} = \frac{MR}{RH}\frac{t_{RH}}{t_{MR}}$$

si ottiene:

$$\frac{t_{MN}}{t_{NH}} = \frac{IN}{NH}$$
$$\frac{t_{MR}}{t_{RH}} = \frac{PR}{RH}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{t_{MNH}}{t_{MRH}} = \frac{IN + NH}{PR + RH} \tag{3.2}$$

Teorema 3.3.1. *Dato* $\frac{DN}{NS} = \frac{MN}{NI}$ *la somma* $IN+NH$ *è minima, cioè, preso un qualsiasi altro punto, per esempio R, sul raggio* NB *e tracciate* MR *e* RH *con* $\frac{DN}{NS} = \frac{MR}{RP}$

$$\Downarrow$$
$$PR + RH > IN + NH$$

Dimostrazione.
Prendiamo i punti O e V in modo tale che:

$$\frac{MN}{DN} = \frac{RN}{NO} \tag{3.3}$$
$$\frac{DN}{NS} = \frac{NO}{NV} \tag{3.4}$$

Poichè $DN < MN$ e $NS < DN$ risulta:

$$NO < RN, NV < NO \tag{3.5}$$

Primo Passo
Applicando il Teorema di Pitagora ai triangoli rattangoli MDR e MDN otteniamo:

- $DM^2+(DN+NR)^2 = MR^2 \Rightarrow DM^2+DN^2+NR^2+2DN\cdot NR = MR^2$
- $DM^2 + DN^2 = MN^2$

Sottraendo membro a membro otteniamo:

$$MR^2 = NR^2 + MN^2 + 2DN \cdot NR \tag{3.6}$$

Per 3.3 si ha $MN \cdot NO = DN \cdot NR$, sostituendo alla 3.6 si ricava
$MR^2 = NR^2 + MN^2 + 2MN \cdot NO$.
Vale inoltre $NR^2 > NO^2$ per 3.5, quindi:

$$MR^2 > NR^2 + MN^2 + 2MN \cdot NO \Rightarrow MR^2 > (MN + NO)^2$$

$$\Downarrow$$

$$MR > MN + NO$$

Per costruzione risulta $\frac{DN}{NS} = \frac{MN}{NI} = \frac{NO}{NV}$.
Dall'ultima uguaglianza risulta
$MN : NO = NI : NV \Rightarrow (MN + NO) : NO = (NI + NV) : NV \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{MN+NO}{NI+NV} = \frac{NO}{NV}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{DN}{NS} = \frac{MN + NO}{NI + NV}$$

Per ipotesi $\frac{DN}{NS} = \frac{MR}{RP}$ quindi:

$$\frac{MR}{RP} = \frac{MN + NO}{NI + NV}$$

Dato che $MR > MN + NO$ risulta:

$$PR > IN + NV$$

Secondo Passo
Rimane solo da provare che $RH > HV$.
Applicando il Teorema di Pitagora ai triangoli rattangoli NSH e NRH otteniamo:

- $SH^2 + (SR + RN)^2 = NH^2 \Rightarrow SH^2 + SR^2 + NR^2 + 2SR \cdot NR = NH^2$

- $SR^2 + SH^2 = RH^2$

Sottraendo membro a membro otteniamo:

$$RH^2 = NH^2 + NR^2 + 2SN \cdot NR$$

Date 3.3, 3.4 e $MN = NH$ risulta:
$DN : NO = NS : NV$, $NH : NR = DN : NO \Rightarrow NS : NV = NH : NR$

$$\Downarrow$$

$$NH \cdot NV = NR \cdot NS \tag{3.7}$$

$$\Downarrow$$

$$RH^2 = NH^2 + NR^2 + 2NH \cdot NV$$

Dato che $NR^2 > NV^2$ per 3.5 vale:

$$RH^2 > NH^2 + NV^2 - 2NH \cdot NV = (NH - NV)^2 = NV^2$$

$$\Downarrow$$

$$RH > HV$$

Terzo Passo
Dato che, per il primo passo, $PR > IN + NV$ e, per il secondo, $RH > HV$ possiamo concludere affermando che:

$$PR + RH > IN + NV + HV$$

$$\Downarrow$$

$$PR + RH > IN + NH$$

c.v.d $\square$

Fermat ci assicura che anche se prendessimo il punto R sul raggio AN la tesi non cambierebbe:

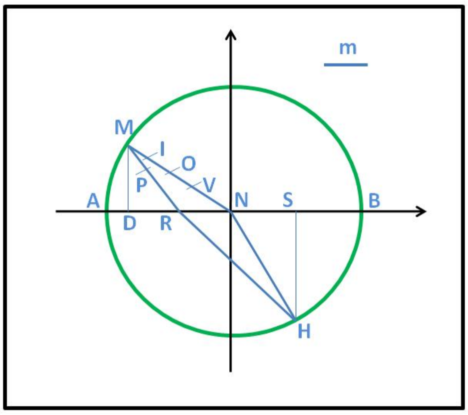


Figura 3.5: Rifrazione Fermat: 3

Teorema 3.3.2. *Dato* $\frac{DN}{NS} = \frac{MN}{NI}$ *la somma* $IN+NH$ *è minima, cioè, preso un qualsiasi altro punto, per esempio* R*, sul raggio* AN *e tracciate* MR *e* RH *con* $\frac{DN}{NS} = \frac{MR}{RP}$

$$\Downarrow$$

$$PR + RH > IN + NH$$

Dimostrazione.
Prendiamo i punti O e V in modo tale che:

$$\frac{MN}{DN} = \frac{RN}{NO} \tag{3.8}$$

$$\frac{DN}{NS} = \frac{NO}{NV} \tag{3.9}$$

dalle quali, come prima, otteniamo:

$$NO < RN, NV < NO \tag{3.10}$$

Primo Passo
Applicando il Teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli MDR e MDN otteniamo:

- $DM^2+(DR+RN)^2 = MN^2 \Rightarrow DM^2+DR^2+NR^2+2DR{\cdot}NR = MN^2$
- $DM^2 + DR^2 = MR^2$

Sottraendo membro a membro otteniamo:

$$MR^2 = NR^2 + MN^2 - 2DN \cdot NR \tag{3.11}$$

Per 3.8 si ha $MN \cdot NO = DN \cdot NR$, sostituendo alla 3.11 si ricava $MR^2 = NR^2 + MN^2 - 2MN \cdot NO$.
Vale inoltre $NR^2 > NO^2$ per 3.10, quindi:

$$MR^2 > NR^2 + MN^2 + 2MN \cdot NO \Rightarrow MR^2 > (MN + NO)^2$$

$$\Downarrow$$

$$MR > MO$$

Per costruzione risulta $\frac{DN}{NS} = \frac{MN}{NI} = \frac{NO}{NV}$.
Dall'ultima uguaglianza risulta $MN : NO = NI : NV \Rightarrow$
$\Rightarrow (MN + NO) : NO = (NI + NV) : NV \Rightarrow \frac{MO}{NO} = \frac{IV}{NV}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{MO}{IV} = \frac{NO}{NV} = \frac{DN}{NS} = \frac{MR}{RP}$$

Dato che $MR > MO$ risulta:

$$PR > IV$$

Secondo Passo
Rimane solo da provare che $RH > NH + NV$.
Applicando il Teorema Di Pitagora ai triangoli rettangoli NSH e SRH otteniamo:

- $SH^2 + (SN + RN)^2 = NR^2 \Rightarrow SH^2 + SN^2 + NR^2 + 2SR \cdot NR = NR^2$
- $SN^2 + SH^2 = NH^2$

Sottraendo membro a membro otteniamo:

$$RH^2 = NH^2 + NR^2 + 2SN \cdot NR$$

Dato che $NR^2 > NV^2$ per 3.10 e $SN * NR = NH * NV$ per 3.7 vale:

$$RH^2 > NH^2 + NV^2 + 2NH \cdot NV = (NH + NV)^2$$

$$\Downarrow$$

$$RH > NH + NV$$

Terzo Passo

Dato che, per il primo passo,

$$PR > IV$$

e, per il secondo,

$$RH > NH + NV$$

possiamo concludere affermando che:

$$PR + RH > IV + NH + NV$$

$$\Downarrow$$

$$PR + RH > IN + NH$$

c.v.d $\square$

Conclusioni

Si evince che, in qualsiasi punto del diametro AB venga preso R, è sempre valida la diseguaglianza:

$$PR + RH > IN + NH$$

Per cui:

$$\frac{PR + RH}{IN + NH} > 1$$

e applicando la 3.2 si deduce che:

$$\frac{t_{MNH}}{t_{MRH}} < 1$$

$$\Downarrow$$

$$t_{MNH} < t_{MRH}$$

Il tempo impiegato per attraversare MNH è sempre minore a quello che serve per attraversare MRH.

Capitolo 4

Descartes e Fermat: la polemica

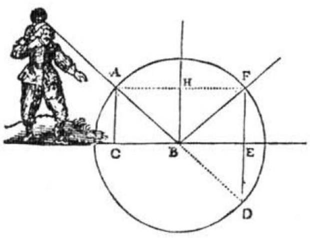
Nel 1638 si incendia l'accesa polemica, che divide la comunità dei matematici parigini, tra Réne Descartes e Pierre de Fermat.
L'oggetto della dibattito è molto ampio, questo Capitolo si concentra principalmente sulla teoria di ottica.
Tutto ha inizio quando Fermat, venuto in possesso della *Dioptrique* prima che ne siano distribuiti copie stampate, giudica non adatta la scelta di Cartesio di spiegare i principi di riflessione e rifrazione con l'ausilio di una palla.
Infatti, se la luce è "azione" o "tendenza a muoversi" che si propaga istantaneamente in una materia sottile, come è possibile paragonarla al movimento di una palla più o meno violento a seconda che essa sia spinta da forze differenti?
Nella *Dioptrique* Descartes giustifica tale critica affermando che "*quell'azione o inclinazione a muoversi, che ho detto doversi considerare come luce, deve in ciò seguire le stesse leggi del moto*"[1].
Fermat è di tutt'altra opinione: *"Dubito [...] che l'inclinazione al movimento debba seguire le medesime leggi del movimento, poichè tra l'una e l'altro vi è*

[1]D,VI,89. Capitolo 2 Sezione 2

la stessa differenza che passa tra la potenza e l'atto."[2].
Cartesio non prende in considerazione questa critica, come risulta da una lettera spedita a Mersenne nell'ottobre 1637, nella quale l'autore afferma di non potersi fermare a spiegare ciò che è "*così chiaro e così evidente*", ossia che "*le leggi seguite dal movimento che è l'atto*" siano osservate anche "*dall'inclinazione a muoversi che è la potenza di quest'atto*", dato che, "*per quanto non sia sempre vero che ciò che è stato in potenza sia in atto, è impossibile che vi sia qualcosa in atto che non sia stato in potenza*"[3].
Fermat non si limita a sollevare qualche dubbio, ma cerca di mostrare come l'intera argomentazione cartesiana sia "*illegittima*"[4], sia in riguardo al principio di riflessione sia a quello di rifrazione della luce.

4.1 La polemica: il principio di riflessione

Descartes nello studio del principio di riflessione, analizzato nel secondo capitolo, distingue la forza che fa continuare il moto da quella che ne determina la direzione da una parte e dall'altra.



"Inoltre, dobbiamo notare che la determinazione a muoversi verso qualche parte può, come il movimento e, in genere, qualsiasi altra specie di quantità, essere suddivisa in tutte le parti di cui possiamo immaginare sia composta; e si può facilmente pensare che la determinazione a muoversi, propria della

[2]F, II, 109
[3]F, II, 103
[4]F, II, 109

palla che si dirige da A verso B, sia composta da altre due, di cui una la fa discendere dalla linea AF verso la linea CE, e l'altra, nello stesso tempo, la fa andare dal lato sinistro AC al lato destro FE, in modo che queste due, unite insieme, la conducano verso B, seguendo la retta AB.
In seguito è facile comprendere che l'incontro con la terra può impedire solo una di queste due determinazioni e in alcun modo l'altra."
Fermat vuole mostrare il poco rigore che Cartesio mette nella spiegazione del principio di riflessione scegliendo un differente sistema di assi per la determinazione a muoversi.
La conclusione è differente: prendendo come componente orizzontale il segmento AF non parallelo al segmento CB e applicando l'argomentazione di Cartesio, si cade in un assurdo, in quanto l'angolo ABC è minore dell'angolo EBF.

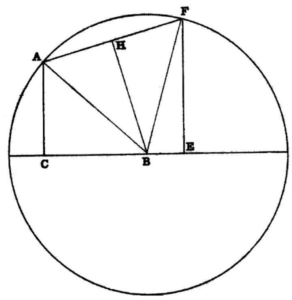


Figura 4.1: Polemica Riflessione. Esempio 1

Infatti, seguendo le "istruzioni" dell'autore della *Diottrica* la terra (linea CBE) annulla la determinazione che fa scendere la palla da AF a CE ma non impedisce quella da AC a FE.
Ora si può tracciare la perpendicolare BH in modo tale che $AH = HF$, ed F è il punto dove giunge la palla.
A questo punto otteniamo $\widehat{ABC} < \widehat{EBF}$ contraddicendo la legge di riflessione.
Nella lettera del settembre 1637 a Mersenne, Fermat afferma che fra tutte le infinite possibili scomposizioni della determinazione a muoversi della palla,

Cartesio sceglie l'unica per la quale risulta corretta la sua teoria, in risposta Cartesio sottolinea che tra le possibili componenti della determinazione a muoversi devono essere scelte quelle "reali " e non immaginarie.
La replica dell'autore della Diottrica si riassume nel significato di *reale*.
L'esperienza mostra come dopo l'urto la velocità orizzontale della palla rimane costante mentre quella perpendicolare viene invertita.
L'esperienza, quindi, suggerisce la scelta di un sistema di assi perpendicolare e parallelo alla superficie di riflessione.
Cartesio conclude che, se da un lato è vero che esistono un infinito numero di differenti componenti immaginarie, dall'altro la superficie CBE è reale e si contrappone esclusivamente alla componente perpendicolare.
L'autore della *Diottrica* afferma di essere d'accordo con Fermat immaginando di poter dividere la determinazione a muoversi in infinite componenti esclusivamente prima che la palla raggiunga il punto B.
Per Descartes l'errore di Fermat consiste nella scelta della direzione obliqua di HB.

4.2 La polemica: il principio di rifrazione

Fermat continua l'"arringa" mettendo in discussione anche l'argomentazione del principio di rifrazione.
L'intenzione del tolosano è quella di far crollare totalmente la legge cartesiana: partendo dalle stesse assunzioni è possibile derivare una soluzione differente da quella della *Diottrica*.
Per raggiungere il suo scopo Fermat considera il caso di un corpo (figura 4.2) che scende dal punto A lungo la retta AD mentre questa si muove verso AO, con la sola condizione che l'angolo DAO (preso a piacere) non cambi.
La composizione di questi due movimenti, supposti uniformi, produce il movimento lungo la retta AB.
Si traccino ora da B i segmenti BN e BC paralleli rispettivamente alle rette AD e AO.

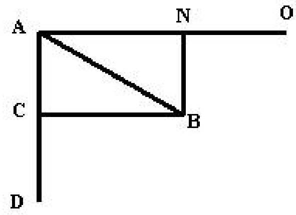


Figura 4.2: Polemica Rifrazione. Esempio 1

Supponiamo che tale corpo impieghi un minuto per percorrere il tratto AB. Se nello stesso intervallo di tempo il corpo si muovesse solo lungo AD percorrerebbe il tratto AC, mentre se si muovesse lungo AO percorrerebbe il tratto AN.
Come afferma Fermat "*la forza che lo conduce verso AD, sta alla forza che lo conduce verso AO come AC sta ad AN, ossia come BN sta a BC*"[5].
Ora si consideri il caso in cui l'angolo $D'A'O'$ sia maggiore dell'angolo DAO (figura 4.3), senza modificare turro il resto.
Analogamente al caso precedente il corpo, in un minuto, spostandosi solo verso $A'O'$ percorrerebbe un tratto $A'N'$ uguale a AN, e allo stesso tempo spostandosi solo verso $A'D'$ percorrerebbe un tratto lungo $A'C' = AC$.
Anche il segmento $A'B'$, composizione del movimento lungo $A'D'$ e di quello lungo $A'O'$, viene percorso sempre in un minuto.
Confrontando i triangolo ANB e $A'N'B'$ delle rispettive figure, risulta:

- $\overline{AN} = \overline{A'N'}$
- $\overline{NB} = \overline{N'B'}$
- $\widehat{ANB} > \widehat{A'N'B'}$

$$\Downarrow$$

[5]F, II,120

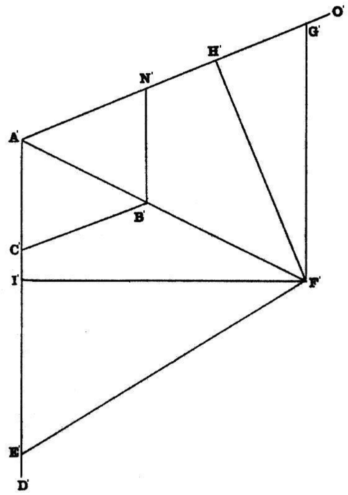


Figura 4.3: Polemica Rifrazione. Esempio 2

$$\overline{AB} > \overline{A'B'}$$

Questo significa che nel secondo caso il movimento è "*meno veloce*" e che "*la proporzione tra il movimento composto nella seconda figura e il movimento composto nella prima sarà la stessa che vi è tra la lunghezza del segmento $A'B'$ e AB*"[6].

Preso un punto F' sul prolungamento di $A'B'$ e tracciate da esso le parallele $F'E'$ e $F'G'$ rispettivamente ad $A'O'$ e $A'D'$ risulta:

- Il triangolo $A'C'B'$ è simile al triangolo $A'E'F'$ avendo tre angoli uguali.

$$\Downarrow$$

$$E'F' : C'B' = F'A' : B'A' \tag{4.1}$$

- Il triangolo $A'B'N'$ è simile al triangolo $A'F'G'$ avendo tre angoli uguali.

$$\Downarrow$$

$$G'F' : N'B' = F'A' : B'A' \tag{4.2}$$

[6] F, II,122

Unendo la 4.1 e la 4.2 otteniamo:

$$E'F' : C'B' = F'G' : B'N'$$

$$\Downarrow$$

$$E'F' : F'G' = C'B' : B'N' = CB : BN = costante \tag{4.3}$$

Ora tracciamo dal punto F' le perpendicolari $F'I'$ e $F'H'$ rispettivamente alle rette $A'D'$ e $A'O'$.
Gli angoli opposti $A'G'F'$ e $A'E'F'$ del parallelogramma $G'A'E'F'$ sono uguali, quindi i triangoli $G'F'H'$ e $F'I'E'$ sono simili.

$$\Downarrow$$

$$E'F' : F'G' = F'I' : F'H'$$

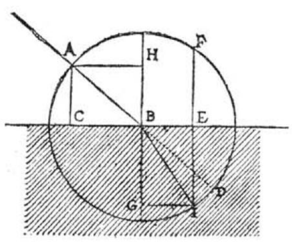
Inoltre $\sin D'A'F' = \frac{F'I'}{F'A'}$ e $\sin O'A'F' = \frac{F'H'}{F'A'}$ risulta:

$$F'E' : F'G' = F'I' : F'H' = \sin D'A'F' : \sin O'A'F'$$

Per 4.3 si ha:

$$\sin D'A'F' : \sin O'A'F' = costante \tag{4.4}$$

Quindi "*il seno dell'angolo DAB sta al seno dell'angolo OAB come il seno dell'angolo D'A'F' sta al seno dell'angolo O'A'F'*"[7].
Questo risultato 4.4 viene applicato da Fermat alla legge di rifrazione sviluppata da Descartes.



[7]F, II, 123

Come letto nel Capitolo 2 Descates afferma che "*l'agevolezza con cui la palla entra nel corpo $CBEI$ sta a quella con cui esce dal corpo $ACBE$ come la distanza tra AC e HB sta alla distanza tra HB e FI, cioè come la retta CB sta alla retta BE*"[8], ossia dati gli angoli $\widehat{ABH} = i$, $\widehat{GBI} = r$ e C costante risulta:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = C$$

Dalla *Diottrica* risulta che la costante C è uguale al rapporto fra v_r e v_i dove v_i è la velocità di incidenza lungo la retta ABD e v_r quella di rifrazione lungo BI.

Fermat accusa Cartesio di non considerare gli effetti della variazione dell'angolo di incidenza ABH.

Infatti, applicando il ragionamento precedente, al variare dell'angolo di incidenza si modifica la velocità v_r lungo BI.

Quindi, secondo Fermat, il rapporto fra v_i e v_r non può essere costante in quanto v_r varia indipendentemente da v_i.

Fermat, invece, applicando il risultato 4.4 ricavato in precedenza ottiene:

$$\sin \widehat{GBI} : \sin \widehat{IBD} = K$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin r}{\sin(i - r)} = K$$

"*Questa proporzione è diversa dall'altra, ne segue che essa non può sussistere.*

Del resto, la ragione principale della dimostrazione dell'autore della Diottrica si fonda sul fatto che egli crede che il movimento composto su BI sia sempre di uguale velocità, anche se cambia l'angolo GBD compreso sotto le linee di direzione delle due forze moventi: il che è falso, come abbiamo pienamente dimostrato."[9]

[8] D, VI, 100-101

[9] F, II, 124

In realtà l'argomentazione di Cartesio risulta coerente se si assume, per ipotesi, costante il rapporto $\frac{v_i}{v_r}$: il passaggio fra i due mezzi modifica la velocità della pallina con rapporti fissi, ($v_i = 2v_r$, $v_i = \frac{3}{4}v_r$, ...)
Tale ipotesi si contrappone ai risultati evidenziati da Fermat.
Tuttavia, come sottolinea Sabra si tratta di un fraintendimento "*fecondo*" in quanto mostra come la *Diottrica* non sia comunque in grado di spiegare quale "*racchetta*", ossia quale *forza*, sia responsabile della rifrazione.

4.3 La polemica: Fermat e i Cartesiani

Vent'anni dopo, il cartesiano Claude Clerselier (1614-1684) invita Fermat a tornare sull'argomento.
Fermat, venuto a conoscenza dell'intezione da parte di Clerselier di ricercare le "*risposte di allora*", si propone di aiutarlo a chiarire tutti i dubbi che nutre sulla dimostrazione cartesiana.
Il tolosano afferma di ripercorrere tutta l'argomentazione cartesiana fingendo di avere accanto a se uno "*scettico*" così "*scrupoloso*" da non lascirsi mai "*persuadere in mancanza di una prova*"[10].
Guarda caso, le obiezioni dello scettico sono proprio quelle che Fermat, anni prima, aveva mosso all'autore della *Diottrica*.
Tutte le critiche ruotano attorno alla visione della determinazione a muoversi della palla ritenuta da Cartesio essere distinta dalla potenza che la muove e quindi esaminata separatamente.
Mentre per Fermat la determinazione a muoversi è l'unione indissolubile fra potenza e atto.
Fino al 1662 Fermat si limita a criticare l'opera di Cartesio senza pubblicare niente di personale sull'argomento.
In quest'anno, forse spinto da Cureu de la Chambre, il tolosano scrive i trattati *"Analyse pour les réfraction"* e *"Synthèse pour les réfractions"*.
Fermat, dopo aver supposto che "*la natura agisce sempre per le vie più brevi*

[10] F, II, 370

e semplici" e aver svolto una dimostrazione "*rigorosa*", presenta un risultato che sembra concordare pienamente con la legge ricavata da Cartesio.
Il magistrato francese, però, sottolinea di essere partito da pressupposti contrari a quelli cartesiani e di avere sviluppato una "*dimostrazione rigorosamente esatta*".
Alla luce di questo, il tolosano lascia alla comunità dei geometri il compito di giustificare come si possa arrivare all'"*unica e medesima verità*" per due vie diametralmente opposte.
Quanto a lui, desidera per il futuro astenersi da "*vane discussioni e inutili polemiche*"[11].
Ai cartesiani, comunque, non sfugge la "piccola" differenza tra la legge di Fermat e quella di Cartesio.
L'autore della *Diottrica* dimostra che:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_r}{v_i}$$

mentre Fermat che:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_i}{v_r}$$

Il 6 maggio del 1662 Clerselier ritiene che l'ipotesi fondamentale per la teoria di Fermat,"*la natura agisce sempre per le vie più brevi e semplici*", debba essere rigettata dato che "*un principio morale e nient'affatto fisico non è e non può essere la causa di alcun effetto naturale*".

Possiamo ritenere concluso, con la critica mossa da Clerselier, il confronto fra Pierre de Fermat e Réne Descartes oggetto del mio elaborato, anche se restano da chiarire alcuni dubbi sul principio di rifrazione.
Successivamente, altri autori apportano il loro contributo nel delucidare le parti irrisolte.
Ad esempio Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) basandosi sulla "discussa" ipotesi di Fermat propone il principio oggi definito di minima

[11]F, I, 173

azione.
In seguito Eulero (1707-1783) e poi Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) dimostreranno che tale principio trova fondamento nelle teorie della dinamica e della meccanica.

Appendice A

Il metodo d'adequazione

Nel capitolo precedente Pierre de Fermat minimizza una data espressione, utilizzando il *" metodo diffuso tra i matematici"*.
Questo procedimento prende il nome di *"metodo d'adequazione"*.
Sicuramente questo metodo ha origini molto antiche risalenti, forse, al matematico Apollonio.
Fermat scrive nove interessanti e importanti articoli sul metodo dei massimi e minimi che sono raggruppati in *"Oeuvres de Fermat"*.
Gli ultimi due lavori sono proprio i trattati *"Analyse pour les réfraction"* e *"Synthèse pour les réfractions"* analizzati nel terzo capitolo.
L'autore, infatti, grazie al metodo dell'adequazione e all'ipotesi che "*la luce si propaga lungo cammini per i quali il tempo di percorrenza è minimo*" arriva a dimostrare il principio di rifrazione.
Vediamo, di seguito, come Fermat inizia lo studio dei massimi e minimi:
"Sia a una incognita qualunque della questione (che sia piana o solida a seconda di quel che conviene all'enunciato).
Si esprimerà la quantità massima o minima in a tramite dei termini che potranno essere di grado qualunque.
Quindi si sostituirà $a + e$ *all'incognita iniziale a, e si esprimerà così la quantità massima con termini in cui entreranno a e b con gradi qualunque.*
Si adeguerà [adaequentur], per parlare come Diofanto, le due espressioni della

quantità massima o minima, e si semplificheranno i termini comuni dall'una e dall'altra parte.
Fatto questo, si troverà che tutti i termini, dall'una e dall'altra parte, saranno moltiplicati per e o per una potenza di e.
Si dividerà tutti i termini per e, o per una potenza di e di un grado più elevato, in modo che in uno almeno dei termini di uno qualunque dei membri e sparisca.
Quindi si elimenaranno tutti i termini in cui compare ancora e o una delle sue potenze, e si eguaglierà gli altri, oppure, se in uno dei membri non resta niente, si eguaglierà, il che è lo stesso, i termini positivi a quelli negativi.
La risoluzione di quest'ultima equazione darà il valore di a, che porterà al massimo o al minimo riprendendo l'espressione iniziale.
Ecco un esempio:
Si voglia dividere la retta AC in E in modo che AExEC sia massimo.
Poniamo $AC = b$*; sia a uno dei segmenti, l'altro sia* $b - a$*, ed il prodotto di cui si voglia trovare il massimo:* $ba - a^2$.
Sia $a + e$ *il primo segmento di b, il secondo sarà* $b - a - e$*, e il prodotto dei segmenti:* $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$*; adequando a* $ba - a^2$ *e sopprimendo i termini comuni troviamo:* $be \approx 2ae + e^2$*; dividendo tutti i termini per e:* $b \approx 2a - e$*, e eliminando e:* $b = 2a$.
Per risolvere il problema bisogna prendere la metà di b.
È impossibile dare un metodo più generale."[1]
Fermat non parla mai di e come di un infinitesimo, non compare mai nei suoi trattati la forma di limite, infatti, il *"metodo d'adequazione"* è puramente algebrico.

[1]F, III, 121

Bibliografia

[1] Kirsti Andersen, "The mathematical tecnique in Fermat's deduction of the law of refraction", Historia Mathematica 10, p. 48-62, 1983.

[2] Renè Descartes, "Discorso sul metodo: La diottrica, Le meteore , La geometria", U.T.E.T. 1983.

[3] Klaus Barner, "Pierre Fermat. Sa vie privée et professionelle", Ann. Fac. Sc. Touluse Math., Spec.iss, 2009

[4] C.B. Boyer, "Fermat and descartes", Scripta Mathematica 18, p. 189-217, 1952.

[5] Pierre de Fermat, "Œuvres de Pierre Fermat", publies par les soins de Mm. Paul Tannery et Charles Henry ; sous les auspices du Ministere de l'Instruction publique, Paris, Gauthier-Villars.

[6] Genevieve Rodis-Lewis, traduzione di Gennaro Auletta e Mathilde Anquetil, "Cartesio una biografia", Editori Riuniti, Roma 1997.

[7] Giulio Giorello e Corrado Sinigaglia, “Fermat: i sogni di un magistrato all’origine della matematica moderna”, Milano: Le scienze, 2001

[8] Herman H. Goldstine, “A history of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th century”, Springer - Verlag, 1980.

[9] Albrecht Heffer, “The logic of disguise: Descartes’ discovery of the law of refraction”, p.144-165 Historia Scientiarum 16 2006.

[10] Luigi Indorato - Nastasi Pietro, “The 1740 resolution of the Fermat - Descartes controversy”, Historia Mathematica 16, p. 137-148, 1989.

[11] Lucio Russo, “La rivoluzione dimenticata”, Feltrinelli 2001

[12] Mach Ernst, “The principles of physical optics”, Dover Publications, Inc.

[13] Vasco Ronchi, “Storia della luce”, Zanichelli 1928

[14] A.I. Sabra, “Theories of light. From Descartes to Newton”, Oldbourne history of scienze library, London, 1967.

[15] August Ziggelaar, “The ’sine law of refraction derived from the principle of Fermat - prior to Fermat? The theses of Wilhelm Boelmans, S.J. in 1634”, Centaurus: International Magazine of the History of Matematics, Scienze and Technology 24, p. 246-262, 1980.

Ringraziamenti

In primo luogo vorrei ringraziare il Prof.re **Paolo Freguglia** per avermi dato la possibilità di svolgere questa tesi, per la sua disponibilità e per aver reso possibile la realizzazione di questo lavoro anche “a distanza”.

Per quanto riguarda il resto dei ringraziamenti ho deciso di comportarmi in maniera anomala: non sono affatto intenzionata a fare la solita “stesata” di nomi, molto spesso anche inopportuni.
Mi sento di ringraziare con tutto il cuore le persone che **mi vogliono bene**, che mi sono state sempre vicine soprattutto nei momenti più difficili, coloro che mi basta guardare negli occhi per sentirle vicine.
È grazie a queste persone, e alla gioia che mi trasmettono, che cerco sempre di guardare in avanti e di non abbattermi mai.
Grazie, Grazie e Grazie ancora...
Sono convinta, anche se a prima vista non si direbbe, che questo sia il modo migliore per ringraziarvi.