ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

"L'algebra" di Rafael Bombelli: nuova trascrizione e commento

Tesi di Laurea in Storia della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Paolo Freguglia

Presentata da:
Valeria Fulvi

I Sessione
2011/2012

Ai miei genitori
che hanno reso possibile tutto questo
e a Lorenzo,
che mi ha accompagnato in tutti questi anni...

Indice

Capitolo 1

L'algebra del '500

Il Cinquecento in Europa e soprattutto in Italia è un secolo molto fecondo per l'Algebra, che subisce una profonda evoluzione sul piano dei risultati, del metodo e anche del linguaggio.
I matematici in questo secolo incominciarono a sfidarsi pubblicamente per risolvere problemi e quesiti, poiché su queste competizioni si basava gran parte della loro fama. È dunque comprensibile come molte scoperte rimasero a lungo segrete, in modo da poter servire come "arma" nei confronti pubblici.
Vediamo ad esempio la storia di Scipione Dal Ferro.
Scipione di Floriano di Geri Dal Ferro (1465-1526), meglio noto con il nome di Scipione Dal Ferro, lettore di "Arithmeticam e Geometricam" presso l'Università di Bologna, trovò la regola per la risoluzione di particolari equazioni di terzo grado (mancati del termine di secondo grado - $ax^3+bx+c=0$) intorno al 1515 senza mai pubblicarla, ma tasmettendola ai suoi allievi (tra cui Antonio Maria Fiore, Annibale della Nave e Pompeo Bolognetti).
In un fascicolo conservato all'Università di Bologna la regola è descritta così:

Di cavaliero Bolognetti lui l'ebbe da messer
Sipion dal Ferro bolognese.

Il capitolo di cose e cubo eguale al numero.
Quando le cose e li cubi si aggiungono al numero $\left[ax^3+bx=c\right]$
ridurrai l'equazione a 1 cubo: $\left[x^3+px=c\right]$

partendo per la quantità delli cubi, $\left[p := \frac{b}{a}\ q := \frac{c}{a}\right]$
Poi cuba la terza parte delle cose $\left[(\frac{p}{3})^3\right]$
Poi quadra la metà del numero $\left[(\frac{q}{2})^2\right]$
e questa suma con il detto cubato $\left[(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2}^2)\right]$
et la radice quadra di deta summa $\left[\sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2}\right]$
più la metà del numero fa binomio $\left[\sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2} + \frac{q}{2}\right]$
et la radice cuba di tal binomio $\left[\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2} + \frac{q}{2}}\right]$
men la radice cuba del suo residuo $\left[\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})}^2 - \frac{q}{2}}\right]$
val la cosa $\left[x = \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2} - \frac{q}{2}}\right]$

Fino alla fine del Quattrocento i matematici furono convinti che le equazioni di terzo e quarto grado potessero ammettere soluzioni esprimibili mediante radicali quadratici; bisognò aspettare Dal Ferro per capire che un'equazione di terzo grado potesse avere delle soluzioni esprimibili mediante radicali cubici.
Nel 1530 Quanin de Tonini di Coi sfidò a pubblica disfida Antonio Maria Fiore (allievo di Dal Ferro). Nel 1535 lo stesso Fiore sostenne una disfida con **Nicolò Fontana da Brescia** (1499-1557), noto come Tartaglia, per risolvere trenta equazioni cubiche; quest'ultimo in un primo momento si adirò con il Tonini per avergli posto questioni insolubili, poi cambiò parere quando seppe che Fiore si faceva forte di una regola avuta da un grande maestro e si mise a cercare indipendentemente la soluzione ai problemi proposti, riuscendo nell'intento.
Nel gennaio del 1539 **Girolamo Cardano** (1501-1576), tramite il suo libraio, chiese a Tartaglia di rivelargli la regola da lui scoperta (probabilmente anche con la promessa di introdurlo presso amici potenti a Milano). Il 25 Marzo 1539 Tartaglia gli comunicò sotto forma di oscuri versi la regola, dopo che Cardano si era impegnato a mantenere il segreto. Così recitavano i famosi versi scritti da Tartaglia:

Quando che cubo con le cose appresso $\left[x^3+px\right]$
Se agguaglia à qualche numero discreto $\left[x^3+px=q\right]$
trouan dui altri differenti in esso $\left[u-v=q\right]$
Dapoi terrai questo per consueto
che'l lor producto sempre sia eguale
al terzo cubo delle cose $\left[u\cdot v=\left(\frac{p}{3}\right)\right]$
el residuo poi suo genere
,mkl *delli lor lati cubi ben sottratti* $\left[\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}\right]$
varrà la sua cosa principale $\left[\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}=x\right]$

In termini moderni possiamo dire:
Per risolvere l'equazione

$$x^3+px=q$$

dobbiamo trovare due numeri (u e v) tali che

$$x=u-v$$

elevando al cubo entrambi i membri otteniamo:

$$x^3=u^3-v^3-3u^2v+3uv^2 \;\Rightarrow\; x^3+3uv(u-v)=u^3-v^3 \;\Rightarrow\; x^3+3uvx=u^3-v^3$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} u^3-v^3=q \\ u\cdot v=\frac{p}{3} \end{cases}$$

La risolvente quadratica è: $z^2-qz-(\frac{p}{3})^3=0$ che avrà come radici:

$$u^3=\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2} \quad v^3=\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} \quad v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

In questo modo la soluzione dell'equazione di partenza sarà:

$$x = u - v$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

Cardano però non riuscì a trattare il caso irriducibile $\left[\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0\right]$: ad esempio l'equazione $x^3 - 15x + 4 = 0$, ammette tre soluzioni reali 4, $\sqrt{3} + 2$, $\sqrt{3} - 2$ ma applicando la formula risolutiva proposta dal Tartaglia otteniamo $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ e ciò non portava a nulla in quanto nessun numero elevato al quadrato da un numero negativo (di questo problema se ne occupò e ne diede risposta Bombelli); Cardano scrisse a Tartaglia per avere spiegazioni, ma quest'ultimo non rispose in modo esauriente. Nel 1545, dopo aver scoperto durante una visita al Della Nave con il suo allievo **Ludovico Ferrari** (1522-1565) l'uguaglianza del metodo di Tartaglia con quello di Dal Ferro, Cardano pubblicò *L'Ars Magna*, dove inserì la formula risolutiva delle equazioni cubiche, non rispettando i patti. In questa opera Cardano incluse anche le risoluzioni delle equazioni di quarto grado attribuendole al suo allievo Ludovico Ferrari. Tartaglia andò su tutte le furie ed accusò di plagio Cardano; lo stesso anno Tartaglia pubblicò a Venezia *Quesiti et inventi diverse* per chiarire la parte avuta nella scoperta e denunciare Cardano.

Nell'*Ars Magna*, a Cardano passa in rassegna tutti i casi ammissibili di equazione cubica ed ogni capitolo ha una struttura ben precisa: dimostrazione, enunciato della regola da seguire, esempi.

Volendo riassumere i contributi salienti dell'*Ars Magna*, oltre alle formule risolutive per equazioni di terzo e quarto grado si possono individuare alcuni risultati notevoli, destinati ad essere approfonditi o riscoperti da matematici successivi.

Anzitutto egli inaugura la teoria delle trasformazioni, ovvero di quei cambiamenti di variabile che permettono di semplificare un'equazione. Ad esempio Cardano affronta la risoluzione di $x^3 = px^2 + q$ e dimostra come, posto $x = y + \frac{p}{3}$, si riesce ad eliminare il coefficiente del termine in y^2, riducendosi al caso $y^3 = px + q$.
Un'aspetto interessante è vedere come i passaggi algebrici non erano affatti ritenuti una dimostrazione. Dal nostro punto di vista Tartaglia ha comunicato a Cardano non solo la formula ma anche la sua dimostrazione, ma durante le sfide Tartaglia non accusò mai Cardano di avergli rubato la dimostrazione. Questo è prova del fatto che all'epoca si sentiva l'esigenza di una dimostrazione geometrica; dobbiamo aspettare il XVII secolo per l'emancipazione dell'algebra sulla geometria, anzi con gli sviluppi della geometria analitica l'algebra si è presa una rivincita.

di seguito si riporta l'equazione

$$x^4 + ax^2 + b = cx$$

si procede per prima cosa a rendere il primo membro un quadrato perfetto, così aggiungendo $2\sqrt{b}x^2 - ax^2$ in questo modo l'equazione di partenza diventerà:

$$x^4 + ax^2 + b + 2\sqrt{b}x^2 - ax^2 = cx + 2\sqrt{b}x^2 - ax^2$$

$$(x^2 + \sqrt{b})^2 = cx + (2\sqrt{b} - a)x^2$$

Ponendo $\sqrt{b} = q$ e $2\sqrt{b} - a = p$ si ottiene

$$(x^2 + q)^2 = cx + px^2$$

Adesso aggiungendo a destra e a sinistra $2tx^2 + t^2 + 2tq$ si avrà allora:

$$x^4 + 2x^2q + q^2 + 2tx^2 + t^2 + 2tq = cx + px^2 + 2tx^2 + t^2 + 2tq$$

ovvero

$$(x^s + q + t)^2 = (\sqrt{p + 2t})x^2 + cx + (\sqrt{t^2 + 2tq})^2$$

Il membro a destra è un quadrato se si ha

$$c = 2\big(\sqrt{p+2t}\sqrt{t^2+2tq}\big)$$

cioè se

$$2t^3 + (p+4q)t^2 + 2pqt - \frac{c^2}{4}$$

Questa ottenuta è una equazione di terzo grado nell'incognita t, chiamata **risolvente cubica di Ferrari**. Una volta trovate le soluzioni con la formula di Scipione dal Ferro-Tartaglia sostituiamo un risultato nella equazione

$$x^s + q + t = \sqrt{p+2t}x + \sqrt{t^2+2tq}$$

perciò si tratta di risolvere una equazione di secondo grado che ci fornirà le soluzioni della nostra equazione di partenza.

Dopo i grandi sviluppi del Cinquecento rimaneva aperto il problema se fosse possibile risolvere per radicali le equazioni generali di grado superiore al quarto. Ci furono numerosi tentavi per la determinazione di una formula generale, ma rimasero tutti infruttuosi; l'impossibilità fu dimostrata da Ruffini (1813) e da Abel (1824). Seppure i lavori non andarono a buon fine, stimolarono una riflessione su quanto si era ottenuto negli anni precedenti, portando da una parte al consolidamento delle procedure algebriche e dall'altro allo sviluppo del simbolismo letterale non solo per le incognite ma anche per le costanti, una pratica che si sarebbe evoluta fino alla forma attuale assunta da Descartes. Questa importante verità si deve al matematico **Francois Viete** (1540-1603), che segnò il passaggio dalla *Logistica numerosa* alla *Logistica speciosa* (vale a dire dall'Aritmetica all'Algebra) e successivamente allo studio della geometria in modo algebrico.

Capitolo 2

Bombelli

2.1 La vita 1526 - 1573c.

Nel panorama della storia della matematica del Cinquecento, la figura e l'opera di Rafael Bombelli ricoprono un posto decisamente rilevante. Tra i cosiddetti algebristi italiani dell'epoca (Scipione Dal Ferro, Cardano, Ferrari, Tartaglia), la sua opera rappresenta una sorta di sintesi di quella logistica numerosa che costituiva lo sviluppo della trattatistica d'abaco e che portò, assieme alla geometria, alla costituzione dell'algebra come disciplina.
Non abbiamo sufficienti notizie sulla sua vita, si pensa che egli nacque a Bologna nel gennaio 1526 e che morì a Roma poco dopo il 1572.
Sembra che suo padre, Antonio Mazzoli, cambiò il cognome da Mazzoli in Bombelli. La famiglia Mazzoli, infatti, era schierata dalla parte dei Bentivoglio, signori di Bologna che governarono la città dal 1443. Quando nel 1508 il Papa Giulio II riprese il controllo della città, i Bentivoglio andarono in esilio e le fortune dei Mazzoli cambiarono. Si videro peraltro confiscate le loro proprietà, che poi in seguito riottennero. Ritornato a Bologna Antonio Mazzoli si dedicò al commercio della lana e sposò Diamante Scudieri, figlia di un sarto. Ebbero sei figli di cui Rafael fu il più grande.
Differentemente, Bortolotti ci informa invece che i Bombelli erano una famiglia appartenente alla nobiltà contadina bolognese giunta a Bologna agli

inizi del XIII secolo da Castel de' Britti (sul fiume Idice a 12 km circa da Bologna). Essi erano di parte ghibellina e a causa di vicissitudini politiche, furono banditi dalla città, si dispersero per le ville del contado e non tornarono se non dopo la cacciata dei Bentivoglio, nei primi anni del secolo XVI. Da alcune documentazioni si evince che vi furono nella prima metà del Cinquecento giuristi con il nome di Bombelli: Domenico e Filippo. Quest'ultimo proveniente da Borgo Panicale, dove fu capostipite di una grande famiglia di notai. Sempre secondo Bortolotti, anche Rafael Bombelli naque a Borgo Panigale e questo spiegherebbe il fatto che negli archivi manca il nome suo e quello della sua famiglia, poiché l'archivio della parrocchia di Borgo Panigale, venne distrutto insieme con la chiesa nei primi anni del secolo XVI.
Come si può vedere si tratta di due ricostruzioni delle origini di Rafael difficilmente conciliabili.
Altre informazioni più precise si desumono da quanto Rafael scrive nella prefazione all'edizione del 1572 alla sua opera *L'Algebra, parte maggiore dell'aritmetica*. Egli ci informa di aver avuto come precettore Francesco Maria Clementi da Corinaldo, che potremmo definire ingegnere idraulico, il quale bonificò le paludi di Foligno, in Umbria, sotto il Papa Paolo III. Clementi istruì Bombelli sulle problematiche idrauliche, mentre in seguito ricevette l'istruzione matematica nell'ambiente bolognese, all'epoca considerato al massimo splendore per quanto riguarda questa scienza.
Rafael scrive che per ordine di Alessandro Ruffini, vescovo di Melfi, lavorò alla bonifica delle paludi della Chiana in Toscana, migliorando decisamente l'esistenza delle popolazioni della zona "*con tanta salude e felicitade de'popoli circonvicini che ben tutti per una voce confessano questa opera essere stata gloriosa ed immortale*...". Sappiamo che durante una sospensione dei lavori di bonifica, Bombelli si dedicò a scrivere la sua Algebra; infatti è lui stesso a dirci che la composizione della sua algebra avvenne"*... all'hora che quasi era abbandonata l'impresa della essicatione della palude ...*".

Da una ricostruzione fatta da Bortolotti, si potrebbe datare la stesura

Figura 2.1: L'algebra di Bombelli - Stampa (1579)

del manoscritto dell'Algebra (primi tre libri) intorno al 1550. L'opera manoscritta fu certamente diffusa tre gli studiosi del tempo, poiché tuttora nelle biblioteche di Bologna ne esistono due esmplari: uno, contenente tutti i 5 libri, all'Archiginnasio, l'altro, che conserva solo il III libro, alla biblioteca universitaria. Da qui alla pubblicazione della prima edizione del 1572 (composta di tre libri, editi da Giovanni Rossi), trascorsero più di venti anni. L'opera poi venne ristampata integralmente nel 1579. Il manoscritto ebbe rimaneggiamenti, in particolare per quanto riguarda il libro terzo. In una prima stesura, il manoscritto di questo libro doveva contenere problemi provenienti dalla tradizione abacistica. Ma, come scrive Bombelli, presumibilmente intorno al 1567, "*essendosi ritrovato un'opera greca di questa disciplina (cioè dell'algebra) nella libraria di Nostro Signore in Vaticano, composta da un certo Diofanto Alessandrino, autor greco, il quale fu ai tempi di Antonin Pio, et avendomela fatta vedere messer Antonio Pazzi reggiano, pubblico lettore di matematiche in Roma, giudicatolo con lui autore assai intelligente de'numeri, (ancorché non tratti de'numeri irrazionali, ma solo in lui si vede un perfetto ordine operare) egli et io, per arricchire il mondo di siffatta opera, ci dessimo a tradurlo, e cinque libri (delli sette che sono) tradotti ne habbiamo, lo restante non avendo potuto finire, per gli travagli avvenuti all'uno e all'altro [...]*". Non abbiamo traccia di questa traduzione, ma indubbiamente nell'edizione del 1572 dell'Algebra, nel terzo libro, troviamo la traduzione (in

italiano) di 143 problemi (dei 272 che ne contiene) dell'Aritmetica di Diofanto.
Per scrivere l'opera Bombelli si avvalla di alcuni lavori anteriori che egli dichiara coscienziosamente. Uno è un libretto del notissimo scienziato arabo Mohammed Ibn Musa (matematico arabo, circa 800 d.C.), che egli ricorda perché da esso vengono tratti alcuni elementi per stabilire l'etimologia del vocabolo ≪ algebra ≫; si trova poi la Summa di Luca Pacioli, gli scritti di Cardano, Tartaglia e Ludovico Ferrari, mentre non cita mai il nome del suo famoso concittadino Scipione Dal Ferro. Bombelli non entra nella famosa disputa fra Cardano e Tartaglia relativa alla risoluzione delle equazioni cubiche, ma si limita a notare che Tartaglia *"di sua natura era così asuefatto a dir male, che all'hora egli pensava di haver dato honorato saggio di se, quando di alcuno avesse sparlato."* Un'altra influenza importante per Bombelli, come s'è detto prima, fu quella di Diofanto. Uno dei meriti indiscutibili e riconosciuti a Bombelli fu quello di riportare alla luce le opere di Diofanto, le sue idee e i suoi metodi che da secoli giacevano trascurati e dimenticati.
Nell'introduzione del III libro Bombelli scrive "*Farò fine di ragionare di queste agguagliationi e dignitadi, ma verrò alle operationi di esse, le quali saranno quelle dimostrationi matematiche (o problemi che dir si voglia) tanto dà scrittori commendate; che sarà l'ultima parte di quest'opera, riserbandomi con più mio agio e commodità, di dare al mondo tutti questi problemi in dimostrationi geometriche.*" Questa seconda parte non verrà mai pubblicata, ed è per questo che si pensa che la morte di Bombelli avvenne poco dopo la pubblicazione della sua opera: possiamo quindi pensare che la sua morte sia avvenuta nel 1573 circa.
La sezione di algebra geometrica [libro quarto e quinto] si ritenne perduta fino quando Bortolotti la rinvenne nella biblioteca comunale dell'Archiginnasio di Bologna (codice B.1569). Qua possiamo trovare l'intera opera manoscritta di Bombelli sia algebrica che geometrica, entrambe nella prima imperfetta redazione. Bortolotti pubblicò l'intera opera nel 1966.
L'Algebra di Bombelli ebbe una notevole influenza tra i suoi contemporanei e

i successori che possiamo vedere nell'opera di Simon Stevin (L'Arithmétique, 1585) e in Paolo Bonasoni (manoscritto Algebra geometrica, 1575), che adottano simbolismi e sincopi caratteristici di Bombelli. L'Algebra fu poi studiata da scienziati di grande spessore come Huygens e Leibniz.

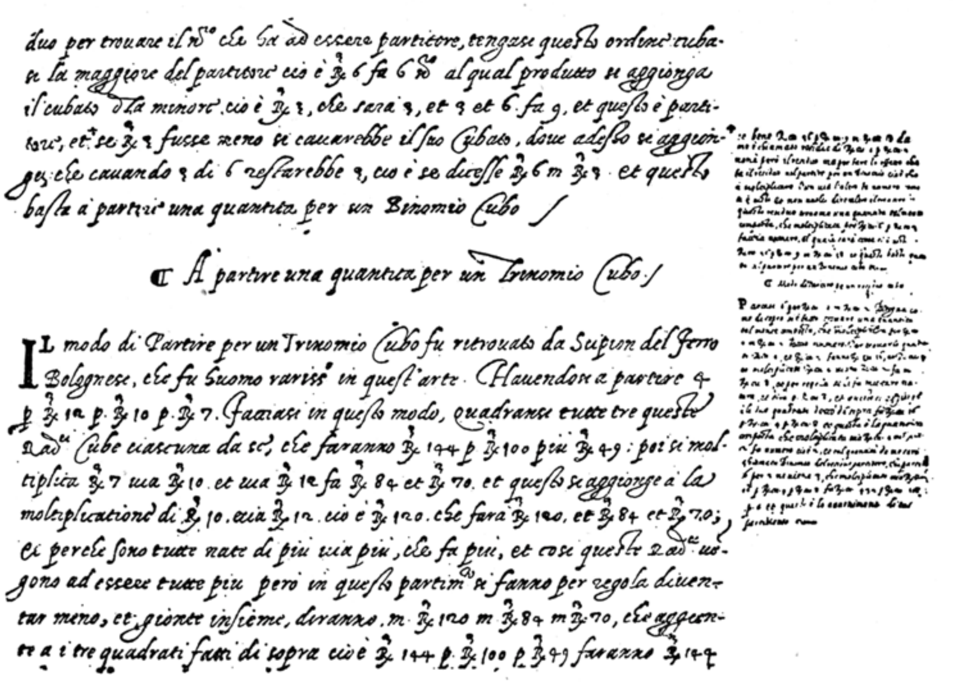
2.2 L'Algebra - manoscritto

Il manoscritto è un volume di grande formato (27cm x 5cm x 41cm) di 260 carte, delle quali le prime 14 non numerate che contengono il frontespizio e l'indice. Seguono 212 carte numerate dall'1 al 212 e 32 carte non numerate di testo. Alle carte non numerate fu data in seguito una numerazione provvisoria a matita: dall'I al XVI, quelle riguardanti il frontespizio, mentre dal 212 al 244 quelle del testo che non avevano numerazione.
Alcune carte risultano totalmente bianche, e sono sempre fra un libro e l'altro, o fra capitolo e capitolo, per lasciare posto ad introduzioni o ad aggiunte che l'autore poteva fare succesivamente ma che non avvennero mai.
Alcune pagine portano nei lati a margine delle note, come si può notare dalla figura, fatte presumibilmente dall'autore in epoca più tarda, che commentano e completano il testo, avvicinandosi sempre di più alla definitiva versione a stampa.
Vi sono poi alcune correzioni al testo che così modificato vengono riportate nell'edizione a stampa; questo porta a pensare che tali correzioni siano state fatte dall'autore stesso.

2.2.1 Data del manoscritto

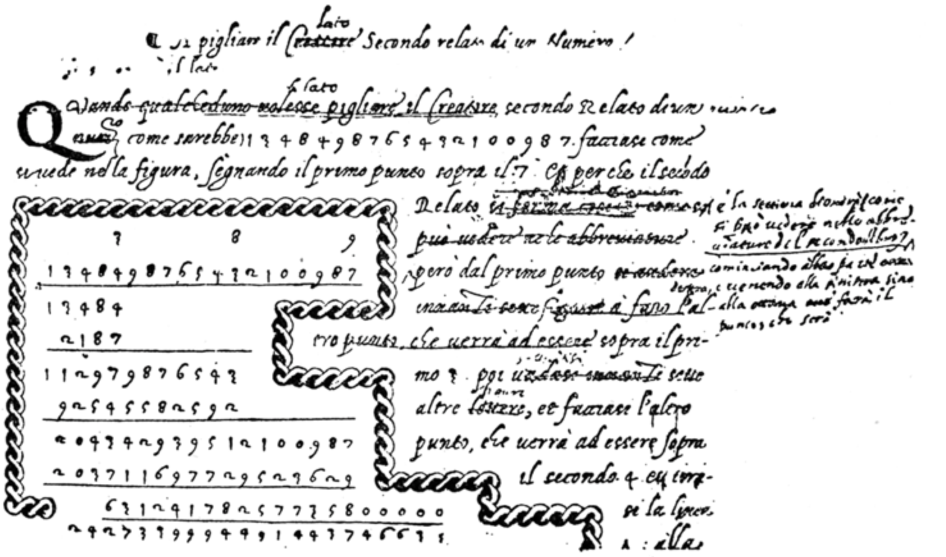
Per Bortolotti è lecito pensare che il manoscritto sia stato scritto intorno al 1550 per vari motivi che riassumerò brevemente:

- Nella prefazione dell'opera a stampa Bombelli racconta di aver tradotto con Pazzi i primi 5 libri dell'Arithmetica di Diofanto (IV d.C.). Mentre nel manoscritto usa i termini "cosa" per indicare l'incognita e


duo per trouare il n° che ha ad essere partitore, tengasi questo ordine: cubasi la maggiore del partitore cio è R 6 fa 6 n° al qual produtto si aggionga il cubato della minore cio è R 3, che sarà 3, et 3 et 6 fa 9, et questo è partitore, et se R 3 fusse meno si cauarebbe il suo Cubato, doue adesso si aggionge; che cauando 3 di 6 restarebbe 3, cio è se dicesse R 6 m R 3 et questo basta à partire una quantità per un Binomio Cubo /

A partire una quantità per un Trinomio Cubo /

IL modo di Partire per un Trinomio Cubo fu ritrouato da Scipion del Ferro Bolognese, che fu huomo variss. in quest'arte. Hauendosi a partire 4 p R 12 p R 10 p R 7. facciasi in questo modo, quadrinsi tutte tre queste Rad. Cube ciascuna da se, che faranno R 144 p R 100 più R 49: poi si moltiplica R 7 uia R 10 et uia R 12 fa R 84 et R 70. et questo si aggionge a la moltiplicatione di R 10 uia R 12 cio è R 120. che sarà R 120, et R 84 et R 70; et perche sono tutte nate di più uia più, che fa più, et cosi queste Rad. uogliono ad essere tutte più però in questo partimento si fanno per regola diuentar meno, et gionte insieme, diranno m R 120 m R 84 m R 70, che aggionte a i tre quadrati fatti di sopra cio è R 144 p R 100 p R 49 faranno R 144


A pigliare il lato Secondo relato di un Numero /

Quando si ha da pigliare il lato secondo relato di un numero come sarebbe 11348498765432100987. facciasi come si uede nella figura, segnando il primo punto sopra il 7 ...

"censo" per la potenza, nel testo a stampa dichiara di non voler più utlizzare vbquesta terminologia, bensì i termini "tanto" e "potenza" (a cui seguono 'cubo", 'potenza di potenza") che utilizza Diofanto: così Bombelli scrive nel testo a stampa "*...mi sono risoluti di seguire Diofanto (come ho fatto nel restante)...*". Questo ci permette di dire che l'edizione manoscritta fu composta da Bombelli prima che egli avesse conosciuto l'opera di Diofanto. A conferma di ciò troviamo nell'edizione a stampa 143 problemi diofantei, che invece non compaiono nel testo manoscritto. Tutto ciò ci porta a dire che il manoscritto fu scritto prima che Pazzi mostrasse l'opera diofantea a Bombelli (quando Pazzi era lettore a Roma), cioè posteriormente al 1567.

- Nel testo a stampa Bombelli ricorda un passo del *Commento del barbaro ai dieci libri dell'architettura di Vitruvio*, dove si enunciano le "invenzioni di Platone". Bombelli utilizza queste "invenzioni di Platone" per svolgere una seconda dimostrazione del "Modo di trovare il lato cubico di un numero in linea". Questa tecnica viene utilizzata molto anche nel secondo Libro per costruire le dimostrazioni piane (che non compaiono nel manoscritto) e che portano Bombelli a formulare la prima dimostrazione dell'esistenza di radici reali per l'equazione cubica nel caso irriducibile. Tutto ciò è conferma che Bombelli all'epoca della stesura del manoscritto non conosceva il commento del Barbarò, quindi è ragionevole datare il manoscritto a un periodo anteriore al 1556, anno in cui viene stampato il commento.

- Nel Libro quinto Bombelli si cimenta sul tema dei poliedri regolari; le incertezze che presenta a riguardo del numero e del modo in cui sono generati. Ci da una prova del fatto che mentre componeva la sua opera non conosceva il libro di Pappo dove numera e descrive i poliedri archimedei, libro che viene pubblicato nel 1558.

- Come detto nella sezione precedente Bombelli afferma che la composizione dell'Algebra avvenne "...all'hora che quasi era abbandonata l'impresa della essicatione della palude... " in Val di Chiana; impresa che fu abbandonata e ripresa soltanto nell'anno 1551. Questa nota concorre nel fissare la compilazione del manoscritto in una data anteriore al 1551.

- Il carattre in cui viene scritto il manoscritto è assegnato dagli intenditori alla metà del secolo XVI, e la carta viene registrata con l'indicazione: "Lucca, 1548, Archivio di Stato".

- Il manoscritto è certamente posteriore alla pubblicazione della *Ars Magna* (1545), e risente della controversie tra Ferrari e Tartaglia (1547,1548).

2.3 Trascrizione

In questa tesi vengono trascritti i primi tre libri dell'Algebra di Bombelli. Vengono così messe in luce le differenze tra le due versioni, quella manoscritta (1550c.) e quella a stampa (1572).

- In nota vengono messe le parti che sono presenti nel manoscritto e che Bombelli <u>non</u> riporta nell'edizione a stampa.

- In **grassetto** vengono evidenziate le parti che sono state aggiunte <u>solo</u> nell'edizione a stampa, e quindi non presenti nel manoscritto.

- In *corsivo* vengono riportate le postille che Bombelli fa a margine delle pagine nel manoscritto e che riporterà poi nel testo a stampa.

Questa tabella rappresenta alcune delle principali differenze di notazioni tra il manoscritto, il testo a stampa e la notazione attuale.

Altre importanti differenze si trovano nella terminologia utilizzata. Nell'edizione manoscritta Bombelli utilizza i termini:
"Creatore" della radice, *"censo"*(incognita), *"cosa"*(potenza), *".p."* e *".m."* mentre nella edizione a stampa vengono così sostituiti:

Notazione moderna	Bombelli Stampa	Bombelli Manoscritto
$5x$	$\overset{\underset{\smile}{1}}{5}$	$\overset{\underset{\smile}{1}}{5}$
$5x^2$	$\overset{\underset{\smile}{2}}{5}$	$\overset{\underset{\smile}{2}}{5}$
$\sqrt{4+\sqrt{6}}$	Rq⌊4pRq6⌋	R⌊4pR6⌋
$\sqrt[3]{2+\sqrt{0-121}}$	Rc⌊2pRq⌊0m121⌋⌋	R³⌊2pR⌊0m121⌋⌋

Figura 2.2: Differenze di notazioni

"Lato" della radice, *"tanto"*, *"potenza"* *"+"* e *"-"*.

Le figure che si trovano nella seguente tesi sono copie di quelle che si trovano nell'edizione del 1966 a cura di U. Forti e E. Bortolotti

2.4 Lessico - (tratto da L'algebra ed.1966)

Abbaco o abaco: tavoletta per il calcolo, sulla quale le colonne per le varie potenze decimali sono divise da righe. Tale sistema di calcolo fu anche detto "per righe" per distinguerlo dal calcolo "con la penna" degli algoritmisti. Nel Medioevo i due metodi di calcolo furono al centro di una vivace disputa che favori non poco il risveglio dell'interesse per la matematica.

Agguagliare: porre a confronto i due membri di una equazione.

Agguagliatione: atto dell'agguagliare, risoluzione di una equazione.

Algorismo: algoritmo, metodo sistematico di calcolo.

Avenimento: quoziente di una divisione.

Carattero: simbolo raffigurante l'incognita o le sue potenze.

Cavare: sottrarre.

Censo: nome della seconda potenza dell'incognita, usato da alcuni matema-

tici del 400 e 500. Bombelli nei primi tre libri a stampa, la chiama potenza.
Composto: compasso.
Communicanti (quantità): quantitò che presentano la possibilità di raccoglimento a fattor comune.
Cosa: nome dell'incognita negli scrittori del tempo. Bombelli la chiama Tanto.
Cubato: cubo di un numero o di una quantità.
Cuboquadrato: sesta potenza.
Danda: metodo di divisione "lunga", in cui si scrivono ogni volta sotto il dividendo i prodotti del divisore per il quoziente, effettuando poi le sottrazioni. Bombelli da questo nome anche ad altre operazioni le quali l'estrazione di radici di vario grado.
Dignità: le varie potenze dei numeri o dell'incognita, dalla seconda in avanti.
Esimo: indica una frazione. Ad es. $\frac{5}{7}$ si dice 5 esimo di 7.
Figura: cifra; figura (riferito anche alla rappresentazione del calcolo).
Galera o galea: metodo di divisione così detto per la forma che assumeva la scrittura. Diversamente che nella danda, nella galera si riportavano solo i resti delle sottrazioni, come nelle moderne divisioni. E questa la divisione "corta".
Gnomone: letteralmente "conoscitore"; e la superficie residua che si ottiene come differenza di due rettangoli o di due quadrati aventi un vertice in comune e due lati giacenti sulle stesse semirette.
Gnomonide: gnomone solido, differenza di due parallelepipedi rettangoli.
Lato: radice nel campo razionale; radice di una quantita in generale (quadrato, cubo, quadroquadrato, primo relato, quadrocubico, secondo relato...).
Nomi: monomi.
Partire: dividere.
Partitore: divisore.
Positione: equazione; in molti problemi Bombelli insegna la regola per risolverli "senza fare la positione". ***Potenza***: quadrato dell'incognita.

Primo relato: quinta potenza.
Quadrocubico: sesta potenza (vedi Cuboquadrato).
Quadroquadrato: quarta potenza.
R.c.: radice cubica.
R.c.$\llcorner$. o R.c.legata: radice cubica di un'espressione fra parentesi, cioè di un polinomio.
R.p.r. o R.r.: radice prima relata, ossia radice quinta.
R.q.: radice quadrata.
R.q.legata: radice quadrata di un polinomio.
R.q.c. o R.c.q.: radice quadracubica o cubaquadrata.
RR.q.: radice quadroquadrata.
Radice sorda overo indiscreta: radice irrazionale o, più in generale, radice di polinomi che non sono quadrati perfetti. R. quadrata, cuba, quadraquadrata, prima relata o prima incornposta, quadracubica o cubaquadrata...
R.s.r.: radice seconda relata ovvero radice settima.
Residua: binomio formato dalla differenza di due monomi e anche, più in generale, il polinomio the moltiplicato per un binomio o residuo contenente radicali cubici di un numero razionale. Ad esempio $(a - b)$, $(a^2 - ab + b^2)$, $(a^2 + ab + b^2)$ sono residui di rispettivamente $(a + b)$, $(a + b)$ e $(a - b)$.
Rotto: frazione numerica o algebrica.
Salvare: mettere temporaneamente in disparte una quantità in attesa della sua ulteriore utilizzazione. ***Sano***: numero intero, o quantità algebrica intera.
Schifare: semplificare dividendo per uno stesso numero o quantità algebrica numeratore e denominatore di una frazione o i due membri di un'equazione.
Tanto: nome dell'incognita alla prima potenza.
Trasmutatione: trasformazione lineare sulle equazioni algebriche al fine di renderne più agevole la soluzione. I tre tipi usati da Bombelli sono tuttora usati nella teoria delle equazioni algebriche, cioe: a radici contrarie, a radici moltiplicate e reciproche e a radici aumentate. Tutte a suo luogo sono illustrate.
Valuta: valore dell'incognita. Vergola: segno di frazione.

Via: segno di moltiplicazione equivalente al nostro “per”.

Capitolo 3

Libro primo.

Diffinitione del Numero Quadrato. [1]

Il produtto di tutti li numeri in se stessi moltiplicati è numero quadradto, come sono 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, e 100, li quali nascono dalla multiplicatione di ciascuno di questi in se stessi, cioè 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, et questi da me saranno chiamati lati delli numeri quadrati sopraddetti, cioè il 2 sarà il lato del 4 numero quadrato, il 3 sarà lato del 9, il 4 del 16, et così di mano in mano. Et notisi, che se bene l'unità non è numero, pur nelle operationi serve come li numeri, et è quadrato, et il suo lato è la istessa unità, cioè il lato di 1 è 1, e detta unità è cubo, quadroquadrato, e tutte le altre dignità, che seguitano sempre il suo lato è lo istesso 1 (come dimostra Euclide nel IX de gli elementi).

Diffinitione del numero Cubo. [2]

[1] Il numero quadrato è un numero, che nasce dala multiplicatione di un numero in se stesso come srebbe 3 via 3, 9, il qual 9 è numero quadrato; et così 5 via 5 fa 25 et 6 via 6 fa 36 che sono quadrati cioè il 25 et il 36 et così sempre saranno tutti e numeri, che saranno il loro nascimento simile.

[2] IL numero Cubo, è quello che nasce da la triplicatione di un numero in se stesso, come sarebbe a dir 2 via 2 4 et 2 via 4 8, et 8 sarà Cubo: et così 3 via 3 9 et 3 via 9, fa 27 et 27 è numero Cubo: et il medesimo 4 via 4, fa 16 et 4 vai 16 64, che pure è Cubo: et tutti quelli

IL produtto di ogni numero quadrato moltiplicato nel suo lato è numero cubo, come il produtto di 9 numero quadrato via 3 suo lato è 27, il quale 27 è numero cubo, e il suo lato è 3, e 125 anch'egli è numero cubo; perch'è produtto da 25 numero quadrato, e 5 suo lato, et il lato cubico di 125 è 5.

Diffinitione del numero quadroquadrato. [3]

Il produtto di ogni numero quadrato moltiplicato in se stesso è detto numero quadroquadrato (come per esempio) 16 è detto numero quadroquadrato; perch'è produtto da 4 numero quadrato moltiplicato in se stesso, e il lato quadroquadrato di detto 16 è 2 (cioè il lato del 4 numero quadrato) dal quale il 16 nasce. Similmente 81 è detto numero quadroquadrato, che nasce da 9 numero quadrato moltiplicato in se stesso, et il suo lato quadroquadrato è 3.

Diffinitione del numero detto primo relato.

Il produtto di ogni numero quadrato moltiplicato nel numero cubo, che habbia l'istesso lato: sarà numero primo relato, over primo incomposto, come sarebbe 4 numero quadrato moltiplicato via 8 numero cubo, de quali il lato di ciascuno è 2, cioè il lato quadrato dell'uno, e il lato cubico dell'altro, il produtto è 32; il quale 32 si chiama primo relato, e il suo lato relato è 2, e così 243 è numero primo relato, che nasce dal produtto di 9 numero qudadrato via 27 numero cubo, de quali il suo lato è 3. Et ancora detto numero primo relato, over primo incomposto nasce dal produtto di un numero

che saranno simile nascimento, saranno numeri Cubi. et tutte le propositioni sopradette, che accadono ne li numeri quadrati, fanno il medesimo effetto ne i numeri Cubi.

[3]Il numero quadro quadrato è il produtto di un numero quadrato in se stesso, come sarebbe 4 via 4 fa 16, il quale sarà numero quadro quadrato, perchè 4 è numero quadrato; et così 9 via 9, fa 81, che sarà numero quadro quadrato, per esser 9 suo lato numero quadrato.

quadroquadrato moltiplicato via il lato del lato dello istesso numero quadroquadrato, come sarebe 16 numero quadroquadrato, che moltiplicato via 2 suo lato quadroquadrato: fa 32, e così 81 numero quadroquadrato, che moltiplicato via 3 suo lato quadroquadrato: fa 243 numero primo relato, over primo incompsto.

Diffinitione del numero quadrocubico, over cubicoquadrato.

Il produtto di ogni numero cubo moltiplicato in se stesso, overo il cubato di ogni numero quadrato si chiama numero quadrocubico o cuboquadrato (come sarebbe 64) che nasce dal quadrato di 8 numero cubo, over dal cubato di 4 numero quadrato, et il lato cubiquadrato di 64 è 2. Parimente ancora 729 è numero quadrocubico, o cuboquadrato; perchè nasce dal quadrato di 27 numero cubo, over dal cubato di 9 numero quadrato, et il lato quadrocubico di esso 729 è 3. E benchè le dignità de numeri (come si vedrà nel secondo libro) siano infinite; parendomi di haver per hora detto di questo a bastanza, e che facilmente ciascuno da se di quelle ne potrà haver cognitione: però lassandole seguirò l'altre, che mi paiono più necessarie.

Diffinitione della Radice quadrata, detta sorda, overo indiscreta. [4]

[4]

Diffinitione de la Radice quadrata Discreta.

La Radice Discreta, è il lato di ogni numero quadrato, come sarebbe la R. di 16 sarà 4 lato del 16 et così la R. di 25 sarà 5 lato di 25.

Diffinitione de le Radice sorde, overo indiscrete.

La Radice irrationale, è la multiplicatione di un numero in se stesso, che produca un numero non quadarto: il quale numero è impossibile poterlo nominare se non potentialmente, cioè il suo produtto, come sarebbe a dire 20 del quale volessimo il numero che moltiplicato in se stesso l'habbia creato, come s'io dicessi; trovami un numero che moltiplicato in se

La Radice quadrata è il lato di un numero non quadrato; il quale è impossibile poterlo nominare: però si chiama Radice sorda, overo indiscreta, (come sarebbe); Se si havesse a pigliare il lato di 20, il che non vuol dire altro, che trovare un numero, il quale moltiplicato in se stesso faccia 20; il ch'è impossibile trovare, per essere il 20 numero non quadrato: esso lato si direbbe essere Radice 20, ma avertiscasi, che quando si dirà simplicemente Radice, si intenderà quadrata, la quale si scriverà così R.q.

Diffinitione della Radice cuba. [5]

La Radice cuba è il lato cubico di un numero non cubo, il qual'è impossibile poterlo nominare: però si chiama Radice cuba (come sarebbe) se si havesse a pigliare il lato cubico di 24; il ch'è impossibile a trovare, per essere il 24 numero non cubo, per ciò esso lato cubico si direbbe esser Radice cuba 24, avertendosi, che questa sorte di Radice si scriverà così R.c.

Diffinitione della Radice quadroquadrata. [6]

stesso faccia 20, et perchè 20 è numero non quadrato, è impossibile da trovarlo: et però tal numero si chiama Radice sorda, o indiscreta; che così è usanza di nominarla.

[5]

Diffinitione de le Radice Cuba discreta.

La Radice Cuba discreta, è il lato di un numero Cubo, come sarebbe Radice cuba di 8 è 2: perchè 2 è lato di 8 numero cubo.

Diffinitione de le Radice Cuba sorda, overo indiscreta.

- La Radice cuba sorda, overo indiscreta, è il lato cubico di un numero non cubo, come sarebbe 16 che che se ne' volesse pigliare la Radice cuba: com'è a dire trovami un numero che il suo cubato faccia 16: et per esser 16 numero non cubo, è impossibile ritrovar tal numero et bisogna procedere come ne le Radici sorde.

[6]

La Radice quadroquadrata è il lato quadroquadrato di un numero non quadroquadrato, il quale impossibile è poterlo a nominare: però si chiama Radice quadroquadrata (come sarebbe) Se si havesse a pigliare il lato quadroquadrato di 32, che non vuol dire altro che trovare un numero, il quale moltiplicato in se stesso, e il produtto di nuovo moltiplicato in se stesso faccia 32; il ch'è impossibile a trovarle, per essere il 24 numero non quadroquadrato, per ciò esso lato quadroquadrato si direbbe esser Radice quadroquadrata 32.

Diffinitione de la Radice Radice discreta.

La R.R. rationale è il lato di un numero quadro quadrato, come sarebbe 16 che il suo lato è 2; et così di 81, il suo lato è 3, la R.R. di 15 sarà 2 et la R.R. di 81 sarà 3.

Diffinitione de la R.R. irrationale.

La R.R. irrationale sarà il quadro quadrato di un numero, che non sia ne quadrato, ne quadro quadrato, come sarebbe a dire R.R.24, che vuol dire trovami un numero che il suo quadro quadrato sia 24, il quale è impossibile ritrovare. Et nota che se il numero del quale se sà da pigliare la R.R. sia numero quadrato, ma non quadroquadrato; allora tal R.R. si può far mutare natura et diventare R. sorda, come sarebbe R.R.25, che per esser 25 numero quadrato et il suo reatore è 5 dunque la R.R. di 25, è tanto quanto sarebbe o dire R.5 che così dicendo ne l'operare sta meglio per la brevità, et fuggesi fatica ne le operationi.

Essendo altre sorti di Radici, le quali rarissime volte accadono ne l'operatione alzebratica: per ora non ne tratterò; riserbandomi di trattarne altro luogo, et tempo: ma verrò a la pratica de li quattr'atti operativi, cioè moltiplicare, partire, sommare, et sottrarre, che intervengono fra Radici, et Radici, et fra Radici et numero. Et prima.

Le Radici moltiplicate via Radici et fra l'una e l'altra non via sia proportione come da numero quadrato a numero quadrato, il produtto sempre sarà R.sorda, come R.2 via R.6 fa R.12, come se fossero semplici numeri et perchè da R.2 a R.6 non è proportion quadrata, però R.12 è R.sorda. Ma R.8 via R.32 fa R.256 che 16 è il suo creatore: et questo viene perchè la proprtione fra 8 e 32 è4, cioè partire R.32 per R.8 ne viene R.4, ch'è quadrato, et tutte le rdaici che havranno la sopraddetta proportione faranno numero ratione. Et è da avertire, che tutte le radici, che si moltiplicaranno in se stessa, diventano numero come sarebbe R.5 via R.5 fa 5 numero.

E avertiscassi, che questa sorte di Radice si scriverà così RR.q. Ma si deve avertire parimente, che se si havesse a trovare il lato quadroquadrato d'un numero quadrato (come sarebbe di 36) il suo lato sarà 6, e il lato del lato sarà R.q.6.

Diffinitione della Radice prima relata, over prima incomposta.

La Radice prima Relata è il lato relato di un numero non relato; il qual'è impossibile poterlo nominare: però si chiama Radice relata, come sarebbe, se si havesse a pigliare il lato relato di 40, che non vuol dire altro che trovare un numero di cui il quadroquadrato moltiplicato nel suo lato faccia 40, ch'è impossibile trovarlo, per essere il 40 numero non relato, perciò esso lato relato si direbbe esser Radice relata 40. Avertendosi, che questa sorte di Radice si scriverà così R.p.r.

Diffinitione della Radice quadrocubica, o cuboquadrata.

LA Radice quadrocubica, o cuboquadrata è il lato cuboquadrato di un numero non cubo quadrato, il qual'è impossibile poterlo nominare: però si chiama Radice cuboquadrata, come se si havesse a pigliare il lato cuboquadrato di 28, che non vuol dire altro, che trovare un numero; di cui il cubo moltiplicato in se stesso faccia 28, ch'è impossibile trovarlo, per essere il 28 numero non cubicoquadrato: perciò esso lato quadrocubico, si direbbe esser Radice quadrocubica 28, e avertiscasi, che questa sorte di Radice si scriverà così R.q.c. E si avertisca parimente, che se si havesse a trovare il lato quadrocubico di un numero cubo, come sarebbe, Di 8 il lato cubico è 2, e il lato quadrato di 2 è R.q.2, però il lato quadrocubico di 8 sarà R.q.2; E se si avesse a trovare il lato quadrocubico di un numero quadrato, come sarebbe di 16, il lato quadrato di 16 è 4,

e il lato cubico di 4 è R.c.4. Perrò il lato quadrocubico di 16 sarà R.q.c.4.
E benchè siano altre sorti di Radici, le quali rarissime volte accadono, nondimeno nō ne trattarò, riserbandomi a parlarne a suo luogo; delle quali per non havere a replicare le loro abbreviature porrò qui sotto tutte quelle, che occorranno in questo primo libro.

Radice quadrata - R.q.
Radice cubica - R.c.
Radice quadroquadrata - RR.q
Radice prima incomposta, over relata - R.p.r
Radice quadrocubica - R.q.c
Radice seconda incomposta, over seconda relata - R.s.r
Raduce quadrata legata con le quantità fra li dui ⌞⌟ - R.q.⌞⌟
Raduce cubica legata con le quantità fra li dui ⌞⌟ - R.c.⌞⌟

Avertimenti.

- Numero quadrato moltiplicato per numero quadrato, il suo prodotto sempre sarà quadrato.

Essempij

Se si moltiplicherà 4 ch'è numero quadrato via 9 pur numero quadrato, il produtto sarà 36 che anco egli è numero quadrato: et 9 via 16, fa 144, che tutti tre sono quadrati: et similmente 4 via 16, 64, che pur sono quadrati. Et così sempre faranno questo medesimo effetto.

- Numero quadrato partito per numero quadrato il suo avenimento sempre serà quadrato.

Essempij.

Se[SE] si partirà 16, ch'è numero quadrato per 4, che e numero quadrato, ne verrà 4, ch'è similmentente numero quadrato, 144 è numero quadrato partito 9 numero quadrato, ne verra 16 16 numero anco egli quadrato: benchè paia questa propositione sia superflua: perchè solo saria bastato quella quella della multiplicatione: per essere il multiplicare, et partire la pruva l'un de l'altro: Non dimeno a maggior intelligentia di chi legge, non so voluto lasciare di ponerla.

- Numero quadrato moltiplicato per numero non quadrato il produtto mai sarà quadrato.

Essempij.

Se si moltiplicarà 9 numero quadrato via 6 numero non quadrato: fa 54 numero non quadrato: et così 36, ch'è quadrato, via 12 non quadrato, fa 432, ch'è numero non quadrato: *Et procedendo così generalmente mai fallisce quest'ordine.*

- Numero non quadrato partito numero quadrato l'avenimento mai sarà quadrato

Essempij.

Se si partirà 36, ch'è numero quadrato per 18 non quadrato, lo avenimento sarà 2 numero non quadrato*: et così sempre farà ne l'operationi*

- Numero non quadrato partito numero quadrato l'avenimento mai sarà quadrato.

Essempij.

Partisi 72 numero non quadrato per 9 numero quadrato, lo avenimento sarà 8 numero non quadrato*: et così sempre riuscirà:* et questi due avenimenti si potevano tacere; ma si sono posti come di sopra è detto per più chiarezza:perchè chi intende bene il moltiplicare, sa che il moltiplicare, e il partire sono la prova l'uno del'altro.
Se due numeri non quadrati moltiplicati insieme faranno numero quadrato: detti dui numeri saranno in proporzione l'uno all'altro, come da numero quadrato, a numero quadrato, cioè se si partirà il maggiore per il minore, overo il minore per il maggiore: sempre ne verrà numero quadrato, come per essempio, 2, e 8 moltiplicati l'uno via l'altro fanno 16 numero quadrato, e a partire 8 per 2, et 2 per 8 ne viene 4 e $\frac{1}{4}$, che l'uno, e l'altro è quadrato. E questi avertimenti saranno di grande utilità, a chi li saprà applicare; perchè questi, che si sono posti per li numeri quadrati, servono ancora per tutte l'altre sorti de numeri.

Moltiplicare di Radici con Radici

Volendosi moltiplicare Radice con Radice: bisognia moltiplicarle semplicemente come se fossero numeri, è il suo prodotto sarà Radice quando intra di loro non sarà proportione come da numero

quadrato a numero quadrato, ma quando sarà proportione intra di loro: come tra numero quadrato e numero quadrato il suo prodotto all'hora sarà numero come R.q.2 via R.q.6 fa R.q.12, e perchè da R.q.2 a R.q.6 non è proportione, come da numero quadrato a numero quadrato, però R.q.12 è Radice, che non ha lato, ma R.q.8 via R.q.32 fa R.q.256, di cui 16 è il lato, è questo procede, perchè la proportione fra 8 e 32 è quadrupla, cioè a partire 32 per 8 ne viene 4, ch'è quadrato. E tutte le Radici q., che haveranno la sopradetta proportione farannonumero. Ed è da avertire, che tutte le Radici q., che si moltiplicheranno in se stesse doventano numero, come sarebbe R.q.5 via R.q.5 fa 5 numero.

Moltiplicare di Radici q. via numero,
overo numero via Radici, ch'è il medesimo.

A moltiplicare 4 via R.q.20. Bisogna nel moltiplicare et partire ridurre tutte le quantità a una natura, e perchè R.q.20 è R.sorda, che non ha lato non si può ridurre a numero; riduchisi il numero a Radice, e ridurre il numero a R.q.è quadrarlò: però 4 ridotto a R.q. fa R.q.16, che moltiplicato via R.q.20 fa R.q.320: e moltiplicare R.q. via numero mai farà numero; *come per la quarta propositione s'è detto. Et per maggiore eleganza* ne ponerò più essempij.

Modo di partire Radici per numero, overo numero per Radici, ch'è tutto un procedere

Havendosi a partire numero per Radici, o Radici per numero: bisogna ridurre tutte due le quantità a una natura: come si è detto nel moltiplicare. Perche se si haverà a partire da 10 per R.5, si de ridure 10 a R.q. che fa R.q.100, e partasi per R.q.5, ne viene R.q.20, come se fussero numeri semplici. Et è da avertire, che nel moltiplicare, et partire di Radici si procede, come nelli numeri, mà sempre li prodotti, et avenimenti sono Radici: et per più chiarezza, come si è fatto del moltiplicare; si porranno qui sotto questi essempij.

7 via R.q.5
7
R.q.49 via R.q.5: fa R.q.245

9 via R.q.13
9
R.q.81 via R.q.13: fa R.q.1053

6 via R.q.10
6
R.q.36 via R.q.10: fa R.q.360

5 via R.q.18
5
R.q.25 via R.q.18: fa R.q.450

Partasi R.q.7 per 5
5
Partasi R.q.7 per R.q.25, ne viene R.q. $\frac{7}{25}$

Partasi 22 per R.q.13
22
Partasi R.q.484 per R.q.13 ne viene R.q.37 $\frac{3}{13}$

Partasi R.q.24 per 6
6
Partasi R.q.24 per R.q.36 ne viene R.q. $\frac{2}{3}$

Partasi R.q.12 per 2
2
Partasi R.q.12 per R.q.4 ne viene R.q.3

Sommare di Radici con numero.

Lo sommare, **over raccogliere di R.q.** con numero non si può fare se non per via del più, come sarebbe se si havesse a sommare 4 con R.q.7, bisogna dire 4 + R.q.7 ma perchè il numero è maggiore di R.q.7 ponendo il minore innanzi, potrebbe nascere confusione a uno, che non fusse molto pratico nel partire de Binomij, e Residui, però pongasi sempre il maggiore innanzi, et non importa, o sia il numero, o sia la Radice: che per più chiarezza, se ne metteranno quì sotto questi essempij. Et prima 4 con R.q.20 fa R.q.20 + 4, 6 con R.q.2 fa 6 + R.q.2, R.q.5 con 3 fa 3 + R.q.5. E questi composti si chiamano Binomij, ch'è tanto, quanto quantità composta di due nomi; le nature de quali se si diranno più innanzi. Et è da notare, che tutte le quantità dove non sarà segno di meno, sempre s'intendono più.*: et questa è cosa degna di assai consideratione nell'operare.*

Somma di Radice con Radici

Lo sommare di Radici con Radici è più difficile di alcun'altro de gli atti sopradetti, et nelle Radici quadrate si può procedere in quattro modi, de quali tre ne sono generali a qual si voglia sorte di Radici, o Cube, o Relate, o a quale altre sorte si sia; e l'altro non serve, se non a dette quadrate: de quali il primo è, che si moltiplicano le due Radici, che si hanno a sommare l'una via l'altra, et se il prodotto sarà quadrato, se ne piglia il lato, e quello si moltiplica sempre per 2, et si giunge con la somma delli quadrati delle due Radici, che si haveranno a sommare, e della somma si piglia il lato, il quale sarà la somma di dette due Radici, et se la multiplicatione dell'una nell'altra non farà numero quadrato: tali Radici non si potrànno sommare, se non per la via del più, come detto di sopra del sommare di numero et Radici, come sarebbe R.q.6 e R.q.3 che moltiplicate l'una via l'altra fanno R.q.18; et perchè 18 non è quadrato, tali Radici non si possono sommare, ma si dirà R.q.6 + R.q.3. Sommandosi R.q.12 con R.q.3, bisogna moltiplicare R.q.3 con R.q.12 che fa R.q.36: il suo lato è 6, che duplicato fa 12; il quale gionto con il quadrato delle due radici, ch'è 15, cioè il quadrato di R.q.12 et il quadrato di R.q.3, che aggionti insieme fanno 15, e questa parte aggionta col dupplicato di 6 lato sopradetto, ch'è 12, farà 27, del quale pigliatone il lato sarà R.q.27, et tanto è la somma di R.q.12, con R.q.3: et oltra di questo qui di sotto saranno gl'infrascritti essempij*: Et prima.*

	R.q. 15	con		R.q. 135
	135			R.q. 15
Somma	150			R.q.2025
	90		lato	45
Somma	R.q.240			2
			dupplicato	90

Questo modo è quello, che non è generale: ma serve solamente a questa sorte di Radici.

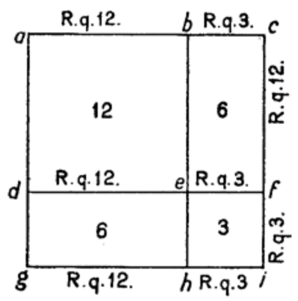
	R.q.32	con		R.q. 2
	2			R.q.32
Somma	34			R.q.64
	16		lato	8
Somma	R.q.50			2
			dupplicato	16

	R.q.20	con		R.q. 5
	5			R.q. 20
Somma	25			R.q.100
	20		lato	10
Somma	R.q.45			2
			dupplicato	20

Dimostratione della detta Regola.

Sia la linea .a.b. R.q.12, e la .b.c. R.q.4 che aggionte insieme direttamente fanno la linea .a.c.; sopra la quale si formi il quadrato .a.i., e facissi .c.f. R.q.12 e .f.i. R.q.3; poi si tiri la linea b.h. paralella alla .c.i. e la linea .d.f. paralella alla .a.c. Hora è manifesto

in suplemmento .d.h. esser 6 per essere la .d.e. R.q.12 e la .h.e. R.q.3, e 6 similmente esser l'altro supplemento .b.f. Il quadrato .b.d., è 12 perchè li suoi lati sono R.q.12 e il quadrato è .i, e 3: perchè li suoi lati R.q.3. Et perchè essi dui quadrati, insieme con li due supplementi sono 27, il quadrato .a.i, ch'è composto di tutti loro sarà anch'egli 27, talche il suo lato .a.c. di necessità sarà R.q.27. E perchè si vede che questo 27 nasce dalla somma delli quadrati di dette R.q.12 e R.q.3 gionta con li due supplamenti, che si causano dalla muotiplicatione di R.q.12, in R.q.3; di qui ne nasce la regola sopradetta che per sommare le dette due R.q.proposte si deve pigliare il lato della moltiplicatione, o produtto loro, e doppiato giongerlò con li quadrati d'esse R.q.,e della somma pigliarne la R.q., quale sarà la somma delle dette due R.q.proposte.



Sommare di Radici con Radici secondo modo.

Sommissi R.q.5, con R.q.45. La regola sua è partire la maggiore per la minore; e se lo avenim**ent**o sarà quadrato, se nè piglia il suo lato, e vi si gionge 1 per regola, et quello, la somma si deve ridurre a Radice, et moltiplicarla via la Radice menore, che fù partitore, come a partire R.q.45, per R.q.5, ne viene R.q.9; e si piglia il suo lato *che* è 3, aggiongaseli 1 **per regola**: fa 4, et questo 4 moltiplicato via R.q.5, ch'è la minore: fa R.q.80, ch'è la somma di dette due Radici. Et per mostrare, come si ha da procedere, quando nasce rotto; ne ponerò un'altro essempio. Sommisi R.q.12 con R.q.27; pertendo la maggiore per la menore ne viene R.q.$2\frac{1}{4}$; et il suo lato sarà $1\frac{1}{2}$, il quale bisogna ritrovare in questo modo: riduchisi tutta la quantità a rotto, cioè $2\frac{1}{4}$; ne vien $\frac{9}{4}$ del quale si piglia il lato del numero di sopra, et il lato di quello di sotto ciascuno da se, che l'uno sarà 3, e l'altro 2 che saranno $\frac{3}{2}$, ch'è $1\frac{1}{2}$: et notisi, che quando detto rotto tanto di sopra quanto di sotto non sarà quadrato **(essendo ridotto alla menor denominatione)** tal rotto non haverà lato: et tali Radici non si potrànno sommare, se non per via del più (come è detto ne sani). Et a $1\frac{1}{2}$, giongasi, (come si fece di sopra) fa $2\frac{1}{2}$, che moltiplicato con R.q.12 fa R.q.75, e tanto sommano. Et questo è necessario tenere bene a memoria per rispetto dell'operare de rotti.

Dimostratione della soprascritta Regola.

Sia la linea .a.b. R.q.45; e se egli gionga in longo la .b.c. che sia R.q.5, dividisi la .a.b. per la linea .b.c. ne viene 3: però dividasi .a.b. in tre parti eguali, cioè in .a.d., .d.e., et .e.b. che ciascuna di loro sarà R.q.5; adunque la .a.c., sarà quattro volte R.q.5, cioè R.q.80; e perchè .a.b. è tre volte R.q.5: però si gionge a la unità 3: e la somma si moltiplica per R.q.5; che il produtto è R.80. E questa dimostratione serve anco alla seguente terza regola: perchè tanto fa a moltiplicare .a.b. cioè R.q.45 per 1 $\frac{7}{9}$; quanto .b.c., cioè R.q.5 per 4.

Sommare di Radici con Radici terzo modo.

Sommisi R.q.12, con R.q.108; Partisi la menore per la maggiore, ne viene $\frac{1}{9}$; il suo lato è $\frac{1}{3}$, e per regola giongaseli 1: fa 1 $\frac{1}{3}$, e questo si moltiplichi via la maggiore; cioè, via R.q.108, e riduchisi 1 $\frac{1}{3}$ a R.q.: fa R.q.1 $\frac{7}{9}$ che moltiplicato via R.q.108: fa R.q.192: e tanto è detta somma.

Sommare di Radici con Radici quarto modo.

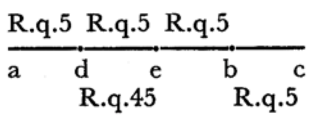
Questo modo è commodissimo per le Radici di gran quantità, e si schifa sempre il rotto (come sarebbe) R.q.27, con R.q.12, partisi prima la menore per meno fastidio per una Radice, che lo avenimento habbia lato, al che

Partitore	R.q.18		con R.q.98
R.q.2	R.q. 9		R.q.49
	lato 3		lato 7
	Somma loro	10	
		10	
	R.q.	100	
	Partitore R.q.	2	
	Somma R.q.	200	

Partitore	R.q.45		con R.q.125
R.q.5	R.q.9		R.q. 25
	lato 3		lato 5
	Somma loro	8	
		8	
	R.q.	64	
	Partitore R.q.	5	
	Somma R.q.	320	

Radici q.3 sarà a proposito, e ne verrà R.q.4, che ha lato. E R.q.27, ch'è la maggiore partita, pur per detto R.q.3, ne viene R.q.9 che ha anch'ella lato, delli quali 4, e 9 se ne pigliano li lati; che sono 2, e 3, e si gionghino insieme: fanno 5, che moltiplicati per R.q.3, partiore commune: fra R.q.75. Et per più intelligenza quì sopra si sono posti questi essempij.

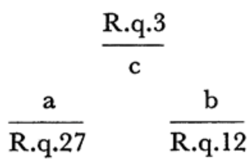
Questo è il più breve modo, che si possa usare, e serve a tutte le sorti di



Radici: ma quando nelle due Radici,che si hanno da sommare: si troverà un partitore alla minore, over maggiore, di cui ne venghi numero quadrato, e partita l'altra per il medemo numero, non ne venghi numero quadrato: tal Radici non si possono sommare se non per il mezzo del più (come sarebbe) R.q.12, e R.q.24 le quali partite per R.q.3, che ne viene R.q.4 e R.8, de quali 4 ha lato: e il 8, non l'ha, però tali Radici non si possono sommare, se non per via del più (come si è detto sopra). E perchè assai volte accadde nell'operare (e massime in Geometria) havere a sommare più di quantità di Radici, per fuggire le longhezze: si deve operare con questo ultimo modo (come sarebbe); se si havesse a sommare R.q.8, R.q.50, e R.q.72. Trovasi il partitore di una Radice, che ne venga Radice, che habbia lato, e partansi tutte l'altre per il medesimo, e se verranno Radici, che habbiano lato: somminsi tutti i lati insieme, e la somma si riduchi a Radice, e si moltiplichi via il partitore, et il produtto sarà la somma di tutte quelle Radici (come le proposte) che sono R.q.8, R.q.50, e R.q.72; che partite per R.q.2 ne viene R.q.4, R.q.25 e R.q.36; e li suoi lati sono 2,5 e 6: quali gionti insieme: fanno 13, che ridotto a R.q., è R.q.169; e moltiplicato via R.q.2, partitore: fa R.q.338; e tanto è la somma delle sopraddette tre Radici. Somminsi R.q.8, R.q.32 e R.q.48. Partasi R.q.8 + R.q.2, ne viene R.q.4 e R.q.32, ne viene R.q.16, e R.q.48, ne viene R.q.24: però non si possono sommare se non per R.q.8, e R.q.32, che fanno R.q.72, la quale gionta con R.q.48: fa R.q.72 + R.q.48.

Dimostratione di questa Regola.

Sia la linea .a.R.q.27, e la .b.R.q.12, da sommarsi insieme, e sia la loro commune misura la linea .c., qualsia R.q.3: e perchè a partire R.q.27, per R.q.3, ne viene R.q.9, cioè 3, è manifesto la linea .a. essere tre volte la .c. et perchè la linea .b. cioè R.q.12, è due volte la linea .c., però le due linee .a. et .b. insieme, sono cinque volte la linea .c., però moltiplicando R.q.3, commune misura, per 5, ne verrà R.q.75 per somma di dette due R.q.27, et R.q.12; però da questo nasce la sopradetta regola. Et parendomi questo a bastanza quāto al Sommare: verrò hora alla pratica del Sottrare.



Sottrare di Radici, e numero.

LO Sottrare di Radici, e numeri non si può fare se non per via del meno, per essere quantità di diversa natura (come sarebbe) a cavare 4 di R.q.18, non si può dire altrimente, che R.q.18 − 4, etcosì R.q.18, di 6, si dirà 6 − R.q.18, et se dicesse 4 di R.q.8 si dirà R.q.8 − 4. Et questo non è come il sommare, che si mette la maggior quantità prima, ma bisogna mettere per ultima la parte, che si cava.

Sottrare di Radici.

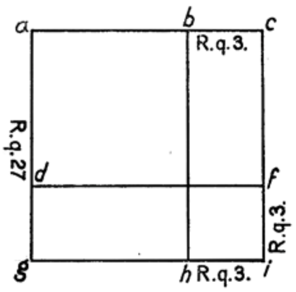
Il sottrare di Radici si può fare in quattro modi come nel sommare, e hanno tutte quelle medesime proprità, però non mi estenderò in parole, ma verrò a gli essempij, e prima: Se si haverà a cavare R.q.3, di R.q.27, moltiplichisi l'una via l'altra: fa R.q.81, et di questo si trovi il lato, ch'è 9, quale si raddoppij per regola: fa 18, e questo si cavi della somma delli quadrati delle due Radici, ch'è 30, così resta 12, e di questo pigliatone il lato sarà R.q.12 e R.q.12, resta a cavare R.q.3 di R.q.27. Et è da avertire, che quando l'81 non havesse havuto lato, tali Radici non si sarian, cavata l'una dell'altra, ma si saria detto R.q.27 − R.q.3, et quì di sopra si vedranno gli infrascritti essempij.

Cavasi	R.q. 48	di	R.q. 75
	R.q. 75		R.q. 48
	123		R.q.3600
	120		lato 60
			2
Resta	R.q. 3		120

Cavasi	R.q. 24	di	R.q. 96
	R.q. 96		R.q. 24
	120		R.q.2304
	96		lato 48
			2
Resta	R.q. 24		96

Dimostratione della soprascritta Regola.

Sia la linea .a.c, R.q.27, della quale se ne habbia da cavare la linea .b.c., qual sia R.q.3, per sapere lo restante sopra la linea .a.c. facciasi il quadrato .a.i., e in quello si tiri la linea .b.h. paralella alla .c.i., et dipoi faccisi .i.f. R.q.3, e si tiri la linea .f.d. paralella alla .a.c., e perchè si sa, che il quadrato .a.i., è 27, per essere la linea .a.c. R.q.27, del quale levandosene il gnomone .b.i.d., e per sapere quanto sia detto gnomone, havendo noto la .b.c., ch'è R.q.3, e la .c.i, R.q.27, il paralellogramo .b.i. sarà R.q.81, cioè 9; per havere il paralello .d.h. si piglierà tutto il paralellogramo .d.i. il qual è 9, per essere pari al paralellogramo .b.i, del quale levandosene il quadrato .h.i.f., il qual è 3 per essere ciascuno suo lato Radici q.3, resterà il paralellogramo .d.h. ch'è 6, che gionto col paralellogramo .b.i, ch'è 9: fa 15, esso gnomone dunque, .b.i.d., sarà 15, che levato del quadrato .a.i., ch'è 27, resta 12 per il quadrato .a.b.d., et essendo esso quadrato 12, il suo lato sarà R.q.12 et essendo .a.c. R.q.27 et .b.c R.q.3 et .a.b. R.q.12, adunque .a.b. con .b.c. fa R.q.27, et per contrario .a.c., ch'è R.q.27, levandone .b.c., ch'è R.q.3, resta .b.a. ch'è R.q.12, e perchè nella regola posta si piglia il produtto dell'uno nell'altra, che viene ad essere il paralellogramo .b.i., e si doppia per il paralellogramo .d.i. e così si viene a porre due volte il quadrato .h.i.f. Però al quadraro .a.i. se gli gionge il quadrato .h.i.f., e se ne levano i dui paralellogrami .b.i. e .i.d. e resta il quadrato .d.a.b.

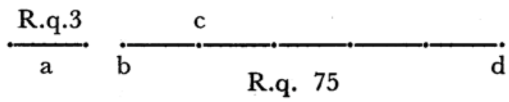


Sottrare Radici di Radici secondo modo.

Partasi la maggiore per la minore, e dello avenimento si pigli il lato, e di esso lato per regola sempre si cavi .i. et il restante si riduca a R.q.e si moltiplichi via la minore, e il produtto sarà il restante della sottartione. Avertendosi però, che se l'avenimento, che nasce dal partire la maggiore per la minore non havrà lato: tali due Radici non si potrànno sottrare, se non per la via del meno (come saria) a cavare R.q.2. di R.q.10, che partendo la maggiore per la minore, ne viene R.q.5, quale non ha lato: Però R.q.2 non si può cavare di R.q.10; ma si dirà R.q.10 − R.q.2. Et a cavare R.q.10 di R.q.90 partendo la maggiore per la minore ne viene R.q.9, il suo lato è 3, che cavatone .i. per regola (come si è detto di sopra) resta 2, che ridotto a R.q.fa R.q.4, che moltiplicato per la minore, cioè per R.q.10: fa R.q.40, et tanto e il restante.

Dimostratione della soprascritta Regola.

Sia la linea .a. R.q.3, che si habbia da cavare della linea .b.d., qual sia R.q.75. Partasi la maggiore per la minore ne viene R.q.25, di cui il lato è 5, adunque la linea .b.d. è cinque volte quanto la .a. però di essa .b.d., levatone la .a. lo restante .c.d., sarà quattro volte quanto la .a. però moltiplicato R.q.3, per 4, il prodotto ch'è R.q.48 sarà la c.d., R.q.48 resta a cavare R.q.3, di R.q.75. E questa dimostratione serve anco alla seguente terza regola, perchè tanto fa a moltiplicare R.q.3, per 4, quanto R.q.75, per $\frac{4}{5}$.



Sottrare Radici di Radici terzo modo.

Partasi la minore per la maggiore: e dell'avenimento si pigli il lato, quale si cavi d'1, per regola, et il quadrato del restante si moltiplichi per la maggiore. Essempio: Cavisi R.q.12, di R.q.192. Partasi la minore per la maggiore, ne viene R.q.$\frac{1}{16}$: il suo lato è $\frac{1}{4}$; che cavato di 1, resta $\frac{3}{4}$: il suo quadrato è $\frac{9}{16}$: che moltiplicato per R.q.192: fa R.q.108, e tanto resta a cavare R.q.12, di R.q.192.

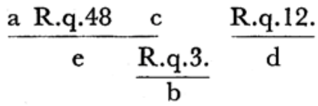
Sottrare Radici di Radici quarto modo.

Partasi la minore per una Radice, che ne venga Radice che habbia lato, e poi partasi la maggiore per la medesima Radice trovata, e se l'avenimento non haverà lato: tali due Radici non si possono sotrare se non per via del meno (come sarebbe) R.q.18, di R.q.24, che il partitore di R.q.18, sarà R.q.2, che ne verrà R.q.9, (che il suo lato sarà 3, et a partire la maggiore ch'è R.q.24, ne viene R.q.12, il quale non hà lato, e però tali R.q.non si possono sottrare, ma si dirà R.q.24 − R.q.12. ma se si havesse a cavare R.q.18 di R.q.162, il partitore della minore sarà R.q.2, che ne viene R.q.9, che il suo lato è 3, et a partire la maggiore per detta R.q.2 ne viene R.q.81, che il suo lato è 9, che cavato il 3, resta 6, quale ridutto a R.q.fa R.q.36, che moltiplicato via R.q.2 partitore, fa R.q.72, et tanto resta a cavare R.q.18 di R.q.62.

Dimostratione della soprascritta regola.

Sia linea .a.c. R.q.48, et la linea .d. R.q.11, et il commune partitore sia la .b. et sia R.q.3 che partito .a.c. per R.q.3, ne vien R.q.16 che il suo lato è 4; adunque la .b. misura quattro volte la .a.c. e partito la .d. per R.q.3 ne viene R.q.4 che il lato è 2, et però la .b. misura due volte la .d., per che la .a.c. è maggiore della .d., quanto è il restantte di 2, a 4, cioè due volte, et però moltiplicando R.q.3 ch'è la commune misura per 2, ne verrà R.q.12, che tanto è maggiore la .a.c. della .d., però a cavare la .d. della .a.c. il restante .e.c. sarà R.q.12. Et avendo fin quì detto a bastanza di qeusti quattro atti delle Radici quadrate, verrò all'operatione delle Radici cube cominciando del moltiplicare.

Moltiplicare di R.c. intra di loro.



Il moltiplicare R.c. è come moltiplicare numero con numero, ma il suo produtto sarà R.c. (come sarebbe) R.c.4, via R.c.12 fa R.c.48 e R.c.5 via R.c.20 fa R.c.100, **ma può fare ancora numero (come sarebbe) R.c.5, via R.c.25 fa R.c.125, che il suo lato cubo è 5, et R.c.2, via R.c.32, fa R.c.64, che il suo lato cubico è 4,** et per essere operatione molto chiara non se ne darà altro essempio.

Moltiplicare di Radice cuba via numero.

Avendosi a moltiplicare R.c. via numero, perchè sono di diversa natura, nè potendosi ridurre la R.c. a numero, riducasi il numero a R.c.(come sarebbe) R.c.4, via 3, riducasi il numero a R.c, cioè il 3 fra R.c.27; il quale moltiplicato per R.c.4 fa R.c.108, [7] et questo sarà il produtto della multiplicatione, et R.c.18 via 2, fa R.c.144, et il produtto di R.c. che non habbia lato con numero mai farà numero, perchè saria contra gli avertimenti, che numero cubo via numero non cubo faccia numero cubo, perchè il numero ridotto a R.c. è sempre numero cubo.

Partire di R.c. per R.c.

Volendosi partire R.c. per R.c. si procede (come fu detto nel moltiplicare) che si parte come se fussero semplici numeri, et lo avenimento è R.c.(come sarebbe) R.c.50, partita per R.c.5, ne viene R.c.10, et R.c.32, per R.c.4, ne viene R.c.8, che il suo lato è 2.

Partire di R.c. per numero, overo numero per R.c

[7] et questo sarà il produtto della moltiplicatione, et notasi che quando si dirà R.c. indiscreta quella tal Radice che non ha Creatore lato et a moltiplicare R. indiscreta via numero mai farà R. c'habbia numero.

Quando accaderà partire Radice cuba per numero, si ridurranno ambedue le quantità a una natura (come si è detto del moltiplicare) et poi partasi semplicemente, et lo avenimento sarà Radice c., come se si havesse a partire 10 per R.c.25, il numero ridotto a R.c. sarà R.c.1000; il quale partito per R.c.25, ne viene R.c.40, e similmente chi havesse a partire R.c.72, per 2, riducasi il 2 a R.c. fa R.c.8, che partito R.c.72, per R.c.8, ne viene R.c.9, **et a partire R.c., per numero, overo numero per R.c.non ne può venire numero per la ragione detta nel moltiplicare.**

Sommare di R.c. con numero.

Lo sommare R.c.con numero non si può fare se non per via del piu, per essere di diversa natura (come fu detto nelle quadrate) come saria R.c.2, con 6, fa 6, più R.c.2, et 1 con R.c.18,fa R.c.18 + 1, ma avertiscasi di ponere sempre la maggiore quantità prima, perch'è meglio, benchè non importi, come nelle quadrate.

Sommare di Radice cuba con R. cuba.

Lo sommare di R.c.non si può fare se non nelli tre ultimi modi posti nelle quadrate.
Il primo sarà partire la maggiore per la minore, et dello avvenimento pigliarne il lato cubico, e aggiongerli 1 per regola, etil cubato della somma moltiplicarlo via la minore; et il produtto è la somma addimandata, come sarebbe se si havesse a sommare R.c.2, con R.c.16, partasi la maggiore per la minore, ne viene R.c.8, che il suo lato cubico è 2, al quale si gionga 1 per regola, fa 3, il qual si riduce a R.c. et fa R.c.27, il qual si moltiplica via la minore, cioè R.c.2, et fa R.c.54, qual'è la somma di dette due Radici, et se ne partire la maggiore per la minore l'avenimento non haverà lato cubico: tali Radici non si potrànno sommare, se non per via del più (come fu detto nelle quadrate) et per essempio, se si havesse a sommare R.c.24 con R.c.72 (che partito la maggiore per la minore, ne viene R.c.3 che non ha lato cubico). Però si dirà, che la somma loro sia R.c.72 + R.c.24.

Il secondo modo è partire la minore per la maggiore, et dello avenimento pigliarne il lato, e aggiongerli 1 per regola et il cubato della somma moltiplicarlo via la maggiore, et il produtto sarà la somma delle due Radici proposte; (come per essempio) se si haverà a sommare R.c.6, con R.c.162, partasi la minore per la maggiore, ne viene R.c.$\frac{1}{27}$ piglisene il lato, ch'è $\frac{1}{3}$ al qual se gli gionge 1 per regola, e fa 1 $\frac{1}{3}$ et il suo cubato è R.c.2 di $\frac{10}{27}$ il quale moltiplicato via la maggiore fa R.c.384, ch'è la somma delle due Radici cube proposte.

Et perchè si è detto, che il lato cubico di $\frac{1}{27}$ è $\frac{1}{3}$ nè si è detto il modo di pigliarlo, hora lo pongo, che sarà questo. Si piglia il lato cubico del numero sopra la vergola: il qual'è 1, et ponendosi sopra una vergola a questa guisa $\underline{1}$ parimente si piglia il lato cubico del 27 posto sotto la vergola, ch'è 3, et si mette sotto, è fa $\frac{1}{3}$, il qual'è lato cubico di $\frac{1}{27}$ et il lato cubico di $\frac{8}{125}$ è $\frac{2}{5}$, perchè il lato di 8 è 2, et il lato di 125 è 5, ma se del rotto, di cui se ne deve pigliare il lato, l'uno delli numeri havesse lato, e l'altro no: tal rotto non haverà lato, (come sarebbe) $\frac{8}{25}$ che l'8 hà il lato, ma 25, no, et parimente $\frac{6}{125}$ che il 125 hà lato, ma il 6 non l'ha, et maggiormente li rotti non haveranno lato, quando nessuno delli numeri sarà cubo, purchè il rotto sia ridotto alla minore denominatione, (come sarebbe) $\frac{16}{250}$, che nè l'uno, nè l'altro hà lato, ma schiffato il rotto col partir l'una et l'altra parte per 2, ne viene $\frac{8}{125}$, che l'uno, et l'altro hà lato. Et se l'uno delli numeri sarà partito per un numero, che ne venghi numero cubo, et l'altro partito per il medesimo numero et non ne venghi numero cubo, tal rotto non haverà lato, come sarebbe $\frac{24}{96}$ che partito il 24 con il 96, per 3, ne viene $\frac{8}{24}$, che l'8 è numero cubo, et il 24 non è cubo, et se si havesse $\frac{24}{192}$ che partiro l'uno, e l'altro per 3, ne viene $\frac{8}{64}$ che lo 8, et il 64, ciascuno è numero cubo, et in questo caso non accade venire a l'ultima denominatione.

Il terzo, et ultimo modo è trovare un partitore commune a tutte due le R.c. et che ne vengano due R.c. che ciascuna habbia lato, (come sarebbe) R.c.16 con R.c.54 che il suo partitore sarà R.c.2, che partendo R.c.16 ne viene R.c.8, che il suo lato è 2, e di R.c.54 ne viene R.c.27, che il suo lato è 3, et gionti tutti dui li lati insieme, fanno 5, che ridutto a R.c.fa R.c.125, il quale moltiplicato via R.c.2, partitore, fa R.c.250, et questa è la somma R.c.16, et R.c.54 et quando alle due R.c.che si hanno da sommare, si sarà trovato un partitore, che di una ne venga R.c.che habbia lato, et dell'altra no; tali due Radici non si possono sommare se non per via del più (come si è detto di sopra) et per essempio. Se si havesse a sommare R.c.16 con R.c.24, che il partitore sarebbe R.c.2, et ne verriano R.c.8, et R.c.12, che una hà lato, et l'altra no; che (come si è detto) non si possono sommare se non per via del più: però la somma sarà R.c.24 + R.c.16. Et perchè assai volte accade havere a sommare più R.c. insieme, tengasi il modo, che fù insegnato nelle quadrate, che tutte quelle, che saranno partite per un medesimo partitore, et degli avenimenti pigliati li lati, et gionti tutti insieme, et moltiplicata la somma per il partitore: il produtto sarà la somma delle Radici; **il che fù detto nelle quadrate, come se si havesse a sommare R.c.16, R.c.54, R.c.250 et R.c.432, che partita ciascuno per R.c.2 ne viene R.c.8, R.c.27, R.c.125 et R.c.216; delle quali li lati sono 2, 3, 5, 6, che gionti insieme fanno 16; il quale poi si deve moltiplicare per R.c.2, partitore commune, che fa R.c.8192, et quaeta è la somma delle sudette quattro R.c.delle quali se due, o tre havessero havuto lato cubico, a partirlo per una R.c. e l'altra no, si sarebbono sommate le due, o tre, e l'altra aggionta per via del più,** *et così questi tre modi servono a tutte le sorti di Radici: solo bisogna haver cura, che li lati, che si hanno da pigliare, siano di quella natura, che sono le Radici, cioè se fossero R.c.si pigli il lato cubico, e se fossero R.relate overo prima incomposta, si hà da pigliare il lato relato, et così si ha da osservare in tutte le sorti, et parendomi haver detto a bastanza circa questo atto, verrò a sotrare di esse Radici cube.*

Sottrare Radice cuba di numero, overo numero di Radice cuba.

Quando si haverà, a sottrare R.c.di numero, over numero di Radice cuba, non si può se non dire R.c.men tanto numero, overo numero men tanta R.c.come sarebbe a cavare R.c.5 di 3, si dirà 3 − R.c.5. Et se si havesse a cavare 6 di R.c.300, si dirà R.c.300 − 6, che per la sua chiarezza non se ne porranno altri essempij.

Sottrare R.c. di R.c.

Lo Sottrare di Radici cube si fa pur in tre modi (come è stato detto del sommare). Et quanto al primo si seguita il medesimo ordine, se non, che quello 1, che nel sommare si aggionge, nel sottrare si cava, (come per essempio) se si haverà a cavare R.c.2 di R.c.54, partasi la maggiore per la minore, ne viene R.c.27, il suo lato è 3, del quale cavatone 1 per regola, resta 2, il quale si riduce a R.c.fa R.c.8 et moltiplicato via la minore, ch'è R.c.2, fa R.c.16, ch'è il resto di R.c.2, cavato di R.c.54.

Il secondo modo è partire la minore per la maggiore et dello avenimento se ne piglia il lato cubico, et per regola si cava di 1, et il cubato del restante si moltiplica via la maggiore, et il produtto sarà il resto della sottrattione (come sarebbe) R.c.6, quale si habbia da cavare di R.c.162; partasi la minore per la maggiore, nè viene R.c.$\frac{1}{27}$ che il suo lato cubico è $\frac{1}{3}$ et per regola si cava di 1, resta $\frac{2}{3}$ et questo si cuba, et fa R.c.$\frac{8}{27}$ et si moltiplica per la maggiore, cioè R.c.162, fa R.c.48,et questo e il resto della sottrattione delle due Radici proposte.

L'altro modo è ancoegli come lo sommare, cioè trovare un partitore commune, che faccia due R.c.che habbiano lato, et se ambedui non l'haveranno, non si potrà se non per via del meno cavare l'una dell'altra (come nel sommare accade) e quando ambedue haveranno il lato, si cava il minore del maggiore, e quello che resta si riduce a R.c. e si moltiplica via il partitore (come sarebbe) R.c.81 di R.c.375, che il partitore sarà R.c.3, che partite ambedue, nè verrà R.c.27, e R.c.125, che il lato dell'una sarà 3, e dell'altra 5, e cavato 3 di 5, resta 2, che ridutto a R.c.sarà R.c.8, che moltiplicato per R.c.3, ch'è partitor: farà R.c.24, per il resto della sottratione; *e in tutte l'altre sorti di Radici questi tre modi di sottrare ci servono, ma bisogna havere l'avertimento, che si è detto nel sommare.*

Moltiplicare RR.q. con numero.

Quando si haverà a moltiplicare RR.q. via numero: riduchisi il numero a RR.q. e si moltiplichi (come si è mostrato nelle quadrate, e cube) come sarebbe 3 via RR.q.2, riducasi il 3 a RR.q. che sarà RR.q.81, e moltiplicato via RR.q.2, fa RR.q.162, e così nel moltiplicare RR.q. via RR.q. si procede semplicemente (come è detto).

Moltiplicare RR.q. via R.c.

Se si haverà a moltiplicare RR.q.8, via R.q.5, riduchisi R.q.5, a RR.q. il che si fa col quadrare il numero della Radice: farà RR.q.25, che moltiplicato via RR.q.8, farà RR.q.200, e così si farà nel partire.

Moltiplicare R.q. via R.c.

Avenga che a voler moltiplicare, e partire di due quantità di diverse sorti, bisogna ridurre ciascuna àuna medesima natura, come nel moltiplicare numero via R.q. si riduce il numero a R.q., non si potenddo ridurre la R.q. à numero. Queste due proposte, cioè quadrate e cube, non si possono ridurre, cioè la cuba a quadrata: però bisogna ridurlè a R. cuba quadrata, over quadracubica, e questo si fa con il cubare la quadrata, e quadrare la cuba (come per essempio) Moltiplichisi R.q.2, via R.c.3; cubisi R.q.2, fa R.c.q.8, e quadrisi R.c.3: fa R.c.q.9, che moltiplicata l'una via l'altra, fanno R.c.q.72, e quest'ordine si osservera in tutte le sorti di Radici di diverse specie.

Ma perchè fa bisogno, nell'oprare, molte volte ritrovare il lato di un numero di gran quantità (detto communemente estrattione di Radici), nel che l'huomo non si può servire della memoria: qui porrò il modo di trovare il lato quadrato di qual si voglia numero.

Modo di trovare il lato quadrato di qual si voglia numero. [8]

[8]

Modo di trovare il Creatore de le Radici sorde.

Se si avrà a trovare il Creatore come sarebbe di 5675, facciasi come si vede quì da canto, et sopra il primo caratero si faccia un punto e poi si passa un caratero, et fassi un altro punto, come si vede ne lo essempio, et sotto il numero si tiri la linea .a., sotto la quale si mettono li caratteri, che vanno fino a l'ultimo punto a man manca, che sono 56, di che si trova il Creatore, che gli'è più prossimo, ma che non lo ecceda, il quale sarà 7, che si ha da mettere sopra l'ultimo punto, cioè sopra il punto, ch'è sopra 6. et detto 7 mettasi da banda con un'altro 7 et tirasi la linea .e., moltiplicandosi l'uno via l'altro che fanno 49, che si mette sotto il 56, et tirasi la linea .b. et cavisi il 49 del 56 resta 7, il quale si mette sotto la linea .b.; poi si sommino li due 7 posti sopra la linea .e. fanno 14, che si mette sotto detta linea come si vede: poi si piglia il 7 sotto la linea .a. innanzi il 56 e si mette sotto la linea .b. al pari de l'altro 7, che prima avanzò, che così insieme daranno 77. Hora vedasi questo 14 quante volte entra in 77, che ci entra 5 volte; et questo 5 si metta sopra il primo punto, sotto la linea .b. innanzi a 77 farà 775 et il primo 5 ch'è sopra il punto si mette sotto la line .e. innanzi al 14, et darà 145; et un'altro 5 se gli mette sotto al medesimo 5, che si mise al pari del 14, et moltiplicasi l'un via l'altro, et farà 725, il quae si ha da metter sotto il 775, ch'è sotto la linea .b. et tirando la linea .c. si cava l'un de l'altro resta 50; et sotto il 145 con l'altro 5 si tira la linea .f. et sommati insieme fano 150, et non essendo più lettere sopra la linea .a., la estrazione è finita; et lo avenimento è il 75, ch'è posto sopra li punti, che prima furono segnati, et avanza 50. et per fare il rotto, sommisi 145 con 5 fa 150, et questo si mette sotto il 50, che avanzò et farò $\frac{50}{150}$ che abbassato è $\frac{1}{3}$. Adunque diremo l'aprrossimazione del Creatore di 5675 essere $75\frac{1}{3}$, et questo è per approssimazione, perchè di questo numero non se ne può trovare, per non essere quadrato, il vero creatore: et notasi che mai a quadrare numeri, et rotti non ne verrà numero sano, ma sempre farà numero, et rotto. Il quadrato di $75\frac{1}{3}$ fa $5675\frac{1}{9}$ che viene ad essere di soverchio $\frac{1}{9}$. ma volendosi approssimare più; ci sono più vie: ma solo metterò quella, che a me più piace; a chi non piacerà si serva delle altre, la quale è questo: Giongasi al numero, di che s'ha a pigliare il creatore, due zeri; et se ne vuoi più approssimare, giongene quattro, o sei o otto pure, che sia in quantità di zeri pari, che come più ne aggiongerai, più li approssimerai, come per essempio vedrai quì, dove ve ne sono per brevità aggionti due zeri solamente, che fanno 567500 che pigliato il creatore, come si vede ne la infrascritta figura, ne viene $753\frac{491}{1506}$ et perchè al 1506 si aggionsero due zeri, che fu tanto questo se si fosse moltiplicato per 100: però pigliasi il Creatore di 100, ch'è 10; et partasi $753\frac{491}{1506}$ per 10 ne viene $75\frac{5009}{15060}$, et questo a quadrarlo farà $5675\frac{992871}{2041232400}$ che si vede essere molto più appresso,che non era $75\frac{1}{2}$; e se si aggiongeranno quattro zeri, esempio farà 56750000, che pigliatone il Creatore sarà $7533\frac{3911}{15066}$ et perchè al 5675 vi si aggiunsero quattro zeri, venne ad essere moltiplicato per 10000, che il su Creatore è 100, et però si partirà $7533\frac{3911}{15066}$ che a quadrarlo fa $5675\frac{15295921}{2268843560000}$ qual si vede essere più

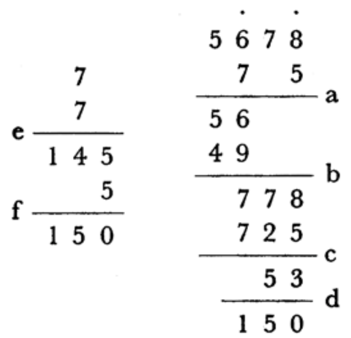
Se si haverà a trovare il lato (come sarebbe di 5678), facciasi come si vede qui de canto. Tirisi la linea .a. tanto lontana, che sotto il numero ci capisca un'altro ordine di carratteri, e sopra l'8 si faccia un punto, e poi venendo a man sinistra, lassando un carrattero nel mezo, e sopra il 6, si faccia un altro punto, e se il numero fosse maggiore: si seguitarà di fare li punti; ma interponendo un punto da un carrattero all'altro, e fatto questo: si ricomencia dall'altro capo a man sinistra andando verso la destra, e si pigliano gli carratteri, che sono fino al primo punto, e si pongono sotto la linea .a., il qual'e 56. Fatto questo, si trova un numero quadrato, e il pù prossimo; ma che non sia maggiore di 56, il quale sarà 49, che il suo lato è 7, il qual 7 si mette sotto il 6, sopra la linea .a., sopra del quale è il primo punto, e dui altri 7 si pongono da canto, sotto li quali si tira la linea .e. poi si somma, che fanno 14, et il produtto delli detti dui 7 l'uno nell'altro è 49, il quale si mette sotto il 56, e si tira la linea .b. e si cava di 56 resta 7, et è finito fino al primo punto. E per seguire avanti; se gli aggionge il 7, ch'è sopra la linea .a. fra il 6, e l'8, e farà 77.
Hora si vede quante volte entra il 14, ch'è sotto la linea .e. nel 77; che vi entra 5; il qual 5 si mette al pari del 14, e dirà 145, et un'altro 5 si mette sotto quello, e si sommano (tirando la linea .f.) e fa 150, et il medesimo 5 si mette sotto l'8, sopra il qual è l'altro punto, e l'8 si mette sotto la linea .b. al pari del 77, e fa 778; sotto il quale se gli mette il produtto di 145 nel 5, che vi è sotto, ch'è 725, e si cava l'uno dell'altro (tirādo la linea .c.) e resta 53, sotto il quale si tira la virgula .d., e se li mette sotto il 150, ch'è sotto

---

prossimo assai, che quello de li due zeri ch'era $5675\frac{992871}{2041232400}$ et cosi, che più se gli vorrà aprossimare aggiongasi più zeri, et tenendo il medesimo ne averà il suo intero.
Avendo detto a bastanza de la frattione, et approssimatione de la Radice sorda venirò ora parimenti giudicando essere a proposito parlarne, a la estratione, et approssimatione de la cuba: Riserbandomi a parlarne de la estrattione, et approssimatione de l'altre Radici a suo luogo, et come altre volte ho detto, acciocchè si leggerà mi possa meglio intendere.

la linea .f. che dirà $\frac{53}{150}$, et è finita la estrattione, over il lato prossimo di 5678, che sarà 75, e $\frac{53}{150}$ che solo saranno differenti tanto, quanto è il quadrato del rotto, cioè $\frac{2509}{22500}$; ma volendo fare, che si sia minor differentia, ne darà la sua regola di sotto, e ancora per più chiarezza, ne porrò un'altro essempio simile a questo, avanti, che si venghi a detta regola.

Habbiasi a pigliar il lato di 5267890134; facciansi li punti (come fu



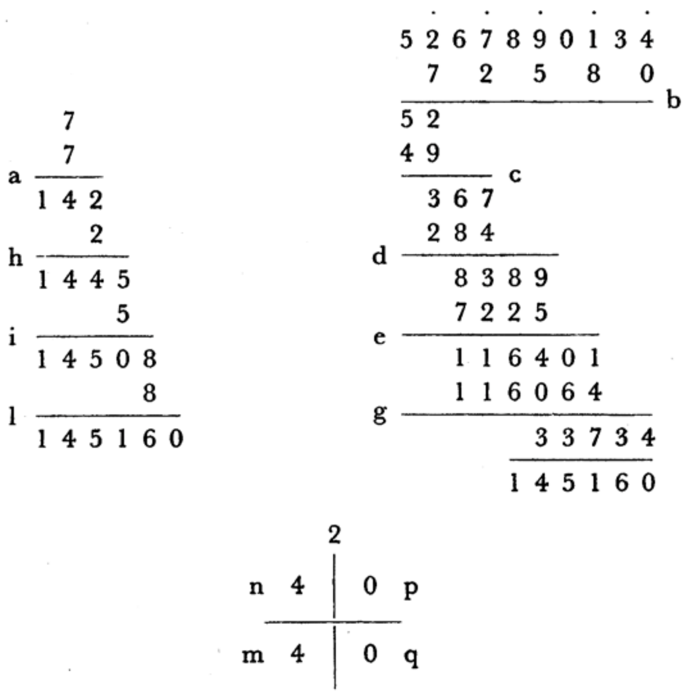
insegnato nella passata) il primo sopra il 4, il secondo sopra al 1, il terzo sopra il 9, il quarto sopra il 7, e il quinto sopra il 2, poi si tiri la linea .b., sotto alla quale si mette il 52, ch'è il numero, il quale gionge fino al primo punto, cominciando a man sinistra, e andādo verso la destra, e poi si cerchi un numero quadrato il più prossimo, che sia al 52, ma che non sia maggiore, il quale sarà 49, e si mette sotto al 52, e si tira la linea .c., e si cava l'uno dell'altro, e resta 3, et il lato del 49, ch'è 7, si mette da parte, e sotto se gli ne mette un'altro, e si tira la linea .a. e si sommano, e fanno 14, e un'altro 7 si mette sotto il 2, sopra il quale è il primo punto, e al 3, ch'è sotto la linea .c. se gli aggionge il 6, ch'è fra il punto del 2, e del 7, fa 36. Hora si vede il 14, ch'è sotto la linea .a. quante volte entra nel 36, ch'è sotto la linea .c., che ci entra 2 volte; però al pari del 14 se gli porrà un 2, sotto il qual 2 se gliene metterà un'altro, e tirata la linea .h. si sommaranno, e faranno144, e un'altro 2 si metterà sotto il 7, sopra il quale è il secondo punto, e al 36, ch'èra sotto la

linea .c. se gli aggiongerà il 7, ch'è sotto il secondo punto, e farà 367, sotto al quale se gli metterà 284 produtto del 142, ch'è sotto la linea .a. moltiplicato nel 2 (che gli sta sotto) e cavandosi, resta 83, et è finito fino al secondo punto. E volendo seguitare avanti al 83, che sta sotto la linea .d., se gli aggionga 8, ch'è quello che seguita il 7 del secondo punto, e fa 838. Hora si vede quante volte ci entra il 144, ch'è sotto la linea .h. che ci entra 5 volte (però al pari del 144, se gli aggiongerà un 5) e farà 1445; sotto il quale se gli mette un'altro 5, e tiratogli sotto la linea .i. si sommano, e fanno 1450, e un'altro 5 si metterà sotto il 9, ch'è sotto il terzo punto, e al 838, che sta sotto la linea .d., se gli aggionge il 9, ch'è sotto al terzo punto, e fa 8389, del quale se ne cava t produtto di 1445, ch'è sotto la linea .h., nel 5, che gli sta sotto, ch'è 7225, resta 1164, ch'è sotto la linea .e.; et è finito fino al terzo punto. E volendo seguir più oltra al 1164 si aggionga il 0 che seguita il 9 del terzo punto, e fa 11640. Hora si vede quante volte ci entra il 1450, ch'è sotto la linea .i., che ci entra 8 volte; però al pari di essi se gli metta 8, che fa 14508, e sotto se gli metta un'altro 8, e si tiri la linea .1. e si sommano, e fanno 14516, e un'altro 8 si metta sotto l'1 ch'è sotto al quarto punto, e al 11640, ch'è sotto la linea .e. se gli aggionge 1 ch'è sotto al quarto punto, che fa 116401 del quale se ne cava il produtto degli 14508, ch'è sotto la linea .i. nel 8, che gli sta sotto, ch'è 116064, resta 337, et è finito fino al quarto punto. E volendo pur ancora seguire, se gli aggionga 3, ch'è quello, che seguita l'l ch'è sotto il quarto punto, e fa 3373. Hora bisogna vedere quante volte ci entra il 14516, che peressere maggiore non ci può entrare; però se gli farà un 0 al pari, e dirà 145160, e un'altro 0 si mettera sotto al 4, ch'è sotto al quinto punto, e al 3373 se gli aggiongerà il detto 4 del quinto punto, fa 33734, e per essere finito, se gli metterà sotto il 145160, ch'è sotto la linea .1. e tiratoci fra l'uno e l'altro la virgola .g., si formarà il rotto; et il lato prossimo del numero proposto sarà

72580 $\frac{33734}{145160}$, e volendone fare la prova (benchè non sia reale, ma rarissime volte fallarà) tenghisi quest'ordine. Facciasi la croce che si vede nella figura, e nella sommità se gli metta 2 prova del 9 di 33734, numero restato. Poi si faccia la prova del 9 di 72580, ch'è 4, e si mette nell'angolo .m. della croce, e un'altro se ne ponga nell'angolo .n. e si moltiplichino l'uno nell'altro, e fanno 16. Poi se gli gionghi il 2, che sta nella sommità della croce, e fa 18, e la sua prova del 9 è 0, e si mette nell'angolo .p. della croce. Poi si piglia la prova del 9 di 5267890134, ch'è 0 e si mette nell'angolo .q. della croce: et essendo eguale l'angolo .p. e l'angolo .q. la estrattione può star bene, ma, non essendo pari, al certo sta male, e benchè tutti gli altri autori habbiano posta tale estrattione con la galera a me e parso non di meno di porla con la danda, perchè si vede più chiaramente, che non fa la galera; benchè per lo intelligente e più leggiadro usare la ga'era che la danda, ma per la difficultà del scriverla, andando cassati I caratteri, che generano confusione a chi non sa, ho posta la danda più per necessità, che per volonta. Hora mi resta dire (come io ho promesso)in che modo si formi il rotto, il quale sarà questo, che seguita.

Modo di formare il rotto nella estrattione delle Radici quadrate.

Molti modi sono stati scritti da gli altri autori de l'uso di formare il rotto; l'uno tassando, e accusando l'altro (al mio giudicio) senza alcun proposito, perchè tutti mirano ad un fine. È ben vero che l'una e più breve dell'altra, ma basta che tutte suppliscono, e quella ch'è più facite, none dubbio ch'èssa sarà accettata da gli huomini, e sarà posta in use senza tassare alcuno; perchè potria essere, che hoggi io insegnassi una regola, la quale piacerebbe più dell'altre date per il passato, e poi venisse un'altro, e ne trovasse una più vaga, e facile, e così sarebbe all'hora quella accettata, e la mia confutata, perchè (come si dice) la esperienza ci e maestra, e l'opra



loda l'artefice. Però mettero quella che più a me piace per hora, e sarà in arbitrio de gli huomini pigliare qual vorranno: dunque venendo al fatto dico, che presuposto che si voglia il prossimo lato di 13, che sarà 3, e avanzera 4, il quale si partirà per 6 (doppio del 3 sudetto) ne viene $\frac{2}{3}$, e questo è il primo rotto, che si ha da giongere al 3, che fa $\frac{2}{3}$, ch'è il prossimo lato di 13, perchè il suo quadrato è 13 $\frac{4}{9}$, ch'è superfluo $\frac{4}{9}$, ma volendosi più approssimare, al 6 doppio del 3 se gli aggionga il rotto, cioè li $\frac{2}{3}$, e farà 6 $\frac{2}{3}$, e per esso partendosi il quattro, che avanza dal 9 fino al 13, ne viene $\frac{3}{5}$, e questo si gionge al 3, che fa 3 $\frac{3}{5}$, ch'è il lato prossimo di 13, di cui il quadrato è 12 $\frac{24}{25}$, ch'è più prossimo di 3 $\frac{2}{3}$, ma volendo più prossimo, si aggionga il rotto al 6 fa 6 $\frac{3}{5}$, e con esso si parta pur il 4, ne viene $\frac{20}{30}$, e questo si aggionga, come si a fatto di sopra al 3 fa 3 $\frac{20}{33}$, ch'è l'altro numero più prossimo, perchè il suo quadrato è 13 $\frac{4}{1089}$, ch'è troppo $\frac{4}{1089}$, e volendo più prossimo, partasi 4 per 6 $\frac{20}{33}$, ne viene [$\frac{66}{109}$, e questo si gionge al 3, che fa 3 $\frac{66}{109}$, ch'è il lato

prossimo di 13, il cui quadrato è 12 $\frac{11877}{11881}$, ma volendo più prossimo, partasi 4 per 6 $\frac{66}{109}$, ne viene] 180, che gionto con il 3 fa 3 $\frac{109}{180}$, e questo è più prossimo del passato, che il suo quadrato è 13 $\frac{1}{32400}$, ch'è troppo $\frac{1}{32400}$, e volendo seguitare più oltre partasi 4 per 6 $\frac{109}{180}$,ne viene $\frac{720}{1189}$, che gionto con 3 fa 3 $\frac{720}{1189}$, e questo è più prossimo del passato, che il suo lato quadrato e 13 $\frac{4}{1413721}$, ch'è troppo $\frac{4}{1413721}$ e così procedendo si può approssimare a una cosa insensibile. Ma solo bisogna avertire, di formare il rotto tre volte, quando il numero, di cui se ne ha da pigliare il lato, e un manco di numero quadrato (come sarebbe 8) che per trovare il suo lato, si cavarà 4 maggior numero quadrato, e resterà 4, che partito per il doppio di 2, lato del numero quadrato, ne verrà $\frac{4}{4}$, che sarebbe 1, il quale gionto col 2 fa 3. Et in questo caso quadrisi il 3 fa 9, del quale cavatone 8 numero di cui se ne ha a pigliare il lato, resta 1, e questo si parte per 6, doppio del 3, ne viene $\frac{1}{6}$ i1il qual rotto si cava del 3, e resta 2 $\frac{5}{6}$ per il lato prossimo di 8, il quadrato del quale è 8 $\frac{1}{36}$, ch'è $\frac{1}{36}$ superfluo, e volendosi più approssimare: aggiongasi a 2 $\frac{5}{6}$ il 3 fa 5 $\frac{5}{6}$, e per questo si parta quel 1 detto di sopra, ne viene $\frac{6}{35}$ che levato di 3 resta 2 $\frac{29}{35}$, e questo sarà l'altro lato più prossimo, e volendosi pi approssimare: si partirà 1 per 5 $\frac{29}{35}$, e procedendo (come si è fatto di sopra) si approssimara quanto l'huomo vorrà, e se bene ci sono molte altre regole, queste nondimeno mi sono parse le più facili, però a queste mi atterro, le quali ho trovato con fondamento, qual non voglio restare di porlo, benchè non sarà inteso, se non da chi intende l'agguagliare di potenze e tanti eguali a numeri, del quale trattero reel secondo libro a pieno. Però ora parlo solo con quelli. Pongasi dunque che si habbia a trovare il lato prossimo di 13, di cui il più prossimo quadrato e 9, di cui il lato è 3; però pongo che il lato prossimo di 13 sia 3 + 1 tanto, e il suo quadrato e 9 + 6 tanti +1 potenza, il qual'è eguale a 13, che levato 9 a ciascuna delle parti, resta 4, eguale a 6 tanti +1 potenza. Molti hanno lasciato

andare quella potenza, a solo hanno agguagliato 6 tanti a 4, che il tanto valerà $\frac{2}{3}$ et hanno fatto che l'approssimatione si è 3 $\frac{2}{3}$ perchè la positione fu 3+1 tanto, viene ad essere 3 $\frac{2}{3}$; ma volendo tenere conto della potenza ancora, valendo il tanto $\frac{2}{3}$, la potenza valerà $\frac{2}{3}$ di tanto, che aggionto con li 6 tanti di prima, si haverà 6 $\frac{2}{3}$ tanti eguale a 4, che agguagliato, il tanto valerà $\frac{3}{5}$, e perchè fu posto 3 + 1 tanto sarà 3 $\frac{3}{5}$, valendo il tanto $\frac{3}{5}$, la potenza valerà $\frac{3}{5}$ di tanto, e si haverà 6 $\frac{3}{5}$ di tanto eguale a 4, si che si vede donde nascono le regole dette di sopra.

Modo di pigliare il lato d'un rotto per approssimatione.

Dato che si havesse a trovare il lato prossimo di $\frac{13}{9}$ (essendo il numero denominatore quadrato) non si tenga conto se non del 13, che suo lato per la regola detta di sopra il primo sarà 3 $\frac{2}{3}$, e il secondo 3 $\frac{3}{5}$, il terzo 3 $\frac{20}{30}$, e così di mano in mano si potrà andare approssimando (come fu dimostrato nella passata) e questi numeri vanno partiti per 3, lato del 9, che ne viene 1 $\frac{2}{9}$, 1 $\frac{1}{5}$, e 1 $\frac{20}{99}$, e questi sono li lati prossimi di $\frac{13}{9}$, ma se il denominatore del rotto, di cui si ha da pigliare il lato fosse $\frac{20}{63}$, in questo caso bisogna moltiplicare il 20 via 63 fa 1260, del quale se ne piglia il lato (come si è insegnato) e l'avenirnento si pane per 63, denominatore del rotto, e quel che ne verrà sarà il primo lato prossimo del rotto proposto, che il primo lato prossimo di 1260 è 35 $\frac{1}{3}$, e questo partendosi per 63 ne viene $\frac{71}{126}$, e questa sarà la prima approssimatione di $\frac{20}{63}$, che si approssima a $\frac{1}{15876}$, e volendo più prossimo si seguiti come si è insegnato, ma caso che il rotto fosse $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$ verrà meglio a moltiplicare tal rotto per un numero quadrato un poco grandetto, e del prodotto pigliarne il lato, il qualle va partito per il lato del numero quadrato per cui fu moltiplicato il rotto, come per essempio poniamo che si voglia il lato di $\frac{1}{2}$: moltiplica per 100 numero quadrate fa 50, del quale se tie piglia il lato ch'è in circa 7 $\frac{1}{14}$, il quale va partito per 10, lato del

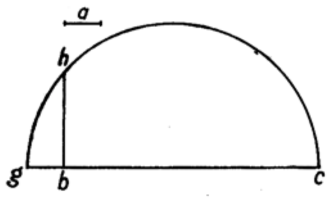
100, ne viene $\frac{99}{140}$, che il suo quadrate è $\frac{9801}{19600}$, ch'è $\frac{1}{19600}$ superfluo, ma volendo il più prossimo si pigliara il lato di 50 più diligentemente (come si è insegnato) il qualle si partirà per 10 (come è detto).

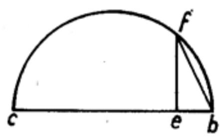
A conoscere li numeri quadrati per pratica.

Molte volte accade nell'operare di havere a trovare il lato di un numero, che non havendo lato, l'operante non se ne ha a servire; e assai volte accade ne i numeri grandi, poi che si è affaticato assai invano, si trova tal numero non haver lato, per non essere quadrato, e hassi gettatoiltempo e l'opera; però per fuggire questo inconveniente, ho pensato dar certe regole che assai facilitaranno la strada a conoscere quail siano li numeri quadrati, le quali saranno le infrascritte, e prima: che tutti gli numeri quadrati hanno da finire in uno di questi 1, 4, 5, 6, 9, e finendo in 2, 3, 7, 8, risolutamente non possono essere quadrati.
La seconda è la prova del 9, che si pigliera del numero, che deve essere quadrato, la quale non essendo uno di questi, cioè 1, 4, 7, 0, risolutamente iln umero non sarà quadrato, e se quel che finira in 5 non haverà a canto il 2 con un altro numero paro, tal numero non sarà quadrate (come 125, 325, 525, 725, e 925) tutti questi non possono essere quadrati, perchè a canto il 12 vi e il numero disparo, e quelli che finiranno in 1, e 9 bisogna che habbiano il numero paro a canto (come 21, 41, 61, 81, 01, e così 29, 49, 69, 89, 09) quelli, che finiranno in 4, bisogna che habbiano il numero paro a canto, e quelli che finiscono in 6 l'habbiano disparo, e tutti quelli che finiscono in 0 bisogna che li 0 siano in numero paro, e li numeri, che li sono a canto habbiano tutte le conditioni dette di sopra, si che havendo tutti questi avertimenti rare volte si affaticherà in vano.

Modo di trovare il lato di un numero in linea.

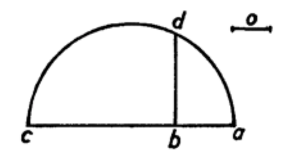
Sia la linea .a. una misura data per la unità, come sarebbe palmo, piedi, braccia, o simili, e la linea .b.c. si è 7 delle dette misure, della quale si voglia il lato; allonghisi .c.b. fino in .g. facendo .b.g.

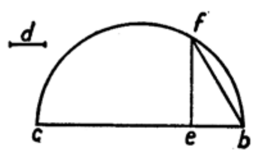




pari all'.a. e sopra la .c.g. si faccia mezo cerchio .c.h.g. e dal punto .b. si tiri .b.h. ad angolo retto sopra la .c.g. fino alla circonferentia .h.; la .b.h. saràil lato di .b.c. cioè di 7, e così sarà la linea .b.h. Radice 7, ch'è il lato di 7, che altro non e in numero, che trovare un numero, che moltiplicato in se stesso faccia 7, e in linea significa aver un quadrato fatto sopra la linea .a. e poi voler fare un quadrato che sia pari a 7 quadrati fatti sopra la lined .a.il lato del quale sarà la linea .b.h., perchè tanto può .g.b., ch'è 1, in .b.c., ch'è 7, quanto .b.h. in se stesso, perchè è media proportionale fra .g.b. (ch'è par all'.a.) e .b.c. Ancor si può fare in quest'altro modo, cioè sopra la .c.b. fare il mezo cerchio .c.b.f., e nella .c.b. segnare il punto .e. facendo .e.b. pari all'.a. e poi tirare dal punto .e. alla circonferentia .f. la .e.f. perpendicolare sopra la .b.c., e tirare la .b.f., la quale sarà il lato di 7, che si cercava, perchè tanto può la .b.e. in .b.c., quanto .b.f. in se stessa. Ma quando li numeri sono grandi, per non poter capire nel luogo dove si ha da fare la dimostratione: tengasi lo infrascritto ordine, come se si havesse a trovare il lato di 32 la misura della unit, fosse la linea .o. Trovinsi dui numeri, che moltiplicati insieme facciano 32, e siano 4 e 8. Tirisi la linea .b.c. facendo.a.b. 4 e .b.c. 8, cioè l'una quattro volte la linea .o., la qual sia .a.b.l'altra otto volte, e sopra a essa .a.b.c. si faccia il mezo

cerchio .a.d.c. dal punto .b. si tiri fino alla circonferentia la linea .b.d. perpendicolare all'.a.c. Dico la linea .b.d. essere il lato di 32, perchè tanto può .a.b. in .b.c. quanto .b.d. in se stesso. Ancora per quest'altra regola si può trovare il lato di un numero, come per essempio se il numero fosse 40 e che la misura della unità fosse la linea .d. Trovinsi dui numeri che moltiplicato l'uno via l'altro facciano 40, e siano 8 e 5; tirisi la .b.c., che sia otto voile la linea .d. e la .b.e. cinque volte, e sopra la .b.c. si faccia il mezo cerchio .b.f.c. e dal punto .e. si tiri la perpendicolare .e.f. sopra la .b.c. poi tirisi la .b.f. la quale sarà il lato di 40, perchè tanto può . b. e. in . b. c. quanto . b. f. in se stesso.





A trovare il lato cubo di un numero detta estrattione della Radice cuba.

Tutti quelli che hanno scritto di tali estrattione l'hanno mostrato con la galea, ma perchè quel dar di penna alle figure genera confusion e difficilmente si può insegnare con scrittura, mi a parso di mostrarlo con la danda (come ho fatto nella estrattione della Radice quadrata) perchè èssendo operatione più chiara, che scrivendosi si vede totalmente, e ancora perchè l'operante facendo qualch'errore può vedere dove ha errato, il che non aviene nella galea, ma venendo alla operatione dico, che sia il numero, del quale se ne ha a pigliare il lato cubico 98765932100: mettasi il numero da canto (come si vede) sotto al quale si tiri la linea .a. distante dal numero tanto che fra l'uno e l'altro ci cappia un altro numero, poi cominciasi dal lato destro a fare un punto *sopra la prima figura, ch'è 0 e vadasi verso il lato sinistro, facendo li punti sopra le figure verso il lato sinistro (come si fece nella estrattione quadrata) ma che fra l'uno punto e l'altro ci siano due figure in mezo, di modo che il secondo punto verrà sopra il 2, il terzo sopra il 5, il quarto sopra l'8, e fatto questo si ponga sotto la linea .a. cominciando dal lato sinistro il numero fino al primo punto, ch'è 98, poi si trovi il più prossimo numero cubo al 98, ma che non sia maggiore; il quale sarà 64, che il suo lato è 4, il quale si mette sotto l'8, sopra il qual'è il primo punto ch'è sopra la linea .a., e sotto il 98 si metteraildetto 64 e si cavarà tirandosi la linea .b. et restarà 34, et è finito fino al primo punto. Volendo poi seguire, al 34 se gli aggionga il 7, che seguita dopo il primo punto, e fa 347, e per trovare quanto ha da essere il numero del secondo punto quadrisi il 4 ch'è sotto all'8 del primo punto fa 16, e per regola si moltiplica per 3, fa 48. Hor vedasi quante volte entra 48 in 347, che ci entra 6, ancora ci entrarebbe 7, nondimeno se li da, sempre nel principio assai vantaggio, e questa è cosa che insegna la pratica. Fatto questo, mettasi il 6 sotto Il 5, ch'è sopra la linea .a. sotto il secondo punto, e al 347 se gli aggionga al pari il 65, ch'è sino al secondo punto, fa 34765, poi triplichisi il 46 ch'è sopra la linea .a. fa 138, e questo si moltiplica via il 24 produtto del 4 e del 6, che creano il 46 detto di sopra, fa 3312 e a questo per regola se gli aggionge un 0 fa 33120, al quale se gli aggionge 216 cubato del 6, ch'èntro in 347, fa 33336, e questo si cava di 34765, tirando la linea .c., resta 1429, et è finito fino al secondo punto, e volendo seguitare inanzi al pari del 1429, si mette il 9 che seguita dopo itsecondo punto, fa 14299, poi quadrasi il 46 ch'è sopra la linea .a., fa 2116, il qualle si moltiplica per 3 (come fu detto di sopra) fa 6348, il quale si vede quante volte entra in 14299, ch'è sotto la linea .c. ch'èntra due volte, il quall 2 si mette sopra la linea .a. sotto il 2, ch'è sotto il terzo punto; poi pigliasi il 32, che seguita fino al terzo punto, e si ponga al paro del 14299, che farà 1429932, poi triplicasi il 462 posto sotto li tre punti, fa 1386, e questo si moltiplica via 92, prodotto del 46 via 2, e fa 127512, al quale se gli aggionge un 0 per regola fa 12 75120, al quale se gli gionge 8 cubo di 2, fa 1275128, e si mette sotto al 1429932, e* *si cava l'uno dell'altro, tirando la linea .d. resta 154804, et è finito fino al terzo punto; volendo poi seguitare fino sal quarto aggiongasi 1, che seguita al terzo punto, fa 1548041, e vedasi quante volte entra 640332 triplo di 213444 quadrato di 462, in detto 1548041, che ci entra 2, il qualle si mette sotto l'ultimo punto, e fa 4622, il suo triplato a 13866, che moltiplicato via 924, produtto di 462 via l'ultimo 2, fa 12812184, al quale se gli aggionge 8 una figura più oltre fa 128121848, e al 1548041, ch'è sotto la linea .d., se gli aggiongano dui 0 che sono fino al quarto punto: fa 154804100, del quale se ne cavi il detto 128121848, resta 26682252 (come si vede sotto la linea .e.) et è finita detta estrattione, e non restando cosa alcuna: il lato cubico cercato sarebbe 4622, ma essendo avanzato (com'è detto) 26682252 bisogna formare il rotto per approssimatione, il qualle non si può trovare giusto, e a formare tal rotto sarà il modo qui sotto.*

```
9 8 7 6 5 9 3 2 1 0 0
 4     6     2     2
--------------------- a
9 8
6 4
---- b
3 4 7 6 5
3 3 3 3 6
--------------- c
  1 4 2 9 9 3 2
  1 2 7 5 1 2 8
--------------------- d
    1 5 4 8 0 4 1 0 0
    1 2 8 1 2 1 8 4 8
--------------------- e
      2 6 6 8 2 2 5 2
```

Modo di formare il rotto della estrattione delle Radici cube.

Presuposto che si havesse a trovare il prossimo lato cubo di 1100, prima si cerca il più prossimo numero cubo che non lo superi, che sarà 10, il suo cubo eè 1000, che cavato di 1100 resta 100. Hor piglisi il triplo di 10 fa 30 e questo si moltiplichi via il 100 rimasto, fa 3000, e salvisi: poi quadrasi 10 fa 100, giongasegli la sua metà

per regola, fa 150, quadrisi fa 22500, e gionghisi al 3000 salvato, fa 25500, e di questo si pigli il lato quadrato prossimo, ch'è 159$\frac{219}{318}$, e di questo si cavi il 150 che fu quadrato, resta 9 $\frac{219}{318}$, e questo va partito per il 30 triplo del 10, ne viene $\frac{3081}{9540}$ overo $\frac{1027}{3180}$ e questo è il rotto cercato, che gionto con 10 fa 10$\frac{1027}{3180}$, e questo è il lato prossimo cercato, che il suo cubo è 1100$\frac{1591593283}{32157432000}$ che supera il 1100 del rotto ne questa regola crederò mai ecceda più di un rotto (eccetto che quando il numero, .di cui se ne deve pigliare il lato, è 1 meno di un numero cubo, che all'hora vi sarà 1 di differentia, come sarebbe 7, 26, 63, 124, e simili); ma volendosi più approssirnare questo numero di quanto ho detto di sopra, et provedere a tal differentia, ancorche vi siano più modi e vie, nondimeno io porrò quella sola che a me pare più breve; la qual'è questa. Ripigliandosi da capo a volere il lato di 1100, il quale sia più prossimo di 10$\frac{1027}{3180}$ si gionghino al 1100 tre zeri, che farà 1100000, del quale se ne pigli il lato cubico, ch'è 103, e resta 7273, che formando il rotto con la regola posta di sopra ne viene $\frac{1126128}{4938747}$ il qualle gionto al 103 fa 103$\frac{1126128}{4938747}$, il qual si parte per 10, perchè è la R.c. di 1000, per il qualle viene ad essere moltiplicato il 1100, ne viene 10 $\frac{7971184}{24693735}$ e questo è lato più prossimo di 1100 che non fu il primo, cioè 10$\frac{1027}{3180}$ e se al 1100 si fossero aggionti sei zeri, che haverebbe fatto 1100000000, del qual pigliato il lato cubo, e formatone il rotto con la regola data, l'avenimento si haverebbe havuto a partire per 100, e assai più si sarebbe approssimato il rotto, e così seguendo con questo modo si può sempre andare sminuendo il rotto dell'approssimatione in infinito. Ma ritornando al numero che sia 1 meno del numero cubo (come sarebbe 26) dico, che vi si aggionghino li tre zeri, fa 26000, del qual se ne pigli il lato cubo, che sarà circa 29$\frac{47673}{76270}$, il quale si parte per 10 ne viene 2$\frac{734103}{762700}$, che il suo cubo sarà 26 e un rotto, e se vi fossero aggionti sei zeri, il rotto sarebbe stato minore, e così tenendo questo modo, mai vi sarà differentia di un sano.

Modo di trovare il lato cubo di un rotto per approssimatione.

Havendo a trovare il lato cubo di $\frac{7}{12}$ cubisi il 12 denominatore, fa 1728, e questo si moltiplica per $\frac{7}{12}$, fa 1008 e di questo si piglia il lato cubo più prossimo (come si è insegnato) che sarà circa $10\frac{1}{36}$ e questo va partito per 12, che ne viene $\frac{361}{432}$, e questo è il lato prossimo di $\frac{7}{12}$, che il suo cubo è $\frac{47045881}{80621568}$, che supera $\frac{7}{12}$ di $\frac{139596}{967458816}$, e volendolo più prossimo, si potrà tenere la regola data con moltiplicare 1008 per 1000, over per 1000000 (come si è detto ne' sani).

A conoscere per pratica li numeri cubi.

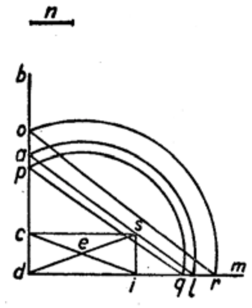
Li numeri cubi possono finire in tutti il numeri, ma la lor prova del 9 bisogna che sia 1, 8, 0, e non altro, e tutti il numeri che finiscono in 2, 4, 8, vogliono havere il numero pari a canto, overoil0. E se il numero finira in un 0, overo dui, non possono essere cubi, e se ne haveranno tre, potrànno esser cubi, e quelli che finiscono in 5, vogliono 2, over 7 a canto, cioè 25, over 75.

Modo di trovare il lato cubico di un numero in linea.

IL trovare il lato cubico di una linea, essendo data una misura nota, non e altro che veder di trovar il lato di un cubo, che sia pari a più cubi di lati pari, che dalli antichi fu molto cercato al tempo di Platone per quello, che detto havea l'oracolo, quando rispondendo a chi gli domandava il rimedio per la peste, disse: duplicandosi l'altare, cessarà la peste, et essi fatto duplicare l'altare in longhezza, altezza, e larghezza, ne cessando, ritornati all'oracolo, gli rispose, che la peste non cessava, per non havere osservato quanto gli havea imposto; e ricorrendo in ultimo a Platone, da' suoi discepoli varij modi furono da quelli trovati, per mandare ad effetto l'amfibologico detto dell'oracolo, delli quali, dui qui sotto ne porrò, e questa è chiamata dimostratione di trovare due linee medie fra due linee

date, le quali (ancorchè siano per scientia note) nondimeno giamai si sono effettuate, se non instromentalmente.

Sia la linea .d.i. di che si habbia a pigliare il lato cubico, e la



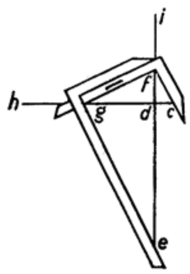
linea .n. sia misura commune, cioè che si habbia a trovare due linee medic fra la linea .n. e la .d.i. e tirisi la .d.b. ad angolo retto sopra la .d.i. e allonghisi la .d.i. fino in .m. e facciasi la .d.c. pari alla .n. e sopra la .d.i. si faccia il retto angolo .c.d.i.s., nel quale si tirino li dui diametri .c.i. e .d.s. li quali si intersecaranno in .e. nella quale si metta il piede fermo del compasso aperto tanto che sia maggiore di . e. i., col quale si faccia la parte del cerchio .o.r. a caso, e tirisi la .o.r. la quale passarà o di sotto, o di sopra, o nel punto .s. che passando per il'giunto .s. si haveria Fintenth, ma dato che passi di sopra, si astringerà il compasso, e si farà la parte del circolo .p.q. e dato che la linea retta .p.q. passi di sotto, si farannotante parti di circoli (essendo sempre .e. centro) fino che tirata la corda di uno tocchi l'angolo .s. et avertischisi, che dette parti di circoli hanno da toccare nella estremita la linea .d.b. e la .d.m. si che, toccandole la corda .a.l. e insieme l'angolo .s., la .i.l. sarà il lato cubico addimandato, e questa dimostratione non e altro, che trovare due linee medie fra la .n. e la .d.i. cioè in continua proportione, che tal proportione haverà la . s. i. (ch'è pari alla .n.) alla S I, come la .a.c. alla .c.s. (ch'è pari alla .d.i.) e la proportione, ch'è dalla .n. alla . i.l. e come la proportione dalla .a.c. alla .d.i. e ilretto angolo fatto della . i.l. e della a.c. e

pari al retto angolo .c.d.i.s. e questa dimostratione e, ch'èssendo dato un parallepipido .c.d.i.h.f.g.s. che la sua base .g.h.i.s. sia un quadrato, che ilsilo lato sia pari alla .n. cioè alla .i.s. e che la sua altezza sia pari alla .d.i. benchè in questa figura il parallepipido stia a giacere, e non ritto, e che si cerchi il lato di un cubo che sia paro al detto parallepipido, e così la .i.l. sarà il lato del cubo paro al detto parallepipido.

L'altra dimostratione.

Sia la linea .a. 1 e la linea .b. 8, della quale se ne habbia a pigliare il lato cubico; tirisi la .c.d. par all'.a. et .d.e. par alla .b. che si congionghino in .d. ad angolo retto, e allonghisi .e.d. fino in .i. et .c.d. fino in .h. e poi si habbiano dui squadri materiali, e pongasi l'uno con l'angolo .f. 'di dentro sopra l'a linea .d.i. e facendo che tocchi con l'una delle braccia la estremita .c. l'altra tagliera .c.h. in .g. e l'angolo di dentro dell'altro squadro si ponga sopra il taglio .g. e si faccia che con l'uno delle braccia tocchi il braccio .1. dell'altro, talche si congionghino insieme (come si vede più chiaramente nella figura) e così all'hora l'altro braccio passera di sopra, o di sotto, o per la estremita .e. et se passerà per la estremita .e. la .d.f. sarà il lato cubico della .d.e. et se passarà di sopra, bisogna alzar l'angolo .f. tanto, che l'altro squadro tocchi la estremita .e. con le conditioni dette, e passando di sotto al punto, bisogna abbassare l'angolo .f. tanto, che l'altro squadro tocchi esso punto .e. con le conditioni dette, che così la linea .f.d. sarà il lato cubico ricercato di .d.e. ch'èssa .f.d,sarà2, perchè essendo .c.d. 1,saràla .d.g. 4 perchè (per essere l'angolo .f. retto) tanto può la .c.d. in .d.g. quanto la id. in se, et essendo id. d. 2, et .d.g. 4 .d.e.sarà8, perchè tanto può .f.d. in .d.e. quanto .d.g. in se, per essere l'angolo .g. retto.

Avertimento intorno al moltiplicare, e partire di Radici.



Perchè assai volte nell'operare di queste R. cube si viene a certe moltiplicationi grandi, onde per fuggire queste moltiplicationi, che assai volte accadono nelli capitoli di cubo, tanti, e numeri, tenghisi questo modo. Se si havesse a moltiplicare R.c.1024 via R.c.648, partisi ciascuna delle R.c.per una R.c.che ne venghi una R.c.che habbia lato, e se bene li partitori sono diversi non importa. Ma se si partirà R.c.1024 per R.c.2 ne verrà R.c.512, che il suo lato a 8, et a partire R.c.648 per R.c.3 ne viene R.c.216, che il suo lato è 6, e si haverà 8, con R.c.2, e 6 con R.c.3, che moltiplicato il6 con 8, fa 48, e R.c.3 via R.c.2 fa R.c.6. Però 48 voile R.c.6 sarà il produtto di dette due Radici, e se si moltiplicarà 48 via R.c.6,sarà quanto a moltiplicare R.c.1024 via R.c.648, e caso che il suo produtto andasse partito, come saria per R.c.750 che partito per R.c.6 detta di sopra, ne viene R.c.125, di cui il lato sarà 5, che si haverà per partitore, con R.c.6, e si deve partire 48, e R.c.6, che partendo il numero per il numero (cioè 48 per 5) ne viene $9\frac{3}{5}$, et a partire R.c.6 per R.c.6 ne viene R.c.1, qual moltiplicata via $9 -1$, fa $9\frac{3}{5}$, e tanto sarà il produtto della moltiplicatione di R.c.1024 via R.c.648, e ildetto produtto partito per R.c.750, e questo modo, a chi lo sapra applicare,saràdi gran commodo, e serve ad ogni sorte di Radici.

A trovarei il lato delle RR.q. overo estrattione.

Per trovare il lato di una Radice di R.q. il più breve modo e il trovarne prima il lato, e poi pigliare il lato del lato (come si a insegnato nelle Radici quadrate) benchè tal modo sia molto biasmato dal Tartaglia, e da lui posta una sua inventione molto lontana dal vero (come di sotto si mostrera). Ma venendo alla operatione dico, che presuposto che si voglia il lato di 1060 prima pigliasene il lato (come si a insegnato) che sarà 32 $\frac{576}{1033}$ in circa, poi si piglia il lato di 32 $\frac{576}{1033}$ che moltiplicato per 1067089 quadrato di 1033 per tener conto del rotto, fa 34741856, del quale pigliato il lato ne viene 5894 $\frac{655}{2947}$, che partito per 1033 ne viene 5 $\frac{2149018}{3044251}$, e questo sarà il prossimo lato di RR.q.1060, che solo variarà di un rotto assai picciolo. Ma ritornando a quel che ho detto del Tartaglia, dico che egli da tal regola per trovare il rotto di simil sorte di Radici, cioè: presuposto, che si voglia il lato di RR.q.960, ne cava prima il più prossimo numero quadroquadrato, ch'è 625, e lo cava di 960, e resta 335, e per formare il rotto, moltiplica il 5 lato di 625 per 4, che fa 20, che si salva, e poi quadrail5 fa 25, e per regola to moltiplica per 6 fa 150, il che parimente salva, e poi cuba il 5, e fa 125, e per regola tomoltiplica per 4, che fa 500, al quale aggionge li dui numeri serbati, cioè il 20, e 150, che fa 670 e questo è il numero da formare il rotto, che partito il 335 per 670 ne viene 5894$\frac{1}{2}$, e questo to mette per il rotto da giongersi con il 5 fa 5$\frac{1}{2}$, il che vuol che sia il prossimo lato del lato di 960, cosa lontanissima dal vero, perchè il qualdroquadrato di 5$\frac{1}{2}$ è 915$\frac{1}{16}$, e piglia errore di 44, e più; talche non so mai come si lasciasse ridurre a commettere simile errore, havendo egli cotanto biasmato gli altri, e questa sua inventione la cavo di questa positione, che pone, che il lato del lato di 960 sia $5+^{\underline{1}}$ e il suo quadroquadrato è $625+ 500^{\underline{1}} + 150^{\underline{2}} + 20^{\underline{3}} + {}^{\underline{4}}$ il ch'è eguale a 960, che levato 625 a ciascuna delle parti, resta ${}^{\underline{4}} + 20^{\underline{3}} + 150^{\underline{2}} + 500^{\underline{1}} = 335$, e per fare questa agguaglianza per approssimatione aggionge tutti il numeri delle dignità insieme, eccetto la potenza di potenza, per essere di poca importanza, e fanno 670, e gli pone tutti per tanti, e le agguaglia a 335, che ne viene $\frac{1}{2}$, e quanto si inganni e manifesto, perchè presuposto, che 1 tanto vaglia $\frac{1}{2}$, li 500 tanti valeranno 250, e le 150 potenze vagliano 37$\frac{1}{2}$, e 20 cubi vagliano 2$\frac{1}{2}$, che aggionti insieme, fanno 290, e secondo la regola sua (mettendo ogni cosa per tanti) vagliono la metà di 670, cioè 335, che quanto sia differente da 290 si vede, ma questa sua regola saria aiquanto buona, quando il numero, che se ne deve pigliare il lato del lato fosse poco o meno di drato (come sarebbe 628, overo 623, e simili), e volendosi pigliare il lato del lato di un rotto (come sarebbe $\frac{1}{2}$) moltiplichisi per un numero quadroquadrato e quando sarà maggiore verrà più prossimo, e del produtto se ne pigli il prossimo lato del lato, quale si partirà per il lato del lato del numero quadroquadrato, per il qualle fu moltiplicato $\frac{1}{2}$, e lo avenimento sarà il prossimo lato del lato di $\frac{1}{2}$ (come per essempio). Moltiplichisi per 100000000, fa 50000000, e pigliasene il lato del lato, che sarà $84\frac{213123}{2375856}$ il che si parte per 100 lato del lato di 100000000, ne viene $\frac{199785027}{237585600}$: e questo sarà il lato del lato prossimo di $\frac{1}{2}$.

Modo di trovare il lato relato di qual si voglia numero.

Non era l'animo mio di trattare di simil sorte di Radici (come cosa superflua) per non essere necessaria, non havendo i capitoli da agguagliare del primo incomposto, overo relato con le altre dignità: 28 ma a' preghi degli amici son stato forzatol metterlo, protestandomi che se venisse mai un altro Tartaglia, esso direbbe ch'io nol ponessi per non sapere le lor operationi, e approssimationi, e non perchè non fosse necessario; però non ho potuto mancare di porvi questa superfluità, così venendo alla operatione, ne dare l'essempio.

Volendo trovare il lato relato di 674321987654, mettasi in regola (come si vede) poi facciasi un punto sopra il 4, e perchè il relato è la quinta dignità, vadasi a fare il secondo punto a cinque figure più okra, che verrà ad essere sopra il 9. Poi vadasi innanzi altre cinque figure, e facciasi l'altro punto, che verrà sopra il 7. Poi tirasi la linea .a. e da quel capo, ove e la lettera .a., si tolgano già le figure fino al primo punto, che sono 67, e vedasi, qual e il più prossimo numero relato, ma che non lo ecceda, che sarà il relato di 2, cioè 32; il qualle si cava di 67, resta 35 (come si vede sotto la linea .b.) **e sopra il primo punto sopra il 7 si metta il 2, lato del 32, e poi si seguiti.** Poi si metta da parte il qualdroquadrato di detto 2 lato del 32, ch'è

	2 . . . 3 . . . 2
	6 7 4 3 2 1 9 8 7 6 5 4
a	6 7
	3 2
b	3 5 4 3 2 1 9
	3 2 3 6 3 4 3
	3 0 6 8 7 6 8 7 6 5 4
	2 8 4 7 5 0 3 0 4 3 2
	2 2 1 2 6 5 7 2 2 2

Relato di 2		32
Q. Quadrato	di 2,	16 via 5
Cubato	di 2,	8 via 10
Quadro	di 2,	4 via 10
Numero	di 2,	è 2 via 5

8 0	via	3
8 0	via	9
4 0	via	27
1 0	via	81
		243

2 4 0
7 2 0
1 0 8 0
8 1 0
2 4 3
3 2 3 6 3 4 3

16, e si moltiplichi per 5 per regola, ch'è il numero delle dignità del relato, fa 80 (come si vede nella sopraposta figura) poi si piglia il cubato del detto 2, ch'è [8, e si moltiplica per 10, fa 80 poi si piglia il qualdrato di detto 2, ch'è] 4 e per regola si moltiplica per 10 fa 40, poi si piglia il detto 2, e si moltiplica per 5, numero delle dignità del relato, fa 10, poi si aggionge una figura, cioè il 4 al 35, che avanzo, fa 354. Poi si vede quante volte vi entra 80, cioè il produtto del quadroquadrato di 2, moltiplicato per 5, che vi entra tre volte; perchè per rispetto delle altre figure, 4 sarebbe troppo, e il 3 si mette rincontra l'80 (come si vede nella figura) e sotto esso 3 si mette il suo quadrato, ch'è 9, poi il suo cubato, ch'è 27, poi il qualdroquadrato ch'è 81, poi il suo relato, ch'è 243, e si moltiplica il primo 80 via 3, fa 240 (come si vede in figura) poi si moltiplica il secondo 80 via 9, fa 720, quale si mette sotto il 240, ma una figura più innanzi, poi si moltiplica il 40 via 27 fa 1080 una figura più innanzi, poi si mette il 243 sotto l'810, una figura più innanzi, e si sommano tutte queste moltiplicationi: fanno 3236343 e al 354, ch'è sotto la linea .b. si aggiongono tutte le figure fino al punto, ch'è sopra il 9, fa 3543219, dal qual si cava 3236343[9], resta 306876, e il 3 si mette sopra il

[9] 3236344

secondo punto ch'è sopra il 9, et è finito di pigliare il lato relato di 6743219, ch'è 23, e avanza 306876. Ma volendo seguitare più innanzi si piglia (come si vede nella seguente figura)il qualdroquadrato di 23, ch'è 279841, e si moltiplica via 5 (come si fece di sopra) fa 1399205, e questo si vede quante volte entra 306876, giongendoli 8, che seguita il 9 del secondo punto, che vi entra 2 voice, e questo si mette rincontro a 1399205, e si moltiplica l'uno per l'altro fa 2798410, qual si mette da banda (come si vede nella figura) poi si piglia il cubato di 23, ch'è 12167, e si moltiplica via 10, fa 121670, che moltiplicato via 4, quadrato del 2, ch'èntro, fa 486680, quà si mette sotto al 2798410, ma una figura più innanzi, poi si moltiplica il qualdrato di 23, ch'è 529, via 10, fa 5290, e questo si moltiplica via 8, cubato del 2, ch'èntrò, fa 42320, e questo si mette sotto a 486680, ma una figura più innanzi, poi si moltiplica 23 via 5, fa 115, e questo via 16 quadroquadrato del 2, fa 1840, qual si mette sotto al 42320 una figura più innanzi, e sotto al 1840 pur una figura più avanti si mette 32, relato del 2 ch'èntrò, e si sommano poi tutte le dette moltiplicationi, che fanno 28475030432, e salvasi, e al 306876 che avanza sotto la linea .b. se gli giongono tutte le altre figure fino all'ultimo punto, cioè 87654 fa 30687687654, del quale se ne cava il numero serbato, cioè 28475030432, resta 2212657222, e il 2 ultimo, ch'èntrò, si mette sopra l'ultimo punto sopra il 4, et è finito di trovare il lato relato del numero proposto, ch'è 232, e avanza 2212657222 e volendo formare il rotto[10] se ne darà la regola qui sotto.

[10]pigliasi il quadroquadrato di 232 che sarà come si vede nella presente figura 289722976, et questo si moltiplica per 5,, et fa come si vede ne la presente figura: poi piglia il cubato di 32, et si moltiplica via 10, et il produtto si mette sotto l'altro numero come si vede ne la seconda figura segnata di lettara D poi si piglia il quadrato di 232, et si moltiplica via 10, et si mette sotto gli altri due numeri col medesimo ordine detto di sopra, poi si piglia detto numero poi si piglia detto numero cioè 232, et si moltiplica per 5, che fa 1160, et si mette anch'egli sotto gl'altri numeri, col medesimo ordine detto, et sommati tutti detti numeri insieme, fanno 14610525960 et questo si mette sotto il numero che avanzò ch'è 2212657222, et volendosi approssimare più si terrà la via dette nele Cube con lo aggiongere dei zeri; che se a 674321987654 se gli aggiungeranno due zeri, et pigliato il suo Creatore relato et partito per 100, ne verrà $232\frac{177239198950471216\,29}{1161819027635688190860}$ et con questa via si può approssimare a un minimo rotto, et servendo questa strada non ne ponerò altre piacendomi, et come

Quadro Quadrato	di	23	279841	via	5	1399205
Cubato	di	23	12167	via	10	121670
Quadrato	di	23	529	via	10	5290
Numero	di	23		via	5	115

1399205	via	2	2798410
121670	via	4	486680
5290	via	8	42320
115	via	16	1840
Relato del 2,32			32
			28475030432

Modo di formare il rotto delle R. relate.

Havendo dato il modo di trovare l'approssimatione del lato: hora voglio dar l'ordine di formare il rotto, e prima diròcome lo forma Nicollò Tartaglia legislatore di tutti gli Aritmetici per far conoscere poiche ha tassato, e sparlato di molti valent'huomini, come egli in manifesto e grave errore e caduto, cosa molto enorme e disdicevole in questi, che si dilettano di biasimare altri, nè si avvedono che maggiormente in quello istesso corrono essi (come fa egli) parlando contra tutti gli altri scrittori: il che mai sempre fu da' buoni autori biasmato, perchè l'opera istessa da parangone al mondo, qual è buono, e qual è rio, e benchè io fussi di animo di non entrare in questo pelago, ne sparlar di lui per non essere vivo, ma considerando che, correggendo lui, giovo a tanti altri, quali esso ha biasmato, essendo egli più degno di biasmo di loro, e che il mio e un arrischiare uno contra dieci: non ho voluto mancare dirquesto. Hora venendo alla operatione, dice egli che havendosi a pigliare la R. relata di 242, perchè si vede che 2 e poco, e 3 e troppo, però vuol che si riduchi a relato il 2, e fa 32, e si cavi di 242, resta 210, poi si riduchi a relato $2 + {}^{\underline{1}}$ che fa $32 + 80^{\underline{1}} + 80^{\underline{2}} + 40^{\underline{3}} + 10^{\underline{4}} + {}^{\underline{5}}$ e questi numeri si sommano insieme senza tener conto delle dignità

dissi ne le estrazione et approssimazione de le sorde, et cube, chi si vorrà servir d'altra servasene,ch'io per me non usar altro modo.

(eccetto il 32, ch'è quello, che fu cavato di 242) li quali faranno211, e questo si accomodano 1i cubi e censi, si pone sotto a 210, che sarà $\frac{210}{211}$, e questo sarà il rotto, che aggionto con il 2 fa 2 $\frac{210}{211}$, che il suo relato è 241 $\frac{36228388141}{418227202051}$ a si vede essere pochissima differentia, e in apparenza par regola perfetta, ma a lontanissima dal vero, perchè presuposto che si habbia da pigliare la Radice relata più prossima di 137 $\frac{1}{2}$ che con la regola detta di sopra cavasene 32, resta 105 $\frac{1}{2}$, e questo va partito per 211, ne viene $\frac{1}{2}$ e gionto con 2 fa 2 $\frac{1}{2}$, e questa saria il lato prossimo di 137 $\frac{1}{2}$, 2 $\frac{1}{2}$, e questo quanto sia lontano dal vero si conosce che il relato di 2 $\frac{1}{2}$ è 97 $\frac{31}{32}$, che fino a 137 $\frac{1}{2}$ non ne manca più che 39 $\frac{27}{32}$, si che doppo molti biasmi dati agli altri, trova poi questa tanto lontana dal vero; ma la causa, che riusci in quella di sopra, e non nell'altra e questa, che pigliando 242, ch'èil suo lato relato una cosa minima minore di 3, ciascuna dignità vale una cosa minima manco di uno, e per questo pare, che la regola sia buona, ma in quest'altro essempio, che havemo 2 $\frac{1}{2}$, il tanto viene a valere $\frac{1}{2}$, la potenza $\frac{1}{4}$, il cubo $\frac{1}{8}$, e la potenza di potenza $\frac{1}{16}$, e il relato $\frac{1}{32}$, però 80$\underline{1}$ **valeranno 40, 80$^{\underline{3}}$, valeranno 20, 40 cubi valeranno 5,** 10$^{\underline{4}}$ **valeranno $\frac{5}{8}$, e $^{\underline{5}}$ $\frac{1}{32}$, che sommati insieme fanno 65 $\frac{21}{32}$, e alla ragione del Tartaglia mettendo tutti valere $\frac{1}{2}$ fariano 105 $\frac{1}{2}$, nel che e differentia 39 $\frac{27}{32}$, errore detto di sopra. Però volendo fare il rotto di 97, cavisi il 32, resta 65, e questo si parta per 10, cioè cinque volte il 2 relato di 32, ne viene 6 $\frac{1}{2}$, e a questo se gli aggionge 4, quadrato della metà del quadrato del 2, fa 10 $\frac{1}{2}$, e di questo se ne piglia il lato quadrato più prossimo, che si può, che sarà poco più di 3 $\frac{6}{25}$, e di questa si cava il lato 4, che fu aggionto al 6 $\frac{1}{2}$, ch'è 2 resta 2 $\frac{6}{25}$, e di questo si piglia il lato quadrato prossimo, che sarà in circa 1 $\frac{149}{300}$, e a questo se gli aggionge per regola la metà del 2 relato di 32, fa 2 $\frac{149}{300}$, questo sarà prossimo al 97 (come si può vedere) perchè il relato di 2 $\frac{149}{300}$ e 97 $\frac{16869378749}{2430000000000}$, ch'è troppo solo il rotto, il qualle è cosa minima, ma perchè questo essempio**

e un poco confuso, ne voglio porre un altro essempio; habbiasi a trovare il lato primo relato di 44370 $\frac{1}{2}$, il suo lato sarà 8, e avanzarà 11602 $\frac{1}{2}$, questo si partirà per cinque volte 8 cioè per 40 ne viene 290 $\frac{1}{16}$, e a questo se gli aggionge 1024 quadrato di 32 metà del 64 quadrato di 8, fa 1314 $\frac{1}{16}$, e di questo si piglia il lato quadrato, ch'è 36 $\frac{1}{4}$ del quale se ne cava il 32 detto di sopra resta 4 $\frac{1}{4}$ e a questo se gli aggionge 16 quarto del quadrato del 8 detto, fa 20 $\frac{1}{4}$, e il suo lato quadrato è 4 $\frac{1}{2}$, e di questo ne va cavato 4 metà del 8, resta $\frac{1}{2}$, e questo è il rotto che aggionto al 8 fa 8 $\frac{1}{2}$, e questo sarà il lato relato prossimo di 44370 $\frac{1}{2}$, che il relato di 8 $\frac{1}{2}$ e 44370 $\frac{17}{32}$ che si vede questa regola essere prossima assaissimo, e perchè non paia che sia trovata a tento, ne voglio mostrare dove nasca tal regola, ch'è fondata suso la verità: prima si è trovato, che 8 e il più prossimo lato di 44370 $\frac{1}{2}$, però pongo, che il relato di 44370 $\frac{17}{32}$ sia 8+ $^{\underline{1}}$, che sarà $^{\underline{5}}$ + 40$^{\underline{4}}$ + 640$^{\underline{3}}$ + 5120$^{\underline{2}}$ + 20480$^{\underline{1}}$ + 32768, e questo è eguale a 44370 $\frac{1}{2}$, lievasi 32768 da ciascuna delle parti e si haverà $^{\underline{5}}$ + 40$^{\underline{4}}$ + 640$^{\underline{3}}$ + 5120$^{\underline{2}}$ + 20480$^{\underline{1}}$ eguale a 11602 $\frac{1}{2}$, lasciasi $^{\underline{5}}$ perchè rilieva quasi niente, e resta 40$^{\underline{4}}$ + 640$^{\underline{3}}$ + 5120$^{\underline{2}}$ + 20480$^{\underline{1}}$ eguale a 11602 $\frac{1}{2}$, riducasi a una potenza, e si haverà $\underline{4}$ + 16$^{\underline{3}}$ + 128$^{\underline{2}}$ + 512$^{\underline{1}}$ eguale a 290 $\frac{1}{16}$, fatto questo, acciochè $\underline{4}$ + 16$^{\underline{3}}$ + 128$^{\underline{2}}$ + 512$^{\underline{1}}$ sia quadrato si aggiongerà a ciascuna delle parti 1024, e si haverà $\underline{4}$ + 16$^{\underline{3}}$ + 128$^{\underline{2}}$ + 512$^{\underline{1}}$ + 1024 eguale a 1314 $\frac{1}{16}$, piglio il lato dell'una e l'altra parte, e si haverà $\underline{2}$ + 8$^{\underline{1}}$ + 32 eguale a 36 $\frac{1}{4}$, che agguagliato il tanto, vale $\frac{1}{2}$, e fu posto 8 + $^{\underline{1}}$ che sarà 8 $\frac{1}{2}$, e questa è la reale a formare il rotto: e chi volesse durare la fatica per approssimarsi potria fare nuova positione, e ponere che il numero fosse 8$\frac{1}{2}$ + $^{\underline{1}}$ 1 e seguitare come si è insegnato, e si approssimaria tanto quanto saria il numero ch'èntra intiero nel numero proposto più un numero eguale alla metà del suo quadrato.

A pigliare il lato secondo relato di un numero.

	3 . 8 . 9 .
	1 3 4 8 4 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 0 9 8 7
a	1 3 4 8 4
	2 1 8 7
b	1 1 2 9 7 9 8 7 6 5 4 3
	9 2 5 4 5 5 8 2 5 9 2
c	2 0 4 3 4 2 9 3 9 5 1 2 1 0 0 9 8 7
	2 0 3 7 1 1 6 9 7 7 2 9 5 2 3 6 2 9
d	6 3 1 2 4 1 7 8 2 5 7 7 3 5 8

3^6,	729	via	7	5103	via	8		4 0 8 2 4
3^5,	243	via	21	5103	via	64		3 2 6 5 9 2
3^4,	81	via	35	2835	via	512		1 4 5 1 5 2 0
3^3,	27	via	35	945	via	4096		3 8 7 0 7 2 0
3^2,	9	via	21	189	via	32768		6 1 9 3 1 5 2
3^1,	3	via	7	21	via	262144		5 5 0 5 0 2 4
						2097152		2 0 9 7 1 5 2
								9 2 5 4 5 5 8 2 5 9 2

Se si vorrà il lato secondo relato di un numero, come sarebbe 1348498765432100987, facciasi come si vede nella figura segnando il primo punto sopra il 7, e perchè il secondo relato e la settima dignità (come si può vedere nelle abbreviature del secondo libro) però dal primo punto cominciando dalla parte destra, e venendo alla sinistra sino alla ottava farà il punto, che sarà sopra il primo 3. Poi seguitisi sette altre figure, e facciasi l'altro punto, che verrà ad essere sopra il secondo 4, e tirisi la linea .a., alla quale si. mettono sotto tutte le figure, fino che si arrivi al primo punto, cominciando alla parte sinistra verso la destra che saranno cinque figure, cioè 13484. Hora vedasi, che numero ridutto al secondo relato gli e più prossimo, ma bisogna che non sia maggiore, che saràil3, che il suo secondo relato sarà 2187, e questo si cava di 13484, resta 11297, e questo 3, ch'è entrato, si mette sopra il primo punto alla parte sinistra, e poi si riduce a potenza cuba cioè a una dignità meno del secondo relato, che sarà 729, e questo per regola si moltiplica per 7 numero della dignità del secondo relato, e fa 5103, poi si piglia il primo relato del 3, ch'è 243, e questo si moltiplica per 21 per regola, fa 5103; poi si piglia la potenza di potenza del 3, ch'è 81, e questo moltiplicato via 35 per regola fa 2835, poi si piglia il cubato del detto 3, ch'è 27, e si moltiplica via 35 per regola fa 945, poi si piglia la potenza del detto 3, ch'è 9, e per regola si moltiplica per 21 fa 189, poi si piglia il tanto del detto 3, ch'è 3 e per regola si moltiplica per 7, fa 21, e posto tutti i produtti l'uno sotto all'altro per ordine (come si vede nella figura) dipoi si trova un numero, che moltiplicato via il primo 5103, e al produtto gionto un 0 per regola, il quall produtto col 0 si salvi, dipoi moltiplicatoil qualdrato del numero trovato via il secondo 5103, giongendo al produtto il numero salvato di sopra, la somma bisogna che sia alquanto minore di 1129700, cioè di 11297, che avanzo sotto la linea .b. aggiontili dui zeri, over nulla, e questo numero, che farà tal effetto, sarà 8, il quall moltiplicato per 5103 fa [40824, che aggiontoli uno 0 fa 408240 e il qualdrato di detto 8, ch'è 64, moltiplicato via lo stesso 5103 fa] 326592, che aggionti insieme fanno 734832, ch'è minore di 1129700. E benchè il 9 ancora mostri di fare il medesimo effetto, nondimeno restarebbe troppo poco, e questo s'impara dalla pratica (come net partire) più che col mostrarlo in iscritto, e ritornando alla operatione, essendo l'8 il numero cercato, il qualle si mettera sopra l'altro punto, ch'è sopra il 3, poi questo 8 si mette riscontro alla potenza cuba (come si vede nella figura) e sotto se gli mette il suo quadrato, ch'è 64, che sarà incontra del primo relato del 3, e sotto questo se gli mette il suo cubo, ch'è 512, e sotto ad esso 512 se gli metta il qualdroquadrato, ch'è 4096, e sotto a questo il primo relato, ch'è 32768 [e sotto a questo il cubo quadrato ch'è 262144], e sotto a questo si metta il secondo relato, ch'è 2097152 (come distintamente si vede nella figura) poi si moltiplicano tutti i produtti di queste dignità via li produtti segnati et ogni produtto si porta avanti una figura, e poi sommati tutti insieme fanno 92545582592, che tratto questo numero di 11297, col giongerli tutte le figure sino all'altro punto, che faranno112979876543, resta sotto la linea .c. 20434293951, et è finito di pigliare il lato fino al secondo punto a man sinistra sopra il 3, e nè venuto 38, e volendo seguir la operatione facciasi un'altra figura (com'è la infrascritta) e si riduchi il 38 a potenza cuba che sarà (come si vede) 3010936384, e questo si moltiplica per 7, come si è fatto di sopra e fa 21076554688, poi si piglia il primo relato di 38 ch'è 79235168, e si moltiplica per 21, farà 1663938528, poi si piglia il qualdroquadrato di 38, ch'è 2085136, e si moltiplica via 35, fa 72979760, poi si piglia il cubato di 38 ch'è 54872, e si moltiplica via 35, fa 1920520, poi si piglia il qualdrato di 38, ch'è 1444, e si moltiplica via 21, fa 30324, poi si piglia il detto 38, e si moltiplica via 7, fa 266, e tutti questi produtti si mettono per ordine riscontro al loro nascimento; poi si vede di trovare un numero, che moltiplicato via 21076554688, e il suo quadrato moltiplicato per 1663938528, e del produtto levatone una lettera a man destra, e gionti questi dui produtti insieme, si approssimino al numero restato sotto la linea .c. con dui zeri, cioè 2043429395100, e il numero ch'èntrasarà 9, e questo si metta nella figura incontro alla potenza cuba del 38, e sotto se gli metta il suo quadrato, ch'è 81, e sotto a questo si metta il suo cubo, ch'è 729, e sotto a questo si metta il suo quadroquadrato, ch'è 6561 e sotto a questo si mettail suo primo relato, ch'è 59049, e sotto a questo si metta la sua potenza cuba, ch'è 531441, e sotto a questo si metta il secondo relato ch'è 4782969, e tutte queste dignità si moltiplichino via li numeri che gli sono incontro a man sinistra segnati, et ogni produtto si porta avanti una lettera, e poi si sommano tutti insieme faranno 203711697729523629, e questo si cava del numero che resto 20434293951, con giongerli tutte le lettere della linea .a. fino al primo punto a man destra, che sarà 204342939512100987, restarà 631241782577358, e così si è compiuto di pigliare il lato ch'è 389, e il numero ch'è restato: e volendo formare il rotto procedasi nella maniera[11] che si dirà.

[11]come si vede. Pigliasi il Censo Cubo di 389, ch'è 3464955073649161 et questo si moltiplica via 7 fa 21254685515544127, et si mette da banda: poi si piglia il primo relato di 389 che sarà come si vede ne la presente figura segnata 8907339520949, et questo si moltiplica via 21 fa come si vede 187054129939929, et questo si mette sotto il produtto passato mano più innanzi: poi si piglia il Censo Censo di 389 ch'è 22898045041 via 35 fa 901431576435, et questo si mette sotto gl'altri produtti unna lettera più innanzi: poi si piglia il Cubo di 389 che è 58863869, et si moltiplica via 35 fa 206025414, et si metta sotto gl'altri produtti una lettera più innanzi: Poi si piglia la cosa di 389, ch'è 389, et si moltiplica via 7 fa 2723, et questo anch'egli si mette sotto gl'altri produtti una lettera più innanzi; et tutti li detti produtti si sommano insieme faranno 427339994491443746633 e questo si metta sotto l'numero, che avanzò; ma a detto numero, che avanzò si aggiongano

Potenza cuba	del 38	3 0 1 0 9 3 6 3 8 4	via	7
Primo relato	del 38	7 9 2 3 5 1 6 8	via	21
Potenza di Potenza	del 38	2 0 8 5 1 3 6	via	35
Cubo	del 38	5 4 8 7 2	via	35
Potenza	del 38	1 4 4 4	via	21
Tanto	del 38	3 8	via	7

21076554688	via	9	1 8 9 6 8 8 9 9 2 1 9 2
1663938528	via	81	1 3 4 7 7 9 0 2 0 7 6 8
72979760	via	729	5 3 2 0 2 2 4 5 0 4 0
1920520	via	6561	1 2 6 0 0 5 3 1 7 2 0
30324	via	59049	1 7 9 0 6 0 1 8 7 6
266	via	531441	1 4 1 3 6 3 3 0 6
		4782969	4 7 8 2 9 6 9
			2 0 3 7 1 1 6 9 7 7 2 9 5 2 3 6 2 9

Modo di formare il rotto della estrattione delle R. secondo relata.

Il modo di formare il rotto di simil sorte di R. e difficilissimo, e di laboriosa operatione, benchè il Tartaglia lo faccia così leve, e facile, ma quanto si inganni lo dimostraro, perchè egli dice che presuposto, che si voglia il lato secondo relato di 1157, che prima si truova il più prossimo numero secondo relato al 1157, ma che non sia maggiore, il qual] e 128 (che il suo lato è 2)il qualle si cava di 1157, resta 1029, e per trovare il denominatore si piglia il 2, il suo quadrato, il cubo, il qualdroquadrato, il primo relato, e il cubo quadrato, che sono 2, 4, 8, 16, 32 e 64, e il primo si moltiplica per 7, il secondo per 21, il terzo e quarto per 35, il quinto per 21, e il sesto per 7, e tutti il produtti si sommano insieme fanno

cinque zeri per regola, et si haverà questo rotto $\frac{631241782577358000000}{427339994491443746633}$ come si vede ancora ne la prima figura, che accompagnato con 389, sarà il Creatore prossimo che si cercava, et chi volesse quanto al rotto approssimarsi più potrà tenere la strada, che si è tenuta ne la approssimatione, et trattatione passata del Creatore primo relato, et che si è insegnata ne la sorda, et ne le cube: però non replicherò altrimenti.

2058, e se ne parti il 1029 ch'è avanzato, ne viene $\frac{1}{2}$, e questo è posto dal Tartaglia per il vero rotto, la quale operatione ben serve per trovare il rotto vero, ma non già e il vero rotto essa (come si vedrà nell'operare) però secondo il Tartaglia il prossimo lato di 1157 saria 2 $\frac{1}{2}$, che il suo secondo relato è 610 $\frac{45}{128}$, che quanto sia lontano dal vero l'operatione lo dimostra, perchè volendo formare il rotto, dico che servi questa regola, cioè, si partirà il 1029 numero avanzato per 14, produtto del 2, lato del 128, in 7 per regola, ne viene 73 $\frac{1}{2}$, il qualle si salva poi si piglia il numero quadrato del 2, ch'è 4, e si parte per 1 $\frac{1}{2}$ per regola, ne viene 2 $\frac{2}{3}$, il qualle si accompagna con $^{\underline{2}}$ e $2^{\underline{1}}$, che fa $^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 2\frac{2}{3}$ (e li $2^{\underline{1}}$ sono il 2 lato del 128) a si salva; poi si piglia il quadroquadrato e il primo relato di esso 2, ch'è 16 e 32, l'uno e l'altro si parte per 3 per regola, ne viene 5 $\frac{1}{3}$ e 10 $\frac{2}{3}$ il secondo si moltiplica per il $\frac{1}{2}$ detto di sopra e il primo per $\frac{1}{4}$ quadrato di esso $\frac{1}{2}$, che fanno 5 $\frac{1}{3}$ e 1 $\frac{1}{3}$ e si giongano con 18 $\frac{26}{27}$ (cubo di 2 $\frac{2}{3}$ trovato di sopra) e con il 73 $\frac{1}{2}$ salvato, fa 99 $\frac{7}{54}$, del quale si piglia il lato cubo ch'è circa 4 $\frac{17}{27}$, e questo si agguaglia con $^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 2\frac{2}{3}$ con più diligentia che si puo, cavisi a ciascuna delle parti 2 $\frac{2}{3}$, resta $^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ eguale a 1 $\frac{26}{27}$; al quale se gli gionga 1, quadrato della metà delli tanti, fa 2 $\frac{26}{27}$, del quale si piglia il lato quadrato, ch'è circa 1 $\frac{2824}{3915}$, del quale si cava 1, $\frac{1}{2}$ delli tanti, resta $\frac{2824}{3915}$, il quall esso rotto gionto con 2 lato di 128, fa 2 $\frac{2824}{3915}$, e questo non varia molto da 1157, ma l'altro sarà il buono che si trovarà con il medesimo ordine del passato. Moltiplichisi esso rotto per 10 $\frac{2}{3}$, et il suo quadrato per 5 $\frac{1}{3}$. (detto di sopra) e gionte le moltiplicationi insieme fanno circa 10 $\frac{1475}{2349}$, e giongasi (come di sopra) con 18 $\frac{26}{27}$, cubo di 2 $\frac{2}{3}$, et con 73 $\frac{1}{2}$ fanno 102 $\frac{3717}{4698}$, del quale se ne piglia il lato cubo, che sarà circa 4 $\frac{26489}{40000}$ e questo si agguaglia a $^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 2\frac{2}{3}$,con diligentia, che tanto valerà $\frac{1011827}{1387100}$ e questo sarà il rotto e volendo più prossimo, si seguitarailmedesimo ordine, ma quando il numero, di che si deve pigliare il lato secondo relato fosse

minore di 1 di un numero secondo relato (come sarebbe 127), in questo caso si giongerà sette zeri a 127, che farà 1270000000, e di questo si piglia il lato, formando il rotto con il medesimo ordine, e l'avenimento si partirà per 10, lato secondo relato di 10000000, e l'avenimento sarà il prossimo lato di 127, e ancora se al 1157 posto di sopra si fosse aggionto sette zeri, e poi pigliato il lato, e formato il rotto conilmedesimo ordine, e lo avenimento partirlo per 10, si saria più approssimato di prima, ma sono operationi di gran fastidio, e di poco profitto, ma per non parere che queste regole le habbia trovate a caso, voglio mostrare dove sono fondate (come qui sotto si vedrà).

Presuposto che si habbia a trovare il prossimo lato secondo relato di 1157, cerchisi il primo numero secondo relato più prossimo, ma che non lo ecceda, che sarà 128, che il suo lato secondo relato è 2. Hora pongo che il lato secondo relato di 1157 sia 2 + $1^{\underline{1}}$, il suo secondo relato sarà $1^{\underline{7}} + 14^{\underline{6}} + 84^{\underline{5}} + 280^{\underline{4}} + 560^{\underline{3}} + 672^{\underline{2}} + 448^{\underline{1}} +$ 128, e questo deve esserè eguale a 1157, levisi 128 a ciascuna delle parti, restarà $1^{\underline{7}} + 14^{\underline{6}} + 84^{\underline{5}} + 280^{\underline{4}} + 560^{\underline{3}} + 672^{\underline{2}} + 448^{\underline{1}}$ eguale a 1029, partasi il tutto per 14 numero delle potenze cube, lassando stare l'$1^{\underline{7}}$. per non essere di molto momento, che ne verrà $1^{\underline{6}} + 6^{\underline{5}} + 20^{\underline{4}} + 40^{\underline{3}} + 48^{\underline{2}} + 32^{\underline{1}}$ eguale a 73 $\frac{1}{2}$; hora cercasi un composto di dignità, che il suo cubato sia pari a $1^{\underline{6}} + 6^{\underline{5}} + 20^{\underline{4}} + 40^{\underline{3}} +$ [$48^{\underline{2}} + 32^{\underline{1}}$], che sarà $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 2\frac{2}{3}$, che il suo cubato sarà $1^{\underline{6}} + 6^{\underline{5}} + 20^{\underline{4}} + 40^{\underline{3}} + 53\frac{1}{3}^{\underline{2}} + 42\frac{2}{3}^{\underline{1}} + 18\frac{26}{27}$, ch'è maggiore di $1^{\underline{6}} + 6^{\underline{5}} + 20^{\underline{4}} + 40^{\underline{3}} + 48^{\underline{2}} + 32^{\underline{1}}$ di $5\frac{1}{3}^{\underline{2}} + 10\frac{2}{3}^{\underline{1}} + 18\frac{26}{27}$; però bisogna giongere a ciascuna delle parti $5\frac{1}{3}^{\underline{2}} + 10\frac{2}{3}^{\underline{1}} + 18\frac{26}{27}$ acciò che il composto delle dignità habbia lato cubo, ma se si aggiongerà a ciascuna delle parti $5\,\frac{1}{3}^{\underline{2}} + 10\frac{2}{3}^{\underline{1}} + 18\frac{26}{27}$ si haverà $1^{\underline{6}} + 6^{\underline{5}} + 20^{\underline{4}} + 40^{\underline{3}} + 53\frac{1}{3}^{\underline{2}} + 42\frac{2}{3}^{\underline{1}} + 18\frac{26}{27}$ eguale a $5\frac{1}{3}^{\underline{2}} + 10\frac{2}{3}^{\underline{1}} + 92\frac{25}{54}$ e così il primo ha lato cubico, ma il secondo non l'ha, cioè $5\frac{1}{3}^{\underline{2}} + 10\frac{2}{3}^{\underline{1}} + 92\,\frac{25}{54}$. Però bisogna vedere il meglio che si può trovare quello che vagliano le $5\frac{1}{3}^{\underline{2}} + 10\frac{2}{3}^{\underline{1}}$ e per

trovarlo si aggiongeranno li numeri di $14^{\underline{6}}$, $85^{\underline{5}}$, $280^{\underline{4}}$, $560^{\underline{3}}$, $672^{\underline{2}}$, $448^{\underline{1}}$, che fanno 2058, e se ne parte il 1029, che ne viene $\frac{1}{2}$, e questo si propone per la valuta del $1^{\underline{1}}$, la $1^{\underline{2}}$ valerà 4, li $5\frac{1}{3}^{\underline{2}}$ valeranno $1\frac{1}{3}$, e li $10\frac{2}{3}^{\underline{1}}$ 11 valeranno $5\frac{1}{3}$, che fa in tutto 6 $\frac{2}{3}$, che gionto col 92 e $\frac{25}{54}$, fa $99\frac{7}{54}$, e si haverà $1^{\underline{6}} + 6^{\underline{5}} + 20^{\underline{4}} + 40^{\underline{3}} + 53\frac{1}{3}^{\underline{2}} + 42\frac{2}{3}^{\underline{1}} + 18\frac{26}{27}$ eguali a $99\frac{7}{54}$, così si pigliai il lato cubo dell'una e l'altra parte, e si haverà $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 2\frac{2}{3}$ eguali a R.c.99 e $\frac{7}{54}$, ch'è circa 4 $\frac{17}{27}$, che agguagliato, il tanto val circa $\frac{2824}{3915}$. Però il lato di 1157, che fu posto $2 + 1^{\underline{1}}$,sarà 2 $\frac{2824}{3915}$ il qual primo rotto farà alquanto di variatione, perchè le $5\frac{1}{3}^{\underline{2}} + 10\frac{2}{3}^{\underline{1}}$ vagliono più di 1. Però si ritornerà a presuporre che vagliano le potenze il quadrato di $\frac{2824}{3915}$ e li tanti $\frac{2824}{3915}$, che aggionta la lor valuta a 92 $\frac{25}{54}$ fanno circa 102 $\frac{3737}{4698}$ del quale si piglia il lato cubo ch'è 4 $\frac{26489}{40000}$, eguale a $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 2\frac{2}{3}$ che agguagliata la $1^{\underline{1}}$ valerà $\frac{1011827}{1387100}$ e così seguendo si potrà approssimare quanto si vuole. Et di questa operatione cotanto laboriosa, non si prevale quasi in cosa alcuna, perchè non si ha Capitolo da agguagliare tale dignità al numero se non per se solo. Però non mi voglio più affaticare invano, ponendo tal qualità di Radici, ma dare la regola, come si habbia da trovare qual si voglia sorte di R.

Regola da trovare il lato di ogni sorte di Radici. [12]

[12] Quando si vorrà trovare il Creatore di qualsivoglia quantità et detta quantità sia o Radice prima relata o secondo o terzo, come si voglia, o Censo Cubo, che non fa cosa qual si sia per ritrovare la regola tengasi quest'ordine, come se si volesse trovare il Creatore di un numero: pigliansi due numeri semplici a beneplacito; et siano i due numeri 3 et 2, li quali si moltiplicano in questo modo, come da tanto si vede: et moltiplicasi il 2 di sotto via il 2 di sopra fa 4, et mettasi sopra la linea; poi moltiplicasi il 2 di sotto via il 3 di sopra fa 6, et si metta sotto la linea come si vede: poi si moltiplica il 3 di sotto via il 2 di sopra fa 6, et si mette sotto l'altra moltiplicatione, tirandosi una posta indietro, come si fa a moltiplicare per ..., che verrà ad essere sotto l'altro 6: poi si moltiplica il 3 di sotto via il 3 di sopra fa 9, et si mette, com'è detto una posta più innanzi, poi si sommano tutti insieme, et si haverà 9, 12 e 4 et avertiscasi di non mai mescolarle insieme, et questo viene ad essere il Censo: et così in questo modo moltiplicando 3 et 2 cinque volte come

$$
\begin{array}{r}
1\overset{1}{\smile} + 2 \\
1\overset{1}{\smile} + 2 \\
\hline
1\overset{2}{\smile} + 4\overset{1}{\smile} + 4 \\
1\overset{2}{\smile} + 4\overset{1}{\smile} + 4 \\
\hline
1\overset{4}{\smile} + 8\overset{3}{\smile} + 24\overset{2}{\smile} + 32\overset{1}{\smile} + 16 \\
1\overset{1}{\smile} + 2 \\
\hline
1\overset{5}{\smile} + 10\overset{4}{\smile} + 40\overset{3}{\smile} + 80\overset{2}{\smile} + 80\overset{1}{\smile} + 32
\end{array}
$$

Presupposto che si vogli trovare la regola di trovare il lato del primo relato, ch'è la quinta dignità: pigliasi un numero a beneplacito, e sia 2, e si accompagni con $1^{\underline{1}}$ e fa $1^{\underline{1}} + 2$, e questo si riduchi a primo relato, che ne viene $1^{\underline{5}} + 10^{\underline{4}} + 40^{\underline{3}} + 80^{\underline{2}} + 80^{\underline{1}} + 32$: le potenze di potenze si partiranno per il 2, li cubi per 4 suo quadrato, le potenze per 8 cubo del 2, li tanti per 16 quadroquadrato del 2, che ne verrà 5, 10, 10, e 5, e questi saranno li numeri trovati da trovare il lato primo relato (come nella sua operatione si disse) e con questo ordine si potrà trovare il lato di qual si voglia sorte di Radici.

Moltiplicare di più e meno

Per chiarezza di questo atto del moltiplicare se ne daranno più essempij.

Più via più fa più.

si vede ne la figura si haverà il relato, che sarà 243, 810, 1080, 720, 240, 32, che sommati tutti insieme, come si vede mettendo una lettera più innanzi; si haverà la somma che sarà 335544323 et questo è il relato di 32. Ma volendo trovare la regola, essendo stato il 3 a man manca, si pigliarà il suo Censo Censo che è 81, et questo si moltiplica via il 2, che fu compagno del 3 fa 162 ne vien 5, e questo è il moltiplicare del Censo censo, come si è mostrato ne la figura del Creatore relato, poi si piglia il cubo del detto 3, ch'è 27 et si moltiplica via il quadrato del 2 fa 108, che partiro 1080, ne viene 10, et questo è il numero per il quale s'ha da moltiplicare il cubo, come s'è visto ne la figura: poi si piglia il Censo di detto 3, ch'è 9, et si moltiplica via il cubo del 2, fa 72, che partito il 720 ne viene 10; et questo è pure il numero per il quale si moltiplica il Censo poi si moltiplica la cosa di detto 3, ch'è 3 via il Censo Censo del 2, che fa 48, che partito 240 per 48 ne viene 5: et questo è il numero per il quale s'ha da moltiplicare la cosa; et chi intenderà bene questo potrà trovar la regola a qual si voglia sorte di Radice; purchè si moltiplica tante volte il 2 et 3 quanto è il numero de le dignità di che si vuol pigliare il Creatore.

Meno via meno fa più.
Pia via meno fa meno.
Meno via più fa meno.
Più 8 via più 8, fa più 64.
Meno 5 via meno 6 fa più 30.
Meno 4 via più 5 fa meno 20.
Più 5 via meno 4 fa meno 20.

Et ancora per maggiore intelligenza si porranno più essempij di numeri composti, come se fossero binomi, e residui; e prima se si haverà a moltiplicare $(6 + 4)$ via $(5 + 2)$ si metteranno per ordine (come si vedono qui sotto) e moltiplicasi 2 via 4 fa 8, et è più, perchè più via più fa più, il qualle si mette sotto la linea (come si vede) poi si moltiplica 2 via 6, fa 12, il che parimente e pits, perchè non havendo segno di meno e più: poi si moltiplica 4 via 5, fa 20, et è segno di meno, e poi 5 via 6, fa 30, e per vederne la prova sommisi 30, 20, 12, e 8 produtto della moltiplicatione, fanno 70, e $6 + 4$, e quanto a dire 10, e $5 + 2$, e come a dire 7, che moltiplicato 7 via 10 fa 70.

Moltiplichisi $(6 + 4)$ via $(5 - 2)$. Meno 2 via $+ 4$ fa $- 8$, e $- 2$ via 6 fa

$$\begin{array}{c} 6+4 \\ 5+2 \\ \hline 30+20+12+8 \end{array}$$

$- 12$, per essere il 6 per non havere segno di meno, e 5 via $+ 4$ fa $+ 20$, per essere il 5 più, e 5 via 6 fa 30, ch'è più, per non haver segno di meno: si che tutto il produtto della moltiplicatione sarà $30 + 20 - 12 - 8$, della quale moltiplicatione qui non mettero altrimenti la prova, per non havere anco dato regola del sommare più e meno.

Moltiplichisi $(6 - 4)$ via $(5 - 2)$; $- 2$ via $- 4$ fa $+ 8$, e $- 2$ via $+ 6$ fa $- 12$

$$\begin{array}{c} 6+4 \\ 5-2 \\ \hline 30+20-12-8 \end{array}$$

e 5 via $- 4$ fa $- 20$ e 5 via 6 fa 30, et è più per non havere segno di meno, ne più di questi casi possono accadere, perchè il più e meno non accade se non nelle quantità composte, che sono di di versa natura, che non si possono giongere insieme, ne sotrare senza aiuto del + e − e all'hora nasceranno tali moltiplicationi (come si è dimostrato) perchè se io ho 6 + 2, tanto si può dire 8, per essere tutti di una natura, et s'io dico 6 − 2, tanto posso dire 4, il che e come se io dicessi io ho 6 scudi, e ne ho debito 2, che pagato il debito non me ne resta ranno se non 4; però non diròaltro del moltiplicare, ma seguirò gli altri atti.

$$\begin{array}{c} 6 - 4 \\ 5 - 2 \\ \hline 30 - 20 - 12 + 8 \end{array}$$

Del partire più e meno

benchè da qualcuno di quest'arte sia stato messo il partire del piùe meno, io (per quanto ho operato) mai ho conosciuto, che possa accadere partire per meno, perchè se si ha un binomio, o un residuo per partitore, o qual si voglia quantità composta saranno di diversa natura (come e stato detto) e però non si può partire semplicemente. Ma avertiscasi, che tutte le quantità simplici, o composte, o binomij, o residui che siano, essendo partite per una quantità sola, sempre il più e meno restarànno come erano prima, e per essempio, se si partirà (4 − 2) per 2, ne viene (2 − 1), si che il 4 non muta natura, ne il − 2, onde lasciato questo, verrò all'atto del sommare.

Del sommare più e meno.

Sia con più si aggionge insieme, e fa più. Meno con meno si aggionge insieme, e fa meno. Più con meno si cava la minor quantità dalla maggiore, e quello che resta e della natura della maggiore, come se si sommarà + 10 con + 6, fa + 16, et è come a dire: io mi trovo 10 scudi in una mano, e 6 nell'altra, che insieme saranno 16; − 10 con − 20 fa − 30, et è come se io mi trovassi debitore di uno scudi 20, e di un altro 10, io haverei in tutto debito scudi 30; et a sommar + 16 con − 8 e come se io havessi 16, e ne havessi debito 8, che pagato il debito mi restarebbono scudi 8; e + 15 con − 20 fa − 5, perchè se io mi trovassi scudi 15, e ne fossi debitore 20, pagati li 15 resterei debitore 5, a si sono posti questi essempij tanto facili per chiarezza di un principiante, e questo basta quanto al sommare.

Sottrare del più e meno.

Più di più si cava, e se la quantità che si ha da cavare e minore, resta più, e se a maggiore resta meno. Meno cavato di meno resta meno, quando la quantità che si ha da cavare e minore, ma se a maggiore re sta Meno cavato di più si somma e resta Pia cavato di meno si somma e resta meno.

+ 15 cavato di + 120 resta + 5
+ 13 cavato di + 6 resta − 7
− 28 cavato di − 20 resta + 8
− 12 cavato di − 20 resta − 8
+ 10 cavato di − 6 resta − 16
− 10 cavato di + 7 resta + 17.

E per essere gli essempij chiari non pigliaro altrimente fatica a cormmentargli, et essendosi fin qui detto a bastanza del più e meno, verrò alli Binomij e Residui, **e prima parlarò di quelli dove solo intravengono il numero e Radici quadrate,** e per essere questa parte di che ho da trattare molto difficile (rispetto a quello che si è detto) mi forzero con quella maggior brevità e chiarezza, che io potrò, esprimerla.

Diffinitione del Binomio.

Il Binomio è una quantità composta di dui nomi aggionti insieme dissimili, ovvero simili, ma di quantità di R.q.che fra di loro non sia proportione (come da numero quadrato a numero quadrato) però quanto se fossero semplici numeri; **come sarebbe R.q.2 e R.q.50, che la proportione dal 2 al 50 e come da 1 a 25, ch'è come da numero quadrato a numero**

quadrato, ma come Radice e come da numero a numero, perchè a partire R.q.50 per R.q.2 ne vien R.q.25, che il suo R.q. lato è 5. Però la proportione da 2 a R.q.50 e come da 1 a 5, ch'è come da numero a numero, ma per non confondere un principiante ho detto e dire proportione come da numero quadrato a numero qua drato, partendo semplicemente l'una per l'altra, che ne venghi numero quadrato: ma quando tra loro sarà tal proportione si potrànno sommare insieme, e farne una quantità sola, e non si chiamaranno piùbinomij, non essendo il composto di due quantità.

Essempio.

Congiongansi le due quantità 6 e R.q.5; per la regola data nel sommare de'numeri e R.q.non si possono sommare, ma si direr 6 + R.q.5, e questo si chiama Binomio, per essere un composto di due quantità dissimili, essendo il numero e R.q. di diversa natura. Congiongasi R.q.24 con R.q.5; queste due Radici quadrate per la regola data nel sommare, non si possono congiongere insieme, ma dirassi R.q.24 + R.q.5, e questo è anco Binomio composto di dui nomi, et se ben sono simili di natura, fra di loro non e proportione (come da numero quadrato a numero quadrato) perchè la proportione di 5 a 24 è $\frac{24}{5}$ il quale non è quadrato, per non havere lato, e però questo composto sarà Binomio (come di sopra e detto). Ma se si dicesse congiongasi R.q.24 con R.q.6, per essere fra di loro proportione (come e da numero quadrato a numero quadrato) si possono congiongere insieme, e fanno R.q.54 (come si è insegnato nel sommare) e questo non si chiamera più Binomio per essere R.q.54 un nome solo.

Deiffinitione del Residuo.

Il residuo e una quantità composta di due nomi dissimili overo di due Radici quadrate le quali non habbiano proportione fra di loro, come da numero quadrato a numero quadrato, e che la minore di dette due quantità vadi cavata della maggiore, che quella restante sarà il residuo.

Essempio.

Se si cavarà R.q.2 di 6 per la regola data del sotrare restarà 6 − R.q.2, e questo sarà Residuo, perchè Residuo non vuol dir altro che resto. Cavisi 4 di R.q.18, resterà R.q.18 − 4, e questo anco e Residuo. Ma se si havesse a cavare R.q.2 di R.q.18, per essere proportione fra di loro (come da numero quadrato a numero quadrato) si possono cavare e resta R.q.8, et questo none Residuo, per essere di un sol nome, e se ben e restante, in questa scienza non e detto Residuo, se non nei modi detti di sopra.

Qualità dei sei Binomij et Residui.

Sei specie o nature dei Binomij e Residui si trovano, delli quali Euclide nel decimo a pieno dimostra il loro nascimento et il loro lato. Ma perchè a trattarne in questo luogo, cioè a trovare il lato di essi è materia troppo difficile, la riserbare più avanti, et solo dire quali sono le sei specie dei Binomij e Residui.

Diffinitione del primo Binomio.

Il primo Binomio e un composto di un numero e una R.q.di cui il quadrato del numero ecceda il quadrato della R.q.di un numero quadrato, come sarebbe 3 + R.q.5, che il quadrato di 3 e 9, et il quadrato di R.q.5 e 5, che cavato di 9 resta 4, ch'è numero quadrato, e così 4 + R.q.7 e pur primo Binomio, perchè il quadrato di 4 e 16, et il quadrato di R.q.7 e 7, che tratto di 16 resta 9, ch'è numero quadrato, e così tutti gli Binomij di questa specie si chiameranno Binomij primi.

Diffinitione del primo Residuo.

Il primo Residuo e un numero meno una R.q. che del quadrato dell'uno tratto il quadrato dell'altro, ne resta un numero quadrato (come si è detto del Binomio), e per essempio 3 R.q.5, che il quadrato di 3 e 9, et il quadrato di R.q.5 e 5, che tratto di 9 resta 4, ch'è numero quadrato, e perchè non si habbia sempre a replicare della qualità che sono i Residui: essi saranno sempre della medesima che saranno i Binomij, se non che la minore quantità, ch'è più nei Binomij, e meno nei Residui, come sarebbe se si dicesse 5 − R.q.8, il suo residuo sarà 5 − R.q.8, però non replicarò più dei Residui, ma solo dirò dei Binomij.

Diffinitione del secondo Binomio.

Il secondo Binomio e un composto di due quantità, cioè di R.q.e numero, e che la R.q.sia maggiore del numero, et il quadrato dell'uno tratto dal quadrato dell'altro resti un numero che habbia proportione col quadrato della R.q.come da numero quadrato a numero quadrato, come per essempio R.q.525 + 21, che il quadrato di 21 e 441, et il quadrato di R.q.525 e 525, che trattone 441 resta 84, il quale a proportione col 525 quadrato di R.q.525, e come 4 a 25, ch'è come da numero quadrato a numero quadrato, e di questa natura sono tutti li secondi Binomij.

Diffinitione del terzo Binomio.

Il terzo Binomio e un composto di 2 R.q.che tratto il quadrato della minore del quadrato della maggiore il restante sia in proportione col quadrato della maggiore, come da numero quadrato a numero quadrato, come R.q.500 R.q 375, che tratto il quadrato dell'uno del quadrato dell'altro resta 125, il quale e in proportione del quadrato di R.q.500 come da numero quadrato a numero quadrato.

Diffinitione del quarto Binomio.

Il quarto Binomio e un composto di numero e R.q.tal che il quadrato del numero ecceda il quadrato della R.q.un numero che non sia quadrato, come

5 + R.q.8, che tratto il quadrato dell'uno del quadrato dell'altro rimane 17, che non e quadrato.

Diffinitione del quinto Binomio.

Il quinto Binomio e un composto di R.q.e numero che il quadrato della R.q.ecceda il quadrato del numero un numero che non habbia proportione col quadrato della R.q. se non come da numero a numero, come sarebbe R.q.17 + 2, che il quadrato del numero tratto del quadrato della R.q. resta 13, che non ha proportione con 17, se non come da numero a numero.

Diffinitione del sesto Binomio.

Il sesto Binomio e un composto di due R.q.che il quadrato della maggiore ecceda il quadrato della minore in un numero che non habbia proportione col quadrato della detta maggiore se non come da numero a numero, come sarebbe R.q.10 + R.q.7, che tratto il quadrato della minore del quadrato della maggiore resta 3 che non ha proportione con 10 se non come da numero a numero, e benchè questo importi poco all'operante, nondimeno non ho voluto tralasciarlo. Hora verrò a moltiplicare, partire, sommare, e sotrare di essi Binomij con numeri e R.q. simplicemente.

Moltiplicare de' Binomij con numero e R.q. simplicemente.

Se si haverà a moltiplicare 4 + R.q.7 via 3, moltiplichisi 3 via 4 fa 12, e 3 via R.q.7 fa R.q.63, che gionti insieme fanno 12 + R.q.63, e perchè si è detto prima del moltiplicare R.q.con numero, e numero con R.q. e più e meno, non replicaro altrimente come si proceda. Moltiplichisi R.q.18 + R.q.5 via 2, fa R.q.72 + R.q.20, e se si moltiplicara 4 + R.q.7 via R.q.7, farà R.q.112 + 7, e se si moltiplicarà 6 + R.q.2 via R.q.8 farà R.q.288 + 4.

Moltiplicare de' Residui con un numero e R.q. simplicemente.

Moltiplichisi 3 − R.q.2 via 4, fa 12 − R.q.32, e R.q.12 − 2 via 4, fa R.q.192 − 8, e moltiplicando R.q.28 − R.q.3 via 2, fa R.q.112 − R.q.12, e 5 − R.q.8 via R.q.7 fa R.q.175 − R.q.56, e 4 − R.q.2 via R.q.2, fa R.q.32 − 2, e 4 − R.q.5 via R.q.20, fa R.q.320 − 10, e R.q.6 −5 via R.q.3, fa R.q.18 − R.q.75, e R.q.8 − R.q.5 via R.q.2, fa 4 − R.q.10, e R.q.18 − R.q.12 via R.q.3 fa R.q.54 −6.

Moltiplicare de' Binomij e Residui dove intravenghi RR.q.

Moltiplichisi 4+ RR.q.3 con 2, fa 8+ RR.q. 48, perchè il 2 si riduce a RR.q.e fa RR.q.16, e moltiplicato con RR.q.3 fa RR.q.48 (come fu insegnato nel moltiplicare di RR.q.via numero).
Moltiplichisi R.q.5 + RR.q.20 con 3, fa R.q.45+ RR.q.1620, perchè il 3 moltiplicato con R.q.5 fa R.q.45, e moltiplicato con RR.q.20 fa RR.q.1620, che aggionti insieme fanno R.q.45+ RR.q.1620 (come fu detto sopra).
Moltiplichisi RR.q.5 − R.q.2 con 100 fa RR.q.500000000− R.q.20000.
Moltiplichisi RR.q.30 + RR.q.2 con 4 fa RR.q.7680 + RR.q.512.
Moltiplichisi RR.q.20 + 2 via R.q.5 fa RR.q.500 + R.q.20, perchè il 2 moltiplicato con R.q.5 fa R.q.20, e R.q.5 moltiplicato con RR.q.20, la RR.q.500, perchè R.q.5 ridutto a RR.q.fa RR.q.25, e moltiplicato con RR.q.20 fa RR.q.500, e aggionte insieme fanno RR.q.500 + R.q.20.
Moltiplichisi RR.q.40 − RR.q.2 con 3 fa RR.q.3240 − RR.q.162.
Moltiplichisi RR.q.10 + RR.q.5 via RR.q.6 fa RR.q.60 + RR.q.30.
Moltiplichisi RR.q.8 + RR.q.5 con RR.q.2 fa 2 + RR.q.10.
Moltiplichisi RR.q.48 + RR.q.5 con RR.q.3 fa R.q.12 + RR.q.15.
Moltiplichisi RR.q.48 − RR.q.12 con RR.q.3 fa R.q.12 − R.q.6.
Moltiplichisi RR.q.128 − RR.q.72 con RR.q.2 fa 4 − R.q.12.
E di tutti questi essempij non ho voluto restare di replicare il modo della moltiplicatione, perchè l'ho detto nelle semplici, e non vie differentia se non quanto del più e del meno, che bisogna avertire ponerli come vanno.

Partire de' Binomij per numero overo R.q.

Si procede nel partire come si è fatto di sopra nel moltiplicare, si parte ciascuna delle quantità da se, come se si havesse a partire 4 + R.q.8 per 2: partasi 4 per 2 ne viene 2, e R.q.8 ne viene R.q.2, che gionti insieme fanno 2+ R.q.2, che per più chiarezza ponerò li seguenti essempij.

Partasi 8 + R.q.24 per 4, ne viene 2 + R.q.1 $\frac{1}{2}$.
Partasi 8 + R.q.24 per R.q.6, ne viene R.q.10 $\frac{2}{3}$ + 2.
Partasi R.q.48 + R.q.24 per R.q.3, ne viene 4 + R.q.8.
Partasi R.q.72 + R.q.12 per R.q.3, ne viene R.q.24 + 2.

Lassaro stare il partire de' Residui, essendo come quello de' Binomij, salvo che il meno a in luogo del più. Gli essempij posti di sopra, ancora che non fussero necessarij per essersene ragionato a bastanza nel moltiplicare e partire di R.q.con numero e R.q., nondimeno per più facilità dei principianti, i quali per un essempio solo assai volte restano confusi, non ho voluto lasciare di ponergli, **seguitando quelli ove intravengono RR.q.**

Partasi 8 + RR.q.48 per 2, ne viene 4 + RR.q.3, perchè a partire 8 per 2 ne viene 4, e RR.q.48 per 2 si riduce il 2 a RR.q.fa RR.q.16 e RR.q.48, partito per RR.q.16, ne viene RR.q.3, che aggionti in sieme fanno li dui avenimenti 2 + RR.q.3 (come fu detto di sopra). Partasi R.q.45 + RR.q.1620 per 3, ne viene R.q.5 + RR.q.20. Partasi RR.q.50000 – R.q.200 per 10, ne viene RR.q.5 – R.q.2. Partasi RR.q.7680 + RR.q.512 per 4, ne viene RR.q.30 + RR.q.2. Partasi RR.q.500 + R.q.20 per R.q.5, ne viene RR.q.20 + 2. Partasi RR.q.3240 – RR.q.162 per 3 ne viene RR.q.40 – RR.q.2.
Partasi RR.q.60 + RR.q.30 per RR.q.6, ne viene RR.q.10 + RR. q. 5.
Partasi 2 + RR.q.10 per RR.q.2, ne viene RR.q.8 + RR.q.5. Par-

tasi R.q.12 + RR.q.15 per RR.q.3, ne viene RR.q.48 + RR.q.5. Partasi R.q.12 − R.q.6 per RR.q.3, ne viene RR.q.48 − RR.q.12. Partasi 4 − R.q.12 per RR.q.2, ne viene RR.q.128 − RR.q.72.

Sommare de' Binomij con numero e R.q. semplicemente.

Quando si haverà a sommare un Binomio con un numero o una R.q.avertiscasi di mettere il numero col numero, e le R.q. con le R.q.e se le R.q.non si potrànno sommare insieme, compongasi un trinomio. Il Trinomio e una quantità composta di tre nomi, che toltone due di loro qual si voglia, li lor quadrati non habbino proportione come da numero quadrato a numero quadrato, e quando vi saranno dui nomi che habbino proportione come da numero quadrato a numero quadrato, tal Trinomio si potrà ridurre a Binomio (come si vedrà nell'operare).
Sommasi 6 + R.q.2 con 4, fa 10 + R.q.2 Sommasi R.q.15 + R.q.8 con R.q.2, fa R.q.15 + R.q.8 + R.q.2, e questo è un Trinomio. Ma perchè R.q.8 con R.q.2 hanno proportione come da numero quadrato a numero quadrato, si possono sommare insieme R.q.8 e R.q.2, e fanno R.q.18, che gionto con R.q.15, fanno R.q.18 + R.q.15, ch'è tanto quanto R.q.15 + R.q.8 + R.q.2.
Sommasi 4 + R.q.8 con −2, fa R.q.8 + 2.
Sommasi 6 + R.q.12 con −8, fa R.q.12 −2.
Sommasi 6 + R.q.12 con −R.q.3, fa 6 + R.q.3.
Sommasi 8 + R.q.2 con −R.q.18, fa 8 −R.q.8.
Sommasi 7 + R.q.5 con −R.q.3, fa 7 + R.q.5 −R.q.3, e chi bene haverà in prattica questi essempij, ricordandosi del sommare di R.q.(come al suo luogo dimostrai) gli doveranno bastare.

Sotrare de' Binomij con numero o R.q.

Se si haverà a cavare 10 di 18 + R.q.6, restarà 8 + R.q.6.
Cavasi 12 di 10 + R.q.8, resta R.q.8 −2.

Cavasi 12 di R.q.80 + R.q.30, resta R.q.80 + R.q.30 −12.
Cavasi R.q.6 di R.q.8 + R.q.3, recta R.q.8 + R.q.3 −R.q.6.
Cavasi R.q.6 di R.q.8 + R.q.5, resta R.q.8 + R.q.5 −R.q.6.
Cavasi R.q.18 di R.q.8 + R.q.5, recta R.q.5 −R.q.2.
Cavasi 4 + R.q.8 di 18, resta 14 −R.q.8.
Cavasi R.q.8 + R.q.5 di 10, resta 10 −R.q.8 −R.q.5.
Cavasi R.q.6 + R.q.2 di R.q.24, resta R.q.6 −R.q.2.

Sotrare di Residui con numero o R.q.

Cavasi 6 di 8 −R.q.2, resta 2 −R.q.2.
Cavasi 4 di R.q.40 −R.q.3, resta R.q.40 −R.q.3 −4.
Cavasi R.q.2 di R.q.18 −R.q.3, resta R.q.8 −R.q.3.
Cavasi R.q.3 di R.q.50 −R.q.12, resta R.q.50 −R.q.27.
Cavasi R.q.5 di R.q.20 −2, resta R.q.5 −2.
Cavasi 2 di R.q.32 −3, resta R.q.32 −5.

Sommare de' Residui e de' Binomij.

A sommare Binomij con Residui, o Binomio con Binomio o Residui con Residui non e differente da quello che si è mostrato quando si sonosommati con numeri, o con le R.q.semplici, e come anco si è veduto nelle somme delle moltiplicationi, quando i produtti si sono ridutti a minor nomi e quando non si è potuto si sono lasciati stare com'erano prima; però di questo atto qui non fa di bisogno darne altro essempio, ma ricorrasi a quello che si è detto, e così del sotrare, e però di questi quattro atti parendomi haverne detto a sufficienza, verrò al trattare delli lati dei Binomij, e del moltiplicare, partire, sommare, e sotrare fra di loro, alla qual parte per essere più difficile, bisogna attender più diligentemente a quello che si dira.

Moltiplicare de' Binomij e Residui fra di loro, e prima de' Binomij con Binomij.

Si fa il moltiplicare de' Binomij con Binomij (come si mostro nel moltiplicare del pia) com'e la figura del 6 + 4 via 5 + 2, come sarebbe il Binomio 4 + R.q.7 via 4 + R.q.7. Pongasi in regola, come si vede qui da parte, poi si moltiplichi R.q.7 di sotto via R.q.7 di sopra, fa 7, numero il quale si pone sotto la linea .a., poi si moltiplica R.q.7 di sotto via 4 di sopra, fa R.q.112, quale si pone pur sotto la linea .a. et è finito di moltiplicare R.q.7 di sotto. Poi si cominci il 4 di sotto, e moltiplichisi via R.q.7 di sopra, fa R.q.112, quale pur si mette sotto la linea .a., poi si moltiplica il 4 di sotto col 4 di sopra fa 16, e habbiamo sotto la linea .a. un quadrinomio, cioè 16 + R.q.112 + R.q.112 + 7, e ogni cosa e pia; giongasi il 16 col 7, fa 23, e pongasi sotto la linea .b., poi sommisi R.q.112 con R.q.112, fa R.q.448, quale si ponga sotto la linea .b. come si vede e haveremo 23 + R.q.448, e questo è il produtto della moltiplicatione del Binomio 4 + R.q.7 in se. Ma avertiscasi che a moltiplicare un Binomio in se stesso (e sia qual si voglia dei sei) il produtto sarà sempre Binomio primo e ne porrò un altro essempio.

Moltiplichisi R.q.8 + R.q.3 via R.q.8 + R.q.3. Pongasi per ordine (come di

$$\begin{array}{l c}
 & \mathbf{4 + R.q.\ 7} \\
 & \mathbf{4 + R.q.\ 7} \\
\mathbf{a} & \overline{\mathbf{16 + R.q.\ 112 + R.q.\ 112 + 7}} \\
\mathbf{b} & \overline{\mathbf{23 + R.q.\ 448}}
\end{array}$$

sopra e come si vede nella figura) e moltiplichisi R.q.3 di sotto via R.q.3 di copra, fa + 3, il quale si ponga sotto la linea .a. Poi si moltiplichi R.q.3 di sotto via R.q.8 di sopra, fa R.q.24, quale si mette pur sotto la linea .a. Poi si moltiplica R.q.8 di sotto via R.q.3 di sopra, fa R.q.24, quale pur si mette sotto la linea .a., poi si moltiplica R.q.8 di sotto via R.q.8 di sopra, fa 8, e mettasi anco egli sotto la linea .a. Poi si raccogliono tutti dui i numeri, cioè 8 e 3, fanno 11, e raccolto R.q.24 con R.q.24 fa R.q.96, e tanto e il quadrato di R.q.8 + R.q.3, cioè 11 + R.q.96, e questo è quanto al moltiplicare delli Binomij in se, e mi par che basti. Ma per maggior intelligentia ne porre la regola della pruova.

$$\begin{array}{ll} & \text{R.q. } 8 + \text{R.q. } 3 \\ & \text{R.q. } 8 + \text{R.q. } 3 \\ \text{a} & \overline{\phantom{8 + \text{R.q. } 24 + \text{R.q. } 24 + 3}} \\ \text{b} & 8 + \text{R.q. } 24 + \text{R.q. } 24 + 3 \\ & \overline{\phantom{8 + \text{R.q. } 24 + \text{R.q. } 24 + 3}} \\ & 11 + \text{R.q. } 96 \end{array}$$

Pruova della quadratura de' Binomij.

Quando il Binomio sarà composto di numeri e Radici la Radice che comporra il Binomio del produtto bisogna che habbia proportione con la Radice del Binomio che sia quadrato come da numero quadrato a numero quadrato, altrimente la moltiplicatione sarebbe falsa, et ancora la differentia del quadrato del numero al quadrato della Radice del produtto, deve essere un numero quadrato, il lato del quale deve essere la differentia del quadrato del numero del quadrato della Radice del Binomio che sia quadrata, come per l'essempio sudetto si vede, che, la proportione da R.q.7 a R.q.448 e come da numero quadrato a numero quadrato, et la differentia del quadrato di 23 e di R.q.448 e 81 ch'è numero quadrato, il cui lato è 9, e tanto bisogna che sia differentia tra il quadrato di 4 e di R.q.7, altrimente la moltiplicatione sarebbe falsa; e di cie sia detto assai, che hora dirò del moltiplicare Binomio via Binomio.

Moltiplichisi 4 + R.q.7 via 3 + R.q.5, e facciasi come si è detto di sopra, che non replicare il modo, essendosi detto a bastanza; faranno12 + R.q.63 + R.q.80 + R.q.35 ranno 12 + R.q.63 + R.q.80 + R.q.35, le quali non si possono sommare, per non essere fra di loro proportione come da numero quadrato a numero quadrato, et perchè il nascer di questo quadrinomio, non essendosi moltiplicato pit che Binomio via Binomio, forse parerà a uno principiante strano: sappia che questo procede che fra R.q.3 e R.q.5 non e proportione come da numero quadrato a numero quadrato (come si vedrà in questo altro essempio).

Moltiplichisi 6 + R.q.2 via 3 + R.q.8, che moltiplicato (come si vede nella

$$\begin{array}{c} 4 + \text{R.q. } 7 \\ 3 + \text{R.q. } 5 \\ \hline 12 + \text{R.q. } 63 + \text{R.q. } 80 + \text{R.q. } 35 \end{array}$$

figura) fa 18 + R.q.18 + R.q.288 + 4, che gionto 18 con 4 fa 22, e R.q.18 con R.q.288, fa R.q.450, si che ridotta a brevità la moltiplicatione e 22 + R.q.450, e questo procede, perchè da R.q.8 a R.q.2 e proportione come da numero quadrato a numero quadrato, et fanno, che questi dui Binomij moltiplicati l'uno via l'altro, fanno un solo Binomio.

Moltiplicasi R.q.24 + R.q.3 via R.q.6 + R.q.2, fa (come si vede nella figura)

$$\begin{array}{c} 6 + \text{R.q. } 2 \\ 3 + \text{R.q. } 8 \\ \hline 18 + \text{R.q. } 18 + \text{R.q. } 288 + 4 \\ \hline 22 + \text{R.q. } 450 \end{array}$$

12 + R.q.18 + R.q.48 + R.q.6, il quale quadrinomio non si può sommare, per non essere fra di loro proportione come da numero quadrato a numero quadrato (come ho detto di sopra).

Moltiplichisi R.q.24 + R.q.8 via R.q.6 + R.q.2: facciasi come si vede nella

$$\begin{array}{c} \text{R.q. } 24 + \text{R.q. } 3 \\ \text{R.q. } \ 6 + \text{R.q. } 2 \\ \hline 12 + \text{R.q. } \ 18 + \text{R.q. } 48 + \text{R.q. } 6 \end{array}$$

figura, e faranno12 + R.q.48 + R.q.48 + 4, che sommati insieme fanno 16 + R.q.192, e questo è Binomio solo, e quel di sopra fu quadrinomio, e questo procede, che da R.q.8 a R.q.2, e proportione come da numero quadrato a numero quadrato, e così da R.q.24 a R.q.6 e pur proportione come da numero quadrato a nurnero quadrato, e percib fanno Binomio nel moltiplicare l'una via l'altra, e tutti quelli che haveranno la proportione com'e detto farannosimile effetto, e parendomi haver detto a bastanza del moltiplicare de' Binomij via Binomij hora dire del moltiplicare Binomio via Residuo.

Tutti i Binomij, i quali saranno moltiplicati via il loro Residuo, farannonu-

$$\begin{array}{c}
\text{R.q. } 24 + \text{R.q. } 8 \\
\text{R.q. } 6 + \text{R.q. } 2 \\
\hline
12 + \text{R.q. } 48 + \text{R.q. } 48 + 4 \\
\hline
16 + \text{R.q. } 192
\end{array}$$

mero, come per essempio, se si moltiplicara 4 + R.q.7 via 4 − R.q.7, prima si moltiplica R.q.7 di sotto via + R.q.7 di sopra, la −7, il quale si mette sotto la linea .a., poi si moltiplica − R.q.7 di sotto via 4 di sopra, fa −R.q.112, e si mette sotto la linea .a., poi si moltiplica 4 di sotto via R.q.7 di sopra, fa + R.q.112, e 4 di sotto via 4 di sopra fa 16, che sommato − R.q.112, con + R.q.112 fa zero, e sommato − 7 con + 16, fa 9, ch'è posto sotto la linea .b.

E però quando si ha a moltiplicare un Binomio via il suo Residuo Basta

$$\begin{array}{lc}
 & 4 + \text{R.q. } 7 \\
 & 4 - \text{R.q. } 7 \\
\text{a} & \overline{16 + \text{R.q. } 112 - \text{R.q. } 112 - 7} \\
\text{b} & \overline{\qquad\qquad 9 \qquad\qquad}
\end{array}$$

cavare il quadrato della minore del quadrato della maggiore delle due quantità, che componevano il Binomio, e quello che resta e la moltiplicatione del Binomio via il suo Residuo, e quando si dice il Residuo del suo Binomio si ha da intendere che le due quantità, che compongono il Binomio, la minore sia cavata dalla maggiore, e quel che resta e il Residuo di quel Binomio.
Moltiplichisi R.q.48 + 4 via R.q.3 − 1, fa 12 + R.q.48 − R.q.48 − 4, che sommati insieme fanno 8, e si vede che fa l'effetto come se fosse un Binomio moltiplicato via il suo Residuo, e questo procede, perchè tutti quelli composti, delli quali, moltiplicando la maggior quantità del suo Binomio via la minore del Residuo, faccino quanto sarebbe a moltiplicare la maggior del Residuo via la minor del Binomio, farannosimile effetto, il che parimente aviene de' Binomij composti di due R.q., come sarebbe R.q.6 + R.q.4 via R.q.3 −R.q.2, che moltiplicati fanno (come si vede) R.q.18 + R.q.12 − R.q.12 − R.q.8, che, levate le R.q.12, per essere più e meno fanno zero, e sommate + R.q.18 con −R.q.8 fa R.q.2, e così saranno tutte le moltiplicationi de' Binomij e Residui

di simile qualita.

Moltiplichisi $4 + \text{R.q.}6$ via $\text{R.q.}24 - 3$, fanno $\text{R.q.}384 + 12 + 12 - \text{R.q.}54$,

$$\begin{array}{c} \text{R.q. } 6 + \text{R.q. } 4 \\ \text{R.q. } 3 - \text{R.q. } 2 \\ \hline \text{R.q. } 18 + \text{R.q. } 12 - \text{R.q. } 12 - \text{R.q. } 8 \\ \hline \text{R.q. } 2 \end{array}$$

che cancellato il + e − resta $\text{R.q.}384 - \text{R.q.}54$, e questa moltiplicatione di Binomio e Residuo, crea un Residuo, come si vede nella figura passata, e per maggior intelligentia di questo ne mettero ancor dui essempij in figura, e poi seguirò il moltiplicare de'Residui.

$$\begin{array}{c} 4 + \text{R.q. } 6 \\ \text{R.q. } 24 - 3 \\ \hline \text{R.q. } 384 + 12 - 12 - \text{R.q. } 54 \\ \hline \text{R.q. } 384 - \text{R.q. } 54 \end{array}$$

Moltiplicare di Residui.

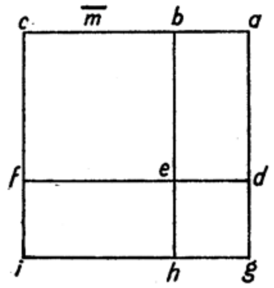
$$\begin{array}{c} 4 - \text{R.q. } 7 \\ 4 - \text{R.q. } 7 \\ \hline 16 - \text{R.q. } 112 - \text{R.q. } 112 + 7 \\ \hline 23 - \text{R.q. } 448 \end{array}$$

Moltiplichisi $4 - \text{R.q.}7$ via $4 - \text{R.q.}7$, farà $16 - \text{R.q.}112 - \text{R.q.}112 + 7$, che aggionto + 7 con + 16 fa 23, e $- \text{R.q.}112$ con $- \text{R.q.}112$ fa $- \text{R.q.}448$, che gionti insieme fanno $23 - \text{R.q.}448$, e questo produtto e la quadratura del detto Residuo, e avertiscasi che ogni Residuo moltiplicato in se stesso fa un Residuo, il quale sarà sempre della natura del primo Residuo, e nei seguenti essempij si porranno solo le figure che sono state poste nei Binomij, che solo vi e questa differenza, che quello che dice piùnei Binomij dice meno nelli Residui.

$$\begin{array}{c} \text{R.q. } 8 - \text{R.q. } 3 \\ \text{R.q. } 8 - \text{R.q. } 3 \\ \hline 8 - \text{R.q. } 24 - \text{R.q. } 24 + 3 \\ \hline 11 - \text{R.q. } 96 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 4 - \text{R.q. } 7 \\ 3 - \text{R.q. } 5 \\ \hline 12 - \text{R.q. } 63 - \text{R.q. } 80 + \text{R.q. } 35 \\ \hline 12 + \text{R.q. } 35 - \text{R.q. } 80 - \text{R.q. } 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 6 - \text{R.q. } 2 \\ 3 - \text{R.q. } 8 \\ \hline 18 - \text{R.q. } 18 - \text{R.q. } 288 + 4 \\ \hline 22 - \text{R.q. } 450 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{R.q. } 24 - \text{R.q. } 3 \\ \text{R.q. } \ 6 - \text{R.q. } 2 \\ \hline 12 - \text{R.q. } 18 - \text{R.q. } 48 + \text{R.q. } 6 \\ \hline 12 + \text{R.q. } 6 - \text{R.q. } 48 - \text{R.q. } 18 \end{array}$$

Dimostratione come meno via meno faccia più. [13]



Sia la linea .g.i. R.q.18, della quale se n'habbia da cavare la linea .m., la qual sia R.q.2; sia in detta linea .g.i. segnato il punto .h.

[13] Sia data la linea .a.b quale sia lunga 6, de la quale se ne sia cavata la linea .b.c che io presuppongo che sia R.q.3; la linea .a.c. resterà $6 - $ R.3, et perchè 3 non ha Creatore non si può sapere quanto sia precisamente la linea .a.c. ma chiara cosa è che il quadrato g.d.f.i sia la sua superficie; et che di tutte le superfici .a.b.g.h. se egli se ne cava lo gnomone d.b.f. resterà la superficie .g.d.l.f., et per superare quanto è il gnomone a.b.d.e., che per essere la linea a.d. R.3 la linea .a.b. 6 che moltiplicate fanno R.108 et tanto si è il parallelogramma c.b.f.h. il quale sarà pure R.108; ma a non fa di bisogno, se non il parallelogrammo i.e.f.h. per avere tutta la superficie dello gnomone d.b.f., però se del paralelogrammo c.b.f.h., ch'è R.108 ne trarremo il quadrato c.b.i.e, il qual sappiamo esser 3, et tanto è il parallelogramma i.e.f.h. che gionto che gionto con il parallelogramma d.b. qual'è R.108 farà R.$432 - 3$ et questo è tutto lo gnomone d.b.f. cioè r.$432 - 3$, resta 39 $-$ R.432; et tanto sarà la superficie g.f.d.i et perchè nelo moltiplicare di più, et meno, si cavano tutti due i parallelogrammi d.b. et b.f. li quali ciascuno da se è R.108, ma vengono ad essere più del gnomone d.b.f. perchè ci viene ad essere posto due volte il quadro c.b.i.e. et questa dimostratione basta a chiarir la mente.

in tal modo che .g.h. sia pari alla linea .m., e per sapere quanto sia il resto della .h.i. facciasi sopra la .g.i. il quadrato .a.c.g.i. e poi dal punto .h. si tiri la .h.b. paralella all'.a.g. et in essa .a.g. si faccia il punto .d. in tal modo che .d.g. sia pari alla .g.h. et a esso punto .d. si tiri la .d.f. paralella alla .g.i. e per la [...] del secondo il paralello .b.c.e.f. sarà quadrato, e sarà composto della linea .h.i. restante della .g.i. E per trovare quanto e detto quadrato, si sa per la notizia; sia della .g.i., la quale e R.q.18, che il quadrato .a.c.g.i. e 18 di superficie: però se di esso si cava il gnomone .b.g.f. restarà il quadrato .b.c.e.f. E per sapere quanto e detto gnomone: si sa, che [è] il paralello .a.b.g.h. e perchè la linea .a.g. e R.q.18, e la linea .a.b. e R.q.2, che moltiplicata l'una via l'altra, fa R.q.36, che il lato è 6, e così il paralellogrammo .d.f.g.i. e pur 6, per essere composto delle medesime linee. Ma per sapere quanto e solo il paralellogrammo .e.f.h.i. se n'ha da cavare .d.e.g.h. ch'è 2, perch'è composto della linea .g.h., ch'è R.q.2. Adunque tutto il gnomone .b.g.f. e 10, che tratto di 18 resta 8, e la linea .h.i. sarà R.q.8.

Partire di numero o R.q. per Binomij.

Havendosi a partire numero per Binomio, perchè bisogna che il partitore sia semplice numero o R.q., però havendo a partire per un Binomio bisogna ritrovare modo di fare che il Binomio divenga numero, moltiplicandolo per qualche quantità, che sia qual si voglia, pur che faccia tal effetto non importa, e per piùchiarezza verrò alli essempij.

Partasi 18 per $4 +$ R.q.7; essendo $4 +$ R.q.7 partitore, non si può partire se non si riduce a numero: però bisogna moltiplicarlo per il suo residuo, che sappiamo che fa numero, senza cercare altro (come fu detto nel moltiplicare, che ogni Binomio moltiplicato per il suo Residuo fa sempre numero); però se si moltiplicara $4 +$ R.q.7 via $4 -$ R.q.7 farà 9, che sarà il partitore, e perchè $4 +$ R.q.7 e stato moltiplicato per $4 -$ R.q.7, bisogna parimente moltiplicare

18 per 4 − R.q.7, per dare egualmente a tutte due le parti, che farà 72 − R.q.2268, che partito per 9 ne viene 8 − R.q.28, ch'è il suo produtto.

Partasi 10 + R.q.8 per 2 + R.q.2. Moltiplichisi 2 + R.q.2 via il suo residuo, ch'è 2 − R.q.2, fa 4 + R.q.8 − R.q.8 − 2, ch'è 2, e questo è il partitore.

Moltiplichisi 10 + R.q.8, che si ha da partire, per 2 − R.q.2, il 16 − R.q.72, che partito per 2 ne viene 8 − R.q.18, e per mostrare che tanto fa a moltiplicare il partitore via il suo residuo quanto se si moltiplica per altra quantità, pur che quella moltiplicatione faccia numero: partasi (come si è detto di sopra) 10 + R.q.8 per 2 + R.q.2, moltiplichisi il partitore per 4 − R.q.8, farà 4, e questo è partitore.

$$\begin{array}{c} 2 + \text{R.q. } 2 \\ 2 - \text{R.q. } 2 \\ \hline 4 + \text{R.q. } 8 - \text{R.q. } 8 - 2 \\ \hline \text{partitore } 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 10 + \text{R.q. } 8 \\ 2 - \text{R.q. } 2 \\ \hline 20 + \text{R.q. } 32 - \text{R.q. } 200 - 4 \\ \hline 16 - \text{R.q. } 72 \\ \hline 8 - \text{R.q. } 18 \end{array}$$

Moltiplichisi 10 + R.q.8 via 4 − R.q.8, fa 32 − R.q.288, che partito per 4 ne viene 8 − R.q.18, e questo essempio voglio che basti per quello ch'ho detto di sopra.

Partasi 6 per 2 − R.q.2. In questo bisogna tenere il medesimo ordine che si è tenuto nel Binomio nel moltiplicare questo residuo, ch'è partitore, per una quantità che ne venga numero, che per non cercar altro, sempre il suo Binomio fa l'efetto, però moltiplichisi 2 − R.q.2 via 2 + R.q.2 suo Binomio, fa 2, qual e partitore*, e moltiplichisi 6, che va partito, per 2 + R.q.2, fa 12 + R.q.72, che va partito per 2, ne viene 6 + R.q.18, e avertiscasi che tanto farà a partire prima la quantità che va partita e poi moltiplicarla, quanto a moltiplicarla prima e poi partirla, come 6 che va moltiplicato per 2 + R.q.2 e va partito per 2, che tanto sarà a partirlo prima per 2, e to avenimento moltiplicarlo per 2 + R.q.2, quanto a moltiplicare esso 6 prima per 2 + R.q.2, et partite saranno semplici o composte.

Partasi R.q.72 + R.q.12 per R.q.6 + R.q.3, che moltiplicato R.q.6 + R.q.3 per il suo residuo fa 3, et moltiplicando R.q.72 + R.q.12 per R.q.6 − R.q.3 ne viene R.q.432 + R.q.72 − R.q.216 − 6, che partito per 3 ne viene R.q.48 + R.q.8 − R.q.24 − 2 e per il partire questi essempij a me paiono a bastanza.

R.q. 6 + R.q. 3
R.q. 6 — R.q. 3
partitore 3

R.q. 72 + R.q. 12
R.q. 6 — R.q. 3
R.q. 432 + R.q. 72 — R.q. 216 — 6
R.q. 48 + R.q. 8 — R.q. 24 — 2

* Questa dimostrazione è stata aggiunta dal Bombelli all'edizione Rossi [*N. d. E.*].

2 — R.q. 2
2 + R.q. 2
partitore 2

6
2 + R.q. 2
12 + R.q. 72
Avenimento 6 + R.q. 18.

A partire per un Binomio dove intravenghi RR.q.

Quando si haverà a partire simil sorte de' Binomij, si potrà procedere in due modi: l'uno sarà trovare un composto che moltiplicato via esso Binomio faccia numero; overo moltiplicare tal Binomio per il suo Residuo, che il produtto sarà sempre un Residuo, e questo ultimo Residuo moltiplicato per il suo Binomio, il produtto del quale sarà numero, sarà il partitore (come più chiaramente dimostreranno gli essempij).
Presuposto che si habbia a partire 10 per RR.q.2 + 1, per trovare un composto, che moltiplicato per RR.q.2 + 1 faccia numero, facciasi cosi. Piglisi il cubato di RR.q.2, che sarà RR.q.8, et il quadrato di esse RR.q.2 e R.q.2, e moltiplichisi per 1, poi il produtto di RR.q.2 con il quadrato di 1, ch'è RR.q.2, e poi il cubato dell'istesso 1, e si componghino insieme questi quattro produtti, che saranno

RR.q.8 + R.q.2 + RR.q.2 + 1, poi si cominci alla seconda, e se gli faccia cangiar nome, cioè, che per più dica meno, e così alla quarta, che dirà RR.q.8 − R.q.2 + RR.q.2 − 1, e questo sarà il composto che moltiplicato via il partitore farà numero, che moltiplicato per RR.q.2 + 1 partitore, e per 10, che va partito, ne viene 1 per il partitore, e per la quantità che va partita ne viene RR.q.80000 − R.q.200 + RR.q.20000 − 10, che partito per 1 ne viene il medesimo, che composti i più e meni insieme fanno RR.q.80000 + RR.q.20000 − R.q.200 − 10, e questo è lo avenimento di tal partire, ch'è il primo modo proposto. Il secondo si è moltiplicare ciascuna delle parti per il Residuo del partitore, cioè RR.q.2 + 1 e 10 per RR.q.2 − 1 residuo del partitore, ne verrà per il partitore R.q.2 − 1, e per quel che va partito RR. q. 20000 − 10, poi di nuovo si moltiplicara il partitore, ch'è R.q.2 − 1, per il suo Binomio, ch'è R.q.2 + 1, e così quel che va partito, ch'è RR.q.20000 − 10, ne viene per il partitore 1, e per quel che va partito RR.q.80000 + RR.q.20000 − R.q.200 − 10 (come fu detto di sopra).

Partasi 4 per RR.q.3 + 1, trovasi il composto che si ha da moltiplicare RR.q.3 + 1 partitore acciochè ne venghi numero, che sara, per la regola data di sopra, RR.q.27 − R.q.3 + RR.q.3 − 1, che moltiplicato per il partitore ne viene 2, e per quel che va partito ne viene RR.q.6912 − R.q.48 + RR.q.768 − 4, che partito per 2 partitore ne viene RR.q.432 − R.q.12 + RR.q.48 − 2, che aggionti i prix e 1neni insieme, fanno RR.q.432 + RR.q.48 − R.q.12 − 2, e questo è I'avenimento di partire 4 per RR.q.3 + 1. Ma per non havere a mol-tiplicare il partitore via il composto che ha da fare numero (come e stato questo di RR.q.3 + 1 via RR.q.27 + RR.q.3 − R.q.3 − 1) Rasta pigliare il quadroquadrato di ciascuna parte ch'è 3, et 1, e cavare il minore del maggiore: resta 2, e tanto fa a moltiplicare RR.q.3 + i 1 per RR.q.27 + RR.q.3 − R.q.3 − 1 (come fu detto di sopra).

Partasi 14 per 2 + RR.q.2, quando nel partitore non ci e la unità, cioè 1, 6 meglio partire per il secondo modo, cioè moltiplicare il partitore e quel che va partito per 2 – RR.q.2, che ne viene 4 – R.q.2 per il partitore, e per quel che va partito 28 – RR.q.76832, e di nuovo 4noitiplicato il partitore e quel che va partito per 4 + R.q.2, ne viene 14 per il partitore, e per quel che va partito ne viene 112 + R.q.1568 + RR.q.19668992 – RR.q.307328, che partito per 14 ne viene 8 + R.q.8 – RR.q.512 – RR.q.8, e questo è lo avenimento di tal partimento, ma per trovare il composto che si ha da moltiplicare per 2 + RR.q.2, cubisi i12, fa 8, cubisi RR.q.2, fa RR.q.8; quadrisi RR.q.2, la R.q.2, moltiplichisi via i12 fa R.q.8, quadrisi il 2 fa 4, moltiplichisi via RR.q.2 fa RR.q.512, e questi quattro composti insieme fanno 8 + RR.q.8 + R.q..8 + RR.q.512, poi si faccia cangiar nome alla seconda e quarta, et dove dice più dica meno: 8 + R.q.8 – RR.q.512 – RR.q.8, e questo sarà il composto che moltiplicato per 2 + RR.q.2 fa numero.
Partasi 8 per R.q.3 + RR.q.5; moltiplichisi il partitore e quel che va partito per R.q.3 – RR.q.5, ne viene per il partitore 3 – R.q.5, e per quello che va partito R.q.192 – RR.q.20480, e di nuovo moltiplichisi il partitore e quel che va partito per 3 + R.q.5, binomio di 3 – R.q.5 partitore, fa 4 per il partitore, e per quel che va partito R.q.1728 + R.q.960 – RR.q.1658880 – RR.q.512000, che partito per 4 ne viene R.q.108 + R.q.60 – RR.q.6480 – RR.q.2000, et questo e to avenimento di tal partire, e avertiscasi che non accade affaticarsi di volere aggiongere insieme alcuna delle quantità del quadrinomio, perchè tra Toro non saranno mai communicanti.
Partasi 2 per RR.q.3 + RR.q.2, moltiplichisi il partitore e quell che va partito per RR.q.3 – RR.q.2 residuo del partitore, ne viene R.q.3 – R.q.2 per il partitore, e per quel che va partito ne viene RR.q.48 – RR.q.32, e di nuovo moltiplicato il partitore e quel che va partito per R.q.3 + R.q.2, Binomio del partitore, ne viene

per il partitore 1, e per quel che va partito ne viene RR.q.432 + RR.q.192 − RR.q.288 − RR.q.128, che partito per 1 ne viene il medesimo, e sol questi cinque essempij bastano per li binomij dove possono intravenire RR.q.che hora verrò a dir de gli residui.

Partire di Residui, dove intravenghi RR.q.

Il partire de' Residui dove intravenghi RR.q.e simile al partire de' Binomij (come si vedrà nella operatione).
Partasi 10 per RR. q. 2 − 1, moltiplichisi il partitore e quel che va partito per RR.q.2 + 1, Binomio del partitore, ne viene R.q.2 − 1 per il partitore, e per quel che va partito RR.q.20000 + 10, e di nuovo moltiplichisi il partitore e quel che va partito per R.q.2 + 1, Binomio del partitore, ne viene per il partitore 1 e per quel che va partito RR.q.80000 + RR.q.20000 + R.q.200 + 10, e questo è l'avenimento di tal partire.
Partasi 4 per RR.q.3 − 1, moltiplichisi il partitore e quel che va partito per RR.q.3 + 1, Binomio del partitore, ne viene per il partitore R.q.3 − 1 e per quel che va partito viene RR.q.768 + 4 e di nuovo moltiplicato il partitore e quel che va partito per R.q.3 + 1, Binomio del partitore, ne viene 2 e per quel che va partito RR.q.6912 + RR.q.768 + R.q.48 + 4 che partito per 2 partitore, ne viene RR.q.432 + RR.q.48 + R.q.12 + 2, e questo è to avenimento di tal partire.
Partasi 28 per 2 − RR.q.2, per fuggire la moltiplicatione grande de' numeri ritrovisi prima il partitore (come fu insegnato nel secondo essempio del partire di questi Binomij) e piglisi il quadroquadrato di 2 ch'è 16, e se ne cavi il quadroquadrato di RR.q.2, ch'è 2, resta 14, e questo a il partitore, che partito 28 per 14 ne viene 2. Hora si ritorna da capo e si moltiplica il partitore e il 2, ch'è venuto a partire 28 per 14, per 2 + RR.q.2, fa 4 + RR.q.32. Et di novo moltiplicato per 4 + R.q.2, secondo Binomio del secondo Residuo ultimo partitore, ne viene 16 + RR.q.8192 + RR.q.128

+ R.q.32, e questo è l'avenimento di tal partire, e non accade a moltiplicare il partitore che già partito per prima, e questo modo e molto commodo quando il nuoirro che nasce dal partitore habbia proportione intiera.
I'artasi 8 per R.q.3 − RR.q.5, facciasi come nello essempio passato e moltiplichisi il quadroquadrato di R.q., 3 ch'è 9, e se ne cavi il quadroquadrato 11 R R.q.5, resta 4, il qual e partitore, che partito 8 per 4 ne viene 2, poi R.q.3 − RR.q.5 e 2 per R.q.3 + RR.q.5, fa per il partitore 't R.q.5, e per l'altro R.q.12 + RR.q.80, il quale di nuovo moltiplicaito per 3 + R.q.5, Binomio del partitore, ne viene R.q.108 + R.q.60 + RR.q.6480 + RR.q.2000, e questo è l'avenimento di tal partire.
Partasi 2 per RR.q.3 − RR.q.2, moltiplichisi il partitore e quel he va partito per RR.q.3 + RR.q.2 ne viene per il partitore R.q.3 + R.q.2, e per quel che va partito RR.q.48 + RR.q.32, e di nuovo moltiplicato il partitore e quel che va partito per R.q.3 + R.q.2, Binomio del partitore, ne viene per il partitore 1, e per quel che va partito RR.q.432 + RR.q.192 + RR.q.288 + RR.q.128, che partito per 1 ne viene il medesimo, e solo questi cinque essempij bastano per li Residui dove possino intravenire RR.q.

Diffinitione delle Radici legate.

Tutte le quantità composte di dui nomi, delle quali se ne haverà a pigliare il lato, che non sarà ne primo, ne secondo, ne terzo Binomio, o Residuo, tal quantità non haveranno lato, o volendo nominare il lato si dirà Radice legata di tal composto,[14] come sarebbe se si dicesse, trovami il lato di 7 + R.q.48, che non vuol dir altro che trovare un composto che moltiplicato in se stesso faccia 7 + R.q.48, che sarà 2 + R.q.3, che moltiplicato con 2 + R.q.3 fa 7 + R.q.48, tal che 2 + R.q.3 e lato

[14]Quelle quantità composte che da me saranno chiamte Radici Legate, saranno tanto quanto s'io dicessi trovami il Creatore delle tal quantità composte

di 7 + R.q.48 e tanto e a dire R.q. legata di 7 + R.q.48 quanto a dire 2 + R.q.3, e benchè da qualche altro autore si disputi se tali Radici legate si debbano chiamare R.q. legate o universali, nondimeno a me non importa di volere contendere sopra a questo, perchè non importa in sostanza, e a me pare che stia meglio dire Radice legata, perchè si vuole il lato di tutto il composto perchè sono colegati insieme, e sempre che io dire Radice legata vorre intendere, come ho detto di sopra, e perchè ho detto che il lato di 7 + R.q.48 e 2 + R.q.3, e non ho dato il modo come si trovi, non voglio adunque più differir di dirlo.

Modo di trovare il lato di un Binomio. [15]

[15] Il commun uso è questo, pigliare la quarta parte del quadrato di tutte due le quantità ciascuna da se; et de lo avenimento, si cava la minore de la maggiore; et di quel che resta se ne piglia il creatore, et questo Creatore si aggionge a la metà de la maggior quantità del binomio, et de la somma se piglia la R.q., et a questo composto si aggiunge la Radice legata del suo Residuo, come di 4 + R.q.7 la quarta parte de la maggiore è 4, et la quarta parte del quadrato di R.q.7 è $1\frac{3}{4}$ che cavato di 4 resta $2\frac{1}{4}$ che pigliatone il Creatore è $1\frac{1}{2}$ il quale aggionto con la metà di 4 maggior quantità del Binomio, è $3\frac{1}{2}$, che pigliatone la Radice Legata è tanto, quanto a dire, trova il Creatore di $3\frac{1}{2}$, ch'è R.q.$3\frac{1}{2}$, et notasi, che la Radice Legata non accade a Nominarla, se non quando la quantità è composta; et ancora quello $1\frac{1}{2}$, che fu Creatore di $2\frac{1}{4}$ si ha da cavare di 2 mezzo de la maggio quantità del binomio resta $\frac{1}{2}$ del quale se ne piglia il creatore, et si aggionge a R.q.$3\frac{1}{2}$, che fa R.q.$3\frac{1}{2}$ + R.q.$\frac{1}{2}$ et questo si è il Creatore di 4 + R.q.7, et questo è il Comun'uso. L'altro modo è questo; et di quel che resta se ne piglia il creatore, et si aggionge, et si cava a la maggior parte, la qual somma, et restante sempre si parte + 2, et de lo avenimento se ne piglia il Creatore di ciascuna parte da se, et sia ggiongono insieme; et la somma è il Creatore cercato; et per più chiarezza metterò 'essempio. pigliasi il Creatore di 4 + R.q.7. cavasi il quadrato de la minor del quadrato d ela maggior resta 9, che il suo Creatore è 3, et questo si aggionge a 4 maggior parte del binomio fa 7; et se detto 3 si caverà di 4, restarà 1, del qual 7, et 1, se ne piglia il mezzo che farà $3\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, che pigliato il Creatore di ciascuna da se, et gionti insieme, dirà R.q.$3\frac{1}{2}$ + R.q.$\frac{1}{2}$, et questo è il Creatore di 4 + R.q.7. Et Per parermi più bello questo secondo modo; non farò dimostratione se non di questo, et ne l'operare non mi servirò d'altro modo, et perchè il primo Binomio a trovare il suo creatore, pu essere in tre modo, cioè Radice più Radice come si è veduto; et anco può venire numero più Radice et Radice più numero però metterò qua sotto gl'altri essempi senz'altro commento.
Pigliassi il Creatore di 7 + R.q.48, che sarà come si vede 2 + R.q.3. Et il Creatore di 3 +

Il trovare il lato de' Binomij e prattica di grande importanza e bisogna possederla benissimo, altrimente l'operante assai volte si confondera nelle Radici legate, e massime nelle propositioni geometriche: però venendo alla operatione di volere il lato di 4 + R.q.7 dico che si cavi il quadrato dell'uno del quadrato dell'altro, che l'uno è 16 e l'altro è 7, resta 9, del quale se ne pigli il lato, ch'è 3, e questo si gionge a 4, parte maggiore del Binomio, e si cava, fa 7 e 1, e di questi dui numeri se ne pigli il mezo per regola, ne viene 3 $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, e questi si gionghino insieme come Radici: fanno R.q.3 $\frac{1}{2}$ + R.q.$\frac{1}{2}$ e questo è il lato di 4 + R.q.7 et avertiscasi che se il 9 non havesse havuto lato tal Binomio meno haveria havuto lato (come si mostrera più a basso) et gli lati di questa qualita de' Binomij sono detti Binomij primi (come fu detto nella sua diffinitione) et il suo lato può essere di tre qualita, l'uno due Radici, il secondo un numero più una Radice, tal che il numero sia maggiore della Radice, e il terzo una Radice più un numero, ma che la Radice sia maggiore (come si vedrà nelli due essempij seguenti).

Piglisi il lato di 6 + R.q.32, quadrisi l'uno e l'altro che saranno 36 e 32, che cavato l'uno dell'altro resta 4, il lato del quale è 2, che si gionge e cava a 6, numero del Binomio, fa 8 e 4, delli quali il mezo e 4 e 2, e aggionti insieme (come R.q.) fanno R.q.4 + R.q.2, e perchè R.q.4 ha lato, ch'è 2, si dirà 2 + R.q.2 il qual Binomio e il lato di 6 + R.q.32 (come fu proposto). Piglisi il lato di 9 + R.q.80, cavisi il quadrato della minore, ch'è 80, del quadrato della maggiore, ch'è 81, resta 1, il lato del quale e 1 die aggionto a 9 e cavato fa 10 e 8 e il loro mezo e 5 e 4, che aggionti insieme (come Radici), fanno R.q.5 + 2, il qual'e lato di 9 + R.q.80, questi sono li tre modi sudetti, da' quali nasce e si forma il lato del Primo Binomio. E avertiscasi che di tutti li Binomij overo Residui della differentia de'quadrati loro pigliatone il lato, eguale ha da essere la differentia del quadrato de' lati loro, come per essempio 6 + R.q.32, la differentia de' quadrati loro e 4, il cui lato è 2, simile ileve essere la differentia delli quadrati di 2 + R.q.2 suo lato; il ch'è di grande importanza per

R.q.8 anch'egli sarà come si vede ne la figura R.q.2 + 1.

conoscere se la quadratura di un Binomio sia buona, come per essempio se si havesse a moltiplicare in se R.q.12 + 2, la differentia de' quadrato loro e 8, e il produtto di R.q.12 + 2 in se e 16 + R.q.192, che la differentia de' quadrati loro e 64, quadrato di 8, però quando si haverà a quadrare un Binomio over Residuo: bastara per trovare il numero aggiongere li lor quadrati insieme, e per trovare la Radice si quadrara il numero e se ne cavarà il quadrato per differentia de' quadrati loro, e lo restante sarà la Radice, come sarebbe se si havesse a quadrare R.q.3 + 1, la differentia de' quadrati loro e 2, li quadrati loro sono 4, il qual a il numero, e per trovare la Radice quadrisi esso 4, fa 16, e se ne cava 4 quadrato del 2, resta 12, e R.q.12 sarà la Radice che va accompagnata col numero, che fa 4 + R.q.12 e questo è il quadrato di R.q.3 + 1 e di qui ho trovato la regola di trovare il lato di un Binomio, over Residuo, la quale non restare di porla qui sotto a maggiore intelligentia.

Presuposto che si habbia a pigliare il lato di 6 + R.q.20, cavisi il quadrato della minore della maggiore, resta 16, che il suo lato è 4. Hora bisogna trovare dui numeri che li loro quadrati gionti insieme facciano 6, e che li quadrati cavati l'uno dell'altro restino 4;32 pongo l'uno delli quadrati sia una potenza, l'altro una potenza + 4, e così ho sotisfatto a quanto dissi per una delle conditioni, che il quadrato dell'uno e 4 piùdel quadrato dell'altro. Hor resta che aggionti insieme facciano 6, ma fanno due potenze + 4 e sono eguali a 6; lievasi 4 a ciascuna delle parti, resta 2, e si haveranno due potenze eguali a 2, overamente una potenza eguale a 1, e così quel che fu posto per una po tenza sarà 1, e quel che fu posto una potenza + 4 sarà 5, e saranno li quadrati proposti, e li loro lati saranno R.q.5 e 1, che aggionti insieme fanno R.q.5 + 1, e questo è il lato di 6 + R.q.20.

Modo di trovare il prima Binomio per pratica.

Quando si vorra formare un primo Binomio per pratica piglisi un numero quadrato a beneplacito, del quale se ne cavi un altro numero quadrato, ma tale che lo restante non sia quadrato, e la

Radice del restante aggionta col lato del primo numero quadrato, il composto loro sarà il primo Binomio, come per essempio: piglisi il numero quadrato 36, del quale se se ne cavarà 4, restarà 32, se se ne cavarà 9, restarà 27, se se ne cavarà 16, restarà 20, se se ne cavarà 25, restarà 11, e la R.q.di ciascuno di questi restanti aggionta con 6, lato del 36, forma un Binomio primo, cioè 6 + R.q.32, 6 + R.q.27, 6 + R.q.20, 6 + R.q.11, e tutti questi quattro sono Binomij primi.

A trovare il lato del secondo Binomio. [16]

Il secondo Binomio e (come fu detto) composto di R.q. e numero, che il quadrato della Radice e maggiore del quadrato del numero di un numero, ch'è in proportione col quadrato della Radice come da numero quadrato a numero quadrato, come sarebbe R.q.48 + 6, che cavato il quadrato del numero del quadrato della R.q. resta 12 ch'è a proportione con 48 come da numero quadrato a numero quadrato, e volendosi trovare il lato di R.q.48 + 6 cavisi il quadrato del numero del quadrato della R.q.resta 12 (com'e detto di sopra) del quale se ne pigli il lato, ch'è R.q.12, e si aggionge e cava di R.q.48, ne viene R.q.108 e R.q.12, e per regola si parte per 2, ne viene R.q.27 e R.q.3,

[16] Pigliasi il Creatore del secondo binomio cioè R.q.25 + 21: Cavasi il quadrato de la minore del quadrato de la maggiore: resta 84, et di questo si piglia il Creatore, che sarà R.q.84, et questo si aggionga, et si cava a R.q.525, che farà R.q.1029 et R.q.189, che partito per 2 ne viene R.q.$257\frac{1}{4}$ et R.q.$47\frac{1}{4}$: et preso il Creatore di R.q.$257\frac{1}{4}$ et di R.q.$47\frac{1}{4}$ ciascuna da se farà R.R.q.$257\frac{1}{4}$ + R.R.q.$47\frac{1}{4}$: et questo sono il Creatore di di R.525+21. Et per farne la prova quadrasi R.R.q.$257\frac{1}{4}$ + R.R.q.$47\frac{1}{4}$: et se il suo quadrato sarà R.q.525 + 21 starà bene, però se ne mette la provua per più chiarezza mettasi uno sotto l'altro, come si vede ne la figura A, et tirasi sotto la linea .b. poi moltiplicasi R.R.q.$47\frac{1}{4}$ via R.R.q.$47\frac{1}{4}$ fa R.q.$47\frac{1}{4}$ come è mostrato a suo luogo, et mettasi sotto la linea .b. poi moltiplicasi R.R.q.$47\frac{1}{4}$ di sotto via R.R.q.$257\frac{1}{4}$ di sopra, che ne viene R.R.q.$12155\frac{1}{16}$, et dicasi di penna a R.R.$47\frac{1}{4}$ di sotto: poi si moltiplica R.R.q.$57\frac{1}{4}$ di sotto via R.R.q.$47\frac{1}{4}$ di sopra fa R.R.q.$12155\frac{1}{16}$ et mettasi sotto la linea .b. poi si moltiplica R.R.q.$257\frac{1}{4}$ di sotto via R.R.q.$257\frac{1}{4}$ di sopra fa R.q.$257\frac{1}{4}$, che posto con gl'altri prodotti farà tutta la moltiplicatione R.q.$257\frac{1}{4}$ + R.R.q.$12155\frac{1}{16}$ + R.q.$47\frac{1}{4}$, che gionto insieme R.q.$47\frac{1}{4}$ con R.q.$257\frac{1}{4}$ fanno R.q.525; et gionto R.R.$12155\frac{1}{16}$ con R.q.525 + 21 et questo mi pare a sufficienza quanto al Creatore del secondo binomio.

e di ciascuna di esse se ne pigli il lato che sarà RR.q.27 e RR.q.3, e aggionte insieme fanno RR.q.27 + RR.q.3, e questo a il lato di R.q.48 + 6.

Modo di formare li secondi Binomij.

Quando si vorra trovare un secondo Binomio piglisi un numero quadroquadrato e si parta per un numero non quadrato, e lo avenimento si aggionga insieme col partitore (come se l'uno e l'altro fosse R.q.) e la somma sarà la R.q.del Binomio, et il numero sarà il doppio del lato del lato del numero quadroquadrato, come per essempio: sia il numero qadroquadrato 256, il quale sia diviso per 8 numero non quadrato, ne viene 32, aggiongasi insieme 32 e 8 (come se fossero R.q.) fanno R.q.72, le quali saranno le R.q.del Binomio, e 8 sarà il numero c:li'6 il doppio di 4 lato del lato di 256 e R.q.72 + 8 sarà il secondo Binomio, il lato del quale sarà RR.q.32 + RR.q.8 e il lato dei secondi inomij non può essere altro che due Radici di R.q.

Modo di trovare il lato del terzo Binomio. [17]

[17] Pigliasi il Creatore di R.q.200 + R.q.125 come si mostra ne la figura, che tratto il quadrato de la minore del quadrato de la maggiore resta 75, che pigliato il suo Creatore è R.q.75, il quale aggionto a R.q.200, et tratto pure di .q.200, fa R.q.200 + R.q.75, et R.q.200 − R.q.75, et questo partite per 2 ne viene R.q.50 + R.q.18$\frac{3}{4}$ et R.q.50 − R.q.18$\frac{3}{4}$, che pigliata la Radice Legata di ciascuno da se, et gionta insieme farà R.q.$\llcorner$50 + R.q.18$\frac{3}{4}\lrcorner$ + R.q.$\llcorner$50 − R.q.18$\frac{3}{4}$; et questo è il Creatore di R.q.200 + R.q.125 et per farne la provua mettasi in regola come si vede, et tirasi la linea .a. et moltiplicasi R.q.$\llcorner$ R.q.50 − R.q.18$\frac{3}{4}$ di sotto via R.q.$\llcorner$50 − R.q.18$\frac{3}{4}$ di sopra fa R.q.40 − R.q.18$\frac{3}{4}$, perchè a moltiplicare ogni Radice legata in se stessa, si sciogie, et non è più Radice Legata come fanno le Radici sorde, che moltiplicate in se si leva il segno d ela Radice e resta il numero come a suo luogo fa detto: quale R.q.50 + R.q.18$\frac{3}{4}$ si mette sotto la linea .a. Poi si moltiplica R.q.$\llcorner$R.q.50 − R.q.18$\frac{3}{4}\lrcorner$ di sotto via R.$\llcorner$50 + R.q.18$\frac{3}{4}$ di sopra fa R.q.31$\frac{1}{4}$; et notasi che la moltiplicatione di Radici legate via Radici Legate si fa come se non fossero Legate et del produtto si piglia la Radice legata come è quello R.q.50 − R.q.18$\frac{3}{4}$ via R.q.50 + R.q.18$\frac{3}{4}$ fanno 31, et di questo se ne piglia la Radice che sarà come fu detto di sopra R.q..31$\frac{1}{4}$ quale si mette sotto la linea .a. Poi moltiplicasi R.q.$\llcorner$R.q.50 + R.q.18$\frac{3}{4}\lrcorner$ di sotto via R.q.$\llcorner$ − R.q.18$\frac{3}{4}\lrcorner$ di sopra

fa R.q.$31\frac{1}{4}$ et si mette sotto la linea .a. Poi si moltiplica R.q..$\llcorner$R.q.50 + R.q.$18\frac{3}{4}\lrcorner$ di sotto via R.q.50 + R.q.$18\frac{3}{4}$ di sopra fanno R.q.50+R.q.$18\frac{3}{4}$ quale si mette sotto la linea .a.; et haveremo di tutte le moltiplicationi R.q.50 + R.q.$18\frac{3}{4}$ + R.q..$31\frac{1}{4}$ + R.q.$31\frac{1}{4}$ + R.q.50 − R.q.$18\frac{3}{4}$; che levate tutte due le R.q.$18\frac{3}{4}$ per essere una più et l'altra meno restarà R.q.50 + R.q.50 + R.q.$31\frac{1}{4}$ + R.q.$31\frac{1}{4}$, che le due R.q.50 gionte insieme fanno R.q.200, et sommati insieme le due R.q..$31\frac{1}{4}$ faranno R.q.125, che gionto con R.q..200 fa R.q.200 + R.q.125, che è il binomio detto: et perchè è tento laborioso il Creatore di questo binomio, che quando si havesse a trovare, come accade ne le operationi algebriche, tornerà meglio a dire R.q.$\llcorner$R.q..200 + R.q.125, et questa è pure il suo creatore. *Et benchè questa prova non sia molto a proposito in questo luogo; perchè non ho insegnato ancora a maneggiare le Radici legate, et per essere tal Creatore un composto tanto intricato, non ho voluto mettere la sua provua; et chi non la intenderà potrà passare più innanzi dove metterò più particolarmente li quattro atti delle dette Radici Legate.*

Modo di trovare il lato del quarto Binomio.

Volendo trovare il Creatore del quarto Binomio, ch'è 5 + R.q.8, procedasi come ne gli altri, et come si vede ne la figura, et si haverà R.q.$\llcorner 2\frac{1}{2}$ + R.q.$4\frac{1}{4}\lrcorner$ + R.q.$\llcorner 2\frac{1}{2}$ + R.q.$4\frac{1}{4}\lrcorner$ et questo è il Creatore di 5 + R.q.8 Binomio proposto, del quale metterò la prova per aiutare lo operante a maneggiare queste Radici legate insieme, che per altro bisogno, per essere la regola infallibile.
mettasi l'essempio in regola come si vede. Poi si moltiplica R.q.$\llcorner 2\frac{1}{2}$ + R.q.$4\frac{1}{4}\lrcorner$ di sotto via R.q.$\llcorner 2\frac{1}{2}$ − R.q.$4\frac{1}{4}\lrcorner$ di sopra fa $2\frac{1}{2}$ − R.q.$4\frac{1}{4}$ di sotto via R.q.$\llcorner 2\frac{1}{2}$ + R.q.$4\frac{1}{4}\lrcorner$ di sopra fa R.q.2, et si mette sotto la prima linea. Poi si moltiplica R.q.$\llcorner 2\frac{1}{2}$ + R.q.$4\frac{1}{4}\lrcorner$ di sotto via R.q.$\llcorner 2\frac{1}{2}$ − R.q.$4\frac{1}{4}\lrcorner$ di sopra, fa R.q.2; et si mette sotto la linea: poi moltiplicasi R.q.$\llcorner 2\frac{1}{2}$ + R.q.$4\frac{1}{4}\lrcorner$ di sotto via R.q.$\llcorner 2\frac{1}{2}$ + R.q.$4\frac{1}{4}\lrcorner$ di sopra fa $2\frac{1}{2}$ + R.q.$4\frac{1}{4}$, et si mette sotto la linea, et si haverà di tutta la moltiplicatione $2\frac{1}{2}$ + R.q.$4\frac{1}{4}$ + R.q.2 + R.q.2 + $2\frac{1}{2}$ − R.q.$4\frac{1}{4}$, che levate le due Radici $4\frac{1}{4}$ per essere una più, et una meno restarà $2\frac{1}{2}$ + $2\frac{1}{2}$ + R.q.2 + R.q.2 che gionto il numero col numero, et le Radici con le Radici, fa 5 + R.q.8 et questo fu il Binomio proposto.

Modo di trovare il lato del quinto Binomio.

Trovasi il Creatore di R.q.17 + 2 come si vede ne la figura posta di canto che sarà R.q.$\llcorner 4\frac{1}{4}$ + R.q.$3\frac{1}{4}\lrcorner$ + R.q.$\llcorner 4\frac{1}{4}$ − R.q.$3\frac{1}{4}\lrcorner$, et questo è il Creatore di R.q.17 + 2 del quale non se ne mette la provua, per bastar quelle ch'è detto neg'altri.

Modo di trovare il lato del sesto Binomio.

Il terzo Binomio (come fu detto nella sua diffinitione) a composto di due R.q. che del quadrato della maggiore cavatone il quadrato della minore, quello che resta habbia proportione col quadrato della maggiore come da numero quadrato a numero quadrato, come sarebbe: R.q.72 + R.q.54, che il quadrato della minore cavato del quadrato della maggiore resta 18, che ha proportione con 72 come da numero quadrato a numero quadrato, e volendo

---

Trovare il Creatore del sesto Binomio si procede come si è proceduto negl'altri; il quale si propone essere 10 + R.q.7, che pigliato il suo creatore, come si vede ne la sua figura di canto, sarà R.q.$\llcorner$5 + R.q.23$\frac{1}{4}\lrcorner$ + R.q.$\llcorner$5 − R.q.23$\frac{1}{4}\lrcorner$ et questo è il Creatore del sopradetto sesto Binomio, del quale similmente non ne ponerò la provua per la regola sopradetta, ma verrò ai Residui, cioè a trovare il lore creatore.

Modo di trovare il lato del Primo Residuo.

Trovare il Creatore de i residui non è differente da trovare il Creatore de i Binomij; ma il più de la seconda quantità del Creator è sempre meno, et ne i Binomij è sempre più: et per trovare il Creatore del primo residuo, quale pongo esser 4 − R.q.7 il Creatore del suo Binomio, cioè di 4 + R.q.7 si mostrò essere R.q.3$\frac{1}{2}$ + R.q.$\frac{1}{2}$; et quello del residuo sarà R.q.3$\frac{1}{2}$ − R.q.$\frac{1}{2}$ che altra differentia non ci è se non che la seconda parte è meno cioè R.q.$\frac{1}{2}$.
Il Creatore del secondo binomio è RR.4.257$\frac{1}{4}$ + RR.q.47$\frac{1}{4}$, et il Creatore del residuo del medesimo secondo Binomio sarà RR.q.257$\frac{1}{4}$ − RR.q.47$\frac{1}{4}$.
Il Creatore del terzo Binomio si è R.q.$\llcorner$R.q.50 + R.q.18$\frac{1}{4}\lrcorner$ + R.q.$\llcorner$R.q.50 − R.q.18$\frac{1}{4}\lrcorner$: et il Creatore del Residuo del terzo Binomio sarà R.q.$\llcorner$R.q.50 + R.q.18$\frac{1}{4}\lrcorner$ − R.q.$\llcorner$R.q.50 − R.q.18$\frac{1}{4}\lrcorner$.
Il Creatore del quarto Binomio è R.q.$\llcorner$2$\frac{1}{2}$ + R.q.4$\frac{1}{4}\lrcorner$ + R.q.$\llcorner$2$\frac{1}{2}$ − R.q.4$\frac{1}{4}\lrcorner$: il Creatore del Residuo del medesimo Binomio, sarà R.q.$\llcorner$2$\frac{1}{2}$ + R.q.4$\frac{1}{4}\lrcorner$ − R.q.$\llcorner$2$\frac{1}{2}$ − R.q.4$\frac{1}{4}\lrcorner$.
Il Creatore del sesto Binomio è R.q.$\llcorner$5 + R.q.23$\frac{1}{4}\lrcorner$ + R.q.$\llcorner$5 − R.q.23$\frac{1}{4}\lrcorner$: et il Creatore del suo residuo sarà R.q.$\llcorner$5 + R.q.23$\frac{1}{4}\lrcorner$ − R.q.$\llcorner$5 − R.q.23$\frac{1}{4}\lrcorner$.
Et questi non ho posto la provua, per haverne, com'è detto, trattato a bastanza ne i Binomij. Et perchè qualeduno potrebbe dubitare, perchè ho detto il Creatore del terzo, quarto et quinto Binomio, che se non ne trovassero se non questi; che ho posto in questo trovare il Creatore de Residui. Dico che se ne trovano infiniti; ma solo se ne trovano di queste sei nature, et havendo detto dei suoi Residui, ho voluto dire, et ho detto i Residui dei Binomij proposti.

il lato di R.q.72 + R.q.54 piglisi il lato di 18 differentia de' quadrati loro, ch'è R.q.18, e si gionga e cavi di R.q.72, che fa R.q.162 e R.q.18, poi di ciascuna se ne pigli il mezo, che ne viene R.q.$40\frac{1}{2}$ e R.q.$4\frac{1}{2}$; di ciascuna se ne pigli il lato e si aggionghino insieme, che fanno RR.q.$40\frac{1}{2}$ + RR.q.$4\frac{1}{2}$ e questo è il lato di R.q.72 + R.q.54, e volendo trovare un Binomio terzo, piglisi un numero quadrato qualsivoglia e si parta per un numero non quadrato, e lo avenimento si gionghi col partitore (come Radice) e la somma sarà la Radice maggiore, la minore sarà la Radice del doppio del lato del numero quadrato, come per essempio: sia il numero quadrato 100, il partitore sia 2, numero non quadrato, ne viene 50 e R.q.50 si gionga con R.q.2, fa R.q.72, e questa a la R.q. maggiore, e la minore a R.q.40, cioè quattro volte 10 lato del 100, e R.q.72 + R.q.40 e terzo Binomio. Sia parimente 100 il numero quadrato, il partitore sia 5 numero non quadrato, ne viene 20, e aggionti insieme R.q.20 con R.q.5 fa R.q.45, ch'è la Radice maggiore, e la minore sari. R.q.40, che aggionte insieme fanno R.q.45 + R.q.40, e questo anco egli e terzo Binomio, e li lor lati sono RR.q.50 + RR.q.2, Paltro RR.q.20 + RR.q.5, e solo questi tre Binomij hanno lato, gli altri tre, cioè quarto, quinto, e sesto, non hanno lato (come si mostrerà qui di sotto).

Sia il quarto Binomio 6 + R.q.24, cavisi il quadrato della Radice del quadrato del numero, resta 12, del quale se ne pigli il lato, ch'è R.q.12, e si gionghi e cavi di 6, fa 6 + R.q.12, e 6 − R.q.12, e dell'uno e l'altro composto se ne pigli il mezo, ne viene 3 + R.q.3, e 3 − R.q.3, e di ciascuno di questi composti se ne pigli il lato e si gionghino insieme, fanno R.q. legata 3 + R.q.3 + R.q. legata 3 − R.q.3, e queste due R.q. legate sono il lato di 6 + R.q.24. Pere in simil sorte di Binomij e meglio (quando se ne ha a pigliare il lato) dire Radice legata 6 + R.q.24, che R.q. legata 3 + R.q.3 + R.q. legata 3 − R.q.3 e così intraviene nel quinto, e sesto, però per non servire a cosa alcuna nella operatione di trovare tal lato, non ne dire altro, avertendo che tutto quello che si è detto del Binomio serve ancora nei Residui, e solo e differente che bisogna che la quantità minore ne' Binomij dica piu, e ne' Residui dica meno, come 6 + R.q.20 il Residuo sarà 6 − R.q.20, che il lato del Binomio e R.q.5

+ 1, e il lato del Residuo e R.q.5 − 1, e così dell'altro, ma del quarto che fu posto 6 + R.q.24, il Residuo sarà 6 − R.q.24, e il lato del Binomio e R.q. legata 3 + R.q.3 + R.q. legata 3 − R.q.3, e del Residuo sarà R.q. legata 3 + R.q.3 − R.q. legata 3 − R.q.3, e bastando questo verre allà operatione delle R.q. legate, ma prima si ha da avertire che assai volte aviene che nelle R.q. legate la R.q.e numero quadrato, e all'hora se n'ha da pigliare il lato e giongerlo col numero quando il Binomio sarà composto di R.q. e numero, e della comma se ne ha a pigliare il lato, il quale sarà il lato del Binomio proposto, come sarebbe R.q. legata R.q.9 + 1, che pigliato il lato di R.q.9, ch'è 3, e gionto con 1 fa 4, il suo lato è 2, e tanto sarà R.q. legata R.q.9 + 1 e la R.q. legata di R.q.16 + 2 sarà R.q.6, cioè preso la R.q.di 16, ch'è 4, e gionta con 2 fa 6, il suo lato è R.q.6 e notisi che tutte le R.q. legate moltiplicate in se stesse si sciolgono, come sarebbe R.q. legata R.q.5 + 2, moltiplicata in se stessa farà R.q.5 + 2.

Moltiplicare di R.q. legata via numero.

Quando si haverà a moltiplicare R.q. legata via numero, prima si seiolga la R.q. legata col quadrarla, e così si quadra il numero che s'ha da moltiplicare con essa, e poi si proceda come si mostrò nella parte del moltiplicare Binomij e Residui via numero, e del produtto se ne pigliarà la R.q. legata, come sarebbe R.q. legata 4 + R.q.5 via 2. Quadrisi la R.q. legata fa 4 + R.q.5, e a quadrar 2 ne viene 4, che moltiplicato via 4 + R.q.5, fa 16 + R.q.80, e di questo se ne piglia la R.q. legata, che sarà la R.q. legata 16 + R.q.80, e questo è il produtto, perchè assai volte accade havere una R.q. legata con un'altra quantità che non sia R.q. legata, le quali generano poi all'operante confusione insieme, *però si farà il segno della Radice, cioè R.q.e la quantità si chiuderà fra dui ⌞ ⌟ l'uno al contrario dell'altro, come se si havesse R.q. legata 16 + R.q.80, si formarà così R.q.⌞16 + R.q.80⌟ e havendosi a quadrare il produtto sarà 16 + R.q.80, che, com'e detto, solo basta levare la R.q.con li dui ⌞ ⌟.*

Moltiplichisi R.q.⌞5 + R.q.8⌟ via R.q.4, sciolgasi col quadrare la R.q.⌞5 + R.q.8⌟, fa 5 + R.q.8 e così a quadrare la R.q.14 fa 14, che moltiplicato l'uno via l'altro fa 70 + R.q.1568, e di questo si piglia la R.q. legata, farà R.q.⌞70 + R.q.1568⌟, e questo è il produtto.

Moltiplichisi R.q.⌞R.q.8 + R.q.3⌟ − 2 via 5, moltiplichisi R.q.⌞R.q.8 + R.q.3⌟ via 5 (come si è mostrato di sopra) fa R.q.⌞4200 + R.q.18751⌟, e poi si moltiplica il − 2 via 5, fa − 10, che gionto con la R.q. legata fa R.q.⌞4200 + R.q.1875⌟ − 10, e questo è il produtto.

Moltiplichisi R.q.⌞R.q.12 + R.q.6⌟ via R.q.2 + 1. Sciolgasi la R.q. legata col quadrarla, fa R.q.12 + R.q.6, e poi quadrisi R.q.2 + 1, fa 3 + R.q.8, che moltiplicato via R.q.12 + R.q.6, fa R.q.108 + R.q.96 + R.q.54 + R.q.48, che gionto R.q.108 e R.q.48, e R.q.96 e R.q.54 fa R.q.300 + R.q.294 e R.q.LR.q.300 + R.q.294J e il produtto. Ancora si potrebbe procedere in un altro modo, qual e questo, cioè: moltiplicare R.q.LR.q.12 + R.q.61 via R.q.2 fa R.q. ⌞R.q.48 + R.q.24⌟ e di poi per 1, fa R.q.⌞R.q.12 + R.q.6⌟ che aggionti insieme fanno ⌞R.q.48 + R.q.24⌟ + ⌞R.q.48 + R.q.24⌟ che tanto e l'uno come l'altro, ma e più Bello il primo, e migliore.

Moltiplichisi R.q.⌞4 + R.q.6⌟ + 2 via R.q.⌞4 + R.q.6⌟ + 2. Mettasi in regola (come si vede) poi si moltiplichi + 2 di sotto via + 2 di sopra, fa + 4, e questo si mette sotto la linea .a., poi si moltiplica + 2 di sotto via R.q.⌞4 + R.q.6⌟ di sopra (come si a mostrato in principio) fa R.q.⌞16 + R.q.96⌟ e questo si mette anco egli sotto la linea .a., poi si moltiplica R.q.⌞4 + R.q.6⌟ di sotto via 2 di sopra fa R.q.⌞16 + R.q.96⌟ che pur si mette sotto la linea .a., poi si moltiplica R.q.⌞4 + R.q.6⌟4 di sotto via R.q.⌞4 + R.q.6⌟ di sopra, fa 4 + R.q.6, che si mette sotto la linea, poi si tira la linea .b. e giongasi 4 + R.q.6 con 4 fa 8 + R.q.6, e giongasi R.q.⌞16 + R.q.96⌟ con R.q.⌞16 + R.q.96⌟ che (per essere eguali) basta a moltiplicarne una per 2, fa R.q.⌞64 + R.q.1536⌟ che gionto con 8 + R.q.6, fa 8 + R.q.6 + R.q.⌞64 + R.q.1536⌟.

R.q. L4 + R.q. 6.I + 2

R.q. L4 + R.q. 6.I + 2

a ———————————————————————

4 + R.q. 6 + R.q. L16 + R.q. 96.I + R.q. L16 + R.q. 96.I + 4

b ———————————————————————

8 + R.q. 6 + R.q. L64 + R.q. 1536.I è il produtto.

Moltiplichisi R.q.⌞R.q.18 + 2⌟ + R.q.6 via R.q.⌞R.q.18 + 2⌟ − R.q.6. Mettasi per ordine (come si vede) e poi si proceda in questa guisa.

R.q. LR.q. 18 + 2.I + R.q. 6

R.q. LR.q. 18 + 2.I — R.q. 6

———————————————————————

R.q. 18 + 2 + R.q. LR.q. 648 + 12.I — R.q. LR.q. 648 + 12.I — 6

———————————————————————

R.q. 18 — 4

Moltiplichisi − R.q.6 di sotto via + R.q.6 di sopra, fa − 6. Poi moltiplichisi − R.q.6 di sotto via R.q.LR.q.18 + 21 di sopra, fa − R.q.⌞R.q.648 + 12⌟ poi si moltiplica R.q.⌞R.q.18 + 2⌟ di sotto via R.q.6 di sopra, fa + R.q.⌞R.q.648 + 12⌟ poi si moltiplica R.q.⌞R.q.18 + 2⌟ di sotto via R.q.⌞R.q.18 + 2⌟ di sopra, fa R.q.18 + 2, e il tutto si pone sotto la linea, e perchè ci sono due R.q. legate eguali, una piùe l'altra meno, che gionte insieme si abbattono e resta zero, e sommate R.q.18 + 2 con − 6 fa R.q.18 − 4, e questo a il produtto di questa moltiplicatione.

Moltiplichisi R.q.⌞R.q.24 + R.q.2⌟ + 2 via R.q.⌞R.q.24 + R.q.2⌟ + 2, comincisi a moltiplicare + 2 di sotto via + 2 di sopra fa 4, il quale si motto sotto la linea .a., poi si moltiplica + 2 di sotto via R.q.⌞R.q.24 + R.q.2⌟ di sopra fa R.q.⌞R.q.384 + R.q.32⌟ poi si moltiplica R.q.⌞R.q.24 − R.q.2⌟ di sotto via + 2 di sopra, fa R.q.⌞R.q.384 − R.q.32⌟ poi si moltiplica R.q.⌞R.q.24 − R.q.2⌟ di sotto via R.q.⌞R.q.24 + R.q.2⌟ di sopra fa R.q.22, che tutto si pone sotto la linea .a. e farà in tutto R.q.22 + 4 + R.q.⌞R.q.384 + R.q.32⌟ + R.q.⌞R.q.384 − R.q. 32⌟ e questo è il produtto di Ictta moltiplicatione (come nella figura si vede).

R.q.LR.q.24 + R.q.2J + 2
R.q.LR.q.24 — R.q.2J + 2

a

R.q.22 + R.q.LR.q.384 — R.q.32J + R.q.LR.q.384 + R.q.32J + 4

b

R.q.22 + 4 + R.q.LR.q.384 + R.q.32J + R.q.LR.q.384 — R.q.32J

Moltiplichisi R.q.⌞4 + R.q.2⌟ via 3 + R.q.5. Quadrisi ciascuna (la se, l'una farà 4 + R.q.2 e l'altra 14 + R.q.180, che moltiplicato via 4+ R.q.2 farà 56 + R.q.2880 + R.q.392 + R.q.360, e di questa moltiplicatione pigliatone la R.q. legata dirà R.q.⌞56 + R.q.2880 + R.q.392 + R.q.360⌟ e questo è il produtto della moltiplicatione.

Moltiplichisi R.q.⌞R.q.108 + 10⌟ via R.q.⌞R.q.3 + 1⌟. Quadrisi l'una e l'altra fa R.q.108 + 10 e R.q.3 + 1, che moltiplicate l'una via l'altra fa 28 + R.q.768, e la R.q. legata di questo, ch'è R.q.⌞28 + R.q.768⌟, e il produtto. E perchè questo a primo Binomio se ne può irovare il lato, che (come fu insegnato a suo luogo) sarà 4 + R.q.12, 1. così detta moltiplicatione fa 4 + R.q.12.

Moltiplichisi R.q.⌞4 + R.q.8⌟ + R.q.⌞4 − R.q.8⌟ + 2 via R.q.⌞4 + R.q.8⌟ + R.q.⌞4 − R.q.8⌟ + 2. Pongasi in figura (come si vede), poi si moltiplica il + 2 di sotto via tutta la quantità di sopra, t i R.q.L16 + R.q.128d + R.q.L16 − R.q.128d + 4, poi si moltiplica R.q.⌞4 − R.q.8⌟ di sotto via tutta la quantità di sopra fa R.q.8 + 4 − R.q.8 + R.q.⌞16 − R.q.1284⌟, e questo si aggionga con l'altra moltiplicatione, poi si moltiplica R.q.⌞4 + R.q.8⌟ di sotto via tutta la quantità di sopra fa 4 + R.q.8 + R.q.8 + R.q.⌞16 + R.q.128⌟ che posta sotto la linea con l'altre moltiplicationi si haverà 4 + R.q.8 + R.q.8 + R.q.⌞16 + R.q.128⌟ + R.q.8 + 4 − R.q.8 + R.q.⌞16 − R.q.128⌟ + R.q.⌞16 + R.q.128⌟ + R.q.⌞16 − R.q.128⌟ + 4, che gionto il numero insieme, fa 12, e le R.q. insieme fanno R.q.32 e le due R.q.⌞16 + R.q.128⌟ fanno R.q.⌞64

+ R.q.2048⌟, e le due R.q.⌞16 − R.q.128⌟ fanno R.q.⌞ 64 − R.q.2048⌟ che gionte tutte insieme fanno (come di sopra si vede) 12 + R.q.32 + R.q.⌞64 + R.q.2048⌟ + R.q.⌞64− R.q.2048⌟.

Et questo e tutto il produtto della soprascritta moltiplicatione, e se io intor-

R.q. L4 + R.q. 8.I + R.q. L4 — R.q. 8.I + 2
R.q. L4 + R.q. 8.I + R.q. L4 — R.q. 8.I + 2

---

4 + R.q. 8 + R.q. 8 + R.q.L16 + R.q. 128.I + R.q. 8 + 4 — R.q. 8 +
+ R.q.L16 — R.q. 128.I + R.q.L16 + R.q. 128.I + R.q.L16 — R.q.
128.I + 4

---

12 + R.q. 32 + R.q. L64 + R.q. 2048.I + R.q. L64 — R.q. 2048.I

no a queste R.q. legate mi fossi alquanto dilatato, mi e parso che la necessità il comporti, per non si poter quasi sciogliere problema di tre quantità in continua proportione che non ci accadano queste R.q. legate, et il medesimo nelle operationi di Geometria.

Partire di R.q. legate con numero, o Radici, o Binomio, o Residuo.

A partire R.q. legate con numero o R.q. bisogna quadrare l'una parte e l'altra, e poi partir li produtti, e dell'avenimento pigliar la R.q. legata, che sarà quanto si cercava, come per essempio: partasi R.q.⌞R.q.1000 + 32⌟ per 4, quadrisi ciascuna delle parti fa R.q.1000 + 32 et 16. Hor partasi R.q.1000 + 32 per 16, ne viene R.q.3$\frac{29}{32}$ + 2 e la R.q. legata, ch'è R.q.⌞R.q.3$\frac{29}{32}$ + 2⌟ e l'avenimento cercato. Partasi R.q.⌞50 + R.q.200⌟ per R.q.5, quadrisi l'una e l'altra parte fanno 50 + R.q.200 e 5.
Hor partasi 50 + R.q.200 per 5, ne viene 10 + R.q.8 e la R.q. legata di 10 + R.q.8 (cioè R.q.⌞10 + R.q.8⌟) e l'avenimento.

Partasi 8 per R.q.⌞R.q.10 + R.q.6⌟. Tengasi il modo che si è tenuto nel moltiplicare, levandosi la R.q. legata, che a quadrare ciascuna delle parti ne viene R.q.10 + R.q.6 per il partitore, e 64 per quello che va partito. Hora partasi 64 per R.q.10 + R.q.6 (come al suo luogo nel partire per Binomio fu insegnato) ne viene (come si vede Sri figura) R.q.2560 − R.q.1536, e di questo avenimento se ne piglia il lato, che sarà R.q.⌞R.q.2560 − R.q.1536⌟ ch'8 il nostro ricercato avenimento.

R.q. LR.q. 10 + R.q. 6J	**8**
R.q. LR.q. 10 + R.q. 6J	**8**
R.q. 10 + R.q. 6	**64**
R.q. 10 — R.q. 6	**R.q. 10 — R.q. 6**
Partitore 4	**R.q. 40960 — R.q. 24576**

Avenimento R.q. LR.q. 2560 — R.q. 1536J

Partasi R.q.12 per R.q.⌞2 + R.q.2⌟. Quadrisi ciascuna delle parti fa 2 + R.q.2 e 12. Poi partasi 12 per 2 + R.q.2, ne viene 12 + R.q.72 e di questo pigliato la R.q. legata, ch'è R.q.⌞12 − R.q.72⌟ e tan to sarà l'avenimento della partitione.

R.q. L2 + R.q. 2J	**R.q. 12**
R.q. L2 + R.q. 2J	**R.q. 12**
2 + R.q. 2	**12**
2 — R.q. 2	**2 — R.q. 2**
Partitore 2	**24 — R.q. 288**

Avenimento R.q. L12 — R.q. 72J

Partasi 4 + R.q.8 per R.q.⌞2 + R.q.2⌟. Facciasi come di sopra, levando la R.q. legata, che si haverà 2 + R.q.2 partitore, e 24 + R.q.512 da partire, e trovisi il residuo del partitore, ch'è 2 − R.q.2, il Avenimento R.q.⌞8 + R.q.32⌟
qual moltiplicato via il partitore e quel che va partito, ne verrà 2 per il partitore, e 16 + R.q.128 per quel che va partito, il qual partito per 2 ne viene 8 + R.q.32 e R.q.⌞8 + R.q.32⌟ sarà l'avenimento della partitione. Ancora ponere un altro essempio, acciochè l'operante resti sodisfatto, perchè si piglia la R.q. legata dell'avenimento quando si è finito di partire.

R.q. ⌞2 + R.q. 2⌟	4 + R.q. 8
R.q. ⌞2 + R.q. 2⌟	4 + R.q. 8
2 + R.q. 2	24 + R.q. 512
2 — R.q. 2	2 — R.q. 2
Partitore 2	16 + R.q. 128

Avenimento R.q. ⌞8 + R.q. 32⌟

Partasi 12 − R.q.84 per R.q.⌞8 + R.q.60⌟. Facciasi cosi: riducasi 12 − R.q.84 a R.q. legata, et ridurvelo non e altro che a quadrarlo e fa R.q.⌞228 − R.q.48384⌟. Il partitore si moltiplica via il suo Residuo, che sarà R.q.⌞8 − R.q.60⌟ e fa R.q.4, cioè 2 per partitore. Moltiplichisi hora R.q.⌞228 − R.q.48384⌟ per R.q.⌞8 − R.q.60⌟, fa R.q.⌞1824 + R.q.2903040 − R.q.3096496 − R.q.3119040⌟ che partito per 2 ne viene R.q.⌞456 + R.q.181440 − R.q.193531 − R.q.1949404⌟ e questo è l'avenimento.

Partasi 8 per R.q.⌞2 + R.q.2⌟ + 1. Perchè la R.q. legata è accompagnata con il numero, che viene ad essere un Binomio senza il Binomio della R.q. legata, pere tal partire bisogna farlo in due volte, moltiplicando ciascuna delle parti via il Residuo della R.q. legata, il qual'e R.q.⌞2 + R.q.2⌟ − 1, che moltiplicato via 8, fa R.q.⌞128 + R.q.8192⌟ − 8 e moltiplicato via il partitore fa R.q.2 + 1. Hor bisogna moltiplicare ciascuna delle parti via il Residuo del partitore, ch'è R.q.2 − 1, fa R.q.⌞128 − R.q.8192⌟ + 8 − R.q.128 e il partitore fa 1, che partito per 2 ne viene quel medesimo, cioè R.q.⌞128 − R.q.8192⌟ + 8 − R.q.128. E questo partimento e di grandissima importanza a saperlo, perchè chi sapra oprar simili partimenti, maneggiara bene in tutti i modi queste R.q. legate. E quanto al partire non ne dire altro, parendomi haverne detto quanto facea bisogno.

Sommare di Radici legate.

Lo sommare di R.q. legate si può fare nelli quattro modi detti nelle simplici quadrate, ma li tre modi ultimi sono molto laboriosi in queste sorti di Radici. Però bisogna usare il primo modo, il qual è più commodo, ch'è questo. Moltiplicare le due R.q. legate che si hanno a sommare l'una via l'altra e *del produtto pigliarne il lato e doppiarlo per regola, et al produtto aggiongere il quadrato di ciascuna delle parti, e della somma pigliare il lato che sarà quello che si cerca.*

Ma se nelle R.q. legate proposte si vedrà evidentemente esser proportione come da numero quadrato a numero quadrato, si potrà usare il secondo modo, e questo si conoscera quando le due R.q. legate proposte saranno ambedue Binomij, overo Residui, e che la proportione del numero a numero sarà come da numero quadrato a numero quadrato, e la R.q. alla R.q. sarà si come da numero quadroquadrato a numero quadroquadrato, ma tal numero quadroquadrato bisogna che sia il quadrato della proportione ch'è stata fra il numero, e queste sorti di R.q. legate da sommarsi possono accadere assai volte nell'operare, ma ancora può essere che le due R.q. legate la proportione dal numero al numero sia come da numero a numero, e in tal caso bisogna che la proportione della R.q. alla R.q. sia come da numero quadrato a numero quadrato, la qual proportione sia il quadrato della proportione del numero, e di tutti li casi proposti ne mettero gli essempij, cominciando dai più facili.

Sommisi R.q.⌞2 + R.q.3⌟ con R.q.⌞8 + R.q.48⌟. La proportione da 2 a 8 e come da numero quadrato a numero quadrato, cioè a partire 8 per 2 ne viene 4, et a partire R.q.48 per R.q.3 ne verrà R.q.16, che il suo lato e pur 4, del quale se ne piglia il lato, ch'è 2, e la proportione ch'è tra R.q.⌞2 + R.q.3⌟ con R.q.⌞8 + R.q.48⌟ e come da 1 a 2, e tanto sarebbe a partire R.q.⌞8 + R.q.48⌟ per R.q.⌞2 + R.q.3⌟ che ne verrebbe 2, al quale per sommare le dette due R.q. legate e per regola se li gionge 1, fa 3, e questo si moltiplica via la minore, ch'è R.q.⌞2 + R.q.3⌟ fa R.q.⌞18 + R.q.243⌟ e questa a la somma delle dette due Radici.

Sommisi R.q.⌞4 + R.q.6⌟ con R.q.⌞8 + R.q.24⌟; la proportione del numero al numero sarà 2 e la proportione della R.q.alla R.q.sarà R.q.4, il suo lato è 2. Però piglisene il lato ch'è R.q.2, et aggiungasegli 1, fa R.q.2 + 1, *moltiplichisi via la minore ch'è R.q.⌞4 + R.q.6⌟, riducendo la R.q.2 + 1 a R.q. legata, ch'è R.q.⌞3 + R.q.8⌟, qual si moltiplica via R.q.⌞4 + R.q.6⌟ fa R.q.⌞12 + R.q.128 + R.q.54 + R.q.48⌟ e questa a la somma.*

Sommisi R.q.⌞8 + R.q.32⌟ con R.q.⌞8 − R.q.32⌟. Essendo queste due R.q. proposte una Binomio, e l'altra il suo Residuo, la somma si piò fare, e questo si farà nel primo modo insegnato nelle quadrate. Moltiplicando l'una via l'altra, che fanno R.q.32, il quale si duplica, fa R.q.128, li loro quadrati saranno 8 + R.q.32 et 8 − R.q.32, che gionti con R.q.128 fanno 16 + R.q.128, che pigliatone la R.q. legata, sarà R.q.⌞16 + R.q.128⌟ e tanto e la somma; ma la regola per brevità sia questa. Quando si haveranno a sommare due Radici legate, che l'una sia il Binomio, e l'altra il suo Residuo, si quadraranno tutte due le quantità ciascuna da se, e si cavarà la minore della maggiore, e del restante se ne piglierà il lato, il quale si giongerà con la maggiore, e per regola la somma si moltiplicara per 2, e la Radice legata del produtto sarà la somma cercata, come sarebbe R.q.⌞2 + R.q.3⌟ con R.q.⌞2 − R.q.3⌟, che cavato il quadrato di R.q.3 del quadrato di 2 resta 1, il lato del quale e 1, che gionto con 2, parte maggiore del Binomio, fa 3 e per regola si moltiplica per 2, fa 6 del quale se ne piglia il lato, ch'è R.q.6, qual a la somma delle due R.q. legate proposte, che non ne viene se non una Radice sola che procede perchè 2 + R.q.3 e Binomio primo, che il suo lato a R.q.1 $\frac{1}{2}$ *+ R.q.*$\frac{1}{2}$*, e il lato del suo Residuo e R.q.1*$\frac{1}{2}$ *− R.q.2, che gionti insieme fanno R.q.6. Ma siano le due Radici da sommare R.q.⌞R.q.6 + R.q.2⌟ e R.q.⌞R.q.6 − R.q.2⌟, cavasi il quadrato di R.q.2 del quadrato di R.q.6, resta 4, che il suo lato è 2, e si gionge con la maggiore, ch'è R.q.6, fa R.q.6 + 2, il quale per regola si moltiplica per 2 fa R.q.24 + 4, del qual se ne piglia il lato, ch'è R.q.⌞R.q.24 + 4⌟ ch'è la somma delle due R. legate proposte.*

Sommisi R.q.⌞12 + R.q.108⌟ con R.q.⌞2 + R.q.3⌟. Moltiplichisi l'una via l'altra fanno R.q.⌞42 + R.q.1728⌟, il suo lato è R.q.24 + R.q.18, che duplicato fa R.q.96 + R.q.72, et aggionto con li quadrati di tutte due le parti, *che sono 12 + R.q.108, e 2 + R.q.3, fanno 14 + R.q.147 + R.q.96 + R.q.72, e la R.q. legata di questo, cioè R.q.⌞14 + R.q.147 + R.q.96 + R.q.72⌟ perchè R.q.108 e R.q.3 si possono sommare insieme e fanno R.q.147, ch'è la somma delle R.q. proposte.*

Sommisi R.q.⌞R.q.2 + 1⌟ con R.q.⌞R.q.162 + 9⌟. Moltiplichisi l'una via l'altra fanno R.q.⌞27 + R.q.648⌟ che pigliatone il suo lato sarà 3 + R.q.18 e duplato fa 6 + R.q.72, che gionto con il quadrato di tutte due le parti, che sono R.q.2 + 1 e R.q.162 + 9, farà R.q.512 + 16 e la sua R.q. legata, cioè R.q.⌞R.q.512 + 16⌟, sarà la somma cercata.

E quelle che haveranno le proportioni come haveano le due profiosico, cioè come da numero quadrato a numero quadrato, si potrànno ini,uarc e sotrare, e ne potendosi sommare, ne sotrare, si proceda per la via del più e del meno (come fu detto nel sommare delle R.q. quando non haveano proportione come da numero quadrato a numero quadrato).

Sommisi R.q.⌞2 + R.q.3⌟ con R.q.⌞R.q.12 + 2⌟. Moltiplichisi l'una via l'altra, fa R.q.⌞R.q.108 + 10⌟ la quale non ha lato, tal sorte di R.q.non si possono sommare se non per via del più e si dirà R.q.⌞2 + R.q.3⌟ + R.q.⌞R.q.12 + 2⌟. Ma si potrebbe ancora seguitare la regola col doppiarla, e fa R.q.⌞R.q.1728 + 40⌟ questo si sommi con li quadrati delle due quantità, che sono 2 + R.q.3 e ???????? 12 + 2, fanno R.q.⌞R.q.1728 + 40⌟ + R.q.27 + 4. E la R.q. legata di questo composto, ch'è R.q.⌞R.q.⌞R.q.1728 + 40⌟ + R.q.27 + 4⌟ e la somma cercata, la qual quantità e piùintricata che prima. Però e meglio quando il produtto non ha lato aggiongerle insieme con il più e fanno R.q.⌞2 + R.q.3⌟ + R.q.⌞R.q.12 + 2⌟ benchè 2 + R.q.3 ha lato, per esser binomio primo, ma presuposto che non lo havesse si giongeranno per via del più.

Sommisi R.q.$\llcorner$2 − R.q.3$\lrcorner$ con R.q.$\llcorner$R.q.12 + 3$\lrcorner$. Moltiplichisi I'una via l'altra fanno R.q.3, il suo lato è RR.q.3, et il suo doppio e RR.q.48, e li quadrati sono 5 + R.q.3 che gionti con RR.q.48 fa R R.q.48 + R.q.3 + 5. E la R.q. legata di questo, ch'è R.q.$\llcorner$RR.q.48 R.q.3 + 5$\lrcorner$ e la somma delle due R.q. legate proposte, la qual e tuna R.q. legata sola, et in questo caso starà meglio una R.q. legata che due. E avertiscasi che questa R.q. legata ha lato, et è RR.q.6$\frac{3}{4}$ + RR.q.4 + R.q.1 $\frac{1}{2}$ − R.q.$\frac{1}{2}$, il qual quadrinomio moltiplicato in se stesso fa RR.q.48 + R.q.3 + 5, qual moltiplicatione (per esser bella) la voglio mettere per ordine (come si vede) e nel moltiplicare si mettano li più alla parte sinistra e li meno alla destra. E prima si moltiplica tutta la quantità di sopra via − R.q.$\frac{1}{2}$ di sotto, fa $\frac{1}{2}$ − R.q.$\frac{3}{4}$ − RR.q. $\frac{3}{16}$ − RR.q.$\frac{27}{16}$. Dipoi si moltiplica la medesima quantità di sopra via + R.q.1 $\frac{1}{2}$ di sotto, fa − R.q.$\frac{3}{4}$ + 1 $\frac{1}{2}$ + RR.q.$\frac{27}{16}$ + RR.q.$\frac{243}{16}$ e poi si ritorna pur a moltiplicare tutta la quantità di sopra via + RR.q.$\frac{3}{4}$ di sotto, fa − RR.q.$\frac{3}{16}$ + RR.q. $\frac{27}{16}$ + R.q.$\frac{3}{4}$ + 1 $\frac{1}{2}$. Finalmente si ritorna a moltiplicare la predetta quantità di sopra via + RR.q.6 $\frac{3}{4}$ di sotto, fa − RR.q.$\frac{27}{16}$ + RR.q.$\frac{243}{16}$ + 1 $\frac{1}{2}$ + R.q.6 $\frac{3}{4}$. Hor bisogna considerare che la quantità che e meno segnata col .c. si scancella, perchè pari alla quantità ch'è segnata similmente col .c.; la .b. scancella la .b., e la .d. scancella la .d. e la .e. meno cavata della .e. più resta R.q.3, qual e segnata di sotto da tutte le moltiplicationi da se, pur con la lettera .e., le due quantità segnate con la .f. sotto il meno fanno RR.q.3 quale col segno della .f. e pur posta dalla parte del meno da se sotto la linea. Hora tutte le quantità dalla banda del più segnate .a. gionte insieme fanno 5, segno .a. a messo dalla parte del più sotto la linea. E tutte le quantità i dalla parte del piùsegnate .g. gionte insieme fanno RR.q.243, quali pur col segno .g. e posta dalla banda del più sotto la linea. E tutte le moltiplicationi si sono ridutte a queste quattro quantità, delle quali queste tre, che sono 5, R.q.3 e RR.q.243 sono piu, e la restante quarta, ch'è RR.q.3, è meno, la quale cavata di piùRR.q.243 resta RR.q.48 si che il produtto della moltiplicatione viene ad essere RR.q.48 + R.q.3 + 5 (come si ricerca). E avertiscasi che si disse che la somma delle due due proposte R.q. legate, qual'è R.q.$\llcorner$RR.q.48 + R.q.3 +

5$\lrcorner$ havea lato, et era (come si vide) RR.q.6 $\frac{3}{4}$ + RR.q.$\frac{3}{4}$ + R.q.1 $\frac{1}{2}$ − R.q.$\frac{1}{2}$, perchè delle dette due proposte R.q. legate, ciascuna di esse ha lato, perchè il lato della prima e R.q.1 $\frac{1}{2}$ R.q.$\frac{1}{2}$; et il lato della seconda è RR.q.6 $\frac{3}{4}$ + RR.q.$\frac{3}{4}$ che gionti insieme fanno le dette RR.q.6 $\frac{3}{4}$ + RR.q.$\frac{3}{4}$ + R.q.1 $\frac{1}{2}$ − R.q.$\frac{1}{2}$ che quando le del le due R.q. legate proposte non havessero havuto il lato, meno la R R .q. 48 + R.q.3 + 5 sua somma l'haverebbe potuto havere. Talche si può dire la somma di esse due R.q. legate proposte esser RR.q.6 $\frac{3}{4}$ + RR.q.$\frac{3}{4}$ + R.q.1$\frac{1}{2}$ − R.q.$\frac{1}{2}$, e ancora sarebbe meglio che dire R.q.$\llcorner$RR.q.48 + R.q.3 + 5$\lrcorner$. E parendomi havere posti essempij a scillicientia, verrò al sotrare.

RR.q. 6 $\frac{3}{4}$ + RR.q. $\frac{3}{4}$ + R.q. 1 $\frac{1}{2}$ — R.q. $\frac{1}{2}$
RR.q. 6 $\frac{3}{4}$ + RR.q. $\frac{3}{4}$ + R.q. 1 $\frac{1}{2}$ — R.q. $\frac{1}{2}$

	Più	Meno	
	Prima	Prima	
a	$\frac{1}{2}$	RR.q. $\frac{27}{16}$	c
		RR.q. $\frac{3}{16}$	f
		R.q. $\frac{3}{4}$	b
	Seconda	Seconda	
a	1 $\frac{1}{2}$	R.q. $\frac{3}{4}$	e
c	RR.q. $\frac{27}{16}$		
g	RR.q. $\frac{243}{16}$		
	Terza	Terza	
d	RR.q. $\frac{27}{16}$	RR.q. $\frac{3}{16}$	f
b	R.q. $\frac{3}{4}$		
a	1 $\frac{1}{2}$		
	Quarta	Quarta	
g	RR.q. $\frac{243}{16}$	RR.q. $\frac{27}{16}$	d
e	R.q. 6 $\frac{3}{4}$		
a	1 $\frac{1}{2}$		
a	5	RR.q. 3	f
e	R.q. 3		
g	RR.q. 243		

RR.q. 48 + R.q. 3 + 5

Sotrare di R.q. legate.

Volendosi sotrare R.q. legate si procede come nelle R.q.simplici, osservandosi il medesimo ordine, però mettero gli essempij medesimi che ho messi del sommare.

Cavisi $R.q.\llcorner 2 + R.q.3\lrcorner$ *di* $R.q.\llcorner 8 + R.q.48\lrcorner$. *Partito la maggiore per la minore ne viene 2, del qual se ne cava 1 per regola (come si fa nelle Radici simplici), resta 1, il quale moltiplicato via la minore fa* $R.q.\llcorner 2 + R.q.3\lrcorner$ *e tanto resta.*

Cavisi $R.q.\llcorner 4 + R.q.6\lrcorner$ *di* $R.q.\llcorner 8 + R.q.24\lrcorner$. *Partasi la maggiore per la minore ne verrà R.q.2, che cavatone 1 per regola resta* $R.q.2 - 1$, *che moltiplicato via la minore fa* $R.q.\llcorner 12 + R.q.54 - R.q.128 - R.q.48\lrcorner$ *e tanto resta.*

Cavisi $R.q.\llcorner 8 - R.q.32\lrcorner$ *di* $R.q.\llcorner 8 + R.q.32\lrcorner$. *Moltiplichisi l'una via l'altra fanno R.q.32, che per regola duplato fa R.q.128, quale cavato della somma delli quadrati di tutte due le parti, ch'è 16, resta* $16 - R.q.128$, *il suo lato è* $R.q.\llcorner 16 - R.q.128\lrcorner$ *e questo è lo restante.*

Cavisi $R.q.\llcorner 2 + R.q.3\lrcorner$ *di* $R.q.\llcorner 12 + R.q.108\lrcorner$. *Moltiplichisi l'una via l'altra fanno* $R.q.\llcorner 42 + R.q.1728\lrcorner$ *il suo lato è* $R.q.24 + R.q.18$, *che duplicato fa* $R.q.96 + R.q.72$, *il quale cavato della somma delli quadrati delle parti, ch'è* $14 + R.q.147$, *resta* $14 + R.q.147 - R.q.96 - R.q.72$, *che il suo lato è* $R.q.\llcorner 14 + R.q.147 - R.q.96 - R.q.72\lrcorner$, *e questo è il restante.*

Cavisi $R.q.\llcorner 2 + R.q.3\lrcorner$ *di* $R.q.\llcorner R.\ q\ 12 + 2\lrcorner$. *Moltiplichisi l'una via l'altra fa* $R.q.\llcorner R.q.108 + 10\lrcorner$ *che non ha lato; però tal sorte di R.q.non si possono cavare se non per via del meno, e resta* $R.q.\llcorner R.q.12 + 2\lrcorner - R.q.\llcorner 2 + R.q.3\lrcorner$, *e quanto al sotrare questo basta.*

Partire per un Trinomio.

Havendosi a partire una quantità per un Trinomio bisogna moltiplicare il partitore per un altro Trinomio, tal che del produtto ne venga un Binomio, e questo è facile, perchè havendosi il Trinomio che tutti tre li nomi siano basta che si moltiplichi per un altro Trinomio che il minor nome dica meno, come se il partitore fusse R.q.8 + R.q.6 + 2, se si moltiplicara per R.q.8 + R.q.6 − 2 il produtto sarà 10 + R.q.192. E avertiscasi che del Trinomio le due quantità qual si voglino se sono maggiori dell'altra, in quel caso si può pigliar qual si voglia che dica meno, come questo di R.q.8 + R.q.6 + 2, che si può moltiplicare per R.q.6 + 2 − R.q.8 overo per R.q.8 + 2 − R.q.6, che l'una e l'altra faranno Binomio, cioè R.q.96 + 2 e R.q.128 + 6, che l'uno e l'altro serve, e verrò all'essempio.

Partasi 10 per 2 + R.q.3 + R.q.2. Moltiplichisi per 2 + R.q.3 − R.q.2 (come si è insegnato al suo luogo), farà R.q.48 + 5 ch'è il partitore, e così si moltiplica il 10 che va partito, per 2 + R.q.3 + R.q.2, fa 20 + R.q.300 − R.q.200, e questo va partito per R.q.48 + 5, che moltiplicato per il suo Residuo, cioè R.q.48 − 5 l'una e l'altra parte, fa per il partitore 23, e per quel che va partito fa R.q.5000 + R.q.2700 + 20 − R.q.9600, e questo si parte per 23, che ne verrà R.q.9$\frac{239}{529}$ + R.q.6$\frac{55}{529}$ + $\frac{20}{23}$ − R.q.18$\frac{78}{529}$ e questo è l'avenimento di tal partitione.

Ma se il partitore sarà con una quantità che dica meno, bisogna moltiplicarla per il suo Binomio e dicano tutti tre li nome come se il partitore fusse 2 + R.q.3 − R.q.2, si moltiplicara con 2 + R.q.3 + R.q.2.

Ma se si havesse a partire per R.q.10 + R.q.2 + 1 all'hora se si pigliasse per il meno la R.q.10, cioc che si moltiplicasse R.q.10 + R.q.2 + 1 via R.q.2 + 1 − R.q.10 fa R.q.8 − 7, la qual e una (luantita ch'è meno, perch'è maggiore il − 7 che R.q.8, però non importa, perchè se si moltiplicara per il suo Binomio, cioè R.q.8 + 7, Iara − 41, e questo è il partitore. Hora propongasi di havere a partire 4I

2 + R.q. 3 + R.q. 2
2 + R.q. 3 — R.q. 2

4 + R.q. 12 + R.q. 8 + R.q. 12 + 3 + R.q. 6 — R.q. 8 — R.q. 6 — 2

R.q. 48 + 5
R.q. 48 — 5

48 — 25
cioè 23 partitore

10
2 + R.q. 3 — R.q. 2

20 + R.q. 300 — R.q. 200
R.q. 48 — 5

R.q. 19200 + 120 — R.q. 9600 — 100 — R.q. 7500 + R.q. 5000

R.q. 5000 + R.q. 2700 + 20 — R.q. 9600

R.q. $9\frac{239}{529}$ + R.q. $5\frac{55}{529}$ + $\frac{20}{23}$ — R.q. $18\frac{78}{529}$
Avenimento.

per R.q.10 + R.q.2 + 1, che si moltiplica ciascuna delle partiper R.q.2 + 1 − R.q.10, fa per il partitore R.q.8 − 7, e per il 41 la R.q.3362 + 41 − R.q.17840,e poi moltiplichisi ciascuna delle parti per R.q.8 + 7, Binomio di R.q.8 − 7, che per il partitore farà − 41 e per la quantità che va partita fa R.q.13448 + 451 + R.q.164738 + R.q.823690 − R.q.134480, che partito per − 41 ne viene − R.q.8 + 11 − R.q.98 + R.q.490 + R.q.80, che posti per ordine, ponendo prima li più e riducendo quelle che Sono simili a un nome, farà R.q.490 + R.q.80 − R.q.162 − 11 per l'avenimento.
E benchè io habbia detto che il partir per meno non mi era accaduto, e hora qui dimostro accadere, però non è necessario e si può fuggire. Ma per non esser tassato da glossatori malevoli, ho voluto porre questo caso, e ancora dar la regola del partire.

A partire più per più, ne vien più.
A partire meno per meno, ne vien più.

A partire men per più, ne vien meno.
A partire più per meno ne vien meno.

Ma caso che il partitore fosse R.q.10 − R.q.2 − 1 si potria moltiplicare il partitore e quello che va partito per R.q.10 + R.q.2 + 1 overo per R.q.10 + R.q.2 − 1 overo per R.q.10 − R.q.2 + 1, et ancora per R.q.2 + 1 − R.q.10, che tutte serviranno, delle quali (per non esser più longo) non mettero gli essempij, parendomi esser superfluo, perchè chi intenderà bene gli essempij passati, ancora intenderà questi altri.

Quello che sino ad hora si è detto, a me pare che sia a sufficienza per potersene servire nelli Capitoli di potenze, tanti e numero, e di potenze di potenze e potenze e numero. Hora quello che seguirà sarà appartenente alli Capitoli di Cubi, potenze, tanti, e numero agguagliati fra di loro in diversi modi, la qual parte e assai più difficile e più laboriosa della passata, percio bisogna applicarvi con ogni attentione intieramente l'animo.

Modo di Cubare un Binomio.

Il Cubare un Binomio e come a Cubare un numero, perchè si moltiplica il suo quadrato via lo istesso Binomio, et il produtto sarà il suo Cubo, come sarebbe se si havesse a Cubare R.q.3 + 1. Moltiplichisi R.q.3 + 1 via R.q.3 + 1, fa 4 + R.q.12, e questo si moltiplica via R.q.3 + 1, fa R.q.108 + 10, e questo è il Cubato di R.q.3 + 1, però chi dicesse: dammi il lato Cubico di R.q.108 + 10 sarà R.q.3 + 1. Il modo del quale porre avanti.

Modo di moltiplicare un Binomio Cubo in se.

Il moltiplicare de' Binomi composti di R. cube non e differente dal moltiplicare delle quadre, solo bisogna avertire nel sommare delle simili di ricordarsi che sono R. cube, e non quadre, e così di pigliare il lato cubico di quelle che l'haveranno, e con questo verrò

alli essempij.

Moltiplichisi R.c.4 + R.c.2 via R.c.4 + R.c.2. Pongasi in regola (come si vede) poi moltiplichisi R.c.2 di sotto via R.c.2 di sopra fa R.c.4, poi moltiplichisi R.c.2 di sotto via R.c.4 di sopra, fa + R.c.8, poi moltiplicasi R.c.4 di sotto via R.c.2 di sopra, fa + R.c.8, et in ultimo si moltiplichi R.c.4 di sotto via R.c.4 di sopra, fa R.c.16, la qual moltiplicatione tutta insieme si mette sotto la linea (come si vede) e come si è fatto nel moltiplicare de' Binomi. E perchè vi sono due R. cube 8, le quali hanno lato cubico, ch'è 2, che sommate insieme fanno 4, però tutta la moltiplicatione sarà 4 + R.c.16 + R.c.4, il che sarà il produtto della quadratura di questo Binomio. **Avertendosi che nel quadrare un Binomio cubo, sempre ne verrà Trinomio, ma Binomio non ne può venire.**

Moltiplichisi 2 + R.c.4 per 2 + R.c.4. Pongasi in regola e poi si moltiplichi

$$\begin{array}{c} \text{R.c. } 4 + \text{R.c. } 2 \\ \text{R.c. } 4 + \text{R.c. } 2 \\ \hline \text{R.c. } 16 + \text{R.c. } 8 + \text{R.c. } 8 + \text{R.c. } 4 \\ \hline 4 + \text{R.c. } 16 + \text{R.c. } 4 \end{array}$$

R.c.4 via R.c.4 fa R.c.16, e R.c.4 via 2, fa R.c.32. Dipoi si moltiplichi il 2 via R.c.4 fa R.c.32, e poi 2 via 2 fa 4, e perchè R.c.32 e R.c.32 si possono sommare insieme: però si sommino e fanno R.c.256, d i u Bodo che il produtto della moltiplicatione sarà 4 + R.c.256 + R.c.16.

$$\begin{array}{c} 2 + \text{R.c. } 4 \\ 2 + \text{R.c. } 4 \\ \hline 4 + \text{R.c. } 32 + \text{R.c. } 32 + \text{R.c. } 16 \\ \hline 4 + \text{R.c. } 256 + \text{R.c. } 16 \end{array}$$

Moltiplichisi 2 + R.c.4 − R.c.2 via 2 + R.c.4. Pongasi in regola (poi si moltiplichi R.c.4 di sotto via 2 + R.c. 4 − R.c.2 di sopra, fa R.c.32 + R.c.16 − 2, e poi si moltiplichi il 2 di sotto via 2+ R.c.4 − R.c.2 di sopra fa 4 + R.c.32 − R.c.16, che gionto con l'altra moltiplicatione fa R.c.32 + R.c.16 −

2 + 4 + R.c.32 − R.c.16, cioè R.c.256 + 2 ch'è il produtto.

Moltiplichisi R.c.4 + R.c.2 + 1 via R.c.4 + R.c.2 + 1. Pongasi in regola (come si vede) poi si moltiplichi R.c.4 di sotto con tutta la quantità di sopra, fa R.c.16 + 2 + R.c.4 e poi si moltiplichi la medesima quantità di sopra via R.c.2 di sotto, fa 2 + R.c.4 + R.c.2, qual si metta con la passata moltiplicatione, e finalmente si moltiplichi + 1 di sotto via la quantità di sopra, fa R.c.4 + R.c.2 + 1, e questa si ponga con l'altre due moltiplicationi (come nella figura si vede) che il produtto sarà R.c.16 + 2 + R.c.4 + 2 + R.c.4 + R.c.2 + R.c.4 + R.c.2 + 1, che sommate le tre R.c.4 fanno R.c.108, e sommate le due R.c.2 fanno R.c.16, e questa sommata con l'altra R.c.16 fa R.c.128, e sommati il numeri, che sono + 2 + 2 et + 1, fanno + 5, che con R.c.128 e R.c.108 faranno 5 + R.c.128 + R.c.108, e questo sarà il produtto della moltiplicatione.

Moltiplichisi R.c.4 + R.c.2 via R.c.4 − R.c.2. Mettasi in regola e moltipli-

R.c. 4 + R.c. 2 + 1
R.c. 4 + R.c. 2 + 1
R.c. 16 + 2 + R.c. 4 + 2 + R.c. 4 + R.c. 2 + R.c. 4 + R.c. 2 + 1
R.c. 16 + 5 + R.c. 108 + R.c. 16
5 + R.c. 128 + R.c. 108

chisi al modo solito, che il produtto sarà R.c.16 + R.c.8 − R.c.8 − R.c.4, che sommato + R.c.8 con − R.c.8 fa nulla. Però la moltiplicatione sarà R.c.16 − R.c.4, e questo essempio ho posto perchè si veda che a moltiplicare un Binomio cubo via il suo residuo ncrtt fa numero (come fanno i Binomij di R. quadrate). Ma volendo trov;crc una quantità, che moltiplicata via R.c.4 + R.c.2 faccia numero: faccisi cosi. Quadrisi R.c.4, fa R.c.16, e quadrisi R.c.2 fa R.c.4, poi si moltiplichi R.c.4 via R.c.2, fa R.c.8, e perchè questa R.c.8 è più, se gli faccia mutar natura, e diventar meno, e se fusse meno farebbesi dir si che gionto con R.c.16 e R.c.4, fa R.c.16 + R.c.4 + R.c.8, e questa sarà la quantità che moltiplicata via R.c.4 + R.c.2 farà numero: il che perchè fa l'effetto medesimo che fa il residuo del Biniomio composto di R.quadrate: perciò lo chiamerò residuo del Binomio cubo, cioè R.c.16 + R.c.4 − R.c.8 e Residuo di R.c.4 + R.c.2. Ma perchè ne' numeri grandi tal residuo fa gran moltiplicatione, però volendole fuggire si può abbassare tale residuo con il partirlo lo per qualche numero, come questo di R.c.16 + R.c.4 − R.c.8, he partasi tutto per 2, ne viene R.c.2 + R.c. − 1, il qual parimc me e Residuo di R.c.4 + R.c.2, perchè questo residuo non serve se non per partire una quantità per un Binomio cubo. Però basta che moltiplicato il Binomio col Residuo faccia numero, e sia poi il Residuo di che sorte si voglia, come si vede che a moltiplicare R.c.4 + R.c.2 via R.c.16 + R.c.4 − R.c.8 fa 6, e a moltiplicarlo via R.c.2 + R.c.2 − 1 fa 3, che l'uno e l'altro fa l'intention nostra, la qual e di trovare una quantità che moltiplicata via R.c.4 + R.c.2 faccia numero.

R.c. 4 + R.c. 2
R.c. 4 — R.c. 2

R.c. 16 + R.c. 8 — R.c. 8 — R.c. 4

R.c. 16 — R.c. 4

Del ch'è maggiore intelligentia ne porrò un altro essempio.
Trovisi una quantità, la qual moltiplicata con R.c.6 − R.c.3 sia tale che il produtto sia numero. Moltiplichisi (come fu detto di sopra) R.c.6 con R.c.6, fa R.c.36, e − R.c.3 con − R.c.3, fa + R.c.9,,poi si moltiplichi R.c.6 via − R.c.3, fa − R.c. 18, alla quale si fa mutar natura, doventerà + R.c.18, che gionte tutte tre insieme fa-Wino R.c.36 + R.c.9 + R.c.18, che moltiplicato via R.c.6 − R.c.3 fa 3 (come si vede nella figura), e perchè si vede chiaramente quello che ho detto, però non mi estenderò piùoltre sopra di ciò ma seguirb il moltiplicare.

Moltiplichisi 2 + R.c.2 + R.c.4 via R.c.6 − R.c.3. Facciasi come si vede nella figura, che si vedrà levato li meno delli e così il produtto e R.c.6.

$$\begin{array}{c} \text{R.c. } 36 + \text{R.c. } 9 + \text{R.c. } 18 \\ \text{R.c. } 6 - \text{R.c. } 3 \\ \hline 6 + \text{R.c. } 54 + \text{R.c. } 108 - \text{R.c. } 108 - 3 - \text{R.c. } 54, \text{ cioè } 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2 + \text{R.c. } 2 + \text{R.c. } 4 \\ \text{R.c. } 6 - \text{R.c. } 3 \\ \hline \text{R.c. } 48 + \text{R.c. } 12 + \text{R.c. } 24 - \text{R.c. } 24 - \text{R.c. } 6 - \text{R.c. } 12 \\ \hline \text{R.c. } 6 \end{array}$$

Moltiplichisi R.c.4 − R.c.2 + 2 via R.c.4 − R.c.2 + 2. Moltiplichisi R.c.4 di sotto via tutta la quantità di sopra, fa R.c.16 − 2 + R.c.32, poi si moltiplichi la medesima quantità per − R.c.2, fa − 2 + R.c.4 − R .c. 16, e poi si moltiplichi per il restante + 2, fa R.c.32 − R.c.16 + 4, che levati il meno delli piùsimili, si haverà R.c.32 + R.c.32 + R.c.4 R.c.16, che aggionte insieme le tre prime R.c.haveremo per il produtto R.c.500 − R.c. 16.

$$\begin{array}{c} \text{R.c. } 4 - \text{R.c. } 2 + 2 \\ \text{R.c. } 4 - \text{R.c. } 2 + 2 \\ \hline \text{R.c. } 16 - 2 + \text{R.c. } 32 - 2 + \text{R.c. } 4 - \text{R.c. } 16 + \text{R.c. } 32 - \text{R.c. } 16 + 4 \\ \hline \text{R.c. } 500 - \text{R.c. } 16 \end{array}$$

Modo di partire per un Binomio Cubo.

Partisi 4 per R.c.6 + R.c.3. Trovisi il residuo di R.c.6 + R.c.3 (come fu insegnato) che sarà R.c.36 + R.c.9 − R.c.18, che moltiplicato per R.c.6 + R.c.3 fa 9, e questo è il partitore. Moltiplichisi il 4 che va partito per il residuo cubato cioè per R.c.36 + R.c.9 − R.c.18, fa R.c.2304 + R.c.576 − R.c.1152, che partito per 9 ne viene R.c.3$\frac{13}{81}$ + R.c.$\frac{64}{81}$ − R.c.1 $\frac{47}{81}$. E perchè non si habbia ad affaticarsi a moltiplicare il partitore, tengasi quest'ordine: cubisi la magior parte del partitore, cioè R.c.6 fa 6, numero, al quale si aggionga il cubato della minore, cioè R.c.3, ch'è 3, e farà 9, e questo è il partttore, et se bene R.c.36 + R.c.9 − R.c.18 da me e chiamato residuo di R.c. 6 + R.c.3, non è però che sia il residuo, ma fa l'effetto istesso il quale fa il residuo nel partire per un Binomio di Radice q., cioè che a moltiplicare l'uno via l'altro fa numero (come si è veduto) e non vuol dir altro il trovare di questo Residuo che: trovami una quantità in tal modo composta, che moltiplicata per R.c.6 + R.c.3, faccia numero, il quale sarà (come si è veduto) R.c.36 + R.c.9 − R.c.18, e questo basta quanto al partire per un Binomio Cubo, **che hora dirò del partire per un residuo cubo.**

R.c. 6 + R.c. 3
R.c. 36 + R.c. 9 — R.c. 18
9
4
R.c. 36 + R.c. 9 — R.c. 18
R.c. 2304 + R.c. 576 — R.c. 1152
R.c. 3 $\frac{13}{81}$ + R.c. $\frac{64}{81}$ — R.c. 1 $\frac{47}{81}$
Avenimento.

Modo di partire per un Residuo Cubo.

Partasi 6 per R.c.4 − R.c.2, bisogna (come di sopra si è fatto) rovare una quantità in tal modo composta, che moltiplicata per R.c.4 − R.c.2 faccia numero, e per trovarla quadrisi R.c.4 e R.c.2 ciascuna per se, fanno R.c.16 e R.c.4, poi moltiplichisi R.c.4 via − R.c.2 la − R.c.8, e per regola se gli fa mutare natura, cioè che il meno dica pia, e dirà + R.c.8, qual si aggionge alli dui quadrati detti di sopra, fa R.c.16 + R.c.4 + R.c.8, e questa è la quantità composta la qual moltiplicata via R.c.4 − R.c.2 fa numero, cioè 2, e tal quantità da me sarà chiamata Binomio del Residuo partitore, che partito 6 per 2 ne viene 3, il qual moltiplicata via R.c.16 + R.c.4 + R.c.8 fa R.c.432 + R.c.108 + 6, il qual è l'avenimento di tal partire.

Ma per non havere a moltiplicare il partitore via il suo Binomio per trovare il secondo partitore basta solo cavare il cubato delle due

quantità che coimpongono il Residuo, cioè la minore della maggiore, com'è il residuo proposto, ch'è R.c.4 − R.c.2. Cubisi R.c.4 e R.c.2 ciascuna da se, fanno 4 e 2, che cavato l'uno dell'altro resta 2 per l'ultimo partitore, si fugge la operatione di moltiplicare il residuo via il suo binomio.

A partire una quantità per un Trinomio Cubo.

18

Il modo di partire per un Trinomio Cubo e laboriosissimo e si fa in due volte come li Trinomij delle R.q., che prima bisogna trovare un composto che moltiplicato via esso Trinomio faccia un Binomio, e di poi trovar un composto, che moltiplicato esso Binomio faccia numero (come si è insegnato a partir per un Binomio cubo), il qual composto si trova con la infrascritta regola, e sarà un Binomio, o composto di sei nomi, che dir vogliamo, cioè tre più e tre meno, quando il Trinomio partitore sarà tutto di più, come nell'infrascritto essempio più chiaramente si vedrà.

Pongo che si habbia a partire 4 per R.c.12 + R.c.10 + R.c.7. Faccisi cosi. Quadrinsi tutte tre queste R.c ciascuna da se, che farannoR.c.144 + R.c.100 + R.c.49, poi si moltiplichi R.c.7 via R.c.10 R.c.12, fa R.c.84 e R.c.70, e questo si aggionge alla moltiplicatione di R.c.10 via R.c.12, cioè R.c.120, che farh R.c.120 e R.c.84 e R.c.70, perchè sono tutte nate di più via più, che fa però queste R.c. vengono ad esser e così in questo partimento si fanno per regola diventar meno, e gionte insieme dirànno − R.c.120 − R.c.84 − R.c.70, che aggionte alli tre quadrati fatti di sopra, cioè R.c.144 + R.c.100 + R.c.49, farannoR.c.144 + R.c.100 + R.c.49 − R.c.120 − R.c.84 − R.c.70, e questo lo chiamerò residuo di R.c.12 + R.c.10 + R.c.7, il ch'è uno composto trovato, che moltiplicato per il partitore fa un Binomio. Però si moltiplicara con ciascuna delle parti, il qual moltiplicato per la quantità

[18] Il modo di partire per un trinomio Cubo fu ritrovato da Scipione Dal FerroBolognese che fu buono rarissimo in quest'arte.

che va partita fa R.c.9216 + R.c.6400 + R.c.3136 − R.c.7680 − R.c.5376 − R.c.4480, e per il Trinomio partitore fa (come si vede nella figura infrascritta) 29 − R.c.22680, questo è il partitore di R.c.9216 + R.c.6400 + R.c.3136 − R.c.7680 − R.c.5376 − R.c.4480. Hor trovisi il Binomio di 29 − R.c.22680 (comeè insegnato di sopra) il qual sarà 841 + R.c.514382400 + R.c.553142520, che moltiplicato via il suo residuo, cioè 29 − R.c.22680 fa 1709, et questo è il partitore. E moltiplicato per R.c.9216 + R.c.6400 + R.c.3136 − R.c.7680 − R.c.5376 − R.c.4480 via la quantità che fu trovata di sopra, cioè 841 + R.c.514382400 + R.c.553142520, farà R.c.1613103206400 + R.c.1734654942720 + R.c.1865365934656 + R.c.3292047360000 + R.c.3590112128000 + R.c. 3806869254400 + R.c.4740548198400 + R.c.5097761464320 + R.c.5481891726336 − R.c.2304433152000 − R.c.2478078489600 + R.c.2664808478080 − R.c.2765319782400 − R.c.2973694187520 + R.u. 3197770173696 − R.c.3950456832000 − R.c.4248134553600 + R.c. 4568243105280, e questo si ha da partire per 1709, che ne verrà R.c.1613103206400 + R.c.1734654942720 + R.c.1865365934656 + R.c.3292047360000 + R.c.3590112128000 + R.c.3806869254400 + R.c.4740548198400 + R.c.5097761464320 + R.c.5481891726336 + R.c.2304433152000 − R.c.2478078489600 − R.c.2664808478080 + R.c.2765319782400 − R.c.2973694187520 − R.c.3197770173696 + R.c.. 3950456832000 − R.c.4248134553600 − R.c.4568243105280, che tutte sono esime di Radice cuba 4991443829, che per rispetto della stampa non si sono formati il rotti.

E questo è quello che ne viene a partire 4 per R.c.12 + R.c.10 + R.c.7, la qual cosa pare che sia impossibile, onde per più chiarezza ne ho voluto mettere la prova. Però se si moltiplicara questo avenimento via R.c.12 + R.c.10 + R.c.7 il produtto di necessità sarà 4, se starà bene il partimento. Però moltiplichisi tutto l'avenimento per R.c.7, farà (come di sotto si vede) diciotto produtti, nove segnati col più e nove col meno. E poi si moltiplichi il medesimo avenimento per Radice cuba 10, che farà anch'ègli diciotto produtti, nove più e nove meno. E similmente poi si moltiplichi lo istesso avenimento per R.c.12 che farà diciotto produtti, nove segnati col più e nove co'l meno (come di sotto ordinatamente si può vedere).

R.c. 12 + R.c. 10 + R.c. 7
R.c. 144 + R.c. 100 + R.c. 49 — R.c. 120 — R.c. 84 — R.c. 70

	Più	Meno
Lato 7	R.c. 343	R.c. 490
	R.c. 490	R.c. 700
	R.c. 588	R.c. 840
	R.c. 700	R.c. 588
Lato 10	R.c. 1000	R.c. 840
	R.c. 1200	R.c. 1008
	R.c. 1008	R.c. 840
	R.c. 1440	R.c. 1200
Lato 12	R.c. 1728	R.c. 1440
	29 — R.c. 22680	

Moltiplicatione per R.c.7
Più
Moltiplicatione per R.c.7
Meno

E tutte le sopradette R.c. tanto più quanto meno sono esimi di 491443829. Di tutte le moltiplicationi fatte si levano tutte quelle che sumo eguali, che sono dalla parte del più e meno, e per più chiarezza si sono segnate con l'alfabeto, cioè quelle che sono eguali dalla parte del più e del meno hanno un medesimo carattero. Restaci, che non hanno segno, R.c.11291722444800 + R.c.12142584599040 + R.c.13057561542529 + R.c.32920473600000 + R.c.35901121280000 + R.c.38068692544000 + R.c.56886578380800 + R.c.61173137571840 + R.c.65782700716032 − R.c.27653197824000 − R.c.29736941875200 − R.c.31977701736960 − R.c.27653197824000 − R.c.29736941875200 − R.c.31977701736960 − R.c.27653197824000 − R.c.29736941875200 − R.c.31977701736960 et tutte queste sono esimi di R.c.4991443829. Dalla parte del più ci sono tre quantità che hanno lato, cioè R.c.13057561542529 che il suo lato è 23548, e R.c.38068692544000, che il suo lato è 33640, e R.c.65782700716032, che il suo lato è 40368, che gionti tutti questi lati insieme fanno 97556. E dalla parte di esso più ci sono tre quantità che si possono sommare, cioè R.c.11291722444800, R.c.32920473600000 et R.c.56886578380800 che (come si a insegnato al suo luogo) gionte insieme fanno R.c.802897430630400. E dalla medesima parte del più ci sono tre altre R. che si possono similmente sommare, cioè R.c.12142584599040 R.c.35901121280000 et R.c.61173137571840, che sommate insieme fanno R.c.863397946897920, che unito insieme tutto il più fa 97556 + R.c.802897430630400 + R.c.863397946897920. E dalla parte del meno sono tre quantità tutte tre eguali che hanno lato, cioè R.c.27653197824000, che il suo lato è 30240, il qual triplicato per esserne tre eguali farà 90720, e dalla parte di detto meno vi sono tre quantità similmente eguali, cioè R.c.29736941875200, che moltiplicata per tre fa R.c.802897430630400, et tre altre ce ne sono pur eguali, cioè R.c.31977701736960, che moltiplicata per R.c.27, cioè 3, fa R.c.863397946897920, e tutte queste saranno dalla parte del meno, si che levate tutte le eguali che sono dalla parte del più e meno, restarà più97556, et dalla parte del meno restarà solamente 90720, che gionti insieme faranno6836, il ch'è esimo di R.c.4991443829, cioè di 1709, che partito con esso 6836 ne viene 4 (come si propose) e questa è una rarissima operatione, ancor che rare volte occorrera il servirsene, ma io l'ho posta per sodisfare i curiosi.

A partire per un Trinomio Cubo ove sia meno.

Partisi 1546 per R.c.4 + R.c.3 − R.c.2, per trovare il Residuo del partitore si quadrino tutte le tre R.ce aggiongansi insieme, facendo sempre che dicano pia, fanno R.c.16 + R.c.9 + R.c.4. Poi si moltiplichi R.c.4 via R.c.3 − R.c.2, fa R.c.12 − R.c.8, e R.c.3 via − R.c.2, fa − R.c.6, che aggionto con R.c.12 − R.c.8 fa R.c.12 − R.c.8 − R.c.6, e a questa somma sempre per regola si fa mutar natura facendo del più meno e del meno pia, si che dirà R.c.8 + R.c.6 − R.c.12, e questo si aggionge alli tre quadrati, fa R.c.16 + R.c.9 + R.c.4 + R.c.8 + R.c.6 − R.c.12, e questo è il Residuo di R.c.4 + R.c.3 − R.c.2, che moltiplicato l'un via l'altro (come si vede nella figura) fa R.c.648 + 5, e le lettere che sono nella figura così dalla parte del più come del meno vogliono inferire che tali R.c. vanno cancellate, per essere una più e l'altra meno. Ma per fuggir fatica e sapere in un medesimo instante quanto fa tal moltiplicatione, senza fare altra figura, piglisi il cubato di R.c.4 e R.c.3 e aggionngansi insieme, perchè ciascuna e più fa 7, e di questo si cavi il cubato di R.c.2, perch'è meno resta 5, qual si salva. Poi si moltiplica R.c.4 via R.c.3 fa R.c.12 e questo si moltiplica via R.c.2 fa R.c.24, che per regola si moltiplica per R.c.27, che fa R.c.648 al quale si aggionge il 5 serbato di sopra, fa R.c.648 + 5 (com'è detto), e per trovare il secondo Residuo quadrisi R.c.648 et 5 ciascuno da se, fa R.c.419904 et 25 e moltiplichisi R.c.648 via 5, fa R.c.81000. E perché questo è più bisogna farlo mutar natura et diventar meno, et dirà − R.c.81000 che aggionto con li due quadrati detti di sopra dirànno R.c.419904 + 25 − R.c.81000 che moltiplicato via R.c.648 + 5 farà 773, et questo è il partitore.

R.c. 4 + R.c. 3 — R.c. 2
R.c. 4 + R.c. 3 — R.c. 2

R.c. 16 + R.c. 9 + R.c. 4 + R.c. 8 + R.c. 6 — R.c. 12
R.c. 4 + R.c. 3 — R.c. 2

	Più		Meno	
	R.c. 24	a	R.c. 12	
c	R.c. 18	b	R.c. 16	
	R.c. 24		R.c. 8	Lato 2
a	R.c. 12	c	R.c. 18	
Lato 3	R.c. 27	d	R.c. 32	
f	R.c. 48	e	R.c. 36	
	R.c. 24	f	R.c. 48	
d	R.c. 32			
b	R.c. 16			
e	R.c. 36			
Lato 4	R.c. 64			

7 + R.c. 648
2

---

5 + R.c. 648

Però partasi 1546 per 773, ne viene 2, et questo si moltiplica via tutti due i Residui, cioè via R.c.16 + R.c.9 + R.c.4 + R.c.8 + R.c.6 − R.c.12 fa R.c.128 + R.c.72 + R.c.32 + R.c.64 + R.c.48 − R.c.96, e questo si moltiplica via il secondo Residuo, cio6 R.c.419904 + R.c.125 − R.c.81000 fa, come si vede nella sopraposta figura R.c.53747712 + R.c.30233088 + R.c.26873856 + R.c.13436928 + R.c.7776000 + R.c.20155392 + R.c.16000 + R.c.9000 + R.c.8000 + R.c.6000 + R.c.4000 − R.c.40310784 − R.c.10368000 − R.c.5832000 − R.c.5184000 − R.c.3888000 − R.c.2592000 − R.c.12000, et tanto viene di detto partimento. Ma perchè ci sono molte quantità communicanti che si possono sommare et cavare l'una dell'altra, però le ho segnate con le lettere, et ridutte a piùbrevità ne verrà R.c.82798848 + R.c.10686672 + R.c.32870376 + R.c.2654208 + R.c.26288512 − R.c.4476000 − R.c.7986000 − R.c.35127264 − 160. Et perchè questo partire e molto necessario ne' Capitoli di cubi, potenze, tanti, et numero, ne ponerò tre altri essempij.

Havendosi a partire per R.c.4 + R.c.2 − R.c.7, trovisi il suo residuo, come a

R.c. 128 + R.c. 72 + R.c. 32 + R.c. 64 + R.c. 48 — R.c. 96
R.c. 419904 + R.c. 125 — R.c. 81000

Più		Meno	
R.c. 7776000		R.c. 3888000	
R.c. 6000		R.c. 5184000	
R.c. 8000	Lato 20	R.c. 5832000	Lato 180
R.c. 4000		R.c. 10368000	
R.c. 9000		R.c. 2592000	
R.c. 16000		R,c. 12000	
R.c. 20155392		R.c. 40310784	
R.c. 26873856			
R.c. 13436928			
R.c. 30233088			
R.c. 53747712			

stato detto ne'sopradetti essempij, pigliando tutti tre i quadrati, che saranno R.c.16, R.c.4 et R.c.49, che aggionti con la moltiplicatione di R.c.4 via R.c.2 et R.c.4 via − R.c.7 et R.c.2 via − R.c.7, fanno R.c.8 − R.c.28 − R.c.14, che facendo mutar natura al piùet al meno (come a detto di sopra) dirànno R.c.28 + R.c.14 − R.c.8, che aggionti con li sopradetti quadrati farannoR.c.49 + R.c.28 + R.c.16 + R.c.14 + R.c.4 − R.c.8, et questo è il primo residuo, che moltiplicato via R.c.4 + R.c.2 − R.c.7 tenendo la via detta di sopra, aggiungendo il cubato di R.c.4 con il cubato di R.c.2 che sarà 6, del quale si cavi il cubato di − R.c.7 restarà − 1, et questo si salva. Poi si moltiplica R.c.4 via R.c.2 fa R.c.8, che moltiplicato via R.c.7 fa R.c.56, che moltiplicato via R.c.27 per regola, come fu detto, fa R.c.1512, che aggionto con − 1 serbato di sopra fa R.c.1512 − 1 et questo è il partitore secondo; et volendo trovare il secondo residuo pigliansi li due quadrati di R.c.1512 et 1, che farannoR.c.2286144 et I, poi si moltiplica R.c.1512 via − 1, fa − R.c.1512.clla quale si fa mutar natura et diventar pia, et aggionta alli due quadiati detti di sopra fa R.c.2286144 + 1 + R.c.1512, et questo è il secondo residuo, che moltiplicato via il secondo partitore fa 1511, ch'è l'ultimo partitore, et la quantità che va partita si ha da partire per 1511, et lo avenimento si moltiplica per li due residui, come si è fatto di sopra, et perchè assai volte accade che non fa di bisogno trovare se non un residuo di simili, ne ponerò gl'infrascritti essempij.

Se si haverà a partire per R.c.4 + R.c.2 − R.c.6, per ritrovare il quo residuo pigliansi tutti tre i quadrati di dette R.cet aggiungansi insieme, farannoR.c.36 + R.c.16 + R.c.4 et se gli aggiunga la moltiplicatione di R.c.4 via R.c.2 − R.c.6 che fa R.c.8 − R.c.24 et R.c.2 via − R.c.6 fa − R.c.12, che aggionta con R.c.8 − R.c.24 fa R.c.8 + R.c.24 − R.c.12, che fatto mutar natura al più et al meno dirà .c. 24 + R.c.12 − R.c.8, che aggionte con li tre quadrati sopradetti farannoR.c.36 + R.c.24 + R.c.16 + R.c.12 + R.c.4 − R.c.8, che moltipticato via R.c.4 + R.c.2 − R.c.6 per la via detta di sopra, aggiungendo il cubato di R.c.4 col cubato di R.c.2 fa 6 et trattone il cubato di R.c.6 resta 0, et a moltiplicare R.c.4 via R.c.2 et il produtto via R.c.6 fa R.c.48, che moltiplicato via R.c.27 fa R.c.1296, che aggiuntoli 0 fa il medesimo, cioè R.c.1296, et questa R.c.1296 e il secondo partitore che per essere quantità semplice si potrà partire per essa, come è stato detto al suo luogo nel partire di R.c. simplici, cioè riducendo la quantità che va partita a R.c.

Quando accadera partire per un Trinomio cubo et che delli tre nomi uno sarà rationale, cioè numero, et che la moltiplicatione dell'altre due R.c. intra di loro facciano una R.c. che habbia lato, in tal caso il partitore non haverà bisogno se non d'un residuo, et il partitore sempre sarà numero, come sarebbe se il partitore fusse 3 + R.c.4 − R.c.2, che trovato il suo residuo come s'è mostrato di sopra sarà 9 + R.c.16 + R.c.4 + R.c. 54 + R.c.8 − R.c.108, che aggiunto +R.c.4 con R.c.108 fa R.c.32, et aggiunto R.c.54 con R.c.16 fa R.c.250 si che ridotto a minor nome sarà 11 + R.c.250 − R.c.32 che moltiplicato via 3 + R.c.4 − R.c.2 partitore fa 47, che procedendo per la regola breve, pigliasi il cubato di 3 et R.c.4 che aggionti insieme fanno 31, et trattone il cubato di R.c.2 resta 29, eta moltiplicare 3 via R.c.4 fa R.c.108, et questo per R.c. 2 fa R.c.216, che il suo lato è 6, quale moltiplicato per R.c.27, cioè 3, come s'è detto, fa 18, che aggionto col 29 fa 47 et questo è il partitore. Et di questo ultimo essempio si ha più bisogno et è più necessario d'alcun altro (come nell'operare nelle eguagliationi si vedrà).

Moltiplicare di R. legate cube.

Perchè ne' Capitoli di Cubi, potenze, tanti et numero assai volte et quasi sempre ci viene R. legata cuba, m'è parso necessario di mettere la loro operatione, acciochè meglio poi s'intendano quei Capitoli et se ne possano fare le loro prove (come al suo luogo si vedrà), e prima moltiplichisi R.c.⌞R.q.2 + 1⌟ via 2. Facciasi cosi. Sciolgasi la R.q. legata cuba col cubarla, perch'è R.q. legata cuba (che altro dir non vuole, che trovare un binomio di R.qe numeri di cui il cubato sia R.q.2 + 1). Però se si cuba R.c.⌞R.q.2 + 1⌟ farà R.q.2 + 1, perchè a cubare R.q.2 + 1 ne viene R.q.50 + 7 et il lato cubico di R.q.50 + 7 e R.q.2 + 1. Cubasi il numero che s'ha da moltiplicare anch'ègli fa 8, qual moltiplicato via R.q.2 + 1 fa R.q.128 + 8, et la R.c. legata sarà il produtto, cioè R.c.⌞R.q.128 + 8⌟, et questo basta quanto al primo essempio.

Moltiplicasi R.c.⌞R.q.8 + 2⌟ via R.q.3. Cubasi R.q.3 fa R.q.27. Cubasi R.c.⌞R.q.8 + 2⌟ fa R.q.8 + 2, quale moltiplicato via R.q.27 fa R.q.216 + R.q.108 et R.c.⌞R.q.216 + R.q.108⌟ e il produtto.

Moltiplichisi R.c.⌞R.q.6 + 2⌟ con R.c.4. Cubasi ciascuna delle parti, ne viene R.q.6 + 2 e 4, che moltiplicato L'unavia l'altra fanno R.q.96 + 8 che il lato suo cubico e R.c.⌞R.q.96 + 8⌟ e questo è

il produtto.

Moltiplichisi R.c.⌞R.q.3 + 1⌟ via R.q.3 + 1. Cubansi tutte due le parti, che farannoR.q.3 + 1, e R.q.108 + 10, che rnoltiplicata l'unavia l'altra fanno 28 + R.q.768, e R.c.⌞28 + R.q.768⌟ e il produtto.

Moltiplichisi R.c.⌞4 + R.q.2⌟ + 2 via R.c.⌞4 − R.q.2⌟ + 2. Pongasi in regola (come si vede) poi si moltiplica il + 2 di sotto via il + 2 di sopra fa + 4, qual si mette sotto la linea (come si vede) poi si moltiplica il + 2 di sotto via R.c.⌞4 + R.q.2⌟ (come si a insegnato di sopra) riducendo 2 a cubo, e R.c.⌞4 + R.q.2⌟ a cubo, che sarà 4 + R.q.2, il cubo del 2 sarà 8, che moltiplicato l'uno via l'altro fa 32 + R.q.128, e di questo si piglia la R.c., fa R.c.⌞32 + R.q.128⌟, e questo si pone sotto la linea .a. canto al 4, poi si moltiplica R.c.⌞4 + R.q.2⌟ di sotto via il 2 di sopra, fa (come si è veduto) R.c.⌞32 + R.q.128⌟ poi si moltiplica R.c.⌞4 + R.q.2⌟ di sotto via R.c.⌞4 + R.q.2⌟ di sopra fa R.c.⌞18 + R.q.128⌟ e si pone al pari dell'altre moltiplicationi, e haveremo R.c.⌞18 + R.q.128⌟ + R.c.⌞32 + R.q.128⌟ + R.c.⌞32 + R.q.128⌟ + 4. E perchè R.c.⌞32 + R.q.128⌟ ci è due volte però si possono sommare insieme (essendo eguali) e moltiplicandone una per 2 si haverà la somma di ambedue, onde moltiplichisi R.c.⌞32 + R.q.128⌟ via 2 (come si è mostrato di sopra) farà R.c.⌞256 + R.q.8192⌟ e questa è la somma di dette due R. legate, si che si dirà R.c.⌞256 + R.q.8192⌟ + R.c.⌞18 + R.q.128⌟ + 4 per tutto il produtto.

Moltiplichisi R.c.⌞64 + R.q.2⌟ + 2 via R.c.⌞64 + R.q.2⌟ − 2. Pongasi in

R.c. L4 + R.q. 2.I + 2
R.c. L4 + R.q. 2.I + 2

R.c.L18+R.q. 128.I+R.c.L32+R.q. 128.I+R.c.L32 + R.q. 128.I+4

R.c.L256+R.q. 8192.I+R.c.L18+R.q. 128.I+4

regola (come si vede), poi moltiplichisi − 2 di sotto via + 2 di sopra, fa − 4 e pongasi sotto la prima linea (come si vede), poi moltiplichisi − 2 di sotto via R.c.⌞64 + R.q.2⌟ di sopra, fa − R.c.⌞512 + R.q.128⌟ e questo si pone a canto all'altra moltiplicatione, poi si moltiplica R.c.⌞64 + R.q.2⌟ di sotto via + 2 di sopra, fa + R.c.⌞512 + R.q.128⌟ e si pone pur sotto la linea, poi si moltiplica R.c.⌞64 + R.q.2⌟ di sotto via R.c.⌞64 + R.q.2⌟ di sopra, fa R.c.⌞4098 + R.q.32768⌟ e questo posto anch'ègli sotto la prima linea, si haverà R.c.⌞4098 + R.q.32768⌟ + R.c.⌞512 + R.q.128⌟ − R.c.⌞512 + R.q.128⌟ − 4, et perchè R.c.⌞512 + R.q.128⌟ vi e due volte, una piùe l'altra meno, che sommandole L'una abbatte l'altra e resta solo R.c.⌞4098 + R.q.32768⌟ − 4, e questo sarà il produtto cercato.

R.c. L64 + R.q. 2J + 2
R.c. L64 + R.q. 2J + 2

R.c. L4098 + R.q. 32768J + R.c. L512 + R.q. 128J — R.c. L512 +
+ R.q. 128J — 4

R.c. L4098 + R.q. 32768J — 4

Moltiplichisi R.c.⌞R.q.2 + 1⌟ − R.c.⌞R.q.2 − ⌟ via R.c.⌞R.q.2 + 1⌟ − R.c.⌞R.q.2 − 1⌟. Pongasi in regola (come si vede), e moltiplichisi − R.c.⌞R.q.2 − 1⌟di sotto via − R.c.⌞R.q.2 − 1⌟ di sopra fa + R.c.⌞3 − R.q.8⌟ e questo si pone sotto la linea, poi si moltiplica − R.c.⌞R.q.2 − 1⌟ di sotto via R.c.⌞R.q.2 + 1⌟ di sopra, fa − R.c.1, che 'l suo lato è − 1, et questo si pone sotto la linea, poi si moltiplica R.c.⌞R.q.2 + 1⌟ di sotto via − R.c.⌞R.q.2 − 1⌟ di sopra fa − R.c.1, cioè − 1, e poi si moltiplica R.c.⌞R.q.2 + 1⌟ di sotto via R.c.⌞R.q.2 + 1⌟ di sopra, fa R.c.⌞3 + R.q.8⌟, che gionti li dui − 1 insieme tutto il produtto sarà R.c.⌞3 + R.q.81 + R.c.⌟3 − R.q.8⌞ − 2.

R.c. LR.q. 2 + 1J — R.c. LR.q. 2 — 1J
R.c. LR.q. 2 + 1J — R.c. LR.q. 2 — 1J

R.c. L3 + R.q. 8J — 1 — 1 + R.c. L3 — R.q. 8J

R.c. L3 + R.q. 8J — R.c. L3 — R.q. 8J — 2

Moltiplichisi R.c.⌞3 + R.q.8⌟ + R.c.⌞3 − R.q.8⌟ − 2 via R.c.⌞R.q.2 + 1⌟ − R.c.⌞R.q.2 − 1⌟. Pongasi in regola (come di sopra) e moltiplichisi −

R.c.⌞R.q.2 − 1⌟ di sotto via − 2 di sopra fa + R.c.⌞R.q.128 − 8⌟ e questo si pone sotto la linea dalla parte del piu, poi si moltiplica − R.c.⌞R.q.2 − 1⌟ di sotto con + R.c.⌞3 − R.q.8⌟ di sopra fa − R.c.⌞R.q.50 − 7⌟ e pongasi sotto la linea dal lato del meno, poi moltiplicasi − R.c.⌞R.q.2 − 1⌟ di sotto via R.c.⌞3 + R.q.8⌟ di sopra fa − R.c.⌞R.q.2 + 1⌟ e pongasi sotto la linea, poi moltiplichisi R.c.⌞R.q.2 + 1⌟ di sotto via − 2 di sopra, fa − R.c.⌞R.q.128 + 8⌟, e si pone sotto la linea con l'altre dalla parte del meno, poi si moltiplica R.c.⌞R.q.2 + 1⌟ di sotto via + R.c.⌞3 − R.q.8⌟ di sopra fa R.c.⌞R.q.2 + 1⌟, pongasi sotto la linea dalla parte del più, poi si moltiplichi R.c.⌞R.q.2 + 1⌟ di sotto via R.c.⌞3 + R.q.8⌟ di sopra fa R.c.⌞R.q.50 + 7⌟ e pongasi sotto la linea, et questa è tutta la moltiplicatione (come si vede nella figura) che sono sei R.c.⌞ ⌟, tre dalla parte del più e tre da quella del meno. E perchè R.c.⌞R.q.2 + 1⌟ vi e due volte, una nel più e l'altra nel meno, che gionte insieme fanno nulla, resta solo di sommar l'altre quattro. E perchè R.c.⌞R.q.50 + 7⌟ ha lato, il qual'e R.q.2 + 1, e così dalla parte del meno R.c.⌞R.q.50 − 7⌟ ha anch'èlla lato, ch'è R.q.2 − 1, dual cavato di R.q.2 + 1 resta 2, dunque tutta la somma del produtto (ridutto a brevità) sarà (come si vede) 2 + R.c.⌞R.q.128 − 8⌟ − R.c.⌞R.q.128 + 8⌟, et avertiscasi che chi non maneggiara bene queste due moltiplicationi, meno potrà prevalersi del Capitolo di Cubo, Tanti, Potenze e Numero; e perchè ho detto del lato di R.c.⌞R.q.50 + 7⌟ essere R.q.2 + 1 e non ho mostrato il modo, il quale (ancor che habbia difficulta) non restare di porlo. Ma prima dire un'altra via più facile, la quale più tosto si pue chiamare (et è) prattica, che regola generale.

Modo di trovare il lato Cubico di un Binomio per prattica.

Quadrinsi tutte due le quantità del Binomio di cui se ne ha da pigliare il lato, cioè ciascuna da se, o sia Binomio, o Residuo, che non importa (com'è questo R.q.50 + 7). Quadrisi ciascuna da se fa 50 e 49, e si cava l'uno dell'altro resta 1, e di questo si piglia il lato cubo, ne havendolo rispondasi pur risolutamente tal Binomio o Residuo non haver lato cubico che si possa nominare se non per R. ⌞ ⌟ cube. Hora questo 1 e il suo lato; bisogna

R.c. L3 + R.q. 8⅃ + R.c. L3 — R.q. 8⅃ — 2
R.c. LR.q. 2 + 1⅃ — R.c. LR.q. 2 — 1⅃

Più	Meno
R.c. LR.q. 50 + 7⅃	R.c. LR.q. 128 + 8⅃
R.c. LR.q. 2 + 1⅃	R.c. LR.q. 2 + 1⅃
R.c. LR.q. 128 — 8⅃	R.c. LR.q. 50 — 7⅃
R.q. 2 + 1	R.c. LR.q. 128 + 8⅃
R.c. LR.q. 128 — 8⅃	R.q. 2 — 1

2 + R.c. LR.q. 128 — 8⅃ — R.c. LR.q. 128 + 8⅃

dipoi trovare a tentoni due quantita, cioè una R.q. e l'altra numero, che il quadrato dell'una sia 1 più del quadrato dell'altra, ma bisogna che la R.q sia la maggiore, perchè R.q.50 era maggiore di 7, et aggiongere al cubato del numero il triplo della moltiplicazione di una nell'altra (come se fossero tutte due numeri) e questo habbia a fare 7, perchè il numero del Binomio era 7 e le due quantità da trovarsi saranno R.q.2 e 1, che si vede che il cubato del numero e 1, e la moltiplicatione di uno nell'altro fa 2, che il triplo e 6, che gionto con 1 detto di sopra fa 7 (com'è l'intento). E perchè se si ponesse il numero essere 2, di necessità la R.q bisogna sia R.q.5, che direr R.q.5 + 2, che si vede che il cubato solo del numero supera il 7 però è troppo, talchè con ogni poco di prattica si ritrovarà.
Piglisi il lato cubo di 26 + R.q.675, pigliasi il quadrato dell'uno et il quadrato dell'altro, farà 676 e 675, che cavato l'uno dell'altro resta 1, e di quest'l si piglia il lato cubo, che sarà 1, bisogna hora trovare due quantità di numero et R.q che il quadrato del numero superi il quadrato della R.q di 1, perchè il quadrato di 26 e maggiore del quadrato di R.q.675, e che il cubato del numero gionto col triplo della moltiplicatione della R.q col numero (come se la R.q fusse numero) faccino 26. Hor per trovarlo se si ponera che il numero sia 3, di necessità la R.qsarà 8, che si vede che solo il cubato di 3 eccede il 26, pere diremo 3 esser troppo. Se si pigliara 1, di necessità la R.qsarà 0 di modo che questo non può venire, però piglisi 2, la R.qsarà R.q.3, che cubato il numero fa 8, e moltiplicato 2 via R.q.3 (come se ciascuno fosse numero) fa 6 che triplicato fa 18, e aggionto con 8 cubato del 2 fa 26, e 2 +

R.q.3 sarà il lato Cubico di 26 + R.q.675, si che tenendo questo modo se le quantità haverànno lato cubo sarà quasi impossibile che non si trovi e questo basta quanto alla operatione della prattica, **et è cosa importantissima, e bisogna possederla benissimo perchè leva di gran maneggi de' numeri nelle R.c. legate.**

Regola per trovare il lato Cubo di un Binomio.

Havendosi a trovare il lato cubico d'un Binomio, overo Residuo tengasi questo modo. Quadrisi ciascuna delle parti, et delli produtti si cavi il minore del maggiore, e quello che resta si parte per 64 sempre per regola e quello che ne viene si aggionge a s4 del quadrato del numero del qual è composto il Binomio, se la R.q sarà maggiore del numero, e della somma se ne piglia il lato e a quello si aggionge e si cava l'ottava parte del numero del qual è composto il Binomio, e delle due quantità che ne verrànno si piglia la R.ce poi si cava la minore della magg iore, e lo restante e il numero del lato del Binomio. E volendo poi trovare la quantità della R.qdel Binomio si quadrera detto restante e a quello si giongerà il lato Cubico della differenza ch'è dal quadrato del numero al quadrato della R.q del Binomio, e della somma se ne pigliarà il lato, e quello sarà la quantità della R.qche gionta col numero che fu di sopra, la somma sarà il lato del Binomio cercato; e per più chiarezza ponerò l'essempio. Trovisi il lato di R.q.128 + 8. Quadrisi 8 e R.q.128, farà 128, 64, che cavato il minore del maggiore resta 64, e di questo se ne piglia $\frac{1}{64}$ per regola, che sarà 1, e questo si aggionge a $\frac{1}{64}$ del quadrato del numero, che era 8, e sarà 2, e di questo se ne piglia il lato, che sarà R.q.2, e a questo si aggionge e cava l'ottava parte del numero, ch'era 8, che sarà 1, farà R.q.2 + 1 e R.q.2 − 1, che pigliata da se Ia R.c. di ciascuna e tratta la minore della maggiore, restartà R.c.$\llcorner$R.q.2 + 1$\lrcorner$ − R.c.$\llcorner$R.q.2 − 1$\lrcorner$, e questa sarà la quantità del numero; volendo poi trovare la R.q quadrisi R.c.$\llcorner$R.q.2 + 1$\lrcorner$ − R.c.$\llcorner$R.q.2 − 1$\lrcorner$ farà R.c.$\llcorner$3 + R.q.8$\lrcorner$ + R.c.$\llcorner$3 − R.q.8$\lrcorner$ − 2, e a questo si aggionge il lato cubico della differenza ch'è da R.q.128 a 8 numero, ch'è 4, e si haverà R.c.$\llcorner$3 + R.q.8$\lrcorner$ + R.c.$\llcorner$3 − R.q.8$\lrcorner$ + 2, e di questo se ne

piglia la R.q e si aggionge al numero detto di sopra, farà in tutto R.q.⌞R.c.⌟3 + R.q.8⌞ + R.c.3⌟ − R.q.8⌞ + 2⌟ + R.c.⌞.R.q.2 + 1⌟ − R.c.⌞R.q.2 − 1⌟ e questo è il lato cubico di R.q.128 + 8. E benchè tal modo sia difficile e nell'operare torni meglio la prattica sopradetta, nondimeno non ho voluto restare di ponerlo. E quando per la prattica insegnata non si trovasse il lato cubico (come in questo si è veduto) all'hora sarà meglio dire R.c.⌞R.q.128 + 8⌟ che sarà tutta questa operatione sudetta, et la sopradetta regola nasce da questa dimanda. Trovami due numeri che il quadrato dell'uno superi il quadrato dell'altro di 4 lato cubico della differenza ch'è dal quadrato di R.q.128 a 8, et che al cubato del minore di detti due numeri si aggionga il triplo della moltiplicatione delli quadrati di detti due numeri l'uno in l'altro, et la somma faccia 8, numero che era con la R.q.128 che ponendo la positione per ritrovar la risolutione al fine dello agguagliamento, si haverà un Cubo + 3 tanti eguale a 2, che nel secondo tibro si potrà vedere tale agguagliamento, et tornaro alle moltiplicationi di R.c. legate.
Moltiplichisi R.c.⌞5 + R.q.24⌟ + R.c.⌞5 − R.q.24⌟ + 1 via R.c.⌞5 + R.q.24⌟ + R.c.⌞5 − R.q.24⌟ + 1. Mettasi in regola come si vede, et moltiplichisi + 1 di sotto via tutta la quantità di sopra, fa R.c.⌞5 + R.q.24⌟ + R.c.⌞5 − R.q.24⌟ + 1, di poi moltiplichisi R.c.⌞5 − R.q.24⌟ di sotto via il + 1 di sopra fa R.c.⌞5 − R.q.24⌟ et poi si moltiplichi via R.c.⌞5 − R.q.24⌟ di sopra fa R.c.⌞49 − R.q.2400⌟ et poi si torni a moltiplicare via la restata R.c.⌞5 + R.q.24⌟ di sopra fa 1, e queste tre ultime moltiplicationi sono il produtto di R.c.⌞5 − R.q.24⌟ di sotto via le tre quantità di sopra. Fatto questo si moltiplichi R.c.⌞5 + R.q.24⌟ di sotto via tutta la quantità di sopra, che moltiplicata via + 1 fa R.c.⌞5 + R.q.24⌟ et via R.c.⌞5 − R.q.24⌟ fa + 1 et via R.c.⌞5 + R.q.24⌟ fa R.c.⌞49 + R.q.2400⌟ et è finita tutta la moltiplicatione, che il produtto e quello che si vede nella figura sotto la linea, et per ridurlo a brevità sotto esso vi si tiri una linea, et si sommino insieme le due R.c.⌞5 + R.q.24⌟ che farnnno R.c.⌞40 + R.q.1536⌟ et le due R.c.⌞5 − R.q.24⌟ che farannoR.c.⌞40 − R.q.1536⌟ et le tre unità che faranno3, che questo gionto con le restanti quantità haveremo per produtto, come nella figura si può ve-

dere R.c.⌞49 + R.q.2400⌟ + R.c.⌞40 + R.q.1536⌟ + R.c.⌞40 − R.q.1536⌟ + R.c.⌞49 − R.q.2400⌟ + 3; et perchè nel Capitolo di Cubo eguale a Potenze e numero accadano alle volte simili moltiplicationi di haverle a cubare, però mettero la sua seconda moltiplicatione, acciochè quando si sarà a quei Capitoli, siano, da chi leggerà, meglio intesi.

Moltiplichisi R.c.⌞49 + R.q.2400⌟ + R.c.⌞40 + R.q.1536⌟ + R.c.⌞40 −

R.c.L49+R.q. 2400⌟+R.c.L40+R.q. 1536⌟+R.c.L40 — R.q. 1536⌟ + R.c.L49 — R.q. 2400⌟ + 3
R.c. L5 + R.q. 24⌟ + R.c. L5 — R.q. 24⌟ + 1

		Più 3
	a	**R.c. L49 — R.q. 2400⌟**
	c	**R.c. L40 — R.q. 1536⌟**
	d	**R.c. L40 + R.q. 1536⌟**
	b	**R.c. L49 + R.q. 2400⌟**
	c	**R.c. L135 — R.q. 17496⌟**
Lato 5 — R.q. 24		**R.c. L485 — R.q. 235224⌟**
	a	**R.c. L392 — R.q. 153600⌟**
Lato 2		**R.c. 8**
	d	**R.c. L5 + R.q. 24⌟**
	d	**R.c. L135 + R.q. 17496⌟**
	c	**R.c. L5 — R.q. 24⌟**
Lato 2		**R.c. 8**
	b	**R.c. L392 + R.q. 153600⌟**
Lato 5 + R.q. 24		**R.c. L485 + R.q. 235224⌟**

E 17 + R.c. L1323 + R.q. 1749600⌟ + R.c. L1323 — R.q. 1749600⌟ + R.c. L1080 + R.q. 1119744⌟ + R.c. L1080 — R.q. 1119744⌟ è il prodotto della moltiplicatione.

R.q.1536⌟ + R.c.⌞49 − R.q.2400⌟ + 3 via R.c.⌞5 + R.q.24⌟ + R.c.⌞5 − R.q.24⌟ + 1. Mettasi in regola (come si vede) e moltiplichisi il + 1 di sotto via tutta la quantità di sopra fa la medesima quantita, quale si metta sotto la linea (come nella figura si vede) poi si moltiplichi + R.c.⌞5 − R.q.24⌟ di sotto via tutta la quantità di sopra, che moltiplicata via + 3 fa R.c.⌞135 − R.q.17496⌟, et via + R.c.⌞49 − R.q.2400⌟ fa R.c.⌞485 − R.q.235224⌟, et via R.c.⌞40 − R.q.1536⌟ fa R.c.⌞392 − R.q.153600⌟ et per R.c.⌞40 + R.q.1536⌟ fa R.c.8 et via R.c.⌞49 + R.q.2400⌟ fa R.c.⌞5 + R.q.24⌟. Dipoi similmente si moltiplichi R.c.⌞5 + R.q.24⌟ di sotto via tutta la quantità di sopra, che moltiplicata via 3 fa R.c.⌞135+ R.q.17496⌟, et via R.c.⌞49 − R.q.2400⌟ fa R.c.⌞5 − R.q.24⌟ et via R.c.⌞40 − R.q.1536⌟ fa R.c.8, et via R.c.⌞40 + R.q.1536⌟ fa R.c.⌞392 + R.q.153600⌟, et via R.c.⌞49 + R.q.2400⌟ fa R.c.⌞485 R.q.235224⌟ et così sarà finita la moltiplicatione, quale sarà cornposta (come si vede) di quindici quantità, fra le quali quattro ve ne sono che hanno lato (come nella figura si vede), quali lati sommati insieme fanno 14, al qual 14 gionto il 3, numero, fa 17, qual si serbi. Et perchè le tre quantità segnate con la lettera.c. sono communicanti fra loro si sommino insieme fanno R.c.⌞1080 − R.q.1119744⌟ et similmente le tre segnate col.d. che sono communicanti sommate insieme fanno R.c.⌞1080 + R.q.1119744⌟ et le due quantità segnate con l'.a. che sono communicanti sommate insieme fanno R.c.⌞1323 − R.q.1749600⌟ et le due restanti quantità segnate col.b., che sono pur communicanti, sommate insieme fanno R.c.⌞1323 + R.q.1749600⌟ si che tutto il produtto della moltiplicatione come nella figura si vede abbreviato sarà 17 + R.c.⌞1323 + R.q.1749600⌟ + R.c.⌞1323 − R.q.1749600⌟ R.c.⌞1080 + R.q.1119744⌟ + R.c.⌞1080 − R.q.1119744⌟ il qual modo si osservi in tutte l'altre moltiplicationi.

Sommare di R. legate Cube.

Il sommare di R.c.⌞. si può fare con li tre modi detti nelle cube, ma e molto laborioso et difficile; 45 prima si ha da avertire se le R.c.⌞ ⌟ che si hanno a sommare fra loro hanno proportione come da numero a numero, che havendola saranno facilissime, come se si havesse a sommare R.c.⌞R.q.4352 + 16⌟ con R.c.⌞R.q.68 + 2⌟, queste sono facilissime, perchè a partire la maggiore per la minore ne viene 2, a questo 2 giongasi 1 per regola fa 3, et questo si moltiplica via R.c.⌞R.q.68 +2⌟ fa, come s'è insegnato, R.c.⌞R.q.49572 + 54⌟ et quest'è la somma di dette R.c. proposte. Sommisi R.c.⌞40 + R.q.1536⌟ et R.c.⌞5 + R.q.24⌟ et R.c.⌞135 + R.q.17496⌟. perchè a partire R.c.⌞40 + R.q.1536⌟ per R.c.⌞5 + R.q.24⌟ ne viene 2, et a partire per la medesima R.c.⌞135 + R.q.17496⌟ ne viene 3, aggionganasi 2 et 3 insieme fanno 5, et a questo 1 per regola fa 6, qual

R.c.L49+R.q. 2400⌟+R.c.L40+R.q. 1536⌟+R.c.L40 — R.q. 1536⌟
+ R.c.L49 — R.q. 2400⌟ + 3
R.c. L5 + R.q. 24⌟ + R.c. L5 — R.q. 24⌟ + 1

		Più 3
	a	R.c. L49 — R.q. 2400⌟
	c	R.c. L40 — R.q. 1536⌟
	d	R.c. L40 + R.q. 1536⌟
	b	R.c. L49 + R.q. 2400⌟
	c	R.c. L135 — R.q. 17496⌟
Lato 5 — R.q. 24		R.c. L485 — R.q. 235224⌟
	a	R.c. L392 — R.q. 153600⌟
Lato 2		R.c. 8
	d	R.c. L5 + R.q. 24⌟
	d	R.c. L135 + R.q. 17496⌟
	c	R.c. L5 — R.q. 24⌟
Lato 2		R.c. 8
	b	R.c. L392 + R.q. 153600⌟
Lato 5 + R.q. 24		R.c. L485 + R.q. 235224⌟

E 17 + R.c. L1323 + R.q. 1749600⌟ + R.c. L1323 — R.q. 1749600⌟ + R.c. L1080 + R.q. 1119744⌟ + R.c. L1080 — R.q. 1119744⌟ è il produtto della moltiplicatione.

si moltiplichi via R.c.⌞5 + R.q.24⌟ commun partitore fa R.c.⌞1080 + R.q.1119744⌟ per la somma di dette R.c. legate proposte.

Et è da sapere che tutte le R.c. legate si possono sommare col quadrato del residuo, essendo Binomio, e così tutte le R. legate cube che saranno residuo si possono sommare col quadrato del suo Binomio, overo con quelli che haverànno proportione con l'uno o con l'altro come da numero a numero, come sarebbe R.c.⌞R.q.2 + 1⌟ con R.c.⌞3 − R.q.8⌟ che l'una è residuo del quadrato dell'altra. E ancora si possono sommare R.c.⌞R.q.128 + 8⌟ con R.c.⌞3 − R.q.8⌟, perchè R.c.⌞R.q.128 + 8⌟ e duplo a R.c.⌞R.q.2 + 1⌟, overo R.c.⌞R.q.2 + 1⌟ con R.c.⌞24 − R.q.512⌟, che R.c.⌞24 − R.q.512⌟ ha proportione dupla con R.c.⌞3 − R.q.8⌟ e così avertiscasi che li lati quadrati di queste R.c.⌞. si possono sommare col suo quadrato contrario, cioè che il piùsia meno, overo con una seco communicante che sia con essa in proportione come di numero a numero, come per essempio se si haverà a sommare R.c.⌞R.q.12 + 2⌟ con R.c.⌞16 − R.q.192⌟, percheR.c.⌞R.q.12 − 2⌟ ch'è il residuo di R.c.⌞R.q.12 + 2⌟, è il lato di R.c.⌞16 − R.q.192⌟, tali R. si possono sommare in questa guisa. Partasi la maggiore per la minore, e perchè non ho dato regola come si habbia a conoscere la maggiore da la minore lo ponerò in fine di questo Capitolo, seguendo per hora la somma delle due quantità proposte per non confondere l'operante, e perchè queste due sono failissime a conoscere senz'altra regola, che si vede che R.c.⌞16 + R.q.192⌟ e la minore, però sarà esso partitore, e partita l'altra, ch'è R.c.⌞R.q.12 + 2⌟, ne verrà (come si vede nella figura) R.c⌞R.q.6912 + 80⌟, che il suo lato cubo e R.q.12 + 2 e questo si parta per la moltiplicatione del partitore via il suo residuo, cioè R.c.⌞16 + R.q.192⌟ via R.c.⌞16 + R.q.192⌟, che fa 4, che ne viene R.q.$\frac{3}{4}$ + $\frac{1}{2}$, al quale per regola si aggionga 1, fa 1 $\frac{1}{2}$ + R.q.$\frac{3}{4}$, e questo si ha da moltiplicare via al minore, cioè R.c.⌞16 − R.q.192⌟ (riducendo 1 $\frac{1}{2}$ + R.q$\frac{3}{4}$ a R. legata cuba, che sarà R.c.6⌞$\frac{3}{4}$ + R.q.42 $\frac{3}{16}$⌟)che moltiplicato (com'è detto) farà R.c.⌞18 + R.q.108⌟ e questa è la somma di dette R.c., e olendosene far la prova, cavisi il quadrato della R. del quadrato del numero, e se quello che resta e numero cubo tal somma può essere vera e reale; ma se non è numero cubo risolutamente e falsa, perchè (come in questa si vede) a cavare il quadrato di R.q.108, ch'è 108, di 324, quadrato di 18, resta 216, ch'è numero cubo. Ma questa prova s'intende solo per le R.c. legate che a cavare il quadrato della minore del quadrato della maggiore resti numero cubo, come le due sopradette, cioè R.c.⌞R.q.12 + 2⌟ e R.c.⌞16 − R.q.192⌟, che a cavare il quadrato di 2, ch'è 4, del quadrato di R.q.12, ch'è 12, resta 8, ch'è numero cubo, e così a cavare il quadrato di R.q.192, ch'è 192, di 256, quadrato di 16, resta 64, ch'è numero cubo, e quando il resto di una fusse numero cubo e l'altra no risolutamente tali due R.c. legate non si potrànno sommare se non per via del e di quelle delle quali si ha a trattare, e che nasceranno ne' Capitoli di questo volume, cavandosi il quadrato della minore del quadrato della maggiore, sempre ne restarà numero cubo. E la sopradetta prova e come la prova del 9 nel moltiplicare, che non restando numero cubo senza dubbio tal somma sarà falsa (come dissi di sopra) ma se resta numero cubo può essere e non essere vera. **Ma posto che si fusse partito la minore per la maggiore, in questo caso si ha da pigliare il lato cubico dell'avenimento e aggiongerli 1 per regola e moltiplicare il suo cubato via la maggiore che l'avenimento sarà la somma di dette due R.**

Modo di conoscere, di due quantità irrationali composte, quale sia maggiore.

	4 + R.q. 7	20 — R.q. 180
cava	4	4
resta	R.q. 7	16 — R.q. 180
	R.q. 7	16 — R.q. 180
	7	436 — R.q. 184320
	R.q. 184320	R.q. 184320
R.q. 184320 + 7		436
	7	7
R.q. 184320		429
R.q. 184320		429
	184320	184041

Volendo vedere qual sia maggiore 4 + R.q.7, overo 20 − R.q.180, levasi il minor numero da ogni parte, ch'è 4, resta da una parte R.q.7, e dall'altra 16 − R.q.180, e perchè (come si sa) se da cose eguali si leva cosa eguale lo restante e pur eguale, e se da cose ineguali si leva cosa eguale lo restante e pur ineguale, però havendo cavato 4 di ciascuna ilna di queste due quantità lo restante di esse sarà eguale, o ineguale (come era prima). Quadrisi poi ciascuna da se, cioè 16 − R.q.180 e R.q.7, che L'una farà 436 − R.q.184320, e l'altra farà 7; aggiungasi i ciascuna delle parti R.q.184320, che si haverà 436 e R.q.184320 + 7, levisi il minor numero da ogni parte, ch'è 7, resta 429 e R.q.184320, che quadrato ciascuna delle parti si haverà 184041 e 184320, che si vede che sopravanza la parte del 4 + R.q.7 (come più chiaro nella ligura si vede). Il medesimo effetto fa nelle R.c.⌞⌟., come se si fusse detto ch'è maggior quantità R.c.⌞4 + R.q.7⌟ overo R.c.⌞20 − R.q.180⌟, die a cubare ciascuna delle parti ne viene 4 + R.q.7 et 20 − R.q.180, che si può poi seguire l'ordine predetto.

R.c. L72 — R.q. 1088⌟	R.c. LR.q. 4352 + 16⌟
R.c. L72 + R.q. 1088⌟	R.c. L72 + R.q. 1088⌟
R.c. 4096	R.c. LR.q. 18415616 + 3328⌟
Lato 16 partitore	Lato R.q. 272 + 4
	Avenimento R.q. $1\frac{1}{16} + \frac{1}{4}$, giontoli 1
	fa R.q. $1\frac{1}{16} + 1\frac{1}{4}$ via R.q. $1\frac{1}{16} + 1\frac{1}{4}$
	fa R.q. $6\frac{41}{64} + 2\frac{5}{8}$
	R.q. $1\frac{1}{16} + 1\frac{1}{4}$
	R.c. L5 $\frac{15}{16}$ + R.q. 35 $\frac{33}{256}$⌟
	R.c. L72 — R.q. 1088⌟
Somma	R.c. L232 + R.q. 53312⌟

Sommisi R.c.⌞R.q.4352 + 16⌟ con R.c.⌞72 − R.q.1088⌟. Queste due R. si possono sommare, perchè il lato di R.c.⌞72 − R.q.1088⌟, ch'è R.c.⌞R.q.68 − 2⌟, e in proportione dupla a R.c.⌞R.q.4352 − 16⌟ residuo di R.c.⌞R.q.4352 + 16⌟, però si possono sommare (com'è detto) partendo la maggiore per la minore, cioè per R.c.⌞72 − R.q.1088⌟ che moltiplicata via il suo Binomio (come si vede nella figura) fa 16, e questo è il partitore, e moltiplicato R.c.⌞R.q.4352 + 16⌟ via R.c.⌞72 + R.q.1088⌟ Binomio del partitore fa R.c.⌞R.q.18415616 + 3328⌟, che il suo lato è R.q.272 + 4, che partito per 16 ne viene R.q.1 $\frac{1}{16}$ + $\frac{1}{4}$ che aggiontoli 1 per regola fa 1 $\frac{1}{4}$ + R.q.1 $\frac{1}{16}$, e questo si ha da moltiplicare via R.c.⌞72 − R.q.1088⌟ però riducasi a R.c.⌞⌟., farà R.c.⌞5 $\frac{15}{16}$ + R.q.35 $\frac{23}{256}$ ⌟ che moltiplicato via R.c.⌞72 − R.q.1088⌟ fa R.c.⌞232 + R.q.53312⌟ e questa è la somma di dette due R.

Sommisi R.c.⌞46 + R.q.2028⌟ con R.c.⌞R.q.12 + 1⌟. Partasi la maggiore per la minore, ne viene R.c.⌞R.q.108 + 10⌟ che il suo lato cubo e R.q.3 + 1, al quale gionto 1 per regola, fa 2 + R.q.3 e questo ridutto a R.c.⌞⌟. fa R.c.⌞26 + R.q.675⌟ che moltiplicato via la minore, ch'è R.c.⌞R.q.12 + 1⌟ farà R.c.⌞R.q.13467 + 416⌟ e questa è la somma di dette due R.c.⌞⌟. Il che bastera quanto al

sommare, del qual ordine si può servire ancora nella operatione del sotrare, cavandosi quel uno che nel sommare si aggionge (come nelli infrascritti essempij chiaramente si vedrà).

Sotrare di R.c. legate.

Perchè prima e stato detto semplicemente del sotrare di dette R.c.$\llcorner$ mi è parso necessario in questo luogo di dirne più particolarmente. Avertendosi che tutte le R.c.$\llcorner$ che haverànno le parti che si sono dette nel sommare si potrànno parimente sotrare, come per essempio se si haverà a cavare R.c.$\llcorner 16 -$ R.q.$192\lrcorner$ di R.c.$\llcorner$R.q.$12 + 2\lrcorner$ che pari i R.c.$\llcorner$R.q.$12 + 2\lrcorner$per R.c.$\llcorner 16 -$ R.q.$192\lrcorner$ ne viene (come fu detto nel sommare) R.q.$\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$, che cavatone 1 per regola, resta R.q.$\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$, il che poi si ha da moltiplicare via R.c.$\llcorner 16 -$ R.q.$192\lrcorner$, riduchisi $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ a R.c.$\llcorner$ farà R.c.$\llcorner$R.q.$\frac{11}{16} - 1\frac{1}{4}\ \lrcorner$ che moltiplicato via R.c.$\llcorner 16 -$ R.q.$192\lrcorner$ fa R.c.$\llcorner$R.q.$1452 - 38\lrcorner$ e questo è quello che resta a cavare R.c.$\llcorner 16 -$ R.q.$192\lrcorner$ di R.c.$\llcorner$R.q.$12+ 2\lrcorner$. Ma se la domanda dicesse che si cavasse R.c.$\llcorner$R.q.$12 + 2\lrcorner$ di R.c.$\llcorner 16 -$ R.q.$192\lrcorner$ perchè quella che va cavata è maggiore, tengasi pur l'ordine di cavare la minore della maggiore, ma quello che restarà sarà meno, cioè meno R.c.$\llcorner$R.q.$1452 - 38\lrcorner$.
Cavisi R.c.$\llcorner 72 -$ R.q.$1088\lrcorner$ di R.c.$\llcorner$R.q.$4352 + 16\lrcorner$. Partasi (come di sopra) R.c.$\llcorner$R.q.$4352 + 16\lrcorner$per R.c.$\llcorner 72 -$ R.q.$1088\lrcorner$ ne viene R.q.$1\ \frac{1}{16} + \frac{1}{4}$, che cavatone 1 per regola resta R.q.$1\ \frac{1}{16}$-$\frac{3}{4}$, che ridutto a R.c.$\llcorner$ sarà R.c.$\llcorner$R.q.$8\ \frac{9}{256} - 2\frac{13}{16}\ \lrcorner$ il qual moltiplicato via R.c.$\llcorner 72 -$ R.q.$1088\lrcorner$ fa R.c.$\llcorner$R.q.$88128 - 296\lrcorner$ e questo è lo restante.

Modo di partire per una R.c. legata di un Binomio.

[19] Quando accadera partire una quantità per una R.c.$\llcorner$ di un Binomio over Residuo si terra il modo che fu detto nel partire per Binomij e Residui, moltiplicando il Binomio per il suo Residuo, overo il Residuo per il suo Binomio,

[19]Et notisi, che quando al bisogno di tal partimento secondo li capitoli, di ch si ha trattar ne l'opera, sempre la moltiplicatione di queste Radici legate del Binomio via il suo Residuo, overo del suo Residuo via il suo Binomio haveranno sempre Creatore cubico, però non ne ponerò essempio fuori di questi ordini.

ma del produtto se ne piglia il lato cubico, il qual è partitore, come per essempio partasi 6 per R.c.⌞7 + R.q.22⌟. Moltiplichisi R.c.⌞7 + R.q.22⌟ via R.c.⌞7 − R.q.22⌟ che moltiplicandole semplicemente (come se non fussero legate) ne viene 27, che il suo lato cubico e 3, e partendosi 6 per 3 ne vien 2 e questo si moltiplica via il detto Residuo, cioè via R.c.⌞7 − R.q.22⌟ fa R.c.⌞56 − R.q.1408⌟ e questo a l'avenimento di tal partire.

Modo di partire per R.c. legata di un Residuo.

Partisi 6 per R.c.⌞4 − R.q.8⌟. Moltiplichisi via il suo Binomio, ch'è R.c.⌞4 + R.q.8⌟ fa 8, che il suo lato cubico e 2, che partito 6 per 2 ne viene 3 e questo si moltiplica via R.c.⌞4 + R.q.8⌟ fa R.c.⌞108 + R.q.5832⌟ e tanto e l'avenimento.

A partire un Binomio per una R. legata Cuba.

Partisi R.q.8 + 2 per R.c.⌞R.q.12 + 2⌟. Moltiplichisi il partitore per il suo residuo fa 8, che il suo lato è 2, e questo è il partitore, che partito R.q.8 + 2 per 2 ne viene R.q.2 + 1, il quale si moltiplichi per R.c.⌞R.q.12 − 2⌟ residuo del partitore riducendo esso R.q.2 + 1 a R.c.⌞ farà R.c.⌞R.q.50 + 7⌟ e moltiplicato poi farà R.c.⌞R.q.600 + R.q.588 − R.q.200 − 14⌟ e questo è l'avenimento.

Partisi 6 per R.c.⌞R.q.12 + 3⌟. Moltiplichisi il partitore per R.c.⌞R.q.12 − 3⌟ suo residuo fa 3, che il suo lato cubico e R.c.3 col quale si parti il 6 (riducendolo prima a R.c., che sarà R.c.216), ne viene R.c.72 e questo si moltiplica via R.c.⌞R.q.12 − 3⌟ fa R.c.⌞62208 − 216⌟ e quest'è l'avenimento.

A partire numero per due R.c.⌞. di un Binomio o Residuo.

Partisi 6 per R.c.⌞R.q.2 + 1⌟ − R.c.⌞R.q.2 − 1⌟. Nel fare simil partimento procedasi come fu detto nel partire per un Binomio cubo, che queste due Radici Legate sono tutte due Cube. Però quadrato di tutte due ciascuna da se, che sarà R.c.⌞3 + R.q.8⌟ et R.c.⌞3 − R.q.8⌟, e questo si salvi. Poi si moltiplica R.c.⌞R.q.2 + 1⌟ via − R.c.⌞R.q.2 − 1⌟ che fa − 1 il quale si aggionghi con li due quadrati serbati di sopra, facendolo cangiar natura e doventar che dirà tutto insieme R.c.⌞3 + R.q.8⌟ + R.c.⌞3 − R.q.8⌟ + 1, e questo è il suo Residuo che moltiplicato via R.c.⌞R.q.2 + 1⌟ + R.c.⌞R.q.2 − 1⌟ fa 2 (come si vede nella figura) e questo è il partitore, che partito 6 per esso ne vien 3, qual si moltiplica via il Residuo trovato fa R.c.⌞81 + R.q.5832⌟ + R.c.⌞81 − R.q.5832⌟ + 3, e questo è l'avenimento.

R.c. LR.q. 2 + 1J — R.c. LR.q. 2 — 1J
R.c. L3 + R.q. 8J + R.c. L3 — R.q. 8J + 1

	Più		Meno
a	R.c. LR.q. 2 + 1J	b	R.c. LR.q. 2 — 1J
b	R.c. LR.q. 2 — 1J	a	R.c. LR.q. 2 + 1J
	R.c. LR.q. 50 + 7J		R.c. LR.q. 50 — 7J
	Lato R.q. 2 + 1		Lato R.q. 2 — 1
	Somma e partitore 2		Numero da partire 6
			Avenimento 3

R.c. L3 + R.q. 8J + R.c. L3 — R.q. 8J + 1

Avenimento R.c. L81 + R.q. 5832J + R.c. L81 — R.q. 5832J + 3

A partire per R.c di un Binomio o Residuo e numero.

Partasi 16 per 2 + R.c.⌞R.q.24 − 4⌟. Trovisi il suo residuo (com'è stato mostrato di sopra) che sarà R.c.⌞40 − R.q.1536⌟ + 4 + R.c.⌞R.q.1536 − 32⌟ il quale moltiplicato via il partitore fa R.q.24 + 4, che brevemente per far tal moltiplicatione tengasi il modo che fu mostrato a partire per un Binomio cubo, aggiongendo tutti due i Cubati del partitore insieme, cioè il cubato di 2, ch'è 8, con il cubato di R c.⌞R.q.24 − 4⌟, ch'è R.q.24 − 4, che faranno R.q.24 + 4, e questo è il secondo partitore, che moltiplicato via il suo residuo, ch'è R.q.24 − 4 fa 8, e questo è il terzo partitore, che partito 16 per 8 ne viene 2 che si ha da moltiplicare via li due residui, cioè R.c.⌞40 − R.q.1536⌟ + 4 − R.c.⌞R.q.1536 − 32⌟, e R.q.24 − 4, che moltiplicato detto 2 via il primo residuo fa 8 + R.c.⌞320 − R.q.98304⌟ − R.c.⌞R.q.98304 − 256⌟, e questo moltiplicato via il secondo residuo, cubandolo prima, cioè riducendolo a R.c.⌞, che sarà R.c.⌞R.q.124416 − 352⌟, farà R.q.1536 − 32

+ R.c.⌞R.q.49834622976 − 223232⌟ − R.c.⌞200704 − R.q.40265318400⌟ che sarà l'avenimento di questa partitione.

2 + R.c. LR.q. 24 — 4J
R.q. 24 + 4
R.q. 24 — 4
8
Partitore 8. Numero da partire 16.
2
R.c. L40 — R.q. 1536J + 4 — R.c. LR.q. 1536 — 32J
R.c. L320 — R.q. 98304J + 8 — R.c. LR.q. 98304 — 256J
R.q. 24 — 4
R.c. LR.q. 124416 — 352J il Cubato.
R.c. LR.q. 49834622976 — 223232J + R.q. 1536 — 32 +
— R.c. L200704 — R.q. 40265318400J. Avenimento.

A partire per un Trinomio composto di R.c. legate e numero.

Partasi 72[20] per 2 + R.c.⌞R.q.68 + 2⌟ − R.c.⌞R.q.68 − 2⌟. Trovisi il suo residuo pigliando i quadrati di esse tre quantità e giongendoli insieme, che faranno4 + R.c.⌞72 + R.q.1088⌟ + R.c.⌞72 − R.q.1088⌟ et a questi si aggiunga la moltiplicatione di 2 via R.c.⌞R.q.68 + 2⌟ − R.c.⌞R.q.68 − 2⌟, ch'è R.c.⌞R.q.4352 + 16⌟ − R.c.⌞R.q.4352 − 16⌟, e parimente la moltiplicatione di R.c.⌞R.q.68 + 2⌟ via − R.c.⌞R.q.68 − 2⌟, ch'è − 4, facendo cangiar natura a queste moltiplicationi, che il tutto sarà 8 + R.c.⌞72 + R.q.1088⌟ + R.c.⌞72 − R.q.1088⌟ + R.c.⌞R.q.4352 − 16⌟ − R.c.⌞R.q.4352 + 16⌟, e questo è il residuo.

Volendo hora trovare il partitore, piglisi il Cubato delle due quantità che sono più, ciascuna da se, che saranno 8 e R.q.68 + 2, e di questo se ne cavi il cubato della quantità che dicea meno, e R.q.68 − 2, resta 12. Poi si moltiplichi R.c.⌞R.q.68 + 2⌟ via R.c.⌞R.q.68 − 2⌟ fa 4 e questo si moltiplichi via 2, fa 8, **il quale 8 per regola si triplichi, fa 24,** qual si aggionga al

[20] 40

12 fa 36, ch'è il secondo partitore, e tanto fa a moltiplicare il primo partitore via il residuo trovato, si che partito 72[21] per 36[22] ne viene 2, et questo si ha da moltiplicare via il residuo, che farà 16 + R.c.⌞576 + R.q.69632⌟ + R.c.⌞576 − R.q.69632⌟ + R.c.⌞R.q.278528 − 128⌟ − R.c.⌞R.q.278528 + 128⌟ ch'è l'avenimento di simil partire. **Ma perchè il detto residuo e di cinque nomi però esso si potrebbe ridurre a Trinomio e avanti che si faccia la moltiplicatione del 2, che sarà meglio per rispetto delli numeri grandi che ne risultano. Però essendo il residuo 8 + R.c.⌞72 + R.q.1088⌟ + R.c.⌞72 − R.q.1088⌟ + R.c.⌞R.q.4352 − 16⌟ − R.c.⌞R.q.4352 + 16⌟ lo ridurremo a Trinomio sommando R.c.⌞72 + R.q.1088⌟ con R.c.⌞R.q.4352 − 16⌟, che faranno(per havere le conditioni dette nel sommare) R.c.⌞R.q.88128 + 296⌟, e similmente sommaremo R.c.⌞72 − R.q.1088⌟ con − R.c.⌞R.q.4352 + 16⌟, cavando la minore della maggiore restrerà − R.c.⌞R.q.88128 − 296⌟, che tutto I residuo sarà ridutto a Trinomio 8 + R.c.⌞R.q.88128 + 296⌟ + R.c.⌞R.q.88128 − 296⌟, quale moltiplicato per 2 fa 16 + R.c⌞R.q.5640192 + 2368⌟ − R.c.⌞R.q.5640192 − 2368⌟ e questo sarà I'avenimento della partitione.**

Ho trovato un'altra sorte di R.c. legate molto differenti dall'altre, qual nasce dal Capitolo di cubo eguale a tanti e numero, quando il cubato del terzo delli tanti e maggiore del quadrato della metà del numero, come in esso Capitolo si dimostrarà, la qual sorte di R.q ha nel suo Algorismo diversa operatione dall'altre e diverso nome; perchè quando il cubato del terzo delli tanti e maggiore del quadrato della metà del numero, lo eccesso loro non si può chiamare ne più ne meno, però lo chiamaro più di meno quando egli si dovera aggiongere, quando si dovera cavare lo chiamerò men di meno, e questa operatione e necessarijssima più che l'altre R.c.⌞ per rispetto delli Capitoli di potenze di potenze, accompagnati con li cubi,

[21] 40
[22] 20

o tanti, o con tutti due insieme, che molto più sono li casi dell'agguagliare dove ne nasce questa sorte di R. che quelli dove nasce l'altra, la quale parera a molti più tosto sofistica che reale, e tale opinione ho tenuto anch'io, sin che ho trovato la sua dimostratione in linee (come si dimostrara nella dimostratione del detto Capitolo in superficie piana) e prima trattaro del moltiplicare, ponendo la regola del più. et meno.

Più via più. di meno, fa più di meno.
Meno via più di meno, fa meno di meno.
Più via meno di meno, fa meno di meno.
Meno via meno di meno, fa più di meno.
Più di meno via più di meno, fa meno.
Più di meno via men di meno, fa più.
Meno di meno via più di meno, fa più.
Meno di meno via men di meno, fa meno.

Si deve avertire che tal sorte di R. legate non possono intravenire se non accompagnato il Binomio col suo Residuo, come sarebbe R.c.⌞2 + di − R.q.2⌟ il suo residuo sarà R.c.⌞2 − di − R.q.2⌟, e tal sorte di R.c per sino a hora mai mi e occorso havere operata l'una senza l'altra, et ancora possono occorrere che la seconda quantità sia numero e non R. (come nell'agguagliare si vedrà), però se si dicesse R.c.⌞2 + di − 2⌟ questo non si può ridurre a un nome solo, se ben l'uno e l'altro e numero, e se il secondo nome fusse maggiore del primo, per questo non resta che il composto del Binomio e Residuo non sia quantità (come nelle dimostrationi si vedrà) però verrb alli essempij del moltiplicare. Moltiplichisi R.c.⌞2 + di − 1⌟ + R.c.⌞2 − di − 1⌟ per 4. Riduchisi il 4 a cubo (come si procede nell'altre) che farà 64, il quale moltiplicato per 2 fa 128, e moltiplicato per + di − 1, fa + di − 64, che gionti insieme fanno 128 + di

– 64 e di questo composto toltone la R.c haveremo R.c.⌊128 + di – 64⌋ per la moltiplicatione del Binomio, e il Residuo di quello ch'è R.c.⌊128 – di – 64⌋ sarà la moltiplicatione del Residuo, che il loro composto, qual è R.c.⌊128 + di – 64⌋ + R.c.⌊128 – di – 64⌋ sarà il produtto della moltiplicatione e cost si procedera nelle simili. E avertiscasi che quando si dice il Residuo di un Binomio, che quello che si chiama + di – nel Binomio, si chiamera – di – nel Residuo.

Moltiplichisi R.c.⌊2 + di – R.q.8⌋ + R.c.⌊2 – di – R.q.8⌋ per 3. Riduchisi il 3 a cubo, fa 27, e questo si moltiplichi via 2 + di – R.q.8, fa 54 + di – R.q.5832, e la R.c.⌊ di questo, ch'è R.c.⌊54 + di – R.q.5832⌋, e la moltiplicatione del Binomio, et il residuo di questo, ch'è R.c.⌊54 – di – R.q.5832⌋, sarà la moltiplicatione del residuo, che gionte insieme fanno R.c.⌊54 + di – R.q.5832⌋ + R.c.⌊54 – di – R.q.5832⌋ e questo è il produtto della moltiplicatione.

Moltiplichisi R.c.⌊3 + di – R.q.2⌋ + R.c.⌊3 – di – R.q.2⌋ per R.q.2 – 1. Riduchisi R.q.2 – 1 a cubo, e si haverà R.q.50 – 7, poi moltiplichisi 3 via R.q.50 – 7, fa R.q.450 – 21, poi moltiplichisi – R.q.2 per R.q.50 – 7, fa + di – 10 – R.q.98, che gionto R.q.450 – 21, fa R.q.450 – 21 + di – 10 – R.q.98, che la R.c. di i questo sarà R.c.⌊R.q.450 – 21 + di – 10 – R.q.98⌋, e sarà la moltiplicatione del Binomio, e quella del Residuo sarà il residuo di questo, cioè R.c.⌊R.q.450 – 21 – di – 10 – R.q.98⌋ che gionte insieme fanno R.c.⌊R.q.450 – 21 + di – 10 – R.q.98⌋ + R.c.⌊R.q.450 – 21 – di – 10 – R.q.98⌋ per il produtto della proposta moltiplicatione.

Moltiplichisi R.c.⌊2 + di – R.q.3⌋ per R.c.⌋2 + di – R.q.3⌋. Per far questo (come nelli altri Binomij) prima si moltiplichi + di – R.q.3 per + di – R.q.3, fa – 3, poi si moltiplichi 2 via 2 fa 4,

che gionto con − 3 fa + 1, fatto questo si moltiplichi 2 via + di − R.q.3, fa + di − R.q.12, e per l'altra volta fa il medesimo, cioè + di − R.q.12, che gionte insieme e poi con il + 1 fa 1 + di − R.q.48, che di questo toltone la R.c. haveremo R.c.⌞1 + di − R.q.48⌟ per produtto della proposta moltiplicatione.

Moltiplichisi R.c.⌞3 + di − R.q.10⌟ per R.c.⌞3 + di − R.q.10⌟, come nel passato essempio prima moltiplicaremo + di − R.q.10 per + di − R.q.10, farà − 10, poi moltiplicaremo 3 via 3, fa 9, che gionto con − 10 fa − 1; dipoi si moltiplichi 3 via + di − R.q.10, fa + di − R.q.90, e per l'altra volta fa similmente + di − R.q.90, che gionte insieme e poi con − 1, e toltone la R.c., fanno R.c.⌞ + di − R.q.360 − 1⌟ e questo è il produtto.

Moltiplichisi R.c.⌞3 + di − R.q.5⌟ via R.c.⌞6 + di − R.q.20⌟, per farlo comincisi similmente a moltiplicare + di − R.q.5 via + di − R.q.20, che farà − 10, poi si moltiplichi 3 via 6 che fa 18, qual gionto eon − 10 fa + 8, dipoi si moltiplichi 3 via + di − R.q.20, fa + di − R.q.180, e poi si moltiplichi 6 via + di − R.q.5, fa + di − R.q.180, che gionto con + di − R.q.180 fa + di − R.q.720, e questo gionto con + 8 e toltone la R.c fa R.c.⌞8 + di − R.q.720⌟ ch'è il produtto delta moltiplicatione.

Moltiplichisi R.c.⌞4 + di − R.q.2⌟ per R.c.⌞3 + di − R.q.8⌟. Moltiplicaremo prima + di − R.q.2 via + di − R.q.8, fa − 4, poi moltiplicaremo 3 via 4 fa 12, che gionto con − 4 fa + 8. Dipoi moltiplicaremo 3 via + di − R.q.2 farà + di − R.q.18, e dipoi 4 via + di − R.q.8, fa + di − R.q.128, che gionto con + di − R.q.18 fa 1 − di − R.q.242, che gionto con + 8 e toltone la R.c. haveremo R.c.⌞8 + di − R.q.242⌟ per produtto della moltiplicatione.

Moltiplichisi R.c.⌞4 + di − R.q.6⌟ per R.c.⌞2 + di − R.q.5⌟. Moltiplicaremo similmente + di − R.q.6 per + di − R.q.5, farà − R.q.30; dipoi moltiplicaremo 2 via 4 fa 8, e questo gionto con − R.q.30 fa 8 − R.q.30; fatto questo si moltiplicherà + di − R.q.6 via 2 che farà + di − R.q.24, et poi 4 via + di − R.q.5 che farà + di − R.q.80, che gionte insieme queste quattro moltiplicationi e toltone la R.c. haveremo R.c.⌞8 − R.q.30 + di − R.q.80 + di − R.q.24⌟ per produtto della moltiplicatione.

Moltiplichisi R.c.⌞2 − di − R.q.3⌟ via R.c.⌞2 − di − R.q.3⌟, per far questo moltiplicaremo prima − di − R.q.3 via − di − R.q.3, farà − 3, e poi 2 via 2 fa 4, che gionto con − 3 fa + 1. Moltiplicaremo poi 2 via − di − R.q.3 fa − di − R.q.12, e per l'altra volta fa similmente − di − R.q.12 che gionte insieme fa − di − R.q.48, e questo gionto con + 1 e toltone la R.c haveremo R.c.⌞1 − di − R.q.48⌟ e questo sarà il produtto.

Moltiplichisi R.c.⌞3 − di − R.q.10⌟ per R.c.⌞3 − di − R.q.10⌟. Moltiplicaremo prima − di − R.q.10 per − di − R.q.10 fa − 10. Poi moltiplicaremo 3 via 3 fa 9, che gionto con − 10 fa − 1. Dipoi moltiplicaremo 3 via − di − R.q.10, farà − di − R.q.90 e così per l'altra volta farà similmente − di − R.q.90, che gionte insieme fanno − di − R.q.360, e questo gionto con − 1 e toltone la R.c. farà R.c.⌞ − di − R.q.360 − 1⌟ per il produtto.

Moltiplichisi R.c.⌞3 − di − R.q.5⌟ via R.c.⌞6 − di − R.q.20⌟. Per farlo comincisi a moltiplicare − di − R.q.5 via − di − R.q.20 farà − 10. Poi si moltiplichi 3 via 6 fa 18, che gionto con − 10 fa + 8; si moltiplichi poi 3 via − di − R.q.20 fa − di − R.q.180 e 6 via − di − R.q.5, fa similmente − di − R.q.180, che gionte insieme fanno − di − R.q.720 e questo gionto con + 8 e poi toltone la R.c

farà R.c.⌞8- di − R.q.720⌟ per il produtto.

Moltiplichisi R.c.⌞4 − di − R.q.2⌟ per R.c.⌞3 − di − R.q.8⌟, per farlo si moltiplichi prima − di − R.q.2 per − di − R.q.8 fa − 4, poi si moltiplichi 3 via 4 fa 12, che gionto con − 4 fa + 8. Si moltiplichi poi 4 via − di − R.q.8 fa − di − R.q.128, e 3 via − di − R.q.2 fa − di − R.q.18, che gionte insieme fanno − di − R.q.242, e questo gionto con + 8 e toltone la R.cfarà R.c.⌞8 − di − R.q.242⌟ per produtto della moltiplicatione.

Moltiplichisi R.c.⌞4 − di − R.q.6⌟ per R.c.⌞2 − di − R.q.5⌟. Si moltiplichi prima − di − R.q.6 per − di − R.q.5 fa − R.q.30, e poi moltiplichisi 4 via 2 fa 8, dipoi moltiplicaremo 4 via − di − R.q.5 fa − di − R.q.80, e poi 2 via − di − R.q.6 fa − di − R.q.24, che gionte tutte le moltiplicationi insieme e toltone la R.c haveremo per produtto R.c.⌞8 − R.q.30 − di − R.q.80 − di − R.q.24⌟.

Moltiplichisi R.c.⌞2 + di − R.q.3⌟ per R.c.⌞2 − di − R.q.3⌟. Moltiplichisi prima al solito + di − R.q.3 via − di − R.q.3, fa + 3. Poi si moltiplichi 2 via 2 fa 4, che gionto con + 3 fa + 7. Si moltiplichi poi 2 via + di − R.q.3, fa + di − R.q.12; e poi 2 via − di − R.q.3 la di − R.q.12 che gionto con + di − R.q.12 fa a punto nulla, perchè il − è eguale al +, però gionto nulla a + 7 fa 7, che la sua R.c., cioè R.c.7, è il produtto della moltiplicatione.

Moltiplichisi R.c.⌞3 + di − R.q.10⌟ per R.c.⌞6 − di − R.q.10⌟; per farlo (come prima) si moltiplichi + di − R.q.10 via − di − R.q.10 fa + 10. Poi si moltiplichi 3 via 3 fa 9, che gionto a + 10 fa + 19. Poi si moltiplichi 3 via + di − R.q.10 fa + di − R.q.90, e 3 via − di − R.q.10 fa − di − R.q.90, che gionte insieme fa nulla, e gionto nulla a + 19 fa 19, che la sua R.ce R.c.19, però il produtto

della moltiplicatione sarà R.c.19.

Moltiplichisi R.c.⌞3 + di − R.q.5⌟ via R.c.⌞6 − di − R.q.20⌟, per far questo si moltiplichi + di − R.q.5 via − di − R.q.20 fa 10, e 3 via 6 fa 18, che gionto a + 10 fa 28, poi si moltiplichi 6 via di − R.q.5 fa + di − R.q.180 e 3 via − di − R.q.20 fa − di − R.q.180, che gionte insieme fanno nulla, e gionto nulla a 28 fa 28, che la sua R.c ch'è R.c.28 e il produtto.

Moltiplichisi R.c.⌞5 + di − R.q.2⌟ per R.c.⌞5 − di − R.q.2⌟, per farlo si moltiplichi + di − R.q.2 via − di − R.q.2 fa + 2. Poi si moltiplichi 5 via 5 fa 25, che gionto con + 2 fa 27. Poi si moltiplichi 5 via + di − R.q.2 fa + di − R.q.50 e 5 via − di − R.q.2 fa − di − R.q.50, che gionte insieme fanno nulla, e nulla con 27 fa 27, che la sua R.ce 3 e 3 e il produtto cercato.

Moltiplichisi R.c.⌞4 + di − R.q.2⌟ via R.c.⌞3 − di − R.q.8⌟, per farlo si moltiplichi + di − R.q.2 via − di − R.q.8 fa + 4. Poi si moltiplichi 3 via 4, fa 12, che gionto con + 4 fa 16; poi si moltiplichi 3 via + di − R.q.2 fa + di − R.q.18, e 4 via − di − R.q.8 fa − di − R.q.128, che gionte insieme fa − di − R.q.50, che gionto con 16 fa 16 − di − R.q.50, che la sua R.ce R.c.⌞16 − di − R.q.50⌟ e questo è il produtto.

Moltiplichisi R.c.⌞4 + di − R.q.6⌟ per R.c.⌞2 − di − R.q.5⌟, per farlo moltiplichisi + di − R.q.6 via − di − R.q.5 fa + R.q.30, poi si moltiplichi 2 via 4 fa 8 e poi 2 via + di − R.q.6 fa + di − R.q.24, e 4 via − di − R.q.5 fa − di − R.q.80, che gionto tutto insieme e pigliatone la R.c haveremo R.c.⌞8 + R.q.30 + di − R.q.24 − di − R.q.80⌟ per produtto.

Moltiplichisi R.c.⌞2 + di − R.q.5⌟ + R.c.⌞2 − di − R.q.5⌟ per 3; per far questo moltiplicaremo prima il Binomio, ch'è R.c.⌞2 + di − R.q.5⌟ per 3, fa R.c.⌞54 + di − R.q.3645⌟ e poi si moltiplichi il residuo similmente per 3 fa R.c.⌞54 − di − R.q.3645⌟ che gionte insieme haveremo R.c.⌞54 + di − R.q.3645⌟ + R.c.⌞54 − di − R.q.3645⌟ per produtto.

Moltiplichisi R.c.⌞2 + di − 1⌟ + R.c.⌞2 − di − 1⌟ in se medesimo; prima moltiplichisi il Binomio in se medesimo (come si è mostrato nelle passate) e farà 3 + di − 4, e il residuo moltiplicato in se stesso fa 3 − di − 4, che gionti insieme e toltone la R.c. fa R.c.⌞3 + di − 4⌟ + R.c.⌞3 − di − 4⌟. Hora moltiplichisi il Binomio per il Residuo fa R.c.5 per una volta e similmente R.c.5 per l'altra, che gionte insieme fanno R.c.40, che gionte con la moltiplicatione di sopra fatta, la somma sarà R.c.⌞3 + di − 4⌟ + R.c.⌞3 − di − 4⌟ + R.c.40, e questo è il produtto della moltiplicatione.

Moltiplichisi R.c.⌞3 + di − 4⌟ + R.c.⌞3 − di − 4⌟ + R.c.40 per R.c.⌞2 + di − 1⌟ + R.c.⌞2 − di − 1⌟; per fare questo prima si moltiplichi il Binomio, ch'è R.c.⌞2 + di − 1⌟ per la sopradetta quantità a parte a parte, che moltiplicato per R.c.⌞3 + di − 4⌟ farà R.c.⌞2 + di − 11⌟, e moltiplicato per R.c.⌞3 − di − 4⌟ fa R.c.⌞10 − di − 5⌟ e moltiplicato per R.c.40 fa R.c.⌞80 + di − 40⌟. Fatto questo moltiplicaremo poi il residuo ch'è R.c.⌞2 − di − 1⌟ per la medesima sopradetta quantita, che moltiplicato prima per R.c.⌞3 + di − 4⌟ fa R.c.⌞10 + di − 5⌟, e moltiplicato per R.c.⌞3 − di − 4⌟ fa R.c.⌞2 − di − 11⌟, e moltiplicato per R.c.40 fa R.c.⌞80 − di − 40⌟, che gionte queste sei moltiplicationi insieme fanno R.c.⌞2 + di − 11⌟ + R.c.⌞10 − di − 5⌟ + R.c.⌞80 + di − 40⌟ + R.c.⌞10 + di − 5⌟ + R.c.⌞2 − di − 11⌟ + R.c.⌞80 − di − 40⌟ per produtto della moltiplicatione. Hora perchè di queste sei quantità queste due, cioè

R.c.⌞2 + di − 11⌟ e R.c.⌞2 − di − 11⌟,hanno lato cubico, perchè R.c.⌞3 + di − 4⌟ era il quadrato di R.c.⌞2 + di − 1⌟ col quale si è moltiplicato: però il lato dell'una sarà 2 + di − 1 e dell'altra 2 − di − 1, che gionti insieme fanno 4. E perchè R.c.⌞80 + di − 40⌟ è doppia R.c.⌞10 + di − 5⌟, moltiplicaremo essa R.c.⌞10 + di − 5⌟ per 3, che farà R.c.⌞270 + di − 135⌟ per somma loro e per la medesima ragione la somma delle due restanti R.c sarà R.c.⌞270 − di − 135⌟, che gionto il tutto insieme, la somma farà 4 + R.c.⌞270 + di − 135⌟ + R.c.⌞270 − di − 135⌟, tanto e il produtto della nostra moltiplicatione la quale insieme con la passata e necessaria di sapere per potersene servire nel Capitolo di Cubo eguale a Tanti e numero, e le due che seguiranno sono necessarie per il medesimo Capitolo dove intravenghino le Potenze.

Moltiplichisi R.c.⌞2 + di − 1⌟ + R.c.⌞2 − di − 1⌟ + 2 in se medesimo; per farlo prima moltiplichisi essa quantità per R.c.⌞2 + di − 1⌟ e farà R.c.⌞3 + di − 4⌟ + R.c.5 + R.c.⌞16 + di − 8⌟; fatto questo moltiplicaremo la medesima quantità per R.c.⌞2 − di − 1⌟ e farà R.c.5+ R.c.⌞3- di- 4⌟ + R.c.⌞16- di-8⌟. Dipoi moltiplicaremo il + 2 che ci resta per la medesima quantità e farà R.c.⌞16 + di − 8⌟ + R.c.⌞16 − di − 8⌟ + 4. Dipoi giongansi tutte queste moltiplicationi insieme e haveremo il produtto della moltiplicatione, che sarà R.c.⌞3 + di − 4⌟ + R.c.5 + R.c.⌞16 + di − 8⌟ + R.c.5 + R.c.⌞3 − di − 4⌟ + R.c.⌞16 − di − 8⌟ + R.c.⌞16 + di − 8⌟ + R.c.⌞16 − di − 8⌟ + 4. E perchè R.c.⌞16 + di − 8⌟, R.c.⌞16 − di − 8⌟ e R.c.5 ci sono ognuna di loro replicate due volte, se moltiplicaremo ciascuna di loro per R.c.8, cioè per 2, le verremo a sommare insieme e ad abbreviare il produtto di modo ch'ègli sarà R.c.⌞3 + di − 4⌟ + R.c.40 + R.c.⌞128 + di − 64⌟ + R.c.⌞3 − di − 4⌟ + R.c.⌞128 − di − 64⌟ + 4.

Moltiplichisi R.c.⌞3 + di − 4⌟ + R.c.40 + R.c.⌞128 + di − 64⌟1 + R.c.⌞3 − di − 4⌟ + R.c.⌞128 − di − 64⌟ + 4 per R.c.⌞2 + di − 1⌟ + R.c.⌞2 − di − 1⌟ 4- 2; per far questo prima si moltiplichi essa quantità per R.c.⌞2 + di − 1⌟ e farà R.c.⌞2 + di − 11⌟ + R.c.⌞80 + di − 40⌟ + R.c.⌞192 + di − 256⌟ + R.c.⌞10 − di − 5⌟ + R.c.320 + R.c.⌞128 + di − 64⌟. Dipoi si moltiplichi la medesima quantità per R.c.⌞2 − di − 1⌟ e farà R.c.⌞10 + di − 5⌟ + R.c.⌞80 − di − 40⌟ + R.c.320 + R.c.⌞2 − di − 11⌟ + R.c.⌞192 − di − 256⌟ f- R.c.⌞128 − di − 64⌟. Dipoi si moltiplichi la medesima quantità per 2 e farà R.c.⌞24 + di − 32⌟ + R.c.320 + R.c.⌞1024 + di − 512⌟ + R.c.⌞24 − di − 32⌟ + R.c.⌞1024 − di − 512⌟ + 8, che aggionte queste tre moltiplicationi insieme tutto il produtto sarà R.c.⌞2 + di − 11⌟ + R.c.⌞80 + di − 40⌟ + R.c.⌞192 + di − 256⌟ + R.c.⌞10 − di − 5⌟ + R.c.320 + R.c.⌞128 + di − 64⌟ + R.c.⌞10 + di − 5⌟ + R.c.⌞80 − di − 40⌟ + R.c.320 + R.c.⌞2 − di − 11⌟ + R.c.⌞192 − di 256⌟ + R.c.⌞128 − di − 64⌟ + R.c.⌞24 + di − 32⌟ + R.c.320 + R.c.⌞1024 + di − 512⌟ + R.c.⌞24 − di − 32⌟ + R.c.⌞1024 − di − 512⌟ + 8, e per abbreviar questo produtto, perchè queste due quantità R.c.⌞2 + di − 11⌟ e R.c.⌞2 − di − 11⌟ hanno il lato cubico ciascuna di loro, quali sono 2 + di − 1 e 2 − di − 1, sommaremo insieme essi lati che faranno4 e questo lo sommaremo con 8, numero che si trova per ultima quantità del nostro produtto, fa 12. Dipoi sommaremo R.c.320 con R.c.320 e R.c.320, quantità che si trovano nel nostro produtto, moltiplicando qual si voglia di loro per 3 o per R.c.27, che la somma loro sarà R.c.8640, e se consideraremo le quantità che restano del nostro produtto trovaremo che R.c.⌞80 + di − 40⌟ si può sommare con R.c.⌞10 + di − 5⌟, e similmente R.c.⌞80 − di − 40⌟ si può sommare con R.c.⌞10 − di − 5⌟ e R.c.⌞128 + di − 64⌟ con R.c.⌞1024 + di − 512⌟. E parimente R.c.⌞128 − di − 64⌟ con R.c.⌞1024 − di − 512⌟ e anco R.c.⌞24 + di − 32⌟ con R.c.⌞192 + di − 256J e parimente

R.c.⌞24 − di − 32⌟ con R.c.⌞192 − di − 256⌟, che sommate le dette quantità che sono comunicanti e le somme loro aggionte con 12 + R.c.8640 (somma già trovata) il nostro produtto abbreviato verrà ad essere il seguente, cioè 12 + R.c.8640 + R.c.⌞270 + di − 135⌟ + R.c.⌞648 + di 864⌟ + R.c.⌞3456 + di − 1728⌟ + R.c.⌞270 − di − 135⌟ + R.c.⌞648 − di − 864⌟ + R.c.⌞3456 − di − 1728⌟ e così si procedera nell'altre simili moltiplicationi.

Modo di trovare il lato Cubico di simil qualità di Radici.

Volendo trovare il lato Cubico di di simili specie di Radici per pratica si terrà questo modo. Giongasi il quadrato del numero col quadrato della R. e della somma si pigli il lato Cubico, poi si cerchi a tentone di trovare un numero et una R.qche li loro quadrati gionti insieme faccino tanto quanto fu il lato cubico detto di sopra e che del cubato del numero cavatone il triplo della moltiplicatione del numero via il quadrato della R.q., quello che resta sia il numero del lato che si cerca, come sarebbe se si volesse il lato di R.c.⌞2 + di − R.q.121⌟, che gionto il quadrato della R.q., ch'è 121, con 4, quadrato del 2, fa 125, che pigliatone il lato cubico sarà 5. Hor bisogna trovare un numero che il suo quadrato sia minore di 5 et il suo cubato sia maggior di 2, che se si ponerà che sia 1 la R.q di necessità sarà R.q.4, che i quadrati gionti insieme fanno 5 et il cubato del numero e 1 e la moltiplicatione del numero via il quadrato della R.q fa 4 che triplicato fa 12, il quale non si può cavare del cubato del numero ch'è solo 1, però 1 non è buono, ne meno 3 può esser buono, perchè il suo quadrato solo supera il 5, però di necessità, (se il 2 non servirà) tal compositione non haverà lato di numero sano, onde piglisi il 2, la R.q sarà R.q.1 che si vede che gionto il quadrato del numero col quadrato della R.q fanno 5, e il Cubato del numero e 8, che cavatone il triplo della moltiplicatione del numero via il quadrato della R.q., ch'è 6, resta 2 ch'è il numero ch'era accompagnato con + di − R.q.121, però il suo lato è 2 + di − R.q.1, e avertiscasi che R.c.⌞2 + di − R.q.121⌟, per essere il 121 numero quadrato e il suo lato il, si potrà dire 2 + di − 11, e si vede che il suo lato è

2 + di − 1, che non ci viene R.q., ma il lato è dui numeri (come era 2 + di − 11).

Altro essempio.

Piglisi il lato di R.c.⌞52 + di − R.q.2209⌟. Giongansi i quadrati insieme fanno 4913, il suo lato cubico e 17. Hor trovisi un numero che il suo quadrato sia minore di 17 et il suo cubato sia maggiore di 52, che si vede non esser altro numero che 4, e se il numero sarà 4 la R.q di necessità sarà R.q.1, che li quadrati gionti insieme fanno 17 et il cubato del numero fa 64, del quale cavatone la triplicatione del numero via il quadrato della R.q., ch'è 12, resta 52, numero di cui si cercava il lato, onde il lato di R.c.⌞52 + di − R.q.2209⌟ sarà 4 + di − 1, e con questa regola (benchè non sia generale, ma più tosto pratica) sarà quasi impossibile, quando dette R. haverànno lato, non lo trovare.

Altro essempio.

Ancora ci sono di queste sorti di R. che pigliatone il lato, in luogo del numero ch'è venuto nell'altre, ne verrà un Binomio over Residuo, la quale e assai piùfaticosa della passata, come per essempio se si havesse a trovar il lato cubico di 8 + di − R.q.232 $\frac{8}{27}$. Aggiongansi insieme li quadrati di 8 e R.q.232 $\frac{8}{27}$, che faranno296 $\frac{8}{27}$, il cui lato cubico sarà 63.
Hor bisogna cercare un numeroche il suo quadrato sia minore di 6$\frac{2}{3}$ et il suo cubato sia maggiore di 8, numero del Binomio del quale si ha da pigliare il lato, che se si pigliara il 2 il suo quadrato sarà minore di 6$\frac{2}{3}$, ma il suo cubato non sarà maggiore di 8, però 2 non è buono, e pigliandosi 3 il suo cubato sarà maggiore di 8 ma il suo quadrato non sarà minore di 6$\frac{2}{3}$ però il 3 parimente non è buono, e si vede che il 2 si accostava piùche 'l 3, però bisogna trovare una quantità che sia maggiore di 2 e minor di 3, che R.q.2 + 1 ha queste qualita, che il suo quadrato, ch'è 3 + R.q.8 e minore di 6 $\frac{2}{3}$, et il suo cubato e R.q.50 + 7, ch'è maggiore di 8. Hora vedasi se sodisfanno al resto: quadrisi R.q.2 + 1 fa 3 + R.q.8 et cavisi di 6$\frac{2}{3}$, resta 3$\frac{2}{3}$ − R.q.8 e questo deve essere

la R.q acciochè il lato cercato habbia le qualita proposte, che facendo per il numero R.q.2 + 1 e per la [Radice] R.q.⌞3 $\frac{2}{3}$ − R.q.8⌟ però diremo che il lato è R.q.2 + 1 + di − R.q.⌞3 $\frac{2}{3}$ − R.q.8⌟, il quale ha la conditione sudetta prima, che li loro quadrati gionti insieme fanno 6 $\frac{2}{3}$; resta che del cubato di R.q.2 + 1, ch'è R.q.50 + 7, cavato il triplo del produtto di R.q.2 + 1 via 3 − R.q.8, ch'è R.q.50 − 1 resti 8, che cavato R.q.50 − 1 di R.q.50 + 7 resta 8 (come si cercava) si che il lato cubico di 8 + di − R.q.232 $\frac{8}{27}$, sarà R.q.2 + 1 + di − R.q.⌞3 − R.q.8⌟. E per sodisfare all'operante voglio ponerne la prova, la qual è questa. Vedasi se a cubare R.q.2 + 1 + di − R.q.⌞3 $\frac{2}{3}$ − R.q.8⌟ fa 8 + di − R.q.232 $\frac{8}{27}$. Mettasi in regola (come si vede) e poi moltiplichisi + di − R.q.⌞3 − R.q.8⌟ di sotto via + di − R.q.⌞3 $\frac{2}{3}$ − R.q.8⌟ di sopra, fa − 3$\frac{2}{3}$ + R.q.8, cioè meno il residuo così intiero, e pongasi di sotto (come si vede nella figura); poi moltiplichisi + di − R.q.⌞ 3 $\frac{2}{3}$ − R.q.8⌟ di sotto via R.q.2 + 1, che per essere + di − R.q. legata bisogna quadrare R.q.2 + 1, fa 3 + R.q.8, e poi moltiplicarlo via 3 $\frac{2}{3}$ − R.q.8, fa 3 + R.q.3 $\frac{5}{9}$, che pigliatone la R.q. legata fa R.q.⌞3 + R.q.3 $\frac{5}{9}$ ⌟ e questo è + di −, perchè il Binomio R.q.2 + 1 era + e perche, com'e ditto nelle regole, + via + di −, fa + di −, però sarà + di − R.q.⌞3 + R.q.3 $\frac{5}{9}$ ⌟, e questo si metta con l'altra moltiplicatione, poi si moltiplichi R.q.2 + 1 di sotto via + di − R.q.⌞3 $\frac{5}{9}$ − R.q.8⌟ di sopra fa + di − R.q.⌞3 + R.q.3 $\frac{5}{6}$ ⌟ e pongasi con l'altra moltiplicatione, poi moltiplichisi

R.q. 2 + 1 + di — R.q. L3 $\frac{2}{3}$ — R.q. 8⌋
R.q. 2 + 1 + di — R.q. L3 $\frac{2}{3}$ — R.q. 8⌋

---

3 + R.q. 8 + di — R.q. L3 + R.q. 3 $\frac{5}{9}$ ⌋ + di — R.q. L3 + R.q. 3 $\frac{5}{9}$ ⌋ +
— 3 $\frac{2}{3}$ + R.q. 8

R.q. 32 — $\frac{2}{3}$ + di — R.q. L12 + R.q. 56 $\frac{8}{9}$ ⌋
R.q. 2 + 1 + di — R.q. L3 $\frac{2}{3}$ — R.q. 8⌋

---

7 $\frac{1}{3}$ + R.q. 22 $\frac{2}{9}$ + di — R.q. L57 $\frac{1}{3}$ + R.q. 3200⌋ + di
— R.q. L 140 $\frac{8}{27}$ — R.q. 14261 $\frac{41}{81}$ ⌋ — R.q. L22 $\frac{2}{3}$ — R.q. 39 $\frac{41}{81}$ ⌋

R.q.2 + 1 di sotto via R.q.2 + 1 di sopra fa 3 + R.q.8, e posta con l'altre moltiplicationi si haverànno quattro quantità due sciolte e due R. legate; le sciolte per ridurle a una cavisi il residuo 3 $\frac{2}{3}$ − R.q.8, perch'è meno, di 3 +

R.q.8, resta R.q.32 $-\ \frac{2}{3}$. E sommato le due R. legate, che sono pari, faranno+ di $-$ R.q.$\llcorner$12 + R.q.56 $\frac{8}{9}$ $\lrcorner$; resta di moltiplicare il detto quadrato via R.q.2 + 1 + di $-$ R.q.$\llcorner 3\frac{2}{3}$ $-$ R.q.8$\lrcorner$. Pongasi di nuovo in regola (come si vede nella seconda figura) poi moltiplichisi R.q.$\llcorner 3\frac{2}{3}$ $-$ R.q.8$\lrcorner$ di sotto via R.q.$\llcorner$12 + R.q.$56\frac{8}{9}\lrcorner$ di sopra fa R.q.$\llcorner 22\frac{2}{3}$ $-$ R.q.39 $\frac{41}{81}$ $\lrcorner$ et è meno, perch'è stato + di $-$ via + di $-$ che fa $-$; poi moltiplichisi R.q.$\llcorner$3 $\frac{2}{3}$ $-$ R.q.8$\lrcorner$ di sotto via R.q.32 $-$ $\frac{2}{3}$ di sopra fa R.q.$\llcorner 140\frac{8}{27}$ $-$ R.q.14261 $\frac{41}{81}$ $\lrcorner$ et è + di $-$ e pongasi con l'altra moltiplicatione, poi moltiplicasi R.q.2 + 1 di sotto via R.q.$\llcorner$12 + R.q.9$\lrcorner$ di sopra fa R.q.$\llcorner 57\frac{1}{3}$ + R.q.3200$\lrcorner$ et è + di $-$ e pongasi con l'altra moltiplicatione, poi moltiplichisi R.q.2 + 1 di sotto via R.q.32 $-$ $\frac{2}{3}$ di sopra, fa $7\frac{1}{3}$ + R.q.22 $\frac{2}{9}$ e pongasi con l'altra moltiplicatione, e per ridurre a minor quantità piglisi il lato di $22\frac{2}{3}$ $-$ R.q.39 $\frac{41}{81}$ che sarà R.q.22 $\frac{2}{9}$ $-$ $\frac{2}{3}$, e perchè la R.q.$\llcorner 22\frac{2}{3}$ $-$ R.q.39 $\frac{41}{81}$ $\lrcorner$ era meno, il suo lato sarà meno, che cavato R.q.$22\frac{2}{9}$ $-$ $\frac{2}{3}$ di 7 $\frac{1}{3}$ + R.q.22 $\frac{2}{9}$, resta 8. Restaci della moltiplicatione le due R. legate R.q.$\llcorner$140 $\frac{8}{27}$ $-$ R.q.14261 $\frac{41}{81}$ $\lrcorner$ e R.q.$\llcorner 57\frac{1}{3}$ + R.q.3200$\lrcorner$ e ciascuna di loro ha lato et ambedue sono + di $-$, li loro lati sono R.q.$33\frac{1}{3}$ + R.q.24 e R.q.$106\frac{26}{27}$ $-$ R.q.33 $\frac{1}{3}$, che sommate insieme fanno R.q.$232\frac{8}{27}$ e questo è + di $-$, che gionto con 8 fa 8 + di $-$ R.q.$232\frac{8}{27}$ (come fu proposto) la qual prova e bella per le moltiplicationi che ci intervengono. Ne paia strano che tutte le R.q. legate habbino havuto lato, perchè $3\frac{2}{3}$ $-$ R.q.8 havea lato, ch'era R.q.3 $-$ R.q.$\frac{2}{3}$ $-$ ma si è proceduto così per mostrare la operatione di queste R.L. Ma se il primo numero fusse meno, come R.c.$\llcorner$ 117 + di $-$ 44$\lrcorner$ si procede come nell'altra: giongasi il quadrato di 117 con il quadrato di 44 fa 15625 e di questo si pigli il lato cubo ch'è 25. Hora bisogna trovare a tentoni due numeri che li loro quadrati gionti insieme facciano 25 e che il cubato dell'uno gionto con 117 faccia quanto e il detto numero triplicato e moltiplicato per l'altro, come se si pigliasse 4 e 3, il cubo di 4 e 64, il quale aggionto con 117 fa 181, et il quadrato di 3 e 9 che moltiplicato per 12, triplo di 4, fa 108 e haveria a fare 181, però 4 per il primo non è buono. Piglisi il 2, l'altro sarà R.q.21, acciochè li quadrati loro gionti insieme faccino 25. Il cubato del 2 e 8, gionto con 117 fa 125. Et a moltiplicare 6, triplo del 2, via 21 fa 126 e haveria a fare 125 però non è buono. Piglisi per il primo 3, il secondo sarà R.q.16; il cubato di 3 e 27, gionto con 117 fa 144, et il produtto di 9, triplo del 3, via 16 fa 144 ch'è pari al 144 somma di 117 et 27; però il lato di R.c.⌞ − 117 + di − 44⌟ sarà 3 + di − 4. E parendomi questi essempij a bastanza verre al partire.

Partire di + di − overo − di −.

Quando si haverà a partire una quantità dove sia + di − over − di − per alcun numero overo R.qsimplice e non composta, in tal caso tutti li + restano +, li − meno e così il + di − e − di −, come per essempio partasi 8 + di − R.q.12 per 2, ne viene 4 + di − R.q.3. Partasi R.q.24 − di − 6 per R.q.6, ne viene 2 − di − R.q.6. Parasi R.c.⌞72 + di − R.q.128⌟ per 2. Cubisi il 2 fa 8, poi partasi 72 + di − R.q.128 per 8, ne viene 9 + di − R.q.2 e di questo si piglia la R.cfa R.c.⌞9 + di − R.q.2⌟ e questo è l'avenimento.

Partasi R.q.72 + di − 4, per R.q.5 + 1; moltiplichisi il partitore per il suo residuo, cioè per R.q.5 − 1, fa 4 e questo è il partitore e per più facilità partasi R.q.72 + di − 4 per 4, ne viene R.q.4$\frac{1}{4}$ + di − 1 e questo si deve moltiplicare via R.q.5 − 1, residuo di R.q.5 + 1 partitore, che facendo come si è insegnato nel moltiplicare fa R.q.22 − R.q.4$\frac{1}{2}$ + di − R.q.5 − 1, e questo è l'avenimento. Avertendosi che dipoi che si è nominato il + di − oil − di − tutto quello che seguita si intende della medesima specie, come se si dicesse + di − R.q.9 − 1 sarà come a dire che preso la R.qdi 9, ch'è 3, e cavato il − 1, che resta 2, che il detto 2 sia + di −; però tanto e a dire + di − R.q.9 − 1, quanto + di − 2.

Partasi R.c.⌞24 + di − R.q.48⌟ per 2 + R.q.2. Cubisi 2 + R.q.2 fa 20 + R.q.392 e poi partasi 24 + di − R.q.48 per 20 + R.q.392, che moltiplicato il partitore via il suo residuo fa 8 e quest'è il partitore, col quale partito 24 + di − R.q.48 ne viene 3 + di − R.q.4,

e questo si moltiplica per 20 − R.q.392, residuo del partitore, fa 60 − R.q.3528 + di − R.q.300 − di − R.q.294, che la sua R.c., ch'è R.c.⌞60 − R.q.3528 + di − R.q.300 − di − R.q.294⌟, 8 l'avenimento.

Partasi R.c.⌞2 + di − 11⌟ + R.c.⌞2 − di − 11⌟ per R.c.2. Cubisi R.c.2 fa 2. Poi partasi 2 + di − 11 et 2 − di − 11 per 2, ne viene 1 + di − 5 $\frac{1}{2}$, e 1 − di − 5 $\frac{1}{2}$ che di ciascuna toltone la R.c e gionte insieme, l'avenimento della partitione sarà R.c.⌞1 + di − 5$\frac{1}{2}$ ⌟ + R.c.⌞1 − di − 5 $\frac{1}{2}$ ⌟.

Partasi 10 per R.c.⌞2 + di − 11⌟; cubisi ciascuna delle parti et haveremo 1000 et 2 + di − 11, poi si moltiplichi il partitore per 2 − di − 11, suo residuo, fa 125, col quale partito 1000 ne viene 8 et questo si moltiplichi via 2 − di − 11 fa 16 − di − 88, che toltone la R.c. haveremo R.c.⌞16 − di − 88⌟ per avenimento della partitione.

Partasi 12 per R.c.⌞2 + di − 11⌟ + R.c.⌞2 − di − 11⌟; prima bisogna trovare il residuo del partitore, cioè delle due R.c.⌞, il quale si trova nel medesimo modo ch'è stato mostro nel partire per un Binomio cubo, però si piglino li quadrati di R.c.⌞2 + di − 11⌟ e R.c.⌞2 − di − 11⌟ che Sono R.c.⌞ − 117 + di − 44⌟ e R.c.⌞ − 117 − di − 44⌟ e poi si moltiplica l'una via l'altra e fanno 5 il quale per essere + si fa cangiar natura e dica- di modo che il residuo sarà R.c.⌞ − 117+ di − 44⌟ + R.c.⌞ − 117 − di − 44⌟ − 5, il quale moltiplicato per R.c.⌞2 + di − 11⌟ + R.c.⌞2 − di − 11⌟ fa 4 col quale partasi 112 ne viene 3 e questo si moltiplichi via il detto residuo, fa R.c.⌞ − 3159 + di − 1188⌟ + R.c.⌞ − 3159 − di − 1188⌟ − 15. E questo è l'avenimento della partitione, et per trovare il partitore senza fare la moltiplicatione aggiongansi il cubati delle due R.c.⌞ del Binomio partitore che sono 2 + di − 11 e 2 − di − 11, che fanno 4, perchè il + di − è eguale al − di −; e perchè ancora non

è intravenuto che nelle R.c.⌞ il primo numero sia − mi è parso di mostrare come possa intravenire. E' manifesto, per le regole date, che il lato di R.c.⌞2 + di − 11⌟ e 2 + di − 1, il suo quadrato e 3 + di − 4 (come si è mostrato nel moltiplicare) però il lato di R.c.⌞ − 117 + di − 44⌟ conviene che sia 3 + di − 4, per essere R.c.⌞ − 117 + di − 44⌟ quadrato di R.c.⌞2 + di − 11⌟; però cubisi 3 + di − 4 con la brevità insegnata, cioè si cubi 3 fa 27 e poi si moltiplichi 3 via 16, quadrato del 4, fa 48 e questo si tripla fa 144 et è −, che cavato di 27 resta − 117 per una parte, e per trovar l'altra quadrisi 117 fa 13689 e cavisi di 15625, cubo di 25, somma delli quadrati di 3 e 4, resta 1936, che il suo lato è 44, e questo è + di − per l'altra parte, che tutto il cubato sarà − 117 + di − 44. Ma volendolo cubare al modo ordinario moltiplicaremo prima 3 + di − 4 per 3 + di − 4, moltiplicando 3 via 3 fa 9, e + di − 4 via + di − 4 fa − 16, che gionto con 9 fa − 7, poi moltiplicaremo 3 via + di − 4 fa + di − 12, e per l'altra volta fa similmente + di − 12, che gionti insieme fanno + di − 24 e questo gionto con − 7 fa − 7 + di − 24, e questo si torni hora a moltiplicare per 3 + di − 4 moltiplicando 3 via − 7 fa − 21 e poi + di − 4 con + di − 24 fa − 96, che gionto con − 21 fa − 117, poi moltiplicato + di − 24 per 3 fa + di − 72 e + di − 4 via − 7 fa − di − 28, che cavato di + di − 72 resta + di − 44, che gionto con − 117 fa − 117 + di − 44, e quest'è il cubato di 3 + di − 4.

Partasi R.c.⌞4 + di − R.q.11⌟ per R.c.⌞2 + di − R.q.2⌟ − R.c.⌞2 −

$$
\begin{array}{c}
3 + \text{di} - 4 \\
3 + \text{di} - 4 \\
\hline
9 - 16 + \text{di} - 12 + \text{di} - 12 \\
\hline
-7 + \text{di} - 24 \\
3 + \text{di} - 4 \\
\hline
-21 - 96 + \text{di} - 72 - \text{di} - 28 \\
\hline
-117 + \text{di} - 44
\end{array}
$$

di − R.q.2⌟; per farlo prima trovisi il residuo del partitore (come sic mostrato) cioè si piglino i quadrati di R.c.⌞2 + di − R.q.2⌟ e di R.c.⌞2 − di − R.q.2⌟, che sono R.c.⌞2 + di − R.q.32⌟ e R.c.⌞2 − di − R.q.32⌟, poi si moltiplica l'una via l'altra fa R.c.6, e perchè questo è − si faccia diventar + et sarà + R.c.6, che gionto con detti due quadrati fa R.c.⌞2 + di − R.q.32⌟ + R.c.⌞2 − di − R.q.32⌟ + R.c.6, e questo è il residuo il quale si moltiplichi per il partitore col modo breve di sopra mostrato, giongendo li cubati delle due R.c. del partitore, che sono 2 + di − R.q.2 e 2 − di − R.q.2, insieme, che fanno 4, et quest'è il produtto di tal moltiplicatione col quale si parta R.c.⌞4 + di − R.q.11⌟, ne viene R.c.⌞ $\frac{1}{16}$ + di − R.q.$\frac{11}{4096}$ ⌟ e questo si moltiplichi via il residuo del partitore, cioè per R.c.⌞2 + di − R.q.32⌟ + R.c.⌞2 − di − R.q.32⌟ + R.c.6, fa R.c.⌞ $\frac{1}{8}$ + di − R.q.$\frac{11}{1024}$ + di − R.q $\frac{1}{8}$ − R.q.$\frac{1}{128}$ ⌟ + R.c.⌞ $\frac{1}{8}$ + di − R.q.$\frac{11}{1024}$ − di − R.q $\frac{1}{8}$ + R.q.$\frac{11}{128}$ ⌟ + R.c.⌞ $\frac{1}{8}$ + di − R.q.$\frac{99}{1024}$ ⌟ e tanto è l'avenimento.

Sommare di + di − et − di −.

Lo sommare di + di − e − di − ha le sue regole (come nell'altre) le quali si poneranno con la brevità solita.
piùcon + di − non si può sommare, se non dire più + di −, come se si dicesse sommisi + 5 con + di − 8, fa 5 + di − 8 et il medesimo del − di −.

più di − con + di − si somma e fa + di −.
Più di − con − di − si cava e lo restante e del nome della maggior quantità.
Men di − con − di − si somma et fa − di −.
Sommisi + di − 8 con − di -5 fa + di − 3.
Sommisi + di − 15 con − di − 28 fa − di − 13.
Sommisi − di − 12 con − di − 6 fa − di − 18.
Sommisi + di − 6 con + di − 15 fa + di − 21.

Et essendo chiara per li essempij proposti la operatione verrò alle R.c.⌞ dove sta la importanza e dove il caso può intravenire.

Sommare di R.c.⌞ di + di -e − di −.

Prima si deve avertire che queue che Sono simili e poca difficultà sommarle, cioè quelle che hanno proportione come da numero a numero, come si è detto nell'altre, come sarebbe R.c.⌞3 + di − R.q.18⌟ con R.c.⌞3 + di − R.q.18⌟, che per essere pari basta a moltiplicarne una per 2, che ne viene R.c.⌞24 + di − R.q.1152⌟, e havendosi a sommare R.c.⌞ 1 + di − R.q.7⌟ con R.c.⌞8 + di − R.q.448⌟, perchè la maggiore e dupla alla minore, basta a moltiplicare la minore per 3, fa R.c.⌞27 + di − R.q.6503⌟, il ch'è la somma loro. Et avertiscasi ancora che ogni R.c.⌞ si può sommare con un Residuo che habbia proportione come da numero a numero col residuo dell'altra, come sarebbe R.c.⌞4 + di − R.q.11⌟ con R.c.⌞5 − di − R.q.704⌟ perchè R.c.⌞5 − di − R.q.704⌟ e quadrato di R.c.⌞4 − di − R.q.11⌟ residuo di R.c.⌞4 + di − R.q.11⌟; però partasi L'una per l'altra et all'avenimento se gli gionga 1, e si moltiplichi per quella che fu partitore et l'avenimento sarà la somma. Però facendosi partitore R.c.⌞4 + di − R.q.11⌟ si moltiplicarà per il suo residuo, cioè R.c.⌞4 − di − R.q.11⌟ (com'è stato insegnato) fa 3 e questo è il partitore. Hora moltiplichisi R.c.⌞5 − di − R.q.704⌟ per il medesimo Residuo con che fu moltiplicato il partitore, cioè R.c.⌞4 − di − R.q.11⌟, fa una quantità che senza altra operatione e tale che il suo lato cubo e 4 − di − R.q.11, perchè 5 − di − R.q.704 e quadrato di 4 − di − R.q.11, et a moltiplicare il quadrato via il lato fa cubo (com'è detto più volte) però della quantità che ne verrà il suo lato sarà 4 − di − R.q.11 e questo va partito per 3, che ne viene 1 $\frac{1}{3}$ − di − R.q.1 $\frac{2}{9}$ et a questo si aggionge 1, fa 2 $\frac{1}{3}$ − di − R.q.1 $\frac{2}{9}$ e questo si ha da moltiplicare per il partitore, cioè R.c.⌞4 + di − R.q.11⌟. Cubisi 2 $\frac{1}{2}$ − di − R.q 1 $\frac{2}{9}$, fa 2$\frac{112}{27}$ − di − R.q.$\frac{203456}{729}$

− che moltiplicato per 4 + di − R.q.11 fa 72 − di − R.q.2816, che la sua R.c., ch'è R.c.⌞72 − di − R.q.2816⌟, e la somma di dette due R.c. legate.

Sotrare di + di − et − di −.

Il sotrare di + di − e − di − ha le sue regole (come le altre) le quali si poneranno con la solita brevità.
Più cavato di + di − non si può se non per via del meno, come se si havesse a cavare 6 di + di − 12, restrerà + di − 12 − 6. Et il medesimo a cavare − di + di −, come sarebbe − 8 di + di 13: farà di − 13 + 8, perchè il meno fa l'effetto che a cavarlo del + si somma: però doventa più.
Più di − cavato di − di − si somma et fa − di −. Men di − cavato di − di − si cava e resta − di −. Ma essendo maggiore la quantità che va cavata resta + di −.
Più di − cavato di + di − se la quantità che va cavata e minore si cava l'una dell'altra e resta + di −, ma se e maggiore resta − di −.

Men di − cavato di + di − si somma et fa + di −.
Cavisi − 5 di − di − 8, resta − di − 8 + 5.
Cavisi + 5 di − di − 10, resta − di − 10 − 5.
Cavisi − di − 9 di 8, resta 8 + di − 9.
Cavisi + di − 12 di 15, resta 15 − di − 12.
Cavisi + di − 8 di + di − 14, resta + di − 6.
Cavisi + di − 14 di + di − 5, resta − di − 9.
Cavisi + di − 13 di − di − 9, resta − di − 22.
Cavisi − di − 12 di + di − 8, resta + di − 20.

Sotrare di R.c.⌞ di + di − e − di −.

Si deve avertire che le Radici le quali sono simili e poca difficultà a sotrarle, cioè quelle che hanno proportione come da numero a nu-

mero, come saria R.c.⌞3 + di − R.q.18⌟ di R.c.⌞24 + di − R.q.1152⌟, che per essere R.c.⌞24 + di − R.q.1152⌟ doppia a R.c.⌞3 + di − R.q.18⌟ restarà similmente R.c.⌞3 + di − R.q.18⌟ et havendo a cavare R.c.⌞ + di − R.q.7⌟ di R.c.⌞27 + di − R.q.6503⌟, perchè la maggiore e tripla alla minore, basta a moltiplicare la minore per 2, che fa R.c.⌞8 + di − R.q.448⌟ e questo è to restante. Et avertiscasi ancora chedi ogni R.c. se ne pun cavare il residuo del suo lato, overo ogni R.q della medesima spetie che gli sia in proportione come da numero a numero, e se quella che va cavata fusse maggiore all'hora si terra il modo delle regole date, come se si havesse a cavare R.c.⌞2 − di − R.q.2⌟ di R.c.⌞2 + di − R.q.32⌟, perchè 2 − di − R.q.2 e il residuo di 2 + di − R.q.2 lato di 2 + di − R.q.32, però tutte le R.c. che haverànno proportione come da numero a numero con 2 − di − R.q.2 si potrànno cavare di 2 + di − R.q.32 con le medesime regole dette nel sommare, del che per piùchiarezza se ne ponerà un essempio. Cavisi R.c.⌞2 − di − 2⌟ di R.c.⌞ − di − 8⌟.
Moltiplichisi R.c.⌞2 − di − 2⌟ per R.c.⌞2 + di − 2⌟, fa R.c.8, cioè 2 e questo è il partitore, che partito R.c.⌞ − di − 8⌟ ne viene − di − 1, e di questo si ha da cavare 1, resta − di − 1 − 1, e questo si ha da moltiplicare per R.c.⌞2 + di − 2⌟, binomio di R.c.⌞2 − di − 2⌟. Cubisi − di − 1 − 1 fa R.c.⌞2 − di − 2⌟ e questo si moltiplichi per R.c.⌞2 + di − 2⌟, fa R.c.8, cioè 2 e questo è to restante. E per non essere ancora intravenuto un caso tale, voglio porre il modo del cubare il detto − di − 1 − 1.

Pongasi in regola (come si vede) poi si moltiplichi 1 di sotto via − 1 di sopra e via − di − 1, fa + di − 1 + 1, dipoi si moltiplichi − di − 1 di sotto via − 1 e − di − 1 di sopra, fa − 1 + di − 1, talche tutta la moltiplicatione sarà − 1 + di − 1 + di − 1 + 1, che gionto − 1 con + 1 fa nulla e + di − 1 con di − 1 fa + di − 2 et questo è il produtto, il quale si moltiplichi di nuovo con − di − 1 − 1, che,

— di — 1 — 1
— di — 1 — 1

— 1 + di — 1 + di — 1 + 1

+ di — 2
— di — 1 — 1

Cubato 2 — di — 2
Binomio 2 + di — 2

4 + di — 4 — di — 4 + 4, cioè 8, che il lato cubo è 2, che è il restante.

accommodati prima l'uno sotto l'altro, si moltiplichi – 1 via + di – 2 fa – di – 2, poi si moltiplichi – di – 1 via + di – 2 fa 2, che gionto con l'altra moltiplicatione fa 2 – di – 2 e questo è il cubato che si cerca, qual si moltiplichi com'è detto, per 2 + di – 2, che postili in regola si moltiplichi + di – 2 di sotto via 2 – di – 2 di sopra, fa – di – 4 + 4, e poi si moltiplichi 2 di sotto via 2 – di – 2 di sopra, fa 4 + di – 4, che gionto + di – 4 con – di – 4 fa nulla e + 4 con 4 fa 8, e questo è il produtto di tal moltiplicatione, che il suo lato cubo, qual è 2, e il numero cercato restante.

Modo di partire per un Binomio di qual si voglia sorte di Radici, e prima dirò del primo relato.

Partasi 6 per R.r.2 + 1; bisogna in simil sorte di partire procedere come si è fatto nel partire per un Binomio cubo, cioè ritrovare un cornposto che moltiplicato per R.r.2 + 1 faccia numero, il qual composto chiamerò residuo, che si trova in questo modo: perchè il primo relato e. nella quinta dignita, sotto ad esso ci quadroquadrato, il cubo e il quadrato. Però la R.r.2 si ridurra a quadroquadrato a cubo e a quadrato, che sarà R.r.16, R.r.8 e R.r.4, e a queste tre R.r. se gli aggionga il partitore, ch'era R.r.2 + 1, ma senza quel nome di più, e si haverà un composto di cinque nomi che saranno queste R.r.16, R.r.8, R.r.4, R.r.2 e 1, al qual per regola si aggionge il meno alla seconda e quarta, e all'altre a il che farannoR.r.16 – R.r.8 + R.r.4 – R.r.2 +

1, e questo composto sarà quello che moltiplicato via R.r.2 + 1 farà numero, **e per non havere a far la moltiplicatione basta aggiongere i relati insieme di R.r.2 + 1, e ciascuno da se,** ch'è 3, **e tanto fa moltiplicare R.r.16 − R.r.8 + R.r.4 − R.r.2 + 1 con R.r.2 + 1; però 3** sarà il partitore, che partito 6 per 3 ne viene 2, il qual 2 si ha da moltiplicare con R.r.16 − R.r.8 + R.r.4 − R.r.2 + 1, che fa R.r.512 + R.r.256 + R.r.128 − R.r.64 + 2, e questo è l'avenimento di tal partire, e per farne la prova si moltiplicara il partitore via l'avenimento e se farà 6 il partimento stara bene, il quale per piùchiarezza lo porrò qui sotto in figura, senza altra dichiaratione, **mettendo i più da una parte e i meni dall'altra.**

R.r. 16 — R.r. 8 + R.r. 4 — R.r. 2 + 1
R.r. 2 + 1

	+		—	
	R.r. 32	lato 2	R.r. 16	a
c	R.r. 8		R.r. 4	b
d	R.r. 2		R.r. 8	c
a	R.r. 16		R.r. 2	d
b	R.r. 4			
	1			

3 produtto

Modo di partire per un residuo relato.

Partasi 8 per R.r.96 − 2; per minore operatione si partirà ciascuna delle parti per 2, acciochè con la R. relata venga 1 per la quantità minore, che partita l'una e l'altra parte ne viene R.r.3 − 1 per il partitore e per quello che va partito 4. Hora bisogna trovare un composto che moltiplicato per R.r.3 − 1 faccia numero, il quale si trovara con la regola data di sopra. Riduchisi a quadroquadrato 3, e a cubo e a quadrato, che fa R.r.81, R.r.27 e R.r.9, al qual se gli aggionge R.r.3 − 1 partitore senza il segno del meno, e aggiongendoli tutti insieme col segno del piùfa R.r.81 + R.r.27 + R.r.9 + R.r.3 + 1 e questo è il composto che moltiplicato per R.r.3 − 1 partitore fa 2, che partito 4 per 2 ne viene 2, il quale si ha da moltiplicare per il composto trovato, cioè R.r.81 + R.r.27 + R.r.9 + R.r.3 + 1, che ne viene R.r.2592 + R.r.864 + R.r.288 +

R.r.96 + 2, e questo è l'avenimento di tal partire, e avertiscasi che se bene ho partito prima il 4 per il 2, tanto si potrebbe moltiplicar prima il 4 per il composto trovato e l'avenimento partire per 2, ma e più commodità a partire prima per fuggire li numeri grandi quando non ne venga rotto.

A partire per un Binomio composto di R.c e R.q.

Partasi 4 per R.c.4 + R.q.2. Il più breve modo sarà partire il partitore e la quantità che va partita per la minore del Binomio, cioè R.q.2, e ne viene R.c.q.2 + 1 per il partitore, e per quel che va partito ne viene R.q.8. Hora bisogna trovare una quantità che moltiplicata per R.c.q.2 + 1 faccia numero e per trovarlo bisogna tenere la regola che si è tenuta nella passata della R.r., di vedere qual dignità e la R.c quadrata, ch'è la sesta, sotto alla quale e il primo relato, il quadroquadrato, il cubo et il quadrato. Però R.c.q. a ciascuna di queste dignità si ridurra, che ne verrà R.c.q.32, R.c.q.16, R.c.q.8, R.c.q.4 alle quali se gli aggionga R.c.q.2 + 1 partitore, e così aggionto si faccia che la seconda, quarta e sesta dica meno, che fa R.c.q.32 − R.c.q.16 + R.c.q.8 R.c.q.4 + R.c.q.2 − 1, e questo è il composto che moltiplicato con R.c.q.2 + 1 fa 1 per il partitore, et il composto moltiplicato con R.q.8 che si ha da partire, ne viene R.c.q.16384 − R.c.q.8192 + R.c.q.4096 − R.c.q.2048 + R.c.q.1024 − R.c.q.512, che partito per 1 ne viene il medesimo, ma perchc la R.c.q.16384 e numero quadrato si può ridurre a R.c., che sarà R.c.128, e la R.c.q.4096 e numero che ha lato quadrocubico, ch'è 4, e la R.c.q.1024 e quadrata, che il suo lato è R.c.32, e la R.c.q. 512 ha lato cubo, ch'è R.q.8, che ridutto tutto il composto a minor dignità ne viene R.c.128 − R.c.q.8192 + 4 − R.c.q.2048 + R.c.32 − R.q.8, si che l'avenimento di tal partire sarà R.c.128 + R.q.32 + 4 R.c.q.8192 − R.c.q.2048 − R.c.8.

A partire per un Residuo di R. quadrata men R.c.

Partasi 2 per R.q.8 – R.c.16; partasi ciascuna delle parti per R.c.16, minor quantità del residuo, cioè per R.c.16 che ne viene per il partitore R.cq.2 – 1 e per quel che va partito R.c.$\frac{1}{2}$. Hora trovisi il Binomio over composto che moltiplicato via R.c.q.2 – 1 faccia numero, che sarà R.c.q.32 + R.c.q.16 + R.c.q.8 + R.c.q.4 + R.c.q.2 + 1, e questo è il composto che moltiplicato via R.c.q.2 – 1 fa 1, il quale si truova con la regola insegnata nell'altra, ma non se gli mette meno dove il partitore sia Residuo. Hora moltiplichisi per il composto trovato R.c.$\frac{1}{2}$, ne viene R.c.q.8 + R.c.q.4 + R.c.q.2 + R.c.q.1 + R.c.q.$\frac{1}{2}$ + R.c.q.$\frac{1}{4}$, che ridutti a minore denominatione ne viene R.q.2 + R.c.2 + R.c.q.2 + 1 + R.c.q.$\frac{1}{2}$ + R.c $\frac{1}{2}$ e questo è l'avenimento del partir proposto.

A partire per un Binomio composto di due Radici cube quadrate.

Partasi 4 per R.c.q.6 + R.c.q.2. Partasi l'una e l'altra parte, cioè il partitore e quel che va partito, per R.c.q.2, minor quantità del Binomio, ne viene per il partitore R.c.q.3 + 1, e per quel che va partito R.c.q.2048; hor trovisi il residuo, over composto, che moltiplicato per R.c.q.3 + 1 faccia numero, che per le regole date sarà R.c.q.243 – R.c.q. 81 + R.c.q.27 – R.c.q.9 + R.c.q.3 – 1, che moltiplicato per R.c.q.3 + 1 fa 2 per il partitore, che partito R.c.q.2048 ne viene R.c.q.32, che moltiplicato per il composto trovato ne viene R.c.q.7776 – R.c.q.2592 + R.c.q.864 – R.c.q.288 + R.c.q.96 – R.c.q.32, e questo è l'avenimento di tal partimento proposto, e parendomi a bastanza questi essempij non ne porrò altri, perchè chi intenderà ben questi potrà formare le regole da se stesso di partire per qual si voglia sorte di Binomio, o Residuo, composto di qual si voglia sorte di Radici, e chi non intenderà questi, meno intenderà i maggiori, e parendonil di havere a bastanza trattato di queste quantità irrationali (principi di essa parte maggiore dell'Arimetica detta Algebra, nelli quali ho ridutto la pratica di tutto il decimo di

Euclide), hora verrò a traltare delle dignità de: numeri. Ponendo qui fine a questo libro a laude e gloria del sommo et eterno Iddio.

Il fine del primo libro

Capitolo 4

Commento al Primo Libro

Supposto noto il calcolo numerico nel campo assoluto di razionalità, Bombelli comincia la sua esposizione introducendo delle semplici definizioni riguardanti le potenze e procede a una prima estensione del campo razionale con l'introduzione dei radicali semplici. Egli scrive:"*La radice quadrata è il lato di un numero non quadrato; il quale è impossibile poterlo nominare: però si chiama radice quadrata ...*". In altri termini, Bombelli introduce un nuovo elemento non appartenente al campo dei numeri razionali che chiamerà radice quadrata.

Il libro è interamente dedicato al calcolo con potenze e radici; queste se non sono applicate a numeri che non sono potenze corrispondenti, danno origine alle quantità dette *sorde* o *indiscrete*. Una differenza significativa che si può riscontrare tra i due testi (manoscritto-stampa) è che nel primo Bombelli non dimostra nessuna delle sue proposizioni, mentre nella successiva edizione a stampa egli dimostra ogni regola che enuncia, e sono soprattutto dimostrazioni di carattere geometrico: è proprio per questa matrice geometrica che possiamo dare come titolo a questo primo libro: "Algebra Geometrica". Le tabelle riportate qua sotto riportano la terminologia utilizzata da Bombelli, contrapposta a quella attuale.

4.1 Definizioni

Numero Quadrato	$x \cdot x$	x^2
Numero Cubo	$x \cdot x^2$	x^3
Numero Quadroquadrato	$x^2 \cdot x^2$	x^4
Numero Primo relato	$x^2 \cdot x^3$	x^5
Numero Quadrocubico	$x^3 \cdot x^3$	x^6
Numero Seconda relato	$x^3 \cdot x^4$	x^7

radice Quadrata	R.q.	$\sqrt[n]{x}$
radice Cuba	R.c.	$\sqrt[3]{x}$
radice Quadroquadrata	RR.q	$\sqrt[4]{x}$
radice Prima Relata	R.p.r	$\sqrt[5]{x}$
radice Qudrocubica	R.q.c	$\sqrt[6]{x}$
radice Seconda Relata	R.s.r	$\sqrt[7]{x}$

4.2 Estrazione della radice

Dopo essersi occupato del calcolo aritmetico tra i radicali (che analizzeremo in seguito), Bombelli passa a descrivere l'estrazione della radice aritmetica esatta e approssimata.
Dapprima si sofferma sull'estrazione della radice quadrata, di cui fa una trattazione puramente aritmetica, per poi completare il tutto con la costruzione geometrica della radice quadrata di un numero, che egli suppone rappresentato da un segmento. In questa costruzione egli dà un primo esempio di applicazione del segmento unitario nelle costruzioni geometriche.
Gli stessi procedimenti vengono applicati anche per le estrazioni delle Radici cubiche: Bombelli fornisce un meccanismo aritmetico, una regola per il calcolo approssimato e anche in questo caso una costruzione geometrica per la radice cubica di un segmento, costruzione che egli identifica con quella del calcolo di due medie proporzionali fra due segmenti.
Bombelli prosegue trattando anche il caso delle radici quarte, quinte,... anche se l'argomento non lo interessa molto, difatti scrive: *"Non era l'animo mio*

di trattare di simil sorta di Radici (come cosa superflua), per non essere necessaria, non havendo i capitoli da agguagliare del primo incomposto over relato con l'altre dignità; ma a preghiera degli amici son stato forzato metterlo, protestandomi, che se venisse mai un'altro tartaglia, esso direbbe ch'io nol ponessi per non sapere le loro operationi...". Il riferimento al Tartaglia non è presente nel manoscritto, mentre viene citato qui da Bombelli perché in una delle famose controversie con il Ferrari Tartaglia lo accusò di non saper estrarre le radici "dei grandi".

- **Estrazione della radice quadrata (esatta)**:
  E' un metodo puramento aritmetico rimando a *Bombelli,ed 1956,p.34*

- **Estrazione della radice quadrata (approssimata)**:

  Supponiamo di voler calcolare $\sqrt{13}$, per prima cosa dobbiamo trovare il numero che elevato al quadrato si avvicini il più possibile a 13 senza superarlo; in questo caso sarà 3. Allora si avrà

  $$\sqrt{13} = 3 + x$$

  elevando al quadrato otterremo

  $$13 = 9 + 6x + x^2$$

  cioè

  $$4 = 6x + x^2$$

  trascurando il termine x^2 otteremo

  $$x = \frac{4}{6}, \quad \Rightarrow \quad \sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6}$$

  Ma se vogliamo un valore più preciso dobbiamo fare

  $$x^2 = x \cdot x = \frac{4}{6}x \quad \Rightarrow 4 = \big(6 + \frac{4}{6}\big)x \quad \Rightarrow x = \frac{4}{6 + \frac{4}{6}}$$

  ne verrà

  $$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6}}$$

- **Costruzione geometrica della radice quadrata di un numero**
  Questa trattazione puramente aritmetica viene completata da Bombelli con una costruzione geometrica (basata sui teoremi euclidei) della radice quadrata di un numero, che viene rappresentato da un segmento. Ed in questa costruzione da un primo esempio di applicazione del segmento unitario nelle costruzioni geometriche.
  Analizziamo ora la costruzione:
  Si prenda un segmento unitario $\overline{a}$. Il segmento $\overline{bc}$ è 7 volte il segmento unitario $\overline{a}$, poi si ptrolunghi il segmento $\overline{bc}$ di un segmento $\overline{bg}$ pari al segmento unitario. Costruiamo ora un semicirconferena di diametro $\overline{gc}$. Da $\overline{b}$ si tracci la perpendicolare a $\overline{gc}$ che interseca la circonferenza in $\overline{h}$. Allora grazie al 2° terorema di euclide arriviamo a dire che $\overline{bh}$ è la radice di $\overline{bc}$ [$\overline{bc} = \sqrt{\overline{bh}}$], perchè $\overline{gb} : \overline{bh} = \overline{bh} : \overline{bc}$, ovvero $\overline{bh}^2 = \overline{bc} \cdot \overline{gb} = 7$

- **Estrazione della radice cubica (esatta)**:
  E' un metodo puramento aritmetico rimando a *Bombelli,ed 1956,p.42*

- **Estrazione della radice cubica (approssimata)**:
  Supponiamo di voler calcolare $\sqrt[3]{N}$ per prima cosa dobbiamo trovare il numero che elevato al cubo si avvicini il più possibile a N senza superarlo. In questo modo otteremo

  $$N = a^3 + r = (a + x)^3$$

  si ha che

  $$a^3 + r = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

  trascurando il termine x^2 otteremo l'equazione di secondo grado

  $$3ax^2 + 3a^2x - r = 0$$

  da cui si ottiene (con la scrittura del Bombelli)

  $$x = \frac{-\frac{3a^2}{2} + \sqrt{(\frac{3a^2}{2})^2 + 3ar}}{3a}$$

- **Costruzione geometrica della radice cuba di un numero**

- **Estrazione della radice quarta**:
ci sono due modi per calcolare $\sqrt[4]{N}$

  1. Prima si calcola $\sqrt{N} = x$ e poi $\sqrt{x}$ ovvero $\sqrt{\sqrt{N}} = \sqrt[4]{N}$
  2. Per prima cosa dobbiamo trovare il numero che elevato alla quarta si avvicini il più possibile a N senza superarlo. In questo modo otteremo
  $$N = a^4 + r = (a + x)^4$$
  si ha che
  $$N = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^3 \quad \Rightarrow$$
  $$x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4ax^3 = (N - a^4)$$
  trascurando il termine x^4 e cerchiamo un approssimazione di x sommando tutti i coefficienti di x^3, x^2 e x in questo modo otteniamo
  $$(4a + 6a + 4a)x = (N - a^4) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{N - a^4}{14a}$$
  Bombelli sottolinea il fatto che questa regola

- **Estrazione della radice quinta (esatta)**:
E' un metodo puramento aritmetico rimando a *Bombelli, ed 1956, p.51*

- **Estrazione della radice quinta (approssimata)**:
Per prima cosa dobbiamo trovare il numero che elevato alla settima si avvicini il più possibile a N senza superarlo. In questo modo otteremo
$$N = a^5 + r = (a + x)^5$$
si ha che
$$N = a^5 + 5a^4x + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5ax^4 + x^5 \quad \Rightarrow$$

$$x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x = (N - a^5)$$

trascurando il termine x^5 e cerchiamo di formare a destra un quadrato di trinomio, in questo modo otteniamo $(a'x^2+b'x+c') = d'$ così facendo si trova la x.

- **Estrazione della radice settima (esatta)**:
  É un metodo puramente aritmetico rimando a *Bombelli, ed 1956, p.55*

- **Estrazione della radice settima (approssimata)**:
  Per prima cosa dobbiamo trovare il numero che elevato alla settima si avvicini il più possibile a N senza superarlo. In questo modo otteremo

$$N = a^7 + r = (a + x)^7$$

si ha che

$$N = a^7 + 7a^6x + 21a^5x^2 + 35a^4x^3 + 35a^3x^4 + 21a^2x^5 + 7ax^6 + x^7 \quad \Rightarrow$$

$$x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x = (N - a^5)$$

trascurando il termine x^7 e cerchiamo di formare a destra un cubo di trinomio, in questo modo otteniamo $(a'x^2 + b'x + c') = d'$ così facendo si trova la x.

4.3 Algebra tra i radicali

Bombelli tratta le operazioni fra radicali all'inizio del libro, per poi ritornarci dopo la trattazione dell'estrazione della radice. Il prodotto e la divisione tra radicali genera ancora elementi sempre appartenenti allo stesso campo di partenza, mentre per quanto riguarda l'addizione e la sottrazione non succede la stessa cosa: la somma e la differenza possono generare nuovi elementi che non appartengono necessariamente al campo primitivo. Bombelli spiega come distinguere quelle somme/differenze che, per la loro particolare natura, si possono ricondurre a radicali semplici, e quelle che creano nuovi elementi che chiama Binomi e Residui (in accordo con la nomenclatura di Euclide).

4.4 Calcolo tra i radicali

$+ \cdot + = +$
$+ \cdot - = -$
$- \cdot + = -$
$- \cdot - = +$

Bombelli dà anche una dimostrazione geometrica (quando tratta i Binomi) del fatto che $- \cdot - = +$. Costruisce geometricamente $(a-b)$ che risulta essere uguale a $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab}$.
Dato un segmento a e b, per ricavare il segmento $a - b$ occorre calcolare il quadrato ABDE e poi farne la radice quadrata. Per ricavare ABDE occorre prendere il quadrato costruito sul segmento a e da quello togliere lo gnomone BID, ovvero togliere i rettangoli BCHI E DFGI che sono congruenti e pari a $2ab$ per poi riaggiungere EFHI pari a b^2. Quindi Bombelli fa notare che per ottenere il risultato geometrico si deve porre $(-b) \cdot (-b) = b^2$

- **Moltiplicazione tra Radici**:
  "*...bisogna moltiplicare simplicemente come se fossero numeri...*"

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

- **Divisioni tra Radici**:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

- **Moltiplicazione tra radice e numero**:
  " *bisogna ridurre tutte le quantità a una natura...* " ovvero o si deve portare la radice a un numero o il numero sotto forma di radice.

$$\sqrt[n]{a} \cdot b = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b^n} = \sqrt[n]{a \cdot b^2}$$

- **Divisione tra radice e numero**:
  " *bisogna ridurre tutte le quantità a una natura...* "

$$\sqrt[n]{a} : b = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b^n} = \sqrt[n]{\frac{a}{b^n}}$$

- **Somma di Radici con numero**:
  "*non si può fare se non per via del più*" ovvero sommare a con $\sqrt[n]{b}$ significa scrivere
  $$a + \sqrt[n]{b}$$

- **Sottarrre Radici con numero**:
  "*non si può fare se non per via del meno*" ovvero sottrarre a con $\sqrt[n]{b}$ significa scrivere
  $$a - \sqrt[n]{b}$$

- **Somma di Radici con radici**:
  ci sono 4 modi per fare $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$:

  1. (Solo nel caso della radice quadrata) Si analizza $\sqrt[n]{ab}$
     - $\sqrt[n]{ab}$ non ha una radice razionale $\Rightarrow$ non possiamo fare nulla e scriviamo $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$
     - $\sqrt[n]{ab} = x$ ha una radice razionale $\Rightarrow$ $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a + 2\sqrt[n]{ab} + b} = \sqrt[n]{a + x + b}$

     DIMOSTRAZIONE (caso R.q.)

     Dato il segmento $\overline{ab} = \sqrt{12}$ e il segmento $\overline{bc} = \sqrt{3}$, la loro somma sarà il segmento $\overline{ac}$. Quindi per trovarlo si dovrà fare la radice dell'area del quadrato costruito sul segmento $\overline{ac}$. Ovvero
     $$\sqrt{12} + \sqrt{3} = \sqrt{\sqrt{12}^2 + 2\sqrt{12 \cdot 3} + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12 + 12 + 3}$$

  2. Si analizza $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ove $a > b$
     - $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ non ha una radice razionale $\Rightarrow$ non possiamo fare nulla e scriviamo $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$
     - $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = x$ ha una radice razionale $\Rightarrow$ $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}} + 1\right)\sqrt[n]{b} = (x+1)\sqrt[n]{b}$

DIMOSTRAZIONE (caso R.q.)

Dato il segmento $\overline{ab} = \sqrt{45}$ e il segmento $\overline{bc} = \sqrt{5}$, la loro somma sarà il segmento $\overline{ac}$. Si divida poi il segmento $\overline{ab}$ con $\overline{bc}$, ovvero $\sqrt{45} : \sqrt{5} = 3$. Perciò il segmento $\overline{bc}$ è stato diviso in 4 parti (3+1) tutte di lunghezza $\sqrt{5}$. Così il segmento $\overline{ac}$ sarà uguale a $4(\sqrt{5})$.

3. Si analizza $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ove $a < b$
   - $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ non ha una radice razionale $\Rightarrow$ non possiamo fare nulla e scriviamo $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$
   - $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = x$ ha una radice razionale $\Rightarrow$ $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}} + 1\right)\sqrt[n]{b} = (x+1)\sqrt[n]{b}$
4. Si sceglie c in modo che $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ e $\sqrt[n]{\frac{b}{c}}$ siano numeri razionali $\Rightarrow$ $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{c}} + \sqrt[n]{\frac{b}{c}}\right)\sqrt[n]{c}$

   DIMOSTRAZIONE (caso R.q.)
   Dato il segmento $\overline{A} = \sqrt{27}$ e il segmento $\overline{B} = \sqrt{12}$, la loro somma sarà il segmento $\overline{A+B}$. Si trova il segmento C, chiamato da Bombelli *"commune misura"*, ovvero il massimo comune divisore, che in questo caso è $\sqrt{3}$. Poi si divide $\overline{A}$ per $\overline{C}$ e $\overline{B}$ per $\overline{C}$, ottenendo così rispettivamente 3 e 2. Il segmento $\overline{A+B}$ è quindi 5 vole il segmento $\overline{C}$, perciò uguale a $5(\sqrt{3})$

- **Sottrarre di Radici quadrate con radici**:
  ci sono 4 modi per fare $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$:

  1. (Solo nel caso della radice quadrata) Si analizza $\sqrt{ab}$
     - $\sqrt{ab}$ non ha una radice razionale $\Rightarrow$ non possiamo fare nulla e scriviamo $\sqrt{a} - \sqrt{b}$
     - $\sqrt{ab} = x$ ha una radice razionale $\Rightarrow$ $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a - 2\sqrt[n]{ab} + b} = \sqrt{a - x + b}$
  2. Si analizza $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ove $a > b$

- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ non ha una radice razionale $\Rightarrow$ non possiamo fare nulla e scriviamo $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = x$ ha una radice razionale $\Rightarrow \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}} - 1\right)\sqrt[n]{b} = (x+1)\sqrt[n]{b}$

3. Si analizza $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ove $a < b$
   - $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ non ha una radice razionale $\Rightarrow$ non possiamo fare nulla e scriviamo $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$
   - $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = x$ ha una radice razionale $\Rightarrow \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}} - 1\right)\sqrt[n]{b} = (x+1)\sqrt[n]{b}$
4. Si sceglie c in modo che $\sqrt[n]{\frac{a}{c}} = a'$ e $\sqrt[n]{\frac{b}{c}} = b'$ siano numeri razionali $\Rightarrow \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{c}} - \sqrt[n]{\frac{b}{c}}\right)\sqrt[n]{c} = (a' + b')\sqrt[n]{c}$

4.5 Binomi e Residui

Lo studio dei Binomi e Residui occupa circa 30 pagine del primo libro, viene fatto in modo meticoloso dal punto di vista analitico e contiene tutto quello che bisogna conoscere del decimo libro di Euclide per quanto riguarda delle equazioni quadratiche.

Il **Binomio** *"è una quantità composta di due nomi aggiunti insieme dissimili, ovvero simili, ma di quantità di R.q. che fra di loro non sia proportione (come da numero quadrato a numero quadrato...)* "
ESEMPIO: $\sqrt{2} + \sqrt{50}, \quad 6 + \sqrt{5}$

Il **Residuo** *"è una quantità composta di due nomi dissimili ovvero di due Radici quadrate le quali non habbiano proportione fra di loro, come da numero quadrato a numero quadrato, e che la minore di dette due quantità vadi cavata della maggiore...* "
ESEMPIO: $\sqrt{2} - \sqrt{50}, \quad 6 - \sqrt{5}$

Ci sono 6 tipi di Binomi e Residui che Bombelli classifica così:
1° Binomio: È del tipo $a+\sqrt{b}$, tale che a^2-b sia un numero quadrato
2° Binomio: È del tipo $\sqrt{a}+b$, tale che $\exists n : a-b^2=n\cdot a$
3° Binomio: È del tipo $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ $[a>b]$, tale che $\exists n : a-b=n\cdot a$
4° Binomio: È del tipo $a+\sqrt{b}$, tale che a^2-b sia un numero non quadrato
5° Binomio: È del tipo $\sqrt{a}+b$, $[a>b]$ tale che $\nexists n : a-b^2 n\cdot a$

6° Binomio: È del tipo $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, tale che tale che $\nexists n : a-b=n\cdot a$
1° Residuo: È del tipo $a-\sqrt{b}$, tale che a^2-b sia un numero quadrato
2° Residuo: È del tipo $\sqrt{a}-b$, tale che $\exists n : a-b^2=n\cdot a$
3° Residuo: È del tipo $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $[a>b]$, tale che $\exists n : a-b=n\cdot a$
4° Residuo: È del tipo $a-\sqrt{b}$, tale che a^2-b non sia un numero quadrato
5° Residuo: È del tipo $\sqrt{a}-b$, tale che $\nexists n : a-b^2 n\cdot a$

6° Residuo: È del tipo $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $[a>b]$ tale che $\nexists n : a-b^2 n\cdot a$

Dopo aver classificato i Binomi e Residui Bombelli affronta le operazioni fra di essi:

- **Moltiplicazione tra Binomi e numero/radice**:
  1. $(a+\sqrt{b})\cdot c = a\cdot c+\sqrt{b\cdot c^2}$
  2. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot c = \sqrt{a\cdot c^2}+\sqrt{b\cdot c^2}$
  3. $(a+\sqrt{b})\cdot\sqrt{c} = \sqrt{a^2\cdot c}+\sqrt{b\cdot c^2}$
- **Moltiplicazione tra Residui e numero/radice**: Avviene la stessa cosa dei Binomi con la differenza che al posto del + abbiamo il -.
- **Dvisione tra Binomi e numero/radice**:
  1. $(a+\sqrt{b}) : c = \frac{a}{c}+\sqrt{\frac{b}{c^2}}$
  2. $(\sqrt{a}+\sqrt{b}) : c = \sqrt{\frac{a}{c^2}}+\sqrt{\frac{b}{c^2}}$

3. $(a+\sqrt{b}) : \sqrt{c} = \sqrt{\frac{a^2}{c}} + \sqrt{\frac{b}{c^2}}$

- **Divisione tra Residui e numero/radice**: Avviene la stessa cosa dei Binomi con la differenza che al posto del + abbiamo il -.

- **Somma tra Binomi e numero/radice**: Se si deve sommare un numero o una radice con un Binomio, si deve sommare il numero con il numero e la radice con la radice.

  1. $(a+\sqrt{b}) + c = (a+c) + \sqrt{b}$
  2. $(\sqrt{a}+\sqrt{b}) + c = \sqrt{a} + \sqrt{b} + c$
  3. $(a+\sqrt{b}) + \sqrt{c} = a + (\sqrt{b} + \sqrt{c})$

  Con questo modo si procederà anche per le differenze tra Binomi e numero/radice, così come per la somma e la differenza tra residui e numero/radice.

- **Moltiplicatione tra Binomi-Binomi, Residui-Residui e Binomi-Residui**

  1. $(a+\sqrt{b})(c+\sqrt{d}) = ac + a\sqrt{d} + c\sqrt{b} + \sqrt{bd}$
  2. $(a+\sqrt{b})(c-\sqrt{d}) = ac - a\sqrt{d} + c\sqrt{b} - \sqrt{bd}$
  3. $(a-\sqrt{b})(c-\sqrt{d}) = ac - a\sqrt{d} - c\sqrt{b} + \sqrt{bd}$
  4. $(a+\sqrt{b})(a+\sqrt{b}) = (a+\sqrt{b})^2 = a^2 + b + 2a\sqrt{b}$
  5. $(a-\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = (a-\sqrt{b})^2 = a^2 + b - 2a\sqrt{b}$
  6. $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2 - b$

- **I prodotti notevoli**
  Successivamente Bombelli mette in luce i seguenti prodotti notevoli, che verranno esposti ora per capire meglio i passaggi a venire.

  1. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
  2. $(a \pm b)(a^2 \mp 2ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

3. $(a \pm b)(a^3 \mp a^2b + ab^2 \mp b^3) = a^4 - b^4$
4. $(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3 - ab - ac - bc) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

Il secondo membro della divisione è il residuo.

- **Divisione tra Binomi-Numero e tra Binomi-Binomi**

1. $(a + \sqrt{b}) : c = \frac{a}{c} + \sqrt{\frac{b}{c^2}}$
2. $c : (a + \sqrt{b})$ *[riduco il secondo membro a numero, moltiplicando per il suo residuo]*
   $c(a - \sqrt{b}) : (a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = (ca - \sqrt{bc^2}) : (a^2 - b) = \frac{ca}{a^2-b} - \sqrt{\frac{bc^2}{(a^2-b)^2}}$
3. $c : (\sqrt{a} + \sqrt{b})$ *[riduco il secondo membro a numero, moltiplicando per il suo residuo]*
   $c(\sqrt{a} - \sqrt{b}) : (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{ac^2} - \sqrt{bc^2}) : (a - b) = \sqrt{\frac{ac^2}{(a-b)^2}} - \sqrt{\frac{bc^2}{(a-b)^2}}$
4. $c : (a + \sqrt[4]{b})$ *[riduco il secondo membro a numero, moltiplicando per il suo residuo]*
   $c(a^3 - \sqrt[4]{a^2b} + \sqrt[4]{ab^2} - \sqrt[4]{b^3}) : (a + \sqrt[4]{b})(a^3 - \sqrt[4]{a^2b} + \sqrt[4]{ab^2} - \sqrt[4]{b^3}) = c(a^3 - \sqrt[4]{a^2b} + \sqrt[4]{ab^2} - \sqrt[4]{b^3}) : (a^4 - b)$

4.6 Radici Legate

Bombelli prosegue con l'analizzare quelle che lui chiama Radici legate, che non sono altro che l'applicazione di un radicale quadratico sui binomi o residui ($\sqrt{a + \sqrt{b}}$), che aggiunti al campo generano una nuova estensione del campo di razionalità.
Prima di analizzare questo nuovo campo, Bombelli studia i casi particolari che permettono l'estrazione della radice di una radice legata.

- **Estrazione radice quadrata (primo binomio):** $\sqrt{a + \sqrt{b}}$
  dobbiamo trovare p e q tali che:

$$(a + \sqrt{b}) = (p + q)^2$$

deve essere

$$\begin{cases} a = p^2 + q^2 \\ b = 2pq \end{cases}$$

essendo un primo binomio $a^2 - b^2$ **è un numero quadrato**, quindi poniamo:

$$r = \sqrt{a^2 - b^2} = p^2 - q^2$$

ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} a = p^+ q^2 \\ r = p^2 - q^2 \end{cases}$$

Si ottengono i valori:

$$p = \sqrt{\frac{a+r}{2}}, \quad q = \sqrt{\frac{a-r}{2}}$$

- **Estrazione radice quadrata (secondo binomio):** $\sqrt{\sqrt{a} + b}$
  Il procedimento è analogo al caso precedente, a differenza che qui dobbiamo tener conto del fatto che $\sqrt{\sqrt{a} + b}$ **essendo un secondo binomio** $\sqrt{a}$ **e** $(a - b^2)$ si possono sommare e quindi

$$\sqrt{a} + r = \sqrt{a'} \qquad \sqrt{a} - r = \sqrt{a''}$$

  e le soluzioni diventeranno

$$p = \sqrt{\frac{\sqrt{a'}}{2}}, \quad q = \sqrt{\frac{\sqrt{a''}}{2}}$$

  ovvero

$$p = \sqrt[4]{\frac{a'}{4}}, \quad q = \sqrt[4]{\frac{a''}{4}}$$

- **Estrazione radice quadrata (terzo binomio):** $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$
  Il procedimento è analogo al caso precedente, con la differenza che qui dobbiamo tener conto del fatto che $\sqrt{\sqrt{a} + b}$ **essendo un terzo binomio** $\sqrt{a}$ **e** $(a - b)$ si possono sommare e quindi

$$\sqrt{a} + r = \sqrt{a'} \qquad \sqrt{a} - r = \sqrt{a''}$$

e le soluzioni diventeranno

$$p = \sqrt{\frac{\sqrt{a'}}{2}}, \quad q = \sqrt{\frac{\sqrt{a''}}{2}}$$

ovvero

$$p = \sqrt[4]{\frac{a'}{4}}, \quad q = \sqrt[4]{\frac{a''}{4}}$$

Bombelli prosegue poi con la spiegazione delle operazioni semplici con le radici legate: moltiplicazioni, divisioni, somme e differenze, per poi passare ad una nuova estensione del campo analizzando i radicali cubici.

4.7 Radicali Cubici

- **Cubo di un binomio**
  $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$

- **Quadrato di un binomio cubico**:
  $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^2 = \sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$

- **Divisione tra numero e binomio cubico**:
  $c:(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})$*[riduco il secondo membro a numero, moltiplicando per il suo residuo cubico]*
  $[c:(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab})]:[(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab})] = [c:(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab})]:(a+b)$

- **Divisione tra numero e residuo cubico**:
  $c:(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$*[riduco il secondo membro a numero, moltiplicando per il suo residuo cubico]*
  $[c:(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab})]:[(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab})] = [c:(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab})]:(a-b)$

- **Divisione tra numero e Trinomio cubico**:
  $c:(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})$ Si tratta di trasformare il secondo membro nella forma $(p-\sqrt[3]{q})$, e perciò ricondursi al caso precedente. Per fare

ciò significa svolgere il seguente prodotto $(a' + b' + c')(a'^2 + b'^2 + c'^2 - a'b' - a'c' - b'c') = a'^3 + b'3 + c'^3 - 3a'b'c'$. Quindi facendo ciò otterremo: $[c(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[4]{ab} - \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[4]{ac} - \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[4]{bc})] : [(a+b+c) - \sqrt[3]{abc}]$ Queste ultime due regole che ci permettono di rendere razionale il denominatore di un frazione contentente la somma di due o tra radicali cubici; Bombelli nell'edizione manoscritta attribuisce la regola a Scipione Dal Ferro.

- **Estrazione radice cubica di un binomio (per tentativi):** $\sqrt[3]{\sqrt{a} + b}$ dobbiamo trovare p e q tali che:

$$(\sqrt{a} + b) = (\sqrt{p} + q)^3$$

deve essere $a - b^2 = (p - q^2)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{a - b^2} = p - q^2$.
d'altra parte $\sqrt{a} + b = p\sqrt{p} + q^3 + 3pq + 3\sqrt{p}q \quad \Rightarrow \quad b = q^3 + 3pq$
Il problema si riduce quindi a trovare due numeri p e q tali che:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a - b^2} = p - q^2 \\ b = 3pq + q^3 \end{cases}$$

- **Estrazione radice cubica di un binomio (regola):** $\sqrt[3]{\sqrt{a} + b}$ Bortolotti dimostra che per trasformare $\sqrt[3]{\sqrt{a} + b}$ nella forma $\sqrt{p} \pm q$ si deve risolvere l'equazione cubica

$$x^3 + 3\sqrt[3]{a - b^2}x - 2m = 0$$

che è risolta dall'espressione

$$2q = \sqrt[3]{\sqrt{a} + b} - \sqrt[3]{\sqrt{a} - b}$$

4.8 Numeri Immaginari

Ho trovato un'altra sorte di R.c. legate molto differenti dall'altre, qual nasce dal Capitolo di cubo eguale a tanti e numero, quando il cubato del terzo delli tanti e maggiore del quadrato della metà del numero, come in esso

Capitolo si dimostrarà, la qual sorte di R.q ha nel suo Algorismo diversa operatione dall'altre e diverso nome; perchè quando il cubato del terzo delli tanti e maggiore del quadrato della metà del numero, lo eccesso loro non si puo chiamare ne più ne meno, però lo chiamaro più di meno quando egli si dovera aggiongere, quando si dovera cavare lo chiamerò men di meno, e questa operatione e necessarijssima più che l'altre R.c.⌞ per rispetto delli Capitoli di potenze di potenze, accompagnati con li cubi, o tanti, o con tutti due insieme, che molto più sono li casi dell'agguagliare dove ne nasce questa sorte di R. che quelli dove nasce l'altra, la quale parera a molti più tosto sofistica che reale, e tale opinione ho tenuto anch'io, sin che ho trovato la sua dimostratione in linee (come si dimostrara nella dimostratione del detto Capitolo in superficie piana) e prima trattaro del moltiplicare, ponendo la regola del più. et meno.
Più via più di meno, fa più di meno.
Meno via più di meno, fa meno di meno.
Più via meno di meno, fa meno di meno.
Meno via meno di meno, fa più di meno.
Più di meno via più di meno, fa meno.
Più di meno via men di meno, fa più.
Meno di meno via più di meno, fa più.
Meno di meno via men di meno, fa meno.
Con queste parole Bombelli incomincia una nuova ed ultima parte del capitolo riguardante i numeri immaginari. L'ultima estensione del capo razionale, necessaria per la risoluzione delle equazioni cubiche nel caso irriducibile era un caso che aveva lasciato problemi agli algebristi fino ad allora. Lui stesso afferma di aver incontrato questi nuovi enti matematici per la prima volta nella risoluzione dell'equazione cubica nel caso irriducibile.
Bombelli all'inizio, come si evince dal manoscritto, pensava di poter trattare i radicali negativi con le stesse leggi e regole di calcolo dei radicali positivi; infatti rappresenta i numeri immaginari come dei radicali R(o.m.1), ovvero $\sqrt{0-1}$). In seguito si accorse che erano entità speciali che necessitavano

di essere rappresentate con simboli speciali e con nuove regole e leggi per il calcolo.

- ***i***
  Più via più di meno, fa più di meno. $(+)(+i) = i$
  Meno via più di meno, fa meno di meno. $(-)(+i) = -i$
  Più via meno di meno, fa meno di meno. $(+)(-i) = -i$
  Meno via meno di meno, fa più di meno. $(-)(-i) = +i$
  Più di meno via più di meno, fa meno. $(+i)(+i) = -$
  Più di meno via men di meno, fa più. $(+i)(-i) = +$
  Meno di meno via più fdi meno, fa più. $(-i)(+i) = +$
  Meno di meno via men di meno, fa meno. $(-i)(-i) = -$

- **coniugato**
  Nella risoluzione dei ogni equazione a coefficienti reali, ogni radice complessa è sempre accompagnata dalla sua coniugata.

  $$(a + ib) \Rightarrow (a - ib)$$

- **Operazioni tra immaginari**
  Bombelli espone le regole del calcolo tra i numeri complessi dando prova di grande maestria e sicurezza nel loro uso. Qui veranno riportati alcuni esempi affrontati:

  1. Per sommare a con ib, non si farà altro che scrivere $a + ib$
  2. Per sottrarre a con ib, non si farà altro che scrivere $a - ib$
  3. $(a + ib) + c = (a + c) + ib$
  4. $(a + ib) - c = (a - c) + ib$
  5. $(a + ib) + ic = a + i(b + c)$
  6. $(a + ib) - ic = a + i(b - c)$
  7. $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$

8. $p(a+ib)+q(a+ib)=(p+q)(a+ib)$

9. $\sqrt{a+i\sqrt{b}}+\sqrt{(a-i\sqrt{b})^2}=\sqrt{a+i\sqrt{b}}\left(1+\frac{\sqrt[3]{(a-i\sqrt{b})^2}\sqrt[3]{(a-i\sqrt{b})}}{\sqrt[3]{(a+i\sqrt{b})(a-i\sqrt{b})}}\right)=$
$\sqrt{a+i\sqrt{b}}\left(1+\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right)$

10. $(\sqrt[3]{a+ib}+\sqrt[3]{a-ib})\cdot c=(\sqrt[3]{2+i}+\sqrt[3]{2-i})\cdot\sqrt[3]{c^3}=(\sqrt[3]{(ac^3)+ibc^3}+$
$\sqrt[3]{ac^3-ibc^3})=$

11. $\sqrt[3]{a+ib}\cdot\sqrt[3]{a-ib}=\sqrt[3]{a^2-i^2b^2}=\sqrt[3]{a^2+b^2}$

12. $\sqrt[3]{a+ib}\cdot\sqrt[3]{a+ib}=\sqrt[3]{a^2+i^2b^2+2iab}=\sqrt{a^2-b^2+2iab}$

13. $\sqrt[3]{a-ib}\cdot\sqrt[3]{a-ib}=\sqrt[3]{a^2+i^2b^2-2iab}=\sqrt{a^2-b^2-2iab}$

14. Per sottrarre a con ib, non si farà altro che scrivere $a-ib$

15. $(a+ib)+c=(a+c)+ib$

16. $(a+ib)-c=(a-c)+ib$

17. $(a+ib)+ic=a+i(b+c)$

18. $(a+ib)-ic=a+i(b-c)$

19. $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$

- **Estrazione radice quadrata in un Binomio complesso:**

1. $\sqrt[3]{a+ib}$
Dobbiamo trovare p e q in modo che $(a+ib)=(p+iq)^3$
deve essere $a^2-i^2b^2=(p^2-i^2q^2)^3 \quad\Rightarrow\quad a^2+b^2=(p^2+q^2)^3 \Rightarrow$
$\sqrt[3]{a^2+b^2}=p^2+q^2$.
d'altra parte $a+ib=p^3+i^3q^3+3ip^2q+3pi^2q^2 \quad\Rightarrow\quad a+ib=$
$p^3-iq^3+3ip^2q-3pq^2 \quad\Rightarrow a=p^3-3pq^2$
Il problema si riduce quindi a trovare due numeri p e q tali che:

$$\begin{cases}\sqrt[3]{a^2+b^2}=p^2+q^2\\ a=p^3-3pq^2\end{cases}$$

2. $\sqrt[3]{a+i\sqrt{b}}$
   Dobbiamo trovare p e q in modo che $\sqrt[3]{a+i\sqrt{b}} = p + iq$
   moltiplicando questa equazione per la complessa coniugata otteniamo: $\sqrt[3]{a^2+b^2} = p^2 + q^2$
   elevando al cubo e eguagliando tra loro le parti eguali otteniamo:
   $b = p^3 - 3q^2p$
   Il problema si riduce quindi a trovare due numeri p e q tali che:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a^2+b^2} = p^2 + q^2 \\ b = p^3 - 3q^2p \end{cases}$$

Capitolo 5

Libro secondo.

Si maravigliaranno forse alcuni, che contra l'antico use de' Scrittori italiani, i quali fino a questo giorno hanno scritto di questa scientia dell'Aritmetica, quando gli è occorso di trattare di quantità incognita: essi sempre l'hanno nominata sotto questa voce di Cosa come voce commune a tutte le cose incognite, ed io chiami hora queste quantità Tanti ma chi bene considerara il fatto, conoscerà che più se le conviene questa voce di Tanto che di Cosa, perchè se diremo Tanto e voce appropriate a quantità di numeri, il che non si può dire di cosa, essendo quella voce universalissima e commune ad ogni sostantia così ignota come nota. In oltre io trovo che Diofante Autore Greco così la noma, il ch'è di non piccolo argomento, questa essere la sua propria e vera voce, essendo egli Scrittore così antico, e di tanto valore (come dissi nel primo libro). Dunque non si maravigli il Lettore di questa mia voce se nuova parerà a moderni, perchè antichissima e per gli antichi, ma acciochè meglio possa operare in queste quantità incognite delle quali intendo di tratare in questo mio secondo libro, cerchi di benissimo farsi capace di questi capitoletti, i quali (come per regole) ho posto nel principio di esso dando brevemente la diffinitione di ciascuna di loro e seguitando con l'ordine proportionale e dovuto in queste

quantità, segnando ciascuna con il suo segno, o caratero, col quale dipoi mai sempre si noterà, e haverà quella forza e valore che qui sotto nelle sue diffinitioni e propriei vede, e per non più dilattarmi in parole verrò ad esse diffinitioni, e prima dirò del Tanto.

Diffinitione del sudetto Tanto. [1]

Il Tanto adunque e una quantità incognita, con la quale con il fine dell'operare, si viene a trovare un numero che li sia pari, overo eguale, e venuto a questo fine si ritrova quanto è un tanto (come nell'agguagliatione si mostrara) il qual Tanto si segnara con questo caratero $^{\underline{1}}$.

Diffinitione della potenza. [2]

Perchè nell'operare bisogna assai volte moltiplicare li Tanti infra di loro, e il produtto fassi di diversa spetie, da molti tal produtto e stato nominato censo, voce tanto sconvenevole, che più dir non si potrebbe, perchè pare che punto non si confaccia in materia de'numeri sapendosi generalmente che cosa significhi questa voce di Censo senza che io lo dichi. Da altri e stato chiamato poi quadrato, il qual nome e atto a generare confusione perchè bisogna poi nominare li numeri quadrati e le superficie quadrate: però mi son risoluto di seguitare Diofante (come ho fatto nel restante) e chiamarlo potenza, la quale potenza quando uno si fa quadrato del Tanto, e si segnara con questo caratero $^{\underline{2}}$.

[1]

Diffinitione de la Cosa.

La Cosa in Algebra è una quantità incognita la quale si cerca ridurre con l'operatine algebriche di equipararla al numero perchè ogni volta che si trova un numero ch li sia eguale si ha la sua valuta.

[2]

Diffinitione de Censo.

Il Censo è la quadratura de la Cosa detta di sopra: et s'essa cosa valesse 3, il Censo valerà 9; et se la cosa valesse 5, il Censo valerà 25, il qual Censo si faranno in questa foggia $^{\underline{2}}$.

Dfffinitione del Cubo. [3]

Il cubo è il produtto di una potenza moltiplicata via un Tanto, che viene a servare l'ordine de'cubi, che il produtto d'un numero quadrato moltiplicato via il suo lato, fa numero cubo, parimente la potenza, ch'è quadrata, moltiplicata via il tanto suo lato, produce il cubo, il quale si segnara con questo caratero $^{\underline{3}}$.

Difinitione della potenza di potenza. [4]

La potenza di potenza e il quadroquadrato del Tanto, overo il quadrato della potenza, overo il produtto del cubo via il tanto, la quale sarà segnata con questo caratero $^{\underline{4}}$, e tutti questi nomi saranno chiamati dignita, le quali (per non dilattarmi troppo) ma seguendo la solita brevità, non diffinirò particolarmente, parendomi che queste bastino, poiche l'altre tutte nascono da questo, e solo porrò li nomi loro qui sotto, e il suo carattero.

Nomi delle dignità e forma delle loro abbreviature.

Tanto $^{\underline{1}}$
Potenza $^{\underline{2}}$
Cubo $^{\underline{3}}$
Potenza di potenza $^{\underline{4}}$
Primo relato $^{\underline{5}}$
Potenza cuba, o cubo di Potenza $\underline{6}$

[3] Il cubo è la moltiplicatione de la cosa tre volte in se, perchè la cosa cubata fa Cubo, come ne la regola del moltiplicare si mostrerà, et se la cosa valerà 2, il Cubo valerà 8; et se la cosa valerà 3, il cubo valerà 27; il qual Cubo si formerà in questo modo $^{\underline{3}}$.

[4]

Diffinitione del Censo Censo.

Il Censo Censo è il quadro quadrato della cosa, et se la cosa valerà 2, il Censo di Censo valerà 16; et se la cosa valerà 3 il Censo Cneso valerà 81; il quale Censo Censo si formerà in questo modo $^{\underline{4}}$.

Secondo relato $^{\underline{7}}$
Potenza di potenza di potenza $\underline{8}$
Cubo di cubo $^{\underline{9}}$
Potenza del primo relato $^{\underline{10}}$
Terzo relato $^{\underline{11}}$
Cubo di potenza di potenza $^{\underline{12}}$
Si come nella parte minore dell'Arimetica occorrono quattro atti, cioè Moltiplicare, Partire, Sommare e Sotrare, così nella parte maggiore ne occorrono cinque, li quattro detti di sopra, e lo agguagliare, ch'è il quinto, il qual è il più difficile ed importante. Però mi forzaro di porlo in guisa che sia inteso da ciascuno, o sia dell'arte, overo li voglia dar opera, ma prima verrò al moltiplicare.

Del moltiplicare delle dignità fra di loro semplicemente.

Tutte le dignità che si moltiplicaranno via numero non cangeranno il segno della dignità, perchè il numero non ha segno alcuno e tutte le quantità che non haverànno il segno faranno l'effetto del numero, se bene saranno Radici quadrate, o cube, overo legate, o di qual sorte si voglia.
Quando si haverà a moltiplicare dignità si sommaranno i numeri delle abbreviature posti di sopra, e di quelli si formarh una abbreviatura di dignità ed il numero che sarà disparo a esse dignità si moltiplicara semplicemente (come si moltiplicano gli altri numeri) e per più chiarezza porrò gli infrascritti essempij.
Moltiplichisi 20 via 3$^{\underline{1}}$ *fa 60*$^{\underline{1}}$*, perchè si moltiplica il numero via il numero e il produtto riserba la dignità delli* $^{\underline{1}}$*, perchè numero via dignità non fa mutatione la dignità (crome ho detto).*
Moltiplichisi 3$^{\underline{1}}$ via 10$^{\underline{1}}$, farà 30$^{\underline{2}}$, perchè $^{\underline{1}}$ sommato con $^{\underline{1}}$ fa $^{\underline{2}}$ et il 3 via 10 fa 30, che si gli pone al pari la in questa guisa 30 $^{\underline{2}}$, e senza altro comento (essendo il modo facile per se) non mi dilattaro in longhezza di parole, ma solo per più chiarezza porrò questi essempij, i quali faranno il medesimo effetto che il picciolo abbachino suol far nell'arte minore di questa disciplina

per scorta ed intelligentia de'principianti.
E perchè alcuna volta accade moltiplicare R.q.via una e da alcuno Autore è stato posto che si debba quadrare l'uno e l'altro, il che se riesce assai volte, nondimeno porta tanto avanti le dignità che non vi è poi Capitolo per aggua-gliarlo, però per non incorrere in questo inconveniente tenghisi l'infrascritto ordine.
Moltiplichisi R.q.5 via $2^{\underline{1}}$; *questa proposta e come a moltiplicare tanti via numero,* perchè queste R.q.anch'elle sono numero, ma non si possono nominare se non inpotentia, per non havere lato, che moltiplicato 2 via R.q.5 fa R.q.20, al quale pongasi il segno al pari del $^{\underline{1}}$, e farà R.q.$20^{\underline{1}}$, e così si procede ancora nelle R.q.legate, come per essempio moltiplichisi R.q.$\llcorner 2 +$ R.q.$2 \lrcorner$ via $6^{\underline{2}}$. *Moltiplichisi la R.q. legata via il numero delle potenze, fa R.q.*$\llcorner 72 +$ *R.q.*$2592 \lrcorner$ $^{\underline{2}}$ *alla quale se gli aggionga il segno delle potenze, e farà R.q.*$\llcorner 72 +$ *R.q.*$2592 \lrcorner$ $^{\underline{2}}$. *E quanto al moltiplicare semplicemente questi essempij bastano. Avertendosi che nelle figure delle operationi metterò il segno delle dignità sopra il numero per più comodità, e ancora sarebbe stato meglio ponerlo nello scrivere, ma non si è potuto fare per rispetto della stampa.*

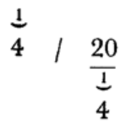
Del lato delle dignità.

Perchè alcuna volta potrebbe nascere qualche difficulta, che havendosi a pigliare il lato di una dignità l'operante pigliarebbe solo il lato della quantita, e non della dignità: però havendosi a pigliare il lato di alcuna dignità, se il numero ch'è posto nel semicirculo sarà numero disparo, di tal dignità e impossibile poterne pigliare il suo lato. Ma se haverà a numero paro, se ne pigliara il mezo e quello si mettera in un semivirculo e al par di esso si ponga il lato del numero che prima era dispari alla dignità, e se non l'haverà si dirà R.q., come per essempio piglisi il lato di 25 $^{\underline{6}}$: piglisi il mezo di $^{\underline{6}}$ch'è 3 e pongasi nel semicirculo, fa $^{\underline{3}}$, poi piglisi il lato di 25, ch'è 5, e pongasi al pari del $^{\underline{3}}$ e dirà $5^{\underline{3}}$ e se si havesse a pigliare il lato di $20^{\underline{2}}$, piglisi il mezo delle $^{\underline{2}}$ ch'è 1 e pongasi nel semicirculo fa $^{\underline{1}}$, poi si pigli il lato di 20, che sarà R.q.20, e questo si ponga al pari a $^{\underline{1}}$, farà R.q.$20^{\underline{1}}$, e perchè qualche volta potrebbe nascere confusione, perchè volendosi pigliare il lato di $6^{\underline{3}}$, se si formasse R.q.$6^{\underline{3}}$ parerebbe che si fusse pigliato il lato di $6^{\underline{6}}$ onde per fuggire tal inconveniente se li tirara li dui $\llcorner\lrcorner$ maiuscoli come alla R.q. legata, che vorrà inferire e dinotare che si habbia da pigliare il lato della dignità et della quantita, et così si formara il lato di $6^{\underline{3}}$: R.q.$\llcorner 6^{\underline{3}} \lrcorner$.

Partire di dignità.

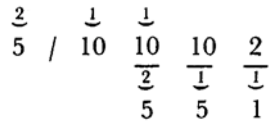
Quando si haverà a partire due dignità e che la dignità del partitore sia eguale over minore, tali dignità fra di loro si potrànno partire, ma se la dignità del partitore sarà maggiore della dignità di quello che va partito, tali due dignità non si potrànno partire se non per via di rotto, overo esimo, come sarebbe se si havesse a partire $16^{\underline{3}}$ per $4^{\underline{1}}$. Cavisi la dignità del partitore della dignità di quello che va partito e restarà $^{\underline{2}}$, e poi partito 16 per 4 ne verrà 4, che posto al pari del semicirculo farà 4 $^{\underline{2}}$. E così se si havesse a partire $2^{\underline{3}}$ per $6^{\underline{1}}$ ne verrà $\frac{1}{3}^{\underline{2}}$ Partasi $8^{\underline{3}}$ per $3^{\underline{3}}$. Cavisi la dignità del partitore della dignità di quello che va partito; resta nulla, et a partire 8 per 3 ne verrà $2\frac{2}{3}$ e sarà numero perchè le dignità erano eguali.

Partasi 20 per $4^{\underline{1}}$, non si potendo cavare il partitore, che è $^{\underline{1}}$, del numero che



non ha segno alcuno di dignità, tal partimento non si piò fare, ma si procede come nelli rotti, e si dirà 20 esimi di $4^{\underline{1}}$, e perchè nella operatione farebbono nascere confusione sarà meglio formarle come si formano i rotti (come si vede nella figura) e dirà 20 esimo di 4 $^{\underline{1}}$, e così si procederà in tutte be simili, **ma non si è potuto fare tal dimostratione con lo scriverle, per rispetto della stampa.**

Partasi $10^{\underline{1}}$ per $5^{\underline{2}}$, formisi il rotto (come si vede nella figura) e perchè questo rotto si può schifare, levisi egualmente tanto al partitore quanto a quello che va partito, che levando l'1 ch'è nel semicirculo, doventara nulla, e levando 1



dalla $^{\underline{2}}$, doventarà $^{\underline{1}}$, e si haverà 10 esimi di $5^{\underline{1}}$, e volendo abbassare i numeri faccisi come nel schifare de'rotti e ne verrà 2 esimi di $1^{\underline{1}}$. E se si haverà a partire qual si voglia quantità di dignitàde per Radice o quadre, o cube, o relate, o legate, partisi il numero della quantità della dignità semplicemente (come si è insegnato nel primo libro), come sarebbe, havendosi a partire $6^{\underline{1}}$ per R.q.3, partasi il 6 per R.q.3, ne viene R.q.$12^{\underline{1}}$, al quale mettendosi il segno delli tanti direr R.c.$12^{\underline{1}}$, e quanto al partire semplicemente questo essempio bastarà.

Sommare di dignità.

Le dignità non si possono sommare (se non son tutte di una spetie) se non per via del più (come si è insegnato nel primo libro nel sommare di numeri con R.q.), come sarebbe se si havesse a sommare $6^{\underline{1}}$ con $8^{\underline{1}}$, essendo simili faranno $14^{\underline{1}}$. Ma se si havesse a sommare $4^{\underline{1}}$ con 10, non si possono sommare, se non dire $4^{\underline{1}} + 10$ overo $10 + 4^{\underline{1}}$, che in questo caso non rilieva qual si mette prima, e quanto al sommare questo essempio bastarà.

Del Sotrare di dignità.

Il medesimo effetto che accade circa nel sommare aviene parimente nel sotrare, cioè che non si possono cavare le quantità dissimili L'una dell'altra se non per via del meno (come per essempio). Havendosi a cavare $3^{\underline{1}}$ di $5^{\underline{1}}$ restaranno $5^{\underline{1}}$, ma havendosi a cavare 3 $^{\underline{1}}$ di 5 $^{\underline{1}}$ non si può dire altrimente che $5^{\underline{2}} - 3^{\underline{1}}$, e se si havesse a cavare 5 $^{\underline{1}}$ di $2^{\underline{1}}$, restaria -$3^{\underline{1}}$, perch'è come a cavare 5 di 2, che resta -3, e quanto al sotrare questo basta. E parmi parimente che basti quanto si è detto intorno a queste quattro quantità semplici circa de'suoi atti. E volendo trattare delli medesimi quattro atti di dignità composte fra di loro, overo con il numero, bisogna havere bene in mente le regole date del + e del −, le quali se bene sono nel primo libro, nondimeno per più rispetti non ho voluto lassare di ponerle anco in questo luogo.

Sommare.

Più e più si aggionge, e fa più.
Meno e meno si aggionge, e fa meno.
Più e meno si cava.
Meno e più si cava.

Sottrarre.

Più di più si cava, e resta più, se quello di sopra e maggiore, ma se è minore resta meno.
Meno di meno si cava, e resta meno, se è maggiore quell di sopra, ma se è minore resta più.
Più di meno si somma, e resta meno.
Meno di più si somma, e resta più.

Moltiplicare.

Più via piu, fa più.
Meno via meno, fa piu.
Pin via meno, fa meno.
Meno via piu., fa meno.
E benchè non si sia dato regola nel primo libro del partire, nondimeno perchè in queste dignità potrebbe accadere però porrò la sua regola.

Partire.

Più per più ne vien più.
Meno per meno ne vien più.
Meno per più ne vien meno.

Più per meno ne vien meno.

Sommare di dignità composte.

Lo sommare di dignità composte non e differente dal sommare del più e meno delli numeri detti nel primo libro, e di numero e R.q.; però ponerò solo li essempij senz'altro commento, parendomi supefluo.

$$
\begin{array}{lcc}
\text{Somma} & \overset{\underset{\smile}{1}}{6} + 4 & \overset{\underset{\smile}{1}}{6} + 4 \\
\text{Con} & \overset{\underset{\smile}{1}}{5} + 6 & \overset{\underset{\smile}{1}}{5} - 3 \\
\hline
\text{Fa} & \overset{\underset{\smile}{1}}{11} + 10 & \overset{\underset{\smile}{1}}{11} + 1
\end{array}
$$

Sotrare di dignità composte.

Lo sotrare di dignità composte non e differente da sotrare di + e – detto nel primo libro, e come si è proceduto nel sommare, così si farà nel sotrare le figure senz'altro comento.

$$
\begin{array}{l}
\overset{\underset{\smile}{1}}{6} + 4 \\
3 - \overset{\underset{\smile}{1}}{2} \\
\hline
\overset{\underset{\smile}{1}}{4} + 7
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
\overset{\underset{\smile}{1}}{6} - 2 \\
\overset{\underset{\smile}{2}}{5} - \overset{\underset{\smile}{1}}{2} \\
\hline
\overset{\underset{\smile}{2}}{5} + 4 - \overset{\underset{\smile}{1}}{2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\overset{\underset{\smile}{1}}{6} + 8 \\
- \overset{\underset{\smile}{1}}{15} \\
\hline
8 - \overset{\underset{\smile}{1}}{9}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
\overset{\underset{\smile}{2}}{12} - \overset{\underset{\smile}{1}}{6} + 4 \\
\overset{\underset{\smile}{2}}{5} + \overset{\underset{\smile}{1}}{9} - 5 \\
\hline
\overset{\underset{\smile}{2}}{17} + \overset{\underset{\smile}{1}}{3} - 1
\end{array}
$$

Moltiplicare di dignità composte.

Moltiplichisi $4^{\underline{1}}$ via $6^{\underline{1}} + 8$, farà $24^{\underline{2}} + 32^{\underline{1}}$ e questo si fa semplicemente moltiplicando $41^{\underline{1}}$ via $6^{\underline{1}}$ fanno $24^{\underline{2}}$ e moltiplicando 8 via $4^{\underline{1}}$ fanno $32^{\underline{1}}$ che aggionti con $24^{\underline{2}}$ fanno $24^{\underline{2}} + 32^{\underline{1}}$, e questo è il produtto.

Moltiplichisi $6^{\underline{1}}$ via $7 - 2^{\underline{1}}$; prima si moltiplica $6^{\underline{1}}$ via 7 fa $42^{\underline{1}}$, e poi si moltiplica $6^{\underline{1}}$ via $- 2^{\underline{1}}$, fa $- 12^{\underline{2}}$ che aggionti con $42^{\underline{1}}$ farà $42^{\underline{1}} - 12\ ^{\underline{2}}$.

Moltiplichisi $6^{\underline{1}} + 2$ via $6^{\underline{1}} + 2$. Pongasi in regola (come si vede) poi si moltiplica +2 di sotto via + 2 di sopra, fa + 4, e questo si pone sotto la prima linea, poi si moltiplica + 2 di sotto via $6^{\underline{1}}$ di sopra, fa $12^{\underline{1}}$, e si pone sotto la linea, poi si moltiplica $6^{\underline{1}}$ di sotto via 2 di sopra, fa + $12^{\underline{1}}$ e questo si pone sotto la linea, poi si moltiplica $6^{\underline{1}}$di sotto via $6^{\underline{1}}$ di sopra, fa $36^{\underline{2}}$ qual si pone sotto la linea, e si haverà $36^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 12^{\underline{1}} + 4$. E perchè + $12^{\underline{1}}$ vie due volte si gionghino insieme e faranno $24^{\underline{1}}$, si che tutta la somma (come si vede sotto la seconda linea) sarà $36^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 4$. E questo sarà il produtto della moltiplicatione.

Moltiplichisi $6^{\underline{1}} + 2$ via $6^{\underline{1}} - 2$. Pongasi in regola, poi si moltiplichi − 2 di

$$\begin{array}{c}
\overset{\smile}{\underset{}{}}\overset{\underline{1}}{6} + 2 \\
\overset{\underline{1}}{6} + 2 \\
\hline
\overset{\underline{2}}{36} + \overset{\underline{1}}{12} + \overset{\underline{1}}{12} + 4 \\
\hline
\overset{\underline{2}}{36} + \overset{\underline{1}}{24} + 4
\end{array}$$

sotto via +2 di sopra, fa − 4 e poi si moltiplichi 2 di sotto via $+6^{\underline{1}}$ di sopra, farà $- 12^{\underline{1}}$, poi si moltiplichi $+6^{\underline{1}}$ di sotto via +2 di sopra, fa $+12^{\underline{1}}$ e poi $6^{\underline{1}}$ di sotto via $6^{\underline{1}}$ di sopra fa $36^{\underline{2}}$ e tutte queste moltiplicationi poste sotto la linea saranno $36^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 12^{\underline{1}} - 4$. E per esserci $+12^{\underline{1}}$ e $- 12^{\underline{1}}$ si levano per le regole date del + et − e restaranno $36^{\underline{2}} - 4$ (come si vede) per produtto della moltiplicatione.

Moltiplichisi $3^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} - 2$ via $4^{\underline{1}} - 2$. Pongasi in regola (come l'altre) poi

$$
\begin{array}{c}
\overset{\underset{\smile}{1}}{6} + 2 \\
\overset{\underset{\smile}{1}}{6} - 2 \\
\hline
\overset{\underset{\smile}{2}}{36} + \overset{\underset{\smile}{1}}{12} - \overset{\underset{\smile}{1}}{12} - 4 \\
\hline
\overset{\underset{\smile}{2}}{36} - 4
\end{array}
$$

si moltiplichi + 2 di sotto via − 2 di sopra, fa − 4 e pongasi sotto la linea; e poi si torni a moltiplicare −2 di sotto via + $4^{\underline{1}}$ di sopra, fa + $8^{\underline{1}}$, e poi si moltiplichi esso 2 di sotto via $3^{\underline{2}}$ di sopra, fa $6^{\underline{2}}$ e pongasi pur sotto la linea, ed è finito di moltiplicare per il + 2 di sotto. Dipoi si moltiplichi $+4^{\underline{1}}$ di sotto via − 2 di sopra, fa − $8^{\underline{1}}$, e poi si torni a moltiplicare $+4^{\underline{1}}$ di sotto via + $4^{\underline{1}}$ di sopra, fanno $+16^{\underline{2}}$, e poi si moltiplichi [esso $4^{\underline{1}}$] per $3^{\underline{2}}$ di sopra, fa $12^{\underline{3}}$ le quali moltiplicationi poste sotto la linea saranno $12^{\underline{3}} + 16^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 6^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} - 4$, che gionti $16^{\underline{2}}$ con $+6^{\underline{2}}$ fanno $22^{\underline{2}}$ et − $8^{\underline{1}}$ con $+8^{\underline{1}}$ fanno nulla, si che il produtto ridutto a brevità sarà (come si vede sotto la seconda linea) $12^{\underline{3}} + 22^{\underline{2}} - 4$.

Moltiplichisi $4^{\underline{2}} - 5^{\underline{1}} + 2$ via $4^{\underline{2}} - 5^{\underline{1}} + 2$. Pongasi in regola (com'e solito)

$$
\begin{array}{c}
\overset{\underset{\smile}{2}}{3} + \overset{\underset{\smile}{1}}{4} - 2 \\
\overset{\underset{\smile}{1}}{4} + 2 \\
\hline
\overset{\underset{\smile}{3}}{12} + \overset{\underset{\smile}{2}}{16} - \overset{\underset{\smile}{1}}{8} + \overset{\underset{\smile}{2}}{6} + \overset{\underset{\smile}{1}}{8} - 4 \\
\hline
\overset{\underset{\smile}{3}}{12} + \overset{\underset{\smile}{2}}{22} - 4
\end{array}
$$

e moltiplichisi + 2 di sotto con 12 di sopra, fa +4, e pongasi sotto la linea, poi tornisi a moltiplicare +2 di sotto via − $5^{\underline{1}}$ di sopra fa − $10^{\underline{1}}$, e dipoi il detto +2 di sotto via $+4^{\underline{1}}$ di sopra fa $8^{\underline{2}}$, che si mette ogni cosa sotto la linea e sarà finita la moltiplicatione del +2 di sotto; poi si cominci a moltiplicare − $5^{\underline{1}}$ di sotto 4 via +2 di sopra farà − $10^{\underline{1}}$, e poi si moltiplichi via − $5^{\underline{1}}$ di sopra, fa + $25^{\underline{2}}$, e poi si moltiplichi via + $4^{\underline{2}}$ di sopra fa − $20^{\underline{3}}$, e tutte queste moltiplicationi si ponghino sotto la linea, e sarà finito di moltiplicare per − $5^{\underline{1}}$ di sotto; poi si cominci a moltiplicare $4^{\underline{2}}$ di sotto via + 2 di sopra, fa + $8^{\underline{2}}$ e pongasi sotto la linea; poi si torni a moltiplicare + $4^{\underline{2}}$ di sotto via − $5^{\underline{1}}$ di sopra, fa − $20^{\underline{3}}$, e poi si moltiplichi via + $4^{\underline{2}}$ di sopra fa + $16^{\underline{4}}$, e pongasi sotto la linea, e sarà finita la moltiplicatione, che sara, come si vede sotto la linea, $16^{\underline{4}} - 20^{\underline{3}} + 8^{\underline{2}} - 20^{\underline{3}} + 25^{\underline{2}} - 10^{\underline{1}} + 8^{\underline{2}} - 10^{\underline{1}} + 4$, che per ridurre questo produtto a brevità poi giongasi − $20^{\underline{3}}$ con − $20^{\underline{3}}$, fa − $40^{\underline{3}}$ e giongasi +$8^{\underline{2}}$ con + $25^{\underline{2}}$ e + $8^{\underline{2}}$ fa + $41^{\underline{2}}$ e − $10^{\underline{1}}$ con − $10^{\underline{1}}$ fa − $20^{\underline{1}}$; si che tutto il produtto sarà $16^{\underline{4}} - 40^{\underline{3}} + 41^{\underline{2}} - 20^{\underline{1}} + 4$, e perchè queste moltiplicationi sono tutte di una essentia e si procede nell'operare con uno istesso ordine, però se ne porranno più essempij senza altro comento, perchè chi bene ne possiede una intende poi similmente tutte l'altre.

E perchè assai volte nelle operationi accade havere a moltiplicare R.q.legate

$$\begin{array}{c} 4^{\underline{2}} - 5^{\underline{1}} + 2 \\ 4^{\underline{2}} - 5^{\underline{1}} + 2 \\ \hline 16^{\underline{4}} - 20^{\underline{3}} + 8^{\underline{2}} - 20^{\underline{3}} + 25^{\underline{2}} - 10^{\underline{1}} + 8^{\underline{2}} - 10^{\underline{1}} + 4 \\ \hline 16^{\underline{4}} - 40^{\underline{3}} + 41^{\underline{2}} - 20^{\underline{1}} + 4 \end{array}$$

composte di dignità via se stesse o via altre dignità, però se ne porranno più essempij di queste ancora.

Moltiplichisi R.q.$\llcorner 4^{\underline{1}} - 6 \lrcorner$ via $3^{\underline{1}}$; levisi la R.q. legata col quadrare tutte due le parti e si haverà $4^{\underline{1}} - 6$ e $9^{\underline{2}}$. Hora moltiplichisi $4^{\underline{1}} - 6$ via $9^{\underline{2}}$, farà. $36^{\underline{3}} - 54^{\underline{2}}$ e di questo se ne piglia la R.q. legata (come era prima) e dirà R.q.$\llcorner 36^{\underline{3}} - 54^{\underline{2}} \lrcorner$ e questo è il produtto.

Moltiplichisi $2 + 1^{\underline{1}}$ via R.q.$\llcorner 16 + 2^{\underline{1}} \lrcorner$. Se si quadreranno tutte due le parti si haverà $16 + 2^{\underline{1}}$ e $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$, che moltiplicato l'uno via l'altro fa $2^{\underline{3}}$ + $24^{\underline{2}} + 72^{\underline{1}} + 64$ e di questo produtto pigliatone la R.q. legata sarà R.q.$\llcorner 2^{\underline{3}}$

$+\ 24^{\underline{2}} + 72^{\underline{1}} + 64\lrcorner$ e questo è il produtto della moltiplicatione.

Moltiplichisi $2^{\underline{1}} + 2$ via $2^{\underline{1}} + 2 -$ R.q.$\llcorner 16 - 4^{\underline{1}}\lrcorner$. Prima quadrisi $2^{\underline{1}} + 2$, fa $4^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 4$, che moltiplicato via R.q.$\llcorner 16 - 4\underline{1}\lrcorner$ e poi toltone la R.q. legata fa R.q.$\llcorner 32^{\underline{2}} + 112^{\underline{1}} + 64 - 16\underline{3}\lrcorner$ perchè la R.q. legata era $-$, poi si moltiplichi $2^{\underline{1}} + 2$ via $2^{\underline{1}} + 2$, fa $4^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 4$, che gionto con l'altra moltiplicatione fa $4^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 4 -$ R.q.$\llcorner 32^{\underline{2}} + 112^{\underline{1}} + 64 - 16\underline{3}\lrcorner$ e questo è il produtto della moltiplicatione.

Moltiplichisi $2 + 1^{\underline{1}} +$ R.q.$\llcorner 20 - 6^{\underline{1}} + 1\underline{2}\lrcorner$ via $2 + 1^{\underline{1}} +$ R.q.$\llcorner 20 - 6^{\underline{1}} + 1\underline{2}\lrcorner$: pongasi in regola (come si vede nella figura) poi si moltiplichi R.q.$\llcorner 20 - 6^{\underline{1}} + 1\underline{2}\lrcorner$ di sotto via R.q.$\llcorner 20 - 6^{\underline{1}} + 1\underline{2}\lrcorner$ di sopra, fa $20 - 6^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$ e questo si pone sotto la linea, poi si moltiplica R.q.$\llcorner\ 20 - 6^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}\lrcorner$ di sotto via $2 + 1^{\underline{1}}$ di sopra (come si a insegnato), farà R.q.$\llcorner\ 1^{\underline{4}} - 2^{\underline{3}} + 56^{\underline{1}} + 80\lrcorner$, ed è finito di moltiplicare per R.q.$\llcorner 20 - 6^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}\lrcorner$ di sotto; poi si moltiplichi $2 + 1^{\underline{1}}$ di sotto via R.q.$\llcorner 20 - 6^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}\lrcorner$ di sopra, farà R.q.$\llcorner\ 1^{\underline{4}} - 2^{\underline{3}} + 56^{\underline{1}} + 80\lrcorner$, pongasi sotto la linea; poi si moltiplica $2 + 1^{\underline{1}}$ di sotto via $2 + 1^{\underline{1}}$ di sopra, fa $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$ e pongasi sotto la linea, e si haverà per tutto il produtto $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4 +$ R.q.$\llcorner 1^{\underline{4}} - 2^{\underline{3}} + 56^{\underline{1}} + 80\lrcorner +$ R.q.$\llcorner 1^{\underline{4}} - 2^{\underline{3}} + 56^{\underline{1}} + 80\lrcorner + 20 - 6^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$. Aggiongasi $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$ con $20 - 6^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$ fa $2^{\underline{2}} + 24 - 2^{\underline{1}}$; poi aggiongansi insieme le due R.q. legate, ch'essendo eguali si moltiplicano per 2, che ridutto il 2 a R.q. è R.q.4 e la moltiplicatione sarà R.q.$\llcorner 4^{\underline{4}} - 8^{\underline{3}} + 224^{\underline{1}} + 320\lrcorner$ che gionto con $2^{\underline{2}} + 24 - 2^{\underline{1}}$ fa $2^{\underline{2}} + 24 - 2^{\underline{1}} +$ R.q.$\llcorner 4^{\underline{4}} - 8^{\underline{3}} + 224^{\underline{1}} + 320\lrcorner$ e questo è il produtto della moltiplicatione ridutto a brevità (come si vede nella figura) e chi intenderà bene questi essempij di queste R.q. legate, potra maneggiare tutte l'altre. Che quanto alla moltiplicatione de' sani non dire altro, ma verre a quella de'rotti con sani.

Moltiplicare de' sani via rotti

Moltiplichisi $3^{\underline{1}} + 2$ via 10 esimo d'$1^{\underline{1}}$. Faccisi come nel moltiplicare de' sani via sani e rotti semplicemente. Pongasi in regola (come si vede nella

Moltiplichisi

$$2 + \overset{\underset{\smile}{1}}{5} - \overset{\underset{\smile}{2}}{4}$$

$$2 + \overset{\underset{\smile}{1}}{5} - \overset{\underset{\smile}{2}}{4}$$

Più	Meno
4	$8\,\underset{\smile}{2}$
$10\,\underset{\smile}{1}$	$20\,\underset{\smile}{3}$
$10\,\underset{\smile}{1}$	$8\,\underset{\smile}{2}$
$25\,\underset{\smile}{2}$	$20\,\underset{\smile}{3}$
$16\,\underset{\smile}{4}$	

$$16\,\underset{\smile}{4} + 9\,\underset{\smile}{2} + 20\,\underset{\smile}{1} + 4 - 40\,\underset{\smile}{3}$$

È il produtto ridutto a brevità

Moltiplichisi

$$\overset{\underset{\smile}{2}}{1} - \overset{\underset{\smile}{1}}{2} - 3$$

$$\overset{\underset{\smile}{2}}{1} - \overset{\underset{\smile}{1}}{2} - 3$$

Più	Meno
$1\,\underset{\smile}{4}$	$2\,\underset{\smile}{3}$
$4\,\underset{\smile}{2}$	$3\,\underset{\smile}{2}$
$6\,\underset{\smile}{1}$	$2\,\underset{\smile}{3}$
$6\,\underset{\smile}{1}$	$3\,\underset{\smile}{2}$
9	

$$1\,\underset{\smile}{4} + 12\,\underset{\smile}{1} + 9 - 4\,\underset{\smile}{3} - 2\,\underset{\smile}{2}$$

È il produtto.

Moltiplichisi

$$3 - \overset{\underset{\smile}{2}}{1} - \overset{\underset{\smile}{1}}{2}$$

$$3 - \overset{\underset{\smile}{2}}{1} - \overset{\underset{\smile}{1}}{2}$$

Più	Meno
9	$3\,\underset{\smile}{2}$
$1\,\underset{\smile}{4}$	$6\,\underset{\smile}{1}$
$2\,\underset{\smile}{3}$	$3\,\underset{\smile}{2}$
$2\,\underset{\smile}{3}$	$6\,\underset{\smile}{1}$
$4\,\underset{\smile}{2}$	

$$\overset{\underset{\smile}{4}}{1} + \overset{\underset{\smile}{3}}{4} + 9 - \overset{\underset{\smile}{2}}{2} - \overset{\underset{\smile}{1}}{12}$$

È il produtto.

Moltiplichisi

$$\overset{\underset{\smile}{1}}{1} + \overset{\underset{\smile}{2}}{4} - 3$$

$$\overset{\underset{\smile}{1}}{2} + \overset{\underset{\smile}{4}}{8} - 5$$

Più	Meno
$2\,\underset{\smile}{4}$	$6\,\underset{\smile}{1}$
$8\,\underset{\smile}{3}$	$24\,\underset{\smile}{4}$
$8\,\underset{\smile}{7}$	$5\,\underset{\smile}{3}$
$32\,\underset{\smile}{6}$	$20\,\underset{\smile}{2}$
15	

$$\overset{\underset{\smile}{7}}{8} + \overset{\underset{\smile}{6}}{32} - \overset{\underset{\smile}{4}}{22} + \overset{\underset{\smile}{3}}{3} - \overset{\underset{\smile}{2}}{20} - \overset{\underset{\smile}{1}}{6} + 15$$

figura) e sotto a $3^{\underline{1}} + 2$ pongasi 1, che così si suol fare nel moltiplicare de' sani via sani e rotti, e dall'altra parte si metta 10 esimo d'$1^{\underline{1}}$; poi moltiplichisi $3^{\underline{1}} + 2$ via 10 fa $30^{\underline{1}} + 20$, e queste si hanno da partire per la moltiplicatione di 1 via $^{\underline{1}}$, che fa $1^{\underline{1}}$, e perchè non si può partire (come si a detto di sopra) se gli pone sotto e dirà $30^{\underline{1}} + 20$ esimi d'$1^{\underline{1}}$ e questo è il produtto.

Moltiplichisi $2^{\underline{1}} + 2$ via $2^{\underline{1}} - 2$, esimi di $2^{\underline{1}}$. Pongasi in regola (come si vede)

$$\frac{\overset{\underset{\smile}{1}}{3}+2}{1} \qquad \frac{10}{\overset{\underset{\smile}{1}}{1}}$$

$$\frac{\overset{\underset{\smile}{1}}{30}+20}{\overset{\underset{\smile}{1}}{1}}$$

poi moltiplichisi quello di sopra via quello di sopra fa $4^{\underline{2}} - 4$ al quale si tiri sotto la linea, e poi moltiplichisi quello di sotto via quello di sotto, fa $2^{\underline{1}}$, che si pone sotto la linea, e formarà il rotto (come si vede) che sarà $4^{\underline{2}} - 4$, esimi di $2^{\underline{1}}$.

$$\frac{\overset{\underset{\smile}{1}}{2}+2}{1} \qquad \frac{\overset{\underset{\smile}{1}}{2}-2}{\overset{\underset{\smile}{1}}{2}}$$

$$\frac{\overset{\underset{\smile}{2}}{4}-4}{\overset{\underset{\smile}{1}}{2}}$$

Moltiplicare de' rotti via rotti.

Moltiplichisi $2^{\underline{1}} + 4$, esimi di $1^{\underline{1}}$ via $3^{\underline{1}}$ esimi di $2^{\underline{1}} + 1$. Pongasi in regola (come si vede) e poi moltiplichisi $2^{\underline{1}} + 4$ di sopra via 31 di sopra, fa $6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}}$ ed a questo si tiri sotto una linea; poi si moltiplichi $1^{\underline{1}}$ di sotto via $2^{\underline{1}} + 1$ pur di sotto, fa $2^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$, e questo è il partitore, il qual si pone sotto la linea, e questo rotto dirà $6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}}$, esimi di $2^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$, il qual rotto si può abbassare (si come si a detto nella prima parte del partire) quale abbassamento chiamaro schifare di dignita, il qual si fa in questo modo. Vedasi qual a minore dignità di tutte le dignità, tanto di sopra la linea quanto di sotto, ch'è il Tanto. Però lievisi uno egualmente a tutte le dignità, che levato a $6^{\underline{2}}$ dirà $6^{\underline{1}}$ e levato a $12^{\underline{1}}$ dirà 12, qual si pongono sopra una linea, e diranno $6^{\underline{1}} + 12$, poi si lieva $^{\underline{1}}$ a $2^{\underline{2}}$ di sotto, restarà $2^{\underline{1}}$, e poi si lievarà $^{\underline{1}}$ a $1^{\underline{1}}$ di sotto, dirà 1, li quali posti sotto la linea diranno $2^{\underline{1}} + 1$, e tutto il rotto dirà $6^{\underline{1}} + 12$, esimi di $2^{\underline{1}} + 1$ e questo è tanto quanto rotto prima che fusse schifato.

Moltiplichisi $2^{\underline{1}} + 4^{\underline{2}} - 1$, esimi di $2^{\underline{1}} + 3$ via $2^{\underline{1}} + 4^{\underline{2}} - 1$, esimi di $2^{\underline{1}} + 3$.

$$\frac{2^{\underline{1}} + 4}{1^{\underline{1}}} \qquad \frac{3^{\underline{1}}}{2^{\underline{1}} + 1}$$

$$\frac{6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}}}{2^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}} \qquad \frac{6^{\underline{1}} + 12}{2^{\underline{1}} + 1}$$

Pongasi in regola (come si vedc) poi si moltiplichi $2^{\underline{1}} + 4^{\underline{2}} - 1$ di sopra via $2^{\underline{1}} + 4^{\underline{2}} - 1$, fa $16^{\underline{4}} + 16^{\underline{3}} - 4^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 1$ e questo si ponga sopra la linea, poi si moltiplichi $2^{\underline{1}} + 3$ di sotto via $2^{\underline{1}} + 3$ pur di sotto, fa $4^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 9$ e questo si pone sotto la linea e dirà $16^{\underline{4}} + 16^{\underline{3}} - 4^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 1$, esimi di $4^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 9$ e questo è il produtto.

$$\frac{2^{\underline{1}} + 4^{\underline{2}} - 1}{2^{\underline{1}} + 3} \qquad \frac{2^{\underline{1}} + 4^{\underline{2}} - 1}{2^{\underline{1}} + 3}$$

$$\frac{16^{\underline{4}} + 16^{\underline{3}} - 4^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 1}{4^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 9}$$

Moltiplicaare de'sani e rotti via rotti.

Moltiplichisi 4 e 4 esimo d'$1^{\underline{1}}$ via $3^{\underline{1}} + 2$, esimi d'$1^{\underline{1}} + 1$. Riduchisi 4 e 4 esimi d'$1^{\underline{1}}$ tutto a rotto, moltiplicando l'esimo, cioè Il$^{\underline{1}}$, via 4 fa $4^{\underline{1}}$, che gionto ton 4 esimo di $1^{\underline{1}}$, fa $4^{\underline{1}}$ + 4, esimi d'$1^{\underline{1}}$ e questo sarà tutto rotto, il qual si moltiplica via $3^{\underline{1}}$ + 2, esimi d'$1^{\underline{1}}$ + 1 (come si è insegnato) fa $12^{\underline{2}}$ + $20^{\underline{1}}$ + 8, esimi d'$1^{\underline{2}}$ + $1^{\underline{1}}$, e qucsto è il produtto.

$$4\,\frac{4}{1^{\underline{1}}} \qquad \frac{4^{\underline{1}}+4}{1^{\underline{1}}} \qquad \frac{3^{\underline{1}}+2}{1^{\underline{1}}+1} \qquad \frac{12^{\underline{2}}+20^{\underline{1}}+8}{1^{\underline{2}}+1^{\underline{1}}}$$

Moltiplicere de' sani e rotti via sani e rotti.

Moltiplichisi $3^{\underline{1}}$ e $5^{\underline{1}}$ esimi di $2^{\underline{1}}$ + 1 via $4^{\underline{1}}$ e 8 esimo di $3^{\underline{1}}$ + 4; riduchinsi le due quantità a rotto (come si vedc nella figura) e poi si moltiplichi l'uno via l'altro (come si è insegnato) che si haverà per produtto $72^{\underline{4}}$ + $192^{\underline{3}}$ + $176^{\underline{2}}$ + $64^{\underline{1}}$, esimi di $6^{\underline{2}}$ + $11^{\underline{1}}$ + 4. E perchè questi essempij di sani con rotti, e di sani e rotti con sani, e di sani e rotti con sani e rotti, non possono accadere a maneggiarli in altro modo, a me pare che bastino, però verrò al partire.

$$3^{\underline{1}}+\frac{5^{\underline{1}}}{2^{\underline{1}}+1} \qquad\qquad 4^{\underline{1}}+\frac{8}{3^{\underline{1}}+4}$$

$$\frac{6^{\underline{2}}+8^{\underline{1}}}{2^{\underline{1}}+1} \qquad\qquad \frac{12^{\underline{2}}+16^{\underline{1}}+8}{3^{\underline{1}}+4}$$

$$\frac{72^{\underline{4}}+192^{\underline{3}}+176^{\underline{2}}+64^{\underline{1}}}{6^{\underline{2}}+11^{\underline{1}}+4}$$

Partire di dignità composte.

Il partire di dignità composte rarissime volte si può fare sc non per via di esimi e nell'agguagliare 6 di grandissimo utile a. saper ben partire, pcrchi leva di grandissimo fastidio nell'operare (come si mostrara al suo luogo) però

$$
\begin{array}{lll}
2^{\underline{1}} + 1 & / & 6^{\underline{2}} + 13^{\underline{1}} + 5 \\
 & & 3^{\underline{1}} + 5 \\
\hline
 & & 6^{\underline{2}} \quad a \\
 & & 6^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} \\
\hline
 & & -3^{\underline{1}} \quad b \\
 & & +13^{\underline{1}} \\
\hline
 & & +10^{\underline{1}} \quad c \\
 & & 10^{\underline{1}} + 5 \\
\hline
 & & -5 \quad d \\
 & & +5 \\
\hline
 & & 0 \quad e
\end{array}
$$

e necessario di haver la debita avertenza, essendo di molta importanza.

Partasi $6^{\underline{1}} + 8$ per $2^{\underline{1}} + 1$. Qucsto partire non si può fare se non per via di esimo, formando il rotto che dica $6^{\underline{1}} + 8$, esimo di $2^{\underline{1}} + 1$. Ma se si dicesse partasi $6^{\underline{1}} + 8$ per $3^{\underline{1}} + 4$, chiara cosa è che $6^{\underline{1}}$ sono in proportione dupla con $3^{\underline{1}}$ e così 8 è in proportione dupla con 4, e la proportione delli $^{\underline{1}}$ alli $^{\underline{1}}$ e come la proportione del numero al numero (cone fu detto net partire semplicemente) e così la proportione di numero a numero e net medesimo ordine come di numero a numero, si che a fare tal partimento nc vien 2, che la prova è moltiplicare il partitore via l'avenimento e vedere se fa quello che fu partito: però moltiplichisi $3^{\underline{1}} + 4$ per 2 numero, fa $6^{\underline{1}} + 8$, che per essere $6^{\underline{1}} + 8$ la quantità che fu partita, si dirà 2 essere il vero avenimento.

Partasi $8^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ per $4^{\underline{1}} + 1$. La proportione ch'è da $4^{\underline{1}}$ a $8^{\underline{2}}$ è come quella ch'è da 1 a $2^{\underline{1}}$ cioè $2^{\underline{1}}$; però di questo partimento ne verrà $2^{\underline{1}}$, che moltiplicati $2^{\underline{1}}$ avenimento via $4^{\underline{1}} + 1$ partitore fa $8^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$, guantità che fu partita.

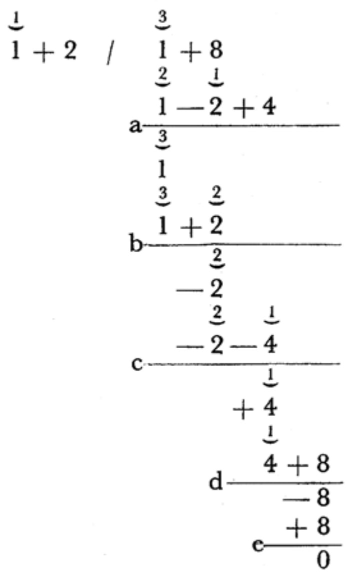
Partasi $6^{\underline{2}} + 13^{\underline{1}} + 5$ per $2^{\underline{1}} + 1$. Questo partimento, per essere di tre nomi quello che va partito, non può havere proportione semplice (come hanno havuto li due essempij passati) però si terrà il modoche che si tiene nel partire a danda. Pongasi il partitore (come si vede) e quello che va partito, poi se li tiri sotto la linea .a. alquanto lontana, e sotto essa si ponghino le $6^{\underline{2}}$, ch'è la maggior dignità che va partita, poi si veda quante volte entrano $2^{\underline{1}}$ partitore in 6 che vi entrarà $3^{\underline{1}}$, il quale si moltiplica per $2^{\underline{1}} + 1$ fa $6^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}}$ e questo produtto si pone sotto le $6^{\underline{2}}$ poste sotto la linea .a. e si cavano, che restano $-\ 3^{\underline{1}}$, il quale si pone sotto la linea .b., poi si pigliano li $13^{\underline{1}}$ e si aggiongano a essi $-\ 3^{\underline{1}}$, che fanno $+10^{\underline{1}}$. Hor veggiasi quante volte $2^{\underline{1}}$ del partitore entrano in $10^{\underline{1}}$, che vi entraranno 5, che moltiplicato per $2^{\underline{1}} + 1$ fa $10^{\underline{1}} + 5$ e questo si cava di $10^{\underline{1}}$, chc resta $-\ 5$, e questo si pone sotto la linea .d., poi si aggionge il $+\ 5$ che va partito, can $-\ 5$ fa zero (come si vede sotto la linea .e.) et il partire e finito, e l'avenimento è stato $3^{\underline{1}} + 5$ (come si vede nella figura sopra la linea .a.) avertendosi che quando si è all'ultimo del partire, se non restasse zero, o vi fusse di meno o di piùqualche cosa, tal partimento non si potrebbe fare se non per via d'esimi. E a partire $6^{\underline{2}} + 13^{\underline{1}} + 5$ per $2^{\underline{1}} + 1$ ne viene $3^{\underline{1}} + 5$, che moltiplicato via $2^{\underline{1}} + 1$ partitore, il produtto sarà $6^{\underline{2}} + 13^{\underline{1}} + 5$, che fu partito.

Partasi $9^{\underline{2}} - 4$ per $3^{\underline{1}} + 2$. Pongasi in regola (come si è detto) poi pongansi

$$\begin{array}{llll}
\overset{1}{3}+2 & / & & \overset{2}{9}-4 \\
 & & & \overset{1}{3}-2 \\
\cline{4-4}
 & & \mathrm{a} & \overset{2}{9} \\
 & & & \overset{2}{9}+\overset{1}{6} \\
\cline{4-4}
 & & \mathrm{b} & \quad -\overset{1}{6} \\
 & & & \quad +\overset{1}{6}-4 \\
\cline{4-4}
 & & \mathrm{c} & \qquad +4 \\
 & & & \qquad -4 \\
\cline{4-4}
 & & & \qquad\ \ 0
\end{array}$$

$9^{\underline{2}}$ sotto la linea .a. e vedasi quante volte entra $3^{\underline{1}}$ partitore in $9^{\underline{2}}$, che vi entrara $3^{\underline{1}}$, e si pone sopra la linea .a.; poi si moltiplicano li $3^{\underline{1}}$ che entrano via $3^{\underline{1}} + 2$ partitore, fa $9^{\underline{2}} + 6^{\ \underline{1}}$, i quali si pongono sotto le $9^{\underline{2}}$. che Sono sotto la linea .a. a si cavano di essi $9^{\underline{2}}$ di sopra, resta $-\ 6^{\underline{1}}$, che si pongono sotto in linea .h. Hor vedasi (senza mettere giù altro, perchè questi $-\ 6^{\underline{1}}$ eccedono in dignità il $-$ 4, ch'è con $9^{\underline{2}}$ da partirsi, i quali $-\ 6^{\underline{1}}$ bisogna dissolvere) quante volte $3^{\underline{1}}$ partitore entra in $-\ 6^{\underline{1}}$, che vi entra $-$ 2, il quale si pone sopra la linea .a. (come si vede) poi si moltiplica $-$ 2 via $3^{\underline{1}} + 2$ partitore fa $-\ 6^{\underline{1}} -$ 4, e questo si pone sotto li $-\ 6^{\underline{1}}$ posti sotto la linea .b. e si cava: resta + 4, poi se gli aggionge il $-$ 4 ch'è posto con le $9^{\underline{2}}$ che furono partite e fa zero; e il partire è finito e l'avenimento è $3^{\underline{1}} - 2$ (come si vede sopra la linea .a.) et a moltiplicare $3^{\underline{1}} + 2$ partitore Per $3^{\underline{1}} - 2$ avenimento fa $9^{\underline{2}} - 4$ (come si vuole).

Partasi $1^{\underline{3}} + 8$ per $1^{\underline{1}} + 2$. Questo è facilissimo a vedere se si può partire



senza affaticarsi in vano. Però se il nurnero ch'è accompagnato con il Tanto sarà il lato cubico del numero ch'è accompagnato col cubo e che le cose siano pur il lato cubico del cubo, tal partire si potrà fare, come sarebbe se si dicesse partasi $27^{\underline{3}} + 8$ per $3^{\underline{1}} + 2$ che si vede che il 2 è il lato cubico di 8 e $3^{\underline{1}}$ sono il lato cubico di $27^{\underline{3}}$ sì che tal partimento si potrebbe fare; ma se dicesse $27^{\underline{3}} +$ 10 per $3^{\underline{1}} + 2$, perchè 2 non è lato cubico di 10 tal partimento non si potrà fare se bene le $3^{\underline{1}}$ sono il lato cubico di $27^{\underline{3}}$, e così se dicesse $24^{\underline{3}} + 8$ per $3^{\underline{1}}$

$+\ 2$ meno questo partimento si potrebbe fare, se bene 2 è lato cubico di 8, perchè $3^{\underline{1}}$ non sono il lato cubico di $24^{\underline{3}}$. Però ritornando al primo quesito, ch'è a partire $l^{\underline{3}} + 8$ per $1^{\underline{1}} + 2$, prima mostrarò il modo del partirlo a danda, come si è fatto nelli essempij passati, e poi mostrarò come si ha da procedere per brevità e questo è un passo importantissimo per lo agguagliare di cubo, tanti e numero (come si vedrà, che assai volte non si possono agguagliare se non col più di meno senza questa regola). Pongasi da banda $1^{\underline{1}} + 2$ et $l^{\underline{3}} + 8$ (come fu detto nelli quesiti passati) poi tirisi la linea .a. e sotto ad essa si ponga $1^{\underline{3}}$. Hor vedasi $1^{\underline{1}}$ partitore quanto entra in un cubo, che vi entra $1^{\underline{2}}$, e questo si pone sopra la linea .a., poi si moltiplica $1^{\underline{2}}$ via $1^{\underline{1}} + 2$ partitore, fa $1^{\underline{3}} + 2^{\underline{2}}$ e questo si cava d'$1^{\underline{3}}$ ch'è sotto la linea .a., resta $-\ 2^{\underline{2}}$ che sono posti sotto la linea .b., poi vedasi $1^{\underline{1}}$ partitore quanto entra in $-\ 2^{\underline{2}}$, che vi entra $-\ 2^{\underline{1}}$, e questo si pone sopra la linea .a., poi si moltiplica detto $-\ 2^{\underline{1}}$ via $1^{\underline{1}} + 2$ partitore, fa $-\ 2^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}}$ e questo si cava di $-\ 2^{\underline{2}}$, resta $+4^{\underline{1}}$ (come si vede sotto la linea .c.) poi si veda quanto vi entra $1^{\underline{1}}$ partitore in $4^{\underline{1}}$, che sono sotto la linea .c. che vi entra 4 e questo si 'pone sopra la linea .a., poi si moltiplica detto 4 via $1^{\underline{1}} + 2$ partitore, fa $4^{\underline{1}} + 8$, che cavato di $4^{\underline{1}}$ che sono sotto la linea .c. resta $-\ 8$ e perchè non ci sono più dignità tolgasi giù il $+\ 8$ ch'è col cubo che si è partito e giongasi col $-\ 8$ posto sotto la linea .d. resta zero, et il partimento è finito e l'avenimento sarà quello ch'è posto sopra la linea .a. ch'è $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 4$ che moltiplicato per $1^{\underline{1}} + 2$ partitore fa $1^{\underline{3}} + 8$. Ma quando si volesse ridurre partimento a brevità (come di sopra ho detto) vedasi prima se hanno quelle qualità che ho detto nel principio, cioè che li tanti siano il lato de i cubi e il numero sia il lato cubico del numero; poi si quadri ciascuna delle parti del partitore da sè, cioè $1^{\underline{1}}$ e 2, faranno $1^{\underline{2}}$ e 4, e questi sempre saranno più, che gionti insieme fanno $1^{\underline{2}} + 4$; poi si moltiplica $1^{\underline{1}}$ via 2 fa $2^{\underline{1}}$ e perchè $1^{\underline{1}}$ e 2 sono ambidui + et a moltiplicare l'una via l'altra fanno +, se gli fa cangiar natura e dirà meno, et se uno fusse − e l'altro + che farebbe − si dirà + (come fu insegnato nel partire per un Binomio et un Trinomio Cubo) sì che gionte $-\ 2^{\underline{1}}$ con $1^{\underline{2}} + 4$ fa $1^{\underline{2}} + 4 - 2^{\underline{1}}$ e questo è l'avenimento a partire $1^{\underline{3}} + 8$ per $1^{\underline{1}} + 2$ senza fare altra danda.

Partasi $1^{\underline{3}} - 27$ per $1^{\underline{1}} - 3$. Se il partitore dicesse $1^{\underline{1}} + 3$ tal partimento non si potrebbe fare perchè bisogna che il numero ch'è con li Cubi sia della medesima natura del numero ch'è con li Tanti (cioè se quello ch'è con li cubi è + sia anca + quello ch'è con li Tanti, e se il numero ch'è con li Tanti è meno quello ch'è col cubo bisogna che sia meno); ma per tornare al partimento detto vedasi se il numero ch'è Con li Tanti è il lato cubico del numero ch'è con li Cubi, e se li Tanti Sono il lato del cubo cubando ciascuna da sè, e questi proposti hanno tal proportione. Però quadrisi $1^{\underline{1}}$ fa $1^{\underline{2}}$ e 3 fa 9, che gionti insieme fa $1^{\underline{2}} + 9$, poi si moltiplica $1^{\underline{1}}$ via $- 3$ fa $- 3^{\underline{1}}$, alle quali si fa cangiar natura e saranno $+ 3^{\underline{1}}$, che gionte con $1^{\underline{2}} + 9$ fa $1^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} + 9$ e questa è l'avenimento a partire $1^{\underline{3}} - 27$ per $1^{\underline{1}} - 3$, e quanto a questo partire questi essempij sono sufficientissimi al partire d'ogni quantità col saperli applicare dove bisognarà. Hor si verrà al partire de'rotti per sani.

Del partire delle Dignità rotte per sane.

Partasi $3^{\underline{1}} + 8$, esimi d'$1^{\underline{1}} + 1$ per $2^{\underline{1}} + 4$. Pongasi in regola (come si fa nel partir de'rotti) ponendo il partitore a man sinistra e ponendoli sotto 1 (come si vede); poi si moltiplica 1 in croce via $3^{\underline{1}} + 8$, fa $3^{\underline{1}} + 8$, il qual si pone sopra la linea .b., poi si moltiplica $2^{\underline{1}} + 4$ via $1^{\underline{1}} + 1$, fa $2^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 4$, il qual si ponga sotto la linea .b., e così si formarà il rotto, che dirà $3^{\underline{1}} + 8$ esimi di $2^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 4$ e sarà l'avenimento di detto partire.

Partasi $6^{\underline{1}} + 2$, esimo di $2^{\underline{2}} + 5^{\underline{1}}$ per $3^{\underline{1}} - 1$. Facciasi com'è detto ponendo

$$\frac{2^{\underline{1}} + 4}{1} \qquad \frac{3^{\underline{1}} + 8}{1^{\underline{1}} + 1}$$

$$\frac{3^{\underline{1}} + 8}{2^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 4}\,\text{b}$$

in regola'le dignità (come si vede) poi si moltiplichi 1 ch'è sotto la linea .b.

via $6^{\underline{1}} + 2$ ch'è sopra la linea .c., farà $6^{\underline{1}} + 2$, qual si ponga sopra la linea .d., poi si moltiplichi $2^{\underline{2}} + 5^{\underline{1}}$, ch'è sotto la linea .c., via $3^{\underline{1}} - 1$, ch'è sopra la linea .b., fa $6^{\underline{3}} + 13^{\underline{2}} - 5^{\underline{1}}$, il quale si ponga sotto la linea .d., e così sarà formato il rotto che sarà l'avenimento di tal partire.

$$\frac{3^{\underline{1}} - 1}{1}\,\mathrm{b} \qquad\qquad \frac{6^{\underline{1}} + 2}{2^{\underline{2}} + 5^{\underline{1}}}\,\mathrm{c}$$

$$\mathrm{d}\,\frac{6^{\underline{1}} + 2}{6^{\underline{3}} + 13^{\underline{3}} - 5^{\underline{1}}}$$

Partire de'sani per Rotti.

Partasi $3^{\underline{1}} - 2^{\underline{2}}$ per $4^{\underline{2}} + 5^{\underline{1}}$, esimo di $3^{\underline{1}} + 2$. Pongasi in regola (come si vede qui sotto) ponendo sempre il partitore a man sinistra (ancora che sia il rotto) poi si opera come nelli soprascritti essempij e così si haverà l'avenimento, che parimente sarà rotto (come si vede sopra e sotto la linea .a.).

$$\frac{4^{\underline{2}} + 5^{\underline{1}}}{3^{\underline{1}} + 2} \qquad\qquad \frac{3^{\underline{1}} - 2^{\underline{2}}}{1}$$

$$\mathrm{a}\,\frac{5^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} - 6^{\underline{3}}}{4^{\underline{2}} + 5^{\underline{1}}}$$

Partire Rotti per Rotti.

Partasi $2^{\underline{1}} + 2$, esimi d'$1^{\underline{1}} - 5$ per $5^{\underline{2}} - 2$, esimi di $3^{\underline{1}} - 2$. Pongasi in regola come le passate, ponendo il partitore a man sinistra, e prima si moltiplicano $3^{\underline{1}} - 2$ sotto la linea .a. con $2^{\underline{1}} + 2$ sopra la linea .b., che fanno $6^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} - 4$, e si pongono sopra la linea .c. poi si moltiplica $5^{\underline{2}} - 2$ sopra la linea .a. con $1^{\underline{1}} - 5$ ch'è sotto la linea .b., che fanno $5^{\underline{3}} - 25^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 10$, e questo produtto si pone sotto la linea .c. e si forma il rotto, ch'è $6^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} -$ b4 esimi di $5^{\underline{3}} - 2^{\underline{1}} - 25^{\underline{2}} + 10$, il qual è l'avenimento del partire proposto.

$$\text{a}\,\frac{5^{\underline{2}} - 2}{3^{\underline{1}} - 2} \qquad \frac{2^{\underline{1}} + 2}{1^{\underline{1}} - 5}\,\text{b}$$

$$\text{c}\,\frac{6^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} - 4}{5^{\underline{3}} - 2^{\underline{1}} - 25^{\underline{2}} + 10}$$

Partire de'sani, e rotti per sani.

Partasi $6^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} - 2$ esimi d'$1^{\underline{1}} - 1$, + 8, per $3^{\underline{1}} + 1$. Riduchisi l'8 a rotto (come si è insegnato al suo luogo) farà l$4^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} - 10$ esimi di $1^{\underline{2}} - 1$, poi si moltiplichi come si è fatto nelli altri e si haverà tutto l'avenimento (come si vede qui sopra, sopra e sotto la linea .c.).

$$\frac{3^{\underline{1}} + 1}{1} \qquad \frac{14^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} - 10}{1^{\underline{2}} - 1}$$

$$\frac{14^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} - 10}{3^{\underline{3}} + 1^{\underline{2}} - 3^{\underline{1}} - 1}\,\text{c}$$

Partire sani per sani e rotti.

Partasi $4 + 2^{\underline{1}}$ per 5 e $1^{\underline{2}} - 3^{\underline{1}}$, esimi d'$1^{\underline{1}} + 3$. Riduchisi il sano e rotto tutto a rotto, poi pongasi in regola (come la passata) e l'avenimento sarà (come si vede) $2^{\underline{2}} + 10^{\underline{1}} + 12$ esimi d'$1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 15$.

Partasi $4 + 2^{\underline{1}}$ per 5 e $- 1^{\underline{2}} - 3^{\underline{1}}$, esimi d'$1^{\underline{1}} + 3$. Riduchisi il numero sano a rotto col moltiplicare $1^{\underline{1}} + 3$ via 5, fa $5^{\underline{1}} + 15$ e di questo si cava il

$$\frac{\overset{\underset{\smile}{2}}{1} + \overset{\underset{\smile}{1}}{2} + 15}{\overset{\underset{\smile}{1}}{1} + 3} \qquad \frac{4 + \overset{\underset{\smile}{1}}{2}}{1}$$

$$\frac{\overset{\underset{\smile}{2}}{2} + \overset{\underset{\smile}{1}}{10} + 12}{\overset{\underset{\smile}{2}}{1} + \overset{\underset{\smile}{1}}{2} + 15}$$

rotto perchè dice − e se dicesse + si aggionge, e nel resto poi si opera come nelle passate e sarà $5^{\underline{1}} + 18 - 1^{\underline{2}}$ esimi di $1^{\underline{1}} + 3$, e con questo partasi $4 + 2^{\underline{1}}$ come si è mostrato di sopra.

A partire de'sani et rotti per sani et rotti si procede come ne i quesiti di sopra si è mostrato, riducendo tutte le quantità a rotti e si partono secondo l'ordine; il che essendo per sè assai ben chiaro, però io non ne porrò altro essempio.

Sommare di Dignità rotte con rotte.

Se si haveranno a sommare due rotti moltiplichisi in croce, moltiplicando la parte di sotto d'un rotto via la parte di sopra dell'altro, e dette moltiplicationi si sommino, alle quali si pone sotto la moltiplicatione del disotto di un rotto via il disotto dell'altro (come per essempio).

Havendosi a sommare $2^{\underline{1}} + 2$ con $4 - 2^{\underline{1}}$ esimi di $2 - 1^{\underline{1}}$, operisi (come si vede nella figura) ponendo la operatione in regola, poi moltiplichisi $2 - 1^{\underline{1}}$ di sotto via $2^{\underline{1}} + 2$ di sopra, fa (come si vede) $2^{\underline{1}} - 2^{\underline{2}} + 4$, poi moltiplichisi $4 - 2^{\underline{1}}$ di sopra via 1 di sotto, fa il medesimo e si somma con l'altra moltiplicatione, fa $8 - 2^{\underline{2}}$ e si tiri sotto la linea .a. e la moltiplicatione di 1 di sotto via $2 - 1^{\underline{1}}$ di sotto, ch'è $2 - 1^{\underline{1}}$, si mette sotto la linea .a., e quello è il rotto, il quale sarà la somma cercata. Avertendosi ancora che si potrebbe dire $2^{\underline{1}} + 2$, $+ 4 - 2^{\underline{1}}$ esimi di $2 - 1^{\underline{1}}$, che sarà il medesimo, et assai volte di minor fastidio.

$$\frac{\overset{\underset{\smile}{1}}{2}+2}{1} \qquad \frac{4-\overset{\underset{\smile}{1}}{2}}{2-\overset{\underset{\smile}{1}}{1}}$$

$$\begin{array}{c} 4-\overset{\underset{\smile}{1}}{2} \\ \overset{\underset{\smile}{1}}{2}-\overset{\underset{\smile}{2}}{2}+4 \\ \hline \text{a}\,\dfrac{8-\overset{\underset{\smile}{2}}{2}}{2-\overset{\underset{\smile}{1}}{1}} \end{array}$$

Sommisi $4^{\underline{1}} - 5^{\underline{2}}$ esimi d'$1^{\underline{1}} + 2$ con $5^{\underline{1}} + 4$ esimi d'$1^{\underline{1}}$. Pongasi in regola (come si vede quì sotto) poi si moltiplichi $5^{\underline{1}} + 4$ di sopra via $1^{\underline{1}} + 2$ di sotto, fa $5^{\underline{1}} + 14^{\underline{1}} + 8$, e poi si moltiplica $4^{\underline{1}} - 5^{\underline{2}}$ di sopra via $1^{\underline{1}}$ di sotto, fa $4^{\underline{1}} - 5^{\underline{3}}$ e questo si somma con l'altra moltiplicatione, fa $9^{\underline{2}} - 5^{\underline{3}} + 14^{\underline{1}} + 8$ al quale si pone sotto la moltiplicatione di $1^{\underline{1}}$ di sotto via $1^{\underline{1}} + 2$ pur sotto, ch'è $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$, ch'è l'esimo del rotto. Si potriano anca sommare questi due rotti per via del + e dire $4^{\underline{1}} - 5^{\underline{2}}$ esimi d'$1^{\underline{1}} + 2$, + $5^{\underline{1}} + 4$ esimi d'$1^{\underline{1}}$, ma è minor fastidio nelle operationi a ridurli tutti a un rotto (come si è mostrato di sopra).

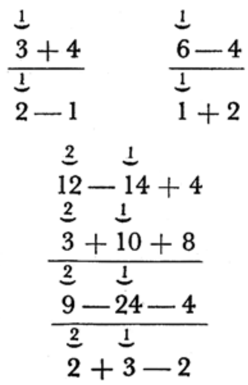
$$\frac{\overset{\underset{\smile}{1}}{4}-\overset{\underset{\smile}{2}}{5}}{\overset{\underset{\smile}{1}}{1}+2} \qquad \frac{\overset{\underset{\smile}{1}}{5}+4}{\overset{\underset{\smile}{1}}{1}}$$

$$\begin{array}{c} \overset{\underset{\smile}{2}}{4}-\overset{\underset{\smile}{3}}{5} \\ \overset{\underset{\smile}{2}}{5}+\overset{\underset{\smile}{1}}{14}+8 \\ \hline \overset{\underset{\smile}{2}}{9}-\overset{\underset{\smile}{3}}{5}+\overset{\underset{\smile}{1}}{14}+8 \\ \hline \overset{\underset{\smile}{2}}{1}+\overset{\underset{\smile}{1}}{2} \end{array}$$

Sotrare de'Rotti.

Cavisi $3^{\underline{1}} + 4$ esimi di $2^{\underline{1}} - 1$ di $6^{\underline{1}} - 4$ esimi d'$1^{\underline{1}} + 2$. Pongasi in regola (come si vede) poi moltiplichisi la parte del maggior rotto di sopra, cioè $6^{\underline{1}} - 4$, via $2^{\underline{1}} - 1$ di sotto dell'altro rotto e farà $12^{\underline{2}} - 14^{\underline{1}} + 4$, poi si moltiplica

$3^{\underline{1}} + 4$ via $1^{\underline{1}} + 2$ fa $3^{\underline{2}} + 10^{\underline{1}} + 8$ e questo si cava di $12^{\underline{2}} - 14^{\underline{1}} + 4$, che restarà $9^{\underline{2}} - 24^{\underline{1}} - 4$; poi si moltiplica il di sotto di tutti due i Rotti l'un via l'altro, fa $2^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} - 2$, ch'è l'esimo di quello ch'è avanzato, e così a cavare $3^{\underline{1}} + 4$ esimi di $2^{\underline{1}} - 1$ di $6^{\underline{1}} - 4$ esimi di $1^{\underline{1}} + 2$ restarà (come si vede qui sopra) $9^{\underline{2}} - 24^{\underline{1}} - 4$ esimi di $2^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} - 2$.



Modo di trovare il lato per potere agguagliare le quantità.

Quando si haverà a trovare il lato di potènze, tanti e numero, presuponendo che la potenza sia 1, cioè una potenza + tanti e numero: piglisi H mezo delli tanti e quello sarà numero al quale si aggionga il lato della potenza che sempre sarà $1^{\underline{1}}$. Ma per più chiarezza ne porrò l'essempio. Ravendosi a trovare il lato d'$1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$ piglisi il mezo delli Tanti, ch'è 2, che sarà numero e congionghisi col lato d'$1^{\underline{2}}$ ch'è $1^{\underline{1}}$, fa $1^{\underline{1}} + 2$, e questo è il lato d'$1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$. Hora per sodisfare al numero quadrisi detto 2 fa 4, che si vede che non è nè più nè meno del numero: però il lato di $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$ sarà $1^{\underline{1}} + 2$, e se la quadratura della metà delli Tanti superasse il numero bisogna aggionger tanto al numero che basti, e se mancasse, gettar tanto del numero che restino eguali, come se si volesse il lato d'$1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 5$ se si piglia la metà delli Tanti ne viene 4,ch'aggiontoli il lato delle potenze, ch'è $1^{\underline{1}}$, fa $1^{\underline{1}} + 4$;quadrisi il 4 fa 16 e tanto bisognarebbe che fusse il numero, che ci manca Il, per non essere più di 5, e però si dirà: se a $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 5$ si aggiongerà 11, il suo lato sarà $1^{\underline{1}} + 4$;'e se io dicessi: trovami il lato d'$1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 12$, che tolta la metà delli tanti, ch'è 3, e aggionta a $1^{\underline{1}}$, lato di $1^{\underline{2}}$ e quadrato il 3 fa 9 ch'è superato dal 12 di 3; però si dirà se da $l^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 12$ si levasse 3 restarebbe $l^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 9$ ed il suo lato sarebbe $1^{\underline{1}} + 3$.

Piglisi il lato d'$1^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}}$: piglisi la metà delli Tanti ch'è 6 e aggiongasegli $1^{\underline{1}}$, lato di $1^{\underline{2}}$, fa $1^{\underline{1}} + 6$, che quadrato fa $1^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 36$ e non dovea fare più d'$1^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}}$, che vi è di superfluo 36. Però si dirà, se a $1^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}}$ si aggionge 36 il suo lato sarà $1^{\underline{1}} + 6$.

Piglisi il lato d'$1^{\underline{2}} + 9^{\underline{1}} + 4$. Piglisi la metà delli Tanti, ch'è $4\frac{1}{2}$, e aggiongasi al lato delle potenze, ch'è $1^{\underline{1}}$, fa $1^{\underline{1}} + 4\frac{1}{2}$, che il suo quadrato è $1^{\underline{2}} + 9^{\underline{1}} +20\frac{1}{4}$, che viene ad essere più d'$1^{\underline{2}} + 9^{\underline{1}} + 4$ di $16\frac{1}{4}$: però si dirà che se ad essa $1^{\underline{2}} + 9^{\underline{1}} + 4$ siaggiongerà $16\frac{1}{4}$, che farebbe $1^{\underline{2}} + 9^{\underline{1}} + 20\frac{1}{4}$ il suo lato sarà $1^{\underline{1}} + 4\frac{1}{2}$.

Piglisi il lato di $1^{\underline{2}} - 6^{\underline{1}} + 8$. Piglisi pur il mezo delli Tanti che sarà $-$ 3 e questo si aggionga al lato d'$1^{\underline{2}}$ ch'è $1^{\underline{1}}$, fa $1^{\underline{1}}$-3, che il suo quadrato è $1^{\underline{2}} - 6^{\underline{1}} + 9$ e noi vorremo il lato d'$1^{\underline{2}} - 6^{\underline{1}} + 8$. Però se a $1^{\underline{2}} - 6^{\underline{1}} + 8$ si aggiongerà 1 il suo lato sarà $1^{\underline{1}} - 3$.

Piglisi il lato di $5^{\underline{2}} - 15^{\underline{1}} + 20$. Piglisi il lato di $5^{\underline{2}}$ ch'è R.q.$5^{\underline{1}}$ e si dupla fa R.q.$20^{\underline{1}}$, e con questo si partono li $- 15^{\underline{1}}$, ne viene $-$ R.q.$11\frac{1}{4}$ e questo è il numero che va accompagnato col lato di $5^{\underline{2}}$, cioè con R.q.$5^{\underline{1}}$, che farà R.q.$5^{\underline{1}}$ $-$ R.q.$11\frac{1}{4}$, che. a quadrarlo farà $5^{\underline{2}} - 15^{\underline{1}} + 11\frac{1}{4}$, che si vede che $11\frac{1}{4}$ è minore di 20 di $8\frac{3}{4}$; però se di $5^{\underline{2}} - 15^{\underline{1}} + 20$ si cavarà $8\frac{3}{4}$, restarà $5^{\underline{2}} - 15^{\underline{1}} + 11\frac{1}{4}$, che il suo lato sarà R.q.$5^{\underline{1}}$ $-$ R.q.$11\frac{1}{4}$. [5]
E avertiscasi di far si ben familiare questa prattica, perchè chi ne sarà ben padrone non le farà bisogno poi tenersi a mente li Capitoli d'agguagliare

[5]Ma perchè questo trovare di creatori rarissime volte accade, se non ne lo agguagliare, et all'hora si riduce sempre a $1^{\underline{2}}$ solo col partire ogni cosa per il numero dei Censi: però partasi $5^{\underline{2}} - 15^{\underline{1}} + 20$ per 5 numeri dei Censi, ne viene $1^{\underline{2}} - 3^{\underline{1}} + 4$: pigliasi il mezzo delle Cose, ch'è $1^{\underline{1}}$ fa $1^{\underline{1}} - 1\frac{1}{2}$, che il suo quadrato è $1^{\underline{2}} - 3^{\underline{1}} + 2\frac{1}{4}$, che si vede, che il 4 è troppo $1\frac{3}{4}$ et si dirà; se a $1^{\underline{2}} - 3^{\underline{1}} + 4^{\underline{1}}$ si haverà $1\frac{3}{4}$, il suo Creatore sarà $1^{\underline{1}} - 1\frac{1}{2}$.

potenze, tanti e numero fra di loro (come si vedrà per esperienza nel procedere più avanti).

Dello Agguagliare.

L'Agguagliare non è altro che havere due quantità, o semplici o composte sotto diversi nomi, le quali due quantità ancor che siano di diversi nomi, nondimeno vagliano egualmente, però se si lieva ad una bisogna levare quel medesimo all'altra e se si aggionge ad una, il medesimo si aggionge all'altra, e questo si fa per la infallibile propositione: se a cose eguali si aggionge cose eguali le somme saranno eguali, et se da cose eguali si lieva cose eguali, li restanti saranno eguali e a tutti li meni che saranno in una quantità la quale si agguagli ad un'altra quantità e che in ambedue le parti non sia altro che una sorte di dignità: sempre si leva quello che sarà meno e si pone dall'altra parte e dica più, come se si dicesse $3^{\underline{1}} + 5$ eguale a 20-$2^{\underline{1}}$: lievasi il $- 2^{\underline{1}} -$ e ponesi dall'altra parte e dirà $3^{\underline{1}} + 2^{\underline{1}} + 5$ eguale a 20, che aggignti li Tanti insieme saranno $5^{\underline{1}} + 5$ eguali a 20, e perchè non si può seguir più oltre senza dimostrare il modo di levare i rotti, ne ponerò questi essempij e dietro a essi porrò il Capitolo di agguagliare numero a tanti.

Modo di levare i rotti.

Quando si haverà una quantità di sani da agguagliare a una quantità di rotti, basta a moltiplicare la quantità de'sani via il partitore del rotto, come sarebbe $3^{\underline{1}} + 5$ esimi di $1^{\underline{1}}$ eguali a 8. Moltiplichisi $1^{\underline{1}}$ via 8 fa $8^{\underline{1}}$ e questo è eguale a $3^{\underline{1}} + 5$. Ma se si haveranno dui rotti da agguagliarsi, come sarebbe $5^{\underline{1}} + 8$ esimi d'$1^{\underline{1}} + 2$ eguale a 6 esimi d'$1^{\underline{2}}$, faccisi come si vede nella figura moltiplicando in croce, cioè $5^{\underline{1}} +8$ via $1^{\underline{2}}$, farà $5^{\underline{3}} + 8^{\underline{2}}$ e questo è eguale alla moltiplicatione di 6 via $1^{\underline{1}} + 2$, ch'è $6^{\underline{1}} + 12$, e perchè questi due essempij bastano verrò (come ho detto) al Capitolo di Tanti eguali a numero.

Capitolo di Tanti eguali a numero.

$$\frac{5^{\underline{1}} + 8}{1^{\underline{1}} + 2} \qquad \frac{6}{1^{\underline{2}}}$$

$$5^{\underline{3}} + 8^{\underline{2}} \text{ eguale a } 6^{\underline{1}} + 12.$$

Quando li Tanti saranno eguali al numero partasi il numero per la quantità delli Tanti e quello che ne verrà sarà la valuta di $1^{\underline{1}}$ come per essempio: se si havesse $4^{\underline{1}}$ eguali a 20, partasi il 20 per 4 ne vien 5 e 5 è la valuta del Tanto.[6]
Agguaglisi $16 - 2^{\underline{1}}$ a 8: lievisi il (come si è detto di sopra) si haverà $8 + 2^{\underline{1}}$ eguale a 16. Avertendosi però che mai vogliono essere due quantità di una medesima natura da ambedue le parti sin che non si vede di che sorte sono le agguagliazioni, ma in queste semplici (come ho detto) non possono essere due quantità di una natura: però in questo essempio, che habbiamo 8 da una parte e da l'altra è 16, che (per essere ambidue numeri) bisogna levare il minore: però se di $2^{\underline{1}} + 8$ si levarà 8 restarà $2^{\underline{1}}$ e se si levarà da 16, restarà 8, e si haveranno $2^{\underline{1}}$ eguali a 8, che partito 8 per il numero delli Tanti ne vien 4, ch'è la valuta del Tanto.

Agguaglisi $6^{\underline{1}} + 12$ a R.q.300. Perchè da tutte due le parti ci viene a essere il numero, che in questa operatione le R.q.sono come numero non havendo segno di dignità (come nel moltiplicare è stato detto) però levisi 12 da ogni banda, restaranno $6^{\underline{1}}$ eguali a R.q.$300 - 12$, che partito per 6, numero delli Tanti, ne verrà R.q.$8\frac{1}{3} - 2$, e tanto valerà il Tanto.

Agguaglisi R.q.⌞$3^{\underline{1}} - 8$⌟ a 5. Levisi la R.q. legata col quadrar ambedue le parti, si haverà $3^{\underline{1}} - 8$ eguali a 25; lievisi il $-\,8$ e pongasi dall'altra parte, e si haverà 33 eguale a $3^{\underline{1}}$, che partito 33 per 3, numero delli Tanti, ne viene

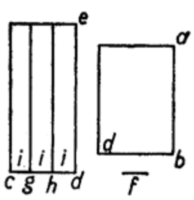
[6]et per essere cosa tanto chiara non ci farò altra dimostratione per linee: perchè il mio intento è di non volere in questa Algebra parlare di linee, ne fare dimostration di essa, perchè ogni cosa mi riserbo a l'Algebra linearia.

Il per la valuta del Tanto.

Agguaglisi $4^{\underline{1}}$ a R.q.$\llcorner$R.q.320 + 8$\lrcorner$. Partasi la R.q. legata per 4, numero delli Tanti, ne viene R.q.$\llcorner$R.q.$1\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\lrcorner$ per valuta del Tanto. Agguaglisi R.q.$\llcorner 4^{\underline{1}} \lrcorner$ a 8. Quadrisi ciascuna delle parti e si haverà $4^{\underline{1}}$ eguale a 64, che partito 64 per 4, numero delli Tanti, il Tanto valerà 16.
Agguaglisi $4^{\underline{1}} + 2$ con R.q.$\llcorner$8 + R.q.2$\llcorner$; lievisi 2 da ciascuna parte e restarà $4^{\underline{1}}$ eguali a R.q.$\llcorner$8 + R.q.2$\lrcorner$ − 2, che partito per 4, numero delli Tanti, ne viene R.q.$\llcorner \frac{1}{2} + \frac{1}{128}\lrcorner - \frac{1}{2}$, e questo è la valuta del Tanto, e parendomi aver detto a bastanza di quanto potesse occorrere in questo Capitolo verrò alla sua dimostratione.

Dimostratione del Capitolo di Tanti eguali a numero.

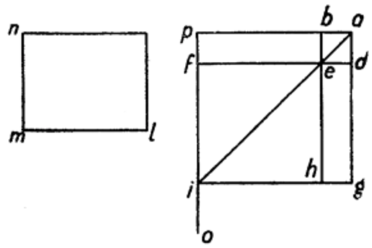
E benchè questa scientia sia Arimetica (come la chiamano Diofante Autore Greco e li Indiani) però non resta che il tutto non si passi provare per figure Geometriche (come fa Euclide nel secondo, sesto, decimo). Però volendo che il Lettore resti in tutto sodisfatto mi sono risoluto porre tutte le dimostrationi dello agguagliare, cioè Capitolo per Capitolo, tanto in linea senza numero quanto in linea composto di numero e questa parte non è men bella che dilettevole: però senza altra circolutione di parole verrò alla dimostratione di questo primo Capitolo di Tanti eguali a numero.
Questa dimostratione può essere in due modi, o in linea overo in



superficie, e prima sia in superfitie. Et sia il Parallelogramo .a.b.d.

e la misura comune sia .f., quale sia un brazzo, un piede, un palmo, o qual si vogli altra misura materiale; e sia il paralellogramo di superficie 24,cioè che sia quanto sarebbono 24 quadretti fatti sopra la linea .f. e sia la linea .d.c.3, cioè tre volte la linea .f., e .d.e. sia un Tanto; che tutto il parallelogramo .e.d.c. sarà 3[1], che dividendolo in tre parti pari con le due linee .g. et .h. et essendo la linea di sotto 1 e l'altezza un Tanto, ciascuno delli tre paralelli sarà un Tanto e tutto il paralellogramo .c.d.e. sarà 3 Tanti, li quali voglio che siano eguali al paralellogramo .a.b.d., il quale è 24. E perchè la intention nostra è sola di cercare la lunghezza di .e.d., ch'è un Tanto, e perchè il paralellogramo a.b.d. è 24, però il .c.d.e. sarà ancor egli 24 perchè gli è eguale: però essendo il paralellogramo .c.d.e. 24, e la .c.d. 3, la .e.d. sarà di necessità 8, perchè tre volte 8 fa 24. Però se si partirà 24, superficie del paralellogramo .c.d.e. per la linea .c.d., ch'è 3, ne verrà 8 per la linea .e.d. e tal linea era un Tanto, dunque un Tanto era 8 delle linee .f. et essendo .e.d. 8 ed un Tanto, diremo tanto esser longo 1 Tanto quanto 8, overo 1 Tanto valere 8. Seguita l'altra djmostratione senza numero.

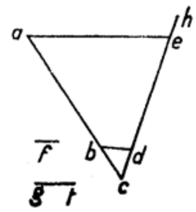
Sia il paralellogramo .b.e.f. noto, che viene a servire per il nu-



mero, eguale al paralellogramo .l.m.n., che .l.m. sia noto e la linea .m.n. sia 1 Tanto, il quale paralellogramo sarà li Tanti; volendo trovare quanto è la linea .m.n. allonghisi la linea .e.f. sino in .d. facendo .e.d. pari alla .l.m. e faccisi il paralellogramo .a.d.e.b. e poi tirisi la costa o diametrale .a.e. sino che tagli la .f.o. paralella alla .b.e., che la taglierà in un punto .i., dipoi longhisi .b.e. sino in

.h. et .a.d. sino in .g. facendo .e.h. e .d.g. pari alla .f.i. et poi tirisi la .g.h.i. e sarà fatto il paralellogramo .a.g.i.
Dico che (per la 43 del primo) li due paralellogrami .b.e.f. e .d.e.h. sono eguali fra di loro et essendo .d.e. pari alla .Lm. la .e.h. sarà la valuta del Tanto, cioè quanto deve essere la .m.n., perchè sopra la .d.e. pari alla .l.m. haviamo fatto un paralellogramo eguale alla superficie .b.e.f. (come fu proposto). Ma volendo trovare la linea .m.n. con brevità, tirisi la .a.b. retta con la .b.p. pari alla,l.m. ed allonghisi la .p.f. sino in .0. e tirisi la .a.e. sin tanto che tagli la .p.o. che la taglierà in punto .i. e la .f.i. sarà la valuta del Tanto, perch'essendo la .a.b. pari alla .l.m. e la .f.i. quanto deve essere .m.n., tanto può la .a.b. in .f.i. (per la 16 del sesto) quanto .b.e. in .e.f. paralellogramo noto; resta la dimostratione in linea.

Sia la misura commune .f. come fu detto di sopra e sia .a.b. 12



eguale alla .g. che sia 2 Tanti; per trovare quanto valerà la metà della .g. cioè 1 Tanto, allonghisi la .a.b. sino in .e. facendo .b.e. tanto longa delle parti .f. quanto è il numero delli Tanti. [Però, essendo il numero delli Tanti] 2, faccisi .b.c. longa due volte quanto .f. poi tirisi la .c.h. in tal modo che faccia l'angolo .c. e sia di che natura si voglia, poi si faccia .c.d. pari alla .f. e tirisi la .b.d. e dal punto .a. si tiri una paralella alla .b.d. sin che tagli la .c.h., che la taglierà in punto .e. Dico che (per la 11 del sesto) la .d.e. è valuta del Tanto, perchè tanto può la .a.b. ch'è 12, in .c.d., ch'è l, quanto,b.c. ch'è 2 in .d.e., ch'è 6, perchè sono proportionali la .a.b. alla .b.e. come la .e.d. alla .d.c.

Capitolo di potenza eguale a numero.

Se si haverà ad agguagliare potenza a numero partasi il numero per la quantità delle potenze e dell'avenimento se ne piglia il lato e quello sarà la valuta del Tanto,overo facciasi così: piglisi il lato dell'uno e dell'altro e così si haverà Tanto eguale a numero, qual si finirà come si è mostrato di sopra.

Agguaglisi $9^{\underline{2}}$ a 81. Piglisi il lato di $9^{\underline{2}}$, che sarà $3^{\underline{1}}$, ed il lato di 81 sarà 9, e si haveranno $3^{\underline{1}}$ eguali a 9 che seguendo come si è detto di sopra il Tanto valerà 3.

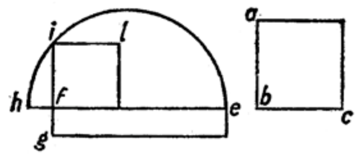
Agguaglisi $2^{\underline{2}}$ a 12. Piglisi il lato di $2^{\underline{2}}$ sarà R.q.$2^{\underline{1}}$, et il lato di 12 sarà R.q.12, che partito per la quantità delli Tanti, cioè per R.q.2, ne viene R.q.6, e R.q.6 vale il Tanto, overo facciasi così. Partasi ciascuna delle parti per 2, numero delle potenze, e dell'avenimento, ch'è 6, piglisine il lato che sarà R.q.6 e R.q.6 vale il Tanto (com'è detto).

Agguaglisi $1^{\underline{2}}$ + R.q.12 a 4; lievinsi le R.q.12 ad ogni parte si haverà $1^{\underline{2}}$ eguale a 4 − R.q.12. Hora piglisi il lato d'$1^{\underline{2}}$ ch'è $1^{\underline{1}}$ e poi piglisi il lato di 4 − R.q.12 (come fu insegnato nel primo libro) che sarà R.q.3 − 1 e questo è eguale a 1 Tanto, lato d'$1^{\underline{2}}$, sì che il Tanto valerà R.q.3 − 1.

Agguaglisi R.q.⌞$2^{\underline{2}}$ + 5⌟ a 5. Quadrisi ciascuna delle parti e si haverà $2^{\underline{2}}$ + 5 eguali a 25; lievisi il 5 da ogni parte e restarà $2^{\underline{2}}$ eguali a 20, che pigliato il lato di $2^{\underline{2}}$ sarà R.q.$2^{\underline{1}}$ et il lato di 20 sarà R.q.20, che si haverà R.q.$2^{\underline{1}}$ eguale a R.q.20 e però il Tanto valerà R.q.10.

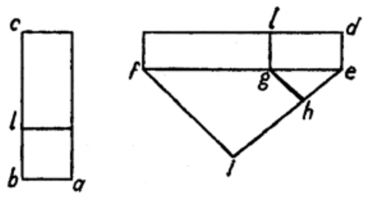
Dimostratione del sopradetto Capitolo di potenze eguali a numero.

Sia la potenza .a.b.c. eguale al paralellogramo .e.f.g. il quale sia 36, cioè .e.f. 12 e .f.g. 3; per trovare quanto sarà la .a.b., ch'è $1^{\underline{1}}$, lato della potenza .a.b.c. faccisi così: allonghisi .e.f. sino in



.h. facendo .f.h. eguale alla .f.g. ch'è 3, e sopra alla .e.h. faccisi il mezo circulo .e.i.h. et allonghisi la .f.g. sino al circulo .i.; la .i. sarà 6 pcrch'è media proportionale fra .e.f. et .f.g., et sopra la .fi. faccisi il quadrato .f.i.I. il quale sarà eguale al paralellogramo .e.f.g. e l'uno e l'altro è 36 et essendo il quadrato .f.i.l. eguale al quadrato .a.b.c. la linea .f.i. sarà pari alla .a.b., ch'è un Tanto per esser lato dcUa potenza .a.b.c., et essendo .f.i. linea eguale al Tanto il Tanto sarà 6 numero, perchè .f.i. è media proportionale fra .e.f. ch'è 12 et .f.g. ch'è 3 (come fu detto di sopra). Ma se la potenza fussè eguale a qual si voglia figura rettilinea, tal rettilineo si riduchi a un paralellogramo, aver quadrato e poi si seguiti la agguagliatione.

Ma quando si haverà più di una potenza overo meno di una potenza



eguale a un paralellogramo dato, si ridurrà a una potenza et poi si seguitarà come di sopra è detto. Sian le potenze .a.b.c. e sia il lato .a.b. un Tanto et il lato .b.c. più over meno di un Tanto, ma dato che siano più eguali al paralellogramo .d.e.f. tirisi la .e.i. pari alla b.c. (in tàl modo che facciano angolo la .e.f. et la .e.i.) facendo la parte .e.h. pari alla .a.b., poi tirisi la .f.i. facendo il Triangolo .e.f.i. e dal punto .h. si tiri la .h.g. paralella alla .fi. e però la linea .e.f. sarà divisa nel punto .g. secondo la proportione ch'è fra .a.b. e .b.c. Però tirato la .g.l. paralella alla .d.e. il paralellogramo .d.e.f. sarà diviso nella medesima proportione detta: però dico che

facendo la potenza .a. .b.l., facendo .b.l. eguale a .a.b. haveremo una potenza eguale al paralellogramo .d.e.g. e l'agguagliamento si seguiti come di sopra. Et questa dimostratione per più chiarezza la voglio poner con il numero. Sia .a.b. $1^{\underline{1}}$ e .b.c.3 tanti quanto è la .a.b., cioè $3^{\underline{1}}$, e la .e.f. sia 24 et .d.e. $4\frac{1}{2}$, et essendo .e.i. eguale alla .b.c. sarà $3^{\underline{1}}$ et .e.h. $1^{\underline{1}}$ et .h.i. $2^{\underline{1}}$, la .e.g. sarà 8 e .g.f.16, perchè tal proportione ha .e.g. a .g.f., che ha .e.h. con .h.i. et essendo .d.e. $4\frac{1}{2}$ il paralellogramo .d.e.g. sarà 36 eguale alla potenza .a.b.l., che per l'agguagliamento detto di sopra il Tanto valerà 6, e prima havevamo il paralellogramo a.b.c., ch'è $3^{\underline{1}}$, eguale al paralellogramo .d.e.f. che era 108, che partito 108 per 3 ne viene 36, che sarà $1^{\underline{1}}$ eguale a 36.

Capitolo di Cubo eguale a numero.

Quando si haveranno Cubi eguali a numero si partirà il numero per il numero de'Cubi e dell'avenimento se ne pigli il lato cubico, il quale sarà la valuta del Tanto, come per essempio agguaglisi $3^{\underline{3}}$ a 24. Partasi 24 per 3, numero delli cubi, ne viene 8, il suo lato cubico è 2 e il Tanto vale 2, e per non procedere in infinito nei Capitoli semplici porrò la regola generale.

Regola di una dignità eguale a numero.

Quando si haverà una dignità eguale a numero si partirà il numero per il numero della dignità et dell'avenimento se ne pigliarà il lato secondo la sorte della dignità, e detto lato sarà la valuta del Tanto, come se si havesse $2^{\underline{5}}$ eguali a 486; partasi 486 per 2, numero de'l'dati, ne viene 243, del quale se ne pigli il lato relato, ch'è 3 e 3 vale il Tanto, e così si procederà in tutte.

Capitolo di Potenze eguali a Tanti.

Quando si haveranno potenze eguali a Tanti si partirà il numero delli Tanti per il numero delle potenze e l'avenimento sarà la valuta del Tanto.

Agguaglisi $10^{\underline{2}}$ a $40^{\underline{1}}$. Partasi 40 per 10 ne vien 4, e 4 vale il Tanto. Et a ridurre questo Capitolo a Tanti eguali a numero si fa in questa guisa: si schifa l'una e l'altra parte (come si è insegnato al suo luogo) che levando una dignità a ciascuna delle parti si haverà $10^{\underline{1}}$ eguali a 40. E se si havesse $10^{\underline{4}}$ eguali a $90^{\underline{2}}$ lievisi due dignità a ciascuna delle parti: si haverà $10^{\underline{2}}$ eguali a 90 e così si potrà con quest'ordine agguagliare tutte le dignità quando una sarà eguale all'altra, eccetto se le dignità saranno tutte di una natura, perchè non si può agguagliare Tanti a Tanti, nè Potenze a Potenze, nè numero a numero, e così delli altri.

Capitolo di Potenze e Tanti eguali a numero.

Quando si haveranno potenze e Tanti eguali a numero ci sono due modi. Il primo è questo. Partasi ogni cosa per la quantità delle potenze, poi si piglia la metà delli Tanti e si quadra ed il produtto si aggionge al numero e della somma se ne piglia il lato e di detto lato se ne cava la metà delli Tanti, e quello che restarà sarà la valuta del Tanto, come per essempio agguaglisi $2^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}}$ a 32. Partasi ogni cosa per 2, numero delle potenze, ne verrà $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}}$ eguale a 16; piglisi il mezo delli Tanti, ch'è 3, quadrisi fa 9, giongasi a 16 fa 25 e di questo se ne piglia il lato ch'è 5 e di esso si cava il mezo delli Tanti, resta 2 et 2 vale il Tanto. Ma volendosi procedere col trovare il lato e ridurre detto Capitolo a Tanti eguali a numero, e tal operare serve come se fusse la dimostratione, faccisi in questa guisa: agguaglisi $2^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}}$ a 32; riduchinsi a $1^{\underline{2}}$ (com'è detto di sopra) si haverà $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}}$ eguali a 16; operisi come si mostrò di sopra quando si disse del pigliare il lato di potenze e Tanti, che pigliato la metà delli Tanti, ch'è 3 et aggiontolo al lato della potenza, ch'è $1^{\underline{1}}$, fa $1^{\underline{1}} + 3$, che il suo quadrato è $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 9$ e noi volevamo $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}}$; però se si aggiongerà 9 ad ambedue le parti si haverà $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 9$ eguali a 25, che tolto il lato di $l^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 9$ sarà $1^{\underline{1}} + 3$, e questo è eguale al lato di 25, cioè a 5, che levato il 3 da ciascuna delle parti restarà 2 eguale a $1^{\underline{1}}$ ed il Tanto valerà 2.

L'altro modo è questo: moltiplicare il numero delle potenze per il numero ed il produtto aggiongerlo al quadrato della metà delli Tanti, e della somma pigliarne il lato, del quale se ne cavi la metà delli Tanti ed il restante si parta per il numero delle potenze, e l'avenimento è la valuta del Tanto, come per essempio: agguaglisi $3^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}}$ a 24. Moltiplichisi 3, numero delle potenze per 24, fa 72, et a questo se gli aggionga 9, quadrato della metà delli Tanti, fa 81, il cui lato è 9, del quale se ne cavi 3, metà delli Tanti: resta 6, e questo si divide per 3, numero delle potenze, ne vien 2, e 2 è la valuta del Tanto, e questo modo è utilissimo nel schifare li rotti e serve assai a formare il rotto dell'estratione delle R.c.(come si è detto in essa estratione).

Agguaglisi $2^{\underline{2}} + 16^{\underline{1}}$ a 40; partasi ogni cosa per la quantità delle potenze, cioè per 2, ne viene $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}}$ eguale a 20; piglisi la metà delli Tanti, ch'è 4, giongasi al lato di $1^{\underline{2}}$, ch'è $1^{\underline{1}}$, fa $1^{\underline{1}} + 4$, che il suo quadrato è $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{2}} + 16$, e voressimo che solo facesse $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}}$; però aggionghisi 16 ad ogni parte e si haverà $1\ ^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 16$ eguale a 36, che tolto il lato d'$1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 16$ si haverà $1^{\underline{1}} + 4$ e pigliato il lato di 36 è 6, sì che $1^{\underline{1}} + 4$ è eguale a 6, che levato 4 da ogni parte restarà $1^{\underline{1}}$ eguale a 2 e 2 è la valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{1}} + 2$ a R.q.$\llcorner 2^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} \lrcorner$ Quadrinsi ambedue le parti si haveranno $2^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}}$ eguali a $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$; lievisi $4^{\underline{1}}$ da ogni parte si haverà $2^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ eguale a $1^{\underline{2}} + 4$. Levisi $1^{\underline{2}}$ da ogni parte e si haverà $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ eguali a 4 e seguendosi il Capitolo il Tanto valerà R.q.$8 - 2$.

Agguaglisi $4^{\underline{1}} + 8 -$ R.q.$\llcorner 128 + 8^{\underline{2}} \lrcorner$ a zero. Levisi il $-$ e pongasi dall'altra parte, si haverà $4^{\underline{1}} + 8$ eguali a R.q.$\llcorner 128 + 8^{\underline{2}} \lrcorner$; quadrisi ciascuna delle parti si haverà $16^{\underline{2}} + 64^{\underline{1}} + 64$ eguale a $128 + 8^{\underline{2}}$; lievansi le $8^{\underline{2}}$ da ogni parte si haveranno $8^{\underline{2}} + 64^{\underline{1}} + 64$ eguali a 128; lievisi il 64 da ogni parte si haveranno $8^{\underline{2}} + 64^{\underline{1}}$ eguali a 64, riduchisi a $1^{\underline{2}}$ ed agguaglisi (come si è detto di sopra); il Tanto valerà R.q.$24 - 4$.

Agguaglisi 4 + R.q.$\llcorner$24 $-$ $20^{\underline{1}}$$\lrcorner$ a $2^{\underline{1}}$; in simili agguagliamenti bisogna sempre cercare che la R.q. legata resti sola però si levarà il 4 ad ambedue le parti e si haverà R.q.$\llcorner$24 $-$ $20^{\underline{1}}$$\lrcorner$ eguale a $2^{\underline{1}}$ $-$ 4. Quadrisi ciascuna delle parti, si haverà 24 $-$ $20^{\underline{1}}$ eguale a $4^{\underline{2}}$ $-$ $16^{\underline{1}}$ + 16; lievinsi li meni da ciascuna delle parti e pongansi dall'altra parte, si haverà $4^{\underline{2}}$ + $20^{\underline{1}}$ + 16 eguale a 24 + $16^{\underline{1}}$; lievinsi li $16^{\underline{1}}$ a ciascuna delle parti si haverà $4^{\underline{2}}$ + $4^{\underline{1}}$ + 16 eguale a 24; lievisi il 16 da ogni parte si haveranno $4^{\underline{2}}$ + $4^{\underline{1}}$ eguale a 8; riduchisi a $1^{\underline{2}}$ si haverà $1^{\underline{2}}$ + $1^{\underline{1}}$ eguale a 2; seguitisi il Capitolo, che il Tanto valerà 1.

Agguagliasi $1^{\underline{2}}$ + R.q.$8^{\underline{1}}$ + $2^{\underline{1}}$ a 20. Piglisi la metà delli Tanti, ch'è R.q.2 + 1, che aggionto col lato di $1^{\underline{2}}$ fa $1^{\underline{1}}$ + R.q.2 + 1, che il suo quadrato sarà $1^{\underline{2}}$ + R.q.$8^{\underline{1}}$ + $2^{\underline{1}}$ + 3 + R.q.8, che si vede che bisogna aggiongere 3 + R.q.8 a ciascuna delle parti, fa 23 + R.q.8 eguale a $1^{\underline{2}}$ + R.q.$8^{\underline{1}}$ + $2^{\underline{1}}$ + 3 + R.q.8, che pigliato il lato di ciascuna sarà $1^{\underline{1}}$ + R.q.2 + 1 eguale a R.q.$\llcorner$23 + R.q.8$\lrcorner$ $-$ R.q.2 $-$ 1 e questo è la valuta del Tanto.

+

$1^{\underline{2}}$ + R.q.$8^{\underline{1}}$ + $2^{\underline{1}}$ Eguale a 20

$1^{\underline{2}}$ + R.q.$8^{\underline{1}}$ + $2^{\underline{1}}$ + 3 + R.q.8 Eguale a 23 + R.q.8

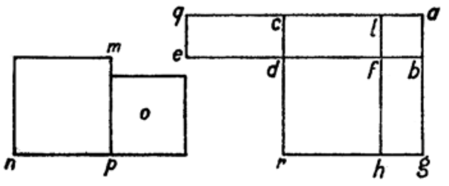
$1^{\underline{1}}$ + R.q.2 + 1 Eguale a R.q.$\llcorner$23 + R.q.8$\lrcorner$

$1^{\underline{1}}$ Eguale a R.q.$\llcorner$23 + R.q.8$\lrcorner$ $-$ R.q.2 $-$ 1

E benchè di simili agguagliamenti se ne potessero mettere infiniti essempij non ne ponerò altri, perchè chi intenderà ben questi se ne potrà servire in tutte le occorentie di questa natura.

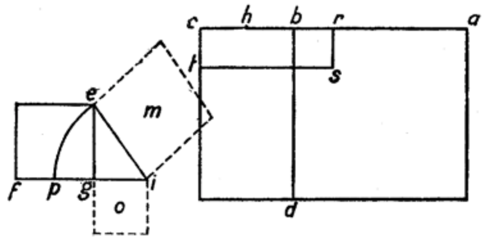
Dimostratione del sopradetto Capitolo di Potenze e Tanti eguale a numero.

Sia il quadrato a.b.f.l $1^{\underline{2}}$ ed il paralellogramo .f.e.q.$6^{\underline{1}}$ eguali al paralellogramo .n.p.m il quale sia 16; egli è manifesto che se il quadrato .a.b.f. è $1^{\underline{2}}$ il suo lato .l.f. è $1^{\underline{1}}$ et essendo .l.f. 1 .l .f.e. sarà 6, perchè tutto il paralellogramo .f.e.q. è $6^{\underline{1}}$. Hor (per venire alla



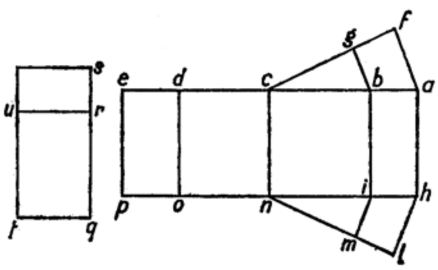
agguagliatione) dividasi il paralellogramo .f.e.q. in due parti eguali con la linea .c.d., che .f.d. et .d.e. siano pari, che ciascuna di loro sarà 3 et il paralellogramo .c.d.e. si ponga sopra la .b.f. facendo il paralellogramo .b.f.h.g. pari al paralellogramo .c.d.e. et haveremo il gnomone .a.g.h.f.d.c. pari al paralellogramo .a.b.e.q., et essendo pari il detto gnomone al detto paralellogramo, il gnomone sarà pari al numero .n.p.m. ch'è 16 e volendo finire la agguagliatione finiscasi il quadro a.c.r.g. con giongere al gnomone .a.g.h.f.d.e. il quadro .f.h.d.r. il qual'è 9, perchè sapiamo che .f.d. è 3 et .f.h. 3 metà di .f.e., numero delli Tanti, et al numero .n.p.m. ch'è 16 li giongeremoil quadro .0., che sia pari al quadro .f.d.r.h. per aggiongere egualmente a ciascuna delle parti, e tutto il numero .n.p.m. con il quadrato .0. sarà 25 e sarà pari al quadrato .a.g.r.c., et essendo il quadrato .a.g.R.c.pari al detto numero il detto quadrato sarà 25, et essendo il quadrato .a.g.R.c.25 il suo lato .g.r. sarà 5, et essendo la .g.r. 5 et la .h.r. 3, la .h.g. sarà 2, et 2 è la valuta del Tanto, perchè .h.g. era 1 Tanto.
Per questa dimostratione si vede che a pigliare la metà delli Tanti e quadrarla, et il quadrato giongerlo al numero e della somma pigliarne il lato e del lato cavarne la metà del numero delli Tanti, il restante è la valuta del Tanto. E di questo si trova un'altra dimostratione in linea et in numero che fa il medesimo effetto (come si è detto nel Capitolo di Tanti eguali a numero).

Sia la potenza .a.b.d. e li Tanti .d.b.c. eguali al quadrato .f.g.e.; per trovare quanto deve essere b.a. dividasi .b.c. in due parti pari in punto .h. et allonghisi .f.g. sino in .i. facendo .g.i. pari alla .h.c.,



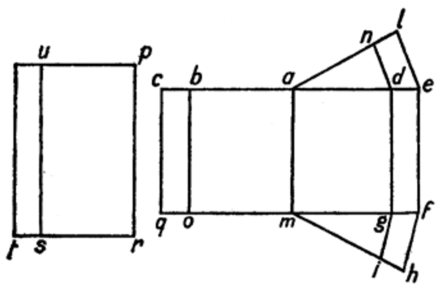
e tirasi la .i.e. ponendosi il piede immobile del composto nel punto .i. e l'altro nel punto .e. e girasi sino in .p.: il residuo .p.g. sarà la valuta del Tanto, e questo si prova per la dimostratione passata. Si piglia poi il mezzo delli Tanti e si quadra e si aggionge al numero, però facendo il quadrato .0. sopra la .g.i. eguale alla metà delli Tanti e sopra la .i.e. il quadrato .m. il quale quadrato .m. sarà eguale alli dui quadrati .f.g.e. e .0., et havendo della linea .e.i. a cavare la metà delli Tanti, se faremo .i.p. eguale alla .i.e., et il pezzo .g.i. eguale alla metà delli Tanti lo restante .g.p. è la valuta del Tanto. E per dimostrarlo in numero sia la potenza .a.b.d. e li 6 Tanti .d.b.c. eguali al quadrato .f.g. e. che sia 16. La g.e. sarà 4 e la .g.i. 3 (per essere la metà di .b.c. ch'è 6). La .i.e. sarà 5 perchè il quadrato della .g.i. è 9, et il quadrato della. .g.e. è 16, che aggionte insieme fanno il quadrato della .i.e., per essere l'angolo .i.g.e. retto. Però la .i.e. sarà il lato di 25, ch'è 5, et essendo .i.p. 5 (per essere pari alla .i.e.) et essendo la .i.g.3, la .g.p. sarà 2. Però la .a.b. sarà 2. Faccisi .b.r. et .r.s. 2, et .c.t. 2. La potenza .s.r.b. sarà 4 et il paralellogramo .b.c.t. 12, per. essere .b.c. 6 e c.t. 2, che gionti insieme fanno 16, ch'è eguale al quadrato .f.g.e., ma se la potenza .a.b.d. fusse più o meno di una potenza bisogna abbreviare o slongare li Tanti et il numero in proportione (come fu mostrato nella dimostratione di potenze eguali a numero); come per essempio: se .a.h. fosse un Tanto et .a.c. fusse più d'un Tanto bisogna della .a.c. levarne un pezzo sì che resti eguale alla .a.h., e così della .c.e. levarne un pezzo in proportione carne è la .a.b. alla

.b.c., come per essempio. Siano le potenze .a.c.n. e li Tanti .c.n.p. eguali al parallelogramo .t.q.s., e sia .c.n. $1^{\underline{1}}$ .a.c. più d'$1^{\underline{1}}$. Però faccisi .c.b. eguale alla .c.n. e tirisi la .c.f. eguale alla .c.e. tirisi la .a.f. e dal punto .b. la .b.g. paralella alla .a.f. e faccisi .c.d. eguale alla .c.g. e dal punto .d. si tiri la perpendicolare .d.o. e dal punto .b. la perpendicolare .b.i. e dal punto .n. si tiri la .n.l. eguale alla .q.s. e poi tirisi la .h.l., e dal punto .i. la .i.m. paralella alla .h.l. e faccisi la .q.r. eguale alla .m.n., e tirisi la perpendicolare .r.u. Dico che si haverà la potenza .b.i.n. e li Tanti .c.n.o. eguali al numero .t.q.r., perchè tal proportione ha il paralellogramo .a.c.n. al quadrato .b.i.n. come il paralellogramo .c.n.p. al paralellogramo



.c.n.o., et il paralellogramo .t.q.s. al paralellogramo .t.q.r. e per seguire la agguagliatione per linea (essendo il numero .t.q.r. paralellogramo e non quadrato) si farà un quadrato che li sia eguale (come si è mostrato nella agguagliatione di potenze eguali a numero) e fatto che sarà detto quadrato, si seguiti la agguagliatione come si mostrò nella figura passata. Ma se le potenze fussero meno di una potenza, bisogna crescere in proportione li Tanti et il numero, come per essempio: sia la parte di una potenza .a.m.g. et .a.m. sia un Tanto e li Tanti .a.m.o. eguali al numero .p.r.s.; allonghisi .a.d. sino in .e. di modo che .a.e. sia eguale alla .a.m., per fare la potenza .e.a.m., poi tirisi la .a.n. eguale alla .a.b. e dal punto .d. la .n.d. e dal punto .e. la .e.l. paralella alla .d.n. e allonghisi .a.n. tanto che si tagli con la .e.l. et allonghisi la .a.b. sino in .c. facendo .a.c. eguale alla .a.l., e della .a.c. et .a.m. faccisi

il paralellogramo .m.a.c: e questi saranno li Tanti, e della .m.a. et .a.e. faccisi il quadrato .m.a.e. e questo sarà la potenza, e per crescere il numero nella medesima proportione tiri si la .m.i.eguale



alla .r.s. e dal punto .g. la .g.i. e dal punto .f. la .f.h. paraI ella alla .g.i. nel modo detto della .e.l. cioè allongando la .m.i. sino in .h. et allonghisi la .r.s. sino in .t. tanto che .r.t. sia eguale alla .m.h., e della .p.r. et .r.t. faccisi il paralellogramo .p.r.t. Dico che la potenza .e.a.m. e li Tanti .m.a.c. sono eguali al numero .p.r.t., perchè il tutto è cresciuto in proportione, che tal proportione ha il paralellogramo .m.a.d. al quadrato .m.a.e. qual'è il paralellogramo .m.a.b. al para,lellogramo .m.a.c., et il paralellogramo .u.p.r. al paralellogramo .p.r.t. Però seguitisi la agguagliatione come si mostrò nella figura di sopra, e si haverà la valuta del Tanto.

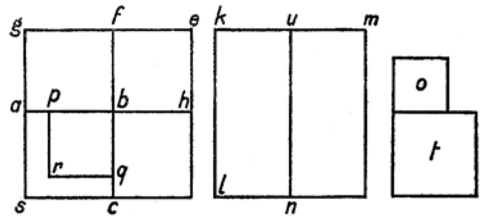
Capitolo di potenze eguali a tanti e numero.

Havendosi da agguagliare potenze a tanti e numero partasi il tutto per la quantità delle potenze, poi si pigli il mezzo delli tanti e si quadri ed il produtto si aggionge al numero, e della somma se ne piglia il lato et a detto lato si aggionge il mezzo delli Tanti, et la somma è la valuta del Tanto, come se si haverà da agguagliare $1^{\underline{2}}$ a $12^{\underline{1}} + 11$. Piglisi il mezzo delli Tanti, ch'è 6, il suo quadrato è 36, che gionto a Il fa 47, che pigliato il suo lato è R.q.47, et aggiontoli il mezzo delli Tanti fa R.q.47 + 6 e questo è la valuta del Tanto. Ma volendo ridurre questo Capitolo a Tanti eguale a numero, che serve a chi

non havesse a mente queste regole date, bisogna sempre che li Tanti siano insieme con le potenze: però se da ogni parte si levaranno $12^{\underline{1}}$ si haverà $1^{\underline{2}}$ $-\ 12^{\underline{1}}$ eguali a 11. Piglisi il lato della potenza, ch'è $1^{\underline{1}}$, alla quale si aggionga il mezzo del numero delli Tanti, ch'è $-\ 6$, che sarà $1^{\underline{1}} - 6$, il suo quadrato è $1^{\underline{2}} - 12^{\underline{1}} + 36$ ch'è $+\ 36$ d'$1^{\underline{2}} - 12^{\underline{1}}$, però giongasi 36 ad ambedue le parti, e si haverà $1^{\underline{2}} - 12^{\underline{1}} + 36$ eguale a 47, che preso il lato di ambe due le parti si haverà $1^{\underline{1}} - 6$ eguale a R.q.47. Aggiongasi 6 ad ambedue le parti, ch'è levarlo alli Tanti e aggiongerlo a R.q.47, che dirà R.q.47 + 6 eguale a $1^{\underline{1}}$ e tanto, cioè R.q.47 + 6, vale il Tanto. **e questo Capitolo si può agguagliare con l'altra regola data, senza partire ogni cosa per il numero delle potenze. Moltiplichisi il numero delle potenze per il numero ed al produtto se li aggionga il quadrato della metà delli Tanti e della somma se ne piglia il lato, al quale se gli gionge il mezo delli Tanti e la somma si parte per il numero delle potenze, e l'avenimento è la valuta del Tanto, come per essempio: agguaglisi $4^{\underline{2}}$ a $8^{\underline{1}} + 18$. Moltiplichisi 4 numero delle potenze via 18 fa 72 ed a questo se li gionga 16, quadrato della metà delli Tanti, fa 88 del quale se ne pigli il lato, ch'è R.q.88, et a questo se li aggionge 4, metà delli Tanti, fa R.q.88 + 4 e questo si parte per 4 numero delle potenze, ne viene R.q.$5\frac{1}{2}$ + 1, e R.q.$5\frac{1}{2}$ + 1 è la valuta del Tanto.**
Agguagliasi $1^{\underline{2}}$ − R.q.$8^{\underline{1}}$ a 6. Piglisi il mezo delle − R.q.$8^{\underline{1}}$,ne viene − R.q.2, che gionto con $1^{\underline{1}}$,lato della potenza, dirà $1^{\underline{1}}$ − R.q.2; il suo quadrato sarà $1^{\underline{2}}$ − R.q.$8^{\underline{1}}$ + 2, ch'è 2 più, però gionghisi 2 a $1^{\underline{2}}$ − R.q.$8^{\underline{1}}$ et a 6 fa $1^{\underline{2}}$ − R.q.8.$^{\underline{1}}$ + 2 eguale a 8. Piglisi il lato di ciascuna delle partisi haverà $1^{\underline{1}}$ − R.q.2 eguale a R.q.8; giongasi R.q.2 con R.q.8 fa R.q.18 et questo è eguale a $1^{\underline{1}}$,però il Tanto valerà R.q.18 e si deve avertire che le R.q.$8^{\underline{1}}$ non havendo il segno delle R.q.legate è solo la R.q.del numero senza la dignità.

Dimostratione del sopradetto Capitolo di potenze eguali a Tanti e numero.

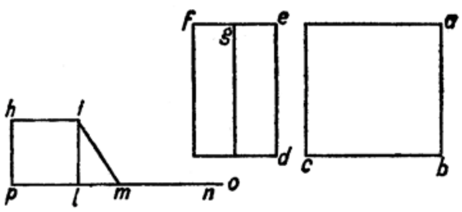
Sia la potenza .s.g.e. eguale alli Tanti .l.k.m. (essendo .l.k. pari alla .s.g. et .k.m. 8) et alla superficie .0. la quale sia 9. Egli è



manifesto che se dal quadrato .s.g.e. se ne levarà una partè eguale al paralellogramo .l.k.m. lo restante sarà eguale alla superficie .o., per essere .l.k. m. et .0. pari ad .s.g.e., et essendo .s.g.e. una potenza li suoi lati saranno un Tanto et essendo .l.k.m. 8 Tanti et .l.k. un Tanto et .k.m. 8, per levare della potenza .s.g.e. una parte pari alla .l.k.m. dividasi .k.m. in due parti pari in .u. e tirisi la .u.n. equidistante alla .l.k. et il paralellogramo .l.k.m. sarà diviso in due parti pari. Hor pongasi la parte .l.u. sopra .e.f.c. facendo l'angolo .e. commune, ne restarà la parte .s.g.f., della quale volendone levar un pezzo pari alla superficie .n.u.m. pongasegli sopra e facciaseli l'a.ngolo .g. commune, se ne verrà a tagliare il paralellogramo .a.g.£ al quale manca per esserè eguale al paralello .n.u.m. il quadro di .f.e. il qual'è 16, perch'è composto di due linee eguali alla .k.u. et .u.m., le quali ciascuna di loro è 4, però del quadrato .s.a.b. se ne levi il quadrato .r.p.b. eguale al quadrato .b.f.e., e tutta la superficie .a.p.r.q.c.h.e.g. è pari alla .l.k.m., perchè c.e. è pari alla .l.k.u. et .a.p.r.q.f.g. è pari al pezzo .n.u.m. Però il gnomone .s.a.p.r.q.c. è pari alla superficie .0., tal che se a detto gnomone si giongerà la superficie .r.b. ch'è 16 diverrà quadrato. Però aggiongasi al detto gnomone et alla superficie .0. un quadrato eguale alla .r.b. et sia il quadro .t., che il quadro .s.b. sarà eguale alla superficie .0., ch'è 9, e alla superficie .t., ch'è 16; adunque il quadrato .s.b. sarà 25, perch'è pari alle dette due superficij, et essendo il quadrato .s.b. 25, il lato 5, .a. sarà 5 et .a.g. era 4, perch'era pari a .k.u., ch'era la metà di .k.m., ch'era 8, et essendo .a.g. 4 et .a.s. 5, tutta .s.g. sarà 9, e prima era un Tanto; adunque

un Tanto sarà 9, perchè la linea .s.g. è un Tanto e 9 per la ragione addutta et allegata.

Dimostratione in linea del sopradetto Capitolo.



Sia la potenza .a.b.c. eguale alli Tanti .d.e.f. et alla superficie .h.i.l. la quale sia nota, e la .d.e. sia pari alla .a.b., cioè ciascuna sia 1[1], e si vogli trovare quanto deve essere .a.b. Se la superficie .h.i.L non fusse quadrata si riduchi a quadrato, facendo un quadrato che li sia eguale, ma presuposto che sia quadrato dividasi la .e.f. in punto .g. in due parti eguali e poi si allonghi .p.L sino in .0. e faccisi la .Lm. eguale alla .e.g. e poi tirisi la .i.m. e faccisi .m.n. eguali alla .m.i. La .n.L sarà la valuta del Tanto e ciascuna delle linee .a.b., .b.c. et .d.e. saranno eguali a detta .n.l., acciochè il quadrato .a.b.c. sia eguale al paralellogramo .d.e.f. et al quadrato .h.i.L e presuponendo che .h.i.L sia 16 et .e.f. 6, la .Lm. sarà 3, per essere pari ad .e.g., metà di .e.f.; e la .i.l. è 4, perchè il quadrato .h.i.l: è 16, e la .i.m. sarà 5, per essere l'angolo, .i.l.m. retto, e la .m.n. sarà 5, per esser pari alla .i.m., e tutta la .Ln. sarà 8. Però tanto deve essere .a.b., .b.c. et .d.e. et essendo ciascuna di loro 8, il quadrato .a.b.c. sarà 64 et il paralellogramo .d.e.f. sarà 48, per essere. .d.e. 8 et .e.f. 6, et essendo .d.e.f. 48 et .h.i.L 16, gionti insieme fanno 64 che sono eguali al quadrato .a.b.c. che parimente è 64 (come si è detto).

Capitolo di potenze e numero eguali a Tanti.

Quando si haverà da agguagliare potenze e numero a Tanti piglisi la metà delli Tanti e quadrisi e del produtto si cavi il numero e del restante se ne pigli il lato e si aggionge, overo si cava, della metà delli Tanti, e la somma, over restante sarà la valuta del Tanto. Ma avertiscasi che ne i quesiti alcuna volta (benchè di rado) il restante non serve, ma bene sì la somma sempre. Avertendosi che se il numero non si potrà cavare del quadrato della metà delli Tanti, tale agguagliatione non si potrà fare, il che non sarà difetto del Capitolo ma del problema che tratterà dell'impossibile, overo dal non haver saputo far la positione, e dell'uno e dell'altro ponerò l'essempio, e prima agguaglisi $1^{\underline{2}} + 12$ a $8^{\underline{1}}$. Piglisi il mezzo delli Tanti, ch'è 4, il suo quadrato è 16, che cavatone 12 resta 4, ch'il suo lato è 2 e questo si aggionge over si cava di 4 (che aggiongendolo sarà 6. e cavandolo sarà 2) che in l'uno e l'altro modo si haverà la valuta del tanto e questo è quanto al primo essempio.

Ma se si haverà ad agguagliare $1^{\underline{2}} + 20$ a $8^{\underline{1}}$, che il quadrato della metà delli Tanti è 16, qual'è minore di 20 e questo agguagliamento non si può fare se non in questo modo sofistico. Cavisi 20 di 16 resta $-$ 4, il suo lato è + di $-$ 2, e questo si cava ed aggionge alla metà delli Tanti, che sarà 4 + di $-$ 2 over 4 $-$ di $-$ 2, e ciascuna di queste quantità da sè sarà la valuta del Tanto. Vi è parimente un altro modo sofistico, che non si potendo cavàre il 20 del 16 si sommino, fa 36, il suò lato è 6 e questo si aggionge alla metà delli Tanti, fa 10 e questo 10 è meno ed è valuta del Tanto.

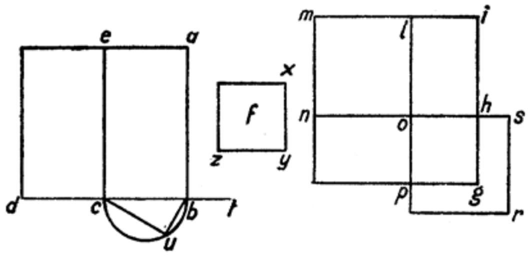
Ma volendo ridurre questo Capitolo a tanti eguali a numero (come si è fatto delli due passati) tengasi la via che si vedrà nello infrascritto essempio. Ma è da avertire che quando non viene questa agguagliatione non è difetto del Capitolo, ma è difetto della positione, cioè che nel principio fu fatta la positione falsa, overo è impossibile trovare quello che si cerca (come si chiarirà a suo luogo).

Agguaglisi $1^{\underline{2}} + 12$ a $8^{\underline{1}}$; levisi $8^{\underline{1}}$ a ciascuna delle parti, farà $1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 12$ eguali a zero. Piglisi il mezo delli Tanti, ch'è $-\ 4$, giongaseli il lato della potenza, farà $1^{\underline{1}} - 4$, che il suo quadrato è $1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 16$, sì che a 12 bisogna aggiongere 4, però aggionto a tutte due le parti 4 si haverà $1^{\underline{1}} - 8^{\underline{1}} + 16$ eguale a 4, che pigliato il lato di ciascuna delle parti sarà $1^{\underline{1}} - 4$ eguale a 2, si che levato il meno sarà $1^{\underline{1}}$ eguale a 6 et 6 è la valuta del Tanto. Avertendosi che nel pigliare il lato d'$1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 16$ potrebbe ancora essere $4 - 1^{\underline{1}}$, che il suo quadrato è pur $1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 16$, sì che si haverebbe $4 - 1^{\underline{1}}$ eguale a 2, che levato il meno sarebbe 4 eguale a $1^{\underline{1}} + 2$, et il tanto valerà 2, che l'uno e l'altro modo è buono.

Questo Capitolo parimente si può agguagliare nell'altro modo detto nelli due passati, senza partire il tutto per la quantità delle potenze, ma cavare del quadrato della metà delli Tanti il produtto del numero via il numero delle potenze e del restante pigliarne il lato e quello giongere aver cavare della metà delli Tanti e la somma aver restante partire per il numero delle potenze, e li avenimenti saranno la valuta del Tanto, **come per essempio: agguaglisi $3^{\underline{2}} + 20$ a l$6^{\underline{1}}$. Piglisi la metà delli Tanti, ch'è 8, quadrisi fa 64, del quale se ne cavi 60, produtto del numero nelle potenze, resta 4, il suo lato è 2, che cavato di 8 et aggionto ad 8 fa 6 e 10, i quali partiti per 3, numero delle potenze, ne viene 2 e $3\frac{1}{3}$ e ciascuno di questi è la valuta del Tanto e per non stare a replicare sempre il medesimo dico che questa medesima regola serve in tutti gli altri simili a questi tre.** [7]

[7]Come volendosi agguagliare $2^{\underline{4}} + 12^{\underline{2}}$ a 40: Riduchisi tutto a $^{\underline{4}}$ partendo tutto per 2 numero dei Censi Censi, si haverà $1^{\underline{4}} + 6^{\underline{2}}$ eguale a 20: pigliasi la metà dei censi, ch'è 3, ch'è il suo quadrato è 9, che gionto a 20, fa 29, che il suo Creatore è e.q.29 et di questo se ne cava il mezzo de i Censi, resta R.q.29 $-$ 3, et se ne piglia il Creatore, che sarà R.q.$\llcorner$R.q.29 $-$ 3$\lrcorner$ et tanto è la valuta della Cosa . ma volendo ridurre questo Capitolo a cose eguali a numeri, faccisi così. Agguagliasi $2^{\underline{4}} + 12^{\underline{2}}$ a 40. riducasi a $1^{\underline{4}}$, partendo ogni cosa per 2 et si havrà $1^{\underline{4}} + 6^{\underline{2}}$ eguale a 20: pigliasi la metà d i Censi, ch'è 3 e aggiongasi al Creatore di $1^{\underline{4}}$, ch'è $1^{\underline{2}} + 3$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 6^{\underline{2}} + 9$: però bisogna aggiongere 9 a $1^{\underline{4}} + 6^{\underline{2}}$; et così all'altra parte; et così si avrà $1^{\underline{4}} + 6^{\underline{2}} + 9$ eguale a 29: pigliasi il Creatore di ciascuno,

Dimostratione del sopradetto Capitolo di potenza e numero eguale a Tanti.



Sia il quadrato .g.i.m. una potenza e la superficie .f. la quale sia 16 numeri e siano eguali al paralellogramo .a.b.d., il quale sia 10 Tanti, facendo che .a.b. sia $1^{\underline{1}}$ et .b.d. 10, et essendo pari la .i.m. et la .a.b. si dividerà (come nella passata) il paralellogramo .a.b.d. in due parti pari con la linea .c.e., et .b.c. et .c.d. sarà 5 ciascuna di loro, per essere tutta la .b.d. lO; hor taglisi del quadrato .g.i.m. il pezzo .h.i.m. pari alla parte .a.b.c., e del restante .g.h.n. [se ne ha da cavare un pezzo] pari alla .e.c.d. e levandosi il pezzo .p.l.m. pari al pezzo .e.c.d. ci viene a mancare il quadro .o.l.m., però del quadro .g.h.o. si levi il quadro .r.o.s. pari al quadro .o.l.m. e si haverà fatto quanto si proponeva. E perchè ci manca il gnomone .h.r.p.g. et habbiamo la superficie .f., di necessità bisogna che il detto gnomone sia pari ad essa superficie .f., acciochè il quadro .i.m. con la superficie .f. siano pari al paralellogramo .a.b.d.; et essendo il gnomone .h.r.p.g. 16, cioè pari alla superficie .f., e tutto il quadro .r.s.o. è 25, perch'è composto dalla linea .s.o. pari alla .o.l. qual'è

sarà $1^{\underline{2}} + 3$ eguale a R.q.29, levasi il 3 da ogni banda, si haverà $1^{\underline{2}}$ eguale a R.q.⌞R.q.29 − 3⌟ et tanto vale la Cosa .

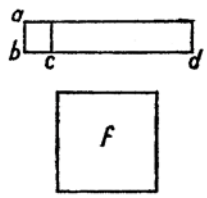
Et per conoscere le dignità date si possono agguagliare: Havendo detto di sopra, agguagliasi Censo Censo a Censo e numero, per sapere se si possono agguagliare, li censi censi hanno il $^{\underline{4}}$ per lor segno, et li Censi hanno il $^{\underline{2}}$: pigliasi la metà dell'uno, et la metà dell'altro: ne viene Censi, et Cose eguali a numeri, che di questo ci è il suo Capitolo; et de la valuta de la Cosa se ne piglia il creatore, perchè fu tolto il mezzo delle dignità, che fu quanto se si fusse pigliato il Creatore di ciascuno da se.

pari alla .b.c. Però essendo il gnomone .h.r.p.g. 16, il quadro .g.h.o. sarà 9, acciochè tutto il quadro .r.s.o. sia 25 et essendo il quadro .g.h.o. 9 la .h.o. sarà 3, cioè il lato di 9, et .o.n. è 5, perch'è pari alla .b.c. e tutta la .h.n. sarà 8, la qual'è pari alla .g.i. però il lato della potenza .g.i.m. sarà 8, cioè il lato .g.i., ch'è la valuta del Tànto, et essendo .g.i. 8 .a.b. sarà 8, per essere anch'egli un Tanto e tutto il paralellogramo .a.b.d. sarà 80 e la potenza .g.i.m. sarà 64, che giontoli la superficie .f. fa 80, che si vede che il quadrato .g.i.m. con la superficie .f. è pari al paralellogramo .a.b.d. (come fu proposto). Ma volendo fare tale agguagliamento geometricalmente riduchisi la superficie .f. a superficie quadrata, non essendo, ma dato che sia quadrata sopra la .b.c. si faccia il mezo cerchio .b.u.c. e si tiri la .c.u. pari alla .x.y. e dal punto .u. si tiri la .u.b. et allonghisi la .c.b. sino in .t. talmente che .b.t. sia eguale alla .u.b. che tutta la .c.t. sarà la valuta del Tanto, cioè quanto deve essere la .b.a. overo la .g.i.

Trasmuttatione dei sopradetti Capitoli.

Quando si vorrà trasmuttare potenza e tanti eguale a numero si potrà trasmutare in potenza eguale a Tanti e numero, e per la valuta del Tanto partito il numero ne verrà la valuta del Tanto avanti la trasmutatione, come se si havesse ad agguagliare $1^{\underline{2}}$ + $6^{\underline{1}}$ a 16, si trasmuttare in $1^{\underline{2}}$ eguale a $6^{\underline{1}}$ + 16, che la valuta del Tanto sarà 8, e partito 16 per questo 8 ne viene 2 e questo 2 è la valuta del Tanto avanti la trasmuttatione. Et il Capitolo di $^{\underline{2}}$ eguale a $^{\underline{1}}$ e numero si può trasmuttare in $^{\underline{2}}$ e $^{\underline{1}}$. eguali a numero, la qual trasmutatione se ben non serve in questi quasi a nulla serve assai ne'Capitoli di cubi potenze e numero, la quale trasmuttatione nasce dalla infrascritta dimostratione.

Sia il paralellogramo .a.b.d. che .a.b. sia $1^{\underline{1}}$. e .b.c. $1^{\underline{1}}$ e c.d. 6, e tutta .b.d. sarà $1^{\underline{1}}$ + 6, et il paralellogramo .a.b.d. sia eguale al paralellogramo .f., il quale; sia 16; adunque il paralellogramo



.a.b.d. è 16 per esser pari all'.f. et l'.a.b.d. è 6 più della .a.b.; però si può dire: travisi un paralellogramo che sia di superficie 16 e che il lato maggiore sia 6 più del minore. Pongasi che l'uno de'lati sia $1^{\underline{1}}$, l'altro sarà 16 esimo d'$1^{\underline{1}}$ acciochè moltiplicato l'uno nell'altro faccia 16; resta a vedere se l'uno de'lati è 6 più dell'altro: pigliandosi il 16 esimo d'$1^{\underline{1}}$ per il minore aggiongaseli 6, fa 16 + $6^{\underline{1}}$ esimo d'$1^{\underline{1}}$, e questo è eguale al lato maggiore, che fu posto $1^{\underline{1}}$, che levato il rotto si haverà 16 + $6^{\underline{1}}$ eguali a $1^{\underline{2}}$, che agguagliato il Tanto valerà 8 e questa sarà la parte maggiore, e la'minore, ch'era 6 meno, sarà 2, overo partire 16 per la valuta d'$1^{\underline{1}}$ ne viene 2 perchè fu posto 16 esimo d'$1^{\underline{1}}$.

Capitolo di potenza di potenza e potenza eguale a numero.

Quando si vorrà agguagliare potenza di potenza e potenza a numero partasi il tutto per la quantità delle potenze di potenze e per non haver sempre a replicar tal cosa si partirà per la quantità della maggior dignità il tutto e ridutto che si haverà a $1^{\underline{4}}$ si pigli il mezzo delle $^{\underline{2}}$ e si quadra ed il produttosi aggionge al numero e della somma se ne piglia il lato se ne cava la metà delle $^{\underline{2}}$ e del restante se ne piglia il lato che sarà la valuta del Tanto. Come volendosi agguagliare $2^{\underline{2}}$ + $12^{\underline{2}}$ a 40, riduchisi a $1^{\underline{4}}$ partendo il tutto per 2, numero delle $^{\underline{4}}$, si haverà $1^{\underline{4}}$ + $6^{\underline{2}}$ eguale a 20. Piglisi la metà delle potenze, ch'è 3, il'suo quadrato è 9, che gionto a 20 fa 29, ch'il suo lato è R.q.29 e di questo se ne cavi la metà delle potenze, ch'è 3, resta R.q.29 − 3 e se ne piglia il lato che sarà R.q.⌞R.q.29 − 3⌟,e questo è la valuta del Tanto. Ma volendo ridurre questo Capitolo

a Tanti eguale a numero faccisi così (ridutto che si haverà a $1^{\underline{4}}$, si haverà $1^{\underline{4}} + 6^{\underline{2}}$ eguale a 20): piglisi la metà delle potenze, ch'è 3, e aggiongasi al lato d'$1^{\underline{4}}$, ch'è $1^{\underline{2}}$, fa $1^{\underline{2}} + 3$,che il suo quadrato è $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{2}} + 9$. Però bisogna aggiongere 9 a ciascuna parte e si haverà $1^{\underline{4}} + 6^{\underline{2}} + 9$ eguale a 29; piglisi il lato di ciascuno si haverà $1^{\underline{2}} + 3$ eguale a R.q.29, levisi il 3 da ogni parte si haverà $1^{\underline{2}}$ eguale a R.q.29 $-$ 3, piglisi il lato di ciascuno si haverà $1^{\underline{1}}$ eguale a R.q.$\llcorner$R.q.29 $-$ 3$\lrcorner$ e questo è la valuta del Tanto. E per conoscere se le dignità date si possono agguagliare (havendo detto di sopra: agguaglisi $^{\underline{4}}$ et $^{\underline{2}}$ a numero) per sapere se si possono agguagliare tengasi questa regola generale: nello agguagliare due dignità con il numero vedasi se il segno della minor dignità è la metà del segno della maggiore, che all'hora tali dignità si potrànno agguagliare, che (come dimostra questo che si è detto) il segno delle potenze ch'è $^{\underline{2}}$ è la metà del segno delle potenze di potenze, ch'è $^{\underline{4}}$, però si possono agguagliare.

$\overset{\smile}{4}\ \ \overset{\smile}{2}$	
$2 + 12$	Eguale a 40
$\overset{\smile}{4}\ \ \overset{\smile}{2}$	
$1 + 6$	Eguale a 20
3	9
3	R.q. 29
9	3

R.q. LR.q. 29 — 3J vale il Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{2}}$ a 12. Piglisi il mezo delle potenze, ch'è 6, quadrisi fa 36, giongesi con 12 fa 48, il suo lato è R.q.48, che cavatone 6 resta R.q.48 $-$ 6 et il suo lato, ch'è RR.q.27 $-$ RR.q.3, è la valuta del Tanto.

Capitolo di potenza di potenza eguale a potenza e numero.

In simili Capitoli si proceda (come nel Capitolo di potenze eguali a Tanti e numero) presuponendo che le potenze di potenze siano potenze, e le potenze siano Tanti, e della valuta del Tanto si piglia il lato et esso lato sarà la valuta del Tanto. Come per essempio havendosi ad agguagliare $1^{\underline{4}}$ a $2^{\underline{2}} + 8$, faccisi d'$1^{\underline{4}}$ $1^{\underline{2}}$ et di $2^{\underline{2}}$ $2^{\underline{1}}$. e si haverà $1^{\underline{2}}$ eguale a $2^{\underline{1}} + 8$. Seguitisi il Capitolo che il Tanto valerà 4, che pigliatone il lato sarà 2 e 2 è la valuta del Tanto. Ma volendo ridurre questo Capitolo a Tanti eguali a numero faccisi così.

Agguaglisi $8^{\underline{2}} + 65$ a $1^{\underline{4}}$; gettansi le potenze da ogni parte e si haverà $1^{\underline{4}} - 8^{\underline{2}}$ eguale a 65; piglisi il mezo delle potenze ne viene $- 4$, che gionto col lato d'$1^{\underline{4}}$ fa $1^{\underline{2}} - 4$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} - 8^{\underline{2}} + 16$ che supera $1^{\underline{4}} - 8^{\underline{2}}$ di 16. Però giongasi 16 ad ambedue le parti, si haverà $1^{\underline{4}} - 8^{\underline{2}} + 16$ eguale a 81; piglisi il lato di ciascuna delle parti si haverà $1^{\underline{2}} - 4$ eguale a 9, levisi il $- 4$ da ogni parte si haverà $1^{\underline{2}}$ eguale a 13, che pigliato il lato di ciascuno si haverà $1^{\underline{1}}$ eguale a R.q.13, che questo è la valuta del Tanto.

Avertendosi che nel pigliare il lato d'$1^{\underline{4}} - 8^{\underline{2}} + 16$ che si potrebbe dire ancora $4 - 1^{\underline{2}}$, che sarebbè eguale a 9, che levato il meno direbbe 4 eguale a $1^{\underline{2}} + 9$, che levato il 4 da ogni parte restarebbe zero eguale a $5 + 1^{\underline{2}}$, che questo non si può agguagliare; però tal modo non è buono ma seguitisi la prima strada.

Capitolo di potenza di potenza e numero eguale a potenza.

In questo Capitolo bisogna procedere, come nel passato, facendo della potenza di potenza $1^{\underline{2}}$ e delle potenze Tanti, come sarebbe ha vendo da agguagliare $1^{\underline{4}} + 20$ a $12^{\underline{2}}$; faccisi della potenza di potenza $1^{\underline{2}}$ et delle $12^{\underline{2}}$ $12^{\underline{1}}$ e si haverà $1^{\underline{2}} + 20$ eguale a $12^{\underline{2}}$; seguitisi il Capitolo che il Tanto valerà 10 over 2. E di questo se ne piglia il lato, che sarà R.q.10 overo R.q.2. Ma se non si potrà cavare il numero del quadrato della metà delle potenze, tal Capitolo non si potrà agguagliare per trattarsi dell'impossibile (come fu detto nel Capitolo di potenze e numeri eguali a tanti). Ma volendo ridurre tal Capitolo a Tanti eguali a numero, faccisi come seguita.
Agguagliasi $1^{\underline{4}} + 16$ a $10^{\underline{2}}$. Levinsi le potenze da ogni parte si haverà $1^{\underline{4}} - 10^{\underline{2}} + 16$ eguale a zero, piglisi la metà delle potenze, ch'è $- 5$, che gionto

col lato di $1^{\underline{4}}$, ch'è $1^{\underline{2}}$, fa $1^{\underline{2}} - 5$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} - 10^{\underline{2}} + 25$, e noi habbiamo 16; però bisogna aggiongere 9 ad ogni parte e si haverà $1^{\underline{4}} - 10^{\underline{2}} + 25$ eguale a 9; piglisi il lato di ciascuno si haverà $1^{\underline{2}} - 5$ eguale a 3, levisi il $- 5$ si haverà $1^{\underline{2}}$ eguale a 8, piglisi il lato di ciascuno si haverà $1^{\underline{1}}$ eguale a R.q.8, e R.q.8 è la valuta del Tanto.

Avertendosi che nel pigliar il lato d'$1^{\underline{4}} - 10^{\underline{2}} + 25$ si potrebbe dire ancora $5 - 1^{\underline{2}}$ eguale a 3, che levato il meno da ogni parte si haverebbe 5 eguale a $1^{\underline{2}} + 3$, che levato il $+ 3$ a ogni parte si haverà 2 eguale a $1^{\underline{2}}$, che pigliato il lato di ciascuno si haverà R.q.2 eguale a $1^{\underline{1}}$, però il Tanto valerà R.q.2.[8]

Capitolo di potenza cuba e cubo eguale a numero.

Quando accade agguagliare queste dignità grandi, per sapere in un tratto se si possono agguagliare o no (come ho detto nel Capitolo di potenze di potenze) quadrisi la dignità mezzana e se fa tanto quanto la maggiore tal Capitolo si può agguagliare, per essere fra di loro continua proportione e come sarebbe ancora se si havesse da agguagliare $^{\underline{5}}$ et $^{\underline{3}}$ a $^{\underline{1}}$, che si vede che a moltiplicare $^{\underline{3}}$ via $^{\underline{1}}$ fa $^{\underline{6}}$ et a moltiplicare 3 in sè fa $^{\underline{6}}$, sì che tal Capitolo anch'egli si può agguagliare levando una dignità a ciascuno (come fu mostrato nel schifare) che levando una dignità al $^{\underline{5}}$ si haverà $^{\underline{4}}$, et il $^{\underline{3}}$ sarà $^{\underline{2}}$ et li $^{\underline{1}}$ saranno numero, che composte insieme si haverà $^{\underline{4}}$ e $^{\underline{2}}$ e numero, e tal Capitolo si può agguagliare (come si è detto e mostrato nei capitoli passati).

[8]agguagliasi $1^{\underline{4}} + 22$ a $8^{\underline{2}}$: buttansi i Censi da ogni banda, et si havrà $1^{\underline{4}} - 8^{\underline{2}} + 22$ eguale a zero; pigliasi la metà de i Censi, ch'è $- 4$ che gionto al Creatore di $1^{\underline{4}}$ fa $1^{\underline{2}} - 4$, ch'è il suo quadrato è $1^{\underline{4}} - 8^{\underline{2}}$ 16, et noi habbiamo 22, che supera di 6; però buttasi 6 da ogni banda, si haverà $1^{\underline{4}} - 8^{\underline{2}} + 16$ eguale a $- 6$. et questo è uno di quei Capitoli, che non si può agguagliare, come fu detto nel Capitolo di Censi et numero eguali a Cose. et di questi tre Di Censo Censo et Censi, et numero non ci metterò altro essempio, ne de Radici legate ne d'altro: perchè bastano gli essempij posti di sopra ne i Capitoli di Censi, Cose et numero.

Agguaglisi $1^{\underline{6}} + 4^{\underline{3}}$ a 21. Piglisi il lato cubico delli cubi della dignità, ma non della quantità, e così della potenza cuba, e si haverà $^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ eguale a 21. Seguitisi il Capitolo che il Tanto valerà 3 e di questo se ne piglia il lato cubico, che sarà R.c.3 e quest'è la valuta del Tanto. Ma volendo ridurre questo Capitolo a Tanti eguali a numero tengasi questa via.

Agguaglisi $1^{\underline{6}} + 8^{\underline{3}}$ a 20. Piglisi il mezo dei Cubi, ch'è 4, e si gionga al lato d'$1^{\underline{6}}$ ch'è $1^{\underline{3}}$, fa $1^{\underline{3}} + 4$, che il suo quadrato sarà $1^{\underline{6}} + 8^{\underline{3}} + 16$ e noi voressimo $1^{\underline{6}} + 8^{\underline{3}}$, che ci è 16 di più: però giongasi 16 ad ambedue le parti farà $1^{\underline{6}} + 8^{\underline{3}} + 16$ eguale a 36, piglisi il lato di ciascuno si haverà $1^{\underline{3}} + 4$ eguale a 6, levisi il 4 da ogni parte si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a 2. Piglisi il lato cubico di ciascuna delle parti, si haverà $1^{\underline{1}}$ eguale a R.c.2, che il Tanto valerà R.c.2, e di questo Capitolo se ne poneranno più essempij, per essere più necessari nelli Capitoli di Cubi Tanti et numero.

Agguaglisi $1^{\underline{6}} + 6^{\underline{3}}$ a 112. Piglisi il mezo delli Cubi ch'è 3, che gionto con $1^{\underline{3}}$, lato d'$1^{\underline{6}}$, fa $1^{\underline{3}} + 3$, che il suo quadrato è $1^{\underline{6}} + 6^{\underline{3}} + 9$, che supera di 9, il quale aggionto ad ambedue le parti fa $1^{\underline{6}} + 6^{\underline{3}} + 9$ eguale a 121. Piglisi il lato di ciascuno, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a 8, che pigliato il lato cubico di ambedue le parti si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a 2 e 2 è la valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{6}} + 20^{\underline{3}}$ a 8. Piglisi il mezo delli Cubi ch'è 10, che aggionto con il lato della potenza cuba fa $1^{\underline{3}} + 10$, che il suo quadrato è $1^{\underline{6}} + 20^{\underline{3}} + 100$ che supera $1^{\underline{6}} + 20^{\underline{3}}$ di 100; aggiungasi il 100 ad ogni parte si haverà $1^{\underline{6}} + 20^{\underline{3}} + 100$ eguale 108. Piglisi il lato di ciascuno si haverà $1^{\underline{3}} + 10$ eguale a R.q.108. Levisi il 10 da ogni parte si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a R.q.108 $-$ 10. Piglisi il lato cubico di ambedue le parti, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a R.c.$\llcorner$R.q.108 $-$ 10$\lrcorner$, che sarà, per le regole date nel primo libro di trovare il lato cubico d'un binomio, R.q.3 $-$ 1, e quest'è la valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{6}} + 4^{\underline{3}}$ a 6. Piglisi il mezo delli Cubi ch'è 2, che gionto con $1^{\underline{3}}$, lato della potenza cuba, fa $1^{\underline{3}} + 2$, che il suo quadrato è $1^{\underline{6}} + 4^{\underline{3}} + 4$, che supera di 4, che gionto 4 a ciascuna delle parti si haverà $1^{\underline{6}} + 4^{\underline{3}} + 4$ eguale a 10. Piglisi il lato di ambedue le parti, si haverà $1^{\underline{3}} + 2$ egua1e a R.q.10, levisi il 2 da ogni parte si haverà $1^{\underline{3}}$, eguale a R.q.10 $-$ 2. Piglisi il lato cubico di ciascuna delle parti, si haverà $1^{\underline{1}}$ eguale a R.c.$\llcorner$R.q.10 $-$ 2$\lrcorner$ e quest'è la valuta del Tanto. Si sono posti tanti essempij di questo Capitolo quanti sono i modi che può valere il Tanto.

Capitolo di potenza cuba eguale a Cubi e numero.

Quando si vorrà agguagliare $^{\underline{6}}$ a $^{\underline{3}}$ e numero operisi (come si è detto nel Capitolo di sopra) pigliandosi il lato cubico della dignità della potenza cuba ed il lato cubico della dignità de'cubi, come sarebbe se si havesse da agguagliare $1^{\underline{6}}$ a $20^{\underline{3}} + 8$. Piglisi il lato cubico d'$1^{\underline{6}}$ ed il lato cubico della dignità dei cubi, sarà $20^{\underline{1}}$, e si haverà $1^{\underline{2}}$ eguale, a $20^{\underline{1}} + 8$. Seguitisi il Capitolo che il Tanto valerà R.q.108 + 10 e di questo si deve pigliare il lato cubico che sarà R.c.$\llcorner$R.q.108 + 10$\lrcorner$, che il suo lato è R.q.3 + 1 e tanto vale il Tanto. Ma volendo ridurre tal Capitolo a Tanti eguali a numero, faccisi come si 'vede nella figura e nel seguente essempio.

$1^{\underline{6}}$ Eguale a $20^{\underline{3}} + 8$
$1^{\underline{6}} - 20^{\underline{3}}$ Eguale a 8
$1^{\underline{6}} - 20^{\underline{3}} + 100$ Eguale a 108
$1^{\underline{3}} - 10$ Eguale a R.q.108
$1^{\underline{3}}$ Eguale a R.q.108 + 10
$1^{\underline{1}}$ Eguale a R.q.3 + 1

Agguaglisi $1^{\underline{6}}$ a $6^{\underline{3}} + 16$; levinsi i cubi da ogni parte si haverà $1^{\underline{6}} - 6^{\underline{3}}$ eguale a 16, piglisi il mezo de i cubi, sarà $-$ 3, che aggionto col lato d'$1^{\underline{6}}$ farà $1^{\underline{3}} - 3$, che il suo quadrato è $1^{\underline{6}} - 6^{\underline{3}} + 9$, eguale a 25; piglisi il lato di ciascuna delle parti si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a 8, che pigliato il lato cubico di ciascuna delle parti sarà $1^{\underline{1}}$ eguale a 2 e 2 vale il Tanto.

$1^{\underline{6}}$ Eguale a $6^{\underline{3}} + 16$
$1^{\underline{6}} - 6^{\underline{3}}$ Eguale a 16
$1^{\underline{6}} - 6^{\underline{3}} + 9$ Eguale a 25
$1^{\underline{3}} - 3$ Eguale a 5
$1^{\underline{3}}$ Eguale a 8
$1^{\underline{1}}$ Eguale a 2

Agguaglisi $1^{\underline{6}}$ a $6^{\underline{3}} + 10$. Levisi i Cubi da ogni parte si haverà $1^{\underline{6}} - 6^{\underline{3}}$ eguale a 10, piglisi il mezzo di $- 6^{\underline{3}}$, ch'è $- 3$, che aggionto col lato d'$1^{\underline{6}}$ fa $1^{\underline{3}} - 3$, che il suo quadrato è $1^{\underline{6}} - 6^{\underline{3}} + 9$, che supera di 9. Però giongasi 9 a ciascuna parte, si haverà $1^{\underline{6}} + 6^{\underline{3}} + 9$ eguale a 19; piglisi il lato di ciascuno si haverà $1^{\underline{3}} - 3$ eguale a R.q.19, levisi il 3 si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a R.q.19 + 3, piglisi il lato cubico di ciascuno si haverà $1^{\underline{1}}$ eguale a R.c.$\llcorner$R.q.19 + 3$\lrcorner$ e questo sarà la valuta del Tanto. Et perchè questo Capitolo rarissime volte accade e non serve se non a se stesso, però di esso non ne ponerò altro essempio.

$1^{\underline{6}}$ Eguale a $6^{\underline{3}} + 10$
$1^{\underline{6}} - 6^{\underline{3}}$ Eguale a 10
$1^{\underline{6}} - 6^{\underline{3}} + 9$ Eguale a 19
$1^{\underline{3}} - 3$ Eguale a R.q.19
$1^{\underline{3}}$ Eguale a R.q.19 + 3
$1^{\underline{1}}$ Eguale a R.c.$\llcorner$R.q.19 + 3$\lrcorner$

Capitolo di potenza cuba e numero eguale a Cubi.

Quando si haverà da agguagliare potenza cuba e numero a Cubi piglisi il lato cubico della dignità della potenza cuba e de' cubi, e si haverà potenza e numero eguale a Tanti, come sarebbe se si havesse da agguagliare $1^{\underline{6}} + 16$ a $12^{\underline{3}}$. Faccisi come si è detto e si haverà $1^{\underline{2}} + 16$ eguale a $12^{\underline{1}}$. Seguitisi il Capitolo che il Tanto valerà $6 - $ R.q.20, overo $6 +$ R.q.20 e di questo si pigli il lato cubico, che sarà R.c.$\llcorner 6 - $ R.q.$20\lrcorner$ overo R.c.$\llcorner 6 +$ R.q.$20\lrcorner$, et se non si potrà cavare il numero dal quadrato della metà delli Tanti, si trattera dell'impossibile. Ma volendo ridurre tal Capitolo a Tanti eguale a numero, faccisi cosi.

Agguaglisi $1^{\underline{6}} + 16$ a $10^{\underline{1}}$; gettinsi li $10^{\underline{1}}$ da ogni parte e si haverà $1^{\underline{6}} - 10^{\underline{3}} + 16$ eguale a zero; piglisi il mezo delli Cubi, che sarà $- 5$, giongasi al lato d'$1^{\underline{6}}$ fa $1^{\underline{3}} - 5$, che il suo quadrato supera il 16 di 9. Però giongasi 9 ad ambedue le parti e si haverà $1^{\underline{6}} - 10^{\underline{1}} + 25$ eguale a 9, piglisi il lato di ciascuna delle parti si haverà $1^{\underline{3}} - 5$ eguale a 3, levisi il 5 si haverà $1^{\underline{1}}$ eguale a 8, piglisi il lato cubico di ciascuna delle parti si haverà $1^{\underline{1}}$ eguale a 2, che il Tanto valerà 2.

$1^{\underline{6}} + 16$ Eguale a $10^{\underline{3}}$
$1^{\underline{6}} - 10^{\underline{3}} + 16$ Eguale a 0
$1^{\underline{6}} - 10^{\underline{3}} + 25$ Eguale a 9
$1^{\underline{3}} - 5$ Eguale a 3
$1^{\underline{3}}$ Eguale a 8
$1^{\underline{1}}$ Eguale a 2

Agguaglisi $1^{\underline{6}} + 8$ a $40^{\underline{3}}$; si gettino li $40^{\underline{3}}$ da ogni parte che ne verrà $1^{\underline{6}} - 40^{\underline{3}} + 8$ eguale a zero; piglisi la metà de' cubi, che sarà $- 20$, e si aggionga al lato d'$1^{\underline{6}}$, che sarà $1^{\underline{3}} - 20$, che il suo quadrato sarà $1^{\underline{6}} - 40^{\underline{3}} + 400$ che eccede 8 di 392, però aggiongasi 392 ad ambedue le parti si haverà $1^{\underline{6}} - 40^{\underline{3}} + 400$ eguale a 392, piglisi il lato di ciascuna quantita, si haverà $1^{\underline{1}} - 20$ eguale a R.q.392, levisi il $- 20$ ad ambedue le parti, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a R.q.392 $+ 20$; piglisi il lato cubico di ciascuna si haverà $1^{\underline{1}}$ eguale a R.c.$\llcorner$R.q.$392 + 20\lrcorner$, ch'è R.q.$2 + 2$ e questo è la valuta del Tanto.

$1^{\underline{6}} + 8$ Eguale a $40^{\underline{3}}$

$1^{\underline{6}} - 40^{\underline{3}} + 8$ Eguale a 0

$1^{\underline{6}} - 40^{\underline{3}} + 400$ Eguale a 392

$1^{\underline{3}} - 20$ Eguale a R.q.392

$1^{\underline{3}}$ Eguale a R.q.392 + 20

$1^{\underline{1}}$ Eguale a R.q.2 + 2

Agguaglisi $1^{\underline{6}} + 36$ a $20^{\underline{3}}$; levinsi $20^{\underline{3}}$ per parte che ne verrà $1^{\underline{6}} - 20^{\underline{3}} + 36$ eguale a zero. Piglisi la metà de'cubi, che sarà $-$ 10, giongasi col lato d'$1^{\underline{6}}$, ch'è $1^{\underline{3}}$, fa $1^{\underline{3}} - 10$, che il suo quadrato è $1^{\underline{6}} - 20^{\underline{3}} + 100$, che supera il 36 di 64, però giongasi 64 a ciascuna delle parti farà $1^{\underline{6}} - 20^{\underline{3}} + 100$ eguale a 64, piglisi il lato di ambedue le parti e si haverà $1^{\underline{3}} - 10$ eguale a 8, levisi il meno si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a 18, piglisi il lato cubico di ambedue le parti si haverà $1^{\underline{1}}$ eguale a R.c.18, però il Tanto valerà R.c.18. [9]

Capitolo di Cubo et Tanti eguale a numero.

Perchè non meno difficile è la operatione di questi agguagliamenti, di tanti eguali a numero che seguiranno di quello che siano le operationi di R.q.rispetto a semplici numeri, però bisogna che totalmente il lettore vi applichi l'animo acciochè possa benissimo apprendergli e farsene pratico, che di non pensata utilitade gli sarà, e per non più dilattarmi in parole dico che volendosi vedere l'operatione di Cubo e Tanti eguali a numero che si pigli la terza parte delli Tanti e cubisi, e piglisi la metà del numero e quadrisi, e questi dui produtti si aggionghino insieme e della somma se ne pigli il lato

[9] Agguagliasi $1^{\underline{6}} - 20$ a $6^{\underline{3}}$; pigliasi la metà de i cubi, ch'è 3, quadrasi fa 9, cavasene 20, resta $-$ 11, però non si può agguagliare se non sofisticamente; per essere maggiore il numero del quadrato de l ametà de i Cubi; il qual modo assai volte serve ne i capitoli di cubi et numeri eguali a Cosa: poi pigliasi il Creatore di $-$ 11 sarà R.q.$\llcorner - 11\lrcorner$, et questo si aggiunge alla metà de i cubi fa 3 + R.q.$\llcorner - 11\lrcorner$, et di questo si piglia il creator cubico, sarà R.c.$\llcorner 3 +$ R.q.$\llcorner - 11\lrcorner\lrcorner$ et tanto vale la cosa.
Gli essempi di questi capitoli di Censo Censo et numero bisogna bene metterli in pratica, perchè servono ad agguagliare Cubi, Cose et numero.

ed a quello si aggionge la metà del numero e di questo Binomio si piglia il lato cubico, del quale si cavi il lato cubico del residuo di detto Binomio, che si haverà quanto si ricerca, come per essempio.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{1}}$ a 20; piglisi il terzo delli Tanti, ch'è 2, cubisi fa 8, aggionghisi a 100, quadrato del mezzo del numero, fa 108 e di questo si pigli il lato, che sarà R.q.108, ed a questo si aggionghi 10 ch'è il mezzo del numero, fa R.q.108 + 10, che pigliato ne il lato cubico sarà R.c.$\llcorner$R.q.108 + 10$\lrcorner$, e di questo se ne cava il suo residuo, ch'è R.c.$\llcorner$R.q.108 $-$ 10$\lrcorner$, ed il restante sarà R.c.$\llcorner$R.q.108 + 10$\lrcorner$ + R.c.$\llcorner$R.q.108 $-$ 10$\lrcorner$ e questo sarà la valuta del Tanto, et perchè R.c.$\llcorner$R.q.108 + 10$\lrcorner$ ha lato cubico, ch'è R.q.3 + l, e così R.c.$\llcorner$R.q.108 $-$ 10$\lrcorner$ è R.q.3 $-$ 1, che cavato di R.q.3 + 1 resta 2, et 2 vale il Tanto, e questa equatione si cava dal dire: Trovami dui numeri che moltiplicati l'uno via l'altro faccino 2 terza parte delli Tanti e che il cubato dell'uno cavato del cubato dell'altro resti 20, cioè il numero ch'era eguale a $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{1}}$. Pongasi l'uno di detti numeri essere $1^{\underline{1}}$, l'altro sarà 2 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che moltiplicati l'uno via l'altro fanno 2. Rara piglisi il cubato di ciascuno da sè, fanno $1^{\underline{3}}$ e 8 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che cavato 8 esimo d'$1^{\underline{3}}$ d'$1^{\underline{3}}$, resta $1^{\underline{6}} - 8$ esimo d'$1^{\underline{3}}$, e questo è eguale a 20; levisi il rotto e si haverà $1^{\underline{6}} - 8$ eguale a $20^{\underline{3}}$. Seguitisi il Capitolo (come fu insegnato a suo luogo) che il Tanto valerà R.c.$\llcorner$R.q.108 + 10$\lrcorner$ e questo è la valuta del Tanto, che sarà uno delli due numeri che si domandavano, e per trovar l'altro partasi 2 per la valuta del Tanto, cioè per R.c.$\llcorner$R.q.108 + 10$\lrcorner$ (come fu insegnato nel primo libro), ne verrà R.c.$\llcorner$R.q.108 $-$ 10$\lrcorner$, e questi sono li due numeri, cioè R.c.$\llcorner$R.q.108 + 10$\lrcorner$ e R.c.$\llcorner$R.q.108 $-$ 10$\lrcorner$, che moltiplicato l'un via l'altro fanno 2, ed il cubato del minore, cioè di R.c.*R.q.*108-10, è R.q.108 $-$ 10, che cavato del cubato di R.c.$\llcorner$R.q.108 + 10$\lrcorner$, ch'è R.q.108 + 10, resta 20 (come si domandò di sopra). Sì che di questi due numeri trovati si cava il minore del maggiore e resta la valuta del Tanto (come si è detto di sopra); et perchè di sopra ho detto che si cavi 8 esimo d'$1^{\underline{3}}$ d'$1^{\underline{3}}$ (dicendo la domanda che tratto l'uno dell'altro), tanto si può cavare $1^{\underline{3}}$ di 8 esimo d'$1^{\underline{3}}$, che restarà $8 - 1^{\underline{6}}$ i esimo d'1$^{\underline{3}}$ eguale a 20. Seguitisi il Capitolo che il Tanto valerà R.c.⌞R.q.108 − 10⌟ e questo sarà un'delli numeri; e volendo l'altro partasi 2 per R.c.⌞R.q.108 − 10⌟, ne viene R.c.⌞R.q.108+ 10⌟, che si può fare nell'un e nell'altro modo.

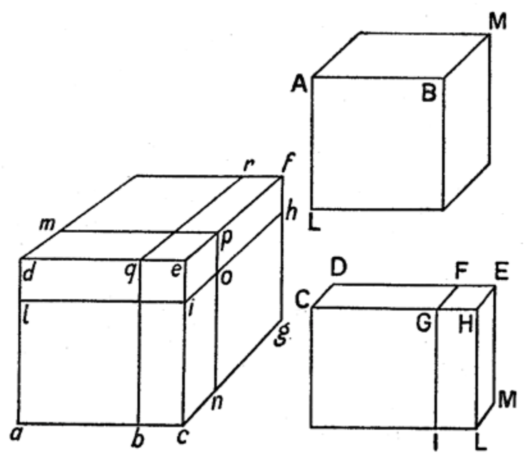
Agguaglisi 1$^{\underline{3}}$ + 9$^{\underline{1}}$ a 26. Piglisi il terzo delli Tanti, ch'è 3, e cubisi fa 27, aggiunghisi al quadrato della metà del numero, ch'è 169, fa 196, che il suo lato è R.q.196, che aggiontoli 13 fa R.q.196 + 13, e R.c.⌞R.q.196 + 13⌟ − R.c.⌞R.q.196 − 13⌟ vale il Tanto, e perchè 196 ha lato, ch'è 14, che aggionto con 13 fa 27, che il suo lato cubico è 3 e questo è il lato del Binomio, et il lato del Residuo sarà questo: piglisi il lato di R.q.196, ch'è 14, che trattone 13 resta 1 che il suo lato cubo è 1 e questo è il lato del residuo, che cavato del lato del Binomio, ch'era 3, resta 2 e 2 è la valuta del Tanto.

Agguaglisi 1$^{\underline{3}}$ + 12$^{\underline{1}}$ a 8; piglisi il terzo delli Tanti, ch'è 4, cubisi fa 64,

$\overset{\smile}{1}{}^{3}$ + $12^{\smile 1}$	Eguale a	8
4		4
4		4
16		16
4		64
64	R.q.	80
R.q. 80 + 4	R.q. 80 — 4	
R.c. LR.q. 80 + 4.I —	R.c. LR.q. 80 — 4.I	
Vale il Tanto.		

aggiungasi al quadrato della metà del numero fa 80, piglisene il lato, sarà R.q.80, che aggiontoli la metà del numero fa R.q.80 + 4, che pigliatone il lato cubico sarà R.c.LR.q.80 + 4.1, che cavatone il suo residuo restarà R.c.⌞R.q.80 + 4⌟ − R.c.⌞R.q.80 − 4⌟ e questo è la valuta del Tanto, il che non si può abbassare, per non haver dette Radici lato cubico, et fuor di questi tre modi non può avenir simile Ca pitolo, e di dove nasca tal regola si vedrà nella seguente dimostratione, ma prima non restarò di dire che se ne può cavare questa domanda. Trovami due numeri quadrati che li loro lati gionti insieme faccino numero cubo, e detratti i lati l'uno dell'altro resti pur numero cubo. Operisi in questo modo: piglisi un numero cubo, ma che sia dispari (co me sarebbe 125), del quale se ne pigli il mezzo, ch'è $62\frac{1}{2}$, gettisi il mezzo, resta 62, che sino a 125 ci manca 63. Hor quadrinsi 62 e 63, saranno 3844 e 3969 e questi sono li due numeri cercati, che pigliato il lato di ciascuno di loro sarà 62 e 63, che gionti insieme fanno 125, ch'è cubo, e cavato l'uno dell'altro resta l, che parimente è cubo.

Dimostratione del sopradetto Capitolo di Cubo e Tanti eguale a numero.



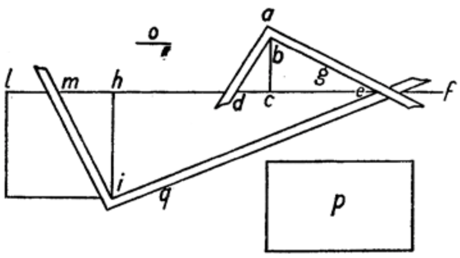
Per intendere questa dimostratione bisogna havere un Cubo materiale (come saria il cubo .d.c.g.) nel quale si darà tre tagli equidistanti di linee e di superficie, l'uno sia il taglio .m.n.p., l'altro .r.b.q. e l'altro .l.i.h., facendo che .q.e. et .i.e. et .e.p. siano pari fra di loro, e con questi tre tagli si faranno otto pezzi, delli quali dui saranno cubi, che l'uno sarà formato sopra una superficie pari alla .a.b.l e l'altro sopra la base .q.e.i., e si formaranno tre altri pezzi detti paralepippidi, che haveranno pari alla superficie .l.a.b. là sua base e l'altezza sarà pari alla .q.e., e tre altri pezzi che la lor base sarà pari alla superficie .q.e.i. et la loro altezza alla .i.c. et havendo tal cubo così tagliato ci servirà a tutte le dimostrationi de'Cubi, che senza esso difficilmente si intenderebbe.

Sia $1^{\underline{3}}$ et $6^{\underline{1}}$ eguale a 20. Faccisi il cubo .L.A.B.M. che la linea .L.A.

sia pari alla .a.b., poi si piglino dui paralepippidi, uno de'maggiori e l'altro de'minori, e aggiongansi insieme talmente che faccino il paralepippido .M.L.C.; li altri quattro paralepippidi verranno a formare due paralepippidi pari al paralepippido .M.L.C., li quali (per non confondere il lettore) non li formarò altrimenti e verranno ad essere tre paralepippidi pari fra di loro, e perchè la intentione è di volere che detti paralepippidi siano il $6^{\underline{1}}$, l'uno sarà $2^{\underline{1}}$; adunque diremo il paralepippido .M.L.C. essere $2^{\underline{1}}$ e perchè la .L.H. è pari alla .A.L. (lato del cubo .L.B.M.) et il lato del cubo è $1^{\underline{1}}$ diremo la .L.H. essere $1^{\underline{1}}$, e perchè tutto il paralepippido .M.L.C. è $2^{\underline{1}}$ di necessità la superficie .C.E. sarà 2, che moltiplicato per l'altezza .L.H. fa $2^{\underline{1}}$, e perchè habbiamo due altri paralepippidi che li sono pari, fra tutti tre saranno $6^{\underline{1}}$, che con il cubo .L.B.M. habbiamo $1^{\underline{3}}$ e $6^{\underline{1}}$ eguale a 20, e se aggiongeremo il detto cubo con li detti tre paralepippidi formaremo un cubo al quale mancarà per fornirlo un cubo fatto sopra la base .q.e.i., servendoci della prima figura, il qual cubo non finito chiamerò Gnomonide, il quale Gnomonide sarà eguale a 20 perchè egli è composto d'$1^{\underline{3}}$ et $6^{\underline{1}}$ (come si è mostrato), però tal Gnomonide è 20, e perchè si sa che la linea .C.H. in .H.E. deve fare 2, diremo che il lato del Gnomonide .a.c. moltiplicato nel lato del cubo .q.c. deve fare 2, perchè la .a.c. è pari alla .C.H. et .q.e: alla .H.E., e del cubo della .a.c., che viene a formare il cubo .a.c.e.f., trattone il cubato della .q.e. ne deve restar 20, cioè il Gnomonide detto, però si formarà la proposta: trovisi due numeri che moltiplicato l'uno via l'altro faccia 2 e del cubato della maggiore cavato il cubato della minore resti 20. Ponghisi la .a.c. esser $1^{\underline{1}}$ e la .q.e. 2 esimo d'$1^{\underline{1}}$, il cubato di .a.c. sarà $1^{\underline{3}}$ et il cubato della .q.e. sarà 8 esimo d'$1^{\underline{3}}$, che cavato d'$1^{\underline{3}}$ resta $1^{\underline{6}} - 8$ esimo d'$1^{\underline{3}}$, e questo è il Gnomonide, il quale per la prova detta è 20; però si haverà $1^{\underline{6}} - 8$ esimo d'$1^{\underline{3}}$ eguale a 20, che levato l'esimo si haverà $1^{\underline{6}} - 8$ eguale a $20^{\underline{3}}$, che levato il meno ne viene $1^{\underline{6}}$ eguale a $20^{\underline{3}} + 8$, che agguagliato

il Tanto vale R.c.$\llcorner$R.q.108 + 10$\lrcorner$, ch'è R.q.3 + 1, e tanto è la .a.c.; e perchè la .q.e. era 2 esimo d'$1^{\underline{1}}$ partasi 2 per R.q.3 + l, ne viene R.q.3 − 1 e tanto è la .q.e., che levata della .a.c. resta 2 per la .a.b. lato del primo cubo, che viene ad essere il Tanto; però si dirà il Tanto valere 2.

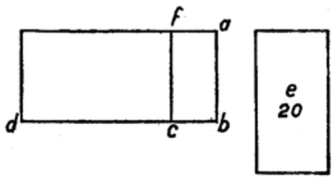
Dimostratione del sopradetto Capitolo di Cubo e Tanti eguale a numero in superficie piana.



Habbisi $1^{\underline{3}}$ e $6^{\underline{1}}$ eguale alla superficie .p. che sia 20, e la .o. sia la unità, e faccisi il quadrato .l.h.i. eguale alla superficie .p., che la .l.h. et .h.i. ciascuna sarà R.q.20; allonghisi la .l.h. sino in .f. e faccisi .h.c. che sia 6, cioè quanto è il numero delli Tanti e faccisi .d.c. l, cioè pari alla .o. et poi tirisi la perpendicolare .c.a.; fatto questo habbiansi dui squadri materiali, che saranno (come si vede nella figura) l'uno segnato .g. e l'altro .q. e di questi lo squadro .q. si ponga con l'angolo su la estremità .i. e l'altro si ponga con l'angolo sopra la linea .a.c., essendo ambidui volti con le braccia verso la linea .f.l. e lo squadro .g. si faccia tagliare con l'uno delle braccia la linea .c.h. in punto .d. e alzisi o abbassisi poi tanto che facendo intersegatione le due braccia .g. et .q. nella linea .c.f. facciano che la .b.c. et .h.m. siano pari, e fatto questo dico che la linea .b.c. è il Tanto cercato; il che così si prova. Faccisi sopra la .e.h. il paralellogramo .n.e.h. tale che .n.e. sia pari alla .b.c. ico che la .c.e. sarà una potenza, perchè essendo .c.b. un Tanto e .c.d.

1, la .c.e. sarà una potenza, per esser l'angolo .d.b.e. retto, che tanto può .d.c. in .c.e. quanto .c.b. in sè, ed essendo .b.c. $1^{\underline{1}}$ et .c.e. $1^{\underline{2}}$, il paralellogramo .n.e.c. sarà $1^{\underline{3}}$, et essendo .c.h. 6 et .c.b. $1^{\underline{1}}$ il paralellogramo .b.c.h. sarà $6^{\underline{1}}$ e tutto il paralellogramo .n.e.h. è $1^{\underline{3}}$ e $6^{\underline{1}}$; resta a provare che sia pari alla superficie .p., ch'è 20, overo al quadrato .i.h.l. che gli è pari, e questo si prova facilmente essendo .h.m. pari alla .b.c. et .n.e. et essendo l'angolo .m.i.e. retto, tanto può la .m.h. in .h.e. quanto .h.i. in sè, che la .m.h. in la .h.e. produce il paralellogramo .n.e.h. e la .h.i. in sè produce il quadrato .i.h.l., sì che per questo si trova che il paralellogramo .n.e.h. è pari alla superficie .p. (come si cercava). Et perchè la .b.c. è 2 (per le regole date nell'agguagliare) la .c.e. sarà 4, perch'è il quadrato della .b.c., e tutta .e.h. sarà lO, perchè .c.h. è 6 et .n.e. è 2, per essere pari a .b.c., il paralellogramo .n.e.h. sarà 20 (come è la superficie .p. overo il quadrato .i.h.l.) e perchè si sa che a trovare le due medie proportionali fra due linee date non ci è via reale, ma si opera a tentoni (come si è mostrato nella estrattione delle R.c.in linea) però non si deve tenere questa dimostratione di poco valore per havere ad alzare et abbassare lo squadro .g. tanto che la .b.c. sia pari alla .h.m., perchè dove intervengono corpi non si può fare altrimente.

Transmuttatione del sopradetto Capitolo di Cubo e Tanti eguale a numero in Cubo eguale a potenze e numero.



Questo Capitolo di $^{\underline{3}}$ e $^{\underline{1}}$ eguali a numero si può transmutare in $^{\underline{3}}$ eguali a $^{\underline{2}}$ e numero, et il modo è questo. Presuposto che si vogli trasmuttare

$1^{\underline{3}}$ e $6^{\underline{1}}$ eguale a 20, si può trasmuttare con dire: trovami due numeri che moltiplicati l'uno via l'altro faccino 20 e 'che al cubato di uno di loro gionto la moltiplicatione di esso via 6 faccia 20; ponghisi che l'uno di detti due numeri sia $1^{\underline{1}}$, l'altro sarà 20 esimo d'$1^{\underline{1}}$; piglisi $1^{\underline{1}}$ e cubisi fa $1^{\underline{3}}$, aggiongaseli la moltiplicatione d'esso via 6, ch'è $6^{\underline{1}}$, fa $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 20. Ma chi havesse pigliato 20 esimo d'$1^{\underline{1}}$, il suo cubo sarà 8000 esimo d'$1^{\underline{3}}$ e la sua moltiplicatione via 6 è 120 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che gionto con 8000 esimo d'$1^{\underline{3}}$. (come a suo luogo si è insegnato) faranno $8000 + 120^{\underline{2}}$, esimi d'$1^{\underline{3}}$ e questo è eguale a 20, che levato il rotto si haverà $20^{\underline{3}}$ eguali a $8000 + 120^{\underline{2}}$, e ridutto a $1^{\underline{3}}$ si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $6^{\underline{2}} + 400$ e quest'è la trasmuttatione d'$1^{\underline{3}} + 6^{\underline{1}}$ eguale a 20. Ma volendo fare la trasmuttatione con brevità moltiplichisi il numero in sè ed aggiungaseli il numero delli Tanti che era col cubo, ma che dichino $^{\underline{2}}$ e si haverà $^{\underline{3}}$ eguale a $^{\underline{2}}$ e numero, come sarebbe volendo trasmuttare $1^{\underline{3}} + 4^{\underline{1}}$ eguale a 12, si potrà dire $1^{\underline{3}}$ eguale a $4^{\underline{2}} + 144$, ma per la valuta del Tanto di questa trasmuttatione partasi 12, ch'era il numero di prima, e ne verrà la valuta del Tanto avanti la trasmuttatione.

Dimostratione della sopradetta Transmuttatione.

Sia il paralellogramo .a.b.c.d., tale che la .a.b. sia un Tanto .b.c. $1^{\underline{2}}$ e .c.d. 6, eguale al paralellogramo .e. il quale sia 20; egli è chiaro che il paralellogramo .a.b.d. è pari al paralellogramo .e., perchè sono eguali: però il produtto di .a.b. in .b.d. deve essere 20 et la .b.c. deve essere $1^{\underline{2}}$, cioè il quadrato della .a.b., acciochè il paralellogramo .a.b.c. sia $1^{\underline{3}}$ et .f.c.d. $6^{\underline{1}}$, però bisogna trovare due numeri che moltiplicato l'uno nell'altro faccino 20 e che l'uno de lati sia 6 più dell'altro quadrato. Hor pongasi che .b.d. sia $1^{\underline{1}}$ .et .a.b. 20 esimi d'$1^{\underline{1}}$, acciochè il produtto dell'uno nell'altro faccia 20; resta che il quadrato di .a.b. con 6 più faccia $1^{\underline{1}}$ perchè .b.d. fu posto $1^{\underline{1}}$, ma il quadrato di .a.b. è 400 esimi d'$1^{\underline{2}}$ e con 6 più fa $400 + 6^{\underline{2}}$ esimi d'$1^{\underline{2}}$ e questo è eguale a $1^{\underline{1}}$; levato l'esimo si haverà $400 + 6^{\underline{2}}$ eguale a $1^{\underline{3}}$, sì che si vede che la trasmuttatione è fatta; il

modo poi d'agguagliarlo s'insegnarà a suo luogo, ma il Tanto valerà 10 e questo sarà la longhezza di .b.d., et .a.b. ch'era 20 esimo d'$1^{\underline{1}}$ sarà 2.

Capitolo di Cubo eguale a Tanti e numero.

Volendo agguagliare cubo a Tanti e numero piglisi il terzo delli Tanti e cubisi ed il produtto si cavi del quadrato della metà del numero, e di quello che resta se ne pigli il lato al quale si aggionge e cava il mezzo del numero, e della somma et restante se ne piglia il lato cubico di ciascuno da se, e questi due lati gionti insieme sono la valuta del Tanto (come si vedra nelli infrascritti essempij).
Agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $6^{\underline{1}} + 40$. Piglisi il terzo delli Tanti, ch'è 2, cubisi fa 8 e questo

$$\begin{array}{lccr} \overset{3}{\smile}\!\!\!\!\!1 \text{ eguale a} & \overset{1}{\smile}\!\!\!\!\!6 & + & 40 \\ & \overline{2} & & \overline{20} \\ & 2 & & 20 \\ & \overline{4} & & \overline{400} \\ & 2 & & 8 \\ & \overline{8} & & \overline{392} \\ & \text{R.q. } 392 & & \end{array}$$

si cava del quadrato della metà del numero, ch'è 400, resta 392, e di questo si piglia il lato, ch'è R.c.392 e si aggionge alla metà del numero, che sarà 20 + R.c.392, e R.c.di questo binomio aggionto con la R.c.del suo residuo, cioè con R.c.⌞20 + R.c.392⌟, li suoi lati cubici sono l'uno 2 + R.c.2 e l'altro 2 + R.c.2, che aggionti insieme fanno 4 e 4 vale il Tanto, e questo agguagliamento nasce dalla dimostratione che segue, dalla quale nasce la infrascritta domanda.
Trovami due numeri che moltiplicati l'uno via l'altro faccino 2, terza parte delli Tanti, e che li loro cubati gionti insieme faccino 20. Pongasi l'uno essere $1^{\underline{1}}$, l'altro sarà 2 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che li loro cubati saranno $1^{\underline{3}}$ e 8 esimo d'1 che gionti insieme fanno $1^{\underline{6}}$ + 8 esimi d'$1^{\underline{3}}$ e questo è eguale a 20; levisi il rotto si haverà $1^{\underline{6}}$ + 8 eguale a $20^{\underline{3}}$. Seguitisi il Capitolo che ne verrà R.c.⌞20 + R.c.392⌟ e questo sarà uno delli due numeri, e volendo l'altro partasi 2, terzo delli Tanti, per R.c.⌞20 + R.c.392⌟, ne viene R.c.⌞20 + R.c.392⌟ e questo è

l'altro numero, che aggionti insieme fanno la valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $9^{\underline{1}} + 28$; piglisi il terzo delli Tanti e cubisi e questo si cavi di 196, quadrato della metà del numero, resta 169 e di questo si piglia il lato, ch'è 13, e questo si aggionge e cava del mezzo del numero, fa 27 e 1, che tolto il lato cubico di ciascuno sarà 3 et 1, che gionti insieme fanno 4 e questo è la valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $12^{\underline{1}} + 20$. Cubisi il terzo delli Tanti, ch'è 4, fa 64 che cavato di 100, quadrato della metà del numero resta 36 che il suo lato, ch'è 6, aggionto e cavato di 10, metà del numero, fa 16 e 4, che la R.c.di ciascuno e R.c.16 et R.c.4, che gionte insieme fanno R.c.16 + R.c.4, e tanto vale il Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $3^{\underline{1}} + 2$. Piglisi il terzo delli Tanti, ch'è 1, e cubisi fa 1, e questo cavato del quadrato della metà del numero, ch'è pur 1, resta zero e R.c.1, metà del numero, + R.c.0, cioè R.c.⌞1 + R.c.0⌟, più il suo residuo, cioè R.c.⌞1 + R.c.0⌟, che ciascuno di loro sarà 1, che gionti insieme saranno 2, valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $3^{\underline{1}} + 4$. Piglisi il terzo delli Tanti, ch'è 1, cubisi fa 1 e questo si cava del quadrato della metà del numero, ch'è 4, resta 3, di che pigliato il lato, che sarà R.c.3, e gionto alla metà del numero farà 2 + R.c.3 e R.c.di questo binomio più la R.c.del suo residuo valerà il Tanto, cioè R.c.⌞2 + R.c.3⌟ + R.c.⌞2 + R.c.3⌟ e questo non si può abbassare, ne rispondere in altro modo quanto alla regola di questo Capitolo.

Agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $12^{\underline{1}} + 9$. Questo non si può agguagliare per le regole date, perchè il cubato del terzo delli Tanti supera il quadrato della metà del numero, però bisogna tenere quella regola messa dal Cardano di aggiongere un numero cubo ad ambedue le parti, overo cavarlo, del quale pigliato il suo lato cubo sia in tal proportione a uno per regola qual'e il numero alli Tanti, come sarebbe se a 1 eguale a $12^{\underline{1}} + 9$ si aggiongerà 27 (ch'è numero cubo) a

$$\begin{array}{ll}
\overset{3}{1} \text{ eguale a } & \overset{1}{12} + 9 \\
27 & \quad\ 27 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\overset{1}{1} + 3 & \overset{3}{1} + 27 & \text{Eguale a } \overset{1}{12} + 36 \\
\text{partitor} & & \\
\text{comune} & \overset{2}{1} - \overset{1}{3} + 9 & \text{Eguale a } 12 \\
 & \overset{2}{1} - \overset{1}{3} & \text{Eguale a } 3 \\
 & \overset{2}{1} - \overset{1}{3} + 2\frac{1}{4} & \text{Eguale a } 5\frac{1}{4} \\
 & \overset{1}{1} - 1\frac{1}{2} & \text{Eguale a R.q. } 5\frac{1}{4} \\
 & \overset{1}{1} & \text{Eguale a R.q. } 5\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2}
\end{array}$$

ciascuna delle parti, farà $1^{\underline{3}} + 27$ eguale a $12^{\underline{1}} + 36$; piglisi il lato cubo di 27, ch'è 3, che ha proportione con 1 come il numero 36 e 12, numero delli Tanti, però quando si haverà trovato questa proportione si aggiongerà in questo essempio detto 27 ad ambedue le parti: si haverà (come e detto di sopra) $1^{\underline{3}} + 27$ eguale a $12^{\underline{1}} + 36$. Hor partasi ciascuna delle parti per $1^{\underline{1}} + 3$ (come fu insegnato al suo luogo) ne verrà $1^{\underline{2}} + 9 - 3^{\underline{1}}$ eguale a 12, levisi il numero dalle parti si haverà $1^{\underline{2}} - 3^{\underline{1}}$ eguale a 3, che agguagliato (come si è insegnato al suo Capitolo) farà R.c.$5\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2}$ e questo è la valuta del Tanto.

Ancora si può procedere nella agguagliatione di tal Capitolo in questa gui-

$$\begin{array}{llcr}
\overset{3}{1} \text{ Eguale a} & \overset{1}{\underline{15}} & + & \underline{4} \\
 & \ \ 5 & & 2 \\
 & \ \ \underline{5} & & \underline{2} \\
 & \ 25 & & 4 \\
 & \ \ \underline{5} & & \underline{125} \\
 & 125 & \text{R.q.} + \text{di} - 121 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\qquad 2 & \qquad\qquad 2 \\
\text{Somma R.q.} + \text{di} - 121 & \text{Resta R.q.} + \text{di} - 121 \\
\text{R.c. L2} + \text{di} - 11\text{J} & \text{R.c. L2} - \text{di} - 11\text{J} \\
\text{Lato } 2 + \text{di} - 1 & 2 - \text{di} - 1 \\
\multicolumn{2}{l}{\text{Sommati fanno 4 che è la valuta del Tanto.}}
\end{array}$$

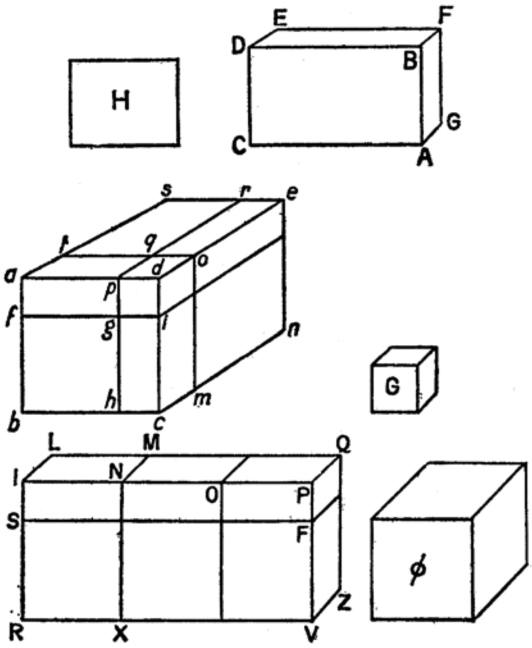
sa. Agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $15^{\underline{1}} + 4$; piglisi il terzo delli Tanti, ch'è 5, cubisi fa 125 e questo si cavi del quadrato della metà del numero, ch'è 4, resta $-$ 121 (il qual si chiamera più di meno) che di questo pigliata la R.c. sarà + di $-$ 11, che aggionta con la metà del numero fa 2 + di − 11, che pigliatone il lato cubico ed aggionto col suo residuo fa 2 + di − 1 et 2 − di − 1, che gionti insieme fanno 4, e 4 e la valuta del Tanto. Et benchè a molti parera questa cosa stravagante, perchè di questa opinione fui ancho già un tempo, parendomi più tosto fosse sofistica che vera, nondimeno tanto cercai che trovai la dimostratione, la quale sarà qui sotto notata, si che questa ancora si pule mostrare in linea, che pur nelle operationi serve senza difficultade alcuna, et assai volte si trova la valuta del Tanto per numero (come si è trovato in questo esempio). Però ben vi applichi l'animo il lettore; che anco egli si trovara ingannato.

Dimostratione delle R.c.$\llcorner$ egate con il + di − e − di − in linea.

Habbisi R.c.$\llcorner$4 + di − R.c.11$\lrcorner$ + R.c.$\llcorner$4 − di − R.c.11$\lrcorner$ e per trovare la sua linea28 aggiongasi 16, quadrato del 4, con 11, quadrato di R.c.11, fa 27 e di questo si pigli il lato cubo ch'è 3 e per regola si moltiplichi per 3, fa 9 e salvisi, poi per regola si moltiplica il 4 per 2 fa 8 e queste due R.c.legate sono nate dall'agguagliatione d'$1^{\underline{3}}$ a $9^{\underline{1}}$ + 8; però faccisi la dimostratione in linea d'$1^{\underline{3}}$ eguale a $9^{\underline{1}}$ + 8, cioè in superficie piana (come e stato insegnato nella dimostratione di tal Capitolo) e trovata che si haverà la longhezza del Tanto sarà ancora la longhezza delle due R.c. legate proposte.

Dimostratione di dove sia cavata la regola di agguagliare cubo eguale a Tanti e numero.

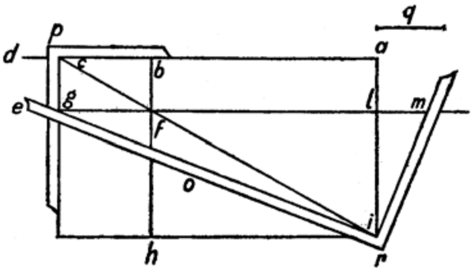
Sia il cubo .a.b.c.e. eguale al paralepippido .A.C.D.E., il quale sia 6 Tanti (et il lato .A.C. sia pari al lato del cubo .a.b., cioè che l'uno e l'altro sia $1^{\underline{1}}$) et nel corpo .H., il quale sia 20; si immagini un taglio di una superficie paralella nel cubo .a.b.c.e. e sia .f.i.l.; fatto questo si faccia un altro taglio .h.p.r. facendo .h.c. pari alla .b.f., dipoi faccisi un altro taglio .m.o.t. facendo la .c.m. pari



alla .c.h.; tutti li quali tagli faccino li angoli retti con le superfici: fatto questo si haverà diviso il cubo .a.b.c.e. in otto pezzi, dei quali due saranno cubi, cioè .h.i.m. et .s.q., li altri saranno 6 che composti insieme faranno il paralepippido .L.P.R., e per essere la dimostratione per se chiara non mi sforzaro di far conoscere come si componghino insieme, et il lato .I.R. e pari al lato .a.b. et .I.N. e pari alla .b.h. et il medesimo e pari alla .A.C. e presuponendo che la superficie .A.B. sia pari alla superficie .I.P.L., il paralepippido .I.V.Q. sarà pari al paralepippido .A.D.E.; resta di necessità che il cubo .s.q. et .m.i.h., overo 0 e G, (che accie si possino vedere gli ho fatti da se) siano pari al corpo .H., il qual'e 20, il lato del Cubo .s.q. e pari alla .I.N. et .I.N. e la terza parte di .I.P., e tutta la superficie .L.P. e 6, perchè tutto il paralepippido I.V.Q. e 6 Tanti et un Tanto, ed essendo la superficie .L.P. 6, la superficie .L.N. sarà 2 e la .I.L. sarà pari al lato del Cubo .m.i.h. Però bisogna trovare due numeri che moltiplicati l'uno nell'altro faccino 2 che li loro cubi aggionti insieme facciano 20. Pongasi .I.L. sia $1\frac{1}{\cdot}$; .I.N.

sarà 2 esimi d'1$^{\underline{1}}$ e la superficie .L.N. sarà 2 (come fu proposto). Il Cubo .m.i.h. sarà 1 cubo et il Cubo .s.q. sarà 8 esimi d'1 cubo, et aggionti insieme fanno 1$^{\underline{6}}$ + 8 esimi d'un cubo, e questo è eguale al corpo .H., ch'è 20; levisi l'esimo si haverà 1$^{\underline{6}}$ + 8 eguale a 20$^{\underline{3}}$ che agguagliato il Tanto valerà R.c.⌞10 + R.c.92⌟ e tanto sarà la .I.L.; et la .I.N., che fu posta 2 esimo d'1 partasi 2 per R.c.⌞10 + R.c.92⌟, ne vien sempre il suo residuo, cioè R.c.⌞10 + R.c.92⌟ e tanto sarà .I.N. e per essere .I.N. pari alla .b.h. e la .I.L. alla .h.c. tutta la .b.c. sarà la valuta del Tanto, cioè del lato del cubo .a.c.e., cioè R.c.⌞10 + R.c.92⌟ + R.c.⌞10 − R.c.92⌟; ma si deve avertire che quando il corpo .H. sarà minore della quarta parte del cubo .a.c.e. tal agguagliatione non si potrà fare con detto taglio, però non parendo tale agguagliatione generale son andato tanto investigando che ho trovato una dimostratione in superficie piana generalissima, ma perchè dove intervengono li corpi le linee medie non si possono ritrovare se non per via d'instromento, però non paia ad alcuno strano se questa dimostratione haverà la medesima difficulta, che quando non l'havesse saria stata vana la inventione di Platone ed Archita Tarentino con tanti altri valent'huomini nel voler duplare l'altare, overo Cubo (come largamente ne ha parlato il Barbaro nel Comento del suo Vitruvio), però havendo lo scudo di tanti valcnt'huomini non mi affaticaro in volere sostentar tal dimostratione non si potere far altramente che con l'instromento.

Dimostratione di Cubo eguale a Tanti e numero in superficie piana.

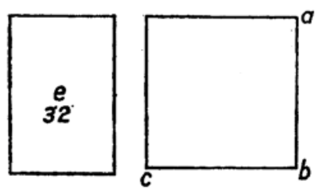


Sia $1^{\underline{3}}$ eguale a $6^{\underline{1}} + 4$ e sia la .q. la unites. Tirisi la .m.e. e faccisi .m.l. che sia pari alla .q., cioè sia 1 et If. 6, cioè quanto e il numero delli Tanti, e sopra detta If. si faccia un paralellogramo che sia 4 di superficie, cioè quanto il numero e sarà il paralellogramo .a.b.f., poi allonghisi la .a.b. sino in .d. ed .a.i. sino in .r., poi habbiansi due squadri delli quali l'uno si ponga con l'angolo sopra la linea .r. e che l'uno delle braccia tocchi la estremita .m., il qual squadro si alzi o abbassi tanto che tirato dall'angolo del squadro una linea che tocchi la estremita .f. che vada a toccare la .b.d. in tal luogo che mettendo un altro squadro con l'angolo al detto toccamento et con l'uno delle braccia sopra la .d.a. vadi a intersegare il braccio dell'altro squadro nella linea .f., e fatto questo dico che la linea ch'è dal punto .i. sino all'angolo del squadro e la valuta del Tanto e lo provo in questo modo. Presuposto che si habbia alzato e abbassato lo squadro talmente che in .i. tirando la .i.f. sino in .c. e che il braccio dello squadro .p. tagliassi con l'altro squadro in .g. suso la linea .g.e.; fatto questo dico la linea .l.i. essere la valuta del Tanto, perche, essendo la .l.i. $1^{\underline{1}}$ et .m.l. 1, la .l.g. sarà $1^{\underline{2}}$, perchè tanto può la .m.l. in .l.g. quanto .l.i. in se stessa (per esser l'angolo .i. retto); il paralellogramo .i.l.g. sarà un cubo ed il paralellogramo .i.l.f. sarà $6^{\underline{1}}$ perchè .i.l. è $1^{\underline{1}}$ et l.f.6, et il paralellogramo .h.f.g. sarà 4, perch'è pari al paralellogramo .a.l.f. ch'era 4, et essendo .i.l.g. tutto insieme $6^{\underline{1}}$ e 4 e per l'altra ragione e provato essere $1^{\underline{3}}$, dunque $1^{\underline{3}}$ sarà eguale a $6^{\underline{1}} + 4$ e la .i.l. sarà $1^{\underline{1}}$, che per la agguagliatione insegnata la .i.i. sarà R.q.3 + 1; la .l.g. sarà 4 + R.q.12; la .f.g. sarà R.q.12 − 2, il paralellogramo .i.l.g. sarà R.q.108 + 10 et il paralellogramo .i.l.f. sarà R.q.108 + 6 per essere la linea .i.l. R.q.3 + 1 e la l.f.6, il paralellogramo .h.f.g. e 4, che gionto insieme con R.q.108 + 6 fa R.q.108 + 10, ch'è pari al cubo .i.l.g. (come fu proposto).

Trasmutatione di Cubo eguale a Tanti e numero, in Cubo e potenzè eguale a numero.

Volendosi trasmuttare $1^{\underline{3}}$ eguale a $6^{\underline{1}}$ + 20 quadrisi il numero fa 400 e questo è eguale a $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}}$ perchè il numero delli Tanti si pone dalla parte del Cubo e per regola sono potenze, e volendo sapere di dove si cava tal trasmuttatione bisogna trovare due numeri che moltiplicato l'uno via l'altro faccia 20 e che tolto uno di detti due numeri e cubatolo e di detto cubo cavatone la moltiplicatione di detto numero via 6 resti 20. Ponghisi l'uno di detti due numeri essere $1^{\underline{1}}$, l'altro sarà 20 esimo d'$1^{\underline{1}}$, e se si piglia il numero che fu posto $1^{\underline{1}}$ il suo cubato sarà $1^{\underline{3}}$ che cavatone la moltiplicatione di detto numero via 6, cioè $6^{\underline{1}}$, restartà $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{1}}$ eguale a 20 (come da prima si propose). Ma se si pigliara l'altro numero, ch'era 20 esimo d'$1^{\underline{1}}$, il suo cubato sarà 8000 esimo d'$1^{\underline{3}}$ e la sua moltiplicatione per 6 sarà 120 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che cavato di 8000 esimo d'$1^{\underline{3}}$ restara $8000 - 120^{\underline{2}}$ esimi d'$1^{\underline{3}}$ e questo è eguale a 20; levisi il rotto si haverà $8000 - 120^{\underline{2}}$ eguale a $20^{\underline{3}}$, che ridutto a $1^{\underline{3}}$ e levato il meno si haverà $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}}$ eguale a 400, che trovata la valuta del Tanto e partendo il numero di prima, cioè 20, per detta valuta ne verrà la valuta del Tanto avanti delle trasmuttationi.

Dimostratione della sopradetta trasmutatione.



Sia il paralellogramo .a.b.c. eguale al paralellogramo .e., che sia 32, e sia la .a.b. $1^{\underline{1}}$ et .b.c. $1^{\underline{2}} - 2$, che tutto il paralellogramo .a.b.c. sarà $1^{\underline{3}} - 2^{\underline{1}}$, et 6 eguale al paralellogramo .e.; adunque il paralellogramo a.b.c. sarà 32 et il produtto di .a.b. in .b.c. deve essere 32, e .b.c. e quanto il quadrato di .a.b. $-$ 2, pere pongasi

che .b.c. sia $1^{\underline{1}}$, .a.b. sarà 32 esimi d'$1^{\underline{1}}$, acciochè il paralellogramo sia 32; resta che la .b.c. sia quanto il quadrato. di .a.b. men 2, ma il quadrato di .a.b. e 1024 esimi d'$1^{\underline{2}}$, del quale cavato 2 resta 1024 $-$ $2^{\underline{2}}$ esimo d'$1^{\underline{2}}$ e questo è eguale a $1^{\underline{1}}$, perchè .b.c. fu posto $1^{\underline{1}}$, che levato il rotto et il meno $1^{\underline{3}} + 2^{\underline{2}}$ è eguale a 1024, ch'è trasmuttato (come fu proposto).

Capitolo di Cubo e numero eguale a Tanti.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 2$ a $3^{\underline{1}}$. Bisogna ponere il numero dalla parte delli Tanti e si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $3^{\underline{1}} + 2$, che seguendo il Capitolo il Tanto valerà 2, e questo per regola si quadra fa 4 del quale se ne cava il numero delli Tanti, resta 1, poi si piglia la metà di 2, valuta del Tanto, e si quadra, fa 1 e di questo si cava l'1 che rimase prima resta 0, e R.q.0 + 1, metà della valuta del Tanto, cioè 1, vale il Tanto, il qual Capitolo alcuna volta non si può agguagliare, che è quando il quadrato della metà del numero e maggiore del cubato del terzo delli Tanti, ma quando accadera tal equatione risolutamente si potrà dire che la proposta ch'è stata fatta e impossibile, overo che si è fatta falsa la positione come si vedra negli dui essempij seguenti.

Agguaglio $1^{\underline{3}} + 6$ a $9^{\underline{1}}$, che mettendo il numero dalla parte delli Tanti si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $9^{\underline{1}} + 6$ e questo Capitolo non si può agguagliare [10] **se**

[10]per nessuna de le regole date, se non per la sofistica; et questo il primo modo del partire detto di sopra Il secondo è se si havrà da agguagliare $1^{\underline{3}} + 28$ a $1^{\underline{1}}$, che messo il numero da la banda de le cose, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $9^{\underline{1}} + 28$, che seguito il Capitolo, la cosa valerà 4, et del suo quadrato ch'è 16 si cava 9, numero de le cose, resta 7, che si cava de la quarta parte di 16, che per essere minore, tale equazione non si può fare. Et perchè si possa sapere, dove nasce la regola di simili capitoli la ponerò quì sotto.
Agguagliasi come fu detto $1^{\underline{3}} + 2$ a $3^{\underline{1}}$: levasi il 2 da ogni banda, et si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $3^{\underline{1}} - 2$. Hor per la regola del Cardano di partire l'una e l'altra quantità per $1^{\underline{1}}$ per un mumero, et per trovara chi habbia ad essere questo numero, si formerà questa dimanda. trovami un numero cubo, del quale trattone 2, cioè quel $-$ 2 che è con le cose, il restante sia tanto, quanto è il Creatore di detto numero Cubo moltiplicato per 3 numero de le Cose. pongasi tal numero essere $1^{\underline{3}}$ del quale trattone 2, resta $1^{\underline{3}} - 2$, et questo è eguale a $3^{\underline{1}}$

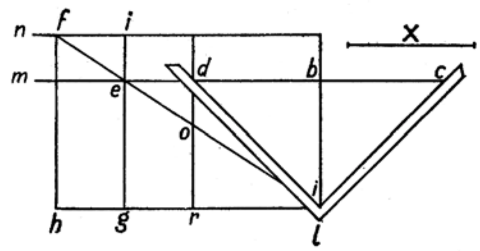
non con il + di −, che tolto il quadrato del mezzo del numero, ch'è 9, e cavatone 27, cubo del terzo delli Tanti, resta 18, e di questo toltone il lato e aggionto e cavato della metà del numero, fa 3 + di − R.q.18 e 3 − di − R.q.18, che ciascuno toltone il lato cubo e aggionti insieme, fa R.c.⌞3 + di − R.q.18⌟ + R.c.⌞3 − di − R.q.18⌟, e questo si deve quadrare fa 6 + R.c.⌞ − 9 + di − R.q.648⌟ + R.c.⌞ − 9 − di − R.q.648⌟, e di questo si cava 9, numero delli Tanti, resta R.c.⌞ − 9 + di − R.q.648⌟ + R.c.⌞ − 9 − di − R.q.648⌟ − 3, poi piglisi il quarto di 6 + R.c.⌞ − 9 + di − R.q.648⌟ + R.c.⌞ − 9 − di − R.q.648⌟, ne viene $1\frac{1}{2}$ + R.c.⌞ − $\frac{9}{64}$ + di − R.q.$\frac{648}{4096}$⌟ + R.c.⌞ − $\frac{9}{64}$ − di − R.q.$\frac{648}{4096}$⌟ e di questo si cava R.c.⌞ − 9 + di − R.q.648⌟ + R.c.⌞ − 9 − di − R.q.648⌟ − 3, resta 4 $\frac{1}{2}$ − R.c.⌞ − $\frac{243}{64}$ + di − R.q.$\frac{59049}{512}$⌟ − R.c.⌞ − $\frac{243}{64}$ − di − R.q.$\frac{59049}{512}$⌟ e di tutto questo restante si pigli il lato quadrato il quale si aggionge con R.c.⌞$\frac{3}{8}$ + di − R.q.$\frac{9}{32}$⌟ + R.c.⌞$\frac{3}{8}$ − di − R.q.$\frac{9}{32}$⌟, metà di R.c.⌞3 + di − R.q.18⌞ + R.c.⌞3 − di − R.c.18⌟ e la somma sarà la valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}}$ + 8 a $6^{\underline{1}}$; questa agguagliatione risolutamente non si può agguagliare, perchè 16, quadrato della metà del numero e maggiore di 8, cubato del terzo delli Tanti, e la proposta tratta dell'impossibile, che ne viene tale agguagliamento perchè quello che si domanda e falso, overo la positione; e perchè si possa sapere dove nasca la regola di simil Capitolo la ponerò qui sotto. Agguaglisi (come fu detto) $1^{\underline{3}}$ + 2 a $3^{\underline{1}}$; levisi il 2 da ogni parte si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $3^{\underline{1}}$ − 2. Hora per la regola del Cardano di partire l'una e l'altra quantità per $1^{\underline{1}}$ più un numero e per trovar qual debbia

cioè a la moltiplicatione del Creatore di detto Cubo, che è $1^{\underline{1}}$ via 3; che levato il meno, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $3^{\underline{1}}$ + 2, che seguito il Capitolo la cosa valerà 2, et il numero che fu posto era $1^{\underline{3}}$, che valerà 8: Hora a $1^{\underline{3}}$ si aggiunga 8 farà $1^{\underline{3}}$ + 8, et a $3^{\underline{1}}$ − 2, si aggionga pur 8, farà $3^{\underline{1}}$ + 6: hora partasi ciascuna di dette quantità per $1^{\underline{1}}$ + 2, ne viene $1^{\underline{2}}$ − $2^{\underline{1}}$ + 4 eguale a 3, che seguito il Capitolo la Cosa valerà 1: et questo è il nascimento di detta regola.

essere detto numero, prima si formara questa domanda. Trovami un numero cubo del quale cavato 2, cioè quel $-$ 2 ch'è con li Tanti, lo restante sia tanto quanto e il lato di detto numero cubo moltiplicato per 3, numero delli Tanti.
Pongasi tal numero essere $1^{\underline{3}}$ del quale cavatone 2 resta $1^{\underline{3}} - 2$, e questo è eguale a $3^{\underline{1}}$, cioè alla moltiplicatione del lato di detto cubo, ch'è $1^{\underline{1}}$, via 3, che levato il meno si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $3^{\underline{1}} + 2$. Seguitisi il Capitolo che il Tanto valerà 2 et il numero che fu posto era $1^{\underline{3}}$ che valerà 8. Hora a $1^{\underline{3}}$ si aggionga 8, farà $1^{\underline{3}} + 8$, et a $3^{\underline{1}} - 2$ si aggionghi pur 8, farà $3^{\underline{1}} + 6$. Hor partasi ciascuna di dette quantità per $1^{\underline{1}} + 2$, ne viene $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 4$ eguale a 3, che seguendosi il Capitolo il Tanto valerà 1, e questo è il nascimento di detta regola.
Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 4$ a $6^{\underline{1}}$; prima agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $6^{\underline{1}} + 4$ con il partire ciascuna delle parti per $1^{\underline{1}} + 2$, giongendo 8 a ciascuna parte che sarà $1^{\underline{3}} + 8$ eguale a $6^{\underline{1}} + 12$, che partito ciascuna per $1^{\underline{1}} + 2$ ne verrà $1^{\underline{2}} + 4 - 2^{\underline{1}}$ eguale a 6, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.3 $+$ 1. Hor quadrisi R.q.3 $+$ 1 fa 4 $+$ R.q.12, del quale se ne cavi 6, numero delli Tanti, resta R.q.12 $-$ 2, poi si quadra la metà di R.q.3 $+$ 1 fa 1 $+$ R.q.$\frac{3}{4}$, del quale si cava R.q.12 $-$ 2, resta 3 $-$ R.q.$6\frac{3}{4}$, che il suo lato è $1\frac{1}{2}$ $+$ R.q.$\frac{3}{4}$ e questo si gionge con R.q.$\frac{3}{4}$ $+$ $\frac{1}{2}$, metà di R.q.3 $+$ 1, fa 2 et 2 e la valuta del Tanto.

Dimostratione di Cubo e numero eguale a Tanti.



Habbisi $1^{\underline{3}} + 4$ eguale a $6^{\underline{1}}$ e la unità sia la X. Tirisi la .c.m. e faccia .c.b. che sia 1 (cioè pari alla X) et .b.e. che sia 6 e sopra la .b.e.

faccisi il paralellogramo .a.b.e. il quale sia 4, il che e facile, e fatto questo allonghisi la .a.b. sino in .i. et habbisi un squadro, il quale sia p.i.l. e faccisi che il braccio .p.i. tocchi la estremita .c. e l'angolo .i. stia su la linea .a.i.: l'altro braccio verrà a tagliare la linea .c.m. e bisogna tanto abbassare o alzare l'angolo .i. che il braccio .i.q. dello squadro tagli in tal luogo la linea .c.m. che dal punto del tagliamento tirata una perpendicolare, e sia la .d.r., et habbisi una riga che posta tocchi l'angolo .i. et .e. si che tagli la .a.n., la quale tagliera ancora .d.r., sinchè .o.e. et .e.f. siano eguali, e quando saranno pari dico .b.i. essere la longhezza di un Tanto e questo si prova facilmente: se la .b.i. sarà $1^{\underline{1}}$ et .c.b. 1 (per essere pari alla X), la .b.q. sarà $1^{\underline{2}}$, perchè essendo la .b.i. media proportionale fra .c.b. et .b.d. et essendo .c.b. 1, .b.d. sarà $1^{\underline{2}}$ et essendo .b.d. $1^{\underline{2}}$ il paralellogramo .b.i.d. sarà $1^{\underline{3}}$ e il paralellogramo .d.e.g. sarà 4, perch'è pari al paralellogramo .a.e. et questo si prova perchè essendo eguale la .o.e. et .e.f. li dui paralellogrami .d.e.g. et .e.g.h. saranno pari, essendo commune .e.g. et il paralellogramo .e.h. sarà pari al paralellogramo .e.a. perchè toccano il diametro .i.f., et essendo il paralellogramo .d.e.g. pari al paralellogramo .e.g.h. sarà ancora pari al paralellogramo .a.b.e.; però il paralellogramo .d.e.g. sarà 4 e tutto il paralellogramo .b.i.g. sarà $1^{\underline{3}} + 4$; resta di provare ancora che il paralellogramo b.e.g. sia $6^{\underline{1}}$ e questo è facilissimo, perchè il lato .b.i. è $1^{\underline{1}}$ et .b.e. è 6, talchè il paralellogramo .b.e.g. viene ad essere $6^{\underline{1}}$ e la prova è chiarissima.

Trasmutatione del sopradetto Capitolo di Cubo e numero eguale a Tanti in Cubo e numero eguale a potenze.

La Trasmutatione di questo Capitolo si è quadrare il numero ed aggiongerlo al cubo e questo sarà eguale a tante potenze quanto era il numero delli Tanti, come per essempio: se si havesse $1^{\underline{3}} + 8$ eguale a $6^{\underline{1}}$, quadrisi 8 fa 64 et aggiongasi al cubo, si haverà $1^{\underline{3}} + 64$ eguale a $6^{\underline{1}}$, che trovata che sia la valuta del Tanto, si partirà 8 per detta valuta e l'avenimento sarà la valuta del Tanto avanti la trasmutatione.

Capitolo di Cubo eguale a potenza e numero.

Questo Capitolo è gnerale ed è come quello di Cubo e Tanti eguale a numero, che sempre si può agguagliare senza il + di −, però si possono trasmutare dell'uno in l'altro, ma questo ancora si può trasmutare in Cubo eguale a Tanti e numero, e di tutti ne ponerò l'essempio. Agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $6^{\underline{2}}$ + 128.
Piglisi il lato di 128 che sarà R.c.128 e sarà eguale a $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{1}}$, che le potenze

$\overset{3}{\smile}$ 1	Eguale a	$\overset{2}{\smile}$ 6 + 128
$\overset{3}{\smile}$ 1 + $\overset{1}{\smile}$ 6	Eguale a	R.q. 128
2		R.q. 32
2		R.q. 32
4		32
2		
8		
32		

R.c. LR.q. 40 + R.q. 32⌋ — R.c. LR.q. 40 — R.q. 32⌋

Lato R.q. $2\frac{1}{2}$ + R.q. $\frac{1}{2}$	R.q. $2\frac{1}{2}$ — R.q. $\frac{1}{2}$
R.q. $2\frac{1}{2}$ — R.q. $\frac{1}{2}$	
resta R.q. 2	R.q. 128
	R.q. 64

Cioè 8 vale il Tanto.

doventano Tanti e si pongono col cubo, ch'è il contrario di trasmutare Cubo e Tanti eguale a numero, che (seguendosi il Capitolo come si vede nella figura) il Tanto valerà R.c.⌞R.q.40 + R.q.32⌟ − R.c.⌞R.c.40 − R.q.32⌟ che li loro lati sono R.q.$2\frac{1}{2}$ + R.q.$\frac{1}{2}$ et R.q.$2\frac{1}{2}$ − R.q.$\frac{1}{2}$, che cavato l'uno dell'altro resta R.q.2 e R.q.2 e la valuta del Tanto dipoi la trasmutatione, e questa R.q.2 e partitore di R.q.128, che ne viene R.q.64, che il suo lato è 8 e questo 8 e la valuta del Tanto inanzi la trasmutatione.

Quando li Cubi si agguagliano alle potenze e numero, piglisi i 1 terzo delle potenze e cubisi et il cubo moltiplichisi per 2 per regola

e si aggionge al numero e la somma si salva, poi si moltiplica il numero delle potenze via il suo terzo et il produtto si fa dir Tanti e si aggionge al cubo e si haverà cubo e Tanti eguale a numero, e trovato che si haverà la valuta del Tanto se li aggionge il terzo delle potenze e la somma sarà la valuta del Tanto, come per essempio: agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $6^{\underline{2}} + 128$. Piglisi il terzo delle potenze e moltiplichisi via il tutto fa 12, e questi sono Tanti, et a 128 se li gionge 16, doppio di 8, cubo del terzo delle potenze, fa 144 e si aggionge a $12^{\underline{1}}$ fa $12^{\underline{1}} + 144$, e questo si agguaglia a $1^{\underline{3}}$ che agguagliato, il Tanto vale 6, al quale se li gionge 2, terzo delle potenze, fa 8 e questo è la valuta del Tanto, e dove nasca tal regola lo mostrero nel seguente essempio.

Agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $6^{\underline{2}} + 128$; levinsi li $6^{\underline{2}}$ da ogni parte, si haverà $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}}$ eguale

$$
\begin{array}{lllll}
1^{\underline{3}} & \text{Eguale a} & & 6^{\underline{2}} & +\ 128 \\
 & \text{Partitor per regola} & & 32 & \quad 16 \\
 & & & \underline{2} & \overline{\ 144\ } \\
 & & & 4 & \\
 & & & \underline{2} & \\
 & & & 8 & \\
 & & & \underline{2} & \\
 & \text{per regola} & & 16 & \\
 & 12^{\underline{1}} + & 144 & \text{Eguale a} & 1^{\underline{3}} \\
 & 4 & 72 & & \\
 & 4 & \underline{72} & & \\
 & \underline{4} & 5184 & & \\
 & 64 & \underline{64} & & \\
\text{R.c. L}72 & + & \text{R.q. } 5120\rfloor & & \\
\text{lato} & 3 + & \text{R.q. } 5 & & \\
 & \underline{3 - } & \underline{\text{R.q. } 5} & & \\
 & 6 & & & \\
 & \underline{2} & \text{terzo delle potenze} & & \\
 & 8 & \text{vale il Tanto.} & &
\end{array}
$$

a 128; piglisi il terzo delle potenze, ch'è $-$ 2, che aggionto al lato cubico d'$1^{\underline{3}}$ ch'è $1^{\underline{1}}$, fa $1^{\underline{1}} - 2$, che il suo cubato sarà $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 8$, cavisene $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}}$, restano $12^{\underline{1}} - 8$ e queste sono le dignità che si hanno da aggiongere ad ambedue le parti, che faranno $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 8$ eguale a $12^{\underline{1}} + 120$, e perchè non si può pigliare il lato cubo di ciascuna parte per non havere lato $12^{\underline{1}}$ + 120 (come l'ha $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 8$) però si dirà cosi: essendo $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 8$ quantità cubica, che il suo lato è $1^{\underline{1}} - 2$ (come si è detto di sopra) però si potrà dire essere $1^{\underline{3}}$ che il numero che lo corn-pone e 2 meno che non era prima. E questo cubo è eguale a $12^{\underline{1}} + 120$. Ma perchè li $12^{\underline{1}}$ vagliono 2 men l'uno, che non valevano prima, bisogna quello che si toglie loro nelli Tanti darglielo nel numero, che aggionto a 120 24 si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $12^{\underline{1}} + 144$; seguitisi il Capitolo di Cubo eguale a Tanti e numero, che il Tanto valerà 6, e perchè questo vale 2 meno che non valeva, aggiongaseli 2, che farà 8, che 8 vale il Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $6^{\underline{2}} + 4$. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, e moltiplichisi per esse potenze, fa 12 e questi saranno Tanti, che aggionti al numero fanno $12^{\underline{1}} + 4$ et a questo aggionghisi il doppio del cubato del terzo delle potenze, ch'è 16, farà $12^{\underline{1}} + 20$, che sarà eguale a $1^{\underline{3}}$. Seguitisi il Capitolo che il Tanto valerà R.c.16 + R.c.4, che aggiontoli il terzo delle potenze, ch'è 2, fa R.c.16 + R.c.4 + 2 e questo è la valuta del Tanto, e per farne la prova cubisi R.c.16 + R.c.4 + 2 e vedasi se e tanto quanto $6^{\underline{2}} + 4$. Ponghisi in regola (come si vede) e poi quadrisi la valuta del Tanto, ch'è R.c.16 + R.c.4 + R.c.8, sotto la linea .a., che sommato R.c.128 con R.c.128 e R.c.16 fanno R.c.2000, e sommato R.c.64 3 volte, fa 12, et R.c.256 con R.c.32 e R.c.32 fanno R.c.2048, che aggionte tutte insieme fanno 12 + R.c.2048 + R.c.2000 e questo è la valuta della potenza, che moltiplicata via R.c.16 + R.c.4 + 2, valuta del Tanto, fa come si vede sotto la linea .b., che aggionti insieme 24, R.c.32768 et 20 fanno 76, et aggionti insieme R.c.16384, R.c.32000 et R.c.6912 fanno R.c.442368, et aggionti insieme R.c.16000, R.c.27648 e R.c.8192 fanno R.c.432000, che aggionte tutte insieme fanno 76 + R.c.442368 + R.c.432000, e questo è la valuta del Cubo. Hor vedasi che vagliono le $6^{\underline{2}}$, che valendo $1^{\underline{2}}$ 12 + R.c.2048 + R.c.2000, le $6^{\underline{2}}$ valeranno 72 + R.c.442368 + R.c.432000, che aggiontoli il 4, ch'era in compagnia delle $6^{\underline{2}}$, fa 76 + R.c.442368 + R.c.432000, che si vede che vagliono le potenze ed il numero insieme quanto vale il Cubo per se solo.

Questo Capitolo si può anco trasmutare in un altro modo pur in Cubo e

R.c. 16 + R.c. 4 + R.c. 8
R.c. 16 + R.c. 4 + R.c. 8

a
R.c. 256 + R.c. 64 + R.c. 128 + R.c. 64 + R.c. 16 + R.c. 32 +
+ R.c. 128 + R.c. 32 + R.c. 64. Potenza.

Cioè 12 + R.c. 2048 + R.c. 2000
2 + R.c. 16 + R.c. 4

b
24 + R.c. 16384 + R.c. 16000 + R.c. 27648 + R.c. 32768 +
+ R.c. 32000 + R.c. 6912 + R.c. 8192 + 20

Valuta del Cubo	76 + R.c. 442368 + R.c. 432000
Valuta d'1 $^{\underline{2}}$	12 + R.c. 2048 + R.c. 2000
Valuta di 6 $^{\underline{2}}$	72 + R.c. 442368 + R.c. 432000
	4

Valuta di 6 $^{\underline{2}}$ + 4, 76 + R.c. 442368 + R.c. 432000.

Tanti eguale a numero, moltiplicando la quantità delle potenze via il numero ed il produtto sarà li Tanti + $1^{\underline{3}}$ eguale al quadrato del numero, come sarebbe $1^{\underline{3}}$ eguale a $6^{\underline{2}}$ + 4. Moltiplichisi il numero delle potenze via il numero fa 24 e si haverà $1^{\underline{3}}$ + $24^{\underline{1}}$ eguale a 16, quadrato di 4. Seguitisi il Capitolo: il Tanto valerà R.c.$\llcorner$R.c.576 + 8$\lrcorner$ − R.c.$\llcorner$R.c.576 − 8$\lrcorner$. Ma perchè R.c.576 ha lato, ch'è 24, il Tanto valerà R.c.32 − R.c.16 e questo è la valuta del Tanto dipoi la trasmutatione, e per sapere la valuta del Tanto avanti la trasmutatione partasi il numero, cioè 4, per R.c.32 − R.c.16, che ne viene R.c.16 + R.c.4 + 2, e quest'è la valuta del Tanto. Et questa regola si forma in questo modo.

Levasi le potenze da ogni parte e si haverà $1^{\underline{3}}$ − $6^{\underline{2}}$ eguale a 4. Hor trovisi due numeri che moltiplicato l'uno via l'altro faccino 4 e che del Cubato dell'uno cavatone li suoi sei quadrati resti 4.

Ponghisi l'uno de due numeri essere $1^{\underline{1}}$, l'altro sarà 4 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che il suo cubato sarà 64 esimo d'$1^{\underline{3}}$ che cavatone li suoi sei quadrati, che sono 96 esimo d'$1^{\underline{2}}$ restarà 64 − $96^{\underline{1}}$ esimi d'$1^{\underline{3}}$, et questo è eguale a 4, che levato il rotto et il meno si haverà $4^{\underline{3}}$ + $96^{\underline{1}}$ eguale a 64, che ridutti a $1^{\underline{3}}$ si haverà $1^{\underline{3}}$ + $24^{\underline{1}}$ eguale a 16 (com'e stato detto di sopra).

Capitolo di Cubo e potenzè eguale a numero.

Quando il Cubo e le potenze si agguagliaranno al numero, si piglia il terzo delle potenze e si moltiplica via il tutto et il produtto sono Tanti, poi si tuba il terzo delle potenze e per regola si moltiplica per 2 et il produtto si cava del numero e lo restante si accompagna con li Tanti, e si haverà Cubo eguale a Tanti e numero, ma se il doppio del cubo del terzo delle potenze fusse maggiore del numero si cava il maggiore del minore e lo restante si accompagna con il Cubo, e si haverà cubo e numero eguale a Tanti (come si vedrà nelli essempij seguenti).

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}}$ a 16: piglisi il terzo delle potenze e moltiplichisi via il tutto fa 12, e questi sono Tanti, che aggionti col numero fanno $12^{\underline{1}} + 16$ e di questo si cava il doppio del cubato della terza parte delle potenze, ch'è 16, resta $12^{\underline{1}}$ che sono eguali a $1^{\underline{3}}$ che seguendosi il Capitolo il Tanto valerà R.c.12, che cavatone per regola il terzo delle potenze, ch'è 2, resta R.c.12 − 2 e questo è la valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}}$ a 36, che seguendo come di sopra si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a

$$
\begin{array}{llll}
\overset{3}{\smile}\ \ \overset{2}{\smile} & & & \\
1 + \underline{6} & \overset{1}{\smile} & \text{Eguale a} & 16 \\
\quad\ \ 2 & 12 & & \underline{16} \\
\quad\ \ \underline{2} & & & 0 \\
\quad\ \ 4 & & & \\
\quad\ \ \underline{2} & & & \\
\quad\ \ 8 & & & \\
\quad\ \ \underline{2} & \text{per regola} & & \\
\quad\ 16 & & & \\
 & \overset{3}{\smile} & & \overset{1}{\smile} \\
 & 1 & \text{Eguale a} & 12 + 0 \\
\text{Il Tanto vale} & & \text{R.q. } 12 & \\
\text{Terzo delle potenze} & & \quad 2 & \\
\text{Vale il Tanto} & & \overline{\text{R.q. } 12 - 2} &
\end{array}
$$

$12^{\underline{1}} + 20$. Seguitisi il Capitolo che il Tanto valerà R.c.16 + R.c.4 e di questo si cava 2, terza parte delle potenze, resta R.c.16 + R.c.4 − 2, che questo è la valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}}$ a 100. Piglisi il terzo delle potenze e moltiplichisi via il tutto, fa 27 e questi sono li Tanti, che aggionti al numero fanno $27^{\underline{1}} + 100$, di che si cava 54, doppio del cubato della terza parte delle potenze, resta $27^{\underline{1}} + 46$ eguale a $1^{\underline{3}}$ che aggionto 8 a ciascuna delle parti si haverà $1^{\underline{3}} + 8$ eguale a $27^{\underline{1}} + 54$, che partito l'una e l'altra parte per $1^{\underline{1}} + 2$ si haverà $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 4$ eguale a 27, che seguendosi il Capitolo il Tanto valerà R.c.24 + 1 e di questo si cava il terzo delle potenze, ch'è 3, resta R.c.24 − 2 e quest'è la valuta del Tanto.

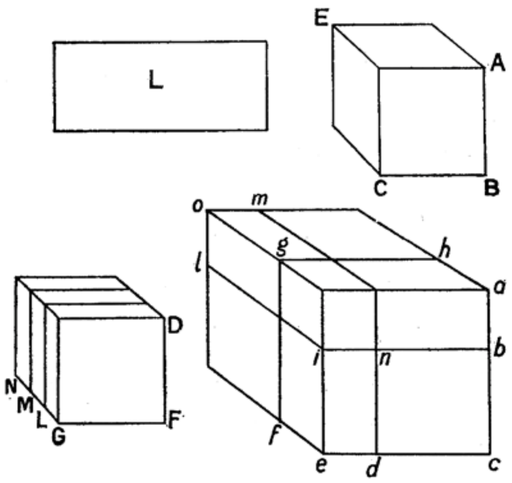
Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}}$ a 60. Seguitisi come di sopra si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $27^{\underline{1}} + 6$. Questo non si può agguagliare se non per la regola del + di − che (seguendosi quella) il Tanto valerà R.c.$\llcorner$3 + di − R.c.720$\lrcorner$ + R.c.$\llcorner$3 − di − R.c.720$\lrcorner$ e se ne cava il terzo delle potenze e lo restante sarà la valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}}$ a 8. Piglisi il terzo delle potenze e moltiplichisi il detto terzo via il tutto, fa 27, che sono Tanti et aggionto al numero fa $27^{\underline{1}} + 8$, che cavatone 54, doppio del cubato del terzo delle potenze, restarà $27^{\underline{1}} - 46$, ch'è eguale a $1^{\underline{3}}$ e levato il meno si haverà $1^{\underline{3}} + 46$ eguale a 27 che (seguendosi il Capitolo) ponendo il numero dalla parte delli Tanti si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $27^{\underline{1}} + 46$, che il Tanto valerà R.c.24 + 1 e questo si quadra, fa 25 + R.c.96 e se ne cava 27, numero delli Tanti, resta R.c.96 − 2 poi si piglia la metà di R.c.24 + 1 e si quadra fa $6\frac{1}{4}$ + R.c.6, che cavatone R.c.96 − 2 resta $8\frac{1}{4}$ − 54, che pigliatone il lato, ch'è R.c.6 − $1\frac{1}{2}$ e aggiontoli il mezzo di R.c.24 + 1 fa R.c.24 − 1 e di questo si cava la terza parte delle potenze, ch'è 3, resta R.c.24 − 4 e questo a la valuta del Tanto.

La regola del sopradetto Capitolo nasce dalla infrascritta trasmutatione, come sarebbe se si havesse ad agguagliare $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}}$ a 32, del qual cubo + $6^{\underline{2}}$ bisogna trovare il lato cubico, che si trova in questo modo. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, e si aggionge col lato cubico del Cubo, ch'è $1^{\underline{1}}$, fa $1^{\underline{1}} + 2$, che il suo cubato è $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 8$ e di questo se ne cava $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}}$, resta $12^{\underline{1}} + 8$; però aggionghisi $12^{\underline{1}} + 8$ a ciascuna parte farà $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 8$ eguale a $40 + 12\ ^{\underline{1}}$. E perchè non si può pigliare il lato cubico di ciascuna parte perchè $12^{\underline{1}} + 40$ non hanno lato cubico, però faccisi cosi. Essendo $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 8$ quantità cubica, ch'il suo lato è $1^{\underline{1}} + 2$ (come s'è veduto di sopra) però si potrà dire essere $1^{\underline{3}}$ eguale a $12^{\underline{1}} + 40$. Ma perchè il lato cubico del Cubo primo era $1^{\underline{1}}$ e di questo secondo è $1^{\underline{1}} + 2$, che il Tanto viene a valere più 2 che non valeva prima, però $12^{\underline{1}}$, che si sono posti dalla banda del numero, vagliono 24 più che non valevano prima; però levisi 24, restara $12^{\underline{1}} + 16$ eguale a $1^{\underline{3}}$ che trovata la valuta di quello che valeva il Tanto bisogna poi cavarne 2, perchè li Tanti di prima avanti la trasmutatione valevano 2 meno che non vagliono queste. Et perchè queste trasmutationi sono alquanto difficili da intendere, chi ne vorra meglio restar capace si potrà formare un cubo materiale, ove dentro di esso potrà vedere le potenze, li Tanti et il numero, et la raggione di simili trasmutationi (come si dirà nella dimostratione). Ci sono anco due altre trasmutationi di questo Capitolo, la prima delle quali e fare che le potenze siano Tanti et a detti Tanti aggiungere il lato del numero et la somma sarà eguale a $1^{\underline{3}}$, come per essempio: $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}}$ eguale a 81, che fatto che le potenze siano Tanti, che saranno $6^{\underline{1}}$, che aggiontoli 9, lato di 81, farà $6^{\underline{1}} + 9$, che seguito il Capitolo il Tanto valerà 3, et per sapere quanto valea inanzi la trasmutatione partasi 9, lato di 81, per il detto 3, ne verrà pur 3 e questo è la valuta del Tanto inanzi la trasmutatione. E questo modo del trasmutare e cavato dal rovescio del trasmutare Cubo eguale a Tanti e numero, in Cubo e potenzè eguale a numero. L'altra trasmutatione a moltiplicare le potenze via il numero e il produtto dica Tanto e aggiongerli il quadrato del numero e la somma sarà eguale a $1^{\underline{3}}$, che trovata che sarà la valuta del Tanto, si parte il numero di prima per detta valuta et l'avenimento sarà la valuta del Tanto avanti la trasmutatione. Come per essempio: agguaglisi $1^{\underline{3}} + 3^{\underline{2}}$ a 4, che moltiplicato il numero via le potenze fa 12, et questi sono $12^{\underline{1}}$, che aggiontoli 16, quadrato del numero, fa $12^{\underline{1}} + 16$ e questo è eguale a $1^{\underline{3}}$ che seguito il Capitolo il

Tanto valerà 4, e per trovare quanto valeva inanzi la trasmutatione partasi il numero di prima, cioè 4, per 4, valuta del Tanto, ne viene 1 e quest'era la valuta del Tanto inanzi la trasmutatione. E questo modo nasce da questa domanda. Trovami due numeri che moltiplicato l'uno via l'altro faccino 4 e che al cubato d'un numero d'essi aggionti i tre suoi quadrati faccia pur 4. Pongasi l'uno essere $1^{\underline{1}}$, l'altro sarà 4 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che il suo cubato e 64 esimo d'$1^{\underline{3}}$ al quale aggionti i tre suoi quadrati, che sono 48 esimo d'$1^{\underline{2}}$, sarà 64 + $48^{\underline{1}}$ esimo d'$1^{\underline{3}}$ e questo sarà eguale a 4, che levato il rotto e ridutto a $1^{\underline{3}}$ si haverà $12^{\underline{1}}$ + 16 eguale a $1^{\underline{3}}$ (come fu detto di sopra).

Dimostratione del sopradetto Capitolo di Cubo e potenzè eguale a numero.



Sia il cubo, il cubo .A.B.C.E. e le sei potenze .D.F.G.N. eguali al corpo .L., che sia 32; il lato del cubo .A.B.C.E. sarà $1^{\underline{1}}$, cioè .B.C. et .D.F. et .F.G. sarà pur $1^{\underline{1}}$ et .G.N. 6, acciochè tutto il corpo .D.F.G.N. sia $6^{\underline{2}}$. Dividasi la .G.N. in tre parti pari e faccisi li due tagli (come si vede nella figura) equidistante e si accompagnino li pezzi attorno il Cubo, come mostra il Cubo .a.e.o., delli quali l'uno e .h.m., l'altro .l.f. et il terzo .b.d., ma il Cubo non si vede et manca a compire il Cubo .a.e.o., li tre paralepippidi .h.b.n., d.f.i. et .g.m.l. et il Cubo .i.n.g. et essendo .G.N. 6 .G.L. sarà 2 et tanto sarà .a.b.,

d.e. et .m.o., et .a.n. $1^{\underline{1}}$ et .i.e. et .g.o. per essere ciascuna pari alla .B.C. overo .F.G. e per queste ragioni li tre paralepippidi .h.b.n., .d.f.i. et .g.m.l. saranno $12^{\underline{1}}$ et il cubo .n.i.g. sarà 8 per essere ciascun suo lato 2; però se al Cubo .A.B.C.E. et alle $6.^{\underline{2}}$ .D.F.G. si aggiongerà li tre paralepippidi .h.b.n., .d.f.i. et .m.g.l. et il Cubo .n.i.g. a ciascuna delle parti, si haverà il cubo .a.e.o. eguale a $12^{\underline{1}} +$ 8 et alla .L. che e 32, che saranno $12^{\underline{1}} + 40$, ma perchè il lato .a.c. e più Longo di .A.B. 2, però se .A.B. è $1^{\underline{1}}$, .a.c. sarà $1^{\underline{1}} + 2$ e così li $12^{\underline{1}}$ del cubo .a.e.o. vagliono 24 più delli Tanti del Cubo .A.B.C.E., che levatolo a 40 (perchè se li da nelli $12^{\underline{1}}$) si haverà il cubo .a.e.o. eguale a $12^{\underline{1}} + 16$. Come si è mostrato nello agguagliamento il Tanto vale 4 et 4 sarà la .a.c. et essendo .a.b. 2, la .b.c. sarà 2 et .A.B. sarà 2 per esser pari alla .b.c.

Capitolo di Cubo e numero eguale a Potenze.

Questo Capitolo rarissime volte si può agguagliare se non con il + di − overo con la regola del Cardano col partire tutte due le quantità per $1^{\underline{1}}$ + un numero, come fu detto a suo luogo. Et per più chiarezza ne ponerò più essempij.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 27$ a $6^{\underline{2}}$. Moltiplichisi il numero via le potenze ed il produtto sarà Tanti, cioè $162^{\underline{1}}$ e saranno eguali a $1^{\underline{3}} + 729$, quadrato del 27, che (seguendosi il Capitolo) il Tanto valerà 9 e questo è partitore di 27, che ne viene 3 che 3 vale il Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 27$ a $6^{\underline{2}}$. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, e moltiplichisi via il tutto fa 12, che saranno $12^{\underline{1}}$, poi si cuba il detto terzo delle potenze, che sarà 8, e per regola si dupla, fa 16 e si cava di 27, resta 11 e si haverà $1^{\underline{3}} + 11$ eguale a $12^{\underline{1}}$. Levisi da ogni parte l'11, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $12^{\underline{1}} -$ 11; levisi poi 1 da ogni parte si haverà $1^{\underline{3}} - 1$ eguale a $12^{\underline{1}} - 12$, che partito ciascuna delle parti per $1^{\underline{1}} - 1$ si haverà $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}} + 1$ eguale a 12. Seguitisi il Capitolo che il Tanto valerà R.q.$11\frac{1}{4}$ $4 - 2\frac{1}{2}$ et a questo si aggionge 2, terzo delle potenze, fa R.q.$11\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2}$ e questo è la valuta del Tanto, che ancora vale

3.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 5$ a $6^{\underline{2}}$. Piglisi il terzo delle potenze e moltiplichisi via il tutto, fa 12, che saranno Tanti, poi piglisi il duplo del Cubo del terzo delle potenze, che sarà 16, e cavisi di 5, restara $-$ 11 e si haverà $1^{\underline{3}} - 11$ eguale a $12^{\underline{1}}$, che levato il meno si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $12^{\underline{1}} + 11$, et a ciascuna delle parti si aggionga 1, si haverà $1^{\underline{3}} + 1$ eguale a $12^{\underline{1}} + 12$, che partito ciascuna delle parti per $1^{\underline{1}} + 1$, si haverà $1^{\underline{2}} - 1^{\underline{1}} + 1$ eguale a 12, che seguendosi il Capitolo il Tanto valerà R.q.$11\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ et a questo si aggionge 2, terza parte delle potenze, fa R.q.$11\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}$ e questo a la valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 54$ a $9^{\underline{2}}$. Piglisi il terzo delle potenze e moltiplichisi via il tutto fa 27 e sono $27^{\underline{1}}$, poi si piglia il duplo del cubo della terza parte delle potenze, ch'è 54, e si cava del numero resta 0 e si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $27^{\underline{1}}$ che seguendosi il Capitolo il Tanto valerà R.q.27 et a questo si aggionge 3, terza parte delle potenze, fa R.q.27 + 3 e questo a la valuta del Tanto, il quale ancora può valere 3.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 64$ a $6^{\underline{2}}$. Piglisi il lato di 64, ch'è 8, e si haverà $1^{\underline{3}} + 8$ eguale a $6^{\underline{1}}$, e perchè il cubato del terzo delli Tanti e minore del quadrato delta metà del numero tale equatione non si può fare (come fu detto nel Capitolo di Cubo e numero eguale a Tanti) e la proposta che farà venire questo agguagliamento tratta dell'impossibile, e qui sotto si porra da che naschino queste agguagliationi.

E prima quando si dice che si moltiplichino le potenze via il numero, ch'è $1^{\underline{3}} + 27$ eguale a $6^{\underline{2}}$, levasi il cubo da ogni parte resta 27 eguale a $6^{\underline{2}} - 1^{\underline{3}}$. Hor trovinsi due numeri che moltiplicato l'uno via l'altro faccino 27, e che delli sei quadrati dell'uno cavatone il cubato di esso numero resti 27. Ponghisi l'uno di loro essere l'$1^{\underline{1}}$, l'altro sarà 27 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che li suoi sei quadrati saranno 4374 esimo d'$1^{\underline{2}}$, del quale cavatone il cubato, ch'è 19683 esimo d'$1^{\underline{3}}$

resta $4374^{\underline{1}} - 19683$ esimi d'$1^{\underline{3}}$ e questo è eguale a 27, che levato il rotto et il meno si haverà $27^{\underline{3}} + 19683$ eguali a $4374^{\underline{1}}$, che ridutti a $1^{\underline{3}}$ si haverà $1^{\underline{3}} + 729$ eguale a $162^{\underline{1}}$, che trovata la valuta del Tanto bisogna partire 27 per essa valuta, perchè il numero era 27 esimo d'$1^{\underline{1}}$ e di qui nasce la prima regola.

La seconda che dice agguaglisi $1^{\underline{3}} + 5$ a $6^{\underline{2}}$, nasce da questa trasmutatione: levisi le potenze da ogni parte e si haverà $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 5$ eguale a 0; piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, e cavisi del lato del cubo, ch'è $1^{\underline{1}}$, restara $1^{\underline{1}} - 2$, che il suo cubato sarà $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 8$, che cavatone $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 5$ resta $12^{\underline{1}} - 13$ e questa è la quantità che bisogna aggiongere a $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 5$ acciochè habbia lato cubico; però aggionghisi a ciascuna delle parti $12^{\underline{1}} - 13$ e si haverà $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 8$ eguale a $12^{\underline{1}} - 13$, e perchè $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 8$ ha lato cubico, si potrà dire $1^{\underline{3}}$ eguale a $12^{\underline{1}} - 13$. Ma perchè li Tanti dipoi la trasmutatione vagliono 2 meno che non valevano prima, perchè il lato del cubo prima era $1^{\underline{1}}$ poi e stato $1^{\underline{1}} - 2$, però $12^{\underline{1}}$ vagliono 24 meno che non valevano prima, onde quello che se gli toglie nelli Tanti bisogna darglielo in tanto numero. Si che aggionto 24 a $12^{\underline{1}} - 13$ fa $12^{\underline{1}} + 11$, che trovata la valuta del Tanto, ch'è R.q.$11\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ bisogna aggiongerli 2 che valeva il Tanto di più avanti la trasmutatione, che farà R.q.$11\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}$.

La terza che dice agguaglisi $1^{\underline{3}} + 64$ a $6^{\underline{2}}$ nasce dal contrario della trasmutatione di Cubo e numero eguale a potenze.

Discorso sopra li sei Capitoli passati.

Il primo, ch'è Cubo e Tanti eguale a numero, non pun havere se non una valuta e sempre si pun agguagliare e la sua valuta sarà numero, overo due R.c., cioè una meno e l'altra più(come si mostrn nelli suoi essempij) però non ne dire altro.
Il secondo, ch'è Cubo eguale a Tanti e numero, ogni volta che il quadrato della metà del numero e pari over maggiore del Cubato del terzo delli Tanti, tal Capitolo si potrà agguagliare senza il piùdi

meno, e l'avenimento sarà numero over due R.c.che vadano insieme aggionte. Ma quando sia pari o minore il quadrato del mezzo del numero del Cubato del terzo delli Tanti, bisogna agguagliare con la regola del Cardano, ma rari si trovano che con detta regola si possino agguagliare; lo restante poi si agguaglia con la via del + di − che a suo luogo ho dimostrata, e tal Capitolo pun havere due valute, una vera e l'altra falsa: la falsa si trova in questo modo. Agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $12^{\underline{1}} + 16$. Cangiasi il numero e ponghisi dalla parte del Cubo e si haverà $1^{\underline{3}} + 16$ eguale a $12^{\underline{1}}$, che agguagliato il Tanto valerà 2, e questo è meno, però di $1^{\underline{3}}$ eguale a $12^{\underline{1}} + 16$ la vera valuta e 4 e la falsa e − 2, e quanto al trovare una regola generale, con la quale si possa agguagliare questo Capitolo senza il + di − sino ad hora tengo impossibile, perchè si trova la regola quando il Tanto val numero overo un Binomio (come si vede in questi tre essempi): $1^{\underline{3}}$ eguale a $12^{\underline{1}} + 16$, il Tanto vale 4; $1^{\underline{3}}$ eguale a $6^{\underline{1}} + 8$, il Tanto vale R.c.$\llcorner$4 + R.q.8$\lrcorner$ + R.c.$\llcorner$4 − R.q.8$\lrcorner$, che se bene sono legate pur sono R.c.; et $1^{\underline{3}}$ eguale a $6^{\underline{1}} + 4$, il Tanto vale R.q.3 + 1, e queste valute si trovano per le regole date. Ma già non si pue trovare che il Tanto vaglia una Radice quadrata, ne una R.c., ne un Binomio che sia maggiore il numero che la R.q., ne un composto di numero e R.c., ne un composto di due R. quadrate, ne un composto di RR.c.più un numero, overo un numero più una RR.q., come per essempio: vaglia il Tanto 2 + R.q.2; il Cubo valerà 20 + R.q.392, che per levare la R.q.392, li Tanti che sono dalla parte contraria di necessità saranno 14, che per se soli valeranno 28 + R.q.392, che si vede che solo li Tanti senza accompagnarli con numero vagliono 8 più che'l Cubo, e cost degli altri aviene, perchè nasce qualche altra sproportione fra di loro (come nell'operare trovera chi vorra cercare)9 Si che (quanto al mio giuditio) tengo impossibile ritrovarsi tal regola generale. E non mi confidando delle ragioni assignate, quando detto Capitolo ha havuto tal sproportione che Hon si po-

tuto cavare il cubato del terzo delli Tanti del quadrato della metà del numero, com'e $1^{\underline{3}}$ eguale a $9^{\underline{1}}$ + 9 (quale agguagliamento tni serviva in dividere l'angolo in tre parti pari, come a suo luogo si (lira), ho provato più sorti di trasmutationi.
In potenza potenza cuba eguale a potenze, Tanti e numero. In potenza potenza eguale a Cubi potenze e numero, in potenza potenza eguale a potenze Tanti e numero ed infinite altre trasmutationi, ne mai ho potuto trarne cosa buona, se non un poco di brevità ne'numeri. Come se fusse $1^{\underline{3}}$ eguale a $24^{\underline{1}}$ + 320. Partasi li Tanti per 4 ed il numero per 8, cubato del lato del 4, si haverànno $6^{\underline{1}}$ + 40 eguali a $1^{\underline{3}}$, che il Tanto valerà 4, che si moltiplica per 2, lato del 4, partitore delli Tanti, fa 8 et 8 valeva il Tanto prima; e così se fusse $1^{\underline{3}}$ eguale a $54^{\underline{1}}$ + 1080, che partito $54^{\underline{1}}$ per 9 ne vengono $6^{\underline{1}}$, e 1080 per 27, cubato del lato di 9, partitore delli Tanti, ne viene 40, che si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $6^{\underline{1}}$ + 40 che il Tanto valerà 4, che moltiplicato per 3, lato di 9, partitore delli Tanti, fa 12 et 12 valeva il Tanto, e tal regola e quasi di nissun valore, se non che serve a fuggire le fatiche de'numeri grandi. Però intorno a ciò operi il lettore, quanto gli aggrada.
Il terzo e Cubo e numero eguale a Tanti e perchè nelli essempij dati e dello agguagliare d'essi ho detto che si ponga il numero dalla parte delli Tanti, com'e $1^{\underline{3}}$ + 2 eguale a $3^{\underline{1}}$, che posto il numero com'e detto, si haverà 1 eguale a $3^{\underline{1}}$ + 2, questo si può agguagliare per la regola del Cardano. Ma se dicesse $1^{\underline{3}}$ + 4 eguale a $3^{\underline{1}}$ e impossibile agguagliarlo, se non finto, perchè il quadrato della meth del numero supera il cubato del terzo delli Tanti, ch'è il contrario di diretto del Capitolo passato, e tal Capitolo può havere tre valute, due vere ed una falsa, come per essempio $1^{\underline{3}}$ + 8 eguale a $14^{\underline{1}}$, che agguagliato $1^{\underline{3}}$ a $14^{\underline{1}}$ + 8 il Tanto valerà 4, che fatto che dica − 4, questa sarà la valuta falsa e le altre due vere saranno 2 + R.q.2 e 2 − R.q.2, e perchè pare che non sia convenevole che una diman-

da habbia due valute, questa operatione è più tosto in apparenza che in effetto, perchè quasi sempre che lo agguagliamento verrà a questo Capitolo, la domanda farà trovare due numeri, e così le due valute saranno li due numeri, over sarà fare d'un numero due parti, che le due valute saranno le parti addimandate.

Il quarto e Cubo eguale a potenze e numero. Questo Capitolo sempre si potrh agguagliare perchè la trasmutatione e Cubo e Tanti eguale a numero, overo Cubo eguale a Tanti e numero, ma sempre il quadrato della meth del numero superarh il Cubato del terzo delli Tanti, e questa regola e infallibile, come per essempio se si havesse $1^{\underline{3}}$ eguale a $6^{\underline{2}} + 0$, che trasmutato si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $12^{\underline{1}}$ $+ 16$, che si vede che il quadrato della metà del numero e pari al Cubato [del terzo] delli Tanti. Però se con le potenze fusse stato una minima parte di numero il quadrato della metà del numero havrebbe superato il Cubato del terzo delli Tanti, e questo effetto fa in tutti li agguagliamenti, e questo Capitolo rare volte haverà più d'una valuta vera ed una falsa.

II quinto e Cubo e potenze eguali a numero. Questo patisce le medesime eccettioni che il Capitolo di Cubo eguale a Tanti e numero, però (havendone a suo luogo detto a bastanza) non ne dire) altro per hora.

II sesto e Cubo e numero eguale a potenze. Questo non si può agguagliare quando il numero e tanto grande che cavatone li due cubati del terzo delle potenze e del restante presone il quarto del suo quadrato, superi il quadrato del Cubato del terzo delle potenze, come per essempio $1^{\underline{3}} + 40$ eguale a $6^{\underline{2}}$, che cavato di 40 16, doppio del cubato del terzo delle potenze, resta 24, che il quarto del suo quadrato e 144 che supera 64, quadrato del cubato di 2, terzo delle potenze. Nel resto questo Capitolo ha le difficultà del Capitolo di Cubo e numero eguale a Tanti.

Capitolo di Cubo potenze e Tanti eguali a numero.

Lo agguagliamento di questo Capitolo non si può fare senza trasmutatione, la qual trasmutatione può venire in cinque modi, cioè Cubo eguale a numero, Cubo eguale a Tanti, Cubo e Tanti eguale a numero, Cubo eguale a Tanti e numero e Cubo e numero eguale a Tanti, delli quali ne porrò li essempij, e prima.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}}$ a 56. Piglisi il terzo delle potenze e moltiplichisi via il tutto, fa 12 e questo si cava del numero delli Tanti, resta 0, poi si cuba il terzo delle potenze e si aggionge al numero fa 64 e questo è eguale a $1^{\underline{3}}$ che, seguendosi il Capitolo, il Tanto valerà 4, del quale se ne cava il terzo delle potenze, ch'è 2, resta 2 et 2 vale il Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}}$ a 36. Piglisi il terzo delle potenze e moltiplichisi via

$\underset{\smile}{3}$ $\underset{\smile}{2}$	$\underset{\smile}{1}$			
1 + 6 +	12		Eguale a	56
3/ 2	12	$\underset{\smile}{3}$		8
	0	1	Eguale a	64
Valuta del Tanto				4
Terzo delle potenze				2
Vale il Tanto				2

il tutto fa 27 e se ne cava il numero delli Tanti e si aggionge al numero, fa $21^{\underline{1}}$ $+36$ et a questo si aggionge 27, cubato del terzo delle potenze, fa $21^{\underline{1}}$ $+36$ e di questo si cava la moltiplicatione di $21^{\underline{1}}$ via 3, terzo delle potenze, ch'è 63, restarà $21^{\underline{1}} + 0$ eguale a $^{\underline{3}}$, che (seguendosi il Capitolo) il tanto valerà R.q.21, che cavatone 3, terzo delle potenze, resta R.q.21 $-$ 3 e quest'è la valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + 30^{\underline{1}}$ a 39. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 3, moltiplichisi via il tutto, fa 27 e di questo si cava 30, numero delli Tanti, resta $-\ 3^{\underline{1}}$ che si aggiongono al numero fanno $39 - 3^{\underline{1}}$ e vi si aggionge 27, cubato del terzo delli Tanti e fa 66, del quale se ne cava $-$ 9, moltiplicatione di $-\ 3^{\underline{1}}$ via 3, terzo delle potenze, fa $75 - 3^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 1 che levato il meno si haverà $1^{\underline{3}} + 3^{\underline{1}}$ eguale a 75. Seguitisi il Capitolo di Cubo e Tanti eguali a numero che il Tanto valerà R.c.$\llcorner$R.q.$1407\frac{1}{4} + 37\frac{1}{2}\lrcorner$ $-$ R.c.$\llcorner$R.q.$1407\frac{1}{4} - 37\frac{1}{2}\lrcorner$, che cavatone 3, terzo delle potenze, resta R.c.$\llcorner$R.q.$1407\frac{1}{4} + 37\frac{1}{2}\lrcorner$ $-$

$$\begin{array}{llll} 1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + & 6^{\underline{1}} & \text{Eguale a} & 36 \\ 3/ \quad 3 & \underline{27} & & \underline{27} \\ 63 & 21^{\underline{1}} & \text{più} & 63 \\ & & & \underline{63} \\ & & & 0 \end{array}$$

$1^{\underline{3}}$ Eguale a $21^{\underline{1}} + 0$
Vale il Tanto R.q. 21
Terzo delle potenze 3
Valuta del Tanto R.q. 21 — 3

R.c.⌞R.q.$1407\frac{1}{4} - 37\frac{1}{2}$⌟ $- 3$, e questo è la valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}}$ a 48. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, e moltiplichisi via il tutto fa 12, che cavatone 8, numero delli Tanti, restano $4^{\underline{1}}$ ed a questo si aggionge il numero fa $48 + 4^{\underline{1}}$ al che si aggionge 8, cubato del terzo delle potenze, fa 56, dal quale si cava 8, produtto di 4, numero delli Tanti, in 2, terzo delle potenze, resta $48 + 4^{\underline{1}}$ eguale a $1^{\underline{3}}$. Seguitisi il Capitolo che il Tanto valerà 4, che cavatone 2, terzo delle potenze, resta 2 e 2 vale il Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}}$ a 18. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 3, che moltiplicato via il tutto fa 27, che cavatone 3, numero delli Tanti, restara 24, e sono Tanti, quali aggionti al numero, saranno $24^{\underline{1}} + 18$, alli quali si aggiunge 27, cubato del terzo delle potenze, [fa $24^{\underline{1}} + 45$, del quale si cava 72, produtto di 24, numero delli Tanti, in 3, terzo delle potenze], restara $24^{\underline{1}} - 27$ eguale a 1 levisi il meno e si haverà $1^{\underline{3}} + 27$ eguale a $24^{\underline{1}}$. Seguitisi il Capitolo di Cubo e numero eguale a Tanti e, se si potrà agguagliare, della valuta del Tanto si caverà 3, terzo delle potenze, ed il restante sarà la valuta del Tanto, e questi sono li cinque essempij sopradetti, de'quali a uno per uno mostraro il nascimento delle loro trasmutationi.

Il primo, ch'è $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}}$ eguale a 56 nasce da questa trasmutatione. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, ed aggionghisi al lato cubico del Cubo, ch'è $1^{\underline{1}}$, fa $1^{\underline{1}} + 2$, che il suo cubato è $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 8$, che cavatone $1^{\underline{3}} +$

$6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}}$ resta 8 e questo è il numero che bisogna aggiongere a ciascuna delle parti e si haverà $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 8$ eguale a 64, che pigliato il lato cubico di ciascuna delle parti si haverà $1^{\underline{1}} + 2$ eguale a 4, che levato il 2 resta $1^{\underline{1}}$ eguale a 2, che 2 vale il Tanto.

Il secondo è $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}}$ eguale a 36, che la sua trasmutatione nasce di qui. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 3, ed aggiongasi a $1^{\underline{1}}$ fa $1^{\underline{1}} + 3$, che il suo cubato è $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} + 27$, che cavatone $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}}$ resta $21^{\underline{1}} + 27$ e questa è la quantità che fa bisogno di aggiongere a ciascuna delle parti e si haverà $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} + 27$ eguale a $21^{\underline{1}} + 63$. Hora di questo non si può pigliare il lato cubico di ciascuna delle parti (come s'è fatto di copra) perchè $21^{\underline{1}} + 63$ non hanno lato cubico. Ma essendo $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} + 27$ quantità cubica, che il suo lato è $1^{\underline{1}} + 3$, però si potrà dire $1^{\underline{3}}$ eguale a $21^{\underline{1}} + 63$. Ma perchè questi $21^{\underline{1}}$ vagliono 3 più l'uno, che non valevano avanti la trasmutatione, che sarà 63 di che cavato del numero resta 0 e si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $21^{\underline{1}}$ che, seguendosi il Capitolo, il Tanto valerà R.q.21 e questa sarà la valuta dipoi la trasmutatione, che cavatone 3, che meno valeva il Tanto avanti la trasmutatione, resta R.q.21 $-$ 3, ch'è la vera valuta del Tanto.

Il terzo ch'è $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + 30^{\underline{1}}$ eguale a 39, ha il suo nascimento da questa trasmutatione. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 3, che aggionto a $1^{\underline{1}}$ fa $1^{\underline{1}} + 3$, che il suo cubato è $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} + 27$ e di questo se ne cava $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + 30^{\underline{1}}$, resta $27 - 3^{\underline{1}}$ e questa è la quantità che bisogna aggiongere a ciascuna delle parti, che aggionto a $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + 30^{\underline{1}}$ et a 39 fa $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} + 27$ eguale a $66 - 3^{\underline{1}}$. Hora si potrà (come e stato detto di sopra) dire $1^{\underline{3}}$ eguale a $66 - 3^{\underline{1}}$, e perchè questi Tanti vagliono 3 più l'uno che non valevano prima, li $- 3^{\underline{1}}$ valeranno $-$ 9, che cavato di 66 resta $75 - 3^{\underline{1}}$ e questo è eguale a $1^{\underline{3}}$ che levato il meno si haverà $1^{\underline{3}} + 3^{\underline{1}}$ eguale a 75, che (seguitandosi il Capitolo) il Tanto valerà R.c.$\llcorner$R.q.$1407\frac{1}{4} + 37\frac{1}{2}\lrcorner$ $-$ R.c.$\llcorner$R.q.$1407\frac{1}{4} - 37\frac{1}{2}\lrcorner$, che cavatone $3^{\underline{1}}$ che valeva meno il Tanto avanti la trasmutatione, restara R.c.$\llcorner$R.c.$1407\frac{1}{4} + 37\frac{1}{2}\lrcorner$ $-$ R.c.$\llcorner$R.c.$1407\frac{1}{4} - 37\frac{1}{2}\lrcorner$ $-$ 3 e questo è il vero valore del Tanto.

Il quarto, ch'è $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}}$ eguale a 48, nasce pur anch'egli da questa trasmutatione. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, che aggionto a $1^{\underline{1}}$ fa $1^{\underline{1}} + 2$, che il suo cubato è $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 8$ e di questo se ne cava $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}}$ resta $4^{\underline{1}} + 8$ e questa è la quantità che bisogna aggiongere a ciascuna delle parti, che aggionta a $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}}$ et a 48 farà $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 8$ eguale a $4^{\underline{1}} + 56$. Hor si potrà (com'e stato detto) dire 1 eguale a $4^{\underline{1}} + 56$, e perchè questi Tanti vagliono 2 più l'uno che non valevano prima, li $4^{\underline{1}}$ valeranno 8, che cavato di $56 + 4^{\underline{1}}$ restara $48 + 4^{\underline{1}}$ eguale a $1^{\underline{3}}$, che (seguendosi il Capitolo) il Tanto valerà. 4, che cavatone 2 che valeva meno il Tanto avanti la trasmutatione resta 2, ch'è la vera valuta del Tanto.

Il quinto, ch'è $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}}$ eguale a 18, nasce anch'egli dalla medesima trasmutatione, che tolto il lato delle potenze, ch'è 3, ed aggionto a $1^{\underline{1}}$ fa $1^{\underline{1}} + 3$, che il suo cubato è $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} + 27$, che cavatone $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}}$ resta $24^{\underline{1}} + 27$ e questa a la quantità che bisogna aggiongere a ciascuna delle parti, che aggionta a $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}}$ et a 18 farà $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} + 27$ eguale a $24^{\underline{1}} + 45$. Hora si potrà (com'e stato detto) dire $1^{\underline{3}}$ eguale a $24^{\underline{1}} + 45$ e perchè questi Tanti vagliono 3 più l'uno che non valevano prima, li $24^{\underline{1}}$ valeranno 72, che cavato di $24^{\underline{1}} + 45$ restara $24^{\underline{1}} - 27$ eguale a $1^{\underline{3}}$, che levato il meno si haverà $1^{\underline{3}} + 27$ eguale a $24^{\underline{1}}$, che, seguendosi il Capitolo et trovata la valuta del Tanto, se ne cavara 3 che valeva meno il Tanto avanti la trasmutatione e restara la vera valuta del Tanto.

Ponerò ancora in questo luogo un'altra trasmutatione del presente Capitolo, ch'egli ha fra l'altre, la qual'e se si havesse $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}}$ eguale a 12, che nasce da questa domanda: trovami due numeri che moltiplicato l'uno via l'altro faccino 12 e che pigliato uno di detti numeri et al suo cubato aggiontoli li sei suoi quadrati et otto volte il detto numero faccia pur 12. Ponghisi l'uno di essi numeri essere $1^{\underline{1}}$, l'altro sarà 12 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che il suo cubato sarà 1728 esimo d'$1^{\underline{3}}$ e li sei suoi quadrati saranno 432 esimo d'$1^{\underline{2}}$ e la moltiplicatione del detto numero per otto sarà 96 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che sommati tutti tre questi rotti faranno $1728 + 432^{\underline{1}} + 96^{\underline{2}}$, esimi d'$1^{\underline{3}}$ e questo sarà eguale a 12, che levato il rotto si haverà $12^{\underline{3}}$ eguali a $1728 + 432^{\underline{1}} + 96^{\underline{2}}$, che ridutti a $1^{\underline{3}}$ si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $144 + 72^{\underline{1}} + 8^{\underline{2}}$ trovata ch'è la valuta del Tanto, partasi 12 per essa valuta e l'avenimento sarà la valuta del Tanto avanti la trasmutatione. Ma volendo fare brevemente detta trasmutatione, tenghisi quest'ordine. Quadrisi il numero che farà 144, poi aggiongaseli il numero delli Tanti (ma dichino potenze) e se gli aggionghi parimente la moltiplicatione del numero via le potenze che sarà 72, ma che dichino Tanti e il tutto sarà $144 + 72^{\underline{1}} + 8^{\underline{2}}$ eguali a $1^{\underline{3}}$ (come fu detto di sopra).

Capitolo di Cubo e potenze eguali a Tanti e numero.

L'agguagliatione di questo Capitolo non si può fare senza trasmutatione, la qual trasmutatione può venire in tre modi, che sono Cubo eguale a Tanti, Cubo eguale a Tanti e numero et Cubo e numero eguale a Tanti, de'quali ne porrò gli essempij.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}}$ a $12^{\underline{1}} + 40$. Piglisi il terzo delle potenze e moltiplichisi via il tutto, fa 12, che aggionto a $12^{\underline{1}}$ fa $24^{\underline{1}}$. Cubisi il terzo delle potenze fa 8, che aggionto al numero, ch'è 40, fa 48 e si haverà $24^{\underline{1}} + 48$. Moltiplichisi il terzo delle potenze, ch'è 2, via 24, numero delli Tanti, fa 48 e questo si cava del numero, resta 0, et si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $24^{\underline{1}}$, che (seguendosi il Capitolo) il Tanto valerà R.c.24, che cavatone 2, terzo delle potenze, restara R.q.24 $-$ 2 per la valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}}$ a $6^{\underline{1}} + 68$. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, e moltiplichisi via il tutto fa 12 et aggionghisi a $6^{\underline{1}}$ fa $18^{\underline{1}}$. Cubisi il terzo delle potenze, fa 8, che aggionto al numero fa 76, che aggionto alli Tanti fa $18^{\underline{1}} + 76$, e moltiplichisi il terzo delle potenze, ch'è 2, via 18, numero delli Tanti, fa 36, che cavato di $18^{\underline{1}} + 76$, resta $18^{\underline{1}} + 40$; e questo è eguale a $1^{\underline{3}}$ che (seguendosi il Capitolo) il Tanto valerà R.c.$\llcorner$20 + R.q.184$\lrcorner$ + R.c.$\llcorner$20 $-$ R.q.184$\lrcorner$ e se ne cava 2, terzo delle potenze, restara R.c.$\llcorner$20 + R.q.184$\lrcorner$ + R.c.$\llcorner$20 + R.q.184$\lrcorner$

$1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}}$ Eguale a $12^{\underline{1}} + 40$

$1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}}$		Eguale a	$12^{\underline{1}} + 40$
3/ 2			12 8 cubo di 2
12			$24^{\underline{1}} + 48$
			2 48
			48 0

$1^{\underline{3}}$ Eguale a $24^{\underline{1}}$
Il Tanto vale R.q. 24
Terzo delle potenze 2
Valuta del Tanto R.q. 24 — 2.

$-$ 2, ch'è la valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}}$ a $3^{\underline{1}} + 3$. Piglisi il terzo delle potenze e moltiplichisi via il tutto, fa $27^{\underline{1}}$, si aggionge alli $3^{\underline{1}} + 3$, fa $30^{\underline{1}} + 3$, et a questo si aggionge il Cubato del terzo delle potenze, cioè al numero, fa $30^{\underline{1}} + 30$, che cavato del numero la moltiplicatione di 30, numero delli Tanti, via il terzo delle potenze, ch'è 90, resta $30^{\underline{1}} - 60$ e questo è eguale a $1^{\underline{3}}$ che levato il meno si haverà $1^{\underline{3}}$ + 60 eguale a $30^{\underline{1}}$, che trovata la valuta del Tanto, se ne cava 3, terzo delle potenze, et il restante sarà la valuta del Tanto, e questi sono li tre essempij, del nascimento degli quali io porrò l'essempio di ciascuno qui sotto.

Il primo, ch'è $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}}$ eguale a $12^{\underline{1}} + 40$, il suo agguagliamento nasce da questa trasmutatione. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, et aggionghisi a $1^{\underline{1}}$, lato cubico del Cubo, farà $1^{\underline{1}} + 2$, che si cuba fa $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 8$, e di questo si cava $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}}$, restano $12^{\underline{1}} + 8$, la qual'e la quantità che si deve aggiongere a ciascuna delle parti, che aggionta a $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}}$ et a $12^{\underline{1}} + 40$, farà $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 8$ eguale a $24^{\underline{1}} + 48$, che (come si è veduto) $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 8$ ha lato cubico, ch'è $1^{\underline{1}} + 2$, ma $24^{\underline{1}} + 48$ non ha lato cubico: però si potrà dire $1^{\underline{3}}$ eguale a $24^{\underline{1}} + 48$ e perchè il lato del primo cubo era $1^{\underline{1}}$ e di questo cubo secondo è $1^{\underline{1}} + 2$, il Tanto vale 2 più che prima: però li $24^{\underline{1}}$ vagliono 48 più che non valevano prima, che cavato 48 di $24^{\underline{1}} + 48$, restara $24^{\underline{1}}$ eguale a $1^{\underline{3}}$, che il Tanto vale R.q.24, e questo è la valuta dopo la trasmutatione, che cavatone 2, che val meno il Tanto avanti la trasmutatione, resta R.q.24 $-$ 2, ch'è il vero valore del Tanto avanti la trasmutatione.

Il secondo, ch'è $1^{\underline{3}}$ + $6^{\underline{2}}$ eguale a $6^{\underline{1}}$ + 68. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, e aggionghisi a $1^{\underline{1}}$, lato del Cubo, fa $1^{\underline{1}}$ + 2. Il suo cubato e $1^{\underline{3}}$ + $6^{\underline{2}}$ + $12^{\underline{1}}$ + 8, che cavatone $1^{\underline{3}}$ + $6^{\underline{2}}$ restano $12^{\underline{1}}$ + 8, ch'è la quantità che si aggionge a ciascuna delle parti, et aggionta a $1^{\underline{3}}$ + $6^{\underline{2}}$ et a $6^{\underline{1}}$ + 68, fa $1^{\underline{3}}$ + $6^{\underline{2}}$ + $12^{\underline{1}}$ + 8 eguale a $18^{\underline{1}}$ + 76, e perchè $1^{\underline{3}}$ + $6^{\underline{2}}$ + $12^{\underline{1}}$ + 8 ha lato cubico (come fu detto di sopra) si potrà dire $1^{\underline{3}}$ eguale a $18^{\underline{1}}$ + 76. Ma queste $18^{\underline{1}}$ vagliono 36 più che non valevano avanti la trasmutatione, che cavato di $18^{\underline{1}}$ + 76, restano $18^{\underline{1}}$ + 40 eguali a $1^{\underline{3}}$ che trovata la valuta del Tanto se ne cava 2, che valeva meno avanti la trasmutatione, e quello che resta a la vera valuta del Tanto avanti la trasmutatione.

Il terzo è $1^{\underline{3}}$ + $9^{\underline{2}}$ eguale a $3^{\underline{1}}$ + 3, che pigliato il terzo delle potenze, ch'è 3, et aggionto a $1^{\underline{1}}$, lato cubico del cubo, fa $1^{\underline{1}}$ + 3, che il suo cubato è $1^{\underline{3}}$ + $9^{\underline{2}}$ + $27^{\underline{1}}$ + 27, che cavatone $1^{\underline{3}}$ + $9^{\underline{2}}$ restano $27^{\underline{1}}$ + 27, e questa è la quakmntità che si deve aggiongere a ciascuna delle parti, la quale aggionta a $1^{\underline{3}}$ + $9^{\underline{2}}$ et a $3^{\underline{1}}$ + 3 fa $1^{\underline{3}}$ + $9^{\underline{2}}$ + $27^{\underline{1}}$ + 27 eguale a $30^{\underline{1}}$ + 30, e perchè $1^{\underline{3}}$ + $9^{\underline{2}}$ + $27^{\underline{1}}$ + 27 ha lato cubico (com'e stato detto nelli essempij passati) si dirà $1^{\underline{3}}$ eguale a $30^{\underline{1}}$ + 30. Ma questi $30^{\underline{1}}$ vagliono 90 più che non valevano avanti la trasmutatione, perchè il lato del primo cubo era $1^{\underline{1}}$ del secondo è $1^{\underline{1}}$ + 3, che $1^{\underline{1}}$ vale 3 più che l'altro, si che cavato 90 di $30^{\underline{1}}$ + 30 restano $30^{\underline{1}}$ − 60 eguali a $1^{\underline{3}}$ che trovata la valuta del Tanto se ne cava 3 che val più il Tanto dopo la trasmutatione, e quello che resta è la valuta del Tanto avanti la trasmutatione.

Ancora questo Capitolo si può trasmutare in un altro modo che e questo. Agguaglisi $1^{\underline{3}}$ + $8^{\underline{2}}$ a $6^{\underline{1}}$ + 18; levansi il $6^{\underline{1}}$ ad ambedue le parti, e si heverà $1^{\underline{3}}$ + $8^{\underline{2}}$ − $6^{\underline{1}}$ eguale a 18. Hora trovinsi due numeri che moltiplicati l'uno via l'altro faccino 18 e che al cubato di uno di essi numeri aggiontoli otto suoi quadrati e della somma cavatone sei volte detto numero resti 18. Ponghisi uno di detti due numeri essere $1^{\underline{1}}$, l'altro sarà 18 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che il suo cubato sarà 5832 esimo d'$1^{\underline{3}}$, che aggionto alli otto suoi quadrati, che saranno 2592 esimi d'$1^{\underline{2}}$, fa $5832 + 2592^{\underline{1}}$ esimi d'$1^{\underline{3}}$ che cavatone 108 esimo d'$1^{\underline{1}}$, cioè sei volte 18 esimo d'$1^{\underline{1}}$, resta $5832 + 2592^{\underline{1}} - 108^{\underline{2}}$ esimi d'$1^{\underline{3}}$ e questo è eguale a 18, che levato il rotto et il meno si haveranno $18^{\underline{3}} + 1081.$ eguali a $2592^{\underline{1}} + 5832$, che ridutti a $1^{\underline{3}}$ si haverà $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}}$ eguale a $144^{\underline{1}} + 324$, che trovata la valuta del Tanto, si partirà il numero di prima, cioè il 18, per detta valuta e l'avenimento sarà la valuta avanti la trasmutatione. Ma per voler fare detta trasmutatione in un istante tenghisi questa regola: ad $1^{\underline{3}}$ aggionghisi il numero delli Tanti, ma dica potenze e questo sarà eguale alla moltiplicatione del numero delle potenze via il numero ed il produtto dica Tanti, et aggiongasegli il quadrato del numero. E questa trasmutatione e più presto curiosità che cosa necessaria, ma può qualch evolta far fuggire il fastidio delli rotti.

Capitolo di Cubo e Tanti eguali a Potenze e numero.

Questo Capitolo può venire in sette modi, li quali sono questi: Cubo eguale a numero, Cubo eguale a Tanti, Cubo e Tanti eguale a numero, Cubo eguale a Tanti e numero, Cubo e numero eguale a Tanti, Cubo e Tariti eguale a zero e Cubo Tanti e numero eguale a zero, e di tutti ne porrò gli essempij, e prima.
Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 12^{\underline{1}}$ a $6^{\underline{2}} + 12$. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, e moltiplichisi via il tutto fa 12 e di questo si cavino li Tanti che sono col Cubo, resta zero; poi si cuba il terzo delle potenze, che sarà 8, che cavato di 12 resta 4; e si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a 4. Seguitisi il Capitolo che il Tanto valera R.c.4, che aggiontoli il terzo delle potenze, 2, fara 2 + R.c. 4 e questo e la valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 21^{\underline{1}}$ a $9^{\underline{2}} + 9$. Piglisi il terzo delle potenze, ch'e 3, e moltiplichisi via il tutto fa 27, e di questo se ne cavi 21, numero delli Tanti, restano $6^{\underline{1}}$, poi si moltiplica il terzo delle potenze via 6, numero delli Tanti, fa 18 e si aggionge al numero, fa 27, del quale se ne cava il cubato del terzo delle potenze, resta zero e si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale alli $6^{\underline{1}}$ detti di sopra, che (seguendosi il Capitolo) il Tanto valera R.q. 6, al che aggionge il terzo delle potenze, fa 3 + R.q. 6 che tanto vale il Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 90^{\underline{1}}$ a $15^{\underline{2}} + 320$. Piglisi il terzo delle potenze, ch'e 5, e moltiplichisi via il tutto fa 75 e questo si cava del numero delli Tanti, resta $1^{\underline{3}} + 15^{\underline{1}}$, poi si piglia il cubato del terzo delle potenze, ch'e 125, e se li aggionge 75, moltiplicatione del terzo delle potenze via 15, numero delli Tanti, fa 200 e questo si cava di 320, cioe del numero, resta 120 etè eguale a $1^{\underline{3}} + 15^{\underline{1}}$, che (seguendosi il Capitolo) il Tanto valera R.c.$\llcorner$R.q. $3725 + 60\lrcorner$ $-$ R.c.$\llcorner$R.q. $3725 - 60\lrcorner$ al che si aggionge il terzo delle potenze, fa R.c.$\llcorner$R.q. $3725 + 601\lrcorner$ $-$ R.c.$\llcorner$R.q. $3725 - 60\lrcorner + 5$ e questo e la valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{1}}$ a $6^{\underline{2}} + 24$. Piglisi il terzo delle potenze, ch'e 2, che moltiplicato via il tutto fa 12, che cavatone 9, numero delli Tanti, restano $3^{\underline{1}}$, che si aggiongono al numero e faranno $3^{\underline{1}} + 24$ et al numero si aggionge la moltiplicatione del terzo delle potenze via li detti $3^{\underline{1}}$, fara $3^{\underline{1}} + 30$ e di questo se ne cava il cubato del terzo delle potenze, restano $3^{\underline{1}} + 22$ eguali a $1^{\underline{3}}$, che (seguendosi il Capitolo) il Tanto valera R.c.$\llcorner 11 +$ R.q. $120\lrcorner$ + R.c.$\llcorner 11 -$ R.q. $120\lrcorner$ che aggiontoli 2, terzo delle potenze, fa R.c.$\llcorner 11 +$ R.q. $120\lrcorner$ + R.c.$\llcorner 11 -$ R.q. $120\lrcorner + 2$ e questa e la valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 11^{\underline{1}}$ a $6^{\underline{2}} + 2$. Piglisi il terzo delle potenze, ch'e 2, e moltiplichisi via il tutto fa 12, che cavatone 11, numero delli Tanti, resta $1^{\underline{1}}$ e si aggionge al numero, fa $1^{\underline{1}} + 2$, che aggiontoli 2, produtto del terzo delle potenze via $1^{\underline{1}}$, fa $1^{\underline{1}} + 4$ e di questo se ne cava il cubato del terzo delle potenze, resta $1^{\underline{1}} - 4$, ch'e eguale a $1^{\underline{3}}$ e levato il meno si haverà $1^{\underline{3}} + 4$ eguale a $1^{\underline{1}}$ e perchè fu detto nel Capitolo di Cubo e numero eguale a Tanti, ch'essendo maggiore il quadrato della metà del numero del cubato del terzo delli 1, tal Capitolo non si potere agguagliare, ma in questo caso non pare questa difficulta, perchè bisogna ponere il numero dalla parte delli $1^{\underline{1}}$, che dira $1^{\underline{3}}$ eguale a $1^{\underline{1}} + 4$, ma trovata la valuta del Tanto, sarà meno, che cavato di 2, terzo delle potenze, lo restante sarà la valuta del Tanto avanti la trasmutatione, e per farne la prova: agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $1^{\underline{1}} + 4$, che il Tanto valerà $\text{R.c.}\llcorner 2 + \text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner + \text{R.c.}\llcorner 2 - \text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner$ che cavato di 2, terzo delle potenze, resta $2 - \text{R.c.}\llcorner 2 + \text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner\,\lrcorner - \text{R.c.}\llcorner 2 - \text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner$ e volendo provarlo bisogna che il cubato di questa quantita con undici volte la stessa quantita faccia quanto il suo quadrato moltiplicato per 6 et al produtto gionto 2; ma il cubato sarà $9\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} +$ due volte il quadrato di $\text{R.c.}\llcorner 2 + \text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner +$ due volte il quadrato di $\text{R.c.}\llcorner 2 - \text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner +$ quattro volte il quadrato di $\text{R.c.}\llcorner 2 + \text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner +$ quattro volte il quadrato di $\text{R.c.}\llcorner 2 + \frac{107}{27}\lrcorner -$ otto volte $\text{R.c.}\llcorner 2 + \frac{107}{27}\lrcorner -$ otto volte $\text{R.c.}\llcorner 2 - \text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner -$ volte $4\frac{2}{3}$ $\text{R.c.}\llcorner 2 + \text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner$ $-$ quattro volte e due terzi $\text{R.c.}\llcorner 2 - \text{R.q.}2\frac{107}{27}\lrcorner -$ un terzo di volta $\text{R.c.}\llcorner 2$ $+ \text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner -$ un terzo di volta $\text{R.c.}\llcorner 2 - \text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner$ meno $2 + \text{R.q.}\frac{107}{27}$ meno 2 $- \text{R.q.}\frac{107}{27}$, che ridutto a brevità sarà $8 +$ sei volte il quadrato di $\text{R.c.}\llcorner 2 +$ $\text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner +$ sei volte il quadrato di $\text{R.c.}\llcorner 2 - \text{R.q.}271 -$ tredici volte $\text{R.c.}\llcorner 2$ $+ \text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner -$ tredici volte $\text{R.c.}\llcorner 2 - \text{R.q.}^{\underline{2}}71$ che aggiontoli undeci volte 2 $- \text{R.c.}\llcorner 2 + \text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner - \text{R.c.}\llcorner 2 - \text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner$ fa $30 +$ sei volte il quadrato di $\text{R.c.}\llcorner 2 + \text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner +$ sei volte il quadrato di $\text{R.c.}\llcorner 2 - \text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner +$ vintiquattro volte $\text{R.c.}\llcorner 2 + \text{R.q.}27\lrcorner -$ vintiquattro volte $\text{R.c.}\llcorner 2 - \text{R.q.}27{,}1$ e questo ha da esser pari a sei quadrati della valuta del Tanto, et a essi gionto poi 2 et un quadrato è $4\frac{2}{3} + \text{R.c.}\llcorner\frac{215}{27} + \text{R.q.}\frac{17}{12}\lrcorner + \text{R.c.}\llcorner\frac{215}{27} - \text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner - \text{R.c.}\llcorner 128$ $+ \text{R.q.}\frac{438272}{27}\lrcorner - \text{R.c.}\llcorner 128 - \text{R.q.}\frac{438272}{27}\lrcorner$ che moltiplicato per sei fa $28 +$ sei volte il quadrato di $\text{R.c.}\llcorner 2 + \text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner +$ sei volte il quadrato di $\text{R.c.}\llcorner 2 -$ $\text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner -$ vintiquattro volte $\text{R.c.}\llcorner 2 + \text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner -$ vintiquattro volte $\text{R.c.}\llcorner 2$ $+ - \text{R.q.}\frac{107}{27}\lrcorner$ che aggiontoli 2 fa quanto il cubo con li $11^{\underline{1}}$ (come si vede).

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 15^{\underline{1}}$ a $6^{\underline{2}} + 14$. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, e moltiplichisi via il tutto fa 12 e questo si cava del numero delli Tanti, resta $1^{\underline{3}} + 3^{\underline{1}}$; poi si cuba il terzo delle potenze, fa 8 e se li aggionge il produtto del terzo delle potenze via li $3^{\underline{1}}$, cioè 6, fa 14 e si cava del numero, resta 0, e questo è eguale a $1^{\underline{3}} + 3^{\underline{1}}$, che (seguendosi il Capitolo) il Tanto vale 0, che aggiontoli 2, terzo delle potenze, fa 2 e 2 vale il Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}}$ + $28^{\underline{1}}$ a $9^{\underline{2}}$ + 28. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 3, e moltiplichisi via il tutto, fa 27, che cavato del numero delli Tanti, resta $1^{\underline{3}}$ + $1^{\underline{1}}$, poi si cuba il terzo delle potenze, fa 27, che aggionto col produtto del terzo delle potenze via 1, numero delli Tanti, fa 30, che cavato di 28 resta − 2 e questo è eguale a 1 + $1^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto vale − 1, che aggionto con 3, terzo delle $^{\underline{2}}$, fa 2 e questo è la valuta del Tanto e questi sono li sette modi sopradetti, de' quali mostrero il nascimento delle loro trasmutationi ordinatamente.

E prima: il primo, ch'è $1^{\underline{3}}$ + $12^{\underline{1}}$ eguale a $6^{\underline{2}}$ + 12, il suo agguagliamento nasce da questa trasmutatione. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, e cavisi d'$1^{\underline{1}}$, lato cubico del cubo, resta $1^{\underline{1}}$ − 2, che il suo cubato e $1^{\underline{3}}$ − $6^{\underline{2}}$ + $12^{\underline{1}}$ − 8, che cavatone $1^{\underline{3}}$ − $6^{\underline{2}}$ + $12^{\underline{1}}$ resta − 8, e questa è la quantità che si deve aggiongere a ciascuna delle parti, e così aggionto − 8 a $1^{\underline{3}}$ − $6^{\underline{2}}$ + $12^{\underline{1}}$ et a 12 farà $1^{\underline{3}}$ − $6^{\underline{2}}$ + $12^{\underline{1}}$ − 8 eguale a 4, che pigliato il lato cubo di ciascuna delle parti si haverà $1^{\underline{1}}$ − 2 eguale a R.c.4, che levato il meno si haverà $1^{\underline{1}}$ eguale a 2 + R.c. 4 e questo è la valuta del Tanto.

Il secondo, ch'è $1^{\underline{3}}$ + $21^{\underline{1}}$ eguale a $9^{\underline{2}}$ + 9, per fare la sua trasmutatione levinsi le potenze da ogni parte, e si haverà $1^{\underline{3}}$ − $9^{\underline{2}}$ + $21^{\underline{1}}$ eguale a 9; piglisi il terzo delle potenze, ch'è 3, e cavisi da $1^{\underline{1}}$resta $1^{\underline{1}}$ − 3, che il suo cubato sarà $1^{\underline{3}}$ − $9^{\underline{2}}$ + $27^{\underline{1}}$ − 27 e di questo si cava $1^{\underline{3}}$ − $9^{\underline{2}}$ + $21^{\underline{1}}$, restano $6^{\underline{1}}$ − 27, ch'è la quantità la quale bisogna aggiongere a ciascuna delle parti, si che aggionta a $1^{\underline{3}}$ + $9^{\underline{2}}$ + $21^{\underline{1}}$ eta 9 sarà $1^{\underline{3}}$ − $9^{\underline{2}}$ + $27^{\underline{1}}$ − 27 eguale a $6^{\underline{1}}$ − 18 e così (come si è veduto) $1^{\underline{3}}$ − $9^{\underline{2}}$ + $27^{\underline{1}}$ − 27 ha lato cubico, ch'è $1^{\underline{1}}$ − 3, ma $6^{\underline{1}}$ − 18 non hanno lato cubico, però si potrà dire 1 i eguale a $6^{\underline{1}}$ − 18, e perchè il lato del primo cubo era $1^{\underline{1}}$ e di questo secondo e $1^{\underline{1}}$ − 3, peròil Tanto vale 3 meno che non valeva prima e li $6^{\underline{1}}$ valeranno − 18, che cavato di $6^{\underline{1}}$ − 18 restarà solo $6^{\underline{1}}$ eguale a 1 che (seguendosi il Capitolo) il Tanto valerà R.q.6 e questa è la valuta dopo la trasmutatione, che vale 3 meno che non valeva avanti la trasmutatione. Però aggiongaseli 3, fa 3 + R.q.6, et questo e la valuta del Tanto avanti la trasmutatione.

Il terzo è $1^{\underline{3}} + 90^{\underline{1}}$ eguale a $15^{\underline{2}} + 320$. Levinsi le potenze (com'e stato detto) si haverà $1^{\underline{3}} - 15^{\underline{2}} + 901$ eguale a 320. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 5, e cavisi d'$1^{\underline{1}}$, resta $1^{\underline{1}} - 5$, che il suo cubato e $1^{\underline{3}} - 15\ ^{\underline{2}} + 75^{\underline{1}} - 125$, che cavatone $1^{\underline{3}} - 15^{\underline{2}} + 90^{\underline{1}}$ resta $15^{\underline{1}} - 125$, e questa a la quantità che si deve aggiongere a ciascuna delle parti, la quale aggionta a $1^{\underline{3}} - 15^{\underline{2}} + 90^{\underline{1}}$ et a 320 farà $1^{\underline{3}} + 15^{\underline{2}} + 75^{\underline{1}} - 125$ eguale a $195 - 15^{\underline{1}}$, si che fatto [come di sopra] si haverà 1 eguale a $195 - 15^{\underline{1}}$. Ma perchè questi Tanti vagliono 5 meno l'uno che non valevano avanti la trasmutatione, peròli meno $15^{\underline{1}}$ valeranno + 75, che levato di $195 - 15^{\underline{1}}$ resta $120 - 15^{\underline{1}}$ eguale a $1^{\underline{3}}$, che levato il meno e seguendosi il Capitolo il Tanto valerà R.c.$\llcorner$ R.q.3725 + 601 − R.c.$\llcorner$R.q.3725 − 60$\lrcorner$ e questa è la valuta del Tanto dipoi la trasmutatione, che vale − 5 che non valeva avanti detta trasmutatione; peròaggiongasegli 5 fa 5 + R.c.$\llcorner$R.q.3725 + 60$\lrcorner$ + R.c.$\llcorner$R.q.3725 − 60$\lrcorner$ che questo è la valuta del Tanto avanti la trasmutatione.

Il quarto è $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{1}}$ eguale a $6^{\underline{2}} + 24$. Levinsi le potenze (come di sopra) si haverà $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 9^{\underline{1}}$ eguale a 24. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, e cavisi d'$1^{\underline{1}}$, resta $1^{\underline{1}} - 2$, che il suo cubato sarà $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 8$, che cavatone $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 9^{\underline{1}}$ restano $3^{\underline{1}} + 8$ e questa è la quantità che bisogna aggiongere a ciascuna delle parti, la quale aggionta a $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 9^{\underline{1}}$ et a 24 farà $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 8$ eguale a $3^{\underline{1}} + 16$, che, fatto come di sopra, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $3^{\underline{1}} + 16$. Ma perchè questi Tanti vagliono 2 meno che non valevano avanti la trasmutatione, li $3^{\underline{1}}$ valeranno − 6, che cavato di $3^{\underline{1}} + 16$ restano $3^{\underline{1}} + 22$ eguali a $1^{\underline{3}}$, che (seguendosi il Capitolo) il Tanto valerà R.c.$\llcorner$11 + R.q.120$\lrcorner$ + R.c.$\llcorner$11 − R.q.120$\lrcorner$ questo e la valuta del Tanto, dipoi la trasmutatione, che aggiontoli 2 che valeva più il Tanto avanti la trasmutatione, fa R.c.$\llcorner$11 + R.q.120$\lrcorner$ + R.c.$\llcorner$11 − R.q.120$\lrcorner$ + 2, e quest'è la valuta del Tanto avanti la trasmutatione.

Ii quinto è $1^{\underline{3}} + 11^{\underline{1}}$ eguale a $6^{\underline{2}} + 2$, che, fatto come di sopra, si haverà $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 11^{\underline{1}}$ eguale a 2, che pigliato il terzo delle potenze, ch'è 2, e cavato d'$1^{\underline{1}}$ resta $1^{\underline{1}} - 2$, che il suo cubato è $1^{\underline{3}} + - 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 8$, che cavatone $1^{\underline{3}}$ $-6^{\underline{2}} + 11^{\underline{1}}$ resta $1^{\underline{1}} - 8$ e questa è la quantità che si deve giongere a ciascuna delle parti, la quale aggiontaa $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 11^{\underline{1}}$ et a 2 fa $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 8$ eguale a $1^{\underline{1}} - 6$, che, facendo come di sopra, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $1^{\underline{1}} - 6$; perchè il Tanto dipoi la trasmutatione valeva 2 meno che non valeva prima, percio $1^{\underline{1}}$ vale $- 2$, che cavato d'$1^{\underline{1}} - 6$ resta $1^{\underline{1}} - 4$ eguale a $1^{\underline{3}}$, che levato il meno si haverà $1^{\underline{3}} + 4$ eguale a $1^{\underline{1}}$, che trovata Ia valuta del Tanto se li aggionge 2 e la somma sarà la valuta del Tanto avanti la trasmutatione.

I1 sesto è $1^{\underline{3}} + 15^{\underline{1}}$ eguale a $6 + 14$, che, fatto come si è detto, si haverà $1^{\underline{3}} -6^{\underline{2}} + 15^{\underline{1}}$ eguale a 14, che pigliato il terzo delle potenze, ch'è 2, e cavato d'$1^{\underline{1}}$ resta $1^{\underline{1}} - 2$, che il suo cubato e $1^{\underline{3}} + - 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 8$, che cavatone $1^{\underline{3}} -6^{\underline{2}} + 15^{\underline{1}}$ resta $- 3^{\underline{1}} - 8$, e questa è la quantità che si deve aggiongere ad ambedue le parti, che aggionta a $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 15^{\underline{1}}$ et a 14 farà $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 8$ eguale a $6 - 3^{\underline{1}}$, che, fatto come di sopra, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $6 - 3^{\underline{1}}$. Ma perchè questi Tanti vagliono 2 meno l'uno che non valevano avanti la trasmutatione, li $- 3^{\underline{1}}$ vagliono $+ 6$, che cavato di $6 - 3^{\underline{1}}$ restano $- 3^{\underline{1}}$ eguali a $1^{\underline{3}}$, che levato il meno si haverà $1^{\underline{3}} + 3^{\underline{1}}$ eguale a nulla, peròquesto Cubo $- 3^{\underline{1}}$ viene anch'egli ad esser nulla. Onde i1 Tanto dipoi la trasmutatione e nulla, et avanti la trasmutatione il Tanto era 2 più che non era doppo la trasmutatione, però esso Tanto valerà 2.

I1 settimo ed ultimo è $1^{\underline{3}} + 28^{\underline{1}}$ eguale a $9^{\underline{2}} + 28$, che, fatto come di sopra, si haverà $1^{\underline{3}} - 9 + 28^{\underline{1}}$ eguale a 28; piglisi il terzo delle potenze, ch'è 3, e cavato d'$1^{\underline{1}}$ resta $1^{\underline{1}} - 3$, che il suo cubato e $1^{\underline{3}} -9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} - 27$, che cavatone $1^{\underline{3}} - 9^{\underline{2}} + 28^{\underline{1}}$ resta $- 1^{\underline{1}} - 27$ e questa è la quantita che si deve aggiongere ad ambedue le parti, che aggionta a $1 - 9^{\underline{2}} + 28^{\underline{1}}$ farà $1^{\underline{3}} - 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} - 27$ eguale a $1 - 1^{\underline{1}}$, che, fatto come di sopra, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a 1

$- 1^{\underline{1}}$. Ma perchè li Tanti dipoi la trasmutatione vagliono 3 meno l'uno che non valevano avanti la trasmutatione, però $- 1^{\underline{1}}$ valerà $+ 3$, che cavato d'1 $- 1^{\underline{1}}$ resta $- 2 - 1^{\underline{1}}$ et questo è eguale a $1^{\underline{3}}$, che levato il meno delli Tanti si haverà $1^{\underline{3}} + 1^{\underline{1}}$ eguale a $- 2$; peròessendo il numeno meno, di necessità $1^{\underline{3}} + 1^{\underline{1}}$ anch'esso sarà meno, per esserli eguale, peròagguaglisi $1^{\underline{3}} + 1^{\underline{1}}$ a 2, il Tanto valerà 1 e questo 1 è meno per la ragione sopradetta, che aggionto con 3 che valeva più il Tanto avanti la trasmutatione farà 2, ch'è la valuta d'esso Tanto avanti la trasmutatione. [11]

Capitolo di Cubo e numero eguale a potenze e Tanti.

Questo Capitolo può venire in tre modi, quali sono questi: Cubo eguale a Tanti, Cubo eguale a Tanti e numero e Cubo e numero eguale a Tanti, e di tutti tre ne porrò gli essempij, e prima.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 22$ a $6^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}}$. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, e moltiplichisi via il tutto, fa 12, il quale si aggionge a 3, numero delli Tanti, fa $15^{\underline{1}}$; poi si moltiplica il terzo di dette potenze via 15, numero delli Tanti,

[11] Ancora questo Capitolo si può trasmutare in quest'altro modo. Agguagliasi $1^{\underline{3}} + 28^{\underline{1}}$ a $9^{\underline{2}} + 28$: levansi i Censi da ciascuna de le parti, si haverà $1^{\underline{3}} - 9^{\underline{2}} + 28^{\underline{1}}$ eguale a 28. Hora trovansi due numeri, che moltiplicati l'uno via l'altro facciano 28, et che pigliato uno di detti due numeri et al suo cubato aggiontoli le sue $28^{\underline{1}}$, et de la somma trattone li suoi nove quadrati, resti pure 28. Pongasi l'uno di detti due numeri essere $1^{\underline{1}}$ l'altro sarà 184 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che aggiunto con detto cubato, farà $21952 + 784^{\underline{2}}$ esimo d'$1^{\underline{3}}$, che trattone li nove quadrati, resta $21952 + 784^{\underline{2}} - 7056$ esimo d'$1^{\underline{2}}$ et questo è eguale a 28, che levato il rotto, et ridutto a $1\,^{\underline{3}}$, si haverà $784 + 28^{\underline{2}} - 252^{\underline{1}}$ eguale a $1^{\underline{3}}$; che seguito il capitolo la cosa valerà 14, et il numero che fu pigliato era 28 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che partito 28 + 14, ne viene 2, et tanto valerà la cosa innanzi la trasmutatione. Et questa trasmutatione leva la difficultà del meno detta nella trasmutatione passata. Ma volendo fare tal trasmutatione brevemente, levasi la quantità de le cose, et mettasi da la banda del numero, et dicono censi, et se gli aggiunga il quadrato del numero, che pure dica numero: poi si moltiplica il numero de Censi via il numero, et il prodotto dica cose; et mettasi da la banda del Cubo; et poi seguitasi lo agguagliamento; et trovata che si ha la valuta de la cosa, partasi il umero per detta valuta; et lo avenimento sarà la valuta de la cosa innanzi la trasmutatione: Benchè tal trasmutatione non sia molto necessaria come fu detto nel capitolo passato.

fa 30 e di questo se ne cava il cubato del terzo di dette potenze, resta 22 et è numero, che aggionto a $15^{\underline{1}}$ fa $15^{\underline{1}} + 22$, et è eguale a $1^{\underline{3}} + 22$, che levato il numero resta 1 eguale a $15^{\underline{1}}$, che (seguendosi lo agguagliare) il Tanto valerà R.q.15 et a questo si aggionge 2, terzo delle potenze, fa R.q.15 + 2 per la valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 2$ a $6^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}}$. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è e moltiplichisi via il tutto fa 12, e si aggionge a 3, numero delli Tanti, fa $15^{\underline{1}}$, poi si piglia il duplo del cubato del terzo delle potenze, ch'è 16, e se gli aggionge il produtto del terzo delle potenze via li $3^{\underline{1}}$ primi, ch'è 6, fa 22, e questo è numero, che aggionto a $15^{\underline{1}}$ fa $15^{\underline{1}} + 22$ che sarà eguale a $1^{\underline{3}} + 2$, che levato il numero minore restarh $1^{\underline{3}}$ eguale a $15^{\underline{2}} + 20$, che trovata la valuta del tanto se gli aggiongerà 2, terzo delle potenze, e la somma e la vera valuta del Tanto e se bene questi due essempij paiono differenti nel trovare il numero che va accompagnato con li Tanti, nondimeno fa un medesimo effetto, però ciascuno può usare quello che più gli piace.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 165$ a $9^{\underline{2}} + 9^{\underline{1}}$. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è e moltiplichisi via il tutto fa 27 et aggionghisi a 9, numero delli Tanti, fa $36^{\underline{1}}$, poi si piglia il doppio del cubo del terzo delle potenze, ch'è 27, e se gli aggionge il produtto del terzo delle potenze via li $9^{\underline{1}}$ di prima, ch'è 27, fa 81 e questo è numero che aggionto a $36^{\underline{1}}$ fa $36^{\underline{1}} + 81$, et è eguale a $1^{\underline{3}} + 165$, che levato il minor numero, restara $1^{\underline{3}} + 84$ eguale a $36^{\underline{1}}$, che trovata la valuta del Tanto se gli aggionge 3, terzo delle potenze, e la somma e la vera valuta del Tanto. Ma questa agguagliatione non si può fare per due cause che in ella concorrono; l'una è che il quadrato del numero e maggiore del terzo del cubo delli Tanti, l'altra che ponendo il numero dalla parte delli Tanti et agguagliandolo il Tanto valerebbe R.c.48 + R.c.36 e queste due R.c. sono maggiori di 3, terzo delle potenze, però non si possono cavare e tal caso e insolubile perchè quello che si cerca o e cosa impossibile overo fu fatta male la positione e questi sono li tre modi sopradetti, delli quali similmente mostraro il nascimento delle loro trasmutationi per ordine.

E prima: il primo è $1^{\underline{3}} + 22$ eguali a $6^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}}$; per fare la sua trasmutatione si levano le potenze da ogni parte: si haverà $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 22$ eguali a $3^{\underline{1}}$; piglisi il terzo delle potenze, ch'$6^{\underline{2}}$, e cavisi d'$1^{\underline{1}}$, lato cubico del Cubo, resta $1^{\underline{1}} - 2$, che il suo cubato e $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 8$, che cavatone $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 22$ resta $12^{\underline{1}} - 30$, che operandosi come si è fatto nell'altre trasmutationi, aggiungendo a ciascuna delle parti $12^{\underline{1}} - 30$, si haverà $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 8$ eguale a $15^{\underline{1}} - 30$, che fatto come si è detto nelli altri Capitoli, si haverà 1 eguale a $15^{\underline{1}} - 30$. Ma perchè il Tanto doppo la trasmutatione vale 2 meno che non valeva avanti, però li $15^{\underline{1}}$ vagliono $- 30$, che cavato di $15^{\underline{1}} - 30$ restano $15^{\underline{1}}$ eguale a $1^{\underline{3}}$ che, agguagliato, il Tanto vale R.q.15 e questa è la valuta del Tanto doppo la trasmutatione, che aggiontoli 2 che valeva pili il Tanto avanti la trasmutatione, fa R.q.15 + 2 e questo è la valuta del Tanto avanti la trasmutatione.

Il secondo è $1^{\underline{3}} + 2$ eguale a $6^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}}$, che, fatto come di sopra, si haverà $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 2$ eguale a $3^{\underline{1}}$. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, e cavisi d'$1^{\underline{1}}$, resta $1^{\underline{1}} - 2$, che il suo cubato e $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 8$, che cavatone $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 2$ restano $12^{\underline{1}} - 10$, ch'è la quantità che si deve aggiongere a ciascuna delle parti, che aggionta a $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 2$ et a $3^{\underline{1}}$ si haverà $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 8$ eguale a $15^{\underline{1}} - 10$, che, fatto come nelli altri Capitoli, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $15^{\underline{1}} - 10$, e perchè li Tanti doppo la trasmutatione vagliono 2 meno l'uno che non valevano prima, li $15^{\underline{1}}$ valeranno $- 30$, che cavato di $15^{\underline{1}} - 10$ resta $15^{\underline{1}} + 20$ eguali a 1 che trovata la valuta del Tanto se li aggiongerà 2, che valeva più avanti la trasmutatione e la somma sarà la valuta del Tanto avanti essa trasmutatione.

Il terzo et ultimo modo è $1^{\underline{3}} + 165$ eguale a $9^{\underline{2}} + 9^{\underline{1}}$, che, fatto com'e detto, si haverà $1^{\underline{3}} - 9^{\underline{2}} + 165$ eguale a $9^{\underline{1}}$, che cavato il terzo delle potenze d'$1^{\underline{1}}$ resta $1^{\underline{1}} - 3$, che il suo cubato è $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} - 27$, che cavatone $1^{\underline{3}} - 9^{\underline{2}} + 165$ resta $27^{\underline{1}} - 192$, quantità che si deve aggiongere alle parti, che aggionta, si haverà $1^{\underline{3}} + - 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} - 27$ eguale a $36^{\underline{1}} - 192$, che cavatone

108, che meno valevano li $36^{\underline{1}}$, resta 1 eguale a $36^{\underline{1}} - 84$, che levato il meno si haverà $1^{\underline{3}} + 84$ eguale a $36^{\underline{1}}$, che trovata la valuta del Tanto (potendo), se li aggiongerà 3, che valeva pili avanti la trasmutatione e la somma sarà la valuta del Tanto avanti detta trasmutatione.

Capitolo di Cubo eguale a potenze Tanti e Numero.

Agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $6^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} + 60$. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, e moltiplichisi via il tutto fa 12 e questo si aggionge alli Tanti, fa $15^{\underline{1}}$, li quali si moltiplicano via il terzo delle potenze, fa 30 e questo produtto si aggionge al numero fa 90, del quale si cava il cubato del terzo delle potenze, ch'è 8, resta 82, che si deve accompagnare con li Tanti e si haveranno $15^{\underline{1}} + 82$ eguale a 1 che (seguendosi il Capitolo) il Tanto valerà R.c.$\llcorner$41 + R.q.1556$\lrcorner$ + R.c.$\llcorner$41 − R.q.15561 alla qual valuta si aggionge il terzo delle potenze, fa R.c.$\llcorner$41 +R.q.1556$\lrcorner$ + R.c.$\llcorner$41 − R.q.1556$\lrcorner$ + 2, che tanto vale il Tanto, e questo Capitolo non può venire in altro modo che Cubo eguale a Tanti e numero et il nascimento di questa trasmutatione e questo, ripigliando le dignità medesime dette di sopra, per minor fastidio. Levansi le potenze da ogni parte e si haverà 1 i $- 6^{\underline{2}}$ eguale a $3^{\underline{1}} + 60$; piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, e cavisi d'$1^{\underline{1}}$, lato cubico del cubo, resta $1^{\underline{1}} - 2$, che Il suo cubato e $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 8$, che cavatone $1^{\underline{3}}$ −6 restano $12^{\underline{1}} - 8$, ch'è la quantità d'aggiongere a ciascuna delle parti, che aggionta a $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}}$ e a $3^{\underline{1}} + 60$, fa $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 8$ eguale a $15^{\underline{1}} + 52$. Ma perchè questi Tanti vagliono 2 meno l'uno che non valevano prima, li $15^{\underline{1}}$ valeranno − 30, che cavato di $15^{\underline{1}} + 52$ resta $15^{\underline{1}} + 82$ eguale a $1^{\underline{3}}$, che (seguendosi il Capitolo) il Tanto valerà (com'e detto di sopra) R.c.$\llcorner$41 + R.q.1556$\lrcorner$ + R.c.$\llcorner$41 − R.q.1556$\lrcorner$ e questa è la valuta del doppo la trasmutatione, che aggiontoll 2, che vagliono più l'uno delli Tanti di prima, si haverà R.c.$\llcorner$41 + R.q.1556$\lrcorner$ + R.c.$\llcorner$41 − R.q.1556$\lrcorner$ + 2, ch'è la valuta dal Tanto avanti la trasmutatione. [12]

[12] Per non mancare de l'ordine tenuto ne Capitoli passati, mwtterò quest'altra sorte di trasmutatione del Capitolo sopradetto.

Agguagliasi $1^{\underline{3}}$ a $4^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} + 8$: levasi le dignità, che sono col numero a ciascuna de le parti, *Capitolo di Cubo Tanti e numero eguale a Potenze.*

Questo Capitolo può venire in quattro modi, cioè Cubo eguale a Tanti e numero, Cubo e numero eguale a Tanti, Cubo e numero eguale a zero e Cubo Tanti e numero eguale a zero, delli quali ne ponerò gli essempij, per ordine, e prima.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 27^{\underline{1}} + 37$ a $9^{\underline{2}}$. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 3, e moltiplichisi via il tutto, fa 27 e questo si cava del numero delli Tanti, resta 0; poi si aggionga a 37 il cubato del terzo delle potenze, fa 64 e si haverà $1^{\underline{3}} + 64$ eguale a zero e questo non si può agguagliare se non fintamente, pigliando il lato cubico di 64, ch'è 4, il quale si cava di 3, terzo delle potenze, resta -1 e -1 vale il Tanto, **la qual valuta è falsa, però tal essempio non si può agguagliare.**

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 18^{\underline{1}} + 25$ a $6^{\underline{2}}$. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, e moltiplichisi via il tutto fa 12 e cavisi del numero delli Tanti, resta $6^{\underline{1}} + 1^{\underline{3}}$; poi cubisi il terzo delle potenze fa 8 e moltiplichisi anco detto terzo delle potenze via $6^{\underline{1}}$ fa 12, che aggionto con 8 fa 20 e questo si aggionge al numero, cioè a 25, fa 45 e si haverà $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{1}} + 45$ eguale a 0. Questo meno non si può agguagliare se non finto; però agguaglisi $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{1}}$ a 45, che il Tanto

et si haverà $1^{\underline{3}} - 4^{\underline{2}} - 3^{\underline{1}}$ eguale a 8: Hora formasi la dimanda, con dire: trovami due numeri che moltipllicati l'uno via l'altro faccia 8, et che il cubato d'uno di essi numeri trattone quattro suoi quadrati, et le tre sue cose, resti pur 8. Pongasi uno di detti due numeri essere $1^{\underline{1}}$; l'altra sarà 8 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che il suo Creatore sarà 512 esimo d'$1^{\underline{3}}$, che trattone li suoi quattro quadrati, che sono 256 esimo d'$1^{\underline{2}}$, et le $3^{\underline{1}}$, che sono 24 esimo d'$1^{\underline{1}}$; che fatto, come è stato mostrato a suo luogo, restano $512 - 256^{\underline{1}} - 24^{\underline{2}}$ esimo d'$1^{\underline{3}}$: et questo è eguale a 8, che levato il rotto, et ridutto a $1^{\underline{3}}$, si haverà $1^{\underline{3}} + 3^{\underline{2}} + 32$ eguale a 256, che trovata la valuta de la cosa si partirà 8, et lo avenimento sarà la valuta de la cosa innanzi la trasmutatione: ma volendo fare tale trasmutatione, con brevità, mettansi le cosa da la banda del cubo, et dicono censi, et poi moltiplicansi il numero dei censi via il numero et il prodotto si metta da la banda pur del cubo, et dicono cose, et il tutto è eguale al quadrato del numero.

valerà 3 e questo si cava di terzo delle potenze resta $-$ 1 per valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 18^{\underline{1}} + 8$ a $9^{\underline{2}}$. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è e moltiplichisi via il tutto fa 27, che cavatone 18, numero delli Tanti, resta $9^{\underline{1}}$, poi si cuba il terzo delle potenze fa 27, che aggionto al numero fa 35, e di questo si cava il produtto di 9, numero delli Tanti, via 3, terzo delle potenze, resta 8, che si accompagna col Cubo, e si haverà $1^{\underline{3}} + 8$ eguale a $9^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà R.q. $9\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$, e aggiontoli 3, terzo delle potenze, fa $3\frac{1}{2}$ + R.q.$9\frac{1}{4}$, e questo è la valuta del Tanto avanti la trasmutatione, et ancora: agguagliato $1^{\underline{3}} + 8$ a $9^{\underline{1}}$, il Tanto valerà 1, che aggionto a 3, terzo delle potenze, fa 4, e 4 vale il Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 15^{\underline{1}} + 3\frac{1}{8}$ a $9^{\underline{2}}$. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 3, e si moltiplica via il tutto, fa 27 e se ne cava 15, numero delli Tanti, resta $12^{\underline{1}}$, poi si cuba il terzo delle potenze, fa 27 e si aggionge col numero, fa $30\frac{1}{8}$, e questo si cava di 36, produtto di 12, numero delli Tanti, via 3, terzo delle potenze, resta $5\frac{7}{8}$ e si accompagna con li Tanti, fa $12^{\underline{1}} + 5\frac{7}{8}$ eguale a $1^{\underline{3}}$ che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$11\frac{13}{16} + \frac{1}{4}$, che aggiontoli 3, terzo delle potenze farà R.q.$11\frac{13}{16} + 3\frac{1}{4}$ e quest'è la valuta del Tanto. [13]

[13]Questi sono li quattro modi detti: de quali metterò la lora trasmutatione, col nascimento del suo agguagliare.
Il primo, ch'è $1^{\underline{3}} + 27^{\underline{1}} + 37$ eguale a $9^{\underline{2}}$. levansi li Censi da ogni banda, si haverà $1^{\underline{3}} - 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} + 37$ eguale a 0: pigliasi il terzo de censi che è 3, et cavasi di $1^{\underline{1}}$ Creatore del cubo, resta $1^{\underline{1}} - 3$, che il suo cubato sarà $1^{\underline{3}} - 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} - 27$, che trattone $1^{\underline{3}} - 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} + 37$, resta $-$ 64, et questa è la quantità da aggiungersi a ciascuna de le parti, che aggionta a $1^{\underline{3}} - 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} + 37$, et a 0, si haverà $1^{\underline{3}} - 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} - 27$ eguale a $-$ 64, che preso il Creatore cubico di ciascuna de le parti, si haverà $1^{\underline{1}} - 3$ eguale a $-$ 4; che levato il meno, resta $1^{\underline{1}}$ eguale a $-$ 1 che $-$ 1 vale la cosa.
Il secondo ch'è $1^{\underline{3}} + 18^{\underline{1}} + 25$ eguale a $6^{\underline{2}}$. Levansi li censi, come di sopra, si haverà $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 18^{\underline{1}} + 25$ eguale a 0: pigliasi il terzo de censi, ch'è 2, et cavasi d'$1^{\underline{1}}$, resta $1^{\underline{1}} - 2$, che il suo cubato è $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} - 8$, che trattone $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 18^{\underline{1}} + 25$, restano $- 6^{\underline{1}} -$ 33, ch'è la quantità da aggiungere a ciascuna de le parti; che aggiunta a $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}} + 18^{\underline{1}}$ - 25, et a 0, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $- 6^{\underline{1}} - 33$. Ma perchè queste cose vagliano $-$ 2 l'una, che

Capitolo di Cubo potenze e numero eguale a Tanti.

---

non valeranno le $-\ 6^{\underline{1}}$ valeranno $+\ 12$, che tratto di $-\ 6^{\underline{1}} - 33$, restano $-\ 6^{\underline{1}} - 45$ eguale a $1^{\underline{3}}$; che levato il meno de le cose, si haverà $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{1}}$ eguale a $-\ 45$; che aggugliato la cosa valerà $-\ 3$; che è la valuta dopo la trasmutatione, a la quale aggiunto 2, che valerà più la cosa avanti la trasmutatione, farà $-\ 1$, et tanto valerà la cosa innanzi detta trasmutatione.
Il terzo è $1^{\underline{3}} + 18^{\underline{1}} + 8$ eguale a $9^{\underline{2}}$: Levansi li Censi, si haverà $1^{\underline{3}} - 9^{\underline{2}} + 18^{\underline{1}} + 8$ eguale a 0: cavasi il terzo de censi, ch'è 3 di $1^{\underline{1}}$, resta $1^{\underline{1}} - 3$, che'l suo Creatore è $1^{\underline{3}} - 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} - 27$, che trattone $1^{\underline{3}} - 9^{\underline{2}} + 18^{\underline{1}} + 8$, restano $9^{\underline{1}} - 35$: et questa è la quantità che va aggiunta a ciascuna de le parti; et aggiunta a $1^{\underline{3}} - 9^{\underline{2}} + 18^{\underline{1}} + 8$, et a 0, si haverà $1^{\underline{3}} - 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} - 27$ eguale a $9^{\underline{1}} - 35$; che fatto, come di sopra, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $9^{\underline{1}} - 35$. Ma perchè queste cose vagliano $-\ 3$ l'una, che non valevano prima; le $9^{\underline{1}}$ valeranno $-\ 27$, che tratto di $9^{\underline{1}} - 35$ restano $9^{\underline{1}} - 8$, che sono eguali a $1^{\underline{3}}$, et levato il meno, si haverà $1^{\underline{3}}$ - $8^{\underline{0}}$ eguale a 9: la cosa valerà 1, che aggiuntolo 3, che valeva più la cosa innanzi la trasmutatione farà 4; et tanto vale la cosa avanti detta trasmutatione.
Il quarto et ultimo è $1^{\underline{3}} + 15^{\underline{1}} + 3\frac{1}{8}$ eguale a 9, che levati li censi, si haverà $1^{\underline{3}} - 9^{\underline{2}} + 15^{\underline{1}} + 3\frac{1}{8}$, restano $12^{\underline{1}} - 30\frac{1}{8}$: et questa è la quantità che va aggiunta a ciascuna de le parti, et aggiunta come di sopra, si haverà $1^{\underline{3}} - 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} - 27$ eguale a $12^{\underline{1}} - 30\frac{1}{8}$; che fatto come ne gl'altri, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $12^{\underline{1}} - 30\frac{1}{8}$, restano $12^{\underline{1}} + 5\frac{7}{8}$ eguali a $1^{\underline{3}}$. che agguagliato, la cosa valerà R.q.$11\frac{13}{16} + \frac{1}{4}$, che aggiontolo 3, che valeva la cosa più avanti la trasmutatione farà R.q.$11\frac{13}{16} + 3\frac{1}{4}$: et tanto valerà la cosa innanzi detta trasmutatione. per non mancare de l'ordine, ponerò l'altra sorte di trasmutatione, come ne Capitoli passati.
Agguagliasi $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{1}} + 8$ a $7^{\underline{2}}$. Levasi le dignità di ciascuna banda, che sono accompagnate col numero, et si haverà 8 eguale a $7^{\underline{2}} - 1^{\underline{3}} - 6^{\underline{1}}$. Hora trovansi due numeri, che moltiplicati l'uno via l'altro facciano 8, et che il creato d'uno d'essi numeri, con le sei sue cose tratte de li sette suoi quadrati, resti 8. Pongasi l'uno di detti due numeri essere $1^{\underline{1}}$, l'altro sarà 8 esimo dì$1^{\underline{1}}$, che'l suo cubato è 512 esimo d'$1^{\underline{3}}$ et le sue $6^{\underline{1}}$ sono 48 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che aggiunte insieme fanno $512 + 48^{\underline{2}}$ esimo d'$1^{\underline{3}}$, che tratto di 48 esimo d'$1^{\underline{2}}$ sette quadrati di 8 esimo d'$1^{\underline{1}}$ resta $448^{\underline{1}} - 48 - 512$ esimo d'$1^{\underline{3}}$ eguale a 8; che levato il rotto, et ridutto a $1^{\underline{3}}$, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $56^{\underline{1}} - 6^{\underline{2}} - 64$; che levato il meno, restarà $56^{\underline{1}}$ eguali a $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 64$: che trovata la valuta de la cosa; potendosi; si partirà 8 per detta valuta, et lo avenimento sarà la valuta de la cosa innanzi la trasmutatione: ma per fare essere trasmutatione con brevità, facciasi dire censi al numero de le cose, stando pure da la banda del cubo, più il quadrato del numero; et questa somma è ehuale a tante cose, quanto è il produtto del numero de le cose via il numero: che verrà il medesimo come di sopra.

Questo Capitolo non può venire se non a Cubo e numero eguale a Tanti, e ne porrò il suo essempio.

Agguaglisi $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 8$ a $15^{\underline{1}}$. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, e moltiplichisi via il tutto, fa 12 e questo si aggionge al numero delli Tanti, fa $27^{\underline{1}}$, il quale si moltiplica via 2, terzo delle potenze, fa 54 e se gli aggionge 8 numero, fa 62 e di questo se ne cava 8, cubato del terzo delle potenze, resta 54, e si haverà $54 + 1^{\underline{3}}$ eguale a $27^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 3, e di questo se ne cava 2, terzo delle potenze, resta 1 e 1 vale il Tanto, et il suo nascimento nasce da questa trasmutatione. Piglisi il terzo delle potenze, ch'è 2, et aggionghisi a 11, fa $1^{\underline{1}} + 2$, che il suo cubato e $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 8$, che se ne cava $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 8$, restano $12^{\underline{1}}$ e questa è la quantità da aggiongere alle parti e si haverà, $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 8$ eguale a $27^{\underline{1}}$; che, fatto come nelli altri Capitoli, si haverà 1 eguale a $27^{\underline{1}}$, ma quelli Tanti vagliono 2 più l'uno che non valevano avanti la trasmutatione; perciò li sudetti $27^{\underline{1}}$ valeranno 54, che cavato di $27^{\underline{1}}$ resta $27^{\underline{1}} - 54$ eguale a $1^{\underline{3}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 3, e perchè questo Tanto vale 2 più degli Tanti di prima, cavato 2 di 3 resta 1 et 1 valeva il Tanto avanti la trasmutatione. L'altra trasmutatione di questo Capitolo e questa: farai delli Tanti potenze, che $15^{\underline{1}}$ saranno $15^{\underline{2}}$ e queste sono eguali a $1^{\underline{3}} + 48^{\underline{1}} + 64$; li $48^{\underline{1}}$ nascono dal produtto di $6^{\underline{2}}$ via 8, e 64 nasce dal quadrato di 8, e trovata che si haverà la valuta del Tanto, si parte 8 per essa valuta e l'avenimento sarà la valuta del Tanto avanti la trasmutatione. [14]

Delle trasmutationi in diversi modi.

Li soprascritti Capitoli tutti quanti si possono trasmutare in diverso modo e per diversi modi (come si mostrara), e prima: presuposto che si havesse $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}}$ eguale a 32. Egli è manifesto che

[14] L'latra tasmutatione di questo Capitolo è: farai de le cose censi, cioè che $15^{\underline{1}}$ siano $15^{\underline{2}}$, et questi sono egualia a $1^{\underline{3}} + 48^{\underline{1}} + 64^{\underline{4}}$: le $48^{\underline{1}}$ nascono dal prodotto di $6^{\underline{2}}$ via 8: et 64 nasce dal quadrato di 8: et trovata che si haverà la valuta de la cosa, si parte 8 per essa valuta; et lo avenimento sarà la valuta de la cosa innanzi la trasmutatione.

$1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}}$ e il Cubo di una quantità suoi sei quadrati eguale a 32; ponghisi che il lato di detto Cubo sia $1^{\underline{1}} - 2$, il suo cubo sarà $1^{\underline{3}}$ $-6^{\underline{2}} + 12 - 8$ e li suoi sei quadrati sono $6^{\underline{2}} - 24^{\underline{1}} + 24$ (perchè l'uno de' quadrati e $1^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 4$), che aggionto con il Cubo fa $1^{\underline{3}} + 16 -$ $12^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 32, che levato 16 a ciascuna delle parti et il meno, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $12^{\underline{1}} + 16$, che agguagliato, il Tanto vale 4 e perchè fu posto il lato del Cubo $1^{\underline{1}} - 2$, levato 2 di 4 resta 2, e questo è la valuta del Tanto avanti la trasmutatione, e questa è più breve via che pigliare il terzo delle potenze, perchè questo è più intelligibile. Ma se si fusse posto che il lato del Cubo fusse $1^{\underline{1}}$ $- 1$, il suo cubo sarebbe stato $1^{\underline{3}} - 3^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} - 1$ e li sei quadrati $6^{\underline{2}}$ $- 12^{\underline{1}} + 6$, che aggionti insieme fanno $1^{\underline{3}} + 3^{\underline{2}} - 9^{\underline{1}} + 5$ e questo sarebbe eguale a 32, che agguagliato, il Tanto vale 3, e fu posto $1^{\underline{1}}$ $- 1$, ch'è 2, ma meglio e sempre ponere meno il terzo delle potenze al contrario, cioè se le potenze sono con il Cubo ponere meno, se sono al contrario ponere et così si trasmutaranno li Capitoli senza fastidio.

Agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $6^{\underline{2}} + 49$: se si leverà $6^{\underline{2}}$ dalle parti si haverà $1^{\underline{3}} - 6^{\underline{2}}$ eguale a 49. Hor si formarh la domanda. Trovami uil numero che del suo cubo cavati il suoi sei quadrati resti 49; ponghisi il numero essere $1^{\underline{1}} + 2$, il cubo sarà $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{12}} + 12^{\underline{1}} + 8$, e li sei quadrati saranno $6^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 24$, che cavato d'$1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 8$ resta $1 -$ $12^{\underline{1}} - 16$ eguale a 49, che levato il meno si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $12^{\underline{1}}$ $+ 65$, che agguagliato, il Tanto vale 5, e perchè fu posto il lato del cubo $1^{\underline{1}} + 2$, il lato del cubo era 7 avanti la trasmutatione.

[15] E perchè ci sono molti dei Capitoli posti adietro imperfetti, certo in-

[15]Il primo, ch'è Cubo e cose eguale a numero, non può avere se una valuta, et sempre si può agguagliare: et la sua valuta sarà numero, overo due Radici cubiche, cioè una radice cuba meno un'altra radice cubica, come si mostrò ne li suoi esempij, però non ne dirò altro.

Il secondo, ch'è Cubo eguale a Cose et numero. Ogni volta, che'l quadrato de la metà del numero è pari o maggiore del cubato del terzo de le cose; tal Capitolo si potrà agguagliare;

et lo avenimento sarà numero overo due Radici cube, che vadano insieme aggiunte. Ma quando non sia pari o maggiore il quadrato de la metà dal numero del cubato del terzo de la cosa: bisogna agguagliare con la regola del cardano: ma non si trovano, che con detta Regola si possono agguagliare. Il resto con la sua sofistica che ha suo luogo ho dimostrata, si potranno agguagliare: et tal Capitolo può havere due valute una vera e l'altra falsa: La falsa si trova in questo modo.

Agguagliasi $1^{\underline{4}}$ a $12^{\underline{1}} + 16$. Mwttasi il numero da la banda del Cubo, et si haverà $1^{\underline{4}} + 16^{\underline{0}}$ eguale a $12^{\underline{1}}$; che agguagliato, la cosa valerà 2; et questo è meno: poi di $1^{\underline{3}}$ eguale a $12^{\underline{1}} + 16$, la vera valuta è 4, et la falsa è $-\ 2$. Et quanto al trovare una regola generale, con la quale si possa agguagliare questo Capitolo: perchè si trova la regola, quando la cosa val numero: overo un binomio composto di due Radici Cube overo un bnomio come si vede in questi tre esempi. $1^{\underline{3}}$ eguale a $12^{\underline{1}} + 16$. la cosa vale 4. $1^{\underline{3}}$ eguale a $6^{\underline{1}} + 8$: la cosa vale R.c.$\llcorner 4 +$ R.q.$8 \lrcorner +$ R.c.$\llcorner 4 -$ R.q.$8 \lrcorner$ che se bene sono legate, pure sono Radici cube. Et $1^{\underline{3}}$ eguale a $6^{\underline{1}} + 4$, la cosa vale R.q.3 + 1, et questa valuta si trovano per le regole date; ma già non si può trovare, che la cosa vaglia una radice sorda, ne una radice Cuba, ne un Binomio che sia maggiore il numero de la radice, ne un composto di numero et radice cuba, ne un composto di due Radici sorde; ne un composto di numero et radice cuba, ne un composto di due Radici sorde, ne un composto di RR.q. più un numero: overo un numero più una RR.q. come per essempio. Vaglia la cosa 2 + r.q.2, il cubo valerà 20 + R.q.392, che per levare la R.q.392; le cose, che sono da la banda contraria di necessità saranno 14, che per le sole valeranno 28 + R.q.392, che si vede, che solo la cosa senza accompagnarla col numero valgono 8 più che'l cubo: et così per gl'altri intraviene il medesimo che nasce qualch'altra proportione fra di loro, come nell'operare troverà, chi vorrà cercare. Sichè, quanto al giudizio mio, tengo quasi impossibile ritrovarsi tal regola generale. Et non mi confidando de le ragioni assignate: quando detto Capitolo ha harrato tal proportione, che non si è potuto cavare il cubato del terzo de le cose del quadrato de la metà del numero, com'è $1^{\underline{3}}$ eguale a $9^{\underline{1}} + 9$: quale agguagliamento mi serviva in dividere l'angolo in tre parti pari; come a suo luogo si dirà; ho provato più sorti di trasmutationi, in Censo Censo Cubo eguale a Censi, Cose, et numero: in Censo censo, eguali a Cubi, Censo, Cose et numero, in Censo Censo eguale a Censi, Cose et numero et infinite altre trasmutationi. Ne mai ho potuto trarre cosa di buono, se non un poco di brevità ne numeri. Come se fusse $1^{\underline{3}}$ eguale a $24^{\underline{1}} + 320$: partansi le cose per 4, et il numero per 8 cubato del Creatore del 4, si haveranno $6^{\underline{1}} + 40$ eguali a $1^{\underline{3}}$, che la cosa valerà 4, che si moltiplica per 2 Creatore del 4 partitore de le cose fa 8, et tanto valeva la cosa prima. Et così se fusse $1^{\underline{3}}$ eguale a $54^{\underline{1}} + 1080$, che partito $54^{\underline{1}}$ per 9, ne vengono $6^{\underline{1}}$: et 1080 per 27 cubto del Creatore di 9 partitore de le cose, ne vien 40; che si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $6^{\underline{1}} + 40$, che la cosa valerà 4, che moltiplicato per 3 Creatore di 9, partitore de le cose, fa 12, et tanto valeva la cosa. Et tal regola non è guasi di nessun valore; se non che serve a fuggire le fatiche de numeri grandi: Si che questo è quanto ho trovato: onde sopra ciò non dirò altro.

Il terzo è Cubo et numero eguale a Cose: et perchè ne gl'essempii dati, et dello agguagliare delli ho detto che si metta il numero da la banda de la cosa come è $1^{\underline{3}}$ + 2 eguale a $3^{\underline{1}}$, chemesso il numero, com'è detto, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $3^{\underline{1}}$ - 2: questo si può agguagliare per la regola del cardano. ma se dicesse $1^{\underline{3}}$ - 4 eguale a $3^{\underline{1}}$, è impossibile aggugaliarlo, se non fino; perchè il quadrato de la metà del numero supera il cubato del terzo de la cosa, che è il contrario del diretto del capitolo passato: et tal capitolo può avere tre valute due vere, et una falsa. come per essempio $1^{\underline{3}}$ + 8 eguale a $14^{\underline{1}}$, che aggugalito $1^{\underline{3}}$ a $14^{\underline{1}}$ - 8, la cosa valerà 4: che fatto, che dirà $-$ 4, questa sarà la valuta falsa: le altre due vere saranno 2 + R.q.2; et 2 $-$ R.q.2: et perchè pare, che non sia cosa bella, che una dimanda habbia due valute; questa è più tosto in apparenza, che in effetto: perchè quasi sempre, che lo agguagliamento verrà a questo capitolo; la dimanda sarà: trovare due numeri; et così le due valute saranno i due numeri; overo sarà fare di un numero due parti, che le due valute saranno i due numeri saranno le parti addimandate.

Il quarto è Cubo eguale a Censo et numero. Questo Capitolo sempre si potrà agguagliare perchè la trasmutatione è Cubo et Cose eguale a Numero, overo Cubo eguale a Cose et Numero. ma sempre il quadrato de la metà del numero supererà il cubato del terzo de le cose, e questa è regola infallibile. Come per essempio: se si havrebbe $1^{\underline{3}}$ eguale a $6^{\underline{2}}$ + 0, che trasmutato si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $12^{\underline{1}}$ + 16; che si vede che il quadrato de la metà del numero è pari al cubato del terzo de le cose: si che se con i censi fusse stato una minima parte di numero, il quadrato de la metà del numero havria superato il cubato del terzo de le cose: et questo effetto fa in tutti gli agguagliamenti: et questo capitolo rare volte havrà più di una valuta vera, et una falsa.

Il quinto è Cubo, et Censi eguale a numero questo patisce le medesime essetioni che il capitolo di cubo eguale a Cose, et numero: però avertendone a suo luogo detto a bastanza, non ne dirò altro.

Il sesto è Cubo et numero eguale a Censo. Questo non si può agguagliare, quando il numero è tanto grande, che trattone li due cubati del terzo de Censi, et del restante presone il quarto del suo quadrato, superi il quadrato del suo cubato del terzo de Censi: come per essempio $1^{\underline{3}}$ + 4 eguale a $6^{\underline{2}}$: che tratto di 40, 16 doppio del cubato del terzo de Censi, resta 24, che'l quarto del suo quadrato è 144, che supera 64 quadrato del cubato di 2 terzo de i Censi. nel resto questo capitolo ha le difficoltà del Capitolo di cubo et numero eguali a Cose.

Il settimo è Cubo, Censo et Cose eguale a Numero. Questo capitolo non può havere valuta finita. nel resto patisce le difficoltà secondo le sue trasmutationi, eccetto che ventioni bellissime (come si vede nel vigesimoquinto Capitolo della sua Arte magna) nondimeno tutti si possono solvere per le regole date, come mostraro ad uno ad uno.

Il primo che dice: agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $20^{\underline{1}} + 32$. Questo si pue agguagliare con aggiongere 8 ad ambedue le parti e si haverà $1^{\underline{3}} + 8$ eguale a $20^{\underline{1}} + 40$, che partite ambedue le parti per $1^{\underline{1}} + 2$ ne viene $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 4$ eguali a 20, che seguendosi il Capitolo il Tanto valerà R.q.17 + 1.

Il secondo dice: agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $32^{\underline{1}} + 24$. Questo si può agguagliare con la regola del + di − che ho dimostrata et il Tanto valerà R.c.$\llcorner$12 + di − R.q.$1069\frac{17}{27}\lrcorner$ + R.c.$\llcorner$12 − di − R.q.$1069\frac{17}{27}$, e perchè queste due R.c. legate hanno il lato, ch'è 3 + di − R.q.$1\frac{2}{3}$ e 3 − di − R.q.$1\frac{2}{3}$, che aggionti insieme fanno 6. Però 6 vale il Tanto, li quali lati facilmente si potranno trovare ricorrendo alle regole sopra cio date nel primo libro.

---

quando viene a Cubo et numero eguali a Cose, non verrà mai che'l quadrato de la metà del numero sia maggiore del cubato del terzo de le cose.

L'ottavo è Cubo, Censi eguale a Cose et numero. Questo patisce la difficoltà de la trasmutatione: et la valuta finita è mettere il numero da la banda contraria et si haverà Cubo, Censi et Numero eguale a Cose; che la valuta sarà meno.

Il nono è Cubo et Cose eguale a Censi et Numero. Queste ha la difficoltà secondo le trasmutationi: et quando la metà de i cnesi supera il numero de le cose tale agguagliamento non si può fare: come sarebbe $1^{\underline{3}} + 28^{\underline{1}}$ eguale a $10^{\underline{2}} + 3$, questo non si può agguagliare: perchè la metà de i censi supera il numero; et il quadrato di detta metti, ch'è 25, non si può cavare 28 numero de le Cose.

Il decimo è Cubo, et numero eguale a Censi, et Cose: questo patisce le difficoltà de le sue trasmutationi; come è stato detto ne l'ottavo.

L'undicesimo è Cubo eguale a Censi, Cose, et Numero. Questo anch'egli patisce le difficoltà de le sue trasmutationi; come il sopradetto.

Il dodicesimo, è Cubo, Cose, t numero eguali a Censi. Questo risolutamente non si può agguagliare quando le Cose superano il quadrato de la metà de Censi. nel resto patisce le difficoltà de li due precedenti.

Il terzo dice: agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $10^{\underline{1}} + 24$. Questo si può agguagliare per la regola di tagliare il Cubo (come si mostro a suo luogo) che il Tanto valerà R.c.$\llcorner 12 +$ R.q.$106\frac{26}{27}\lrcorner +$ R.c.$\llcorner 12 -$ R.q.$106\frac{26}{27}\lrcorner$, e perchè queste due R.c. hanno lato, ch'è $2 +$ R.q.$\frac{2}{3}$ e $2 -$ R.q.$\frac{2}{3}$, che aggionti insieme fanno 4, però 4 vale il Tanto.

Il quarto dice: agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $19^{\underline{1}} + 30$. Aggionghisi 27 a ciascuna delle parti, si haverà $1^{\underline{3}} + 27$ eguale a $19^{\underline{1}} + 57$. Partasi ciascuna delle parti per $1^{\underline{1}} + 3$ ne viene $1^{\underline{2}} - 3^{\underline{1}} + 9$ eguale a 19, che agguagliato, il Tanto valerà 5.

Il quinto dice: agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $7^{\underline{1}} + 90$. Questo si può agguagliare con la regola del taglio del Cubo e ne verrà R.c.$\llcorner 45 +$ R.q.$2012\frac{8}{27}\lrcorner +$ R.c.$\llcorner 45 -$ R.q.$2012\frac{8}{27}\lrcorner$ che pigliato il lato di ciascuna, si haverà $2\frac{1}{2} +$ R.q.$3\frac{11}{12}$ e $2\frac{1}{2} -$ R.q.$3\frac{11}{12}$, che aggionti insieme fanno 5, e 5 vale il Tanto.

Il sesto dice: agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $16^{\underline{1}} + 21$. Aggionghisi 27 a ciascuna delle parti e si haverà $1^{\underline{3}} + 27$ eguale a $16^{\underline{1}} + 48$; partisi ciascuna parte per $1^{\underline{1}} + 3$, ne viene $1^{\underline{2}} - 3^{\underline{1}} + 9$ eguale a 16, così agguagliato secondo il suo Capitolo, il Tanto valerà R.q.$9\frac{1}{4} - + 1\frac{1}{2}$; il che parimente dice il Cardano in questo medesimo Capitolo.

Agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $4^{\underline{1}} + 15$, che questo pur si pue agguagliare per la regola del taglio del Cubo e ne verrà R.c.$\llcorner 7\frac{1}{2} +$ R.q.$53\frac{95}{108}\lrcorner +$ R.c.$\llcorner 7\frac{1}{2} -$ R.q.$53\frac{95}{108}\lrcorner$, che pigliato il lato di ciascuna si haverà $1\frac{1}{2} +$ R.q.$1\frac{11}{12}$ et $1\frac{1}{2} -$ R.q.$1\frac{11}{12}$, che sommate insieme fanno 3, e 3 vale il Tanto.

Il settimo dice: agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $14^{\underline{1}} + 8$, che agguagliato con la regola del + di − ne verrà R.c.$\llcorner 4 +$ di $-$ R.q.$37\frac{17}{27}\lrcorner +$ R.c.$\llcorner 4 -$ di $-$ R.q.$37\frac{17}{27}\lrcorner$, che tolto il lato di ciascuna si haverà $2 +$ di $-$ R.q.$\frac{2}{3}$ e $2 -$ di $-$ R.q.$\frac{2}{3}$, che aggionti insieme fanno 4 che 4 vale il Tanto.

L'ottavo dice: agguaglisi $1^{\underline{3}}$ a $14^{\underline{1}} + 8$. Per essere il medesimo posto di sopra, sopra questo, percie non ne dire altro.

Il nono dice: agguaglisi $1^{\underline{3}} + 12$ a $34^{\underline{2}}$. Levisi il 12 da ogni parte, si haverà 1 eguale a $34^{\underline{1}} - 12$; hora aggionghisi 216 a ciascuna delle parti, si haverà $1^{\underline{3}} + 216$ eguale a $34^{\underline{1}} + 204$, che partita ciascuna delle parti per $1^{\underline{1}} + 6$ ne verrà $1^{\underline{2}} - 6^{\underline{1}} + 36$ eguale a 34. Seguitisi il Capitolo, che il Tanto valerà 3 + R.q.7 overo 3 − R.q.7.

Il decimo dice: agguaglisi $1^{\underline{3}} + 21$ a $16^{\underline{1}}$. Levisi il 21 da ogni parte si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $16^{\underline{1}} - 21$; levisi 27 da ogni parte, si haverà $1^{\underline{3}} - 27$ eguale a $16^{\underline{1}} - 48$; partisi ciascuna delle parti per $1^{\underline{1}} - 3$, ne viene $1^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} + 9$ eguale a 16, che seguendosi il Capitolo il Tanto valerà R.q.$9\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2}$ e ancora il Tanto di questo Capitolo ha un'altra valuta, ch'è il 3 che fu partitore insieme con il Tanto, la qual regola mai falla (come si vedra ne gli altri).

L'undecimo dice: agguaglisi $19^{\underline{1}}$ a $1^{\underline{3}} + 18$. Levisi il 18 da ogni parte, si haverà 1 eguale a $19^{\underline{1}} - 18$. Levisi 1 da ogni parte, si haverà $1^{\underline{3}} - 1$ eguale a $19^{\underline{1}} - 19$, che partita ciascuna delle parti per $1^{\underline{1}} - 1$ ne verrà $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}} +$ 1 eguale a 19; seguitisi il Capitolo che il Tanto valerà R.q.$18\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2}$ overo 1 che fu partitore con il Tanto.

Il duodecimo dice: agguaglisi $18^{\underline{1}}$ a $1^{\underline{3}} + 8$. Levisi l'8 da ogni parte, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $18^{\underline{1}} - 8$; levisi 64 da ogni parte, si haverà $1^{\underline{3}} - 64$ eguale a $18^{\underline{1}} - 72$, che partita ciascuna delle parti per $1^{\underline{1}} - 4$ ne verrà $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 16$ eguale a 18; seguitisi il Capitolo che il Tanto valerà R.q.6 − 2 overo 4 che fu partitore insieme con il Tanto.

Il decimoterzo dice: agguaglisi $15^{\underline{1}}$ a $1^{\underline{3}} + 18$. Levisi il 18 da ogni parte, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $15^{\underline{1}} - 18$. Levisi 27 da ogni parte, si haverà $1^{\underline{3}} - 27$

eguale a $15^{\underline{1}} - 45$; partisi ciascuna delle parti per $1^{\underline{1}} - 3$, ne viene $1^{\underline{2}} + 3^{\underline{2}} + 9$ eguale a 15; seguitisi il Capitolo che il Tanto valerà R.q.$8\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2}$ overo 3 che fu partitore insieme con il Tanto.

Il decimoquarto dice: agguaglisi $1^{\underline{3}} + 20^{\underline{2}}$ a 72. Levinsi le $20^{\underline{2}}$ da ogni parte, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $72 - 20^{\underline{2}}$ aggionghisi 8 a ciascuna parte, si haverà $1^{\underline{3}} + 8$ eguale a $80 - 20^{\underline{2}}$; partasi ciascuna delle parti per $1^{\underline{1}} + 2$, ne viene $I^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 4$ eguale a $40 - 20^{\underline{1}}$; seguitisi il Capitolo che il Tanto valerà R.q.$117 - 9$.

Il decimoquinto dice: agguaglisi $1^{\underline{3}} + 48$ a $10^{\underline{2}}$. Levisi il 48 da ogni parte, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $10^{\underline{2}} - 48$; aggionghisi 8 a ciascuna delle parti, si haverà $1^{\underline{3}} + 8$ eguale a $10^{\underline{2}} - 40$; partisi ciascuna delle parti per $1^{\underline{1}} + 2$ ne viene $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 4$ eguale a $10^{\underline{1}} - 20$; seguitisi il Capitolo che il Tanto valerà $6 +$ R.q.12 overo $6 -$ R.q.12.

Il decimosesto dice: agguaglisi $1^{\underline{3}} + 48$ a $25^{\underline{1}}$. Levisi il 48 da ogni parte, si haverà 1 eguale a $25^{\underline{1}} - 48$. Levisi 27 da ogni parte, si haverà $1^{\underline{3}} - 27$ eguale a $25^{\underline{1}} - 75$; partasi ciascuna delle parti per $1^{\underline{1}} - 3$, ne viene $1^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} + 9$ eguale a 25; seguitisi il Capitolo che il Tanto valerà R.q.$18\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2}$ overo 3 che fu partitore insieme con il Tanto.

Capitolo di potenza di potenza e Tanti eguale a numero.

Doppo ch'io viddi l'opera di Diofante sempre son stato di opinione che tutto il suo intento sino a quei giorni fusse di venire,a questa agguagliatione, perchè si vede che camina a una strada di trovare sempre numeri quadrati e che aggiontoli qualche numero siano quadrati et credo che li sei libri che mancano fussero di questo agguagliamento, nel fine; 6 ben vero che me ne fa stare alquanto in dubbio che giamai opera R.q.,ne so che me ne dire, se non che not restiamo privi, per la malvagita del tempo distruggitor del tutto (il quale ha fatto perdere sudetti sei libri) di una bella e maggior

parte di questa disciplina. Ma Lodovico Ferrari nostro Cittadino[16] anco egli camine per questa via et trove l'uso d'agguagliare simili Capitoli, quale fu inventione bellissima, però mi forzerò di chiarirla al meglio che si potrà in beneficio del Lettore. Dato che si havesse $1^{\underline{4}} + 20^{\underline{3}}$ eguale a 21. Levisi il Tanti a ciascuna delle parti e si haverà $1^{\underline{4}}$ eguale a $21 - 20^{\underline{1}}$ e già siamo chiari che $1^{\underline{4}}$ ha lato et se $21 - 20^{\underline{1}}$ havesse lato, l'agguagliatione saria facile, ma non ha lato, ne lo pue havere, perchè dove intervengono Tanti e numero non può havere lato, ma bisogna siano accompagnati con le potenze. Però se a $1^{\underline{4}}$ se li aggiongesse $2^{\underline{2}} + 1$ faria $1^{\underline{4}} + 2^{\underline{2}} + 1$, e saria quadrato, et aggionto all'altro parte faria $2^{\underline{2}} - 20^{\underline{1}} + 22$, che volendo vedere see quadrato, moltiplichisi 2, numero delle potenze, via 22: se fa 100, quadrato delta metà delli Tanti, sarà quadrato, ma non fa se non 44, però $2^{\underline{2}} + 1$ non basta, ma se si giongerà $4^{\underline{2}} + 4$ a ciascuna delle parti, si haverà $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{2}} + 4$ e $4^{\underline{2}} - 20^{\underline{1}} + 25$, che l'uno e l'altro e quadrato, che li loro lati sono $1^{\underline{2}} + 2$ e $5 - 2^{\underline{1}}$, e l'unoè eguale all'altro, che agguagliato, il Tanto vale 1. Ma perchè queste potenze e numero si sono cercate a tentoni, però porre la regola di trovarli. Si vede che il numero delle potenze che si aggiongono alla potenza di potenza sono il doppio del lato del numero, come quando se li aggionge $2^{\underline{2}} + 1$, il numero delle potenze è il doppio d'1, lato del numero, e quando si aggionge 41. + 4 il numero delle potenze e il doppio di 2, lato del 4 numero; però volendo a $1^{\underline{4}}$ et a $21 - 20^{\underline{1}}$ aggiongere tante potenze e numero che ciascuna parte sia quadrata e che le potenze siano il doppio del lato del numero bisogna formare un quesito che dica: trovisi un numero quadrato che gionto a 21 e moltiplicato via il doppio del suo lato faccia 100, quadrato della metà delli Tanti. Ponghisi che il numero quadrato sia $1^{\underline{2}}$ e si aggionga a 21, fa $21 + 1^{\underline{2}}$ e questo si deve moltiplicare via $2^{\underline{1}}$, doppio del lato d'$1^{\underline{2}}$, fa $2^{\underline{3}} + 42^{\underline{1}}$ e questo deve essere eguale a 100, che agguagliato, il Tanto vale 2, e, perchè fu posto che il numero fosse $1^{\underline{2}}$, sarà 4 e questo sarà il numero da giongere e le potenze saranno 4, cioè il doppio del lato del 4; però aggionto a ciascuna delle parti $4^{\underline{2}} + 4$, si haverà $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{2}} + 4$ e ${}^{\underline{2}}4 - 20^{\underline{1}} + 25$, che l'uno e l'altro

[16]et del cardano, come ne la usa Ars Magna si vede

e quadrato, et essendo eguali, ancora li lati saranno. eguali, che Sono $1^{\underline{2}} + 2$ et $5 - 2^{\underline{3}}$, che agguagliato, il Tanto vale 1. Ma perchè ho detto che il lato di $4^{\underline{2}} - 20^{\underline{1}} + 25$ e $5 - 2^{\underline{1}}$ e ancora potria essere $2^{\underline{1}} - 5$, che levato il meno si haveria $1^{\underline{2}} + 7$ eguale a $2^{\underline{1}}$, che non si potria agguagliare. Però volendosi le regole di questo agguagliamento per brevità faccisi cosi.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 20^{\underline{1}}$ a 21. Faccisi del numero Tanti, che saranno $21^{\underline{1}}$. Poi si pigli l'ottava parte del quadrato del numero delli $20^{\underline{1}}$, ch'è 50, e questo sarà eguale a $1^{\underline{3}} + 21^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 2, il qual 2 si quadra, fa 4, che aggionto al numero di prima, ch'era 21, fa 25, e se ne piglia il lato, ch'è 5, del quale se ne cava 2, cioè la valuta del Tanto detta di copra, resta 3 e questo è eguale a $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ e questi $2^{\underline{1}}$ nascono dal lato della valuta di $2^{\underline{1}}$, cioè da 4, che agguagliato, il Tanto valerà 1.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 16^{\underline{1}}$ a 12. Piglisi l'ottavo del quadrato delli Tanti, ch'è 32, e questo sarà eguale a $1^{\underline{3}} + 12^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 2, che il suo quadrato $6^{\underline{4}}$, che aggionto al 12 fa 16, che il suo lato e 4, del quale cavatone 2, valuta del Tanto, resta 2, e questo è eguale a $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$, e li $2^{\underline{1}}$ si trovano col moltiplicare la valuta del Tanto sopradetta per 2 per regola, e del produtto pigliarne il lato, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$3 - 1$.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 16^{\underline{1}}$ a 48. Piglisi l'ottava parte del quadrato delli Tanti, ch'è 32, e questo sarà eguale a $1^{\underline{3}} + 48^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà R.c.$\llcorner$R.q.$4352 + 16\lrcorner$ $-$ R.c.$\llcorner$R.q.$4352 - 16\lrcorner$ che il suo quadrato sarà R.c.$\llcorner 4608 +$ R.q.$4456448\lrcorner$ $+$ R.c.$\llcorner 4608 -$ R.q.$4456448\lrcorner - 32$, che aggionto al 48 fa R.c.$\llcorner 4608 +$ R.q.$4456448\lrcorner$ $+$ R.c.$\llcorner 4608 -$ R.q.$4456448\lrcorner + 16$, che pigliatone il lato, sarà R.q.$\llcorner$R.c.$\llcorner 4608 +$ R.q.$44564481 +$ R.c.$\llcorner 4608 -$ R.q.$44564481 + 16\lrcorner$ e di questo si cava la valuta del Tanto, resta R.q.$\llcorner$R.c.$\llcorner 4608$ $+$ R.q.$4456448\lrcorner$ $+$ R.c.$\llcorner 4608 -$ R.q.$44564481 + 16\lrcorner$ $-$ R.c.$\llcorner$R.q.$4352 + 16\lrcorner$ $+$ R.c.$\llcorner$R.q.$4352 - 16\lrcorner$ e tutto questo è eguale a $1^{\underline{2}}$ $+$ R.q.$\llcorner$R.c.$\llcorner$R.q.278528 $+ 128\lrcorner$ $-$ R.c.$\llcorner$R.q.$278528 - 12811$, che pigliato la metà delli Tanti, ne viene R.q.⌞R.c.⌞R.q.68 + 2⌟ − R.c.⌞R.q.68 − 2⌟⌟, che il suo quadrato sarà R.c.⌞R.q.68 + 2⌟ − R.c.⌞R.q.68 − 2⌟ e questo si aggionge al numero, fa R.q.⌞R.c.⌞4608 + R.q.44564481 + R.c.⌞4608 − R.q.4456448⌟ + 16⌟ + R.c.⌞R.q 68 + 2⌟ − R.c.⌞R.q.68 − 2⌟ e R.q.legata di tutto questo composto meno la metà delli Tanti, cioè meno R.q.⌞R.c.⌞R.q.68 + 2⌟ − R.c.⌞R.q.68 − 2⌟⌟, sarà la valuta del Tanto, e tale agguagliamento pare quasi impossibile et è verissimo, perchè pigliato la R.q.⌞ di R.q.⌞R.c.⌞4608 + R.q.4456448⌟ + R.c.⌞4608 − R.q.44564481 + 161 + R.c.⌞R.q.68 + 21 − R.c.⌞R.q.68 − 2⌟, che sarà 2 + R.q.⌞R.c.⌞R.q.68 + 2⌟ − R.c.⌞R.q.68 − 2⌟⌟ che cavatone la metà delli Tanti resta 2, ch'è la valuta del Tanto, e benchè tal lato non paia vero, nondimeno e così e facendone la prova (come ho mostrato nel fine del primo libro, di conoscere qual sia maggiore di due quantità) trovara tanto essere detto lato, quanto e detta R.q. legata; benchè tengo che il Binomio et il Trinomio habbia lato, perchè il Tanto habbia da valere 2. Ma tal lato per ancora non ho potuto ritrovare, e perchè sarebbe uno andare per l'infinito a volere porre qui tutti E. modi ne' quasi possono venire così il presente Capitolo, come gli altri di Potenza potenza simili, ne ponerò solo per ogni qualitade, e specie uno o due essempij, con la loro breve regola e dove nasca la sua trasmutatione.

Trasmutatione di potenza potenza e Tanti eguali a Numero, in potenza potenza eguale a Cubo e numero.

Volendo trasmutare $1^{\underline{4}} + 20^{\underline{1}}$ eguale a 21, faccisi questa domanda: trovami due numeri che moltiplicato l'uno via l'altro faccia 21, e che pigliato qual si voglia di essi due numeri et al suo quadroquadrato aggionta la moltiplicatione di esso numero per 20 faccia 21. Ponghisi l'uno di detti due numeri essere $1^{\underline{1}}$, l'altro di necessità sarà 21 esimo d'1 e se si pigliara di detti due numeri 1 suo quadroquadrato sarà $1^{\underline{4}}$, et a moltiplicare $1^{\underline{1}}$ via 20 fa $20^{\underline{1}}$, che aggionte insieme fanno $1^{\underline{4}} + 20^{\underline{1}}$ e questoè eguale a 21, e tanto si haveva prima; però bisogna pigliare l'altro numero, ch'e 21 esimo d'$1^{\underline{1}}$ che il suo quadroquadrato sarà 194481 esimo d'$1^{\underline{4}}$ che aggiontoli 420 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che sono li suoi 201, fara $194481 + 420^{\underline{3}}$, esimi d'$1^{\underline{1}}$, e questoè eguale a 21, che levato il rotto si haverà $194481 + 420^{\underline{3}}$ eguali a $21^{\underline{4}}$, che ridutto a $1^{\underline{4}}$ si haverà $1^{\underline{4}}$ eguale a $9261 + 20^{\underline{3}}$ e questa e la sua trasmutatione, e trovata che sia la valuta del Tanto, partasi 21 per essa valuta e si haverà la valuta del Tanto di prima. Ma per non havere a fare la positione, piglisi il numero e cubisi et al produtto si aggionghino li Tanti, ma di cano Cubi, e questo sarà eguale a $1^{\underline{4}}$, e ancorche paia che queste trasmutationi in questi Capitoli non siano necessarie ne di utilita, pur si vedra che giovaranno ne gli agguagliamenti di questi Capitoli.

Capitolo di potenza potenza eguale a Tanti e numero. Questo Capitolo nel suo agguagliare non patisce eccettione alcuna e sempre si puo agguagliare senza il + di −. Però (senza dire altro) verro agli essempij. Agguaglisi $1^{\underline{4}}$ a $72^{\underline{1}} + 17$. Piglisi l'ottavo del quadrato delli Tanti, ch'e 648, e questo sarà eguale a $1^{\underline{3}} + 17^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 8, e questo per regola si dupla, fa 16, che pigliatone il lato sarà 4, e saranno Tanti, li quali si salvano; poi quadrisi 8, valuta del Tanto di prima, fa 64, e si aggionge al numero, cioe a 17, fa 81, del quale se ne piglia il lato, ch'e 9, del quale se ne cava 8, valuta del sopradetto Tanto, resta 1, e questo si aggionge alli $4^{\underline{1}}$ serbati, fara $4^{\underline{1}} + 1$ ch'e eguale a 1 che agguagliato, il Tanto valera R.q. $5 + 2$.

Agguaglisi $1^{\underline{4}}$ a $4^{\underline{1}} + 6$. Piglisi l'ottavo del quadrato delli Tanti, ch'e 2, e sarà eguale a $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valera R.c. $4 -$ R.c. 2, che duplato fara R.c. $32 -$ R.c. 16, che pigliatone il lato, si haverà R.q.$\llcorner$R.c. $32 -$ R.c.16$\lrcorner$ e questi saranno Tanti poi si quadra R.c.$4 -$ R.c.2, valuta del Tanto, fa R.c. $16 +$ R.c. $4 - 4$, che aggionto col numero, cioe con 6, fa R.c. $16 +$ R.c. $4 + 2$, e di questo se ne piglia il lato ch'e R.q. LR.c. $16 +$ R.c. $4 + 21$, che. aggionto alli Tanti fa R.q.$\llcorner$R.c. $32^{\underline{1}} -$ R.c. $16^{\underline{1}}\lrcorner$ + R.q.$\llcorner$R.c.16 + R.c.$4 + 2\lrcorner$ e questo sarà eguale a $1^{\underline{2}}$ + R.c.$4 -$ R.c.2, che levato il minor numero si haverà $1^{\underline{2}}$ eguale a R.q.$\llcorner$R.c.$32^{\underline{1}} -$ R.c.$16^{\underline{1}}\lrcorner$ + R.q.$\llcorner$R.c.16 + R.c.4 $+ 2\lrcorner$ + R.c.$2 -$ R.c.4; che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$\llcorner$R.c.$\frac{1}{2} -$ R.c.$\frac{1}{4}\lrcorner$ + R.q.$\llcorner$R.c.$\frac{1}{4} -$ R.c.$\frac{1}{2}$ + R.q.$\llcorner$R.c.16 + R.c.$4 + 2\lrcorner$.

La regola di questa agguagliatione detta di sopra nasce dal medesimo detto nel Capitolo di $^{\underline{4}}$ et $^{\underline{1}}$ eguale a numero, come sarebbe $1^{\underline{4}}$ eguale a $72^{\underline{1}}$ + 17; **bisogna aggiongere a ciascuna parte delle potenze e numero, si che divenga l'una e l'altra quadrata, e ne viene formato il medesimo quesito (come il passato) di trovare un numero quadrato che aggionto a 17 e la somma moltiplicata per il doppio del lato di esso numero quadrato faccia 1296, quadrato di 36, metà delli Tanti, che posto che tal numero sia $1^{\underline{2}}$, aggionto con 17 fa 17 + $1^{\underline{2}}$ e moltiplicato via $2^{\underline{1}}$, doppio d'$1^{\underline{1}}$ lato della potenza, fa $2^{\underline{3}}$ + $34^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 1296, che ridutto a $1^{\underline{3}}$ sarà $1^{\underline{3}}$ + $17^{\underline{1}}$ eguale a 648, che agguagliato, il Tanto valerà 8, e la positione fu $1^{\underline{2}}$, ch'è 64, e tanto sarà il numero da aggiongere, e le potenze saranno 16, cioè il doppio del laito di 64, che gionti a ciascuna delle parti si haverà $1^{\underline{4}}$ + $16^{\underline{2}}$ + 64 e $16^{\underline{2}}$ + $72^{\underline{1}}$ + 81, che ciascuno e quadrato, e li lati sono $1^{\underline{2}}$ + 8 eguale a $4^{\underline{3}}$ + 9, che ridutto a brevità resta $1^{\underline{2}}$ eguale a $4^{\underline{1}}$ + 1, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.5 + 2, come fu detto nel primo essempio.**

Capitolo di potenza potenza e numero eguale a Tanti.

Questo Capitolo non si può agguagliare quando la sestadecima parte del quadrato delli Tanti a quadrarla non sia maggiore del cubato del terzo del numero, e questo non e difetto del Capitolo, ma e difetto della domanda, che verrà a questo agguagliamento, la qual domanda sarà impossibile a solvere se non fintamente, e dell'uno e dell'altro modo porrò l'essempio.

Agguaglisi $1^{\underline{4}}$ + 6 a R.q.$32^{\underline{1}}$. Piglisi l'ottava parte del quadrato delli Tanti, ch'è 4, e aggiongasegli il numero, ma dica Tanti, che farà $6^{\underline{1}}$ + 4, che saranno eguali a 1 che agguagliato, il Tanto valerà R.q.3 + 1, e questa valuta per regola si quadra, fa 4 + R.q.12, del che se ne cava il numero, cioè 6, resta R.q.12 − 2, del quale se ne piglia il lato, ch'è R.q.$\llcorner$R.q.12 − 2$\lrcorner$ e se ne cava la valuta di mezzo Tanto, cioè R.q.$\frac{3}{4}$ + $\frac{1}{2}$, che (per essere maggiore) non si può cavare, onde tale agguagliamento non si può finire, per essere la domanda insciolubile.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 6$ a R.q.$320^{\underline{1}}$. Piglisi l'ottavo del quadrato delli Tanti, ch'è 40, et accompagnisi col numero e dica Tanti, che farà $6^{\underline{1}} + 40$, che saranno eguali a 1 che agguagliato, il Tanto valerà 4, di cui il quadrato e 16, del quale se ne cava il numero, cioè 6, resta 10, che pigliatone il lato sarà R.q.10, del quale si cava 2, metà di 4, valuta del Tanto, resta R.q.$10 - 2$ e di questo si piglia il lato, ch'è R.q.$\llcorner$R.q.$10 - 2\lrcorner$, e questo si aggionge a R.q.2, lato della valuta della metà di $1^{\underline{1}}$, overo si cava, che farà R.q.$2 +$ R.q.$\llcorner$R.q.10 $- 2\lrcorner$ overo R.q.$2 -$ R.q.$\llcorner$R.q.$10 - 2\lrcorner$ che l'uno e l'altro e la valuta del Tanto. Della qual regola questo e il suo nascimento.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 6$ a R.q.$320^{\underline{1}}$. Levasi il numero da ogni parte e si haverà $1^{\underline{4}}$ eguale a R.q.$320^{\underline{1}} - 6$, e come nelli altri cerchisi un numero che del suo quadrato cavatone 6 e lo restante moltiplicato per il doppio del lato del quadrato faccia 80, quarta parte del quadrato delli Tanti. Ponghisi che il numero quadrato che si cerca sia $1^{\underline{2}}$, che cavatone 6 resta $1^{\underline{2}} - 6$ e questo si moltiplica per $2^{\underline{1}}$, doppio del lato di $1^{\underline{2}}$, fa $2^{\underline{3}} - 12^{\underline{1}}$, e questo è eguale a 80, che levato il meno e ridutto a $1^{\underline{3}}$ si haverà 1 eguale a $6^{\underline{1}} + 40$, che agguagliato, il Tanto vale 4, e la potenza vale 16, e questo è il numero quadrato che cavatone 6 resta 10 e moltiplicato via 8, doppio di 4 lato del 16, fa 80, quarta parte del quadrato delli Tanti. Ma perchè si intenda meglio, dico che si pigli il lato di 1 ch'è 1 et aggiongasegli 4, valuta del Tanto trovato, fa $1^{\underline{2}} + 4$, e quadrisi, fa $1^{\underline{4}} + 8^{\underline{2}} + 16$, che cavatone $1^{\underline{4}}$ resta $8^{\underline{2}} + 16$, e questo è il numero da giongere a ciascuna delle parti acciochè siano quadrate, che aggionte a $1^{\underline{4}}$ e a R.q.320 $- 6$, fa $1^{\underline{4}} + 8^{\underline{2}} + 16$ e $8^{\underline{2}} +$ R.q.$320^{\underline{1}} + 10$, che tolto il lato dell'uno e l'altro si haverà $1^{\underline{2}} + 4$ eguale a R.q.$8^{\underline{1}} +$ R.q.10. Levinsi R.q.10 da ogni parte e si haverà $1^{\underline{2}} + 4 -$ R.q.10 eguale a R.q.$8^{\underline{1}}$, che tolto la metà di R.q.8 e quadrato fa 2 e cavatone $4 -$ R.q.10, resta R.q.$10 - 2$ e il questo pigliato la R.q. fa R.q.$\llcorner$R.q.$10 - 2\lrcorner$ e questo si gionge e si Cava di R.q.2, metà delli Tanti, fa

R.q.2 + R.q.$\llcorner$R.q.10 − 2$\lrcorner$ e R.q.2 − R.q.$\llcorner$R.q.10 − 2$\lrcorner$ che l'uno e l'altro può essere la valuta del Tanto.

Capitolo di potenza potenza e Cubi eguale a numero. [17]

[17] Questo Capitolo sempre si può agguagliare come il Capitolo di $\underline{2}$ è eguale a numero et il suo agguagliamento si può fare in tre modi, che di ciascuno brevemente ne metterò l'essempio.
Agguagliasi $1^{\underline{4}} + 72^{\underline{3}}$ a 4913. Pigliasi il Creatore cubico del numero ch'è 17, aggiongesi i $\underline{3}$, ma dicono cose, che farà $72^{\underline{1}} + 17$; et questo è eguale a $1^{\underline{4}}$, che agguagliato la cosa valerà R.q.5 + 2, et per questa valuta partasi 17 Creatore cubico del numero, ne viene R.q.1445 − 34; ch'è la valuta della cosa.
Agguagliasi $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}}$ a 12: cubasi il numero fa 1728, al quale si aggiunge il quadrato di detto 12 moltiplicato per 4 numero de Cubi, che sarà 576; ma dica cose. Et se si haverà $1728 + 576^{\underline{1}}$; et questo sarà eguale a $1^{\underline{4}}$, che agguagliato, come s'è mostrato di sopra; et trovata la valuta della cosa; si partirà il numero, come s'è mostrato di sopra; et trovata la valuta della cosa, si partirà il numero cioè 12 per detta valuta; et lo avenimento sarà la vera valuta de la $\underline{1}$. Agguagliasi $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}}$ a 48. Pgliasi il mezzo de cubi; et quadrasi fa 4, et si moltiplica via la metà del numero cioè 24, fa 96: et questo è eguale a $1^{\underline{3}} + 48$: perchè del 48 numero per regola se ne fanno cose, che agguagliato, la cosa valerà R.c.128 − R.c.32 et questo si dupla fa R.c.1024 − R.c.256; al quale si aggionge il quadrato della metà de cubi, farà R.c.1024 − R.c.256 + 4; et se ne piglia il creatore, fa R.q.$\llcorner$R.c.1024 − R.q.256 + 4$\lrcorner$, et questa radice Legata si aggionge per regola a 2 metà dei cubi, et la somma son cose, che pur per regola sempre vanno accompagnate con $1^{\underline{2}}$. Siche fatto tutto questo, si haverà $1^{\underline{2}}$ più le infrascritte cose 2 + R.q.$\llcorner$R.c.1024 − R.c.256 + 4$\lrcorner$, et questo sarà eguale al numero, il quale si trova in questo modo: quadrasi la valuta de la cosa detta di sopra, che farà R.c.16384 + R.c.1024 − 32; al che si aggionge il numero, cioè il 48, et de la somma se ne piglia il creatore, et ad esso creatore si aggionge la valuta de la cosa detta di sopra cioè R.c.128 − R.c.32; et tutta la somma è il numero d'agguagliarsi, che sarà R.q.$\llcorner$R.c.16384 + R.c.1024 + 16$\lrcorner$ + R.c.128 − R.c.32, che agguagliato, la cosa valerà R.q.$\llcorner$R.q.$\llcorner$R.c.16384 + R.c.1024 + 16$\lrcorner$ + R.q$\llcorner$R.c.1024 − R.c.256 + 4$\lrcorner$ + r.c.432 − R.c.108 + 2$\lrcorner$: la infrascritta quantità 1 + R.q.$\llcorner$R.c.16 − R.c.4 + 1$\lrcorner$ et questa è la valuta de la cosa et questi sono li tre sopradetti modo: de quali mostrerò il loro nascimento.
Il primo, ch'è $1^{\underline{4}} + 32^{\underline{3}}$ eguale a 4913 nasce dal rovescio de la trasmutatione di Censo Censo eguale a Cose et numero posta nel fine del Capitolo passato, che per essere cosa chiara, non ne dirò altro.
Il secondo ch'è $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}}$ eguale a 12, la sua regola nasce da questa domanda. Trovami

Questo Capitolo sempre si può agguagliare come il Capitolo di $^{\underline{2}}$ è eguale a numero senza il + di − (come si vedra nelli essempij che si proporanno).

Agguagliasi $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}}$ a 1. Bisogna pigliare il lato d'$1^{\underline{4}}$ ch'è $1^{\underline{2}}$, et aggiongerli $2^{\underline{1}}$, cioè la metà di $4^{\underline{3}}$ ma dichino Tanti, che farà $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$, e questo quadrarlo, fa $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 4$ del quale si cavi $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}}$ resta $4^{\underline{2}}$, però si potra dire che se a $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}}$ si giongerà $4^{\underline{2}}$ si haverà una

---

due numeri che moltiplicati l'uno via l'altro faccia 12, et che pigliato uno d'essi numeri et quadrato due volte; et al produtto aggiunto li quattro cubati di detto numero faccia pur 12. Pongasi l'uno di detti due numeri essere $^{\underline{1}}$, l'altro sarà 12 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che il suo quadro quadrato, cioè il suo Censo Censo sarà 20736 esimo d'$1^{\underline{4}}$, et li quattro suoi cubati saranno 6912 esimo d'$1^{\underline{3}}$, che aggiunti insieme faranno lo infrascritto rotto $20736 + 6912^{\underline{1}}$ esimo d'$1^{\underline{4}}$: et questo è eguale a 12; che levato il rotto, si havrà $20736 + 6912^{\underline{1}}$ eguale a $12^{\underline{4}}$, che ridotto a $1^{\underline{4}}$, ne verrà $1728 + 576^{\underline{1}}$ eguale a $1^{\underline{4}}$; che agguagliato et trovata la valuta de la cosa, si partirà 12 per essa valuta; perchè il numero che si pigliò, era 12 esimo d'$1^{\underline{1}}$, et lo avenimento sarà la valuta de la cosa innanzi la trasmutatione.

Il terzo et ultimo, si è $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}}$ eguale a 48. La sua regola nasce da lo infrascritto modo. Pigliasi la metà de Cubi; et diciamo cose; che saranno $2^{\underline{3}}$, et questo si aggionge a $1^{\underline{2}}$ Creatore d'$1^{\underline{4}}$, fa $1^{\underline{2}} + 2$, del quale se ne cava $1^{\underline{1}}$ di numero, resta $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} - 1^{\underline{1}}$ di numero che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 4^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}}$ di Censo $- 4^{\underline{1}}$ di cosa $+ 1^{\underline{2}}$ di numero che trattone $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}}$, resta $4^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}}$ di Censo $- 4^{\underline{1}}$ di cosa $+ 1^{\underline{2}}$ di numero, et questa è la quantità da aggiungere a ciascuna de le parti, acciocchè ciascuna habbia creatore, che aggiunta a 48 fa $48 + 1^{\underline{2}}$ di numero $- 4^{\underline{1}}$ di cosa $+ 4^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}}$ di censo. hora bisogna vedere, se a moltiplicare il Creatore de censi, ch'è R.q.$\llcorner 4 - 2^{\underline{1}} \lrcorner$ et questo è eguale a $2^{\underline{1}}$, che levata la Radice Legata et il meno, et ridutto a $1^{\underline{3}}$, si haverà $1^{\underline{3}} + 48^{\underline{1}}$ eguale a 96: che seguito lo agguagliamento, la cosa valerà R.c.128 − R.c.32, che tratto di $1^{\underline{1}} + 2$, resta $1^{\underline{1}} + 2$ − R.c.128 − R.c.32, che il suo quadrato sarà $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}}$ + R.c.$256^{\underline{2}}$ − R.c.$1024^{\underline{2}}$ + $4^{\underline{2}}$ − R.c.$524288^{\underline{1}}$ + R.c.$131072^{\underline{1}}$ più R.c.16384 + R.c.1024 − 32; che trattone $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}}$, resta R.c.$256^{\underline{2}}$ − r.c.$1024^{\underline{2}}$ + $4^{\underline{2}}$ − r.c.$524288^{\underline{1}}$ + R.c.$131072^{\underline{1}}$ + R.c.16384 + R.c.1024 − 32; et questa è la quantità, che s'ha da aggiungere a ciascuna de le parti, acciocchè l'una et l'altra habbia Creatore che aggiunta a $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}}$ farà la quantità sopradetta che il suo Creatore è $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ − R.c.128 + r.c.32; et aggiunta a 48 farà R.c.$256^{\underline{2}}$ − R.c.$1024^{\underline{2}}$ + $4^{\underline{2}}$ − R.c.$524288^{\underline{1}}$ + R.c.141072 + R.c.16384 + R.c.1024 + 16; che il suo Creatore è R.q.$\llcorner$R.c.16384 + R.c.1024 + 16$\lrcorner$ − R.q.$\llcorner$R.c.$256^{\underline{1}}$ − R.q.$1024^{\underline{1}}$ + $4^{\underline{1}}\lrcorner$: et questo Creatore è eguale al Censo detto di sopra che agguagliato la cosa valerà quanto s'è detto nel suo essempio.

quantità quadrata, cioè $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 4^{\underline{2}}$, et aggionto a 1 fa $4^{\underline{2}} + 1$ e se questo fusse quadrato si haverebbe l'intento, però bisogna trovare altra quantità da giongere; però se a $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$, lato di $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 4^{\underline{2}}$, si aggiongesse 3 farebbe $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 3$, che il sno quadrato sarebbe $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 10^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 9$, che levatone $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 4^{\underline{2}}$ resta $6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 9$ farà $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 4^{\underline{2}}$ si aggiongerà $6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 9$, farà $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 10^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 9$ che parimente non è quadrato, ma aggionto all'altra parte fa $10^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 10$, chi non e quadrato, ma a moltiplicare $10^{\underline{2}}$ via 10 fa $100^{\underline{2}}$, e non doverebhc fare più che 36, quadrato di 6, metà di $12^{\underline{1}}$; però non e buono il giongere un numero a $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$, lato di $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 4^{\underline{2}}$, ma bisogna cavarlo; però se si cavara d'esso 1 resta $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} - 1$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 2^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 1$, del quale cavatone $1^{\underline{4}} + 4$ resta $2^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 1$, e questo aggionto a ciascuna delle parti si haverà $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 2^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 1$, e $2^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 2$, che l'uno e l'altro ha lato, et il lato dell'uno e $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} - 1$ et il lato dell'altro e R.q $2 -$ R.q.$2^{\underline{1}}$, li quali sono eguali l'uno a l'altro, che levato il meno si haverà $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} +$ R.q.$2^{\underline{1}}$ eguale a R.q.2 + 1, che tolto la metà delli Tanti, ch'è 1 + R.q.2 e quadrata fa $1\frac{1}{2}$ + R.q.2 e gionto a R.q.2 + 1 fa R.q.8 + $2\frac{1}{2}$; e la R.q. legata di questo binomio cavato d'1 + R.q.2 metà delli Tanti, sarà la valuta del Tanto, cioè 1 + R.q.2 − R.q.$\llcorner$R.q.8 + $2\frac{1}{2}\lrcorner$. Ma perchè se bene ho posto che la quantità che si deve giongere sia $2^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 1$, nondimeno non ho dato il modo di trovarla; però hora lo porrò, il qual e questo. Ponghisi che il lato del numero quadrato d'l$^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}}$ sia $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} - 1$ quantità, il suo quadrato sarà $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 4^{\underline{2}} - 2^{\underline{2}}$ quantità $- 4^{\underline{1}}$ quantità + 1 quadrato quantità, e di questo composto se ne cava $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}}$ resta $4^{\underline{2}} - 2^{\underline{2}}$ quantità $- 4^{\underline{1}}$ quantità + 1 quadrato quantità e questo è quello che si deve giongere a ciascuna delle parti acciochè siano quadrate, che aggionte a $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}}$ il suo lato sarà $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} - 1$ quantità, e aggionte all'altra parte fa $4^{\underline{2}} - 2^{\underline{2}}$ quantità $- 4^{\underline{1}}$ quantità + 1 + 1 quadrato quantità; resta che 1 + 1 quadrato quantità moltiplicato per 4 −

2 quantità, numero delle potenze, faccia 4 quadrati di quantità, quarta parte del quadrato di $4^{\underline{1}}$quantità, che moltiplicato fa 4 + 4 quadrati di quantità − 2 quantità − 2 cubi di quantità, il ch'è eguale a 4 quadrati di quantità, quadrato della metà delli Tanti, che levato simile da simile resta 2 cubi di quantità + 2 quantità eguale a 4, ch'è quanto $2^{\underline{3}} + 2^{\underline{1}}$ eguale a 4, che agguagliato la quantità vale 1 e questo è il numero che si deve cavare d'$1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ acciochè si trovi la quantità da aggiongere, che cavato d'$1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ resta $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} - 1$ e si procede come si è fatto di sopra.
Ma volendo per regola fare questo agguagliamento faccisi cosi: dato che si volesse agguagliare $1^{\underline{4}} + 6^{\underline{3}}$ con 18, faccisi del numero Tanti per regola e si gionghino a $1^{\underline{3}}$, fa $1^{\underline{3}} + 18^{\underline{1}}$ e questo si agguaglia a 81, produtto della meth di 18 in 9, quadrato della meth delli $6^{\underline{3}}$, che agguagliato, il Tanto valerà R.c.$\llcorner$R.q.$1856\frac{1}{4} + 40\frac{1}{2}\lrcorner$ − R.c.$\llcorner$R.q.$1856\frac{1}{4} - 40\frac{1}{2}\lrcorner$ che queste R.c. hanno lato, che sono R.q.$8\frac{1}{4}$ + $1\frac{1}{2}$ e R.q.$8\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2}$, che cavato l'uno dell'altro resta 3 e 3 e la valuta della quantità; però se di $1^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}}$ si caverà 3 si haverà $1^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} - 3$, il suo quadrato sarà $1\frac{1}{4} + 6 + 3^{\underline{2}} - 18^{\underline{1}} + 9$, del quale se ne cava $1^{\underline{4}}$ + $6^{\underline{3}}$, resta $3^{\underline{2}} - 18^{\underline{1}} + 9$ e questo restante e la quantità che si deve giongere a ciascuna delle parti acciochè l'una e l'altra sia quadrata, che aggionta a $1^{\underline{4}} + 6^{\underline{3}}$ fa $1^{\underline{4}} + 6^{\underline{3}} + 3^{\underline{2}} - 18^{\underline{1}} + 9$, et aggionta a 18 fa $3^{\underline{2}} - 18^{\underline{1}} + 28$, che tolto il lato di ciascuna si haverà $1^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} - 3$ eguale a R.q.18 − R.q.$3^{\underline{1}}$ che ridutto a brevità si haverà $1^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}}$ + R.q.$3^{\underline{1}}$ eguale a R.q.18 + 3, che tolto la metà delli Tanti, ch'è $1\frac{1}{2}$ + R.q.$\frac{3}{4}$, et quadrato fa 3 + R.q.$6\frac{3}{4}$, et gionto con R.q.18 + 3 fa 6 + R.q.18 + R.q.$6\frac{3}{4}$ e la R.q. legata di questo Trinomio meno la meth delli Tanti vale il Tanto, cioè R.q.$\llcorner$6 + R.q.18 + R.q.6 $\frac{3}{4}\lrcorner - 1\frac{1}{2}$ − R.q.$\frac{3}{4}$.

Capitolo di potenza di potenza eguale a Cubi e numero.

Questo Capitolo sempre si puà agguagliare **senza il + di −**, et è come il Capitolo di $^{\underline{4}}$ eguale a $^{\underline{1}}$ e numero e si piò agguagliare almeno in tre modi, de' quali porrò gli essempij.

Agguaglisi $1^{\underline{4}}$ a $16^{\underline{3}} + 1728$. Piglisi il lato cubico di 1728, ch'è 12, e sarà eguale a $1^{\underline{4}} + 16^{\underline{1}}$, perchè de' Cubi si fanno Tanti e si accompagnano con la potenza di potenza, e trovata la valuta del Tanto si parte il 12, lato cubico del numero, e l'avenimento sarà la valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{4}}$ a $4^{\underline{3}} + 10$. Cubisi il numero fa 1000 e quadrisi fa 100 e si moltiplichi via 4, numero de' cubi, fa 400, e dica 1, li quali per regola si aggiongono a $1^{\underline{4}}$, farà $1^{\underline{4}} + 400^{\underline{1}}$ eguale a 1000, che trovata la valuta del Tanto si partirà 10 per detta valuta e l'avenimento sarà la valuta del Tanto.

Agguaglisi $1^{\underline{4}}$ a R.q.$192^{\underline{3}} + 12$. Piglisi il mezo de' cubi, ch'è R.q.48 e quadrisi fa 48 e si moltiplica via la metà del numero, cioè 6, fa 288, et è eguale a $1^{\underline{3}} + 12^{\underline{1}}$, perchè del numero si fa $^{\underline{1}}$, che agguagliato il Tanto valerà 6, che il suo quadrato e 36, e si aggionge al numero fa 48, e se ne piglia il lato, che sarà R.q.48, al quale si aggionghi 6, valuta del Tanto, fa R.q.48 + 6 e si salva; poi piglisi la quarta parte del quadrato de' Cubi, ch'è 48, e se ne cava 12, duplo della valuta del Tanto, resta 36, del quale se ne piglia il lato, ch'è 6, e si aggionge alla metà de' Cubi, fa R.q.48 + 6, e questi sono $^{\underline{1}}$ e si aggiongono con R.q.48 + 6 salvato di sopra, che fanno R.q.$48^{\underline{1}} + 6^{\underline{1}}$ + R.q.48 + 6, e questo per regola è eguale a 1 che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$\llcorner 2352 + 33 \lrcorner$ + R.q.12 + 3, et questi sono li tre sopradetti modi, de' quali porre i loro nascimenti.

Il primo è $1^{\underline{4}}$ eguale a $16^{\underline{3}} + 1728$. La regola sua e il rovescio di $^{\underline{4}}$ e $^{\underline{1}}$ eguale a numero, perchè se si haverà $1^{\underline{2}} + 16^{\underline{1}}$ eguale a 12, a trasmutarla (come e stato dimostrato in detto Capitolo) ne verrà $1^{\underline{4}}$ eguale a $16^{\underline{3}} + 1728$, e così si vede l'uno essere il rovescio dell'altro, onde per dichiaratione di questo non dire altro.

I1 secondo, ch'è $1^{\underline{2}}$ eguale a $4^{\underline{3}}$ + 10, la sua regola nasce da questa domanda: trovami due numeri che moltiplicato l'uno via l'altro faccino 10 et che li quattro cubati di uno d'essi numeri aggionto con 10 faccia quanto è il quadroquadrato di esso numero. Ponghisi l'uno di detti due numeri essere $1^{\underline{1}}$, l'altro sarà 10 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che li suoi quattro cubati saranno 4000 esimo d'$1^{\underline{3}}$, che giontoli 10 fa 4000 + $10^{\underline{3}}$ esimo d'$1^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 10000 esimo d'$1^{\underline{4}}$, quadroquadrato di 10 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che levati i rotti e ridutto a $1^{\underline{4}}$ si haverà $1^{\underline{4}}$ + $400^{\underline{1}}$ eguale a 1000, che agguagliato, e trovato la valuta del Tanto, si partirà 10 per detta valuta, perchè il numero era 10 esimo d'$1^{\underline{1}}$, e l'avenimento sarà la valuta del Tanto **avanti la trasmutatione**.

Il terzo, ch'è $1^{\underline{4}}$ eguale a R.q.$192^{\underline{3}}$ + 12, nasce da questa regola. Troviusi i Cubi da ogni parte, si haverà $1^{\underline{2}}$ − R.q.$192^{\underline{3}}$ eguale a 12. Pigliasi la metà de'Cubi, ch'è R.q.48 e dichi Tanti e si cava d'$1^{\underline{2}}$ lato d'$1^{\underline{4}}$, resta $1^{\underline{2}}$ − R.q.$48^{\underline{1}}$, et da questo per regola se ne cava $1^{\underline{1}}$ di numero, resta $1^{\underline{2}}$ − R.q.$48^{\underline{1}}$ − $1^{\underline{1}}$ di numero, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}}$ − R.q.$192^{\underline{3}}$ + $48^{\underline{2}}$ − $2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}}$ + R.q.$192^{\underline{1}}$ di $^{\underline{1}}$ + $1^{\underline{2}}$ di numero, e di tutto questo cavatone $1^{\underline{4}}$ − R.q.$192^{\underline{3}}$ resta $48^{\underline{2}}$ − $2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}}$ + R.q.$192^{\underline{1}}$ di $^{\underline{1}}$ + $1^{\underline{2}}$ di numero, e questa è la quantità che si deve giongere a ciascuna delle parti acciochè habbino lato, che aggionta a 12 fa 12 + $1^{\underline{2}}$ di numero + R.q.$192^{\underline{1}}$ di $^{\underline{1}}$ + $48^{\underline{2}}$ − $2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}}$. Hora bisogna vedere se il lato delle potenze, ch'è R.q.$\llcorner$ 48 − $2^{\underline{1}}\lrcorner$, moltiplicato via il lato del numero, ch'è R.q.$\llcorner$12 + $1^{\underline{2}}\lrcorner$, fa R.q.$48^{\underline{1}}$, metà delli Tanti, che moltiplicati detti lati l'uno via l'altro fanno R.q.$\llcorner$576 + $48^{\underline{2}}$ − $24^{\underline{1}}$ − $2^{\underline{3}}\lrcorner$ ch'è eguale a R.q.$48^{\underline{1}}$, che levate le R.q. et il meno si haverà 576 + $48^{\underline{2}}$ eguale a $48^{\underline{2}}$ + $2^{\underline{3}}$ + $24^{\underline{1}}$, non ridutto a $1^{\underline{3}}$ e levate le $^{\underline{2}}$ si haverà $1^{\underline{3}}$ + $12^{\underline{1}}$ eguale a 288, che igguagliato, il Tanto valerà 6, e questo è la valuta del meno $1^{\underline{1}}$ di nuincro, che cavata d'$1^{\underline{2}}$ − R.q.$48^{\underline{2}}$ restarà $1^{\underline{3}}$ − R.q.$48^{\underline{1}}$ − 6, che i1 suo quadrato e $1^{\underline{4}}$ + R.q.$192^{\underline{3}}$ + $36^{\underline{2}}$ + R.q.$6912^{\underline{1}}$ + 36, che cavatone $1^{\underline{4}}$ − R.q.$192^{\underline{3}}$ resta $36^{\underline{2}}$ + R.q.$6912^{\underline{1}}$ + 36, e questa è la quantità che si deve giongere a ciascuna delle parti acciochè l'una l'altra habbia lato, che aggionta a $1^{\underline{4}}$ − R.q.$192^{\underline{3}}$ il suo lato sarà $1^{\underline{2}}$ − R.q.$48^{\underline{1}}$ − 6, et aggionta a 12 farà $36^{\underline{2}}$ + R.q.$6912^{\underline{1}}$ + 48, che il suo lato è $6^{\underline{1}}$ + R.q.48, ch'è eguale al lato detto di sopra, cioè a $1^{\underline{2}} - \text{R.q.}48^{\underline{1}} - 6$, che levato il meno si haverà $1^{\underline{2}}$ eguale a $\text{R.q.}48^{\underline{1}} + 6^{\underline{1}} + \text{R.q.}48 + 6$, che agguagliato, il Tanto valerà **R.q.$\llcorner$R.q.2352 + 33$\lrcorner$ + R.q.12 + 3**[18].

Capitolo di potenza potenza e numero eguale a Cubo.

Questo Capitolo si può agguagliare (come i passati) et è generale e quando verrà il modo che non si possa agguagliare con li modi che si daranno, all'hora la domanda sarà impossibile, com'è quando si $^{\underline{2}}$ e numero eguale a $^{\underline{1}}$ e che il quadrato della metà delli Tanti sia minore del numero, la domanda pur è impossibile e solo si può agguagliare sofisticamente e lo somigliante accade in questo, onde verro alle sue regole.

[19]

[18] R.q.$\llcorner$R.q.768 + 27$\lrcorner$ + 21 + R.q.432

[19] Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 216$ a $7^{\underline{3}}$. Pigliasi il Creatore Cubico del numero ch'è 6 et si accompagna per regola a $1^{\underline{4}}$, farà $1^{\underline{4}} + 6$ eguale a $7^{\underline{1}}$: perchè da i Cubi si fanno cose, che trovata la valuta de la cosa, si parte 6 Creatore cubico di 216 per detta valuta: et lo avenimento è la valuta de la cosa.

Agguagliasi $1^{\underline{4}} + 6^{\underline{0}}$ a $8^{\underline{3}}$. Cubasi il numero fa 216; et aggiongasi a $1^{\underline{4}}$ fa $1^{\underline{4}} + 216$ et questo è eguale a $288^{\underline{1}}$, le quali nascono da la moltiplicatione di 36 quadrato di numero via 8 numero de Cubi, che trovato che sia la valuta de la Cosa, si parti il numero cioè 6 per essa valuta, et lo avenimento sarà la valuta de la Cosa.

Agguagliasi $1^{\underline{4}} + 12$ a $\text{R.q.}96^{\underline{3}}$. Pigliasi la metà de i Cubi, ch'è R.q.24, et quadrasi fa 24, et questo si moltiplica via 6 metà del numero fa 144, al quale si aggiunge il 12 numero, ma dica cose, che farà $12^{\underline{1}} + 144$; et per regola è eguale a $1^{\underline{3}}$, che agguagliato, la cosa valerà 6; il quale si quadra, fa 36, et se ne cava il numero cioè il 12, resta 24, et se ne piglia il Creatore, ch'è R.q.24, et se gli aggiunge la valuta de la cosa, fa 6 + R.q.24; et questo per regola si accompagna con $1^{\underline{2}}$, fa $1^{\underline{2}}$ - 6 + R.q.24, et si salva: poi pigliasi il quadrato de la metà de i cubi, che è 24, et se gl'aggiunge 12 doppio di 6 valuta de la cosa, fa 36, che'l suo cretaore è 6: et si aggiunge con la metà de Cubi cioè r.q.24, fa 6 + r.q.24, et questi son Cose, che sono eguali a la quantità serbata di sopra: sichè si havrà $1^{\underline{2}}$ + 6 + R.q.24 eguale a $6^{\underline{1}} + \text{R.q.}24^{\underline{1}}$; che agguagliato la cosa valerà 3 + R.q.6 − R.q.$\llcorner$R.q.96 + 9$\lrcorner$; overo 3 + R.q.6 + R.q.$\llcorner$R.q.96 + 9$\lrcorner$, che l'una, et l'altra verrà valuta de la cosa. Hora verrò a la dimostratione del nascimento di simili regole.

Il primo, ch'è $1^{\underline{4}} + 216$ eguale a $7^{\underline{3}}$, nasce dal rovescio de la trasmutatione di Censo Censo

Agguaglisi $1^{\underline{3}}$ + 12 a R.q.$96^{\underline{3}}$. Piglisi il mezzo delli Cubi, ch'è R.q.24, e quadrisi fa 24 e questo si moltiplica via 6, metà del numero, fa 144, al quale si aggionge il 12 numero (ma dica Tanti) che farà $12^{\underline{1}}$ + 144, e per regola è eguale a 1 che agguagliato, il Tanto valerà 6, il quale si quadra, fa 36 e se ne cava il numero (cioè il 12) resta 24, e se ne piglia il lato, che e R.q.24 e se gli aggionge

et numero eguale a Cose; che per essere chiaramente detto nel suo Capitolo quì non ne dirò altro.

Il secondo, che è $1^{\underline{4}}$ + 6 eguale a $8^{\underline{3}}$; la sua regola nasce da questa dimanda. Trovami due numeri che moltiplicati l'uno via l'altro facciano 6, et che il quadroquadrato d'una di detti due numeri aggiunto con 6 sia pari a li 8 suoi cubati. Pongasi uno di detti due numeri essere $1^{\underline{1}}$, l'altro sarà 6 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che'l suo quadroquadrato è 1296 esimo d'$1^{\underline{2}}$, che aggiunto con 6 fa $6^{\underline{4}}$ + 1296 esimo d'$1^{\underline{4}}$, et questo è eguale a 1728 esimo d'$1^{\underline{3}}$, che sono otto cubati si 6 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che levati i rotti, et ridutto a $1^{\underline{4}}$, si haverà $1^{\underline{4}}$ + 216 eguale a $288^{\underline{1}}$, che trovata la valuta de la cosa, si parte 6 per essa valuta: perchè il numero era 6 esimo d'$1^{\underline{1}}$, et lo avenimento sarà la valuta de la cosa innanzi la trasmutatione.

Il terzo, ch'è $1^{\underline{4}}$ + 12 eguale a R.q.$96^{\underline{3}}$, il suo agguagliare nasce da questa regola. Levasi i Cubi da ogni banda, et così il numero, et si havrà $1^{\underline{4}}$ − R.q.$96^{\underline{3}}$ eguale a − 12: pigliasi la metà de Cubi, che è R.q.24, et dirà cose, et si cava di $1^{\underline{2}}$ Creatore di $1^{\underline{4}}$ resta $1^{\underline{4}}$ − R.q.$24^{\underline{1}}$; et a questo si aggiunge $1^{\underline{1}}$ di numero fa $1^{\underline{2}}$ − R.q.$24^{\underline{1}}$ + $1^{\underline{1}}$, che'l suo quadrato sarà $1^{\underline{4}}$ − R.q.$96^{\underline{3}}$ + $24^{\underline{2}}$ + $2^{\underline{1}}$ di Censo − R.q.$96^{\underline{1}}$ di cose + $1^{\underline{2}}$ di numero et questa è la quantità d'aggiungere a ciascuna de le parti, aciochè l'una, et l'altra habbia creatore, che aggiunta a $1^{\underline{4}}$ − R.q.$96^{\underline{3}}$ il suo Creatoe sarà $1^{\underline{2}}$ − R.q.$24^{\underline{1}}$ + $1^{\underline{1}}$ di numero: et aggiunta a − 12, fa $24^{\underline{2}}$ + $2^{\underline{1}}$ di Censo − R.q.$96^{\underline{1}}$ di cose + $1^{\underline{2}}$ di numero − 12: hora bisogna vedere se il Creatore de censi, ch'è R.q$\llcorner$24 + $2^{\underline{1}}$$\lrcorner$ moltiplicato via il Creatore del numero, ch'è R.q$\llcorner$$1^{\underline{2}}$ − 12$\lrcorner$ fa R.q.$24^{\underline{1}}$ metà de la cosa; che moltiplicata dette due Radici fanno R.q.$\llcorner$$2^{\underline{3}}$ + $24^{\underline{2}}$ − $24^{\underline{1}}$ − 288$\lrcorner$ et questo è eguale a R.q.$24^{\underline{1}}$, che levate le Radici; si haveranno $2^{\underline{3}}$ + $24^{\underline{2}}$ − $24^{\underline{1}}$ − 288 eguali a $24^{\underline{2}}$, che levati i Censi, et il meno, et ridutto a $1^{\underline{3}}$, si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $12^{\underline{1}}$ + 144, che agguagliata la cosa valerà 6; et questa è quella cosa di numero che fu accompagnata con $1^{\underline{2}}$ − R.q.$24^{\underline{1}}$: Si che hora si dirà $1^{\underline{2}}$ − R.q.$24^{\underline{1}}$ + 6, che'l suo quadrato sarà $1^{\underline{4}}$ − R.q.$96^{\underline{3}}$ - $36^{\underline{2}}$ − R.q.$3456^{\underline{1}}$ + 36, che trattone $1^{\underline{4}}$ − R.q.$96^{\underline{2}}$, resta $35^{\underline{2}}$ − R.q.$3456^{\underline{1}}$ + 36; et questa è la quantità d'aggiungere a ciascuna de le parti acciocchè habbiano creatore; che aggiunta a $1^{\underline{4}}$ − R.q.$96^{\underline{3}}$, il suo Creatore sarà $1^{\underline{2}}$ − R.q.$24^{\underline{1}}$ + 6, et aggiunta a − 12, farà $36^{\underline{2}}$ − R.q.$3456^{\underline{1}}$ + 24, che'l suo Creatore sarà $6^{\underline{1}}$ − R.q.$24^{\underline{1}}$ + 6; che agguagliato, la cosa valerà 3 + R.q.6 + R.q.$\llcorner$R.q.96 + 9$\lrcorner$, overo 3 + R.q.6 − R.q.$\llcorner$R.q.96 + 9$\lrcorner$, che l'una, et l'altra valuta è vera.

la valuta del Tanto, fa 6 + R.q.24 e si salva; poi piglisi il quadrato della metà de' cubi, che e 24, e se li aggionge 12, doppio di 6, valuta del Tanto, fa 36, che il suo lato è 6, e si aggionge con la metà de' cubi, cioè con R.q.24, fa 6 + R.q.24, e questi sono Tanti, che sono eguali alla quantità serbata di sopra, si che si haverà $1^{\underline{2}}$ + 6 + R.q.24 eguale a $6^{\underline{1}}$ + R.q.$24^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 3 + R.q.6 − R.q.$\llcorner$R.q.96 + 9$\lrcorner$, overo 3 + R.q.6 + R.q.$\llcorner$R.q.96 + 9$\lrcorner$, che l'una e l'altra e la vera valuta del Tanto e questa sarà la dimostratione del nascimento di detta regola.

Havendosi $1^{\underline{4}}$ + 12 eguale a R.q.$96^{\underline{3}}$, il suo agguagliare nasce da questa regola. Levansi i Cubi da ogni parte e così il numero e si haverà $1^{\underline{4}}$ − R.q.$96^{\underline{3}}$ eguale a − 12. Piglisi la metà de' Cubi, ch'è R.q.24, e dica $^{\underline{1}}$ e si cava d'$1^{\underline{2}}$, lato d'1 resta $1^{\underline{2}}$ − R.q.$24^{\underline{1}}$, et a questo si aggionge $1^{\underline{1}}$ di numero, fa $1^{\underline{2}}$ − R.q.$24^{\underline{1}}$ + $1^{\underline{1}}$ di numero, che il suo quadrato sarà $1^{\underline{4}}$ − R.q.$96^{\underline{3}}$ + $24^{\underline{2}}$ + $2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}}$ − R.q.961 di $^{\underline{1}}$ + $1^{\underline{2}}$ di numero, che cavatone $1^{\underline{3}}$ R.q.$96^{\underline{3}}$ restano $24^{\underline{2}}$ + $2^{\underline{1}}$di$^{\underline{2}}$ − R.q.$96^{\underline{1}}$ di $^{\underline{1}}$ + $1^{\underline{2}}$ di numero, e questa è la quantità da aggiongere a ciascuna delle parti acciochè l'una e l'altra habbia lato, che aggionta a $1^{\underline{4}}$ − R.q.$96^{\underline{3}}$ il suo lato sarà $1^{\underline{2}}$ − R.q.$24^{\underline{1}}$ + $1^{\underline{1}}$ di numero e aggionta a − 12, fa $24^{\underline{2}}$ + $2^{\underline{1}}$ di 3 − R.q.$96^{\underline{1}}$ di + $1^{\underline{2}}$ di numero − 12. Hora bisogna vedere se il lato delle potenze, ch'è R.q.$\llcorner$24 + $2^{\underline{1}}\lrcorner$ moltiplicato via il lato del numero, ch'è R.q.$\llcorner 1^{\underline{2}}$ − 12$\lrcorner$, fa R.q.24 metà delli$^{\underline{1}}$, che moltiplicate dette due R.q. fanno R.q.$\llcorner 2^{\underline{3}}$ + $24^{\underline{2}}$ − $24^{\underline{2}}$ − 288$\lrcorner$ e questo è eguale a R.q.$24^{\underline{1}}$, che levate le R.q. si haveranno $2^{\underline{3}}$ + $24^{\underline{2}}$ − $24^{\underline{1}}$ − 288 eguale a $24^{\underline{2}}$, che levate le potenze et il meno e ridutto a 1 si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a $12^{\underline{1}}$ + 144, che agguagliato, il Tanto valerà 6, e questo è quel $^{\underline{1}}$ di numero che fu accompagnato con $1^{\underline{2}}$ − R.q.$24^{\underline{1}}$. Si che hora si dirà $1^{\underline{2}}$ − R.q.$24^{\underline{1}}$ + 6, che il suo quadrato sarà $1^{\underline{4}}$ − R.q.$96^{\underline{3}}$ + $36^{\underline{2}}$ − R.q.$3456^{\underline{1}}$ + 36, che cavatone $1^{\underline{3}}$ − R.q.96 resta $36^{\underline{2}}$ − R.q.$3456^{\underline{1}}$ + 36 e questa è la quantità che si deve giongere a ciascuna delle parti acciochè habbiano lato, che

aggionta a $1^{\underline{4}}$ + R.q.$96^{\underline{3}}$ il suo lato sarà $1^{\underline{2}}$ − R.q.$24^{\underline{1}}$ + 6 et aggionta a − 12 fa $36^{\underline{2}}$ − R.q.$3456^{\underline{1}}$ + 24, che il suo lato sarà $6^{\underline{1}}$ − R.q.24 e questo è eguale al lato detto di sopra, ch'è $1^{\underline{2}}$ − R.q.$24^{\underline{1}}$ + 6, che agguagliato, il Tanto valerà 3 + R.q.6 + R.q.$\llcorner$R.q.96 + 9$\lrcorner$ overo 3 + R.q.6 − R.q.$\llcorner$R.q.96 + 9$\lrcorner$, che l'una e l'altra e vera valuta.

Capitolo di potenza potenza eguale a potenze, Tanti e numero.

Questo Capitolo può venire in più modi et alcuna volta patisce le difficultà del Capitolo di Cubo eguale a Tanti e numero, del quale ne porrò solo tre essempij, perchè chi volesse porre tutti li modi ne' quali può venire questo è gli altri che seguitano si andrebbe in infinito, et chi intenderà bene questi potra da se trovar gli altri. Ne meno porrò le trasmutationi, per non essere necessarie.

Agguaglisi $1^{\underline{4}}$ a $9^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 16$. Perche a moltiplicare il lato delle$^{\underline{2}}$ via il lato del numero, fa 12, metà delli$^{\underline{1}}$, per il $9^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 16$ ha lato, ch'è $3^{\underline{1}} + 4$, ch'è eguale a $1^{\underline{2}}$, lato d'1 che agguagliato, il Tanto valerà 4.

Agguaglisi $1^{\underline{4}}$ a $7^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}1 + 15$. Prima bisogna moltiplicare il numero delle potenze via il numero, che fa 105, e questo cavare di 144, quadrato della metà delli Tanti, resta 39, del quale per regola se ne piglia la meta, ch'è $19\frac{1}{2}$, ch'è eguale a $1^{\underline{3}} + 15^{\underline{1}} + 3\frac{1}{2}^{\underline{2}}$, che li $15^{\underline{1}}$ sono il numero al quale si fa mutar natura, e dire $^{\underline{1}}$, e le $3\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ sono la metà delle $7^{\underline{2}}$ che agguagliato, il Tanto valerà 1; il suo quadrato e 1, il quale si gionge a 15 numero, fa 16, che il suo lato è 4, del quale si cava 1, valuta del Tanto, resta 3, e questo si salva; poi si piglia il numero delle potenze, ch'è 7, e se li aggionge 2, doppio della valuta del Tanto, fa 9, che il suo lato è 3, e sono $^{\underline{1}}$, che aggionti co'l 3, serbato di sopra, fa $3^{\underline{1}} + 3$, e questo per regola è eguale a $1^{\underline{2}}$ che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$5\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2}$. Ma per sapere dove nasca tal regola lo mostrarò.

Piglisi $1^{\underline{2}}$, lato della potenza di potenza, e se gli aggionge $1^{\underline{2}}$ di numero, fa $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$ di numero, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}} + 1^{\underline{2}}$ di numero, che cavatone $1^{\underline{2}}$ resta $2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}}$ + $1^{\underline{2}}$ di numero, e questa è la quantità d'aggiongersi a ciascuna delle parti acciochè habbino lato, che aggionta a $1^{\underline{4}}$ il suo lato sarà $1^{\underline{2}}$ + $1^{\underline{1}}$ di numero et aggionta a $7^{\underline{2}}$ + $24^{\underline{1}}$ + 15, fa $7^{\underline{2}}$ + $2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}}$ + $24^{\underline{1}}$ + 15 + $1^{\underline{2}}$ di numero. Hora bisogna vedere se a moltiplicare il lato delle potenze, ch'è R.q.⌞7 + $2^{\underline{1}}$1, via il lato del numero, ch'è R.q.⌞15 + 1⌟, fa 12, metà delli che moltiplicati detti lati l'uno via l'altro fanno R.q.⌞$2^{\underline{3}}$ + $7^{\underline{2}}$ + $30^{\underline{1}}$ + 105⌟ ch'è eguale a 12, metà delli Tanti, che levata la R.q. e ridutto a $1^{\underline{3}}$ si haverà $1^{\underline{3}}$ + 3 $\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ + $15^{\underline{1}}$ eguale a $19\frac{1}{2}$, che agguagliato, il Tanto valerà 1, et questa e la valuta di $1^{\underline{1}}$ di numero, che fu accompagnata con $1^{\underline{2}}$. Si che aggionto a $1^{\underline{2}}$ farà $1^{\underline{2}}$ + 1, che il suo quadrato e $1^{\underline{4}}$ + $2^{\underline{2}}$ + 1, che cavatone $1^{\underline{4}}$ restano $2^{\underline{2}}$ + 1, ch'è la quantità che si deve aggiongere a ciascuna delle parti acciochè l'una e l'altra habbia lato, che aggionta a $1^{\underline{4}}$ et a $7^{\underline{2}}$ + $24^{\underline{1}}$ + 15 farà $1^{\underline{4}}$ + $2^{\underline{2}}$ + 1 eguale a $9^{\underline{2}}$ + $24^{\underline{1}}$ + 16, che pigliato il lato di ciascuna si haverà $1^{\underline{2}}$ + 1 eguale a $3^{\underline{1}}$ + 4, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$51\frac{1}{4}$ + $1\frac{1}{2}$ (come fu detto di sopra). Ma se a moltiplicare il numero delle potenze via il numero, il produtto superasse il quadrato della metà delli Tanti, bisogna tenere la strada che si mostrara nel seguente essempio.

Agguaglisi $11^{\underline{4}}$ a $11^{\underline{2}}$ + $24^{\underline{1}}$ + 15. Moltiplichisi il numero delle potenze via il numero, fa 165, del quale se ne cava 144, quadrato della metà delli Tanti, resta 21, che aggionto con le potenze fa 21 + $11^{\underline{2}}$ e questo per regola si parte per 2, ne viene $10\frac{1}{2}$ + $5\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ ch'è eguale a $11^{\underline{3}}$ + $151^{\underline{1}}$, perchè del 15 si fa $151^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 1, che il suo quadrato sarà parimente 1, che aggionto col numero, cioè con 15, fa 16, che il suo lato è 4, al quale si aggionge 1 (valuta del Tanto) fa 5, e si salva, e dell'11, numero delle potenze, se ne cava 2, valuta di $2^{\underline{1}}$, resta 9, che il suo lato è 3, e sono Tanti, cioè $3^{\underline{1}}$, che aggionti col 5 serbato di sopra fa $3^{\underline{1}}$ + 5, e questo per regola è eguale a $1^{\underline{2}}$, che ag-guagliato, il Tanto valerà R.q.$7\frac{1}{4}$ + $1\frac{1}{2}$, e la varietà di questo agguagliamento da quello di sopra procede che $1^{\underline{1}}$ di numero in quello di sopra si aggionge a $1^{\underline{2}}$ et in questo si cava. Si che, chi intenderà quello di sopra, intenderà parimente questo.

Capitolo di potenza potenza e Tanti eguale a potenza e numero.

Questo Capitolo può venire in assai modi, ma solo ne porrò per brevità quattro essempij più necessari, e detto Capitolo patisce l'eccettioni che patiscono li Capitoli di $^{\underline{3}}$ eguale a $^{\underline{1}}$ e numero, e $^{\underline{1}}$ e numero eguale a $^{\underline{1}}$.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 24^{\underline{1}}$ a $8^{\underline{2}} + 18$. Levinsi il Tanti da ogni parte e si haverà $1^{\underline{4}}$ eguale a $8^{\underline{2}} - 24^{\underline{1}} + 18$, e perchè a moltiplicare il numero delle potenze via il numero fa 144, che il suo lato è 12, ch'è pari a 12 meth delli Tanti, però $8^{\underline{2}} - 24^{\underline{1}} + 18$ ha lato, il qual e R.q.$8^{\underline{1}}$ $-$ R.q.18, overo R.q.18 $-$ R.q.$8^{\underline{1}}$, che l'uno e l'altro non si può negare. Ma la vera si è R.q.18 $-$ R.q.$8^{\underline{1}}$, e questo è eguale a $1^{\underline{2}}$, lato d'$1^{\underline{4}}$ che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$\llcorner$R.q.18 + 2$\lrcorner$ $-$ R.q.2, e perchè ho detto che R.q.18 $-$ R.q.$8^{\underline{1}}$ è la vera, nel Capitolo seguente chiarirò questo dubbio.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 24^{\underline{1}}$ a $18^{\underline{2}} + 8$. Levinsi il Tanti (com'e detto di sopra), si haverà $1^{\underline{4}}$ eguale a $18^{\underline{2}} - 24^{\underline{1}} + 8$ la qual quantità ha lato per il rispetto detto di sopra, che esso lato sarà R.q.$18^{\underline{1}}$ $-$ R.q.8 overo R.q.8 $-$ R.q.$18^{\underline{1}}$, che l'uno e l'altro e buono, e per conoscere quando l'uno e l'altro e buono, piglisi i1 quarto delle potenze, ch'è $4\frac{1}{2}$, che essendo maggiore o pari al lato del numero ambidui i lati sono buoni.

Ma se il lato del numero e maggiore del quarto delle potenze, all'hora non e buono se non quello che dice numero men 1. Si che in questo essempio si possono pigliare ambidui li lati, hora piglisi R.q.$18^{\underline{1}}$ $-$ R.q.8 che sarà eguale a $1^{\underline{2}}$ lato d'$1^{\underline{2}}$, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.4 + R.q.$\llcorner$4 + $-$ R.q.8$\lrcorner$, overo R.q.$4\frac{1}{2}$ + R.q.$\llcorner 4\frac{1}{2}$ $-$ R.q.8$\lrcorner$. Ma perchè detta R.q. legata ha lato, ch'è 2 $-$ R.q.$\frac{1}{2}$, che aggionto e cavato a R.q.$4\frac{1}{2}$, fa 2 + R.q.2 e R.q.8 $-$ 2, che l'una e l'altra e vera valuta del Tanto. Ma se si fusse pigliato per il lato R.q.8 $-$ R.q.$18^{\underline{1}}$, il Tanto sarebbe valuto R.q.$\llcorner 4\frac{1}{2}$ + R.q.8$\lrcorner$ $-$ R.q.$4\frac{1}{2}$ e, perchè R.q.$\llcorner 4\frac{1}{2}$ + R.q.8$\lrcorner$ ha lato, ch'è 2 + R.q.$\frac{1}{2}$, che cavatone R.q.$4\frac{1}{2}$, resta 2 $-$ R.q.2; e questa anco e pur vera valuta del Tanto, si che questo essempio, che ha queste parti di moltiplicare le$^{\underline{2}}$ via il numero, et il produtto esser pari al quadrato della metà delli $^{\underline{1}}$, e il quarto delle potenze esser maggiore del lato del numero, haverà sempre tre valute vere.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 40^{\underline{1}}$ a $10^{\underline{2}} + 16$. Moltiplichisi il numero delle $^{\underline{2}}$ via il numero, fa 160, che cavato di 400, quadrato della metà delli 1, resta 240, di che si piglia il mezzo, ch'è 120, e questo è eguale a $1^{\underline{3}} + 5^{\underline{2}} + 16^{\underline{1}}$, che le $5^{\underline{2}}$ sono la metà delle 10 e li $16^{\underline{1}}$ sono il numero, che doventa 1, che agguagliato, il Tanto vale 3, che il suo quadrato e 9, che aggionto col numero, cioè con 16, fa 25, che il suo lato è 5, del quale se ne cava 3, valuta del Tanto, resta 2, il quale si salva; poi si piglia il doppio di 3, valuta del Tanto, ch'è 6, e si aggionge al numero delle potenze, fa 16 che il suo lato è $4^{\underline{1}}$, al quale per regola si aggionge $1^{\underline{2}}$, fa $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ e questo è eguale al 2 serbato di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$6 - 2$, e per sapere dove nasca tal regola levinsi il $^{\underline{1}}$ da ogni parte, e si haverà $1^{\underline{4}}$ eguale a $10^{\underline{2}} - 40^{\underline{1}} + 16$. Hora piglisi il lato d'$1^{\underline{4}}$, ch'è $1^{\underline{2}}$, al quale si aggionga $1^{\underline{1}}$ di numero, fa $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$ di numero, che il suo quadrato e $1 + 2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}} + 1^{\underline{2}}$ di numero, che cavatone $1^{\underline{4}}$ resta $2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}} + 1^{\underline{2}}$ di numero e questa è la quantità che si deve aggiongere a ciascuna delle parti acciochè habbiano lato, che aggionta a $1^{\underline{4}}$ il suo lato sarà $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$ di numero, e aggionta a $10^{\underline{2}} - 40^{\underline{1}} + 16$ fa $10^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ di $- 40^{\underline{1}} + 16 + 1^{\underline{2}}$ di numero. Hora bisogna vedere se il lato delle ch'è R.q.$\llcorner 10 + 2 \lrcorner$, moltiplicato via il lato del numero, ch'è R.q.$\llcorner 16 + 1^{\underline{2}} \lrcorner$, fa 20, metà delli $^{\underline{1}}$, che a moltiplicare detti lati l'uno via l'altro faranno R.q.$\llcorner 2^{\underline{3}} + 10^{\underline{2}} + 32^{\underline{1}} + 160 \lrcorner$ e questo è eguale a 20, che levata la R.q. legata si haverà $2^{\underline{3}} + 10^{\underline{2}} + 32^{\underline{1}} + 160$ eguale a 400, che ridutto a $1^{\underline{3}}$ e levato il minor numero si haverà $1^{\underline{3}} + 5^{\underline{2}} + 16^{\underline{2}}$ eguale a 120, che agguagliato, il Tanto valerà 3, ch'è 6 il Tanto di numero che fu posto con la potenza, onde pongasi detto 3 con $1^{\underline{2}}$, fa $1^{\underline{2}} + 3$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 6^{\underline{2}} + 9$, che cavatone $1^{\underline{4}}$ resta $6^{\underline{2}} + 9$, ch'è la quantità che va aggionta a ciascuna delle parti, che aggionta a $1^{\underline{4}}$ et a $10^{\underline{2}} - 40^{\underline{1}} + 16$, farà $1^{\underline{4}} + 6^{\underline{2}} + 9$ eguale a $16^{\underline{2}} - 40^{\underline{1}} + 25$, che tolto il lato dell'uno e dell'altro si haverà $1^{\underline{2}} + 3$ eguale a $5 - 4^{\underline{1}}$, che agguagliato il Tanto valerà R.q.$6 -$

2 (come fu detto di sopra). Ma se il produtto delle $^{\underline{2}}$ via il numero, che fu detto nel principio dell'essempio, sarà maggiore del quadrato della metà delli $^{\underline{1}}$, all'hora bisognara procedere nel modo che si dirà nel seguente essempio.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 18^{\underline{1}}$ a $11^{\underline{2}} + 8$. Moltiplichisi il numero delle potenze via il numero, fa 88, che cavatone 81, quadrato della metà delli Tanti, resta 7, e questo si accompagna con le fa $11^{\underline{2}} + 7$, che per regola se ne piglia la meta, ch'è $3\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ il qual'è eguale a $1^{\underline{3}} + 8^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 1, e questo si cava d'$1^{\underline{2}}$, resta $1^{\underline{2}} - 1$, che il suo quadrato e $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{2}} + 1$, che cavatone $1^{\underline{4}}$ resta $- 2^{\underline{2}} + 1$, ch'è la quantità da aggiongere a ciascuna delle parti acciochè habbino lato, che aggionta a $1^{\underline{4}}$ e a $11^{\underline{2}} + 8 - 18^{\underline{1}}$ farà $1^{\underline{1}} - 2^{\underline{2}} + 1$ eguale a $9^{\underline{2}} - 18^{\underline{1}} + 9$, che pigliato il lato dell'una e dell'altra parte si haverà $1^{\underline{2}} - 1$ eguale a $3^{\underline{1}} - 3$ overo a $3 - 3^{\underline{1}}$ che l'uno e l'altro modo è buono, et agguagliato, il Tanto valerà 1 overo 2.

Capitolo di potenza potenza e numero eguale a potenza e Tanti.

Questo Capitolo patisce l'eccetioni del sopradetto. Ma nel resto vien sempre ad un modo, però di esso non porrò più d'uno essempio.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 12$ a $8^{\underline{2}} + 16^{\underline{1}}$. Moltiplichisi il numero delle $^{\underline{2}}$ via il numero, fa 96, e si aggionge col quadrato della metà delli $^{\underline{1}}$, fa 160, che per regola se ne piglia la meta, ch'è 80, e se li aggionga mero, ma dichi $^{\underline{1}}$, che farà $12^{\underline{2}} + 80$, e sarà eguale a $1^{\underline{3}}$ + il mezzo delle $^{\underline{2}}$, cioè $4^{\underline{2}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 4, e questo 4 si agguionge con $1^{\underline{2}}$, lato d'$1^{\underline{4}}$, fa $1^{\underline{2}} + 4$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 8^{\underline{2}} + 16$, del quale se ne cava $1^{\underline{4}} + 12$, resta $8^{\underline{2}} + 4$, e si aggionge a $8^{\underline{2}} + 16^{\underline{1}}$, fa $16^{\underline{2}} + 16^{\underline{1}} + 4$, che il suo lato è $4^{\underline{1}} + 2$ et èeguale a $1^{\underline{2}} + 4$ detto di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà 2 + R.q.2 overo 2 − R.q. e intorno a questo Capitolo non dire altro, perchè chi intenderà le regole de' passati, intenderà parimente dove nasca la regola di questo.

Capitolo di potenza potenza e potenzè eguale a Tanti e numero

Il presente Capitolo è simile al passato, eccetto che questo non ha più di una valuta e l'altro ne ha due, però ne porrò un solo essempio.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{2}}$ a $40^{\underline{1}} + 36$. Moltiplichisi il numero delle $^{\underline{2}}$ via il numero, fa 432, al quale si aggionge 400, quadrato della metà delli $^{\underline{1}}$, fa 832 et a questo si aggiongono le $12^{\underline{2}}$ et si parte il tutto per 2, ne viene $416 + 6^{\underline{2}}$, ch'è eguale a $1^{\underline{3}} + 36^{\underline{1}}$ perchè del numero si fanno che agguagliato, il Tanto valerà 8, il qual'8 si aggionge a $1^{\underline{2}}$, fa $1^{\underline{2}} + 8$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 16^{\underline{2}} + 64$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{2}}$ resta $4^{\underline{2}} + 64$ e questa è la quantità che si deve aggiongere a ciascuna delle parti acciochè sia quadrata, che aggionta a $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{2}}$ et a $40^{\underline{1}} + 36$, fa $1^{\underline{4}} + 16^{\underline{2}} + 64$, e $4^{\underline{2}} + 40^{\underline{1}} + 100$, che li lore lati sono $1^{\underline{2}} + 8$ e $2^{\underline{1}} + 10$, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.3 + 1.

Capitolo di potenza potenza Cubi e Tanti eguale a numero.

Questo Capitolo è gnerale e sempre si pue agguagliare (come è il Capitolo di Cubo e Tanti eguale a numero) e perchè ha assai parti però ne porrò tre essempij per maggiore sua intelligenza.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 104^{\underline{1}}$ a 64. Piglisi il quadrato della metà rl (lubi, ch'è 4, e moltiplichisi via il numero, fa 256 e questo si cava quadrato della metà delli Tanti, ch'è 2704, resta 2448, del quale se ne piglia la meta, ch'è 1224 e si salva, poi si moltiplica la metà de' Cubi, ch'è 2, via 52, metà delli Tanti, fa 104 e si aggionge al numero, cioè a 64, fa 168, e tutti sono Tanti, alli quali per regola si aggionge $1^{\underline{3}}$ fa $1^{\underline{3}} + 168^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 1224 serbato di sopra, che agguagliato, 11 Tonto valerà 6, che si aggionge con $1^{\underline{2}}$, lato d'$1^{\underline{4}}$, fa $1^{\underline{2}} + 6$, al quale si aggionge la metà de'$^{\underline{3}}$, ma dica $^{\underline{1}}$, cioè $2^{\underline{1}}$, farà $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 6$ che il suo quadrato sarà $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 16^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 36$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 104^{\underline{1}}$ restano $16^{\underline{2}} - 80^{\underline{1}} + 36$, e tutto questo si aggionge al numero, cioè a 64, fa $16^{\underline{2}} - 80^{\underline{1}} + 100$ che il suo lato è $10 - 4^{\underline{1}}$ e questo è eguale a $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 6$ detto di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.13 − 3, e tale agguagliamento nasce da questa regola. Piglisi il lato d'$1^{\underline{4}}$, ch'è $1^{\underline{2}}$, et accompagnisi con tanti $^{\underline{1}}$ quanti sono la metà de' $^{\underline{3}}$, fa $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ et a questo si aggionge $1^{\underline{1}}$ di numero, che il suo quadrato sarà $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 4^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ di $^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$ di numero, che cavatone $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 104^{\underline{1}}$ restano $4^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ di $^{\underline{1}} - 104^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$ di numero, ch'è la quantità da aggiongere a ciascuna delle parti perchè habbino lato, che aggionta a $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 104^{\underline{1}}$ il suo lato sarà $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1^{\underline{1}}$ di numero, et aggionta a 64 farà $4^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ di $1 - 104^{\underline{1}} + 64 + 1^{\underline{2}}$ di numero. Hora bisogna vedere se a moltiplicare il lato delle $^{\underline{2}}$, ch'è R.q.$\llcorner 4 + 2^{\underline{1}} \lrcorner$, via il lato del numero, ch'è R.q.$\llcorner 64 + 1^{\underline{2}} \lrcorner$, fa $2^{\underline{1}} - 52$, metà delli che a moltiplicare dette due R.q. legate l'una via l'altra fanno R.q.$\llcorner 2^{\underline{3}} + 4^{\underline{2}} + 128^{\underline{1}} + 256 \lrcorner$ e questo è eguale a $2^{\underline{1}} - 52$, che levata la R.q. legata si haveranno $2^{\underline{3}} + 4^{\underline{2}} + 128^{\underline{1}} + 256$ eguale a $2704 - 208^{\underline{1}} + 4$ che ridutto a brevità si haverà $1^{\underline{3}} + 168^{\underline{1}}$ eguale a 1224, che agguagliato, il Tanto valerà 6, ch'è la valuta del $^{\underline{1}}$ di numero, la quale accompagnata con $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ farà $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 6$, che il suo quadrato sarà $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 16^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 36$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 104^{\underline{1}}$ restano $16^{\underline{2}} - 80^{\underline{1}} + 36$ questa e la quantità che si deve aggiongere a ciascuna delle parti, che aggionta a $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 104^{\underline{1}}$ et a 64 farà $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 16^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 36$ eguale a $16^{\underline{2}} - 80^{\underline{1}} + 100$, che tolto il lato di ciascuna delle parti si haverà $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 6$ eguale a $10 - 4^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$13 - 3$. Ma se nell'agguagliare di questo Capitolo la moltiplica tione del quadrato della metà delli Cubi via il numero sarà maggiore del quadrato della metà delli $^{\underline{1}}$ all'hora si terra la strada di questo essempio.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 8^{\underline{3}} + 20^{\underline{1}}$ a 23. Moltiplichisi il numero via il quadrato della metà de' Cubi, ch'è 16, fa 368 e questo si cava di 100, quadrato della metà delli $^{\underline{1}}$, resta 268, che partito per 2 ne viene $-$ 134; poi moltiplichisi la metà de' cubi via la metà delli 1, fa 40, e aggiongaseli il numero, fa 63, e sono che si devono accompagnare con $1^{\underline{3}}$, che farà $1^{\underline{3}} + 63^{\underline{1}}$ e questo è eguale al $-$ 134 detto di sopra, clie agguagliato, il 1 valerà $-$ 2 e si aggionge con $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ fa $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} - 2$. Li $4^{\underline{1}}$ nascono dalla metà de' Cubi (come fu detto nell'essempio passato), che il suo quadrato sarà $1^{\underline{4}} + 8^{\underline{3}} + 12^{\underline{2}} - 16^{\underline{1}} + 4$, clie cavatone $1^{\underline{4}} + 8^{\underline{3}} + 20^{\underline{1}}$ resta $12^{\underline{2}} - 36^{\underline{1}} + 4$ e questo si aggionge al numero, cioè a 23, fa $12^{\underline{2}} - 36^{\underline{1}} + 27$, che il suo lato è R.q.27 − R.q.$12^{\underline{1}}$ e questo è eguale a $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} - 2$ detto di sopra, che levato il meno si haverà $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} +$ R.q.$12^{\underline{1}}$ eguale a R.q.27 − $1^{\underline{2}}$, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.⌞R.q.147 + **9**[20]⌟ − 2 − R.q.3.

Capitolo di potenza potenza e potenze e Tanti eguale a numero.

Questo Capitolo può venire in diversi modi e patisce le eccettioni del Capitolo di $^{\underline{3}}$ eguale a $^{\underline{1}}$ e numero e del Capitolo di $^{\underline{3}}$ e numero eguale a $^{\underline{1}}$, che ci può intervenire il + di −, del quale ne porrò solo essempio.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{2}} + 96^{\underline{1}}$ a 48. Moltiplichisi le$^{\underline{2}}$ via il numero fanno 576 e se gli aggionge il quadrato della metà delli $^{\underline{1}}$, fa 2880, e ne piglia la meta, ch'è 1440 e se li aggionge la metà delle potenze, cioè $6^{\underline{2}}$, fa $1440 + 6^{\underline{2}}$ e questo è eguale a $1^{\underline{3}} + 48^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto vale 12, il quale si aggionge con $1^{\underline{2}}$ fa $1^{\underline{2}} + 12$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 24^{\underline{2}} + 144$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{2}} + 96^{\underline{1}}$ resta $12^{\underline{2}} - 96^{\underline{1}} + 144$ e questo si aggionge a 48, cioè al numero, fa $12^{\underline{2}} - 96^{\underline{1}} + 192$, che pigliatone il lato sarà R.q.192 − R.q.$12^{\underline{1}}$ clie sarà eguale a $1^{\underline{2}} + 12$ detto di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.⌞R.q.192 − 9⌟ − R.q.3. E per dimostrare dove nasca al regola aggiungasi a $1^{\underline{2}}$, lato d'$1^{\underline{4}}$, $1^{\underline{1}}$ di numero, fa $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$ di numero, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}}$ + $1^{\underline{2}}$ di numero, che cavatone $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{2}} + 96^{\underline{1}}$ resta $2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}}$ − $12^{\underline{2}} - 96^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$ di numero, e questa è la quantità che si deve giongere a ciascuna delle parti acciochè habbino lato, che aggionta a $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{2}} + 96^{\underline{1}}$ il suo lato sarà $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$ di numero, et aggionta a 48 fa $2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}}$ − $12^{\underline{1}} + 96^{\underline{1}} + 48 + 1^{\underline{2}}$ di numero. Hora bisogna vedere se il lato delle 3, ch'è R.q.⌞$2^{\underline{1}} - 12$⌟, moltiplicato via il lato del numero, ch'è R.q.⌞$48 + 1^{\underline{2}}$⌟, fa 48, metà delli$^{\underline{1}}$, che a moltiplicare detti lati l'uno via l'altro fanno R.q.⌞$2^{\underline{3}} + 96^{\underline{1}} - 12^{\underline{2}} - 576$⌟ ch'è eguale a 48, metà delli $^{\underline{1}}$, che levata la R.q. legata si haverà $2^{\underline{3}} + 96^{\underline{1}} - 12^{\underline{2}} + 576$ eguale a 2304, che levato il meno e ridutto a 1 si haverà $1^{\underline{3}} + 48^{\underline{1}}$ eguale a $1440 + 6^{\underline{2}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 12, che la valuta d'$1^{\underline{1}}$ di numero che fu posto

[20] 5

con la potenza, si che aggionto 12 a $1^{\underline{2}}$ fa $1^{\underline{2}} + 12$, che si quadra fa $1^{\underline{4}} + 24^{\underline{2}} + 144$, del vale se ne cava $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{2}} + 96^{\underline{1}}$ restano $12^{\underline{2}} - 96^{\underline{1}} + 144$ e questa è la quantità che deve giongersi ad ambedue le parti, che aggionta a $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{2}} + 96^{\underline{1}}$ et a 48, fa $1^{\underline{4}} + 24^{\underline{2}} + 144$ eguale a $12^{\underline{2}} - 96^{\underline{1}} + 192$, che pigliato il lato di ciascuna parte si haverà $1^{\underline{2}} + 12$ eguale a R.q.192 $-$ R.q.$1^{\underline{1}}$ 2, che agguagliato, il Tanto valerà R.q. $\llcorner$R.q.192 $- 9\lrcorner -$ R.q.3 (come fu detto di sopra).

Capitolo di potenza potenza Tanti e numero eguale a potenze.

Questo Capitolo assaissime volte patisce la difficultà del Capitolo di Cubo eguale a Tanti e numero e del Capitolo di $^{\underline{3}}$ e numero eguale a $^{\underline{1}}$, e può venire in infiniti modi. Ma solo ne porrò due essempij.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 60^{\underline{1}} + 19$, a $4^{\underline{2}}$. Moltiplichisi la metà delle $^{\underline{2}}$ via il numero fa 38 e si aggionge all'ottavo del quadrato delli ch'è 450, fa 488 et a questo si aggionge il numero, ma dica $^{\underline{1}}$, fa $488 + 19^{\underline{1}}$ et è eguale a $1^{\underline{3}}$ più la metà delle $^{\underline{2}}$, cioè $2^{\underline{2}}$ che agguagliato il Tanto valerà 8, che (per regola) si aggionge a $1^{\underline{2}}$, fa $1^{\underline{2}} + 8$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 16^{\underline{2}} + 64$ del quale se ne cava $1^{\underline{4}} + 60^{\underline{1}} + 19$, resta $16^{\underline{2}} - 60^{\underline{1}} + 45$ e questo si aggionge a 4 fa $20^{\underline{2}} - 60^{\underline{1}} + 45$, che pigliatone il suo lato si haverà R.q.45 $-$ R.q.$20^{\underline{1}}$ overo R.q.$20^{\underline{1}}$ $-$ R.q.45, che o l'uno o l'altro saranno eguali a $1^{\underline{2}} + 8$, che ne l'uno e ne l'altro si può agguagliare, perchè pigliando R.q.45 $-$ R.q.$20^{\underline{1}}$ e agguagliatala con $1^{\underline{2}} + 8$ e levato il meno et il minor numero si haverà $1^{\underline{2}} +$ R.q.$20^{\underline{1}} + 8 -$ R.q.45 eguale a 0, e se si pigliara R.q.$20^{\underline{1}}$ $-$ R.q.45 e levato il meno si haverà $1^{\underline{2}} + 8 +$ R.q.45 eguale a R.q.$20^{\underline{1}}$, che questo non meno si può agguagliare se notn fintamente e questo non e difetto della regola, ma e della domanda che farà venire tale agguagliamento, la quale risolutione sarà impossibile.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 120^{\underline{1}} + 64$ a $80^{\underline{2}}$. Moltiplichisi la metà delle potenze, ch'è 40, via il numero, fa 2560 et a questo si aggionge l'ottava parte del quadrato delli Tanti, ch'è 1800, fa 4360, e se gli aggionga il numero, ma dica $^{\underline{1}}$, fa 4360

$+\ 64^{\underline{1}}$ e questo è eguale a $1^{\underline{3}} +$ la metà i delle $^{\underline{2}}$, cioè $40^{\underline{2}}$, che il Tanto valerà 10, la qual valuta aggionta $1^{\underline{2}}$ per regola fa $1^{\underline{2}} + 10$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 20^{\underline{2}} + 100$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 120^{\underline{1}} + 64$ restano $20^{\underline{2}} - 120^{\underline{1}} + 36$, e questa è la quantità che va aggionta a ciascuna delle parti acciochè sia quadrata, che aggionta a 80 fa $100^{\underline{2}} + 36 - 120^{\underline{1}}$, che il suo lato è $10^{\underline{1}} - 6$ e questo è eguale a $1^{\underline{2}} + 10$, che agguagliato, il Tanto valerà 2 overo 8, et perchè la regola di questo agguagliamento nasce dallo accompagnare $1^{\underline{1}}$ di numero con $1^{\underline{2}}$, overo cavarlo (come si è mostrati ne' Capitoli passati), perchè havendosi a procedere in questo Capitolo nel medesimo modo, non ne dirò altro.

Capitolo di potenza potenza e potenze e numero eguale a Tanti.

Questo Capitolo patisce anco egli le difficultà del passato, ma non tanto, e se a moltiplicare la metà delle potenze via il numero il produtto sia maggiore dell'ottavo del quadrato delli Tanti, all'hora riesce più e se bene può venire in diversi modi, nondimeno, come ho fatto Tanti di molti altri, non ne porrò se non uno essempio.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{2}} + 4$ a $32^{\underline{1}}$. Moltiplichisi la metà delle $^{\underline{2}}$ via il numero, ch'è 4, fa 8 e questo si cavi di 128, ottava parte del quadelli Tanti, resta 120, al quale si aggionge il numero, ma dica Tanti, che saranno $4^{\underline{1}}$ et il mezzo delle potenze, cioè $2^{\underline{2}}$, che farà in tutto $120 + 4^{\underline{1}} + 2^{\underline{2}}$ e questo per regola è eguale a $1^{\underline{3}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 6, e si aggionge a $1^{\underline{2}}$, fa $1^{\underline{2}} + 6$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{2}} + 36$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{2}} + 4$, restano $8^{\underline{2}} + 32$, che aggionti a $32^{\underline{1}}$ fanno $8^{\underline{2}} + 32^{\underline{1}} + 32$, che il suo lato è R.q.$8^{\underline{1}}$ + R.q.32 e questo è eguale a $1^{\underline{2}} + 6$, che agguagliato, il Tanto valerà 2 + R.q.$\llcorner$R.q.50 $-$ 6$\lrcorner$ overo 2 $-$ R.q.$\llcorner$R.q.50 $-$ 6$\lrcorner$.

Capitolo di potenza potenza Cubo e numero eguale a Tanti.

[21] Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 8^{\underline{3}} + 11$ a $68^{\underline{1}}$. Piglisi la metà de' $^{\underline{3}}$ e quadrisi, fa 16, e moltiplichisi via il numero, fa 176 e piglisene la meta, ch'è 88, et aggionghisi

[21] Benchè questo Capitolo sia quasi superfluo, perchè rarissime volte si può agguagliare, non dimmeno per mancare dell'ordine, si è posto con gl'altri.

con l'ottavo del quadrato delli Tanti, fa 666, al quale per sia si aggionga $1^{\underline{3}}$, fa $1^{\underline{3}} + 666$ e si salva. Poi moltiplichisi la metà de' Cubi via la metà delli $^{\underline{1}}$, fa 136 al quale si aggionghi il numero, cioè 11, fa 147, e sono $^{\underline{1}}$, che sono eguali a $1^{\underline{3}} + 666$ serbato di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà 6, poi si piglia il lato d'$1^{\underline{4}}$, ch'è $1^{\underline{2}}$, e se li aggiongono $4^{\underline{1}}$, metà de' $^{\underline{3}}$, fa $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ e se ne cava 6, valuta del Tanto detto di sopra, resta $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} - 6$ e si quadra fa $1^{\underline{4}} + 8^{\underline{3}} + 4^{\underline{2}} - 48^{\underline{1}} + 36$, del qual produtto se ne cava $1^{\underline{4}} + 8^{\underline{3}} + 11$, resta $4^{\underline{2}} - 48^{\underline{1}} + 25$ e si aggionge a $68^{\underline{1}}$ fa $4^{\underline{2}} + 20^{\underline{1}} + 25$ che I suo lato sarà $2^{\underline{1}} + 5$ e questo è eguale a $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} - 6$ detto di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$12 - 1$.

Capitolo di potenza potenza, Tanti e numero eguale a Cubi.

Questo Capitolo rare volte anch'egli si può agguagliare senza + di − (come il sopradetto), perchè il suo agguagliamento viene quasi sempre a $^{\underline{3}}$ e numero eguale a $^{\underline{1}}$, che rari sono che si possino agguagliare.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 36^{\underline{1}} + 19$ a $12^{\underline{3}}$. Moltiplichisi l'ottavo del quadrato delli $^{\underline{3}}$ via il numero, fa 342, al quale si aggionge l'ottavu del quadrato delli Tanti, ch'è 162, fa 504 e per regola se li aggionge $1^{\underline{3}}$, fa $1^{\underline{3}} + 504$ e si salva; poi si moltiplica la metà de' Cubi via la metà delli Tanti, fa 108, che aggiontoli il numero, cioè il 19, fa 127, e sono Tanti che sono eguali a $1^{\underline{3}} + 504$ serbato di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà 8. Hora piglisi 1 lato d'$1^{\underline{4}}$, e se ne leva la metà de' Cubi (ma dica Tanti) e 8, valuta del Tanto, restarà $1^{\underline{2}} - 6^{\underline{1}} - 8$, che i1 suo quadrato è $1^{\underline{4}} - 12^{\underline{3}} + 20^{\underline{2}} + 96^{\underline{1}} + 64$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 36^{\underline{1}} + 19$ restano $20^{\underline{2}} + 60^{\underline{1}} + 45 - 12^{\underline{3}}$ e si aggiongono a $12^{\underline{3}}$ fanno $20^{\underline{2}} + 60^{\underline{1}} + 45$, che il suo lato è R.q.$20^{\underline{1}}$ + R.q.45, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.⌞22 + R.q.409⌟ + R.q.5.

Capitolo di potenza potenza eguale a Cubi Tanti e numero.

Il presente Capitolo è gnerale, perchè l'agguagliamento viene sempre a $^{\underline{3}}$ e $^{\underline{1}}$ eguale a numero, overo a $^{\underline{3}}$, $^{\underline{1}}$ e numero eguale a 0, che in quel caso si muta il numero e si ha $^{\underline{3}}$ e $^{\underline{1}}$ eguale a $-$ numero, che il Tanto vale meno, che tanto serve.

Agguaglisi $1^{\underline{4}}$ a $8^{\underline{3}} + 132^{\underline{1}} + 27$. Piglisi l'ottavo del quadrato de' Cubi, ch'è 8, e moltiplichisi via il numero, fa 216, il quale si cava dell'ottavo del quadrato delli Tanti, ch'è 2178, resta 1962, che si salva; poi moltiplichisi la metà de' Cubi via la metà delli Tanti, fa 264, al quale si aggionge il numero, cioè 27, fa 291, e sono $^{\underline{1}}$ che per regola si aggiongono a $1^{\underline{3}}$, fa $1^{\underline{3}} + 291^{\underline{1}}$ eguale a 1962 serbato di sopra, che agguagliato, il Tanto vale 6 e questo si aggionge a $1^{\underline{2}}$, fa $1^{\underline{2}} + 6$, del quale se ne cava la metà de' 2, ma dica $^{\underline{1}}$, cioè $4^{\underline{1}}$, resta $1^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 6$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} - 8^{\underline{3}} + 28^{\underline{2}} - 48^{\underline{1}} + 36$, che cavatone $1^{\underline{4}}$ resta $28^{\underline{2}} - 48^{\underline{1}} + 36 - 8^{\underline{3}}$, che aggionto a $8^{\underline{3}} + 132^{\underline{1}} + 27$, fa $28^{\underline{2}} + 84^{\underline{1}} + 63$, che il suo lato è R.q.$48^{\underline{1}}$ + R.q.63 e questo è eguale a $1^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 6$, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$\llcorner$R.q.343 + 5$\lrcorner$ + R.q.7 + 2.

Capitolo di potenza potenza e Cubi eguale a Tanti e numero.

Questo Capitolo patisce le eccettioni delli Capitoli di $^{\underline{3}}$ eguale a $^{\underline{1}}$ e numero e di $^{\underline{3}}$ e numero eguale a $^{\underline{1}}$, del quale ne porrò due essempij.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{3}}$ a $132^{\underline{1}} + 47$. Moltiplichisi l'ottavo del quadrato de' cubi via il numero, fa 846, e questo si cava dell'ottavo del quadrato delli Tanti, resta 1332, al quale si aggionge $1^{\underline{3}}$, fa $1^{\underline{3}} + 1332$, che si salva; poi moltiplichisi il mezzo de' Cubi via la metà de' Tanti, fa 396, del quale se ne cava il numero, cioè 47, resta 349 e questi sono Tanti, che sono eguali a $1^{\underline{3}} + 1332$ serbato di sopra, che agguagliato, il Tanto vale 4, il quale si cava d'$1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}}$ resta $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} - 4$, e li $6^{\underline{1}}$ nascono dalla metà de' Cubi, che quadrata detta quantità fa $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{3}} + 28^{\underline{2}} - 48^{\underline{1}} + 16$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{3}}$ restano $28^{\underline{2}} - 45^{\underline{1}} + 16$, e questa è la quantità da giongere a ciascuna delle parti acciochè sia quadrates, che se si aggiongono a $132^{\underline{1}} + 47$ fanno $28^{\underline{2}} + 84^{\underline{1}} + 63$, che il suo lato sarà R.q.281 + R.q.63, ch'è eguale a $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} - 4$ detto di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$\llcorner$20 $-$ R.q.63$\lrcorner$ + R.q.7 $-$ 3, e perchè questo Capitolo pile venire in più modi e in due si può fare la positione, però porrò il nascimento della sua regola, ch'è questa. Piglisi la metà de' $^{\underline{3}}$, ch'è 6, e dica $^{\underline{1}}$, e aggionghisi a $1^{\underline{2}}$ lato d'$1^{\underline{4}}$, fa $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}}$, del quale se ne cava un $^{\underline{1}}$ di numero resta $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} - 1^{\underline{1}}$ di numero, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{3}}$ $+ 36^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}}$ di$^{\underline{2}}$ $- 12^{\underline{1}}$ di $^{\underline{1}}$ $+ 1^{\underline{2}}$ di numero, che cavatone $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{3}}$ restano $36^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}}$ $- 12^{\underline{1}}$ di $^{\underline{1}}$ $+ 1^{\underline{2}}$di numero, e questa è la quantità da aggiongere a ciascuna delle parti, che aggionta a $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{3}}$, il suo lato sarà $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} -$ $1^{\underline{1}}$di numero, et aggionta a $132^{\underline{1}} + 47$ farà $36^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}}$ di$^{\underline{2}}$ $+ 132^{\underline{1}} - 12^{\underline{1}}$ di $^{\underline{1}}$ $+ 47 + 1^{\underline{2}}$ di numero. Hora bisogna vedere se a moltiplicare il lato delle $^{\underline{2}}$, ch'è R.q.$\llcorner 36 - 2^{\underline{1}} \lrcorner$, col lato del numero, ch'è R.q.$\llcorner 47 + 1^{\underline{2}} \lrcorner$, faccia $66 -$ $6^{\underline{1}}$, metà delli$^{\underline{1}}$, che a moltiplicare dette due R.q. legate fanno R.q.$\llcorner 1892 +$ $36^{\underline{2}} - 2^{\underline{3}} - 94^{\underline{1}} \lrcorner$ e questo è eguale a $66 - 6^{\underline{1}}$, che levata la R.q. legata si haverà $1892 + 36^{\underline{2}} - 2^{\underline{3}} - 94^{\underline{1}}$ eguale a $4356 + 36^{\underline{2}} - 792^{\underline{1}}$, che levati i meni e ridutti a brevità, si haverà $1^{\underline{3}} + 1332$ eguale a $396^{\underline{1}}$, che il Tanto valerà 4, ch'è la valuta del Tanto di numero, e perchè fu posto meno $1^{\underline{1}}$ si cavarà 4 d'$1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}}$, resta $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} - 4$, che il suo quadrato sarà $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{3}} - 48^{\underline{1}}$-H $28^{\underline{2}}$ $+ 16$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{3}}$ resta $28^{\underline{2}} - 48^{\underline{1}} + 16$ e questa è la quantità da aggiongersi a ciascuna delle parti, che aggionta a $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{3}}$ il suo lato è $1^{\underline{2}} +$ $6^{\underline{1}} - 4$, et aggionta a $132^{\underline{1}} + 47$ fa $28^{\underline{2}} + 84^{\underline{1}} + 63$, che il suo lato è R.q.$28^{\underline{1}}$ + R.q.63 e questo è eguale a $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} - 4$ detto di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$\llcorner 20 -$ R.q.$63 \lrcorner +$ R.q.$7 - 3$, avertendosi che si poteva fare la positione ancora d'$1^{\underline{1}}$di numero più e non meno, come si è fatto in questo essempio, e ne sarebbe venuto un'altra valuta di Tanto, perchè questo Capitolo ha due valute; però ne porrò un altro essempio che il Tanto di numero sia più.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 2^{\underline{3}}$ a $12^{\underline{1}} + 6$. Piglisi la metà de' ch'è 1, e dica$^{\underline{1}}$ e si aggionghi a $1^{\underline{2}}$, fa $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$ et a questo si aggionghi $1^{\underline{1}}$ di numero, fa $1^{\underline{2}} +$ $1^{\underline{1}} + 1^{\underline{1}}$ di numero, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 2^{\underline{3}} + 1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}}$ $+ 2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{1}}$ $+ 1^{\underline{2}}$ di numero, che cavatone $1^{\underline{4}} + 2^{\underline{3}}$ resta $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}}$ $+ 2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{1}}$ $+ 1^{\underline{2}}$ di numero, e questa è la quantità da aggiongere a ciascuna delle parti acciochè habbiano lato, che aggionta a $1^{\underline{4}} + 2^{\underline{3}}$ il suo lato sarà $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}} + 1^{\underline{1}}$ di numero, et aggiontaa a $12^{\underline{1}} + 6$ farà $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}} + 12\ ^{\underline{1}} + 2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{1}} + 6 + 1^{\underline{2}}$ di numero. Hora bisogna vedere se il lato delle $^{\underline{2}}$, ch'è R.q.$\llcorner 1 + 2^{\underline{1}}$, moltiplicato via il lato del numero, ch'è R.q.$\llcorner 6 + 1^{\underline{2}}\lrcorner$, fa $6 + 1^{\underline{1}}$, metà delli $^{\underline{1}}$, che a moltiplicare detti lati uno via l'altro fanno R.q.$\llcorner 2^{\underline{3}} + 1^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 6\lrcorner$ eguale a $6 + 1^{\underline{1}}$, che levata la R.q. legata si haverà $2^{\underline{3}} + 1^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 6$ eguale a $36 + 12^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$, che ridutto a brevità si haverà $1^{\underline{3}}$ eguale a 15, che il Tanto valerà R.c.15, e questa è la valuta del Tanto di numero, che aggionto a $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$ fa $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$ + R.c. 15, che il suo quadrato sarà $1^{\underline{4}} + 2^{\underline{3}} + 1^{\underline{2}}$ + R.c.$120^{\underline{2}}$ + R.c.$120^{\underline{1}}$ + R.c.225, che cavatone $1^{\underline{4}} + 2^{\underline{3}}$ resta $1^{\underline{2}}$ + R.c.$120^{\underline{2}}$ + R.c.$120^{\underline{1}}$ + R.c.225, e questa è la quantità da aggiongere a ciascuna delle parti, che aggionta a $1^{\underline{4}} + 2^{\underline{3}}$ e a $12^{\underline{1}} + 6$ fa $1^{\underline{4}} + 1^{\underline{2}} + 2^{\underline{3}}$ + R.c. $120^{\underline{2}}$ + R.c. $120^{\underline{1}}$ + R.c. 225 eguale a R.c.$120^{\underline{2}} + 1^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}}$ + R.c. $120^{\underline{1}} + 6$ + R.c. 225, che tolto il lato dell'una e dell'altra parte si haverà $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$ + R.c.15 eguale a R.q.$\llcorner$R.c.$120^{\underline{2}} + 1^{\underline{2}}\lrcorner$ + R.q.$\llcorner$R.c. $225 + 6\lrcorner$, che agguagliato, il Tanto valerà tutto questo composto: R.q.$\llcorner$R.q.$\llcorner 6$ + R.c.$225\lrcorner + \frac{1}{8}$ − R.c.$1\frac{7}{8}\lrcorner$ − R.q.$\llcorner$R.c.$1\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\lrcorner + \frac{1}{2}$.

Capitolo di potenza potenza e Tanti eguale a Cubi e numero.

11 presente Capitolo patisce le eccettioni del passato, cioè de' Capitolo di $^{\underline{3}}$ eguale a $^{\underline{1}}$ e numero, e $^{\underline{3}}$ et numero eguale a $^{\underline{1}}$, e si può fare la positione in due modi (come del passato). Ma di questo porrò solo uno esscmpio.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 20^{\underline{1}}$ a $4^{\underline{3}} + 11$. Moltiplichisi l'ottavo del quadrato de' $^{\underline{3}}$, ch'è 2, via il numero, fa 22, e si cava dell'ottavo del quadrato delli $^{\underline{1}}$, ch'è 50, resta 28 e si salva; poi si moltiplica la metà de' $^{\underline{3}}$ via la metà delli $^{\underline{1}}$ fa 20, e se ne cava il numero, cioè 11, resta 9, e sono 1, che aggionti co'l numero serbato fanno $28 + 9^{\underline{1}}$ e questo è eguale a $1^{\underline{3}}$, che agguagliato, il Tanto vale 4, che aggionto con $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}}$ fa $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 4$, et li $-\, 2^{\underline{1}}$ nascono dalla metà de' $^{\underline{3}}$ e sono − perchè gli $^{\underline{3}}$ sono dalla parte contraria del che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} - 4^{\underline{3}} + 12^{\underline{2}} - 16^{\underline{1}} + 16$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 20^{\underline{1}}$ restano $12^{\underline{2}} - 4^{\underline{3}} - 36^{\underline{1}} + 16$, e tutto questo si deve giongere a $4^{\underline{3}} + 11$, fa $12^{\underline{2}} - 36^{\underline{1}} + 27$, che il suo lato è R.q.27 − R.q.$12^{\underline{1}}$ ch'è eguale a $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 4$ detto di sopra, che agguagliato, il Tanto valrà RR.q.3 + 1 − R.q.3.

Capitolo di potenza potenza e numero eguale a Cubi e Tanti.

Questo Capitolo e sempre generale, perchè rarissime volte viene ad altro agguagliamento che a $^{\underline{3}}$ e $^{\underline{1}}$ eguale a numero e di esso sempresi fa una sola positione, cioè $+\ 1^{\underline{1}}$ di numero. Benche anco si potrebbe fare $-\ 1^{\underline{1}}$ di numero, ma non e necessaria; del quale ponere soh, un essempio.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 15$ a $6^{\underline{3}} + 78^{\underline{1}}$. Moltiplichisi l'ottavo del quardrato de' ch'è $4\frac{1}{2}$, via il numero, fa $67\frac{1}{2}$ che si aggionge con l'ottavo del quadrato delli $^{\underline{1}}$, fa 828, che si salva. Poi si moltiplica la metà delli $^{\underline{1}}$ via la metà de' $^{\underline{3}}$, fa 117, del quale se ne cava il numero resta 102, che sono 1 alli quali per regola si aggionge $1^{\underline{3}}$, fa $1^{\underline{3}} + 102^{\underline{1}}$ et è eguale all'828 serbato di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà 6, il quale si aggionge a $1^{\underline{2}} - 3^{\underline{1}}$, fa $1^{\underline{2}} - 3^{\underline{1}} + 6$, e li $-\ 3^{\underline{1}}$ nscono (come fu detto nel Capitolo passato) dalla metà de' $^{\underline{3}}$, che il suo quadrato sarà $1^{\underline{4}} - 6^{\underline{3}} + 21^{\underline{2}} - 36^{\underline{1}} + 36$, che levatone $1^{\underline{4}} + 15$ resta $-\ 6^{\underline{3}} + 21^{\underline{2}} - 36^{\underline{1}} + 21$ e questa quantità si aggionge $6^{\underline{3}} + 78^{\underline{1}}$, fa $21^{\underline{2}} + 42^{\underline{1}} + 21$, che il suo lato è R.q.$21^{\underline{1}}$ + R.q.21, ch'è eguale a $1^{\underline{2}} - 3^{\underline{1}} + 6$, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$\llcorner$R.q.$131\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2}\lrcorner$ − R.q.$5\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2}$.

Capitolo di potenza potenza Cubi e Potenzè eguale a numero.

Il presente Capitolo patisce le eccettioni delli Capitoli di $^{\underline{3}}$ eguale a $^{\underline{1}}$ e numero e di 3 e numero eguale a $^{\underline{1}}$, e massime quando il numero delle potenze è grande rispetto al numero, et ha solo una positione, cioè $+1^{\underline{1}}$ di numero, e di esso ancora non porrò più d'uno essempio.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 13^{\underline{2}}$ a 75. Piglisi la metà de' Cubi e quailrisi, fa 4 e cavisi del numero delle $^{\underline{2}}$, resta 9, il quale si moltiplica via la metà del numero, fa 337 al quale si aggionge la metà delle $^{\underline{2}}$, fa $6\frac{1}{2}^{\underline{2}} + 337^{\underline{2}}$ che si salva, poi faccisi del numero 1 che saranno $75^{\underline{1}}$, e per regola se li aggionga $1^{\underline{1}}$, fa $1^{\underline{3}} + 75^{\underline{1}}$ eguale a $6^{\underline{2}} + 337\frac{1}{2}$, che agguagliato, il Tanto valerà 5, il quale si aggionghi a $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$, fa $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 5$ e li $2^{\underline{1}}$ sono la metà de' che il suo quadrato sarà $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 14^{\underline{2}} + 20^{\underline{1}} + 25$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 13^{\underline{2}}$ resta $1^{\underline{2}} + 20^{\underline{1}}$

+ 25, e questo si aggionge a 75, fa 100 + $20^{\underline{1}}$ + $1^{\underline{2}}$ che il suo lato è 10 + $1^{\underline{1}}$, ch'è eguale a $1^{\underline{2}}$ + $2^{\underline{1}}$ + 5, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$5\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$.

Capitolo di potenza potenza Cubi e numero eguale a potenze.

Questo Capitolo patisce le difficultà del passato e si può fare la posilionc in due modi, ch'è la cagione che lo fa patire ancor più del sopradetto, ma solo ne porrò un essempio.

Agguaglisi $1^{\underline{4}}$ + $12^{\underline{3}}$ + 7 a $20^{\underline{2}}$. Piglisi il quarto del quadrato de' $^{\underline{3}}$, ch'è 36, e aggionghisi alle $^{\underline{2}}$, fa 56, e moltiplichisi via la metà del numero, fa 196 al quale per regola si aggionghi il numero, ma dica, $^{\underline{1}}$, farà 196 + $7^{\underline{1}}$, e salvisi. Poi si piglia la metà dells$^{\underline{2}}$, ch'è $10^{\underline{2}}$ e per regola se li aggionghi $1^{\underline{3}}$, fa $1^{\underline{3}}$ + 10 ch'è eguale a $7^{\underline{1}}$ + 196 serbato di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà 4, il quale si aggionge a $1^{\underline{2}}$ + $6^{\underline{1}}$, fa $1^{\underline{2}}$ + $6^{\underline{1}}$ + 4, e li $6^{\underline{1}}$ nascono dalla metà de' $^{\underline{3}}$, che il suo quadrato sarà $1^{\underline{4}}$ + $12^{\underline{3}}$ + $44^{\underline{2}}$ + $48^{\underline{1}}$ + 16, che cavatone $1^{\underline{4}}$ + $12^{\underline{3}}$ + 7, resta $44^{\underline{2}}$ + $48^{\underline{1}}$ + 9, che gionto a $20^{\underline{2}}$ fa $64^{\underline{2}}$ + $48^{\underline{1}}$ + 9, che il suo lato è $8^{\underline{1}}$ + 3, ch'è eguale a $1^{\underline{2}}$ + $6^{\underline{1}}$ + 4, che agguagliato, il Tanto valerà 1.

Capitolo di potenza potenza e potenza e numero eguale a Cubi.

Questo Capitolo rarissime volte si può agguagliare **senza il più di meno**, e così per seguire l'ordine solito ne porrò un essempio, del quale se ne può far solo una positione di + $1^{\underline{1}}$ di numero.

Agguaglisi $1^{\underline{4}}$ + $1^{\underline{2}}$ + 9 a $8^{\underline{3}}$. Quadrisi la metà de' Cubi, fa 16, e cavasene 1, numero delle resta 15, che si moltiplica via $4\frac{1}{2}$, metà del numero, fa $67\frac{1}{2}$ al quale si aggionge il numero e dica $^{\underline{1}}$, che saranno $9^{\underline{1}}$, e ancora se li aggionghi la metà delle $^{\underline{2}}$, ch'è $\frac{1}{2}^{\underline{2}}$, fanno in tutto $\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ + $9^{\underline{1}}$ + $67\frac{1}{2}$ eguale ai $^{\underline{3}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 5, quale si aggionge a $1^{\underline{2}}$ − $4^{\underline{1}}$, fa $1^{\underline{2}}$ − $4^{\underline{1}}$ + 5, e li − $4^{\underline{1}}$ nascono dalla metà de' $^{\underline{3}}$ e sono meno per essere li $^{\underline{3}}$ dalla parte contraria delle $^{\underline{2}}$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}}$ − $8^{\underline{3}}$ + $26^{\underline{2}}$ − $40^{\underline{1}}$ + 25, che cavatone $1^{\underline{4}}$ + $1^{\underline{2}}$ + 9 resta − $8^{\underline{3}}$ + $25^{\underline{2}}$ − $40^{\underline{1}}$ + 16, e si aggionge a $8^{\underline{3}}$, fa $25^{\underline{2}}$ − $40^{\underline{1}}$ + 16, che il suo lato è $5^{\underline{1}} - 4$, e questo è eguale a $1^{\underline{2}} - 4\lrcorner + 5$, detto di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà $4\frac{1}{2}$ + R.q.$11\frac{1}{4}$, overo $4\frac{1}{2}$ − R.q.$11\frac{1}{4}$. Avertendosi che se le $^{\underline{2}}$ saranno maggiori del quadrato della metà de' cubi all'hora il numero trovato (come si è detto di sopra) si accompagnara col Cubo e sarà eguale a potenze e Tanti.

Capitolo di potenza potenza e cubi eguale a potenze e numero.

Questo Capitolo patisce l'eccettione de' Capitoli di $^{\underline{3}}$ eguale a $^{\underline{1}}$ e numero e di $^{\underline{3}}$ e numero eguale a $^{\underline{1}}$, e solo si può fare la positione di $- 1^{\underline{1}}$di numero. Si potrebbe anco ponere $+ 1^{\underline{2}}$ di numero, ma il Tanto valerebbe meno.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{3}}$ a $4^{\underline{2}} + 32$. Piglisi il quadrato della metà de' $^{\underline{3}}$ ch'è 36, e aggionghisi alle $^{\underline{2}}$, fa 40, e moltiplichisi via 16, metà dcl numero, fa 640, e se li aggionge la metà delle $^{\underline{2}}$, fa $640 + 2^{\underline{2}}$ e questo è eguale a $1^{\underline{3}} + 32^{\underline{1}}$ che li$^{\underline{1}}$ nascono da 32, che agguagliato, il Tanto valerà 8, il quale si cava d'$1^{\underline{2}}$ + $6^{\underline{1}}$, resta $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} - 8$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{3}} + 20^{\underline{2}} - 96^{\underline{1}} + 64$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{3}}$ restano $20^{\underline{2}} - 96^{\underline{1}} + 64$, che si aggionge a $4^{\underline{2}} + 32$ fa $24^{\underline{2}}$ $- 96^{\underline{1}} + 96$, che il suo lato è R.q.96 − R.q.$24^{\underline{1}}$ e questo è eguale a $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} -$ 8, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$\llcorner$R.q.600 + 23$\lrcorner$ − 3 − R.q.6.

Capitolo di potenza potenza e potenzè eguale a Cubi e numero.

Il presente Capitolo patisce l'eccettioni del passato e sempre si fa la positione di $+ 1^{\underline{1}}$di numero, benchè si possa anco fare di meno, simile al Capitolo passato, il che viene quando il quarto del quadrato dc' Cubi e maggiore delle potenze.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 10^{\underline{2}}$ a $4^{\underline{3}} + 16$. Quadrisi il mezzo de' Cubi, fa 4, e si cava delle potenze, resta 6, e si moltiplica via 8, metà del numero, fa 48, al quale si aggionge la metà delle cioè $5^{\underline{2}}$, fa $48 + 5^{\underline{2}}$, e questo è eguale a $1^{\underline{3}} + 16^{\underline{1}}$ (e li $16^{\underline{1}}$ nascono dal numero, il quale si fa doventar $^{\underline{1}}$), che agguagliato, il Tanto valerà 4, il qua le 41 somma con $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}}$ (e li $^{\underline{2}}$ nascono dalla metà de

$^{\underline{3}}$ e sono meno per essere i Cubi dalla parte contraria della 4) fa $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 4$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} - 4^{\underline{3}} + 12^{\underline{2}} - 16^{\underline{1}} + 16$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 10^{\underline{2}}$, resta $-4^{\underline{3}} + 2^{\underline{2}} - 16^{\underline{1}} + 16$, quantità che si deve giongere a ciascuna delle parti acciochè sia quadrato, che aggionta a $1^{\underline{4}} +10^{\underline{2}}$, fa $1^{\underline{4}} - 4^{\underline{3}} + 12^{\underline{2}} - 16^{\underline{1}} + 16$, che il suo lato è $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 4$, et aggionta a $4^{\underline{3}} + 16$ fa $2^{\underline{2}} - 16^{\underline{1}} + 32$, che il suo lato è R.q.32 $-$ R.q.$2^{\underline{1}}$, e questo è eguale a $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 4$, che levato il meno si haverà $1^{\underline{2}}$ eguale a $2^{\underline{1}} -$ R.q.$2^{\underline{1}}$ + R.q.32 $-$ 4, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$\llcorner$R.q.18 $- 2\frac{1}{2}\lrcorner + \frac{1}{2} -$ R.q.$\frac{1}{2}$. Avertendosi che se il quadrato della metà de' $^{\underline{3}}$ sarà maggiore della potenze all'hora si pone la metà delle $^{\underline{2}}$ dalla banda del $^{\underline{3}}$ e si haverà $^{\underline{3}}$, $^{\underline{2}}$ e $^{\underline{1}}$ eguale a numero, come sarebbe $1^{\underline{4}} + 10^{\underline{2}}$ eguale a $8^{\underline{3}} + 16$, che fatto come si è detto di sopra si haverà $1^{\underline{3}} + 16^{\underline{1}} + 5^{\underline{2}}$ eguale a 48.

Capitolo di potenza potenza e numero eguale a Cubi e potenze.

Questo Capitolo patisce l'eccettioni de' passati e si possono fare due positioni, cioè ponere $+ 1^{\underline{1}}$ di numero, e l'agguagliamento verrà a $^{\underline{3}}$ e $^{\underline{2}}$ eguale a $^{\underline{1}}$ e numero, e se si porra $- 1^{\underline{1}}$ di numero, l'agguagliamento verrà a $^{\underline{3}}$ e numero eguale a $^{\underline{2}}$ e $^{\underline{1}}$, del quale ne porn) n essempio, che sarà quello di $+ 1^{\underline{1}}$ di numero.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 15$ a $7^{\underline{2}} + 2^{\underline{3}}$. Piglisi il mezzo de' $^{\underline{3}}$ e quadrisi, fa 1, e si aggionge al numero delle $^{\underline{2}}$, fa 8 e si moltiplica via la metà del numero, ch'è $7\frac{1}{2}$, fa 60 e se li aggionge il numero, ma dica $^{\underline{1}}$, farà $60 + 15^{\underline{1}}$ e questo è eguale a $1^{\underline{3}}$ + la metà delle $^{\underline{2}}$, cioè a $1^{\underline{3}} + 3\frac{1}{2}^{\underline{2}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 4, che si aggionge a $1^{\underline{2}} - {}^{\underline{1}}$ (il quale $1^{\underline{1}}$ nasce dalla metà de'$^{\underline{3}}$) fa $1^{\underline{2}} - 1^{\underline{1}} + 4$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} - 2^{\underline{3}} + 9 - 8^{\underline{1}} + 16$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 15$ restano $-2^{\underline{3}} +9^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 1$, che aggionti a $7^{\underline{2}} + 2^{\underline{3}}$ fa $16^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 1$, che il suo lato è $4^{\underline{1}} - 1$, ch'è eguale a $1^{\underline{2}} - 1^{\underline{1}} + 4$, he agguagliato, il Tanto valerà $2\frac{1}{2}$ + R.q.$1\frac{1}{4}$ overo $2\frac{1}{2}$ $-$ R.q.$1\frac{1}{4}$.

Capitolo di potenza potenza eguale a Cubi potenze e numero.

In questo Capitolo aviene come negli altri passati, che assai volte **ci occorre il + di** $-$[22] e la sua positione è $- 1^{\underline{1}}$ di numero, che il suo agguagliamento viene a $^{\underline{3}}$ e $^{\underline{1}}$ eguale a $^{\underline{2}}$ e numero (come si vedra nel srgucute essempio).

Agguaglisi $1^{\underline{4}}$ a $8^{\underline{3}} + 5^{\underline{2}} + 28$. Piglisi il quarto del quadrato de' $^{\underline{3}}$, ch'è 16, e si aggionge alle $^{\underline{2}}$, fa 21 e si moltiplica via la metà del numero, fa 294, e se li aggionge la metà delle $^{\underline{2}}$, cioè $2\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ fa $294 + 2\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ ecsto è eguale a $1^{\underline{3}} + 28^{\underline{1}}$, che li $^{\underline{1}}$ sono il numero, che agguagliato, il Tanto valerà 6, il quale si cava d'$1^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}}$, resta $1^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} - 6$ et li $- 4^{\underline{1}}$ sono la metà de' $^{\underline{3}}$), che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} - 8^{\underline{3}} + 4^{\underline{2}} + 48^{\underline{1}} + 36$, che cavatone $1^{\underline{4}}$ resta $- 8^{\underline{3}} + 4^{\underline{2}} + 48^{\underline{1}} + 36$, e si aggiongono a $8^{\underline{3}} + 5^{\underline{2}} + 28$, fanno $9^{\underline{2}} + 48^{\underline{1}} + 64$, che il suo lato $3^{\underline{1}} + 8$, e questo è eguale a $1^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} - 6$, che agguagliato, il Tanto valcrà R.q.$26\frac{1}{4} + 3\frac{1}{2}$.

Capitolo di potenza potenza Cubi potenze e Tanti eguale a numero.

Di questo Capitolo per essere molto laborioso porno l'agguagliamento con brevità e parimente la positione col mostrare dove nasca tal regola.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 15^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ a 64. Piglisi il quarto del quadrato de'$^{\underline{3}}$, ch'è 4, e cavisi del numero delle $^{\underline{2}}$, resta 11, che moltiplicato via 32, metà del numero, fa 352, et a questo si aggionge l'ottavo del quadrato delli $^{\underline{1}}$, ch'è 2, fa 354, e se li aggionge la metà delle $^{\underline{2}}$ ch'è $7\frac{1}{2}^{\underline{2}}$, fa $354 + 7\frac{1}{2}^{\underline{2}}$, e si salva; poi si moltiplica la metà de' $^{\underline{3}}$ via la metà delli $^{\underline{1}}$, fa 4, che aggionto col numero, cioè con 64, fa 68 e questi sono $^{\underline{1}}$, che per regola si aggiongono a $1^{\underline{3}}$, fa $1^{\underline{3}} + 68^{\underline{1}}$ eguale a $354 + 7\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ serbato di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà 6, e si aggionge a $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$, fa $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 6$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 16^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 36$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 15^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ resta $1^{\underline{2}} + 20^{\underline{1}} + 36$, che aggionto a 64, fa $1^{\underline{2}} + 20^{\underline{1}} + 100$, che il suo lato è $10 + 1^{\underline{1}}$ eguale a $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 6$ detto di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$4\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$.

[22] non sono generali

E per dimostrare di dove nasca tal regola fa di bisogno pigliar $1^{\underline{2}}$, lato di $1^{\underline{4}}$ et aggiongerli $2^{\underline{1}}$, metà de' Cubi, fa $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$, e se gli aggionge $1^{\underline{1}}$ di numero, fa $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1^{\underline{1}}$ di numero, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 4^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ di $^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$ di numero, e se ne cava $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 15^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$, resta $2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$ di numero, e questa è la quantità che si deve giongcrr a ciascuna delle parti acciochè habbino lato, che aggionta a $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 15^{\underline{2}} + {}^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$, il suo lato sarà $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1^{\underline{1}}$ di numero, et aggionta a 64 fa $2^{\underline{1}}$ di $^{\underline{2}} - 11^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ di $^{\underline{1}} - 4^{\underline{1}} + 64 + 1^{\underline{2}}$ di numero. Hora bisogna vedere se a moltiplicare il lato delle $^{\underline{2}}$ ch'è R.q.$\llcorner 2^{\underline{1}} - 11 \lrcorner$, con il lato del numero, ch'è R.q.$\llcorner 64 + 1^{\underline{2}} \lrcorner$, iI produtto fa la metà delli ch'è $2^{\underline{1}} - 2$, e moltiplicati detti lati l'uno via l'altro fanno R.q.$\llcorner 2^{\underline{3}} + 128^{\underline{1}} - 11^{\underline{2}} - 704 \lrcorner$ eguale a $2^{\underline{1}} - 2$. che levata la R.q. legata si haverà $2^{\underline{3}} + 128^{\underline{1}} - 11^{\underline{2}} - 704$ eguale a $4^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 4$, che levato il $-$ e ridutto a $1^{\underline{3}}$ si haverà $1^{\underline{3}} + 68^{\underline{1}}$ eguale a $7\frac{1}{2}^{\underline{2}} + 354$, che agguagliato, il Tanto valerà 6, e questa è la valuta del 1 di numero, che aggionto a $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$, fa $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 6$, che il suo quadrato e $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 16^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 36$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 15^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ resta $1^{\underline{2}} + 20^{\underline{1}} + 36$, e questa è la quantità da aggiongere a ciascuna delle parti, che aggionta a $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 15^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ et a 64, fa $1^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 16^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 36$ eguale a $1^{\underline{2}} + 20^{\underline{1}} + 100$, che pigliato il lato di ciascuna parte si haverà $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 6$ eguale a $1^{\underline{1}} + 10$, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$4\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$. Avertendosi che quando il quadrato della metà de' 2 sarà maggiore del numero delle $^{\underline{2}}$ all'hora si potrà fare la positione che dica $- 1^{\underline{1}}$ di numero, dove in questo essempio dice $+ 1^{\underline{1}}$ di numero.

Capitolo di potenza potenza Cubi potenze e numero eguale a Tanti.

Questo Capitolo patisce l'eccettioni de' passati, e ogni volta che a sommare tutti i numeri delle dignita, cioè de' Cubi, potenze e potenze 140 cum', saranno maggiori del numero delli Tanti, e che il numero sarà pari o maggiore del numero di essi Tanti, e impossibile fare tale agguagliamento(come si vedra nel primo essempio, volendo per questo rispetto ponere due essempij del presente Capitolo).

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 8^{\underline{3}} + 8^{\underline{2}} + 10$ a $8^{\underline{1}}$. Piglisi il quarto del quadrato de' Cubi, ch'è 16, e se ne cavi il numero delle $^{\underline{2}}$, ch'è 8, resta 8, il quale si moltiplica via 5, metà del numero, fa 40, al quale si aggionge l'ottavo del quadrato delli $^{\underline{1}}$, ch'è 8; poi si moltiplica la metà delli Tani i via la metà de' Cubi, fa 16, e se li aggionge il numero, cioè 10, Irr e Sono Tanti, alli quali si aggionge la metà delle $^{\underline{2}}$, fa $26^{\underline{1}} + 4^{\underline{2}}$, r Ire si aggiongono al 40 et 8 detti di sopra, fanno $26^{\underline{1}} + 4^{\underline{2}} + 48$, e rinr suo per regola è eguale a 1 che agguagliato, il Tanto valerà 8, che aggionto a $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ fa $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 8$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 32^{\underline{2}} + 64^{\underline{1}} + 64$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 8^{\underline{3}} + 8^{\underline{2}} + 10$ resta $24^{\underline{2}} + 64^{\underline{1}} + 54$ che aggionti a $8^{\underline{1}}$ fanno $24^{\underline{2}} + 72^{\underline{1}} + 54$, che il suo lato è R.q.54 + R.q.$24^{\underline{1}}$, ch'è eguale a $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 8$ detto di sopra, che ridutto alla equatione, si haverà $1^{\underline{2}} + 8 -$ R.q.54 eguale a R.q.$24^{\underline{1}} - 4\,^{\underline{1}}$, che non si può agguagliare, perchè non si può cavare il numero della metà quadrata delli Tanti, il che aviene perchè patisce le dificultà dette di sopra, che sommati i numeri delle dignità fanno 17, ch'è maggiore di 8, numero delli Tanti, e 10, ch'è il rrirmero, e maggiore del detto 8, numero delli Tanti: però la domanda che farà venire tal agguagliamento e insolubile.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 8^{\underline{3}} + 4^{\underline{2}} + 2$ a $24^{\underline{1}}$. Piglisi il quarto del quadrato de' Cubi, ch'è 16, e cavisene il numero delle$^{\underline{2}}$resta 12, i1 quale si moltiplica via 1, metà del numero, fa 12 e questo si aggionge a 72, ottavo del quadrato delli Tanti, fa 84 e se li aggionge la metà delle $^{\underline{2}}$ et $1^{\underline{3}}$ per regola, fa $84 + 2^{\underline{2}} + 1$ che si salva. Poi si moltiplica la metà de' Cubi via la metà delli Tanti, fa 48, che aggiontoli il numero, cioè 2, fa 50, che sono Tanti e sono eguali a $84 + 2^{\underline{2}} + 1^{\underline{3}}$ serbato di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà 2 e detto 2 si cava d'$1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ (e li $4^{\underline{1}}$ nascono dalla metà de' Cubi) resta $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} - 2$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 8^{\underline{3}} + 12^{\underline{2}} - 16^{\underline{1}} + 4$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 8^{\underline{3}} + 4^{\underline{2}} + 2$ resta $8^{\underline{2}} - 16^{\underline{1}} + 2$, che aggionto a $24^{\underline{1}}$ fa $8^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 2$, ch'il suo lato è R.q.$8^{\underline{1}}$ + R.q.2 et è eguale a $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} - 2$, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$\llcorner 8 -$ R.q.$18\lrcorner$ + R.q.2 − 2.

Capitolo di potenza potenza Cubi Tanti e numero eguale a potenze.

11 presente Capitolo patisce le eccettioni degli altri sopradetti e può venire in assai modi, del quale (com'altre volte ho detto) per non andare, in l'infinito, ne porrò solo uno essempio.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 6^{\underline{3}} + 6^{\underline{1}} + 22$ a $29^{\underline{2}}$. Aggionghisi alle$^{\underline{2}}$11 quarto del quadrato de' ch'è 9, fa 38, e moltiplichisi per 11, metà del numero, fa 418, al quale si aggionge l'ottavo del quadrato dclli 1, ch'è $4\frac{1}{2}$, fa $422\frac{1}{2}$ e salvisi; poi si moltiplica la metà de' Cubi via la metà delli Tanti, fa 9 e si cava del numero, resta 13, e sono $^{\underline{1}}$, che aggionti a $422\frac{1}{2}$ serbato di sopra fa $4\frac{1}{2} + 13^{\underline{1}}$ e per regola è eguale a $1^{\underline{3}}$ + la metà delle $^{\underline{2}}$, cioè $14\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ che agguagliato, il Tanto valerà 5 e si aggionge a $1^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}}$, fa $1^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} + 5$ e li Tanti nascono dalla metà de' Cubi, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 6^{\underline{3}} + 19^{\underline{2}} + 30^{\underline{1}} + 25$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 6^{\underline{3}} + 6^{\underline{1}} + 22$ resta $19^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 3$, che aggionto a $29^{\underline{2}}$ fa $48^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 3$, che il suo lato è R.q.481 + R.q. et è eguale a $1^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} + 5$ detto di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.12 $- 1\frac{1}{2}$ + R.q.$\llcorner 9\frac{1}{4}$ − R.q.$75\llcorner$, overo R.q.12 $- 1\frac{1}{2}$ − R.q.$\llcorner 9^{\underline{4}}$ − R.q.$75\lrcorner$, che l'una e l'altra valuta è vera.

Capitolo di potenza potenza potenze Tanti e numero eguale a Cubi.

Questo Capitolo patisce le difficultà de' Capitoli di $^{\underline{3}}$ eguale a $^{\underline{1}}$ e numero e di $^{\underline{3}}$ e numero eguale a e rare volte si può agguagliare **senza + di** − e di esso solo ne porrò un essempio.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 3^{\underline{2}} + 40^{\underline{1}} + 20$ a $8^{\underline{3}}$. Piglisi il quarto del quadrato de'$^{\underline{3}}$ ch'è 16, del quale se ne cava 3, numero delle $^{\underline{2}}$, resta 13, che moltiplicato via 10, metà del numero fa 130 e se li aggionge l'ottavo del quadrato delli $^{\underline{1}}$, ch'è 200, fa 330 e se li aggionge la metà delle $^{\underline{2}}$, ch'è $1\frac{1}{2}^{\underline{2}}$, et $1^{\underline{3}}$ per regola, fa $330 + 1\frac{1}{2}^{\underline{2}} + 1$ e si salva. Poi si multiplica la metà delli $^{\underline{1}}$ via la metà de'$^{\underline{3}}$, fa 80 et aggiontoli il nunirro fa 100, e sono $^{\underline{1}}$, che sono eguali a $330 + 1\frac{1}{2}^{\underline{2}} + 1^{\underline{3}}$ serbato di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà 6, che si cava d'$1^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}}$, resta $1^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} - 6$ (e li $- 4^{\underline{1}}$ nascono dalla metà delli Cubi e sono nucno per essere li Cubi dalla parte contraria della 4), che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} - 8^{\underline{3}} +$

$4^{\underline{2}} + 48^{\underline{1}} + 36$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 3^{\underline{2}} + 40^{\underline{1}} + 20$, resta $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 16 - 8^{\underline{3}}$, che aggionto a $8^{\underline{3}}$ fa $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 16$, che il suo lato è $1^{\underline{1}} + 4$ et è eguale a $1^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}}$ -6, che agguagliato, il tanto valerà R.q.$16\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}$; **avertendosi che il lato d'$1^{\underline{4}} - 8^{\underline{3}} + 4^{\underline{2}} + 48^{\underline{1}} + 36$ può essere $6 + 4^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}}$, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$4\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2}$.**

Capitolo di potenza potenza Cubi e Tanti eguale a potenza e numero.

Di questo Capitolo si può fare la positione in due modi e patisce le difficultà del passato, e l'essempio che io ne porrò sarà di $- 1^{\underline{1}}$ di numero.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{3}} + 72^{\underline{1}}$ a $8^{\underline{3}} + 84$. Piglisi il quarto del luadrato delli Cubi, ch'è 36, e aggionghisi alle $^{\underline{2}}$, fa 44, e moltiplichisi via la metà del numero, fa 1848, che cavatone l'ottavo del quadrato delli $^{\underline{1}}$, resta 1200, e se li aggionge la metà delle $^{\underline{2}}$, fa $1200 + 4^{\underline{2}}$ e si salva; poi si moltiplica il mezzo dei Cubi via il mezzo delli $^{\underline{1}}$, fa 216, al quale si aggionge il numero, fa 300 e sono sono $^{\underline{1}}$, alli quali gionto $1^{\underline{3}}$ per regola fa $1^{\underline{3}} + 300^{\underline{1}}$, ch'è eguale a 1200 $+ 4^{\underline{2}}$ serbato di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà 4, che si cava d'$1^{\underline{2}}$ + $6^{\underline{1}}$ resta $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} - 4$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{3}} + 28^{\underline{2}} - 48^{\underline{1}} + 16$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{3}} + 72^{\underline{1}}$ resta $28^{\underline{2}} - 120^{\underline{1}} + 16$, che aggionto a $8^{\underline{2}} + 84$ fanno $36^{\underline{2}} - 120^{\underline{1}} + 100$, che il suo lato è $10 - 6^{\underline{1}}$, et è eguale a $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} - 4$, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$50 - 6$.

Capitolo di potenza potenza Cubi e numero eguale a potenze e Tanti.

Le positioni di questo Capitolo sono due, ma sempre si può fare con la positione di $+ 1^{\underline{1}}$ di numero e patisce le difficolta del passato.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 16^{\underline{3}} + 36$ a $60^{\underline{2}} + 32^{\underline{1}}$. Piglisi l'ottavo del quadrato de' Cubi, ch'è 32, et aggionghisi con la metà delle$^{\underline{2}}$, fa 62, che moltiplicato via il numero fa 2232, al quale aggionto l'ottavo del quadrato delli Tanti fa 2360, che si salva; poi si moltiplica il mezzo de' Cubi via il mezzo delli 1, fa 128 e se gli aggionge il numero, cioè 36, fa 164, che sono, che aggionti con 2360 serbato di sopra, fa 2360 $-$ $164^{\underline{1}}$ e questo per regola è eguale a $1^{\underline{3}}$ + il mezzo delle $^{\underline{2}}$ cioè $30^{\underline{2}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 10, che si aggionge a $1^{\underline{2}}$ + $8^{\underline{1}}$, e li 8 nascono dal mezzo de' Cubi, fa $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 10$, che il suo quadrato e $1^{\underline{4}} + 16^{\underline{3}} + 84^{\underline{2}} + 160^{\underline{1}} + 100$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 16^{\underline{3}} + 36$ resta $84^{\underline{2}} + 160^{\underline{1}} + 64$, che aggionto a $60^{\underline{2}} + 32^{\underline{1}}$fa $144^{\underline{2}} + 192^{\underline{1}} + 64$, che il suo lato è $12^{\underline{1}} + 8$ et è eguale a $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 10$, che agguagliato, il Tanto valerà 2 + R.q.2 overo 2 $-$ R.q.2.

Capitolo di potenza potenza potenze e Tanti eguale a Cubo e numero.

Per essere il presente Capitolo molto simile al passato patisce le medesime eccettioni, et ha anco egli due positioni come il sopradetto.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 43^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}}$ a $12^{\underline{2}} + 260$. Piglisi il quarto del quadrato de' Cubi, ch'è 36, e cavisi di 43, numero delle resta 7, Im nioltiplicato via 130, metà del numero, fa 910, al quale si aggionge la metà delle $^{\underline{2}}$, ch'è $21\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ e l'ottavo del quadrato del numero delli $^{\underline{1}}$, ch'è 18, fa $21\frac{1}{2}^{\underline{2}} + 928$, che si salva; poi si moltiplica la metà de' $^{\underline{3}}$ via la metà delli $^{\underline{1}}$, fa 36, che cavato del numero, cioè di 260, resta 224 e sono $^{\underline{1}}$, che aggionti con $1^{\underline{3}}$ per regola fa $1^{\underline{3}} + 224^{\underline{1}}$ et è eguale a $21\frac{1}{2}^{\underline{2}} + 928$ serbato di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà 8, che aggionto con $1^{\underline{2}} - 6^{\underline{1}}$ (che li $-$ $6^{\underline{1}}$ sono la metà de' $^{\underline{3}}$) fa $1^{\underline{2}} - 6^{\underline{1}} + 8$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} - 12^{\underline{3}} + 52^{\underline{2}} - 96^{\underline{1}} + 64$, Iir eavatone $1^{\underline{2}} + 43^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}}$ resta $-$ $12^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} - 108^{\underline{1}} + 64$, che aggionti a $12^{\underline{3}} + 260$ fa $9^{\underline{2}} - 108^{\underline{1}} + 324$, che il suo lato è $18 + 3^{\underline{1}}$, et è eguale a $1^{\underline{2}} - 6^{\underline{1}} + 8$, che agguagliato, il Tanto valerà 5.

Capitolo di potenza potenza potenze e numero eguale a Cubi et Tanti.

II presente Capitolo e come il passato et patisce le medesime ecrttioni, però senz'altro verro al suo essempio.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 40^{\underline{2}} + 20$ a $16^{\underline{3}} + 144\ ^{\underline{1}}$. Piglisi il quadrato della metà de' $^{\underline{3}}$, ch'è 64, e se ne cavi 40, numero delle 2 resta 24, che si moltiplica via la metà del numero, fa 240, e si aggionge all'ottavo del quadrato delli fa 2832 e se li aggionge la metà delle $^{\underline{2}}$ cioè $20^{\underline{2}}$ fa $2832 + 20^{\underline{2}}$ e si salvi. Poi si moltiplica il mezzo de' $^{\underline{3}}$ via il mezzo delli $^{\underline{1}}$, fa 576, e se ne cava 20, resta 556, che sono $^{\underline{1}}$, li quali per regola si aggiongono a $1^{\underline{3}}$, fa $1^{\underline{3}} + 556^{\underline{1}}$ eguale a $2832 + 20^{\underline{2}}$ serbato di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà 6, il quale si aggionge a $1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}}$ (e li $- 8^{\underline{1}}$ nascono dalla metà de' $^{\underline{3}}$) fa $1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 6$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} - 16^{\underline{3}} - 76^{\underline{2}} - 96^{\underline{1}} + 36$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 40^{\underline{2}} + 20$, resta $36^{\underline{2}} - 96^{\underline{1}} - 16^{\underline{3}} + 16$, che aggionto a $16^{\underline{3}} + 144^{\underline{1}}$ fa $36^{\underline{2}} + 48^{\underline{1}} + 16$, che il suo lato è $6^{\underline{1}} + 4$ eguale a $1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 6$, detto di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà $7 +$ R.q.47 overo $7 -$ R.q.47, che l'una e l'altra valuta e vera.

Capitolo di potenza potenza Tanti e numero eguale a Cubi e potenze.

Questo Capitolo e simile in ogni parte delle difficultà e positioni al sopradetto (come nello essempio si vedra). Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 16^{\underline{1}} + 32$ a $8^{\underline{3}} + 60^{\underline{2}}$. Piglisi il quadrato della metà de' $^{\underline{3}}$, ch'è 16, et aggionghisi alle fa 76, e moltiplichisi via la metà del numero, fa 1216 et a questo si aggionge l'ottavo del quadrato delli 1, ch'è 32, fa 1248, e si salva; poi si moltiplichi la metà de'$^{\underline{3}}$ via la metà delli $^{\underline{1}}$, fa 32 et aggionghisi al numero, cioè a 32, fa 64 e sono $^{\underline{1}}$, che aggionti alla metà delle cioè a $30^{\underline{2}}$, fa $64^{\underline{1}} + 30^{\underline{2}}$ e questo è eguale a $1^{\underline{3}}$ + il numero serbato, cioè 1248 che agguagliato, il Tanto valerà 6 e questo si cava d'$1^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}}$ (e li$^{\underline{1}}$nascono dalla metà de' i) resta $1 - 4^{\underline{1}} - 6$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} - 8^{\underline{3}} + 4^{\underline{2}} + 48^{\underline{1}} + 36$, che cavatone $1 + 16^{\underline{1}} + 32$ restaranno $4^{\underline{2}} + 4 - 8^{\underline{3}} + 32^{\underline{1}}$, che aggionto a $8^{\underline{3}} + 60^{\underline{2}}$ fa $64^{\underline{2}} + 32^{\underline{1}} + 4$, che il suo lato è $8^{\underline{1}} + 2$, ch'è eguale a $1^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} - 6$, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.44 + 6.

Capitolo di potenza potenza cubi e potenze eguali a Tanti e numero.

Patendo i Capitoli che seguiranno il medesimo difetto et eccettioni che hanno patiti gli ultimi soprascritti, port-6 dunque, secondo l'ordine, l'essempio di ciascuno senza dir altro.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{3}} + 30^{\underline{2}}$ a $20^{\underline{1}} + 75$. Piglisi il quadrato della metà de' ch'è 36, del quale se ne cavi 30, numero delle $^{\underline{2}}$, resta 6, che moltiplicato via $37\frac{1}{2}$, metà del numero, fa 225, del quale se ne cava 50 ottavo del quadrato delli $^{\underline{1}}$, resta 175, che si salva. Poi moltiplichisi il mezzo de' cubi via il mezzo delli $^{\underline{1}}$, fa 60, che si cava di 75, cioè del numero, resta 15, che sono $^{\underline{1}}$, alli quali per regola si aggionge $1^{\underline{3}}$ fa $1^{\underline{3}} + 15^{\underline{1}}$, che aggiontoli 175 serbato di sopra fa $1^{\underline{3}} + 15^{\underline{1}} + 175$ e questo è eguale alla metà delle cioè a 15 che agguagliato, il Tanto valerà 5, il quale si aggionge a $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}}$ (e nascono dalla metà de' 3) fa $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 5$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{3}} + 46^{\underline{2}} + 60^{\underline{1}} + 25$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{3}} + 30^{\underline{2}}$, resta $16^{\underline{2}} + 60^{\underline{1}} + 25$, che gionto a $20^{\underline{1}} + 75$ fa $16^{\underline{2}} + 80^{\underline{1}} + 100$, che il suo lato è $4^{\underline{1}} + 10$, ch'è eguale a $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 5$ detto di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$6 - 1$.

Capitolo di potenza potenza e Cubi eguale a potenze Tanti e numero.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 10^{\underline{3}}$ a $19^{\underline{2}} + 92^{\underline{1}} + 44$. Piglisi il quadrato della metà de'$^{\underline{3}}$, ch'è 25, et aggionghisi a 19, numero delle $^{\underline{2}}$, fa 44 e moltiplichisi via la metà del numero, fa 968, che cavato di 1058, ottavo del quadrato delli$^{\underline{1}}$, resta 90 il quale si salva; poi si moltiplica il mezzo de'$^{\underline{3}}$ via il mezzo delli $^{\underline{1}}$, fa 230, che cavatone il numero, cioè 44, resta 186, che sono quali aggionti col 90 serbato di sopra fa $186^{\underline{1}} + 90$ e sono eguali a $1^{\underline{3}}$ + la metà delle $^{\underline{2}}$, cioè $9^{\underline{2}}$, che agguagliato, il Tanto vale 10, che aggionto a $1^{\underline{2}} + 5^{\underline{1}}$ fa $1 + 5^{\underline{1}} + 10$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} + 10^{\underline{3}} + 45^{\underline{2}} + 100^{\underline{1}} + 100$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 10^{\underline{3}}$ resta $45^{\underline{2}} + 100^{\underline{1}} + 100$, che gionto a $19^{\underline{2}} + 92^{\underline{1}} + 44$ fa $64^{\underline{2}} + 192^{\underline{1}} + 144$, che il suo lato è $8^{\underline{1}} + 12$ et è eguale a $1^{\underline{2}} + 5^{\underline{1}} + 10$, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$4\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2}$.

Capitolo di potenza potenza e potenzè eguale a Cubi Tanti e numero.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 8^{\underline{2}}$ a $6^{\underline{3}} + 72^{\underline{1}} + 48$. Piglisi il quadrato della metà delli ch'è 9, e cavisene il numero delle $^{\underline{2}}$ resta 1, qualc si moltiplichi via la metà del numero, fa 24, che cavato di 648, ottavo del quadrato delli$^{\underline{1}}$, resta 624 che aggiontoli la metà delle $^{\underline{2}}$, cioè $4^{\underline{2}}$, fa $624 + 4^{\underline{2}}$ che si salva. Poi si moltiplica la metà de' via la metà de' $^{\underline{1}}$ fa 108, al quale aggionto il numero fa 156,che sono $^{\underline{1}}$, che per regola se li aggionge $1^{\underline{3}}$, fa $1^{\underline{3}} + 156^{\underline{1}}$, che sono eguali a 624 $+ 4^{\underline{2}}$ serbato di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà 4, che aggionto a $1^{\underline{2}} - 3^{\underline{1}}$ (e li $^{\underline{1}}$ nascono dalla metà de' $^{\underline{3}}$) fa $1^{\underline{2}} - 3^{\underline{1}} + 4$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} - 6^{\underline{3}} + 17^{\underline{2}} - 24^{\underline{1}} + 16$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 8^{\underline{2}}$ resta $9^{\underline{2}} + 16 - 6^{\underline{3}} - 24^{\underline{1}}$ che gionto a $6^{\underline{3}} + 72^{\underline{1}} + 48$ fa $9^{\underline{2}} + 48^{\underline{1}} + 64$, che il suo lato è $3^{\underline{1}} + 8$, et è eguale a $1^{\underline{2}} - 3^{\underline{1}} + 4$, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.13 + 3.

Capitolo di potenza potenza e Tanti eguale a Cubi potenze e numero.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 32^{\underline{1}}$ a $8^{\underline{3}} + 16^{\underline{2}} + 12$. Aggionghisi alle $^{\underline{2}}$ il quadrato della metà de'$^{\underline{3}}$, fa 32, che moltiplicato via la metà del numero, fa 192, e cavatone 128, ottavo del quadrato delli $^{\underline{1}}$, resta 64, al quale aggionto la metà delle $^{\underline{2}}$ et $1^{\underline{3}}$ per regola fa $1^{\underline{3}} + 8^{\underline{2}} + 64$ e si salva; poi si moltiplica la metà de' $^{\underline{3}}$ via la metà delli $^{\underline{1}}$, fa 64, che cavatone il numero, cioè 12, resta 52 e sono 1, i quali sono eguali a $1^{\underline{1}} + 8^{\underline{2}} + 64$, che agguagliato, il Tanto valerà 2, che gionto a $1^{\underline{2}} + - 4^{\underline{1}}$ fa $1^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 2$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} - 8^{\underline{3}} + 20^{\underline{2}} - 16^{\underline{1}} + 4$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 32^{\underline{1}}$ resta $20^{\underline{2}} - 48^{\underline{1}} - 8^{\underline{3}} + 4$, che gionto a $8^{\underline{3}} + 16^{\underline{2}} + 12$ fa $36^{\underline{2}} - 48^{\underline{1}} + 16$, che il suo lato è $6^{\underline{1}} - 4$ overo $4 - 6^{\underline{1}}$ et è eguale a $1^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 2$, che agguagliato, il Tanto valerà 5 + R.q.23 overo 5 − R.q.23 overo R.q.3 − 1, che tutte queste valute sono vere.

Capitolo di potenza potenza e numero eguale a Cubi potenze e Tanti.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 60^{\underline{2}}$ a $12^{\underline{3}} + 128^{\underline{1}} + 12^{\underline{2}}$. Quadrisi la metà de'$^{\underline{3}}$, fa 36 et aggionghisi al numero delle $^{\underline{2}}$ fa 48, che moltiplicato via 30, metà del numero, fa 1140, che aggionto all'ottavo del quadrato delli $^{\underline{1}}$, fa 3488, che si salva. Poi si moltiplica la metà de' via la metà delli $^{\underline{1}}$, fa 384, che cavatone il numero, resta 324, che sono $^{\underline{1}}$ alli quali aggionto la metà delle $^{\underline{2}}$ et $1^{\underline{3}}$ per regola fa $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 324^{\underline{1}}$ eguale a 3488 serbato di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà 8, il quale aggionto a $1^{\underline{2}} - 6^{\underline{1}}$ (e li $6^{\underline{1}}$ sono la metà de' Cubi) fa $1^{\underline{2}} - 6^{\underline{1}} + 8$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} - 12^{\underline{3}} + 52^{\underline{2}} - 96^{\underline{1}} + 64$, che cavatone $1^{\underline{4}} + 60$ resta $- 12^{\underline{3}} + 52^{\underline{2}} - 96^{\underline{1}} + 4$, che aggionto a $12^{\underline{3}} + 128^{\underline{1}} + 12^{\underline{2}}$, fa $64^{\underline{2}} + 32^{\underline{1}}$

$+\ 4$, che il suo lato è $8^{\underline{1}} + 2$ et è eguale a $1^{\underline{2}} - 6^{\underline{2}} + 8$ detto di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà $7 +$ R.q.43 overo $7 -$ R.q.43.

Capitolo di potenza potenza eguale a Cubi potenze Tanti e numero.

Agguaglisi $1^{\underline{4}}$ a $4^{\underline{3}} + 11^{\underline{2}} + 120^{\underline{1}} + 75$. Piglisi il quadrato della metà de' $^{\underline{3}}$, ch'è 4, che aggionto con 11, numero delle $^{\underline{2}}$ fa 15, che moltiplicato via $37\frac{1}{2}$, metà del numero fa $562\frac{1}{2}$, che cavato di 1800, ottavo del quadrato delli $^{\underline{1}}$, resta $1237\frac{1}{2}$, poi si moltiplica la metà de' $^{\underline{3}}$ via la metà delli $^{\underline{1}}$, fa 120, che aggionto col numero fa 195, e questi sono $^{\underline{1}}$, che aggionti col mezzo delle $^{\underline{2}}$ e $1^{\underline{3}}$ per regola fa $1^{\underline{3}} + 5\ \frac{1}{2}^{\underline{2}} + 195^{\underline{1}}$ eguale a $1237\frac{1}{2}$ detto di sopra, che agguagliato, il Tanto valerà 5, che aggionto a $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}}$, li quali $2^{\underline{1}}$ sono la metà de' Cubi, fa $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 5$, che il suo quadrato è $1^{\underline{4}} - 4^{\underline{3}} + 14^{\underline{2}} + - 20^{\underline{1}} + 25$, che cavatone $1^{\underline{4}}$ resta $- 4^{\underline{3}} + 14^{\underline{2}} - 20^{\underline{1}} + 25$, che aggionto a $4 + 11^{\underline{2}} + 120^{\underline{1}} + 75$ fa $25 + 100^{\underline{1}} + 100$, che il suo lato è $5^{\underline{1}} + 10$ et è eguale a $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 5$, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$17\frac{1}{4} + 3\frac{1}{2}$.

Son di opinione che a molti non havero sodisfatto in questi ultimi Capitoli dove intervengono le potenze di potenze (per essere stato breve); ma questi Capitoli sono tali che chi intende bene uno di essi li intenderà tutti, et havendo voluto mettere tutti li casi che potevano intravenire, nelle loro agguagliationi, si saria fatto più tosto un volume d'un corpo di Testi civili, che un breve epilogo di Capitoli di potenze, Tanti e numero, il che fu sempre lontanissimo dalla natura mia, per essere studiosissimo della brevità. Però me ne sono passato con brevità, parendomi che sia bastato a chiarire bene li sei Capitoli primi di $^{\underline{4}}$, $^{\underline{1}}$ e numero, e $^{\underline{4}}$, $^{\underline{3}}$ e numero, e quando ho havuto 3 eguali a e numero, e numero eguali a $^{\underline{1}}$, che ho detto che agguagliato, il Tanto vale (et cetera); et perchè hanno più valute, alcuna volta ho pigliato quella che mi tornava più a proposito, non seguitando le vie ordinarie, il che in questi casi non importa. Non restare già hora di dir questo, che questi Capitoli sono un Caos, et

infiniti passi e cose vi occorrono, le quali non si possono insegnar tutte, delle quali ne dare qualche saggio; e li prudenti ne potranno trovare dell'altre, ma gli huomini rozzi e ancora mediocri non ci si affatichino che getteranno il tempo, perchè sono cose difficilissime; e questi Capitoli hanno tanti capi (come ho detto di sopra) ch'è un pelago profondo, però verre alle avertenze promesse, col che porrò fine a questo mio secondo libro.

Presuposto che si havesse da agguagliare $1^{\underline{4}} + 2^{\underline{3}}$ a $1^{\underline{1}} + 12$, se a ciascuna delle parti si aggiongerà $1^{\underline{2}}$ farà $1^{\underline{4}} + 2^{\underline{3}} + 1^{\underline{2}}$ eguale a $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}} + 12$, che $1^{\underline{4}} + 2^{\underline{3}} + 1^{\underline{2}}$ e quadrato, et il suo lato è $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$, il quale ha proportione con $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$, ch'è accompagnato con il 12, come di 1 a 1; però se $1^{\underline{2}} + 1$ accompagnato con il 12 si moltiplicherà per 1 produrrà $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$, lato d'$1^{\underline{4}} + 2^{\underline{3}} + 1^{\underline{2}}$; però $1^{\underline{2}} + 1$ accompagnato con 12 e il lato dell'altra parte, e così si potra formare nuovo quesito e dire: trovami un numero che moltiplicato per 1 ed il produtto quadrato, faccia quanto farebbe se a detto numero fosse aggionto 12 (et quel moltiplicare per 1 lo dico per rispetto delli essempij a venire). Pongo che il numero sia $1\ ^{\underline{1}}$, che aggionto con 12 fa $12 + 1^{\underline{1}}$, et a moltiplicare $1^{\underline{2}}$ via 1 fa $1^{\underline{1}}$, e poi a quadrarlo fa $1^{\underline{2}}$, e questo è eguale a $1^{\underline{1}} + 12$, che agguagliato, il Tanto vale 4 e 4 viene ad essere il lato d'$1^{\underline{4}} + 2^{\underline{3}} + 1^{\underline{2}}$, cioè $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$; però $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$ è eguale a 4, che agguagliato, il Tanto vale R.q.$4\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$; et è finita la agguagliatione d'$1^{\underline{4}} + 2^{\underline{3}}$ a $1^{\underline{2}} + 12$.

Agguaglisi $1^{\underline{4}} + 6^{\underline{3}}$ a $27^{\underline{1}} + 10$. Se si giongerà a ciascuna delle parti $9^{\underline{2}}$, si haverà $1^{\underline{4}} + 6^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}}$ eguale a $9^{\underline{2}} + 27^{\underline{2}} + 10$ et $1^{\underline{4}} + 6^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}}$ haverà lato, che sarà $1^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}}$ ch'è in proportione nonupla con $9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}}$ e ci avanza 10; però il quesito potra formarsi e dire: trovami un numero quadrato che il suo lato moltiplicato per 9 e aggiontoli 10 faccia esso numero quadrato, che posto che il numero quadrato sia $1^{\underline{2}}$, il suo lato sarà $1^{\underline{1}}$, che moltiplicato per 9 et aggiontogli 10, fa $9^{\underline{1}}$

+ 10 e questo è eguale a $1^{\underline{2}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 10 et il lato d'$1^{\underline{4}}$ + $6^{\underline{3}}$ + $9^{\underline{2}}$, cioè $1^{\underline{2}}$ + $3^{\underline{1}}$ sarà eguale a 10, che agguagliato, il Tanto valerà 2, che $1^{\underline{4}}$ sarà 16, $6^{\underline{3}}$ saranno 48, che gionti insieme fanno 64, e $27^{\underline{1}}$ + 10 sono 64 anch'essi.

Agguaglisi $1^{\underline{4}}$ + $27^{\underline{1}}$ a $6^{\underline{3}}$ + 10. Levinsi e li$^{\underline{1}}$ scambievolmente e si haverà $1^{\underline{4}}$ − $6^{\underline{1}}$ eguale a 10 − $27^{\underline{1}}$, e se a ciascuna delle parti si aggiongerà $9^{\underline{2}}$ si haverà $1^{\underline{4}}$ − $6^{\underline{3}}$ + $9^{\underline{2}}$ eguale a $9^{\underline{2}}$ − $27^{\underline{1}}$ + 10, et $1^{\underline{4}}$ − $6^{\underline{3}}$ + $9^{\underline{2}}$ha lato, ch'è $1^{\underline{2}}$ − $3^{\underline{1}}$, che con $9^{\underline{2}}$ − $27^{\underline{1}}$ha la proportione, detta nel passato, come da 1 a 9; però si formarà il quesito come di sopra, che il Tanto valerà 10 e questo è eguale al lato d'$1^{\underline{4}}$ − $6^{\underline{3}}$ + 9 ch'è $1^{\underline{2}}$ − $3^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 5, che $1^{\underline{4}}$ sarà 625 e $27^{\underline{1}}$ sono 135, che gionti insieme fanno 760, et $1^{\underline{3}}$ e 125 è li $6^{\underline{3}}$ sono 750, che aggiontoli 10 fa 760.

Vi è un'altra avertenza ancora che alcuna volta serve, ch'è il partire ciascuna delle quantità per un'altra quantità e li avenimenti saranno eguali. Come se si havesse da agguagliare $1^{\underline{4}}$ a $12^{\underline{1}}$ + 40. Se si levarà a ciascuna delle parti 16, restara $1^{\underline{4}}$ − 16 eguale a $12^{\underline{1}}$ + 24, e perchè la proportione di $12^{\underline{1}}$ a 24 e come da $1^{\underline{1}}$ a 2, e ciascuno di loro e lato del lato di $1^{\underline{4}}$ e di 16, cioè $1^{\underline{1}}$ e lato del lato d'1 e 2 e lato del lato di 16, ma avertiscasi che sempre li numeri vogliono essere l'uno al contrario dell'altro, cioè uno più e l'altro meno, cioè con $1^{\underline{4}}$ e − 16 e con li $12^{\underline{1}}$ è + 24, e se con $1^{\underline{4}}$ fosse + 16, con $12^{\underline{1}}$ vorria essere − 24; ma ritornando al principio, dico che $1^{\underline{4}}$ − 16 è eguale a $12^{\underline{1}}$ + 24, che l'una e l'altra parte si pue partire per $1^{\underline{1}}$ + 2, che ne viene $1^{\underline{3}}$ − $2^{\underline{2}}$ + $4^{\underline{1}}$ − 8 eguale a 12, che levato il meno si haverà $1^{\underline{3}}$ + $4^{\underline{1}}$ eguale a $2^{\underline{2}}$ + 20, del che si farà l'agguagliatione (come è stato insegnato).

Agguaglisi $1^{\underline{4}}$ + $6^{\underline{3}}$ a $18^{\underline{1}}$ + 4. Gionghisi 32 a ciascuna parte, si haverà $1^{\underline{4}}$ + $6^{\underline{3}}$ + 32 eguale a $18^{\underline{2}}$ + 36, che partita ciascuna parte per $1^{\underline{1}}$ + 2, ne viene $1^{\underline{3}}$ + $4^{\underline{2}}$ − $8^{\underline{1}}$ + 16 eguale a 18, che ridutto a brevità si haverà $1^{\underline{3}}$ + $4^{\underline{2}}$ eguale a $8^{\underline{1}}$ + 2, che fatta l'agguagliatione

si haverà la valuta del Tanto, col che faro fine di ragionare di queste agguagliationi e dignitadi; ma verro alle operationi di esse, le quali saranno quelle dimostrationi Matematiche (o Problemi che dir vogliamo) cotanto da scrittori commendate: che sarà l'ultima parte di questa opera, riserbandomi poi con più mio agio e commodità di dare al mondo tutti questi Problemi in dimostrationi geometriche.

II fine del secondo libro

Capitolo 6

Commento al Secondo libro

Il secondo libro dell'Algebra tratta dei polinomi e della teoria e risoluzione delle equazioni algebriche fino al quarto grado. Bombelli si occuperà del moltiplicare, del partire, del sommare e dell'agguagliare, illustrando le regole per ognuna di queste sottosezioni e soffermandosi in particolar modo sull'ultima, da lui definita *"più difficile e importante"*.
Egli affronta lo studio delle equazioni a partire da quelle di primo grado fino ad arrivare in modo sistematico e preciso alle equazioni di quarto grado; senza darne una regola generale per ogni grado. Considera esclusivamente equazioni con coefficienti positivi, il che comporta la distinzione di un numero di casi (pari alla possibilità di mutamento del segno), il quale va crescendo col crescere del grado delle equazioni considerate.
Inoltre accompagna ad ogni risoluzione algebrica la sua dimostrazione geometrica (fino dov'è possibile): *"....."*
Analizzando come queste costruzioni furono realizzate è possibile individuare una teoria algebrico-geometrica per le equazioni algebriche che giustifica fino al terzo grado anche il relativo procedimento risolutivo. Bombelli, inoltre, non ammette come risoluzioni alle sue equazioni Radici nulle e negative, che chiama false o infinite e come ci dice Bortolotti *"È possibile che quelle stesse dimostrazioni o costruzioni geometriche delle soluzioni algebriche, nella loro apparente compiutezza, abbiano distolto lo sguardo dai matematici da questo*

tipo di Radici .”

Il libro comincia con la definizione di variabile (il Tanto) e delle sue potenze. La notazione utilizzata è di tipo esponenziale. Nel manoscritto utilizza un carattere somigliante a una v; ma, nella stampa preferisce usarne piccolo semicerchio concavo all'insù, entro il quale scriveva i numeri 1, 2, 3,.... per indicare le potenze successive dell'incognita. È chiaro che la simbologia bombelliana presenta l'inconveniente di essere applcabile ad un'unica incognita; nei problemi in cui se ne hanno un numero maggiore, Bombelli è costretto a ricorrere a svariati artifici per esprimere mentalmente tutte le incognite della questione in funzione di una, che lo porteranno in ogni caso al risultato voluto.

Tanto	$\underline{1}$	x
Potenza	$\underline{2}$	x^2
Cubo	$\underline{3}$	x^3
Potenza di Potenza	$\underline{4}$	x^4
Primo relato	$\underline{5}$	x^5
Potenza Cuba, o cubo di potenza	$\underline{6}$	x^6
Secondo relato	$\underline{7}$	x^7
Potenza di potenza di potenza	$\underline{8}$	x^8
Cubo di cubo	$\underline{9}$	x^9
Potenza del primo relato	$\underline{10}$	$x^{1}0$
Terzo relato relato	$\underline{11}$	$x^{1}1$
Cubo di potenza di potenza	$\underline{12}$	$x^{1}2$

6.1 Regole del calcolo

1. **Moltiplicazione**

   - $ax^\alpha \cdot bx^\beta = (a \cdot b)x^{\alpha+\beta}$
   - $(ax^\alpha + b) + (cx^\alpha + d) = (a + c)x^\alpha + (b + d)$

- $cx^\gamma(ax^\alpha + bx^\beta) = acx^{\gamma+\alpha} + cbx^{\gamma+\beta}$

2. **Divisione**

- $ax^\alpha : bx^\beta = (a : b)x^{\alpha-\beta}$

3. **Addizione** *"Le dignità non si possono sommare (se non sono tutte di una specie) se non per via del più"*, ovvero si possono sommare solo i monomi simili.

- $ax^\alpha + bx^\beta = (a + b)x^\alpha$
- $ax^\alpha + bx^\beta$ (non possiamo fare nulla in quanto non sono simili)

4. **Sottrazione**

- $ax^\alpha - bx^\beta = (a - b)x^\alpha$
- $ax^\alpha - bx^\beta$ (non possiamo fare nulla in quanto non sono simili)

Questi ultimi due casi, dell'addizione e della sottrazione, indicano come la somma e la differenza algebrica di monomi generi nuovi elementi: i polinomi algebrici. Bombelli, naturalmente, non li chiamerà mai con questo nome, ma ne fornisce in modo rigoroso tutte le regole del calcolo.

Particolare importanza riveste la regola della divisioni tra polinomi che, come Bombelli stesso fa notare *"è un passo importantissimo per lo agguagliare di cubo, tanti e numero, come si vedrà, che assai volte non si possono agguagliare se non col più di meno, senza questa regola."*

6.2 Risoluzioni delle equazioni di secondo grado

Moltiplicazione incrociata: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad ad = bc$

1. L'equazione analizzata è la seguente:

$$ax = b$$

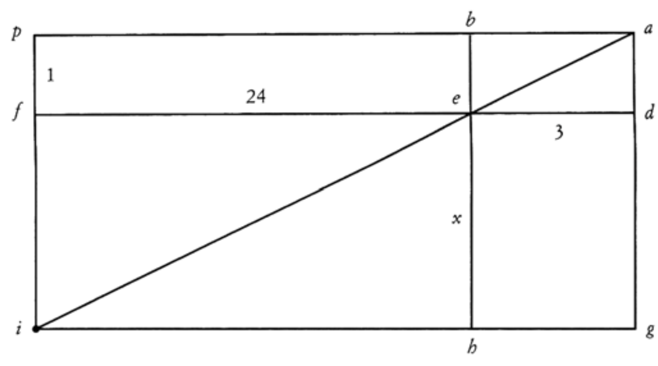
che ha come soluzione

$$x = \frac{a}{b}$$

DIMOSTRAZIONE:

(a) Bombelli tratta l'equazione $3x = 24$.

Innanzitutto costruiamo il rettangolo $pfbe$ tale che il lato fe



(uguale a pe) sia 24, mentre il lato pf (uguale a be) sia 1. In questo modo l'area del rettangolo identifica il secondo membro dell'equazione.

Ora aggiungiamo al rettangolo $pfbe$ il rettangolo $beda$ il cui lato ed (uguale a ba) misura 3. Tracciamo poi la retta ae che incontrerà il prolungamento di pf in i.

In base alla Prop. I,43 degli Elementi di Euclide possiamo dire che:

$$\text{Area}(pfbe)=\text{Area}(ehgd)$$

$$pf \cdot fe = ed \cdot eh$$

Possiamo così interpretare il segmento eh con la x, in questo modo il secondo rettangolo si identifica con il membro sinistro dell'equazione ($3x$).
Dalla figura si ottiene, per come è stata costruita, che:

$$\text{Il Triangolo}(eda) \text{ è simile al Triangolo } (efi)$$

$$fi : ad = fe : ed$$

ovvero:

$$x : 1 = 24 : 3$$

cioè

$$x = 8$$

Abbiamo quindi costruito un parallelismo aritmetico-geometrico che permette la giustificazione per via geometrica del procedimento risolutivo dell'equazione.

In termini esclusivamente geometrici alla 1a va associato il seguente problema:
Trovare l'altezza di un triangolo conoscendo:

- *L'area*
- *La base*

(b) Bombelli fornisce anche una dimostrazione "*in linea*".
Utilizza il teorema di Talete, considerando quindi la proporzione:

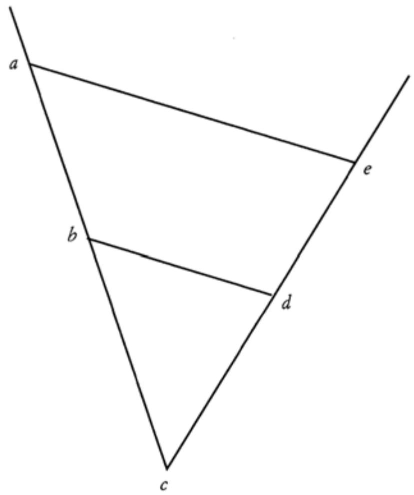
$$ab : bc = ed : dc$$

Ad esempio nel caso dell'equazione $2x = 12$, daremo le seguenti interpretazioni: $cd = 1$, $ab = 12$, $de = x$ e $bc = 2$. Risulta così:

$$12 : 2 = x : 1$$

ovvero

$$x = \frac{12}{2} = 6$$



2. L'equazione analizzata è la seguente:

$$ax^2 = b$$

che ha come soluzione

$$x = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

3. L'equazione analizzata è la seguente:

$$ax^3 = b$$

che ha come soluzione

$$x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

4. L'equazione analizzata è la seguente:

$$ax^2 = bx$$

Bombelli riconduce questa equazione ad $ax = b$. In questa maniera non viene considerata la soluzione $x = 0$, ma soltanto $x = \frac{b}{a}$

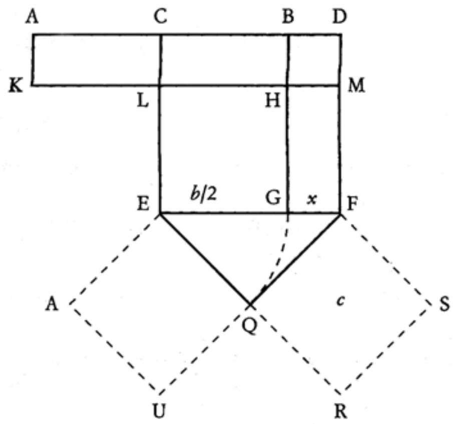
5. L'equazione analizzata è la seguente:

$$ax^2 + bx = c$$

Bombelli la risolve in due modi:

- $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$
- $x = \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac - \frac{b}{2}}}{a}$

DIMOSTRAZIONE:
Bombelli tratta l'equazione $x^2 + 6x = 16$.
Innanzitutto costruiamo il rettangolo AKCL tale che il lato KL sia 3,



mentre il lato KA sia X.
Ora aggiungiamo al rettangolo AKCL il rettango LCBH e HBDM tali che CB=LH=KL=AC=3 e HM=BD=MD=Bh=x. In questo modo l'area del rettangolo AKDM identifica il primo membro dell'equazione (AKCL + CLHB + HBDM = $3x + 3x + x^2$.
Costruiamo ora un ELHG (sul lato LH), e un quadrato ECDF (sul lato CD). Applicando ora la Prop. II, 6 degli Elementi di Euclide possiamo affermare che: AKMD + LEGH = CEFD. Ovvero AKMD = CEFD - LEGH. Così il primo membro dell'equazione lo possiamo interpretare con lo Gnomone DCLHGF.
Ora costruiamo un triangolo rettangolo sul lato EF tale che il quadrato del cateto EQ sia uguale al quadrato LEGH (AEQU = LEHG). Per il teorema di Pitagora otteniamo che:

FQRS + AEQU = ECDF
FQRS = ECDF - AEQU
FQRS = ECDF - LEHG = DCLHGF
ovvero:
Gnomone(DCLHGF) = Quadrato(FQRS)

Il Quadrato FQRS rappresenta proprio il secondo membro, quindi abbiamo costruito un modello geometrico dell'uguaglianza che sta alla base dell'equazione di partenza.
È possibile poi interpretare geometricamente la procedura che conduce alla formula risolutiva dell'equazione di secondo grado $x^3 + bx = c$.
Sia HM=x, KH=b ($\Rightarrow$ LH=KL=$\frac{b}{2}$), allora per quanto detto prima risulta essere:

- Gnomone(DCLHGF) = Quadrato(FQRS)
  $x^2 + bx = c$
- Gnomone(DCLHGF) + Quadrato (LEGH)= Quadrato(FQRS) + Quadrato(ETUQ)
  $x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = c + \frac{b^2}{4}$
- Posto Quadrato(CEFD) = Quadrato(VZYW)
  $(x + \frac{b}{2})^2 = t^2$
- Quadrato(VZYW) = Quadrato(LEGH) + Quadrato(FQRS)
  $t^2 = (\frac{b}{2})^2 + c$
- Passando dai Qudrati ai rispettivi lati otteniamo:
  EZ = VZ = GF + GE $x + \frac{b}{2} = t$
- GF = EZ - GE
  $x = t - \frac{b}{2}$
- VZ è il lato del Quadrato(VZYW) ed è uguale alla somma dei quadrati (LEGH) e (FQRS)
  $t = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$

$$x = -\sqrt{b}2 + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

In termini esclusivamente geometrici alla 1a va associato il seguente problema:
Trovare il lato del Quadrato(BHMD) conoscendo:

- *Lato del rettangolo (LH=CB)*
- *Lo Gnomone (DCLHGF)*

6. L'equazione analizzata è la seguente:

$$ax^2 = bx + c$$

Le soluzioni sono analoghe a quelle del caso precedente con una differenza nel segno.

- $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$
- $x = \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac + \frac{b}{2}}}{a}$

Bombelli in questo capitolo ci da un esempio di come sia possibile passare da questa equazione di secondo grado a una equazione lineare, mediante il completamento del quadrato, ovvero aggiungendo o togliendo da un trinomio di secondo grado una quantità opportuna in modo da trasformarlo in un quadrato perfetto.
Vediamo ora l'esempio riportato da Bombelli:

$$x^2 = 12x + 11$$

$x^2 - 12x = 11$ prendiamo la metà del coefficiente dell'incognita x (che è -6) e aggiungiamo ad entrambi i membri il suo quadrato.

$$x^2 - 12x + 36 = 11 + 36 \quad \Rightarrow \quad (x-6)^2 = 47 \quad \Rightarrow \quad x - 6 = \sqrt{47}$$

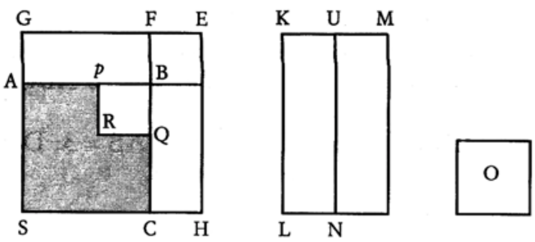
$$\Downarrow$$

$$x = 6 + 47$$

DIMOSTRAZIONE:

(a) Bombelli tratta l'equazione $x^2 = 8x + 9$.

Innanzitutto si costruisca il rettangolo LKM e lo si divida in due



rettangoli congruenti LKU e NUM. Si consideri poi il quadrato SGE e su di esso si considerino due rettangoli AGE e CFE tra di loro congruenti ed uguali al rettangolo LKU (=NUM).
Poniamo poi la seguente uguaglianza: Gnomone(SAPRQC) = Superficie(O).
Per come è stata costruita la figura otteniamo che:

- Superficie(APRQCHEG) = Rettangolo(LKM)
- Quadrato(SGE) - Superficie(APRQCHEG) = Gnomone(SAPRQC)
- Quadrato(RPB) + Gnomone(SAPRQC) = Quadrato(SAB)

Sia SG = LK = x, KU = UM = FE = 4, e la superficie O sia uguale a 9. In questo modo la seconda relazione [Quadrato(SGE) - Superficie(APRQCHEG) = Gnomone(SAPRQC)] permette l'interpretazione geometrica della equazione, in quanto: Quadrato(SGE)= x^2, Superficie(APRQCHEG) = Rettangolo(LKM) = $8x$ e Gnomone(SAPRQC) = Superficie(O) = 9; così otteniamo $x^2 = 8x + 9$.

In termini esclusivamente geometrici alla 1a va associato il seguente problema:
Trovare il lato del Quadrato(SGE) conoscendo:

- *Lato del Quadrato(BFE)*
- *Lo Gnomone(SAPRQC)*

(b) Bombelli fornisce anche una dimostrazione "*in linea*".
Viene trattata l'equazione $x^2 = 6x + 16$.
Innanzitutto costruiamo il quadrato ABC di lato, e poi un rettangolo FED e lo si divida in due rettangoli congruenti (FG=GE).
Si costruisca poi un quadrato HIL tale che Quadrato(ABC) = Rettangolo(FED) + Quadrato(HIL).
Se ora interpretiamo: AB = x, FE = 6, HI = 4, è facile osservare che Quadrato(ABC) = Rettangolo(FED) + Quadrato(HIL) ci da il modello geometrico dell'equazione $x^2 = 6x + 16$.
Ora prolunghiamo il segmento PL di un segmento LM pari a FG, congiungiamo I con M e per finire prolunghiamo il segmento LM di un segmento MN pari a LM. Bombelli dice che il segmento LN rappresenta la x, infatti LN = LM + MN = LM + $\sqrt{LM^2 + IL^2}$ $= 3 + \sqrt{9+16} = 8$

7. L'equazione analizzata è la seguente:

$$ax^2 + c = bx$$

In particolar modo Bombelli analizza il caso in cui $a = 1$, ovvero equazioni del tipo $x^2 + c = bx$.

Le soluzioni sono date dalla formula

$$x = \frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

In questo caso si presenta la possibilità che il termine sotto la radice (discriminante) sia positivo o negativo:

- $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c > 0 \quad \Rightarrow$ le radici che si ottengono sono entrambe positive
- $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c < 0 \quad \Rightarrow x = \frac{b}{2} \mp i\sqrt{-\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c\right]}$

Vediamo ora l'esempio riportato da Bombelli:

$$x^2 + 20 = 8x$$

che presenta il discriminante negativo, in quanto $16 - 20 = -4$ allora le soluzioni saranno:

$$x_1 = 4 + 2i$$

$$x_2 = 4 - 2i$$

Bombelli in questo caso fornisce una regola errata, infatti scrive: "*Vi è parimente un altro modo sofistico, che non si potendo cavàre il 20 del 16 si sommino, fa 36, il suò lato è 6 e questo si aggionge alla metà delli Tanti, fa 10 e questo 10 è meno ed è valuta del Tanto.*".

S'intuisce subito che questa regola non funziona, in quanto invece di $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$ si fa $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$, che non coincide con l'equazione di partenza ma con una differente. Inoltre abbiamo già trovato le due radici complesse coniugate $4 + 2i$ e $4 - 2i$, ma per il teorema fondamentale dell'algebra sappiamo che l'equazione $x^2 + 20 = 8x$ essendo di grado 2 ha due radici, è quindi assurdo trovare una nuova radice.

Trasmutatione dei sopraddetti capitoli: Si tratta di passare dall'equazione $ax^2 + bx = c$ all'equazione $ax^2 = bx + c$. Effettuando questa trasformazione i segni delle radici verranno invertiti poiché la loro somma data dal termine $-\frac{b}{a}$ rimarrà invariata, mentre quello che cambia sarà il loro prodotto, dato dal termine $\frac{c}{a}$. Basta allora dividere il modulo del prodotto per la radice trovata per ottenere la radice dell'equazione trasformata.

6.3 Equazioni biquadratiche

In questa sezione Bombelli tratta delle equazioni biquadratiche, che sono facilmente riconducibili a quelle di secondo grado. Egli sottolinea come l'esponente dell'incognita maggiore debba essere il doppio di quella minore; successivamente analizza le equazioni che contengono esponenti pari (x^2 e x^4) e quelle con multipli di 3 (x^6 e x^3) di cui tratta tutti i casi possibili:

- $ax^4 + bx^2 = c$
- $ax^4 = bx^+c$
- $ax^3 + c = b^2$
- $ax^6 + bx^3 = c$
- $ax^6 = bx^3 + c$
- $ax^6 + c = bx^3$

Bombelli risolve tutti questi casi utilizzando la regola del completamento quadratico.
Analizziamo un esempio trattato:

$$2x^4 + 12x^2 = 40$$

dividiamo entrambi i membri per 2, così otteniamo:

$$x^4 + 16x^2 = 20$$

rendiamo il primo membro un quadrato perfetto aggiungendo il termine 9

$$x^4 + 16x^2 = 20 + 9 \quad \Rightarrow \quad (x^2 + 3)^2 = 29 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 3 = \sqrt{29}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = \sqrt{29} - 3 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\sqrt{29} - 3}$$

6.4 Equazioni Cubiche

6.4.1 Risoluzione

1. L'equazione analizzata è la seguente

$$x^3 + px = q$$

Per risolverla, dobbiamo trovare due numeri (u e v) tali che

$$x = u - v$$

elevando al cubo entrambi i membri otteniamo:

$$x^3 = u^3 - v^3 - 3u^2v + 3uv^2 \quad \Rightarrow \quad x^3 + 3uv(u - v) = u^3 - v^3 \quad \Rightarrow \quad x^3 + 3uvx = u^3 - v^3$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} u^3 - v^3 = q \\ u \cdot v = \frac{p}{3} \end{cases}$$

La risolvente quadratica è (considerando v negativa): $z^2 - qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$ che avrà come radici:

$$u^3 = \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2} \qquad -v^3 = \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$u = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} \qquad -v = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}$$

In questo modo la soluzione dell'equazione di partenza sarà:

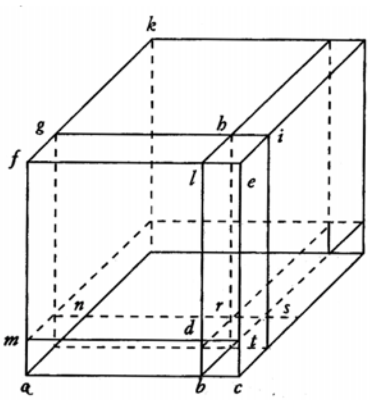
$$x = u - v$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}$$

DIMOSTRAZIONE:

- Viene trattata l'equazione $x^3 + 6x = 20$.

  Si consideri il cubo akc e lo si sezioni in tre parti, git, hlb, mtq;

  in modo che $hg = fm = gh =$. Si verranno così a creare otto pezzi (2 cubi e 6 parallelelpipedi).

  Possiamo quindi dire che:

  Il solido composto dal Cubo(nrghk)
  più i tre parallelepipedi a incastro del tipo (mtsnfgei)
  è uguale al solido che risulta dalla differenza tra il cubo più
  grande (di estremi c e k) e il cubo più piccolo (rdtsbc).

Possiamo ora interpretare $ab = x$, $bc = 2$ e il cubo (dcrt)=20, in questo modo otteniamo la nostra equazione di partenza $x^3 + 3(2x) = 20$.
È possibile poi interpretare geometricamente la procedura che conduce alla formula risolutiva dell'equazione di terzo grado $x^3+px = q$; per quanto detto prima risulta essere: Cubo(rk) + 3 Parallelepipedo(mi) = Cubo(ck) - Cubo(bs) = Gnomonide

$$(ab)^3 + 3ac \cdot bc \cdot ab = (ac)^3 - (bc)^3$$

Sia $ac = u$ e $bc = v$, allora

$$x^3 + 3u \cdot v \cdot x = u^3 - v^3$$

Deve essere che:

- $u \cdot v = \frac{p}{3}$
- $u^3 - v^2 = q$

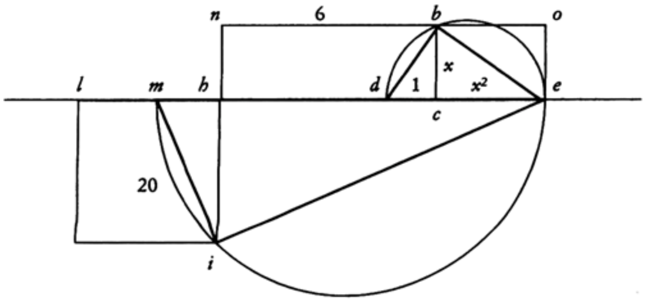
Il problema consiste quindi di trovare u e v che soddisfino le condizioni sopra scritte, in questo modo $ab = x = ac - ab = u - v$

In termini esclusivamente geometrici alla 1a va associato il seguente problema:
Trovare il lato del Cubo(rk):

- *Il Rettangolo(ms)*
- *Lo Gnomonide [Cubo(ck) - Cubo(bs)]*

- Bombelli fornisce anche una dimostrazione "*in superficie piana*" Viene trattata l'equazione $x^3 + 6x = 20$.

  Nella figura presa in considerazione si ha che $hm = bc = nh$. Applicando poi il secondo teorema di Euclide al triangolo rettangolo *mie* (in quanto insiste sulla semicirconferenza di diametro *me*) si ha che $hi^2 = mh \cdot he = nh \cdot he$, ma $nh \cdot he$ è l'area del Rettangolo(*hnoe*) e quest'ultimo è uguale alla somma dei rettangoli *cbnh* e *cboe*.



Possiamo ora interpretare $bc = x$, $cd = 1$, $hc = 6$ e il quadrato $lhi = 20$.
In questo modo la seconda relazione hi^2 = Rettangolo($hnbc$) + Rettangolo($cboe$) permette l'interpretazione geometrica della equazione, in quanto: $hi^2 = 20$, Rettangolo($hnbc$) $= 6x$ e Rettangolo($cboe$) $= x^3$; così otteniamo $x^3 + 6x = 20$.

2. L'equazione analizzata è la seguente

$$x^3 = px + q$$

Per risolverla, dobbiamo trovare due numeri (u e v) tali che

$$x = u + v$$

elevando al cubo entrambi i membri otteniamo:

$$x^3 = u^3 - v^3 + 3u^2v + 3uv^2 \;\Rightarrow\; x^3 = 3uv(u+v) + u^3 + v^3 \;\Rightarrow\; x^3 = 3uvx + u^3 + v^3$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ u \cdot v = \frac{p}{3} \end{cases}$$

La risolvente quadratica è: $z^2 - qz + (\frac{p}{3})^3 = 0$ che avrà come radici:

$$\Downarrow$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$\Downarrow$$

il quale discriminante può essere o positivo o negativo

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 \gtrless 0$$

Si presentano così tre casi:

(a) $\Delta > 0 \quad \rightarrow \quad$ una radice reale, $x = u + v$.
Analizziamo un esempio trattato:

$$x^3 = 9x + 28$$

$$\Downarrow$$

$$x = \sqrt[3]{14 + \sqrt{196 - 27}} + \sqrt[3]{14 - \sqrt{196 - 27}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{14 + 13} + \sqrt[3]{14 - 13}$$

$$\Downarrow$$

$$x = 3 + 1 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

(b) $\Delta = 0 \quad \rightarrow \quad$ tre radici reali di cui due coincidenti, $x_1 = u$, $x_2 = x_3 = -u$.11 Bombelli, negli esempi che illustra considera soltanto la soluzione $x = 2u$
Analizziamo un esempio trattato:

$$x^3 = 3x + 2$$

$$\Downarrow$$

$$x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - 1}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - 1}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1}$$

$$\Downarrow$$

$$x = 1 + 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

(c) $\Delta < 0 \quad \rightarrow \quad$ è il caso irriducibile, Bombelli lo affronta in due maniere differenti:

- Nel primo egli fa ricorso ad un artefizio già utilizzato da Cardano, che pure s'era imbattuto nel caso irriducile, e aveva notato che alcune equazioni di terzo grado si possono ridurre ad equazioni di secondo grado aggiungendo ad ogni membro un termine a^3, tale che entrambi i membri risultino essere divisibili per $x + a$ o per $x - a$; cioè un numero a tale che $a = \frac{a^3+q}{p}$.

  Analizziamo un esempio trattato:

  $$x^3 = 12x + 9$$

  in questo caso il discriminante (Δ) risulta essere negativo

  $$\Downarrow$$

  aggiungiamo ad entrambi i membri $a^3 = 27$

  $$x^3 + 27 = 12x + 36 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3 + 27}{x - 3} = \frac{12x + 36}{x + 3}$$

  verrà

  $$x^2 - 3x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$$

  Quando Bombelli spiega il caso dell'equazione $x^3 + q = px$ mostra come il numero a da trovare per applicare la formula di Cardano non è altro che la radice dell'equazione *trasformata a radici contrarie*, ovvero $x^3 = px + q$. Ciò significa che se un equazione è divisibile per $x - a$, a è una radice dell'equazione stessa, dunque $-a$ sarà radice della *trasformata a radici contrarie* della primitiva equazione: così Bombelli intravede uno dei più importanti teoremi della teoria delle equazioni.

  Analizziamo un esempio trattato:

  $$x^3 + 2 = 3x$$

il numero che permette di effettuare la riduzione di Cardano è la radice della *trasformata a radici contrarie*

$$x^3 = 3x + 2$$

che ha come soluzione $x = 2$ (quindi la radice della nostra equazione sarà -2 e sarà divisibile per $x + 2$).
Ora procediamo con la regola di Cardano:
aggiungiamo ad entrambi i membri il cubo di 2

$$x^3 + 8 = 3x - 2 + 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \frac{3x + 6}{x + 2}$$

si otterrà quindi l'equazione di secondo grado

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

che da x=1 radice doppia.
NOTA: In realtà noi sappiamo che l'equazione proposta ha tre radici reali, una è -2 *(che Bombelli non considera in quanto è negativa) e due radici coincidenti che sono* 1.

- Con il secondo metodo Bombelli ha dato un essenziale contributo alla teoria delle equazioni facendo vedere come la formula risolutiva di Scipione Dal Ferro fornisca radici reali nonostante siano implicati i numeri immaginari (*i più e meno*). Infatti i tre valori di u e di v (forniti dalla risolvente quadratica) sono rispettivamente complessi coniugati e dunque le tre radici x_1, x_2 e x_3 dell'equazione di partenza sono reali, in quanto somma di numeri complessi conigati.
  Analizziamo un esempio trattato:

$$x^3 = 15x + 4$$

$$\Downarrow$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}} \;\; \Rightarrow \;\; \sqrt[3]{2 + i11} + \sqrt[3]{2 - i11}$$

$$\Downarrow$$

$$x = (2 + i) + (2 - i) \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

6.4.2 Trasformazione lineari

- **Radici reciproche**:

  - Si passa dall'equazione $x^3+px-q=0$ all'equazione $y^3-py^2-q^2=0$

  - Si passa dall'equazione $x^3-px^2-q=0$ all'equazione $y^3+py^2-q^2=0$

  - Si passa dall'equazione $x^3-px+q=0$ all'equazione $y^3-py^2+q^2=0$

  ponendo $x=\frac{q}{y}$. Si può facilmente passare da una soluzione all'altra tenendo presente che $xy=q$

- **Radici contrarie** Se si passa dall'equazione $x^3+px+q=0$ all'equazione $x^3-px+q=0$
  le radici risultano essere una l'opposto dell'altra.

- **Radici aumentate** Si passa dall'equazione $x^3=px+q$ all'equazione $y^3=\frac{p^2}{3}y+(2\frac{p^3}{27}+q)$
  ponendo $x=y-\frac{p}{3}$

Queste trasformazioni saranno fondamentali per trasformare le equazioni di terzo grado complete $x^3+bx^2+cx+d=0$ a quelle già studiate nel paragrafo precedente.

- $x^3=px^2+q$
  Si possono effettuare tre trasformazioni:

  - Si pone $x=\frac{\sqrt{q}}{y}$, in questo modo l'equazione diventa $y^3+py=\sqrt{q}$

- Si pone $x = y - \frac{\sqrt{p}}{3}$ (radici aumentate), in questo modo l'equazione diventa $y^3 = \frac{p^2}{3}y + (\frac{2p^3}{27} + q)$
- Si pone $x = \frac{q}{y}$ (radici reciproche), in questo modo l'equazione diventa $y^3 + pqy - q^2 = 0$

- $x^3 + px^2 = q$:
  Si pone $x = y - \frac{\sqrt{p}}{3}$ (radici aumentate), in questo modo l'equazione diventa $y^3 - \frac{p^2}{3}y + (q - \frac{2p^3}{27}) = 0$

- $x^3 + q = px^2$
  Si possono effettuare due trasformazioni:
  - Si pone $x = \frac{\sqrt{q}}{y}$, in questo modo l'equazione diventa $y^3 - pqy + q^2 = 0$
  - Si pone $x = y - \frac{\sqrt{p}}{3}$ (radici aumentate), in questo modo l'equazione diventa $y^3 - \frac{p^2}{3}y + (q - \frac{2p^3}{27}) = 0$

- $x^3 + px^2 + qx = r$
  Si possono effettuare due trasformazioni:
  - Si pone $x = y - \frac{\sqrt{p}}{3}$ (radici aumentate), in questo modo l'equazione diventa
    $y^3 + (q - \frac{p^2}{3})y + (\frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} - r) = 0$
  - Si pone $x = \frac{r}{y}$, in questo modo l'equazione diventa $x^2 + px^2 + qx = r$

- $x^3 + px^2 + qx = r$
  Si pone $x = y - \frac{\sqrt{p}}{3}$ (radici aumentate), in questo modo l'equazione diventa
  $y^3 + (q - \frac{p^2}{3})y + (\frac{pq}{3} - \frac{2p^3}{27} - r) = 0$

- $x^3 + r = px^2 + qx$
  Si pone $x = y - \frac{\sqrt{p}}{3}$ (radici aumentate), in questo modo l'equazione diventa
  $y^3 - (q + \frac{p^2}{3})y - (\frac{pq}{3} + \frac{2p^3}{27} - r) = 0$

- $x^3 = px^2 + qx + r$
  Si pone $x = y - \frac{\sqrt{p}}{3}$ (radici aumentate), in questo modo l'equazione diventa
  $y^3 - (q + \frac{p^2}{3})y - (\frac{pq}{3} + \frac{2p^3}{27} + r) = 0$

- $x^3 + qx + r = px^2$
  Si pone $x = y - \frac{\sqrt{p}}{3}$ (radici aumentate), in questo modo l'equazione diventa
  $y^3 + (q - \frac{p^2}{3})y + (\frac{pq}{3} - \frac{2p^3}{27} + r) = 0$

- $x^3 + px^2 + r = qx$
  Si pone $x = y - \frac{\sqrt{p}}{3}$ (radici aumentate), in questo modo l'equazione diventa
  $y^3 - (q + \frac{p^2}{3})y + (\frac{pq}{3} + \frac{2p^3}{27} + r) = 0$

  NOTA: Tra tutti i casi presi in esame Bombelli non analizza il caso $ax^3 + bx^2 + cx + d$ (con coefficienti tutti positivi o nulli); questo perché l'equazione non ammette radici reali positive.

6.5 Equazioni di quarto grado

Ricordiamo che fu ad opera di Ferrari la risoluzione delle equazioni cubiche, ma a Bombelli bisogna attribuire il merito di averne svolto per primo una trattazione completa ed esauriente. Questa è la ragione per cui alcuni storici parlano di Bombelli come colui che ha formulato la risoluzione generale delle equazioni di quarto grado.

1. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente
   $$x^4 + ax = b$$
   Si procede per prima cosa a rendere quadrati entrambi i membri per poi estrarre la radice:
   $$x^4 + 2x^2y + y^2 = b + y^2 - ax + 2yx^2$$

ovvero

$$(x^2 + y)^2 = b + y^2 - ax + 2yx^2$$

in questo modo si tratta di determinare y tale che $b + y^2 - ax + 2yx^2$ sia un quadrato. Siano $b + y^2$ e $2yx^2$ i termini al quadrato e $-ax$ il doppio prodotto; allora otteniamo

$$(b + y^2)2yx^2 = a^2x^2 \quad \Rightarrow \quad (b + y^2)2y = \frac{a^2}{4}$$

ovvero dobbiamo risolvere la seguente equazione ausiliaria

$$y^3 + by = \frac{a^2}{8}$$

In questo modo si potrà ridurre l'equazione iniziale al secondo grado, infatti il secondo membro dell'equazione $(x^2 + y)^2 = b + y^2 - ax + 2yx^2$ è un quadrato e possiamo scrivere l'equazione in questo modo

$$(x^2 + y)^2 = (\frac{a}{\sqrt{8y}} - \sqrt{2yx^2})^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y = \frac{a}{\sqrt{8y}} - \sqrt{2yx^2}$$

$$x^2 - x\sqrt{2y} = \frac{a}{8y} - y$$

ma $\frac{a}{8y} = \sqrt{y^2 + b}$, allora otteniamo la seguente formula:

$$x^2 - x\sqrt{2y} = \sqrt{y^2 + b} - y$$

2. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 = ax + b$$

Come nel caso precedente si procede rendendo quadrati i due membri, e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$x^2 - x\sqrt{2y} = \sqrt{y^2 + b} - y$$

3. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + b = ax$$

Come nei casi precedente si procede rendendo quadrati i due membri, e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 = by + \frac{a^2}{8}$$

In questo caso si può presentare il discriminante negativo $\Delta < 0$ $\left[(\frac{a^2}{16})^2 < (\frac{b}{3})^3\right]$, ovvero si va incontro al caso irriducibile. Dopo aver trovato determinato y, lo si va a sostituire nell'equazione:

$$x^2 - x\sqrt{2y} = \sqrt{y^2 - b} - y$$

4. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + ax^2 = b$$

Come nei casi precedente si procede rendendo quadrati i due membri, e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + b = \frac{a^2 b}{8}$$

5. L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 = ax^2 + b$$

Viene risolta in tre modi differenti:

(a) *[trasformazione a radici reciproche]*, $x = \frac{\sqrt{b}}{y} \quad \Rightarrow \quad y^4 + ay = \sqrt{b}$

(b) *[trasformazione a radici reciproche]*, $x = \frac{b}{y} \quad \Rightarrow \quad y^4 + ab^2 y = b^2$

(c) *[completamento quadratico]* si ottiene l'equazione ausiliaria $y^3 + by = \frac{a^2 b}{8}$

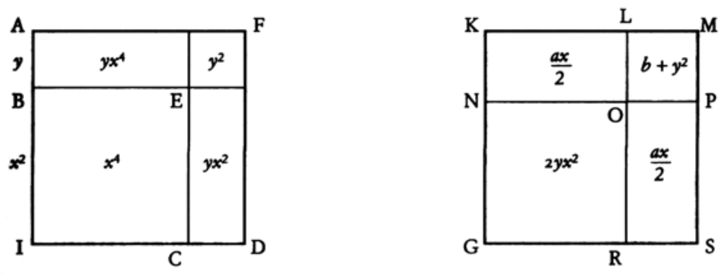
DIMOSTRAZIONE:

In questo libro Bombelli non fornisce come negli altri casi una costruzione geometrica per la risoluzione delle equazioni di quarto grado. Questa però è presente nel quarto libro, dove propone una dimostrazione che

giustifica geometricamente l'uguaglianza che è alla base delll'equazione di quarto grado $x^4 = ax + b$. In realtà, a differenza delle equazioni di primo, secondo e terzo grado non c'è un'interpretazione passo per passo geometrica della procedura risolutiva dell'equazione.
Innanzittutto rendiamo il primo membro un quadrato perfetto:

$$x^4 + 2yx^2 + y^2 = ax + b + 2yx^2 + y^2$$

Interpretiamo così il primo membro con il primo quadrato e il secondo



con il secondo quadrato. Entrambi sono quadrati uguali ma suddivisi diversamente.
Osserviamo che:
Rettangolo(OS) = OP · OR

$$\frac{ax}{2} = \sqrt{2yx^2} \cdot \sqrt{b + y^2}$$

$$\frac{a^2x^2}{4} = 2byx^2 + 2y^3x^2$$

$$\Downarrow$$

$$2y^3 + 2yb = \frac{a^2}{4}$$

che è l'equazione ausiliaria.
Per come è stata costruita la figura GS=ID, che secondo l'interpretazione dà l'equazione

$$x^2 + y = x\sqrt{2y} + \sqrt{b + y^2}$$

che ci fornisce le radice dell'equazione $x^4 = ax + b$

6. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente
$$x^4 + b = ax^2$$
Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri, e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:
$$y^3 = by + \frac{a^2b}{8}$$

7. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente
$$x^4 = ax^2 + bx + c$$
In questo caso l'equazione ausiliaria si distingue in due casi:
   - $\triangle > 0$ ovvero $\frac{b^2-4ac}{8} > 0 \Rightarrow$ si ottiene la seguente equazione ausiliaria
   $$y^3 + \frac{a}{2}y^2 + cy = \frac{b^2 - 4ac}{8}$$
   - $\triangle < 0$ ovvero $\frac{b^2-4ac}{8} < 0 \Rightarrow$ si ottiene la seguente equazione ausiliaria
   $$y^3 + cy = \frac{a}{2}y^2 + \frac{ac - \frac{b^2}{4}}{8}$$

8. L'equazione analizzata è la seguente
$$x^4 + bx = ax^2 + c$$
risolve l'equazione con due procedimenti differenti:
   (a) Sottraiamo ad entrambi i membri bx, allora l'equazione diventa $x^2 = ax - bx + ck$. Per applicare questo procedimento il membro di destra deve essere un quadrato perfetto.
   Si presentano qui due casi:
   - $\triangle > 0$ ovvero $\frac{a}{4} < \sqrt{c}$, in tal caso prendiamo come radice del secondo membro $\sqrt{c} - \sqrt{a}x$, quindi l'equazione da risolvere è la seguente
   $$x^2 = \sqrt{c} - \sqrt{a}x$$

Bombelli trova qui una sola radice positiva.

- $\triangle < 0$ ovvero $\frac{a}{4} > \sqrt{c}$, in tal caso prendiamo come radice del secondo membro sia $\sqrt{c} - \sqrt{a}x$ che $\sqrt{a}x - \sqrt{c}$, quindi l'equazione da risolvere sono le seguenti:

$$x^2 = \sqrt{c} - \sqrt{a}x$$

$$x^2 = \sqrt{a}x - \sqrt{c}$$

Bombelli trova qui tre radici positive.

(b) *[Regola del completamento quadratico]* In questo caso l'equazione ausiliaria si distingue in due casi:

- $\triangle > 0$ ovvero $\frac{b^2-4ac}{8} > 0 \Rightarrow$ si ottiene la seguente equazione ausiliaria

$$y^3 + \frac{a}{2}y^2 + cy = \frac{b^2 - 4ac}{8}$$

- $\triangle < 0$ ovvero $\frac{b^2-4ac}{8} < 0 \Rightarrow$ si ottiene la seguente equazione ausiliaria

$$y^3 + cy = \frac{a}{2}y^2 + \frac{ac - \frac{b^2}{4}}{8}$$

9. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + c = ax^2 + bx$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri, e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + \frac{a}{2}y^2 = cy + \frac{b^2 - 4ac}{8}$$

10. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + ax^2 = bx + c$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri, e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + cy = \frac{a}{2}y^2 + \frac{b^2 - 4ac}{8}$$

11. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + ax^3 + bx = c$$

Si cerca di rendere quadrato il primo membro nella forme $(x^2 + \frac{a}{2}x + y)^2 = x^4 + ax^3 + \frac{a^2}{4}x^2 + 2x^2y + axy + y^2$, così dobbiamo aggiungere al primo e secondo membro $\frac{a^2}{4}x^2 + 2x^2y + ayx + y^2$, in questo modo otterremo l'equazione

$$(x^2 + \frac{a}{2}x + y)^2 = \frac{a^2}{4}x^2 + 2x^2y + ayx - bx + y^2 + c$$

dobbiamo fare in modo che anche il secondo membro sia un quadrato, quindi deve valere

$$\left(\frac{a^2}{4} + 2y\right)\left(y^2 + c\right) = \left(\frac{ay - b}{2}\right)^2$$

da cui si giunge all'equazione ausiliaria:

$$y^2 + y\left(c + \frac{ab}{4}\right) = \frac{b^2 - a^2c}{8}$$

che ha sempre il $\triangle > 0$.

12. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + ax^2 + bx = c$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri, e si ottiene la stessa equazione ausiliaria della numero 9, poiché il termine che cambia di segno è b che compare però al secondo grado:.

$$y^3 + cy = \frac{a}{2}y^2 + \frac{b^2 - 4ac}{8}$$

13. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + bx + c = ax^2$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri, e si ottiene la stessa equazione ausiliaria della numero 8:

$$y^3 + \frac{a}{2}y^2 = cy + \frac{b^2 - 4ac}{8}$$

14. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + ax^2 + c = bx$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri, e si ottiene la stessa equazione ausiliaria della numero 8:

$$y^3 + \frac{a}{2}y^2 = cy + \frac{b^2 - 4ac}{8}$$

15. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + ax^3 + c = bx$$

Si procede come nell'equazione della numero 10, con la differenza che si prende la y negativa, ovvero

$$(x^2 + \frac{a}{2}x - y)^2 = \frac{a^2}{4}x^2 - 2x^2y - ayx - bx + y^2 - c$$

e si ottiene così la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + \frac{b^2 + a^2c}{8} = y\left(c + \frac{ab}{4}\right)$$

che può presentare il caso irriducibile $\triangle < 0$.

16. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + bx + c = ax^3$$

otteniamo la stessa equazione ausiliaria del caso precedente:

$$y^3 + \frac{b^2 + a^2c}{8} = y\left(c + \frac{ab}{4}\right)$$

che può presentare il caso irriducibile $\triangle < 0$.

17. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 = ax^3 + bx + c$$

otteniamo la stessa equazione ausiliaria del caso 11:

$$y^2 + y\left(c + \frac{ab}{4}\right) = \frac{b^2 - a^2c}{8}$$

che può presentare il caso irriducibile $\triangle < 0$.

18. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + ax^2 = bx + c$$

Bombelli la risolve in due modi differenti:

- posto y positiva come ne caso 15. Si ottiene così la seguente equazione ausiliaria

$$y^3 + \frac{b^2 - a^2c}{8} = \left(\frac{ab}{4} - c\right)y$$

- posto y negativa come ne caso 11. $\frac{b^2-4ac}{8} < 0$. Si ottiene così la seguente equazione ausiliaria

$$y^3 = \left(\frac{ab}{4} - c\right)y + \frac{b^2 - a^2c}{8}$$

19. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + bx = ax^3 + c$$

si ottiene la stessa equazione ausiliaria del caso precedente:

$$y^3 = \left(\frac{ab}{4} - c\right)y + \frac{b^2 - a^2c}{8}$$

20. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + c = ax^3 + bx = ax^3 + bx$$

Si procede come nell'equazione della numero 11, e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + \left(\frac{ab}{4} - c\right)y = \frac{b^2 - a^2c}{8}$$

che presenta il caso irriducibile nel caso in cui si verificano contemporaneamente le seguenti condizioni: $\begin{cases} \frac{ab}{4} < c \\ \left(\frac{b^2+a^2c}{16}\right)^2 < \left(\frac{ab}{4} - c\right)^3 \end{cases}$

21. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + ax^3 + bx^2 = c$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri, e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + cy = \frac{b}{2}y^2 + \left(b - \frac{a^2}{4}\right)\frac{c}{2}$$

22. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + ax^3 + c = bx^2$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri, e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + \frac{b}{2}y^2 = cy + \left(b + \frac{a^2}{4}\right)\frac{c}{2}$$

23. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + bx^2 + c = ax^3$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri, e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 = \frac{b}{2}y^2 + cy + \left(\frac{a^2}{4} - b\right)\frac{c}{2}$$

24. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente
$$x^4 + ax^2 = bx + c$$
Utilizza due approcci differenti:
    - posto y positiva, si ottiene la seguente equazione ausiliaria
    $$y^3 + cy + \frac{b}{2}y^2 + \left(b + \frac{a^2}{4}\right) = 0$$
    che non ammette soluzioni positive
    - posto y negativa, si ottiene così la seguente equazione ausiliaria
    $$y^3 + cy = \frac{b}{2}y^2 + \left(b + \frac{a^2}{4}\right)$$
25. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente
$$x^4 + bx^2 = ax^3 + c$$
Utilizza due approcci differenti:
    - posto y positiva, si ottiene così la seguente equazione ausiliaria
    $$y^3 + cy = \frac{b}{2}y^2 + \left(b - \frac{a^2}{4}\right)\frac{c}{2}$$
    - posto y negativa, si ottiene così la seguente equazione ausiliaria
    $$y^3 + fracb2y^2 + cy = bigg(\frac{a^2}{4} - b\bigg)\frac{c}{2}$$
    che ammette soluzioni positive quando $\frac{a^2}{4} > b$
26. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente
$$x^4 + c = ax^3 + bx^2$$
Utilizza due approcci differenti:

- posto y positiva, si ottiene così la seguente equazione ausiliaria

$$y^3 + \frac{b}{2}y^2 = cy + \left(b + \frac{a^2}{4}\right)\frac{c}{2}$$

- posto y negativa, si ottiene così la seguente equazione ausiliaria

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{4}\right)\frac{c}{2} = fracb2y^2 + cy$$

27. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + ax^2 = bx + c$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri (utilizzando la y negativa), e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + cy = \frac{b}{2}y^2 + \left(b + \frac{a^2}{4}\right)$$

28. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = d$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri (utlizzando la y positiva), e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + \left(d + \frac{ac}{4}\right)y = \frac{b}{2}y^2 + \left(b - \frac{a^2}{4}\right)\frac{d}{2} + \frac{c^2}{8}$$

29. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + d = cx$$

Utilizza due approcci differenti:

- posto y positiva. Si ottiene così la seguente equazione ausiliaria

$$y^3 = \frac{b}{2}y^2 + \left(d + \frac{ac}{4}\right)y + \left(\frac{a^2}{4} - b\right)\frac{d}{2} + \frac{c^2}{8}$$

- posto y negativa. Si ottiene così la seguente equazione ausiliaria

$$y^3 + \frac{b}{2}y^2 + \left(\frac{a^2}{4} - b\right)\frac{d}{2} + \frac{c^2}{8} = \left(d + \frac{ac}{4}\right)y$$

30. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + ax^3 + cx + d = bx^2$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri, ottenendo così la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + \frac{b}{2}y^2 = \left(d - \frac{ac}{4}\right)y + \left(b + \frac{a^2}{4}\right)\frac{d}{2} + \frac{c^2}{8}$$

31. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + bx^2 + cx + d = ax^3$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri (utlizzando la y negativa), e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + \frac{b}{2}y^2 + \left(\frac{a^2}{4} - b\right)\frac{d}{2} + \frac{c^2}{8} = \left(d + \frac{ac}{4}\right)y$$

32. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + ax^3 + cx = bx^2 + d$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri (utlizzando la y negativa), e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + \left(d + \frac{ac}{4}\right)y = \frac{b}{2}y^2 + \left(\frac{a^2}{4} + b\right)\frac{d}{2} - \frac{c^2}{8}$$

33. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + ax^3 + d = bx^2 + cx$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri (utlizzando la y positiva), e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + \frac{b}{2}y^2 = \left(d + \frac{ac}{4}\right)y + \left(\frac{a^2}{4} + b\right)\frac{d}{2} + \frac{c^2}{8}$$

34. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + bx^2 + cx = ax^3 + d$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri (utlizzando la y positiva), e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + \left(d - \frac{ac}{4}\right)y = \frac{b}{2}y^2 + \left(b - \frac{a^2}{4}\right)\frac{d}{2} + \frac{c^2}{8}$$

35. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + bx^2 + d = ax^3 + cx$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri (utlizzando la y negativa), e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + \left(\frac{ac}{4} - d\right)y = \frac{b}{2}y^2 + \left(\frac{a^2}{4} - b\right)\frac{d}{2} + \frac{c^2}{8}$$

36. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + cx + d = ax^3 + bx^2$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri (utlizzando la y negativa), e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + \left(\frac{a^2}{4} - b\right)\frac{d}{2} + \frac{c^2}{8} = \frac{b}{2}y^2 + + \left(\frac{ac}{4} + d\right)y$$

37. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + ax^3 + bx^2 = cx + d$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri (utlizzando la y negativa), e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + \left(d - \frac{ac}{4}\right)y + \left(\frac{a^2}{4} - b\right)\frac{d}{2} - \frac{c^2}{8} = \frac{b}{2}y^2$$

38. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + ax^3 = bx^2 + cx + d$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri (utlizzando la y negativa), e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + \frac{b}{2}y^2 = \left(\frac{ac}{4} - d\right)y + \frac{c^2}{8} - \left(\frac{a^2}{4} + b\right)\frac{d}{2}$$

39. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + ax^3 = bx^2 + cx + d$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri (utlizzando la y negativa), e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + \frac{b}{2}y^2 = \left(\frac{ac}{4} - d\right)y + \frac{c^2}{8} - \left(\frac{a^2}{4} + b\right)\frac{d}{2}$$

40. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + cx = ax^3 + bx^2 + d$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri (utlizzando la y negativa), e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + \frac{b}{2}y^2 + \left(\frac{a^2}{4} + b\right)\frac{d}{2} - \frac{c^2}{8} = \left(\frac{ac}{4} - d\right)y$$

41. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 + d = ax^3 + bx^2 + cx$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri (utlizzando la y negativa), e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + \frac{b}{2}y^2 + \left(\frac{ac}{4} - d\right)y = \left(\frac{a^2}{4} + \right)\frac{d}{2} + \frac{c^2}{8}$$

42. *[Regola del completamento quadratico]* L'equazione analizzata è la seguente

$$x^4 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Come nei casi precedenti si procede rendendo quadrati i due membri (utlizzando la y negativa), e si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$y^3 + \frac{b}{2}y^2 + \left(\frac{ac}{4} + d\right)y + \frac{c^2}{8} - \left(\frac{a^2}{4} + b\right)\frac{d}{2}$$

Capitolo 7

Terzo libro

Essendomi posto nell'animo, quando io mi risolsi di comporre la presente opera, volere (ad imitatione de' commendati scrittori così antichi come moderni) con l'ordine distributivo procedere nella tessitiara di quella, volsi dividerla in tre parti, che libri sono stati; così nel primo ragionai delle simplici voci di questa disciplina, e loro diffinitione ed operationi; nel secondo trattai delle dignita di essa e sue agguaglitioni. Hora in questo terzo et ultimo libro con non picciolo mio contento, poiche son gionto al desiato fine di questa disciplina, il qual'e potere ml mezzo delle regole insegnate nel primo e secondo libro sciogliere rani li dubbi de' Problemi Aritmetici, così di numeri irrationali come irraonnali, materia non meno faticosa che sia poi dilettevole al professore di detta disciplina: di questi adunque diffusamente parlero nel presente ouzo libro. Però essorto il Lettore ad applicargli l'animo totalmente, che di non pensata contentezza e giovamento gli sarà e quando (non so se dir mi debbia da giosatori o pur callunniatori) egli audisse accusarmi o tassare come huomo il quale quasi totalmente habbia deviato dall'uso de' scrittori di questa disciplina, i quali per il più si vede, quando hanno voluto trattare de' Problemi Aritmetici, mai sempre sotto velame di attioni o negotij humani l'hanno fatto (com'e di vendite, compere, restitutioni, permute, cambij, interessi, deffalcationi, leghe di monete, di metalli, pesi, compagnie e con perdita e guadagno, giochi e simili altre infinite attioni e operationi humane, come in detti scrittori a pieno più minutamente se vede) ed io solo habbia posta l'operatione delle dignita Aritmetiche, che all'hora sia sollecito a difenderrni con dirgli che io mi son posto nell'animo di veramente insegnare la disciplina della parte maggiore della Aritmetica (detta Algebra) imitando gli antichi scrittori e qualche uno de'moderni, perché gli altri che hanno tenuto quel modo detto di sopra, di simili essempij di attioni humane, più tosto hanno havuto del pratico che del scientifico e chiaramente in ogni disciplina si vede tutt'hora insegnarsi la Teorica e non la pratica, pensandosi che la capacità dello intelletto humano debbia poi essere tale ch'egli per se debbia, possedendo la Teorica, venire all'uso della pratica, e maggiormente nelle discipline Matematiche, perché versando elle (come si sa) nelle speculationi, credere si deve che il professore speculativo sara, e conseguentemente sapera mettere in use questa scientia, riducendola agli atti pratici, e chi tale non fosse non si affatichi intorno a simili discipline, che gettarebbe il suo tempo. Non vo'parimente restar di dire che non si scandeleggi il lettore se alcuni ne vedra di questi problemi del terzo libro, i quali da altro Auttore siano stati posti (come parimente io confesso esservene, e maggiormente di Diofante, altre volte da me nominato per Auttore di questa disciplina molto intelligente), perch'essendo (come si sa) queste dimostrationi matematiche tali che hanno i principij per se immediati e probabili, conseguentemente bisogna che quello che io ne dire di quelli, altri ne habbia detto, e così siano per dirne i posteri, e se non in tutto almeno in parte e ben vero questo, che l'uso dell'operare e differente tra gli scrittori, e se l'operar mio poi e buono o reo allo istesso lettore io lo lasso giudicare, parendomi sin qui ne'dui precedenti libri haver dato tal saggio di me che facilmente lo potrà conoscere. Però cessino i callunniatori, e gli studiosi di questa disciplina con animo libero da ogni passione giudichino dagli effetti della verita tutto questo fatto, che verre alla operatione di questi bellissimi Problema. Ricordandogli ancor questo, che non si maravegli l'operante se alcuna volta si faranno le positioni diverse, perché nel parlar di Tanti tal'hora si porranno tal'hora meno e alcuna volta con numeri, così parlando di potenze si porranno hor sole, hora accompagnate, ne di questo all'hora se ne darà regola, perché a me pare per quello che sin qui ne ho detto, quando di cie ho parlato, che la pratica lo debba insegnare; e se si volesse ne'problemi gravi ponere ogni minima cagione delle sue operationi non se ne verrebbe mai ad un fine, il che sommamente repugna alla natura mia, studiosa della brevità, ma più tosto ho voluto citar le operationi dell'altro libro (come leggendo si vedra).

Problema I. [1]

Trovisi un numero che gionto con 40 faccia 100.

Ponghisi che il numero il quale si deve giongere a 40 sia $1^{\underline{1}}$, che gionto con 40 fa $1^{\underline{1}} + 40$ e doverebbe essere 100; però $1^{\underline{1}} + 40$ sarà eguale a 100, che levato 40 ciascuna delle parti, si haverà $1^{\underline{1}}$ eguale a 60, perché partito 60 per numero delle $^{\underline{1}}$ ne viene 60 e 60 e la valuta del $^{\underline{1}}$ che fu proposto; però 60 sarà il numero che gionto con 40 farà 100.

Problema II.

Faccisi di 80 due parti che l'una sia 20 più dell'altra.
Ponghisi che la minor parte sia $1^{\underline{1}}$, la maggiore sarà $1^{\underline{1}} + 20$, rrche deve essere 20 più della minore ed ambedue insieme saranno $2^{\underline{1}} + 20$; doverebbono essere 80; però $2^{\underline{1}} + 20$ saranno eguali a 80 e levato 20 a ciascuna delle parti si haverà $2^{\underline{1}}$ eguale a 60, che agguagliato, il Tanto valerà 30; così la minor parte che fu posta $1^{\underline{1}}$ sarà 30, e la maggiore che fu posta $1^{\underline{1}} + 20$ sarà 50, le quali gionte insieme fanno 80, e così si vede che la sua regola e cavare 20 di 80 e lo restante

[1]Trovami un numero che aggiunto con 10, faccia 18. pongasi che il numero addimandato sia $^{\underline{1}}$, et perché la dimanda dice, che aggiunto con 10 faccia 18 si aggiunge 10 a detta cosa fa $^{\underline{1}} + 10^{\underline{0}}$, et essendosi fatto quanto dice la dimanda detta cosa + 10 sarà eguale a $18^{\underline{0}}$ che agguagliata la cosa valerà 8. Et si vee che la regola sua si è cavare l'un numero dell'altro. Trovami un numero che aggiunto con $^{\underline{1}}$ faccia 12. per la regola de la dimandata passata, si caverà $^{\underline{1}}$ di $12^{\underline{0}}$ et restarà $12^{\underline{0}} - {}^{\underline{1}}$ et questo è il numero addimandato.

partir per mezzo, per trovare la minor parte.
Faccisi d'$1^{\underline{1}}$ due parti che l'una sia 10 più dell'altra.
Per la regola detta di sopra cavisi 10 d'$1^{\underline{1}}$, resta $1^{\underline{1}} - 10$, il quale parta per mezzo, ne viene $\frac{1}{2}^{\underline{1}} - 5$, e questa è la minor parte. E per trovar la maggiore, al detto $\frac{1}{2}^{\underline{1}} - 5$ si aggionghi 10, fa $\frac{1}{2}^{\underline{1}} + 5$ per l'altra parte, e questa è necessarijssima (come si vedra).
Dividasi 10 in due parti che la maggiore sia $1^{\underline{1}}$ più della minore.
Questa e simile alla passata: però cavisi $1^{\underline{1}}$ di 10 resta $10 - 1^{\underline{1}}$, quale si parta per mezzo, ne viene $5 - \frac{1}{2}^{\underline{1}}$ e questa è la minor parte. per trovare la maggiore a esso $5 - \frac{1}{2}^{\underline{1}}$ si gionghi $1^{\underline{1}}$, fa $5 + \frac{1}{2}^{\underline{1}}$ per l'altra parte.

Problema III.

Trovisi un numero che cavato di 10 resti 2.

Ponghisi che tal numero sia $^{\underline{1}}$, il quale cavato di 10 resta $10 - 1^{\underline{1}}$ e dovereb-be far 2, però sarà eguale a 2, che levato il meno, si haverà $1^{\underline{1}} + 2$ eguale a 10, il quale agguagliato, il Tanto vale 8 e 8 e il numero addimandato, che si vede che la sua regola e cavare 2 di 10 e lo restante, ch'è 8, e il numero che si cerca.

Trovisi un numero che cavato d'$1^{\underline{1}}$ resti 8.

Per la regola detta di sopra cavisi 8 d'$1^{\underline{1}}$, resta $1^{\underline{1}} - 8$ e questo è numero domandato.

Problema IIII.

Trovisi un numero che moltiplicato per 8 faccia 32.

Ponghisi che tal numero sia $1^{\underline{1}}$ il quale moltiplicato per 8 fa $8^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 32, il quale agguagliato, il Tanto vale 4 e così si vede che la sua regola e partire 32 per 8 e l'avenimento, ch'è 4, e il numero che si cerca.

Trovisi un numero che moltiplicato per 6 faccia $1^{\underline{1}}$.

Per la regola detta di sopra partasi $1^{\underline{1}}$ per 6, ne viene $\frac{1}{6}^{\underline{1}}$ e questo a il numero che si cerca, che moltiplicato per 6 fa $1^{\underline{1}}$. [2]

Problema V.

Trovisi un numero che partito per 6 ne venga 8.

Ponghisi che tal numero sia $1^{\underline{1}}$, che partito per 6 ne viene $\frac{1}{6}^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 8, il quale agguagliato, il Tanto vale 48 e 48 a il numero che si cerca, e si vede che la sua regola e moltiplicare 6 con 8 e il produtto e il numero addimandato.

Trovisi un numero che partito per $1^{\underline{1}}$ ne venghi 6.

Per la regola detta di sopra moltiplichisi $1^{\underline{1}}$ via 6 fa $6^{\underline{1}}$ e $6^{\underline{1}}$ è il numero addimandato.

Problema VI.

Trovisi un numero che moltiplicato per 6 et al produtto gionto 8 faccia 48.

Ponghisi tal numero essere $1^{\underline{1}}$, che moltiplicato per 6 fa $6^{\underline{1}}$ e a questo gionto 8 fa $6^{\underline{1}} + 8$, e questo è eguale a 48, che levato 8 da ciascuna parte resta $6^{\underline{1}}$ eguale a 40, che agguagliato, il Tanto vale $6\frac{2}{3}$, e questo è il numero che si addomanda e si vede che la sua regola a cavare l'8 di 48 e lo restante partire per 6.

Problema VII.

[2] Trovami un numero che moltiplicato per $^{\underline{1}}$ faccia 6, per la regola sopradetta si partirà 6 per $^{\underline{1}}$ ne viene $\frac{1}{6}^{\underline{1}}$, ch'è il numero addimandato.

Trovinsi dui numeri che l'uno sia 2 più dell'altro e aggionti insiemi faccino 20.

Ponghisi che l'uno di detti numeri sia $1^{\underline{1}}$ e l'altro $1^{\underline{1}} + 2$, che aggionti insieme fanno $2^{\underline{1}} + 2$ e questo 6 eguale a 20, e levato 2 da ciascuna parte si haverà $2^{\underline{1}}$ eguale a 18, che agguagliato, il Tanto valerà 9, e però il primo numero, che fu posto $1^{\underline{1}}$, sarà 9, e l'altro, che fu posto $1^{\underline{1}} + 2$, sarà 11, che gionti insieme fanno 20, che si vede che la sua regola è cavare 2 di 20 e lo restante partire per metà, acciochè ne venga la minor parte.

Problema VIII.

Trovisi due numeri che siano in proportione l'uno all'altro come 2 gionti insieme faccino 25.

Ponghisi che un di loro sia $2^{\underline{1}}$, l'altro di necessità sarà $3^{\underline{1}}$ per have'Ira di loro proportione come da 2 a 3; aggionghinsi insieme fanno questo è eguale a 25, che agguagliato, il Tanto valerà 5. Però il primo numero, che fu posto $2^{\underline{1}}$, sarà 10, e il secondo, che fu posto $3^{\underline{1}}$, sarà 15, e avertiscasi che si poteva ponere che il primo fusse $1^{\underline{1}}$ e l'altro sarebbe stato $1\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ per essere nella proportione addimandata, ma si fa per fuggire li rotti. E la sua regola, senza fare la positione, è sommare li dui numeri della proportione e per la somma partire il numero proposto e l'avenimento moltiplicarlo per li due numeri della proportione e gli produtti saranno li dui numeri addimandati.

Trovisi dui numeri che siano in proportione come 2 a 3 et gionti nisiwne faccino $1^{\underline{1}} + 5$.

Per la regola detta di sopra somminsi li due numeri della proportione, cioè 2 e 3, fa 5 e con esso 5 si parta $1^{\underline{1}} + 5$, ne viene $\frac{1}{5}^{\underline{1}} + 1$ e questo si moltiplichi per 2 e per 3, fa $\frac{2}{5}^{\underline{1}} + 2$ e $\frac{3}{5}^{\underline{1}} + 3$, et questi sono li dui numeri cercati.

Problema IX.

Trovisi due numeri che siano in proportione come 3 a 4 e che moltiplicato il minore per 5 e il maggiore per 2, li produtti gionti infaccino 46.

Ponghisi che il minore sia $3^{\underline{1}}$, l'altro di necessità sarà $4^{\underline{1}}$ per osservare la proportione addimandata, poi moltiplichisi $3^{\underline{1}}$ per 5 e $4^{\underline{1}}$ per 2, fa $15^{\underline{1}}$ e $8^{\underline{1}}$ e aggionti insieme fanno $23^{\underline{1}}$ e questo è eguale a Iti che agguagliato, il Tanto valerà 2, e perché il minore fu posto $3^{\underline{1}}$ sarà 6 e il maggiore, che fu posto $4^{\underline{1}}$ sarà 8.

Problema X.

Trovinsi dui numeri de'quali il maggiore sia quattro volte il minore e che il maggiore sia 21 più del minore.

Ponghisi che il minore sia $1^{\underline{1}}$ e il maggiore $4^{\underline{1}}$ perché deve essere quattro volte quanto e il minore; resta vedere se il maggiore e 21 più del minore: però a cavare il minore del maggiore de'restar 21, ma resta $3^{\underline{1}}$, però sarà eguale a 21, che agguagliato, il Tanto vale 7. Il minore, che fu posto $1^{\underline{1}}$ sarà 7 e il maggiore, che fu posto $4^{\underline{1}}$, sarà 28. La regola sua e cavare 1 della proportion loro e per lo restante partire la loro differenza.

Problema XI.

Dividasi 100 in due numeri tali che il terzo dell'uno e il quinto dell'altro gionti insieme faccino 30.

Ponghisi che il secondo sia $5^{\underline{1}}$ (per fuggir li rotti); il suo quinto sarà $1^{\underline{1}}$; il terzo dell'altro di necessità sarà $30 - 1^{\underline{1}}$ (acciochè la somma del terzo dell'uno e il quinto dell'altro sia 30) e tutto il primo sarà $90 - 3^{\underline{1}}$, e già si è sodisfatto ad una delle conditioni, essendosi trovati dui numeri che il terzo dell'uno e il quinto dell'altro gionti insieme fanno 30: l'uno e $90 - 3^{\underline{1}}$ e l'altro è $5^{\underline{1}}$; resta hora che la somma loro sia 100, ma e $90 + 2^{\underline{1}}$, dunque $90 + 2^{\underline{1}}$ è eguale a 100, che levato 90 a ciascuna delle parti si haverà $2^{\underline{1}}$ eguale a 10, che agguagliato, il Tanto valerà 5; però il primo numero, che fu posto $90 - 3^{\underline{1}}$ sarà 75, e l'altro, che fu posto $5^{\underline{1}}$, sarà 25; il terzo di 75, ch'è 25, gionto con il quinto di 25, ch'è 5, fa 30 (come si addimanda).

Problema XII.

Trovinsi dui numeri che l'uno sia 4 più dell'altro e che il quadrato del maggiore sia 32 più del minore.

In tutte le proposte che diranno trovar due numeri che l'uno sia maggiore dell'altro un dato numero, poche saranno quelle de'quali non sia meglio ponere il minore $1^{\underline{1}}$ meno la metà del dato numero (come nel procedere si vedra) e questo nasce per la terza di questo, perché se si ponera che tutti due li numeri che si cercano siano $2^{\underline{1}}$ per fuggir rotti (per la regola di detta terza), il minore sarà $1^{\underline{1}} - 2$ e il maggiore $1^{\underline{1}} + 2$; resta che il quadrato del maggiore sia 32 più del minore et il quadrato del minore è $1^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 4$, e del maggiore è è $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$, che cavato il minore del maggiore resta $8^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 32, che agguagliato, il Tanto vale 4; però il minore, che fu posto $1^{\underline{1}} - 2$, sarà 2 e il maggiore, che fu posto $1^{\underline{1}} + 2$, sarà 6, che hanno le conditioni che si ricerca e la sua regola è questa.

Se si haveranno a trovare due numeri che l'uno sia maggiore dell'altro un dato numero e che li loro quadrati cavato l'uno dell'altro resti um determinato numero, partasi il terminato numero per il doppio dato numero e dell'avenimento se ne cavi la metà del dato numero e lo restante sarà il numero minore; ma avertiscasi che se a partire il terminato numero per il doppio del dato numero l'avenimento sarà della metà del dato numero, si tratterà dell'impossibile.

Trovisi due numeri che l'uno sia 6 più dell'altro e che cavato il quadrato del minore del quadrato del maggiore resti $1^{\underline{1}}$.

Per la regola data nella passata, partasi $1^{\underline{1}}$ per 12, doppio di 6, ter viene $\frac{1}{12}^{\underline{1}}$ e di questo se ne cavi 3, metà di 6, resta $\frac{1}{12}^{\underline{1}} - 3$ e questo è il minore, e il maggiore sarà $\frac{1}{23}^{\underline{1}} + 3$.

Problema XIII.

Dividasi 100 in due parti che il quarto del primo superi il sesto del nrcondo di 18.

Ponghisi che il secondo sia $6^{\underline{1}}$ che il suo sesto sarà $1^{\underline{1}}$; il quarto del ln¡Eimno di necessità sarà $18 + 1^{\underline{1}}$, che così levatone la sesta parte del srrondo resta 18 e tutto il primo sarà $4^{\underline{1}} + 72$; resta che ambidui gionti insieme faccino 100, ma fanno $10^{\underline{1}} + 72$, però questo è eguale a 100, die levato 72 a ciascuna delle parti haveremo $10^{\underline{1}}$ eguale a 28, che,igguagliato, il Tanto vale $2\frac{4}{5}$; però il primo, ch'era $4^{\underline{1}} + 72$, sarà $16\frac{4}{5}$, e il secondo, che era $6^{\underline{1}}$, sarà 16 che gionti insieme fanno 100 et il quarto del primo, ch'è $20\frac{4}{5}$, cavatone $2\frac{4}{5}$ ch'è il sesto del secondo, resta 18 (come fu proposto). Avertendosi che se il 18 fusse stato 25 o si saria trattato dell'impossibile, perché non bisogna che la parte maggiore moltiplicata nel numero dato produchi un numero eguale o maggiore del numero da dividersi.

Problema XIIII.

Trovisi un numero che cavatone 90 e 30, li due restanti il maggiore sia quattro volte il minore.

Ponghisi che il numero da trovarsi sia $1^{\underline{1}}$, che cavandosene 90 e 30 resta $1^{\underline{1}} - 90$ e $1^{\underline{1}} - 30$, e $1^{\underline{1}} - 90$ deve essere la parte minore; però quattro volte $1^{\underline{1}} - 90$, ch'è $4^{\underline{1}} - 360$, deve esserè eguale alla parte maggiore, ch'è $1^{\underline{1}} - 30$, perb $4^{\underline{1}} - 360$ è eguale a $1^{\underline{1}} - 30$, che levato il meno da ogni parte giongendo

360 a $1^{\underline{1}} - 30$ e 30 a $4^{\underline{1}} - 360$, si haverà $4^{\underline{1}} + 30$ eguale a $1^{\underline{1}} + 360$, che cavato 30 da ogni parte si haverà $4^{\underline{1}}$ eguale a $1^{\underline{1}} + 330$, e cavato $1^{\underline{1}}$ da ogni parte si haverà $3^{\underline{1}}$ eguale a 330, che agguagliato, il Tanto valerà 110 e 110 sarà il numero che si cerca, che cavatone 90 resta 20 e cavatone 30 resta 80, ch'è quattro volte tanto quanto 20 (come si vuole).

Problema XV.

Trovisi un numero che giontoli 190 e 30 le somme siano in proportione dupla.

Ponghisi che tal numero sia $1^{\underline{1}}$, che giontoli 90 e 30 fa $1^{\underline{1}} + 90$ e $1^{\underline{1}} + 30$; resta che $1^{\underline{1}} + 90$ sia doppio a $1^{\underline{1}} + 30$, ma il doppio d'$1^{\underline{1}} + 30$ e $2^{\underline{1}} + 60$, però è eguale a $1^{\underline{1}} + 90$, che agguagliato, il Tanto vale 30 e questo è il numero che si cerca, che giontoli 90 e 30 fa 120 e 60 che l'uno e doppio all'altro (come fu proposto).

Problema XVI.

Trovisi un numero che cavato di 20 e di 100 il maggior restante sia sei volte quanto il minore.

Ponghisi che tal numero sia $1^{\underline{1}}$, che cavato di 20 e di 100 resta $20 - 1^{\underline{1}}$ e $100 - 1^{\underline{1}}$; resta che $100 - 1^{\underline{1}}$ sia sei volte $20 - 1^{\underline{1}}$, ma sei volte $20 - 1^{\underline{1}}$ e $120 - 6^{\underline{1}}$, però sarà eguale a $100 - 1^{\underline{1}}$ che cavato 100 da ogni parte si haverà $20 - 6^{\underline{1}}$ eguale a $- 1^{\underline{1}}$, e levato il meno e $1^{\underline{1}}$ da ogni parte si haverà $5^{\underline{1}}$ eguale a 20, che agguagliato, il Tanto valerà 4 e 4 sarà il numero cercato, che cavato di 20 e di 100, resta 16 e 96, che l'uno a sei volte quanto l'altro.

Problema XVII.

Trovinsi due numeri che cavato il quadrato dell'uno del quadrato dell'altro resti 6.

Ponghisi l'uno di detti due numeri essere $1^{\underline{1}}$, l'altro essere $1^{\underline{1}}$ più un numeroche il suo quadrato sia minore di 6, e sia $1^{\underline{1}} + 2$; i lor quadrati saranno $1^{\underline{1}}$ e $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$, che cavato l'uno dell'altro resta $4^{\underline{1}} + 4$ e questo è eguale a 6, che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{1}{2}$; però il primo numero, che fu posto $1^{\underline{1}}$, sarà $\frac{1}{2}$, e l'altro, che fu posto $1^{\underline{1}} + 2$, sarà $2\frac{1}{2}$ che li loro quadrati sono 4 e 6 che l'uno e 6 più dell'altro (come si ricerca). E ancora si poteva ponere per il secondo $1^{\underline{1}}$ accompagnato con un numero che il suo quadrato fosse maggiore di 6, ma in tal caso bisogna che una delle parti sia meno, ma e meglio che il Tanto si si faccia meno: però ponghisi che il secondo sia $4 - 1^{\underline{1}}$, che il suo quadrato sarà $1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 16$, che cavatone $1^{\underline{2}}$, quadrato del primo, resta $16 - 8^{\underline{1}}$ eguale a 6, che levato il meno e 6 da ogni parte si haverà $8^{\underline{1}}$ eguale a 10, che il Tanto valerà $1\frac{1}{4}$; però il primo sarà $1\frac{1}{4}$; e l'altro $2\frac{3}{4}$, perché fu posto $4 - 1^{\underline{1}}$, e ne nasce questa regola.

Se si haveranno a trovare dui numeri quadrati che la differenza loro sia un dato numero, piglisi un numero quadrato che sia maggiore o minore del dato numero, e se si piglia maggiore se ne cavi il dato numero e lo restante si parte per il doppio del lato di esso numero quadrato e l'avenimento e il lato del minor numero quadrato cercato. Ma se si piglia minore esso si cavara del dato numero e lo restante si partirà per il suo lato e l'avenimento sarà il lato del minor numero quadrato crcato.

Problema XVIII.

Trovisi un numero che aggionto con 18 e cavato di 100 la somma Iuu restante siano in proportione tripla.

Ponghisi che tal numero sia $1^{\underline{1}}$, che aggionto con 18 e cavato di 100, fa $1^{\underline{1}} + 18$ e $100 - 1^{\underline{1}}$; resta hora che il maggiore sia triplo al minore e in questo caso si può pigliar qual si voglia per la quantità minore. Hor sia $1^{\underline{1}} + 18$, che il suo triplo è $3^{\underline{1}} + 54$ e questo è eguale a $100 - 1^{\underline{1}}$, che levato il meno e 54 da ogni parte si haverà $4^{\underline{1}}$ eguale a 46, che agguagliato, il Tanto vale $11\frac{1}{2}$ e questo è il numero cercato, che gionto a 18 fa $29\frac{1}{2}$, e cavato di 100 resta $88\frac{1}{2}$, ch'è triplo a $29\frac{1}{2}$ (come si vuole). Ma avertiscasi che se il triplo di 18 fusse stato maggiore di 100 sarebbe bisognato in tal caso pigliare $100 - 1^{\underline{1}}$ per la parte minore, ma nelle proposte simili per non cadere in simile inconveniente si piglia sempre la parte sottratta per la minore.

Problema XIX.

Trovisi un numero che giontoli 20 e cavatone 100, la comma e lo restante siano in proportion quadrupla.

Ponghisi che tal numero sia $1^{\underline{1}}$; aggiontoli 20 fa $1^{\underline{1}} + 20$, e cavatone 100 resta $1^{\underline{1}} - 100$ e questo meno si piglia per la parte minore; però quattro volte $1^{\underline{1}} - 100$, ch'è $4^{\underline{1}} - 400$, sarà eguale a $1^{\underline{1}} + 20$, che levato il meno si haverà $1^{\underline{1}} + 420$ eguale a $4^{\underline{1}}$, che levato $1^{\underline{1}}$ da ogni parte et agguagliato, il Tanto valerà 140 e 140 e il numero cercato, che giontoli 20 fa 160, e cavatone 100 recta 40, che l'uno e quadruplo all'altro (come si vuole).

Problema XX.

Faccisi di 10 due parti che li loro quadrati cavati l'uno dell'altro resti 12.

Nella maggior parte delle proposte dove si deve fare di un numero due parti, nel ponere verra meglio ponere l'una essere la metà di esso numero più $1^{\underline{1}}$, e l'altra, l'altra metà meno $1^{\underline{1}}$; però ponghisi che l'una parte sia $5 + 1^{\underline{1}}$; l'altra sarà $5 - 1^{\underline{1}}$; li loro quadrati saranno $1^{\underline{2}} + 10^{\underline{1}} + 25$ e $1 - 10^{\underline{1}} + 25$, che cavato l'uno dell'altro resta $20^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 12, che agguagliato, il Tanto vale $\frac{3}{5}$ però la prima parte, che fu posta $5 + 1^{\underline{1}}$, sarà $5\frac{3}{5}$, e l'altra, che fu posta $5 - 1^{\underline{1}}$, sarà $4\frac{2}{5}$ e ne nasce la infrascritta regola.

Se una quantità si haverà a dividere in due parti tali che li loro quadrati cavati l'uno dell'altro resti un determinato numero, partasi il determinato numero per il doppio della quantità e l'avenimento si aggionghi e cavi della metà della quantità, e la comma e lo restante saranno le due parti addimandate, ma avertiscasi che se il quadrato della quantità sarà minore del numero si trattera dell'impossibile.

Problema XXI.

Dividasi 200 in dui numeri e dipoi si divida in due altri numeri, talchè il maggiore della prima divisione con il minore della seconda habbia proportion dupla, e il maggiore della seconda divisione con il minore della prima habbia proportion tripla.

Ponghisi che il minore della seconda divisione sia $1^{\underline{1}}$; dunque il maggiore della prima sarà $2^{\underline{1}}$ et il minore della prima verra ad essere $200 - 2^{\underline{1}}$, e perché il maggiore della seconda e tre volte quanto il minore della prima, però sarà tre volte detto minore della prima, cioè $600 - 6^{\underline{1}}$; resta che il componimento delli due numeri della seconda livisione gionti insieme faccino 200, ma fanno $600 - 5^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 200, che levato il meno si haverà 600 eguale a $5^{\underline{1}} + 200$, che cavato 200 ad ambedue le parti si haverà 400 eguale a $5^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 80; però il minore della prima divisione, che posto $1^{\underline{1}}$, sarà 80 et il maggiore 120, et il maggiore della seconda livisione, che fu posto $2^{\underline{1}}$, sarà 160 et il minore 40, che bastano a quanto il proposto, perché il maggiore della seconda divisione e doppio al minor della prima, e il maggior della prima e triplo al minor della seconda, et ne nasce la seguente regola.

Se si haverà a dividere un dato numero in dui numeri due volte Ili tal modo che l'uno della prima divisione con l'uno della seconda habbiano la proportion data, e così li altri due habbino fra di loro la proportion data, moltiplichisi le due proportioni date insieme e per regola se ne cava uno e lo restante si salva, e della maggior si cavi uno per regola e lo restante si divida per il numero salvato e l'avenimento si moltiplichi per il numero dato, et il produtto sarà il minore della seconda divisione, che facilmente si trovano poi l'altre tre.

Problema XXII.

Faccisi di 20 due parti che di una cavatone il quarto più 2 faccia auto quanto e l'altra aggiontoli il quinto men 5.

Ponghisi che una di dette parti sia $1^{\underline{1}} + 10$; l'altra sarà $10 - 1^{\underline{1}}$; il quarto della prima è $\frac{1}{4}^{\underline{1}} + 2\frac{1}{2}$, che giontoli 2 fa $\frac{1}{4}^{\underline{1}} + 4\frac{1}{2}$, che si salvi. Il quinto di 10 $- 1^{\underline{1}}$ e $2 - \frac{1}{5}^{\underline{1}}$, che cavatone 5 resta $- 3 - \frac{1}{5}^{\underline{1}}$, che gionto a $10 - 1^{\underline{1}}$ fa $7 - 1\frac{1}{5}^{\underline{1}}$. Hor si cavi $\frac{1}{4}^{\underline{1}} + 4\frac{1}{2}$ serbato, d'$1^{\underline{1}} + 10$, resta $5\frac{1}{2} + \frac{3}{4}^{\underline{1}}$ ch'è eguale a $7 - 1\frac{1}{5}^{\underline{1}}$, che levato il meno et il minor numero, si haverà $1\frac{19}{20}^{\underline{1}}$ eguale a $1\frac{1}{2}$, che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{10}{13}$; però il primo sarà $\frac{10}{13}$, et il secondo $9\frac{3}{13}$.

Problema XXIII.

Trovinsi tre numeri che il primo sia in proportione al secondo com'e 2 a 3, il secondo al terzo com'e 2 a 1, et il primo moltiplicato per 2, il secondo per 3 et il terzo per 4 e gli produtti gionti insieme, faccino 38.

Ponghisi ch'il primo sia $2^{\underline{1}}$ et il secondo $3^{\underline{1}}$, acciochè habbiano la proportion proposta; il terzo sarà $1\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, per essere in proportion col secondo come 1 a 2. E moltiplicato il primo per 2 fa $4^{\underline{1}}$, il secondo per 3 fa $9^{\underline{1}}$ et il terzo per 4 fa $6^{\underline{1}}$, che gionti insieme fanno $19^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 38, che agguagliato, il Tanto vale 2; però il primo numero, che fu posto $2^{\underline{1}}$, sarà 4; il secondo, che fu posto $3^{\underline{1}}$, sarà 6, et il terzo, che fu posto $1\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, sarà 3.

Problema XXIIII.

Trovisi una Radice che sia tal parte di 12 qual'è R.q.240 di 18.

Ponghisi che il numero che si cerca sia $1^{\underline{1}}$ e si ha quattro quantità proportionali: 12 con $1^{\underline{1}}$ et 18 con R.q.240; resta da provare che tanto faccia 12 via R.q.240 quanto $1^{\underline{1}}$ via 18, che l'uno fa R.q.34560 e l'altro $18^{\underline{1}}$; però $18^{\underline{1}}$ sono eguali a R.q.34560, che agguagliato, il Tanto vale R.q.$106\frac{2}{3}$ e questo è il numero che si cerca.

Problema XXV.

Trovisi un numero che cavatone il terzo e di quello che resta cavatone il quarto e di quello che resta cavatone il sesto resti 140.

Ponghisi che tal numero sia $1^{\underline{1}}$, che cavatone il terzo, ch'è $\frac{1}{3}^{\underline{1}}$, resta $\frac{2}{3}^{\underline{1}}$ e di questo cavatone il quarto, ch'è $\frac{1}{6}^{\underline{1}}$, resta $\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, e di questo cavatone il sesto, ch'è $\frac{1}{12}^{\underline{1}}$, resta $\frac{5}{12}^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 140, che agguagliato, il Tanto vale 336, e tanto e il numero che si cerca.

Problema XXVI.

Dividasi 200 in due numeri tre volte, talche il maggiore della prima divisione sia triplo al minore della seconda e che il maggiore della seonda divisione sia doppio al minore della terza et il maggiore della Irrza sia quattro volte il minore della prima.

Ponghisi che il minore della terza sia $1^{\underline{1}}$; il maggiore della seconda divisione sarà $2^{\underline{1}}$ acciochè sia doppio, e il minore della seconda sarà il restante sino a 200, cioè $200 - 2^{\underline{1}}$, e perché il maggiore della prima è tre volte quanto il minore della seconda, conviene che sia tre volte $200 - 2^{\underline{1}}$, cioè $600 - 6^{\underline{1}}$, e per trovare quanto e il minore della prima, cavisi $600 - 6^{\underline{1}}$ di 200, resta $6^{\underline{1}}$ $- 400$, e perché il maggior della ierza e quattro volte quanto il minor della prima, però sarà $24^{\underline{1}} + 1600$; resta che li dui della terza gionti insieme faccino 200, che il minore è $1^{\underline{1}}$ e il maggiore è $24^{\underline{1}} - 1600$, che gionti insieme fanno $25^{\underline{1}} - 1600$ e questo è eguale a 200, che levato il meno si haverà $25^{\underline{1}}$ eguale a 1800, che agguagliato, il Tanto valerà 72, e 72 sarà il minore della terza, che fu posto $1^{\underline{1}}$ e il maggiore sarà lo restante sino a 200, cioè 128. Il maggiore della seconda, che fu posto $2^{\underline{1}}$, sarà 144 e il minore 56. Et il minor della prima sarà 32 e il maggiore 168, che hanno le conditioni proposte.

Problema XXVII.

Trovinsi dui numeri che il primo pigliando dal secondo 30 divendoppio allo restante del secondo, ed il secondo pigliando dal primo 50 divenghi triplo dello restante del primo.

Ponghisi che il secondo sia $1^{\underline{1}}$ + 30, acciochè dando 30 al primo li resti $1^{\underline{1}}$, e il primo havuto che haverà 30 dal secondo, haverà $2^{\underline{1}}$ per havere il doppio dello restante del secondo, e avanti che riceva 30 dal secondo sarà $2^{\underline{1}} - 30$; resta che il secondo pigliando 50 dal primo habbia Ire tanti dello restante del primo, ma il primo dando 50 al secondo rimane $2^{\underline{1}} - 80$, et il secondo diviene $1^{\underline{1}} + 80$; resta che $1^{\underline{1}} + 80$ sia tre volte $2^{\underline{1}} - 80$, si che pigliato tre volte $2^{\underline{1}} - 80$ fa $6^{\underline{1}} - 240$ eguale a $1^{\underline{1}} + 80$, che levato il meno e $1^{\underline{1}}$ a ciascuna delle parti, si haverà $5^{\underline{1}}$ eguale a 320, che agguagliato, il Tanto valerà 64. Però il secondo, che fu posto $1^{\underline{1}} + 30$, sarà 94, e il primo, che fu posto $2^{\underline{1}} - 30$, sarà 98.

Problema XXVIII.

Trovinsi tre numeri che il primo col secondo sia 20, il secondo col terzo sia 30 et il terzo col primo sia 40.

Ponghisi che tutti tre li numeri insieme siano $1^{\underline{1}}$; essendo il primo e secondo 20, il terzo sarà $1^{\underline{1}} - 20$, et essendo il secondo e terzo 30, il primo sarà $1^{\underline{1}} - 30$, et essendo il primo et terzo 40, il secondo sarà $1^{\underline{1}} - 40$; resta che tutti tre insieme faccino $1^{\underline{1}}$, ma essi fanno $3^{\underline{1}} - 90$, però $3^{\underline{1}} - 90$ sono eguali a $1^{\underline{1}}$, che levato il meno et $1^{\underline{1}}$ da ogni parte, si haverà $2^{\underline{1}}$ eguale a 90, che il Tanto valerà 45; però il primo, che era $1^{\underline{1}} - 30$, sarà 15, il secondo, ch'era $1^{\underline{1}} - 40$, sarà 5 et il terzo, ch'era $1^{\underline{1}} - 20$, sarà 25. Ma volendosi operare altrimente ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$; il secondo sarà $20 - 1^{\underline{1}}$ et il terzo sarà $10 + 1^{\underline{1}}$, acciochè insieme col secondo sia 30; et il primo e terzo saranno $2^{\underline{1}} + 10$ e devono essere 40, però $2^{\underline{1}} + 10$ sono eguali a 40, che agguagliato, il Tanto valerà 15; però il primo, che fu posto $1^{\underline{1}}$, sarà 15, il secondo, che fu posto $20 - 1^{\underline{1}}$, sarà 5 e il terzo, che fu posto $10 + 1^{\underline{1}}$, sarà 25. E da simili proposte ne nasce la seguente regola.

Se saranno tre numeri, de'quali il primo col secondo debbia fare un dato numero et così il secondo col terzo, et il terzo col primo, somminsi insieme li tre dati numeri e la somma si parta per dui, cioè per uno meno delli numeri e dell'avenimento se ne cavino li tre dati numeri, che il tre restanti saranno li tre numeri che si cercano.

Problema XXIX.

Trovinsi tre numeri che il primo sia il terzo di tutti tre, il secondo sia il sesto di tutti tre, e che il primo moltiplicato per 4, il secondo per 6 e il terzo per 2, li produtti del primo e terzo siano pari al quadrato del produtto del secondo per 6.

Ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$ e perché il terzo di tutti tre, dunque essi tutti saranno $3^{\underline{1}}$, che cavatone il primo resta $2^{\underline{1}}$, e tanto a il secondo e terzo. Il secondo sarà $\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, per essere il sesto di tutti tre, il terzo di necessità sarà $1\frac{1}{2}^{\underline{1}}$; il produtto del primo per 4 e $4^{\underline{1}}$, il produtto del terzo per 2 è $3^{\underline{1}}$, che gionti insieme fanno $7^{\underline{1}}$, e il produtto del secondo per 6 è $3^{\underline{1}}$, il suo quadrato è $9^{\underline{2}}$ e questo è eguale a $7^{\underline{1}}$, che schifato si haverà $9^{\underline{1}}$ eguale a 7, che agguagliato, il Tanto valerà $1frac79$ e tanto era il primo, il secondo $1frac718$ et il terzo 1 $1frac16$.

Problema XXX.

Trovinsi quattro numeri tali che il primo, secondo e terzo faccino 20; il secondo, terzo e quarto faccino 22; il terzo, quarto e primo faccino 24; il quarto, primo e secondo faccino 27.

Ponghisi che tutti quattro li numeri insieme siano $1^{\underline{1}}$; se adunque d'$1^{\underline{1}}$ si cavaranno li primi tre, che erano 20, rimarrà$1^{\underline{1}} - 20$ per il quarto. Et per la medesima ragione il primo sarà $1^{\underline{1}} - 22$, il secondo $1^{\underline{1}} - 24$ et il terzo $1^{\underline{1}} -$

27; resta che tutti quattro insieme siano $1^{\underline{1}}$, ma essi sono $4^{\underline{1}} - 93$; però $1^{\underline{1}}$ è eguale a $4^{\underline{1}} - 93$, che agguagliato, il Tanto vale 31; però il primo, che fu posto $1^{\underline{1}} - 22$, sarà 9, il secondo, che fu $1^{\underline{1}} - 24$, sarà 7, il terzo, che fu $1^{\underline{1}} - 27$, sarà 4, et il quarto, che fu $1^{\underline{1}} - 20$, sarà 11.

Problema XXXI.

Trovinsi tre numeri che il primo e secondo siano 20 più del terzo, il secondo e terzo siano 30 più del primo, e il terzo e primo siano 40 più del secondo.

Ponghisi che tutti tre li numeri insieme siano $2^{\underline{1}}$ e perché il primo secondo superano il terzo di 20, però di $2^{\underline{1}}$ bisogna fare due parti tali che l'una sia 20 più dell'altra, che per la seconda di questo, l'una sarà $1^{\underline{1}} + 10$ e l'altra $1^{\underline{1}} - 10$; però diremo il terzo numero essere $1^{\underline{1}} - 10$, e gli altri due, cioè il primo e secondo, $1^{\underline{1}} + 10$ e sodisfanno alla prima conditione, che il primo e secondo sono 20 più del terzo, e per la medesima ragione il primo sarà $1^{\underline{1}} - 15$ e il secondo $1^{\underline{1}} - 20$. Hor resta che tutti tre insieme siano $2^{\underline{1}}$ (come fu posto), ma sono $3^{\underline{1}} - 45$, però $3^{\underline{1}} - 45$ sono eguali a $2^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 15, e però il primo, ch'era $1^{\underline{1}} - 15$, sarà 30; il secondo, ch'era $1^{\underline{1}} - 20$, sarà 25, e il terzo, ch'era $1^{\underline{1}} - 10$, sarà 35; overo ponghisi che il primo e secondo siano $1^{\underline{1}}$ e il terzo sarà $1^{\underline{1}} - 20$, acciochè il primo e il secondo siano 20 piùdel terzo, e tutti tre insieme saranno $2^{\underline{1}} - 20$, per trovare il primo cavisi 30 di tutti tre: resta $2^{\underline{1}} - 50$, di cui la metà è $1^{\underline{1}} - 25$ e questo sarà il primo, et essendo il primo $1^{\underline{1}} - 25$ r il terzo $1^{\underline{1}} - 20$, ambidui saranno $2^{\underline{1}} - 45$ et essendo tutti tre $2^{\underline{1}} - 20$, cavato il primo e terzo di tutti tre resta 25 per il secondo. Hor resta che il primo e terzo siano 40 più del secondo, ma il primo e terzo sono $2^{\underline{1}} - 45$ e sono eguali al secondo, ch'è 25 con 40 più, che fa 65, il quale agguagliato, il Tanto vale 55, e il primo, ch'era $1^{\underline{1}} - 25$, sarà 30 e il terzo, ch'era $1^{\underline{1}} - 20$, sarà 35.

Problema XXXII.

Faccisi di 50 due parti che dell'una cavatone il terzo e dell'altra il quarto, li restanti siano eguali.

Ponghisi che l'una sia $3^{\underline{1}}$, che cavandosene il terzo restarà $2^{\underline{1}}$ e questo conviene che sia li $\frac{3}{4}$ dell'altra parte; dunque essa sarà $2\frac{2}{3}^{\underline{1}}$; resta che ambedue le parti insieme siano 50, ma esse sono $5\frac{2}{3}^{\underline{1}}$, però $5\frac{2}{3}^{\underline{1}}$ è eguale a 50, che agguagliato, il Tanto vale $8\frac{14}{17}$; però la prima parte, che fu posta $3^{\underline{1}}$ sarà $26\frac{8}{17}$ e la seconda, che fu posta $3^{\underline{1}}$, sarà $26\frac{9}{17}$; overo ponghisi che la prima parte sia $1^{\underline{1}}$, l'altra sarà $50 - 1^{\underline{1}}$, e se d'$1^{\underline{1}}$ si cavara il terzo restarà $\frac{2}{3}^{\underline{1}}$ e di $50 - 1^{\underline{1}}$ cavato il quarto restartà $37\frac{1}{2}$-$\frac{3}{4}^{\underline{1}}$ e perché li restanti devono essere pari, però $\frac{2}{3}^{\underline{1}}$ sarà eguale a $37 - 4^{\underline{1}}$, che levato il meno et agguagliato, il Tanto valerà $26\frac{8}{17}$; così la prima parte, che fu posta $1^{\underline{1}}$ sarà $26\frac{8}{17}$ e l'altra sarà $23\frac{9}{17}$ e ne nasce questa regola.

Se si haverà a dividere un dato numero in due parti in tal modo che di una cavatone una data parte e dell'altra un'altra data parte, gli restanti siano pari: aggionghisi le due date parti insieme e per regola si cavino di 2 e lo restante si salvi. Poi cavisi del dato numero una delle parti date e quello che resta si parta per il numero serbato, che l'avenimento sarà una delle parti addomandate.

Faccisi d'$1^{\underline{1}} + 6$ due tal parti che dell'una cavatone il mezzo e dell'altra il terzo, li restanti siano eguali.

Per la regola sopradetta se si aggiongerà insieme $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ farà $\frac{5}{6}$, il qual si cavi di 2, resta $1\frac{1}{6}$ e questo si salva; poi cavisi d'$1^{\underline{1}} + 6$ la metà, overo la terza parte (che non importa), resta $\frac{1}{2}^{\underline{1}} + 3$, e questo si parta per $1\frac{1}{6}$ serbato di sopra, ne viene $\frac{3}{7}^{\underline{1}} + 2\frac{4}{7}$ e tanto sarà una parte, e l'altra sarà $\frac{4}{7}^{\underline{1}} + 3\frac{3}{7}$, che fanno quanto si propone.

Problema XXXIII.

Trovinsi due numeri quadrati che il lato dell'uno sia 2 più del lato dell'altro e che cavato l'uno dell'altro resti 10.

Ponghisi che il lato dell'uno sia $1^{\underline{1}}$ e il lato dell'altro sarà $1^{\underline{1}} + 2$; il quadrato del primo sarà $1^{\underline{2}}$ e il quadrato del secondo sarà $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$, che cavato il minore del maggiore resta $4^{\underline{1}} + 4$ e questo è eguale a 10, che agguagliato, il Tanto vale $1\frac{1}{2}$ però l'uno, che fu posto $1^{\underline{1}}$, sarà $1\frac{1}{2}$ e l'altro, che fu posto $1^{\underline{1}} + 2$, sarà $3\frac{1}{2}$ e li numeri quadrati saranno $2\frac{1}{4}$ e $12\frac{1}{4}$ che il loro eccesso e 10 (come si propose) e la sua regola e questa.

Se si haveranno a trovare due numeri che uno sia maggiore dell'altro un dato numero e la differenza delli loro quadrati sia un terminato numero, cavisi il quadrato del dato numero del terminato numero (che non si potendo si tratta dell'impossibile) e lo restante si parta per il doppio del dato numero e l'avenimento sarà uno delli numeri cercati.

Problema XXXIIII.

Trovisi tre numeri in tal modo che due di essi siano pari tra di loro li dui eguali insieme con il terzo dell'altro et dui più siano doppij dello restante del terzo, e se a uno delli dui pari si giongerà 4 delli altri la somma sia li $\frac{2}{5}$ dello restante delli altri dui.

Ponghisi che il numero non pari sia $3^{\underline{1}}$; dando alli altri dui il terzo 2, gli restara $2^{\underline{1}} - 2$ e tanto sarà ciascuno delli dui pari (havuto che haveranno $1^{\underline{1}} + 2$ dall'altro), però fra tutti due saranno $4^{\underline{1}} - 4$, die cavatone $1^{\underline{1}} + 2$, havuta dal terzo, resta $3^{\underline{1}} - 6$ e tanto saranno il dui numeri pari e ciascuno di loro verrà ad essere $1\frac{1}{2}^{\underline{1}} - 3$; però gionto uno delli pari col terzo farà $4\frac{1}{2}^{\underline{1}} - 3$, che cavatone 4 per darà all'altro, restara $4\frac{1}{2}^{\underline{1}} - 7$ e l'altro sarà $1\frac{1}{2}^{\underline{1}} + 1$ e questo dove essere li $\frac{2}{5}$ di $4\frac{1}{2}^{\underline{1}} - 7$, ma li $\frac{2}{5}$ di $4\frac{1}{2}^{\underline{1}} - 7$ sono $1\frac{1}{2}^{\underline{1}}$; però questo sarà eguale a $1\frac{1}{2}^{\underline{1}} + 1$, che levato il meno e $\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ per parte, si haverà $\frac{3}{10}^{\underline{1}}$ eguale a $3\frac{4}{5}$ che agguagliato, il Tanto vale $12\frac{2}{3}$, però il numero non pari, che fu posto $3^{\underline{1}}$, sarà 38 e ciascuno delli pari, ch'era $1\frac{1}{2}^{\underline{1}} - 3$, sarà 16, che li dui pari insieme con il terzo più 2 dell'altro, ch'è $14\frac{2}{3}$, fanno $46\frac{2}{3}$, ch'è doppio a $23\frac{1}{3}$, restante non pari, e cavato 4 della somma del non pari gionto con uno delli qual somma e 54, resta 50 e esso 4 gionto al pari che resta fa 20, ch'è li $\frac{2}{5}$ del 50 (come si desidera).

Problema XXXV.

Trovisi quattro numeri che il composto del primo, secondo e terzo avanzi il quarto di 20 e il composto del secondo, terzo e quarto avanzi il primo di 30, e il composto del terzo, quarto e primo avanzi il secondo di 40, e il composto del quarto, primo e secondo avanzi il terzo di 50.

Ponghisi che tutti quattro li numeri insieme siano $2^{\underline{1}}$ e perché il composto delli tre primi avanzano il quarto di 20, bisogna fare di 2 due parti che l'una sia 20 più dell'altra: però per la terza di questo l'una sarà $1^{\underline{1}} + 10$ e l'altra $1^{\underline{1}} - 10$; però il quarto sarà $1^{\underline{1}} - 10$ e gli altri tre $1^{\underline{1}} + 10$, e per la medesima ragione il primo sarà $1^{\underline{1}} - 15$, il secondo $1^{\underline{1}} - 20$ e il terzo $1^{\underline{1}} - 25$, e tutti quattro insieme sono $4^{\underline{1}} - 70$ et devono essere 2 però $4^{\underline{1}} - 70$ sono eguali a $2^{\underline{1}}$, che levato il meno e $2^{\underline{1}}$ per parte, si haverà $2^{\underline{1}}$ eguale a 70, che agguagliato, il Tanto vale 35, così il primo, ch'era $1^{\underline{1}} - 15$, sarà 20, il secondo 15, il terzo 10 e il quarto 25 e la sua regola e la seguente, cioè sommare tutti quattro li numeri e la somma partire per 4 e dell'avenimento cavarne la metà delli numeri ad uno ad uno, e li quattro restanti saranno li quattro numeri che si cercano.

Problema XXXVI.

Far di 200 tre parti tali che la prima e la seconda siano tre volte quanto la terza e la seconda e terza quattro volte quanto la prima.

Ponghisi che la terza sia 1 la prima e seconda, che sono tre volte quanto la terza, saranno $3^{\underline{1}}$, però tutte tre saranno $4^{\underline{1}}$ et hanno ad essere 200 e così

$4^{\underline{1}}$ sono eguali a 200, che il Tanto valerà 50, e la terza che fu posta $1^{\underline{1}}$ sarà 50; le altre due saranno 150 e per trovarle separatamente ponghisi che la prima sia $1^{\underline{1}}$; le altre due, che sono quattro volte quanto la prima, saranno $4^{\underline{1}}$ che aggionte insieme tutte tre saranno $5^{\underline{1}}$ e doverebbono essere 200, però $5^{\underline{1}}$ sono eguali a 200 e il Tanto valerà 40; però la prima sarà 40, la terza 50 e la seconda lo restante sino in 200, cioè 110.

Problema XXXVII.

Trovisi tre numeri tali che il primo avanzi il secondo [della terza parte] del terzo e il terzo avanzi di 10 la terza parte del secondo e il secondo avanzi il terzo della terza parte del primo.

Ponghisi che il secondo sia $3^{\underline{1}}$ (per fuggir rotti), il terzo sarà $1^{\underline{1}} + 10$, acciochè sia la terza parte del secondo + 10; resta che il secondo avanzi il terzo della terza parte del primo, ma il secondo avanza il terzo di $2^{\underline{1}} - 10$ e questo conviene che sia la terza parte del primo, adunque il primo sarà $6^{\underline{1}} - 30$; resta che il primo avanzi il secondo della terza parte del terzo, ma il primo avanza il secondo di $3^{\underline{1}} - 30$ e questo deve essere la terza parte del terzo, adunque il terzo sarà $9^{\underline{1}} - 90$, ma prima si era trovato essere $1^{\underline{1}} + 10$, però $9^{\underline{1}} - 90$ saranno eguali a $1^{\underline{1}} + 10$, che agguagliato, il Tanto valerà $12\frac{1}{2}$ e il terzo, che fu posto $1^{\underline{1}} + 10$, sarà $22\frac{1}{2}$, il secondo, che fu posto $3^{\underline{1}}$, sarà $37\frac{1}{2}$ e il primo, ch'era $6^{\underline{1}} - 30$, sarà 45 e fanno quanto si è proposto.

Problema XXXVIII.

Trovisi due numeri quadrati che aggionti insieme la somma sia 1 quadrata.

Piglisi un numero quadrato a beneplacito (poniamo 9). Hor trovisi due numeri quadrati che cavato l'uno dell'altro resti 9. Ponghisi che l'uno sia come si voglia, pur che vi sia una potenza accompagnata con Tanti e numero, cioè che il lato di tal quadrato naschi da un Tanto più in numero, che il suo quadrato sia meno di 9 e sia $1^{\underline{1}} + 2$, che sarà il quadrato $1^{\underline{2}}$; l'altro $1^{\underline{2}}$ +

$4^{\underline{1}}$ + 4, che cavato l'uno dell'altro resta $4^{\underline{1}}$ + 4 e questo è eguale a 9, che agguagliato, il Tanto vale $1 frac14$; il suo quadrato è $1\frac{9}{16}$ e questo è uno delli numeri addimandati e l'altro è 9, il quale aggionto con $1\frac{9}{16}$ fanno $10\frac{9}{16}$, ch'è numero quadrato che il suo lato è $3\frac{9}{16}$; ma volendo li dui numeri quadrati senza rotti si lnoltiplicano per 16 e [si] haverà 25 e 144, che aggionti insieme fanno 169, ch'è quadrato. E così ne nasce la seguente regola.

Se si haveranno a trovare dui numeri quadrati che gionti insieme faccino quadrato, piglisi dui numeri quadrati differenti fra loro, cioè che non siano pari e il minore si cavi del maggiore e lo restante si parta per il doppio del lato del minore e il quadrato dell'avenimento sarà uno delli numeri quadrati che si cercano e il maggiore delli due presi sarà l'altro, come per essempio piglisi 4 e 36, che cavato l'uno dell'altro resta 32 e questo partito per 4, doppio di 2, lato del 4, ne viene 8, il suo quadrato è 64 e questo è uno delli numeri addimandati, e 36 è l'altro, che gionti insieme fanno 100, numero quadrato.

Problema XXXIX.

Trovisi tre numeri quadrati che la somma loro sia numero quadrato.

Per la regola sopradetta si trovino dui numeri quadrati che la somma sia numero quadrato e siano li dui medesimi sopradetti per men fastidio, cioè 64 e 36, che gionti insieme fanno 100, poi si trovino dui numeri quadrati che cavati l'uno dell'altro resti 100, che posto che l'uno sia $1^{\underline{2}}$ e l'altro $1^{\underline{2}}$ + $10^{\underline{1}}$ + 25, cavato l'uno dell'altro resta $10^{\underline{1}}$ + 25 eguale a 100, che agguagliato, il Tanto vale $7\frac{1}{2}$; il suo quadrato è $56\frac{1}{4}$ e questo è l'altro numero quadrato, che gionto con 36 e 64 fa $156\frac{1}{4}$, ch'è numero quadrato, che il suo lato è $12\frac{1}{2}$, e con questa regola se ne potrànno trovare infiniti.

Problema XL.

Trovisi dui numeri che la loro somma sia numero quadrato e cavato l'uno dell'altro resti numero quadrato.

Ponghisi che essi dui numeri insieme siano $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 9$ ch'è quadrato, overo altro composto che sia quadrato ma vi sia $1^{\underline{2}}$. Hora ponghisi che uno di questi due numeri sia $\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ e l'altro sari $\frac{1}{2}^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 9$, che gionti insieme fanno $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 9$, ch'è quadrato, e cavato l'uno dell'altro resta $6^{\underline{1}} + 9$ e questo è eguale a quale si sia quadrato (purche sia maggiore di 9). Dato dunque che sia 36, il Tanto valerà $4\frac{1}{2}$, e $\frac{1}{2}$ valerà $10\frac{1}{8}$ e e questo è uno delli dui numeri addimandati; l'altro, che fu posto $\frac{1}{2} + 6$ valerà $+ 9$, sari $46\frac{1}{8}$, che cavato l'uno dell'altro resta 36 e gionti insieme fanno $56\frac{1}{4}$ che pure quadrato.

Problema XLI.

Trovisi tre numeri che il primo dando al secondo la terza parte di se stesso et il secondo dando al terzo il suo quarto et il terzo dando al primo il suo quinto, che all'hor poi tutte tre le somme siano eguali.

Ponghisi che il primo sia $3^{\underline{1}}$, per fuggir rotti, e il secondo sia un numero a beneplacito (che non importa), ma ponghisi tale che habbia quarto per fuggir rotti, e sia 8, che dando il suo quarto al terzo gli restarà 6 e pigliando il suo terzo dal primo, ch'è $1^{\underline{1}}$, haveri $1^{\underline{1}} + 6$; resta che il primo, dato e ricevuto, sia $1^{\underline{1}} + 6$, ma dato che haverà il suo terzo gli restara $2^{\underline{1}}$, che cavato d'$1^{\underline{1}} + 6$ resta $6 - 1^{\underline{1}}$ e tanto bisogna che riceva dal terzo, acciochè dato e ricevuto, habbia $1^{\underline{1}} + 6$; ricevendo dal terzo $6 - 1^{\underline{1}}$, essendo la quinta parte, esso terzo sarà $30 - 5^{\underline{1}}$. Converrà ancora che il terzo, dando la sua quinta parte, ch'è $6 - 1^{\underline{1}}$, e ricevendo del secondo il suo quarto, ch'è 2, che, dato e ricevuto, sarà $26 - 4^{\underline{1}}$ e doverebbe essere $1^{\underline{1}} + 6$. Però $26 - 4^{\underline{1}}$ è eguale a $1^{\underline{1}} + 6$, che agguagliato, il Tanto valerà 4; e perché nel ponere i termini il primo fu $3^{\underline{1}}$ sarà 12, il secondo 8 perché non muta conditione, il terzo, ch'era $30 - 5^{\underline{1}}$, sarà 10 e sodisfanno alla proposta.

Problema XLII.

Trovisi quattro numeri tali che il primo dia al secondo la sua terza parte e il secondo dia al terzo il suo quarto e il terzo dia al quarto il suo quinto e il quarto dia al primo il suo sesto, e, dato e ricevuto che haveranno queste parti, divenghino poi eguali.

Ponghisi che il primo sia $3^{\underline{1}}$, per fuggir rotti, e il secondo sia un nunlcro che habbia quarto e sia 12; adunque al secondo, dando al terzo il suo quarto, gli restara 9 et ricevendo dal primo il suo terzo haverà $1^{\underline{1}} + 9$, e così bisognera che il primo, che resta $2^{\underline{1}}$, riceva dal quarto $9 - 1^{\underline{1}}$ per havere $1^{\underline{1}} + 9$ e ricevendo dal quarto $9 - 1^{\underline{1}}$, ch'è la sesta parte, esso quarto sarà $54 - 6^{\underline{1}}$, che dando la sua sesta parte primo gli restara $45 - 5^{\underline{1}}$, e per havere $1^{\underline{1}} + 9$ bisogna che riceva dal terzo $6^{\underline{1}} - 36$ e questo è il quinto del terzo adunque tutto il terzo sarà $30^{\underline{1}} - 180$ e dando il suo quinto al quarto gli restara $24^{\underline{1}} - 144$ ricevendo dal secondo il suo quarto, ch'è 3, haverà $24^{\underline{1}} - 141$ e questo deve esserè eguale a $1^{\underline{1}} + 9$, che agguagliato, il Tanto valerà 110 il primo, che fu posto $3^{\underline{1}}$, sarà $\frac{450}{23}$, il secondo 12, il terzo $\frac{360}{23}$ et il quarto $\frac{342}{23}$, per sodisfare a quanto si è proposto, ma per fuggir li rotti levisi il denominatore alli rotti moltiplicando essi numeri per 23, e così il primo sarà 450, il secondo 276, il terzo 360 e il quarto 342.

Problema XLIII.

Faccisi di 12 due parti tali che gionto all'una la quarta parte dell'altra la somma sia 6.

Ponghisi che l'una parte sia $4^{\underline{1}}$, l'altra sarà $12 - 4^{\underline{1}}$ e ricevendo la quarta parte dall'altra, ch'è $1^{\underline{1}}$, farà $12 - 3^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 6, che agguagliato, il Tanto vale 2; però l'una parte, che fu posta $4^{\underline{1}}$ sarà 8 e l'altra sarà 4 e ne nasce la seguente regola.

Se si haverà a dividere un numero in due parti tali che la parte date dell'una aggionta all'altra faccia un dato numero, levisi uno per regoll della parte data e lo restante si salvi, e del numero da dividersi si levi il numero dato e lo restante si parta per il numero salvato e l'avenimento si moltiplichi per la parte data, che il produtto sarà una delle parti chi si cercano. E per essempio, havendosi a fare di 100 due parti tali che il quarto dell'una gionto con l'altra faccia 40, cavisi 40 di 100, resta 60 t questo si parta per 3, cioè per 1 meno della parte data, ch'è il quarto, ne viene 20 e questo si moltiplichi per 4, cioè per la parte data, fa 80 e 80 e l'una delle parti e l'altra sarà 20, cioè lo restante sino a 100, ma se la parte data fosse $\frac{2}{5}$, si moltiplicheria 60 per 2 e il produtto si partirebbe per 5.

Problema XLIIII.

Trovisi quattro numeri tali che il primo ricevendo la terza parte di tutti tre gli altri insieme et il secondo pigliando il quarto di tutti tre gli altri insieme et il terzo pigliando il quinto di tutti tre gli altri insieme et il quarto pigliando il sesto di tutti tre gli altri insieme, essi siano tutti eguali.

Ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$, gli altri tre un numero come si voglia ma che habbia terzo, per fuggir rotti, e sia 12. Se adunque il primo piglia dagli altri tre il suo terzo, ch'è 4, haverà $1^{\underline{1}} + 4$ e tutti quattro insieme saranno $1^{\underline{1}} + 12$, e per trovare il secondo faccisi d'$1^{\underline{1}} + 12$ due parti, che l'una ricevendo dall'altra il quarto faccia $1^{\underline{1}} + 4$ acciochè sia pari, havuto che habbia il terzo dagli altri tre, e per la regola detta di sopra nel problema 43, cavisi $1^{\underline{1}} + 4$ d'$1^{\underline{1}} + 12$, resta 8 e questo si parta per 3, cioè per un meno della parte, ch'è il quarto, ne viene $2\frac{2}{3}$ e questo si moltiplichi per 4, fa $10\frac{2}{3}$, il quale si cavi d'$1^{\underline{1}} + 12$ resta $1^{\underline{1}} + 1$ e questo sarà il secondo; il terzo, ritrovato con la medesima regola sarà $1^{\underline{1}} + 2$ e il quarto $1^{\underline{1}} + 2\frac{2}{5}$; resta che tutti quattro insieme siano $1^{\underline{1}} + 12$, ma essi sono $4^{\underline{1}} + 5\frac{11}{15}$, dunque questo è eguale a $1^{\underline{1}} + 12$, che agguagliato, il Tanto valerà 45 e 45 sarà il primo, che fu posto $1^{\underline{1}}$; il secondo, ch'era $1^{\underline{1}} + 1\frac{1}{3}$ sarà $4\frac{154}{45}$; il terzo $\frac{184}{45}$ e il quarto $\frac{202}{45}$; e perché tutti il numeri in questa proportione faranno il medesimo effetto, però per fuggir il rotto levisi l'esimo a ciaatin che il primo sarà 94, il secondo 154, il terzo 184 e il quarto 202.

Problema XLV.

Trovisi tre numeri che il primo dia al secondo la sua terza parte, il secondo dia al terzo la sua quarta parte e il terzo dia al primo la sua quinta parte e dato e ricevuto che haveranno, ciascuno sia 12.

Per la 41 di questo si è veduto che quando la proposta ha queste medesime conditioni ma non ha diffinito il numero del 12, il primo delli tre numeri e 12, il secondo 8 e il terzo 10; però ponghisi che il primo ma $12^{\underline{1}}$, il secondo $8^{\underline{1}}$ e il terzo $10^{\underline{1}}$ e così dando il primo il suo terzo rtsta $8^{\underline{1}}$ e se riceve dal terzo il suo quinto, ch'è $2^{\underline{1}}$, diviene $10^{\underline{1}}$ doverebbe essere 12, perché la proposta dice che, dato e ricevuto, habbiano 12; però $10^{\underline{1}}$ saranno eguali a 12, che agguagliato, il Tanto $1\frac{1}{5}$; però il primo, che fu posto $12^{\underline{1}}$, sarà $14\frac{2}{5}$, il secondo $9\frac{3}{5}$ e il terzo 12 e fanno quanto si è proposto. E volendosi operare altrimenti faccisi cosi.

Egli e manifesto ch'essendo 12 ciascuno di loro, dato e ricevuto che haveranno le parti, che fra tutti tre saranno 36; però, essendosi posto che il primo sia $12^{\underline{1}}$, il secondo $8^{\underline{1}}$ e il terzo $10^{\underline{1}}$, che gionti insieme fanno $30^{\underline{1}}$ e doverebbono fare 36, però $30^{\underline{1}}$ sono eguali a 36, che agguagliato, il Tanto vale $1\frac{1}{5}$ (come fu detto di sopra), e questa proposta ancora potria dire: faccisi di 36 tre parti con le conditioni dette di sopra e, dato e ricevuto, tutte siano pari.

Problema XLVI.

Faccisi di 48 quattro parti tali che la prima dia alla seconda il suo terzo, la seconda dia alla terza il suo quarto, la terza dia alla quarta il suo quinto e la quarta dia alla prima il suo sesto e, dato e ricevuto he haveranno, esse siano pari.

Questa proposta e simile alla 42 salvo che ci è il numero determinato, che, dato e ricevuto, ciascuna delle parti deve essere 12, cioè il quarto di 48; però servendoci delli numeri trovati in quella, ponghisi che la prinm parte sia $450^{\underline{1}}$, la seconda $276^{\underline{1}}$, la terza $360^{\underline{1}}$ e la quarta $342^{\underline{1}}$, lie gionte insieme fanno $1428^{\underline{1}}$

e doverebbono fare 48; però $1428^{\underline{1}}$ sono eguali a 48, che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{12}{357}$. Però la prima parte, che fu posta $450^{\underline{1}}$ sarà $\frac{54300}{357}$, la seconda $\frac{3312}{357}$, la terza $\frac{4320}{357}$ e la quarta $\frac{}{4}104357$ e sodisfanno a quanto fu proposto.

Problema XLVII.

Trovisi due numeri over quantità che l'uno sia 2 più dell'altro e il loro quadrati gionti insieme faccino 24.

Ponghisi che l'uno sia $1^{\underline{1}}$ l'altro di necessità sarà $1^{\underline{1}} + 2$. Hor vedasi se il quadrato di tutti dui gionti insieme fanno 24, ma il quadrato dell'uno è $1^{\underline{2}}$ e il quadrato dell'altro sarà $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$, che gionti insieme fanno $2^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$ e questo è eguale a 24, che levato 4 da ogni parte e ridutto a $1^{\underline{2}}$, si haverà 10 eguale a $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$, che, seguendosi il Capitolo, il Tanto valerà R.q.11 $-$ 1, e questo è uno delli numeri, e l'altro sarà R.q.11 $+$ 1 e ne nasce la infrascritta regola.

Se si haveranno a trovare due numeri over quantità che l'uno sia maggiore dell'altro un dato numero e che li loro quadrati gionti insieme debbiano fare un terminato numero, cavisi la metà del quadrato del dato numero del terminato numero, e il lato della metà del restante meno la metà del dato numero e uno delli numeri addimandati, e l'altro e il medesimo lato più la metà del dato numero. Come per essempio, volendosi trovare due numeri che l'uno sia 4 più dell'altro e che li loro quadrati gionti insieme faccino 36, cavisi 8, metà del quadrato dl 4, di 36, resta 28, che la metà a 14 e così R.q.14 $-$ 2 e R.q.14 $+$ 2 sono li numeri addimandati.

Avertendosi che se il lato del restante fusse maggiore delle differenze si tratteria dell'impossibile.

Problema XLVIII.

Trovisi due numeri che l'uno sia $1^{\underline{1}}$ più dell'altro e che li loro quadrati gionti insieme faccino 36.

Per la sopradetta regola cavisi $\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ (metà del quadrato d'$1^{\underline{1}}$) di 36, resta 36 $- \frac{1}{2}^{\underline{2}}$, la metà è $18 - \frac{1}{4}^{\underline{2}}$ e R.q.$\llcorner 18 - \frac{1}{4}^{\underline{2}} \lrcorner - \frac{1}{2}^{\underline{1}}$ è uno delli numeri addimandati; l'altro e R.q.$\llcorner 18 - \frac{1}{4}^{\underline{2}} \lrcorner + \frac{1}{2}^{\underline{1}}$.

Problema XLIX.

Faccisi di 10 due parti tali che moltiplicate l'una via l'altra faccino 16.

Ponghisiche l'una di dette parti sia $1^{\underline{1}}$, l'altra sarà $10 - 1^{\underline{1}}$, che moltiplicate l'una via l'altra fanno $10^{\underline{1}} - 1$ e questo è eguale a 16, che levato il meno si haverà $1^{\underline{2}} + 16$ eguale a $10^{\underline{1}}$. Piglisi la metà delli Tanti, ch'è 5, e si quadri, fa 25 e se ne cavi 16, resta 9, che il suo lato è 3, il quale si cava di 5, metà delli Tanti, resta 2 e 2 vale il Tanto e questa è una delle parti; l'altra sarà 8 e da simili domande nasce Ia seguente regola.
Se si haverà, a dividere una quantità in due parti che moltiplicata l'una via l'altra faccino un terminato numero, piglisi il mezzo della quantità che si deve dividere e quadrisi e del produtto se ne cavi il terminato numero e del restante se ne pigli il lato e si aggionghi alla metà di detta quantita, che la somma sarà una delle parti addomandate.

Faccisi di $12 + 1^{\underline{1}}$ due parti tali che moltiplicata l'una via l'altra faccino 20.

Per la sopradetta regola piglisi la metà della quantita, ch'è $6 + \frac{1}{2}^{\underline{1}}$, che il suo quadrato sarà $36 + 6^{\underline{1}} + \frac{1}{4}^{\underline{2}}$ che cavatone il terminato numero, cioè 20, resta $16 + 6^{\underline{1}} + \frac{1}{4}^{\underline{2}}$ e di questo se ne pigli il lato e si aggionghi alla metà della quantità, fa R.q.$\llcorner 16 + 6^{\underline{1}} + \frac{1}{4}^{\underline{2}} + 6 + \frac{1}{2}^{\underline{1}}$, e questa è una delle parti; l'altra sarà lo restante sino a $12 + 1^{\underline{1}}$, cioè $6 + \frac{1}{2}^{\underline{1}} -$ R.q.$\llcorner 16 + 6^{\underline{1}} + \frac{1}{4}^{\underline{2}} \lrcorner$, e questa operatione è necssarijssima per sciogliere assai problemi, e maggiormente di tre quantità proportionali (come si vedrà piùavanti).

Problema XLIX bis.

Faccisi di 12 due parti tali che li loro quadrati gionti insieme faccino 104.

Ponghisi che l'una di dette parti sia $1^{\underline{1}}$, l'altra sarà $12 - 1^{\underline{1}}$, li loro quadrati Sono $1^{\underline{2}}$ e $144 - 24^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$ che gionti insieme fanno $2^{\underline{2}} - 24^{\underline{1}} + 144$ e questo è eguale a 104, che levato il meno e 104 per parte e ridutto a $1^{\underline{2}}$ si haverà $1^{\underline{2}} + 20$ eguale a $12^{\underline{1}}$, che agguagliato il Tanto valerà 2 e questa sarà una parte e l'altra lo restante sino a 12, cioè 10, e da questa domanda ne nasce la infrascritta regola.

Se si haverà a dividere una quantità in due tal parti che li loro quadrati gionti insieme faccino un dato numero, quadrisi detta quantità e del produtto se ne cavi il dato numero e del restante se ne pigli la metà e si cavi del quadrato della metà di detta quantità e del restante se ne pigli il lato e si aggionghi alla metà di detta quantità e la somma sarà una delle dette parti.

Faccisi di $12 - 1^{\underline{1}}$ due parti tali che li loro quadrati gionti insieme faccino 48.

Per la regola sopradetta quadrisi detta quantita, fa $144 - 24^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$ cavisene 48, resta $96 - 24^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$ che cavato del quadrato di $6 - \frac{1}{2}^{\underline{1}}$, ch'è $36 - 6^{\underline{1}} + \frac{1}{4}^{\underline{2}}$, resta $18^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}} - 60$; piglisene il lato et aggiongasegli $6 - \frac{1}{2}^{\underline{1}}$, fa $6 - \frac{1}{2}^{\underline{1}} + \text{R.q.}\llcorner 18^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}} - 60\lrcorner$ e questa è una parte; l'altra sarà $6 - \frac{1}{2}^{\underline{1}} - \text{R.q.}\llcorner 18^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}} - 60\lrcorner$.
Faccisi di 12 due parti tali che li loro quadrati gionti insieme faccino $144 - 2^{\underline{1}}$.

Quadrisi 12 fa 144, cavisene $144 - 2^{\underline{1}}$, resta $2^{\underline{1}}$, che partito per 2 ne viene $1^{\underline{1}}$; cavisi di 36 (quadrato di 6, metà di 12) resta $36 - 1^{\underline{1}}$ e $\text{R.q.}\llcorner 36 - 1^{\underline{1}}\lrcorner$ aggionta a 6 fa $6 + \text{R.q.}\llcorner 36 - 1^{\underline{1}}\lrcorner$ e questa è una parte; l'altra sarà $6 - \text{R.q.}\llcorner 36 - 1^{\underline{1}}\lrcorner$.

Problema L.

Trovisi un numero che moltiplicato per 200 e per 5 gli dui produtti siano l'uno il quadrato dell'altro.

Ponghisi che tal numero sia $1^{\underline{1}}$, che moltiplicato per 200 e per 5 fa $200^{\underline{1}}$ e $5^{\underline{1}}$, e il quadrato di $5^{\underline{1}}$ è $25^{\underline{2}}$ e questo è eguale a $200^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 8 et 8 sarà il numero che si cerca, il quale moltiplicato per 200 e per 5 fa 1600 e 40, che l'uno e il quadrato dell'altro (come si vuole).

Problema LI.

Faccisi di 20 due parti tali che lo eccesso delli loro quadrati sia 120.

Ponghisi che l'una sia $10 + 1^{\underline{1}}$ e l'altra $10 - 1^{\underline{1}}$ li loro quadrati sono $1^{\underline{2}} + 20^{\underline{1}} + 100$ e $1^{\underline{2}} - 20^{\underline{1}} + 100$, che il loro eccesso è $40^{\underline{1}}$ e doverebbe essere 120, però $40^{\underline{1}}$ sono eguali a 120, che agguagliato, il Tanto valerà 3, si che una parte sarà 13 e l'altra 7 e ne nasce la seguente regola.
Se si haverà a dividere una quantità in due parti tali che lo eccesso delli loro quadrati sia un dato numero, partasi il dato numero per il doppio della quantità e l'avenimento si gionghi e cavi della metà della quantità, che la somma e restante saranno le parti cercate.

Problema LII.

Faccisi di 10 due parti tali che moltiplicata l'una via l'altra faccino quanto la differenza di dette parti moltiplicata per 8.

Ponghisi che una parte sia $1^{\underline{1}}$, l'altra sarà $10 - 1^{\underline{1}}$ che moltiplicate l'una via l'altra fa $10^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}}$ qual si salvi; poi si cavi l'una dell'altra che non importa quale si pigli per la minor parte: hor cavisi $1^{\underline{1}}$ di $10 - 1^{\underline{1}}$, resta $10 - 2\ ^{\underline{1}}$, che moltiplicato per 8 fa $80 - 16^{\underline{1}}$ e questo è eguale a $10^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}}$ serbato di sopra; levisi il meno si haverà $1^{\underline{2}} + 80$ eguale a $26^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà $13 -$ R.q.89 e quista sarà una parte; l'altra sarà lo restante sino in 10, cioè

R.q.$89 - 3$, e ne nasce la seguente regola.

Se si haverà a dividere una quantità in due parti tali che a moltiplicare l'una via l'altra debbia fare quanto la differentia di dette parti moltiplicata per un dato numero, aggionghisi la metà della quantità al dato numero e la somma si quadri e del produtto si cavi il produtto del dato numero moltiplicato per la quantità e di quello che resta se ne pigli il lato e si cavi del dato numero aggionto con la metà della quantità e lo restante sarà una delle parti che si cercano.

Faccisi di $10 + 2^{\underline{1}}$ due parti tali che moltiplicata l'una via l'altra faccia quanto la differenza di dette parti moltiplicata per 6.
Aggionghisi $5 + 1^{\underline{1}}$, metà della quantità, a detto 6, fa $11 + 1^{\underline{1}}$, che il suo quadrato è $121 + 22^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$, cavisene $60 + 12^{\underline{1}}$, produtto di $10 + 2^{\underline{1}}$ per 6, resta $61 + 10^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$, che il suo lato sarà R.q.$\llcorner 61 + 10^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}} \lrcorner$, che cavato d'$11 + 1^{\underline{1}}$ detto di sopra, resta $11 + 1^{\underline{1}} -$ R.q.$\llcorner 61 + 10^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}} \lrcorner$ e questa è una parte, che cavata di $10 + 2^{\underline{1}}$ resta R.q.$\llcorner 61 + 10^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}} \lrcorner - 1^{\underline{1}} + 1$ per l'altra parte.

Problema LIII.

Trovinsi dui numeri over quantità che l'uno sia 4 piùdell'altro e che moltiplicati l'uno per l'altro faccino 60.

Ponghisi che l'uno d'essi numeri sia $1^{\underline{1}} + 2$ e l'altro $1^{\underline{1}} - 2$, acciochè siano 4 l'uno piùdell'altro; resta che il produtto loro sia 60, ma $6^{\underline{2}} - 4$, però sarà eguale a 60, che levato il meno si haverà 1 eguale a 64, che il Tanto valerà 8, e però il primo numero, che fu posto $1^{\underline{1}} + 2$, sarà 10 e l'altro 6 e ne nasce la infrascritta regola.
Se si haverà a trovar dui numeri tali che l'uno sia maggiore dell'altro un dato numero e che la differentia de' loro quadrati sia un altro dato numero, piglisi il quarto del quadrato de' numeri e si aggionghi alla differentia de' quadrati

e della somma se ne pigli il lato, al quale se gli aggionghi e cavi la metà della differentia delli dui numeri da trovarsi, che la somma e lo restante sarà gli dui cercati numeri.
Trovinsi dui numeri overo quantità tali che l'uno sia quattro più dell'altro e che moltiplicato l'uno via l'altro facciano 24.
Ponghisi che l'uno delli numeri sia $1^{\underline{1}} + 2$ e l'altro $1^{\underline{1}} - 2$, che il lor produtto è $1^{\underline{2}} - 4$ e questo è eguale a 24, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.28. Però il primo numero, che fu posto [$1^{\underline{1}} + 2$, sarà R.q.28 + 2] e l'altro R.q.28 − 2, e ne nasce la seguente regola.
Se si haverà da trovare due numeri over quantità in uno eccesso dato et che il produtto loro habbia da fare un dato numero, al dato numero si aggionga il quadrato della metà dell'eccesso dato et della somma si pigli il lato et a questa s'aggionga et cavi la metà dell'eccesso dato et la somma et restante saranno li dui numeri.

Problema LIIII.

Trovinsi due numeri tali che l'uno sia quattro volte quanto l'altro e che la somma delli quadrati loro sia cinque volte quanto la somma d'essi dui numeri.

Ponghisi che il minor numero sia $1^{\underline{1}}$ maggiore sarà $4^{\underline{1}}$ e li quadrati loro sono $1^{\underline{2}}$ e $16^{\underline{2}}$ che la somma loro è $17^{\underline{2}}$ e la somma de' lati è $5^{\underline{1}}$, che li suoi cinque tanti sono $25^{\underline{1}}$ e questo è eguale a $17^{\underline{2}}$, che partita l'una e l'altra parte per $1^{\underline{1}}$ ne verrà 25 eguale a $17^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà $1\frac{8}{17}$ e tanto sarà il minor numero, et il maggiore $5\frac{13}{17}$.

Problema LV.

Trovisi dui numeri che il maggiore sia tre volte il minore a che il composto delli quadrati loro sia dodici volte l'eccesso loro.

Ponghisi che il minore sia $1^{\underline{1}}$, il maggiore sarà $3^{\underline{1}}$ e l'eccesso loro sarà $2^{\underline{1}}$; li quadrati loro saranno $1^{\underline{2}}$ e $9^{\underline{2}}$ cioè in tutto 10 e questo è eguale a 12 volte

$2^{\underline{1}}$, eccesso loro, cioè a $24^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà $2\frac{2}{5}$; però il minore sarà $2\frac{2}{5}$ et il maggiore $7\frac{1}{5}$ e fanno quanto si è proposto.

Problema LVI.

Trovisi dui numeri tali che il maggiore sia tre volte il minore e che l'eccesso de'quadrati loro sia 12 volte quanto tutti dui li numeri insieme.

Ponghisi che il minore sia $1^{\underline{1}}$, il maggiore sarà $3^{\underline{1}}$ e li quadrati loro saranno $1^{\underline{2}}$ e $9^{\underline{2}}$ e l'eccesso loro è $8^{\underline{2}}$ et è eguale a $48^{\underline{1}}$, cioè a dodici volte il composto delli due numeri, che agguagliato, il Tanto valerà 6 e 6 sarà il minor numero et il maggiore 18.

Problema LVII.

Trovisi dui numeri tali che il maggiore sia tre volte il minore e che l'ecceesso de' quadrati loro sia 24 volte quanto l'eccesso di essi due numeri.

Ponghisi che il minor numero sia $1^{\underline{1}}$, il maggiore sarà $3^{\underline{1}}$, e l'eccesso sarà $2^{\underline{1}}$ e li quadrati loro sono $1^{\underline{2}}$ e $9^{\underline{2}}$, che il loro eccesso è $8^{\underline{2}}$ e questo è eguale a 24 volte $2^{\underline{1}}$, cioè a $48^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 6 e 6 sarà il minor numero e il maggiore sarà 18.

Problema LVIII.

Trovisi dui numeri tali che il maggiore sia tre volte quanto il minore e che il quadrato del minore sia 12 volte quanto il maggiore.
Ponghisi che il minore sia $1^{\underline{1}}$, il maggiore sarà $3^{\underline{1}}$; il quadrato del minore sarà $1^{\underline{2}}$ e questo sarà eguale a 12 volte il maggiore, cioè $36^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 36 e 36 sarà il minore e il maggiore sarà 108.

Problema LVIIII.

Trovisi dui numeri tali che il maggiore sia tre volte il minore e che il quadrato del minore sia 4 volte quanto tutti dui li numeri insieme.
Ponghisi che il minore sia $1^{\underline{1}}$, il maggiore sarà $3^{\underline{1}}$ ed ambidui insieme saranno $4^{\underline{1}}$ e il quadrato del minore sarà $1^{\underline{1}}$, il quale sarà eguale a 4 volte $4^{\underline{1}}$, cioè $16^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 16 e 16 sarà il minore et il maggiore sarà 48, che fanno quanto si è proposto.

Problema LX.

Trovisi un numero che accompagnato con 6 e 10 e pigliati a dui a dui e moltiplicati nel restante, faccino tre numeri in proportione Aritmetica, cioè di eguale eccesso.

Ponghisi che il detto numero sia $1^{\underline{1}}$; composto con il 10 fa $1^{\underline{1}} + 10$ e moltiplicato per 6 fa $6^{\underline{1}} + 60$, e se $1^{\underline{1}}$ si aggiongerà con il 6 fa $1^{\underline{1}} + 6$ e moltiplicato nel 10 fa $10^{\underline{1}} + 60$ e se si giongeranno insieme il 6 et il 10 fa 16 e moltiplicato via $1^{\underline{1}}$ fa $16^{\underline{1}}$, e così li tre produtti saranno $6^{\underline{1}} + 60$, $10^{\underline{1}} + 60$ et $16^{\underline{1}}$. Hor resta che essi siano di eguale eccesso, ma perché non si sa qual sia maggiore e qual minore, ma solo si conosce che $10^{\underline{1}} + 60$ e maggiore di $6^{\underline{1}} + 60$, però $6^{\underline{1}} + 60$ non pue essere il maggiore, ma dato che sia il mezzano, l'eccesso suo con il maggiore sarà $4^{\underline{1}}$ e presuposto che $16^{\underline{1}}$ sia il minore, l'eccesso suo, cioè di $6^{\underline{1}} + 60$ con $16^{\underline{1}}$, sarà $60 - 10^{\underline{1}}$ e questo sarà eguale all'altro eccesso, ch'è $4^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{30}{7}$, cioè $4\frac{2}{7}$ e questo sarà il numero cercato.

Problema LXI.

Dividasi 25, numero quadrato, in dui numeri quadrati.

Ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$ converrà dunque che l'altro sia $25 - 1^{\underline{2}}$ acciochè gionti insieme faccino 25, e deve esserè eguale a un quadrato, e perché non e sottoposto a cosa alcuna (se non che sia quadrato), bisogna immaginarsi un quadrato che il suo lato sia 5, lato del 25, meno tanti $^{\underline{1}}$ quanti ne pare, poniamo 3, cioè che esso lato sia $5 - 3^{\underline{1}}$, che il quadrato sarà $25 - 30^{\underline{1}} + 9^{\underline{2}}$ e questo è eguale a $25 - 1^{\underline{2}}$, acciochhè che $25 - 1^{\underline{2}}$ sia eguale a un quadrato, che levato il meno e il numero da ogni parte, si haverà $30^{\underline{1}}$ eguale a $10^{\underline{2}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 3 e però il primo numero quadrato, che fu posto $1^{\underline{2}}$, sarà 9 e l'altro sarà 16, e ne nasce la seguente regola.

Se si haverà a dividere un numero quadrato in due numeri quadrati, piglisi un numero a beneplacito e si moltiplichi via il lato del quadrato proposto e il suo doppio si parta per uno più del suo quadrate e il quadrato dell'avenimento sarà uno delli dui numeri quadrati che si cercano e l'altro sarà lo restante.

Problema LXII.

È 52 divisibile in dui numeri quadrati, cioè in 36 e 16. Hor lo voglio ridividere in dui altri numeri quadrati che non siano li medesimi: si domanda quali saranno.

Piglisi il lato di tutti dui li quadrati, che l'uno e 6 e l'altro 4; ponghisi che il lato dell'uno delli dui numeri quadrati che si cercano sia $1^{\underline{1}} + 14$ e il lato dell'altro sia quanti Tanti ne pare, purche sieno più di $1^{\underline{1}} - 6$, e sia $2^{\underline{1}} - 6$, che li loro quadrati saranno $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 16$ e $4^{\underline{2}} - 24^{\underline{1}} + 36$, che gionti insieme fanno $5 - 16^{\underline{1}} + 52$ e questo è eguale a a 52, che levato il meno e il numero si haverà $5^{\underline{2}}$ eguale a $16^{\underline{1}}$ che agguagliato, il Tanto valerà $3\frac{1}{5}$; però il primo lato, che fu posto $1^{\underline{1}} + 4$, sarà $7\frac{1}{5}$ e l'altro, che fu posto $2^{\underline{1}} - 6$, sarà $\frac{2}{5}$, e li numeri quadrati saranno $51\frac{21}{25}$ e $\frac{4}{25}$ che gionti insieme fanno 52.

Problema LXIII.

Trovisi dui numeri quadrati che l'uno sia 96 più dell'altro.

Ponghisi che il lato di uno di essi quadrati sia $1^{\underline{1}}$ e l'altro sia 1 più un numero, tal che il suo quadrato sia minore di 96 e sia $1^{\underline{1}} + 8$; li quadrati loro saranno $1^{\underline{2}}$ e $1^{\underline{2}} + 16^{\underline{1}} + 64$, che lo eccesso loro è $16^{\underline{1}} + 64$ e questo è eguale

a 96, che levato 64 da ogni parte si haverà $16^{\underline{1}}$ eguale a 32 e il Tanto valerà 2; però il primo lato sarà 2 e l'altro 10 e il numeri quadrati saranno 4 e 100, che il loro eccesso e 96 (come si nule) e ne nasce la seguente regola.
Se si haveranno da trovare dui numeri quadrati che l'uno sia maggiore dell'altro un dato numero, piglisi un numero quadrato minore del dato numero e si cavi del dato numero e lo restante si parta per il doppio del lato del numero quadrato e l'avenimento si quadri, che il prosarà uno delli due numeri quadrati che si cercano e questo, aggionto con il numero dato, ne verrà l'altro numero quadrato.

Problema LXIIII.

Facciasi di 50 due parti tali che la metà della seconda gionta alla prima faccia quanto il terzo della prima gionto con la seconda.

Ponghisi che la prima sia $1^{\underline{1}}$; la seconda sarà $50 - 1^{\underline{1}}$ che la sua metà è $25 - \frac{1}{2}^{\underline{1}}$ quale gionta con la prima fa $25 + \frac{1}{2}^{\underline{1}}$; il terzo della prima è $\frac{1}{3}^{\underline{1}}$, che gionto con la seconda fa $50 - \frac{2}{3}^{\underline{1}}$ e questo è eguale a $25 + \frac{1}{2}^{\underline{1}}$, che levato il meno e simile da simile haveremo $1\frac{1}{6}^{\underline{1}}$ eguale a 25, che agguagliato, il Tanto valerà $21\frac{3}{7}$ e tanto sarà la prima parte e la seconda $28\frac{4}{7}$.

Problema LXV.

Facciasi di 60 due parti che l'una moltiplicata per 12 faccia quanto l'altra moltiplicata per 22.

Ponghisi che l'una sia $1^{\underline{1}}$, che l'altra sarà $60 - 1^{\underline{1}}$ che moltiplicata la prima per 12 fa $12^{\underline{1}}$ e la seconda per 22 fa $1320 - 22^{\underline{1}}$ et è eguale a $12^{\underline{1}}$, che levato il meno et agguagliato il Tanto valerà $38\frac{14}{17}$ et tanto è la prima e la seconda sarà $21\frac{3}{17}$ che moltiplicata per 22 fa $465\frac{15}{17}$ e moltiplicato $38\frac{14}{17}$ per 12 fa similmente $465\frac{15}{17}$ come si propone.

Problema LXVI.

Trovisi un numero che aggionto a 4 e a 6 faccia dui numeri quadrati.

Ponghisi che tal numero sia $1^{\underline{1}}$, che aggionto con 4 e con 6 fa $1^{\underline{1}}$, + 4 e $1^{\underline{1}}$, + 6 e l'uno e l'altro è eguale a un quadrato e questa a una specie che si chiama doppiù agguaglianza, la quale insegna Diofante, e in questa vedasi l'eccesso o differenza ch'è da $1^{\underline{1}}$, + 4 a $1^{\underline{1}}$, + 6, che 2 e si trovino dui numeri che il loro produtto sia 2, ma bisogna che siano tali che la quarta parte del quadrato dell'eccesso loro sia maggiore del 4, numero proposto, e siano li dui numeri + e 8. Il quarto del quadrato dello eccesso loro, ch'è $15\frac{1}{64}$, sarà eguale a $1^{\underline{1}}$, + 4, overo il quarto del quadrato del composto loro, ch'è $17\frac{1}{64}$, è eguale a $1^{\underline{1}}$, + 6, che il Tanto valerà $11\frac{1}{64}$ e questo sarà il numero cercato, che gionto con 4 fa $15\frac{1}{64}$ e con 6 fa $17\frac{1}{64}$, che ciascun di loro e numero quadrato.
Overo in altro modo, piglisi un quadrato e sia $1^{\underline{1}}$ e se ne cavi il 4, resta $1^{\underline{1}} -$ 4. Hor ponghisi che il numero cercato sia $1^{\underline{1}} - 4$, che giontoli 4 fa quadrato, cioè 1 e giontoli 6 fa $1^{\underline{1}} + 2$ e questo è eguale a un quadrato, il lato del quale bisogna che sia $1^{\underline{1}}$ − tanto numero, che sia più di 4. Hor sia 5, cioè $1^{\underline{1}} - 5$, il suo quadrato sarà $1^{\underline{2}} - 10^{\underline{1}} + 25$ e questo è eguale a $1^{\underline{2}} + 2$, che levato il meno e simile da simile, si haveranno $10^{\underline{1}}$ eguale a 23, che il Tanto valerà $2\frac{3}{10}$; il suo quadrato è $5\frac{29}{100}$ del quale se ne cavi 4, resta $1\frac{29}{100}$ e questo è il numero che aggionto con 4 e con 6 fa $5\frac{29}{100}$ e $7\frac{29}{100}$, che l'uno e l'altro e numero quadrato, che li suoi lati sono $2\frac{3}{10}$ e $2\frac{7}{10}$.

Problema LXVII.

Trovisi un numero che cavatone 20 e 30 li restanti siano numeri quadrato.

Piglisi un quadrato e sia $1^{\underline{2}}$ e se li aggionghi 20 fa $1^{\underline{2}} + 20$ e ponghisi che il numero cercato sia $1^{\underline{2}} + 20$, che cavatone 20 resta quadrato, ma cavatone 30 resta $1^{\underline{2}} - 10$, il quale è eguale a un quadrato, il lato del quale si ponghi essere $1^{\underline{2}}$ meno un numero come si voglia e sia questo numero 4, cioè il lato $1^{\underline{2}} - 4$; il suo quadrato è $1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 16$ e questo è eguale a $1^{\underline{2}} - 10$, che levato il meno e simile da simile si haverà 81 eguale a 26 e il Tanto valerà $3\frac{1}{4}$; il suo quadrato sarà $10\frac{9}{16}$, che gionto con 20 fa $30\frac{9}{16}$ e questo è il numero che si cerca, che cavatone 20 e 30 li restanti, che sono $10\frac{9}{16}$ e $\frac{9}{16}$, sono numeri quadrati.

Problema LXVIII.

Faccisi di 12 due parti tali che li loro quadrati gionti insieme faccino quanto il moltiplicato di esse parti giontoli 48.

Ponghisi che l'una di dette parti sia $1^{\underline{2}}$, l'altra sarà $12 - 1^{\underline{2}}$ e li loro quadrati saranno $1^{\underline{2}}$ e $1^{\underline{2}} - 24^{\underline{1}} + 144$ che gionti insieme fanno $144 + 2^{\underline{2}} - 24^{\underline{1}}$ e questo si salvi. Dipoi moltiplichisi l'una parte via l'altra, cioè $1^{\underline{1}}$ via $12 - 1^{\underline{1}}$ fa $12^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}}$ che giontoli 48 fa $12^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}} + 48$ e questo è eguale a $144 + 2^{\underline{2}} - 24^{\underline{1}}$ serbato di sopra, che levato il meno e il minor numero si haverà $3^{\underline{2}} + 96$ eguale a $36^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 4 e questo sarà una parte; l'altra sarà il resto sino in 12, cioè 8 e ne nasce la seguente regola.

Se una quantità si haverà a dividere in due parti tali che la somma delli quadrati loro sia eguale alla somma del moltiplicato di esse parti insieme con un dato numero, faccisi in questo modo. Quadrisi la proposta quantità e del quadrato si cavi il dato numero e quello che resta per regola si parta per 3 e l'avenimento si cavi del quarto del quadrato della quantità e del restante si pigli il lato e si aggionghi alla metà della quantita, che la somma sarà una delle parti che si cercano. Come per essempio, sia la quantità 9 e il dato numero 33. Quadrisi 9 fa 81 e di esso 81 si cavi 33, resta 48, quale si parta per 3, ne viene 16 e questo si cavi di $20\frac{1}{4}$ (quarto di 81), resta $4\frac{1}{4}$ che il suo lato è R.q.$4\frac{1}{4}$ il quale aggionto con $4\frac{1}{2}$, metà di 9, fa $4\frac{1}{2}$ + R.q.$4\frac{1}{4}$ e questa è una parte, la quale cavata di 9 resta $4\frac{1}{2}$ − R.q.$4\frac{1}{4}$ e questa è l'altra parte; e quando li numeri proposti non potrànno patire tal regola, trattera dell'impossibile.
Faccisi di 12 due parti tali che li loro quadrati gionti insieme faccino tanto quanto a moltiplicare l'uno via l'altro ed al produtto giongere $3^{\underline{1}}$.

Piglisi il quadrato di 12, ch'è 144 e se ne cavi $3^{\underline{1}}$, resta 144 − $3^{\underline{1}}$; partasi per 3, ne viene 48 − $1^{\underline{1}}$ e questo si cavi di 36, quarto del quadrato di 12, resta $1^{\underline{1}}$ − 12, che il suo lato è R.q.$\llcorner 1^{\underline{1}} - 12 \lrcorner$ che cavato di 6, metà di 12, resta 6 − R.q.$\llcorner 1^{\underline{1}} - 12 \lrcorner$ e questa a una parte; l'altra sarà 6 + R.q.$\llcorner 1^{\underline{1}} - 12 \lrcorner$.

Problema LXIX.

Faccisi di 40 due parti tali che a ciascuna giontoli un medesimo numero quadrato le somme loro siano dui numeri quadrati.

Prima trovinsi dui numeri che li quadrati loro siano minori di 40 e siano 2 e 4 e a ciascun di loro si gionghi $1^{\underline{1}}$ fa $1^{\underline{1}} + 2$ e $1^{\underline{1}} + 4$; li loro quadrati saranno $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 16$ et $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$, però da ciascuno levato $1^{\underline{2}}$ restara $8^{\underline{1}} + 16$ e $4^{\underline{1}} + 4$. Hor io pongo che il numero quadrato sia $1^{\underline{2}}$ e le parti fatte del 40 siano $8^{\underline{1}} + 16$ et $4^{\underline{1}} + 4$, che a ciascuna gionto $1^{\underline{2}}$ fa quadrato; resta ch'esse parti, cioè $8^{\underline{1}} + 16$ et $4^{\underline{1}} + 4$ gionte insieme siano 40, ma esse sono $12^{\underline{1}} + 20$. Però $12^{\underline{1}} + 20$ sono eguali a 40, che agguagliato, il Tanto valerà $1frac23$ e così il numero quadrato sarà $2\frac{7}{9}$ e le parti del 40, che furno poste $8^{\underline{1}} + 16$ et $4^{\underline{1}} + 4$, saranno $29\frac{1}{3}$ e $10\frac{2}{3}$, che a ciascuna aggionto $2\frac{7}{9}$ fa $32\frac{11}{9}$ e $13\frac{4}{9}$, che sono numeri quadrati.

Problema LXX.

Faccisi di 40 due parti che ciascuna di loro cavata di un medesimo numero quadrato, li restanti siano due numeri quadrati.

Ponghisi che il lato del numero quadrato sia $1^{\underline{1}}$ più un numero il quadrato del quale sia minore di 40 e sia $1^{\underline{1}} + 5$, che il suo quadrato sia $1^{\underline{2}} + 10^{\underline{1}} + 25$, del quale cavandosene $10^{\underline{1}} + 25$ restarà $1^{\underline{2}}$ che è quadrato; poi piglisi un altro quadrato che il suo lato sia minore d'$1^{\underline{1}} + 5$ quanto al numero e sia $1^{\underline{1}} + 4$; il suo quadrato è $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 16$, che cavato d'1 + $10^{\underline{1}} + 25$ resta $2^{\underline{1}} + 9$ e tornando da capo ponghisi che le parti fatte del 40 siano $10^{\underline{1}} + 25$ e $2^{\underline{1}} + 9$ e il numero quadrato $1^{\underline{2}} + 10^{\underline{1}} + 25$, che sodisfanno a quanto è proposto, perché cavatone $10^{\underline{1}} + 25$ resta 1 ch'è quadrato e cavatone $2^{\underline{1}} + 9$ resta $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 16$, ch'è similmente quadrato; resta solo che $10^{\underline{1}} + 25$ et $2^{\underline{1}} + 9$ siano 40, ma sono $12^{\underline{1}} + 34$; però sono eguali a 40, che cavato 34 da ogni parte si haverà $12^{\underline{1}}$ eguale a 6, che il Tanto valerà 2 e il lato del numero quadrato, che fu posto $1^{\underline{1}} + 5$, sarà $5\frac{1}{2}$ e il numero quadrato sarà $30\frac{1}{4}$ e le parti, che furno poste $10^{\underline{1}} + 25$ e $2^{\underline{1}} + 9$, saranno 30 e 10, che cavato di $30\frac{1}{4}$ resta $\frac{1}{4}$ e $20\frac{1}{4}$, che sono numeri quadrati.

Problema LXXI.

Trovisi dui numeri tali che levato 15 dal primo e aggionto al secondo la somma sia dupla allo restante del primo, e levandosi tal parte al secondo, qual'è 15 del primo, e giongendosi a esso primo, la somma sia tripla al restante del secondo.

Ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$; dando 15 al secondo restara $1^{\underline{1}} - 15$, che viene ad essere la metà del secondo, havuto che haverà 15 dal primo, si ch'esso secondo con il 15 havuto dal primo sarà $2^{\underline{1}} - 30$, che cavatone 15 del primo resta $2^{\underline{1}}$ 45 e tanto e il secondo. Hora per vedere quanto si deve levare al secondo e giongere al primo, dichisi con la regola della proportione: se 1 Ida 15, che darà $2^{\underline{1}} - 45$ [?], che vedremo che darà $30^{\underline{1}} - 675$, esimo d'$1^{\underline{1}}$ e questo si deve cavare del secondo e giongere al primo, che all'hora il primo sarà $1^{\underline{2}} + 30^{\underline{1}} - 675$, esimi d'$1^{\underline{1}}$ et il secondo sarà $2^{\underline{2}} - 75^{\underline{1}} + 675$, esimi d'$1^{\underline{1}}$. Hora bisogna vedere se la somma del primo e tripla allo restante del secondo. Però moltiplichisi detto restante per 3, fa $6^{\underline{2}} - 225^{\underline{1}} + 2025$, esimi d'$1^{\underline{1}}$ e questo è eguale alla somma del primo, cioè a $1^{\underline{2}} + 30^{\underline{1}} - 675$, esimi d'$1^{\underline{1}}$, che levato il rotto (per essere ambedue le parti simili di denominatione, cioè esimi d'$1^{\underline{1}}$) si haverà $6^{\underline{2}} - 225^{\underline{1}} + 2025$ eguale a $1^{\underline{2}} + 30^{\underline{1}} - 675$, che levato il meno e $1^{\underline{2}}$ per banda si haverà $5^{\underline{2}} + 2700$ eguale a $255^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 36; però il primo numero, che fu posto $1^{\underline{1}}$, sarà 36 et il secondo, ch'era $2^{\underline{1}} - 45$, sarà 27, che hanno le conditioni proposte.

Problema LXXII.

Trovinsi due numeri tali che l'uno sia tre volte quanto l'altro e che ciascuno di loro insieme con 16 faccia numero quadrato.

Piglisi $1^{\underline{1}}$ + il lato del 16, ch'è 4, cioè $1^{\underline{1}} + 4$ e si quadri fa $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 16$ del quale cavandosene 16 resta $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}}$ e questo si ponga per il minore delli numeri cercati, al quale aggionto 16 fa $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 16$ ch'è quadrato, et il maggiore, ch'è tre volte tanto, sarà $3^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}}$, che giontoli 16 fa $3^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 16$ e questo è eguale a un quadrato. Hor piglisi un numero di $^{\underline{1}}$ che il suo quadrato sia maggiore di 3 e sia $3^{\underline{1}}$, del quale si cavi 4, lato del 16, resta $3^{\underline{1}} - 4$; il suo quadrato è $9^{\underline{2}} - 24^{\underline{1}} + 16$ e questo si ponga per il quadrato da agguagliarsi, ch'è eguale a $3^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 16$ che levato il meno e simile da simile haveremo $6^{\underline{2}}$ eguale a 481, che il Tanto valerà 8 e il lato del numero quadrato, che fu posto $1^{\underline{1}} + 4$, sarà 12 e il suo quadrato 144, che cavatone 16 resta 128 e questo sarà il minor numero et il maggiore sarà tre volte tanto, cioè 384, che all'uno e all'altro giontovi 16 fa 144 e 400, che sono numeri quadrati.

Problema LXXIII.

Trovinsi tre numeri tali che il primo dia il suo quinto al secondo più 6 e il secondo dia al terzo il suo sesto più 7 e il terzo dia al primo il suo settimo più 8 e che, dato e ricevuto essi siano pari intra di loro.

Ponghisi che il primo sia $5^{\underline{1}}$ et il secondo $6^{\underline{1}}$, il quale dando il suo sesto + 7 al terzo gli restara $5^{\underline{1}} - 7$ e ricevendo dal primo il suo quinto + 6 riceverà $1^{\underline{1}} + 6$, che gionto con $5^{\underline{1}} - 7$ fa $6^{\underline{1}} - 1$, e tanto haverà il secondo quando haverà dato e ricevuto; ed al primo, dando $1^{\underline{1}} + 6$ al secondo, gli restarà $4^{\underline{1}} - 6$ e per havere $6^{\underline{1}} - 1$, acciochè sia pari al secondo, bisogna che riceva dal terzo tanto che gionto con $4^{\underline{1}} - 6$ faccia $6^{\underline{1}} - 1$, cioè bisogna che riceva $2^{\underline{1}} + 5$, che cavatone 8 resta $2^{\underline{1}} - 3^{\underline{1}}$ e questo è il settimo del terzo e tutto il terzo sarà $14^{\underline{1}} - 21$, dando il suo settimo + 8, cioè $2^{\underline{1}} + 5$, gli restara $12^{\underline{1}} - 26$ e pigliando il sesto del secondo + 7, ch'è $1^{\underline{1}} + 7$, haverà $13^{\underline{1}} - 19$ e questo è eguale a $6^{\underline{1}} - 1$, perché dato e ricevuto deve havere $6^{\underline{1}} - 1$, che levato il meno e $6^{\underline{1}}$ per parte si haverà $7^{\underline{1}}$ eguale a 18, che il Tanto valerà $2\frac{4}{7}$. Però il primo numero, che fu posto $5^{\underline{1}}$, sarà $12\frac{6}{7}$ e il terzo, ch'era $14^{\underline{1}} - 21$, sarà 15 e il secondo, che fu posto $6^{\underline{1}}$, sarà $15\frac{3}{7}$, cioè 1 primo sarà $12\frac{6}{7}$, il secondo $15\frac{3}{7}$ e il terzo 15, che il primo, dato che Ii,ivera il suo quinto (ch'è $2\frac{4}{7}$) + 6, cioè $8\frac{4}{7}$, al secondo, gli rimarrà e ricevuto il suo settimo, cioè $2\frac{1}{7}$, + 8, ch'è in tutto $10\frac{1}{7}$, dal l e t zu, sarà $14\frac{3}{7}$, e il secondo, dato il suo sesto, ch'è $2\frac{4}{7}$, + 7, cioè $9\frac{4}{7}$ al terzo, gli rimarrà$5\frac{6}{7}$ e ricevuto il suo quinto più 6 dal primo, ch'è $8\frac{4}{7}$ sarà anch'egli $14\frac{3}{7}$ e il terzo, dato il suo settimo più 8, ch'è $10\frac{1}{7}$, al primo, gli rimarrà $4\frac{6}{7}$ e ricevuto il suo sesto + 7, ch'è $9\frac{4}{7}$, dal secondo, sarà similmente $14\frac{3}{7}$ (come sono gli altri due dato e ricevuto che haveranno).

Problema LXXIIII.

Trovisi tre numeri quadrati tali che l'eccesso ch'è dal maggiore al nierzano sia cinque volte quanto l'eccesso ch'è dal mezzano al minore.

Ponghisi che il minore sia $1^{\underline{2}}$ e il mezzano $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$, acciochè l'uno e l'altro sia quadrato, che l'eccesso loro sarà $2^{\underline{1}} + 1$ e cinque volte tanto sarà $10^{\underline{1}} + 5$ e questo gionto al mezzano fa $1^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 6$ e quetso sarà il maggiore, il quale anch'egli deve essere quadrato. Però immaginisi un quadrato che il suo lato sia $1^{\underline{1}}$ meno un numero tale che il suo quadrato sia maggiore di 6 e sia $1^{\underline{1}} - 4$, che il quadrato sarà $1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 16$ e questo è eguale a $1^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 6$, che levato il meno, e simile da simile si haverà $20^{\underline{1}}$ eguale a 10, che il Tanto valerà $\frac{1}{2}$ e la potenza valerà $\frac{1}{4}$. Però il minore, che fu posto $1^{\underline{2}}$ sarà $\frac{1}{4}$ e il mezzano, che fu posto $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$, sarà $2\frac{1}{4}$ e il maggiore, ch'era $1^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 6$, sarà $12\frac{1}{4}$, che sodisfanno a quanto si è proposto.

Problema LXXV.

Trovinsi tre numeri tali quadrati che il lato del minore sia 2 più che il lato del mezzano e che l'eccesso ch'è dal maggiore al mezzano sia tre volte tanto quanto e l'eccesso ch'è dal mezzano al minore.

Ponghisi che il lato del minore sia $1^{\underline{1}}$, il lato del mezzano sarà $1^{\underline{1}} + 2$ e gli quadrati loro saranno $1^{\underline{2}}$ e $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$, che l'eccesso loro è $4^{\underline{1}} + 4$, che il suo triplo è $12^{\underline{1}} + 12$ e questo è l'eccesso ch'è dal maggiore al mezzano, il quale aggionto al mezzano, cioè a $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$, fa $1^{\underline{2}} + 16^{\underline{1}} + 16$ e questo sarà il maggiore, il quale anch'egli deve essere quadrato, però mi immagino un quadrato il lato del quale sia $1^{\underline{1}}$ meno un numero tale che il suo quadrato sia maggiore di 16 e sia $1^{\underline{1}} - 8$, che il quadrato sarà $1^{\underline{2}} - 16^{\underline{1}} + 64$ e questo è eguale a $1^{\underline{2}} + 16^{\underline{1}} + 16$, che levato il meno e simile da simile si haverà $32^{\underline{1}}$ eguale a 48, che agguagliato, il Tanto valerà $1\frac{1}{2}$ e la potenza $2\frac{1}{4}$. Però il minore, che fu posto $1^{\underline{2}}$, sarà $2\frac{1}{4}$ e il mezzano, che fu posto $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$, sarà $12\frac{1}{4}$ e il maggiore, ch'era $1^{\underline{2}} + 16^{\underline{1}} + 16$, sarà $42\frac{1}{4}$, che sodisfanno a quanto si è proposto.

Problema LXXVI.

Trovinsi dui numeri over quantità in proportion dupla che moltiplicato uno d'essi via il quadrato dell'altro faccia 16.

Ponghisi che il minor numero sia $1^{\underline{1}}$, l'altro di necessità sarà $2^{\underline{1}}$ e perché la proposta non astringe quale si debba quadrare, però si pua quadrare qual ci pare. Hor quadrisi il minore, ch'è $1^{\underline{1}}$, fa $1^{\underline{2}}$ moltiplichisi via $2^{\underline{1}}$ fa $2^{\underline{3}}$ e questo è eguale a 16, che agguagliato, il Tanto valerà 2 e tanto sarà il numero minore et il maggiore sarà 4.

Problema LXXVII.

Trovinsi tre numeri over quantità che uno sia 8 e il produtto delli altri dui siano similmente 8 e che li quadrati di tutti tre gionti insieme faccino 84.

Ponghisi che l'uno delli dui numeri sia $1^{\underline{1}}$; l'altro di necessità sarà 8 esimo d'$1^{\underline{1}}$ e l'altro e 8; gli loro quadrati sono $1^{\underline{2}}$, 64 esimo d'$1^{\underline{2}}$ e 64, che gionti tutti tre insieme fanno $1^{\underline{4}} + 64^{\underline{2}} + 64$ esimi d'1 e questo è eguale a 84, che levato il rotto si haverà $1^{\underline{4}} + 64^{\underline{2}} + 64$ eguale a $84^{\underline{2}}$ e levato $64^{\underline{2}}$ da ogni parte si haverà $1^{\underline{4}}$ + 64 eguale a $20^{\underline{2}}$ che agguagliato, il Tanto valerà 4 e 4 sarà uno delli numeri, che fu posto $1^{\underline{1}}$, e l'altro, che fu posto 8 esimo d'$1^{\underline{1}}$ sarà 2 e il terzo 8 (come era prima).

Problema LXXVIII.

Trovinsi dui numeri tali che il quadrato dell'uno d'essi gionto con I'altro faccia numero quadrato.

Ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$, il secondo $4^{\underline{1}}$ + 4, acciochè aggionto, il quadrato del primo, ch'è $1^{\underline{2}}$ faccia $1^{\underline{2}}$ + $4^{\underline{1}}$ + 4, ch'è quadrato; resta che il quadrato del secondo, ch'è $16^{\underline{2}}$ + $32^{\underline{1}}$ + 16, gionto col primo, ch'è $1^{\underline{1}}$, faccia quadrato, ma fa $16^{\underline{2}}$ + $33^{\underline{1}}$ + 16 e questo è eguale a un quadrato il lato del quale pongo che sia $4^{\underline{1}}$ meno un numero che il suo quadrato sia maggiore di 16, e sia $4^{\underline{1}}$ − 6, che il suo quadrato è $16^{\underline{2}}$ − $48^{\underline{1}}$ + 36 e quesl'è eguale a $16^{\underline{2}}$ + $33^{\underline{1}}$ + 16, lie levato il meno e simile da simile si haverà $81^{\underline{1}}$ eguale a 20, che il Tanto valerà $\frac{20}{81}$ e tanto sarà il primo, che fu posto $1^{\underline{1}}$, e il secondo, che fu posto $4^{\underline{1}}$ + 4, sarà $4\frac{80}{81}$, che sodisfanno a quanto si propone.

Problema LXXIX.

Faccisi di 10 due parti tali che il quadrato dell'una gionto con l'altra faccia 40.

Ponghisi che una parte sia $1^{\underline{1}}$; l'altra sarà 10 − $1^{\underline{1}}$; il quadrato della prima è $1^{\underline{2}}$ che gionto con 10 − $1^{\underline{1}}$ fa $1^{\underline{2}}$ + 10 − $1^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 40, che levato il meno e simile da simile si haverà $1^{\underline{2}}$ eguale a 30 + $1^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà, 6 e 6 sarà una parte e l'alira sarà 4.

Problema LXXX.

Faccisi di 10 due parti tali che tanto faccia a moltiplicare la maggiore in se quanto la minore via detto 10.

Ponghisi che l'una di dette parti sia $1^{\underline{1}}$; l'altra sarà $10 - 1^{\underline{1}}$ e se bene la dimanda dice che moltiplicata la maggiore in se faccia quanto la minore moltiplicata per 10, nondimeno in questo caso non importa qual si pigli per la maggiore; che pigliato $1^{\underline{1}}$, il suo quadrato sarà $1^{\underline{2}}$ e questo sarà eguale a $100 - 10^{\underline{1}}$, produtto di 10 via $10 - 1^{\underline{1}}$, ch'è l'altra parte, che levato il meno si haverà $1^{\underline{2}} + 10^{\underline{1}}$ eguale a 100, che agguagliato, cioè tolta la metà delli Tanti, ch'è 5 e quadrata fa 25, che gionto col numero, ch'è 100, fa 125, il suo lato è R.q.125, che cavato 5, metà delli Tanti, fa R.q.125 − 5 e questa è una parte; l'altra sarà lo restante sino in 10, cioè 15 − R.q.125 e questa quantità così divisa e chiamata quantità divisa secondo la proportione che ha il mezzo e dui estremi, e non a quantità ne linea così divisa che habbia più dignita ne che di essa si possa piùservire (come ben dimostra Euclide nel 13, 14, e 15 libro de gli elementi) e sono tre quantità in continua proportione, che la prima e 15 − R.q.125, la seconda R.q.125 − 5 e la terza 10 e volendole trovare senza la positione si terra la infrascritta regola.
Se una quantità si haverà da dividere secondo la proportione che habbia il mezzo e dui estremi, cioè in due parti tali che il quadrato dell'una sia eguale al produtto dell'altra parte in essa quantita, quadrisi essa quantità ed al produtto si gionghi il quarto di esso quadrato e della somma si pigli il late e se ne cavi la metà della quantità proposta e lo restante sarà la parte maggiore.
Dividasi $10 + 2^{\underline{1}}$ secondo la proportione che habbia il mezzo e due estremi.
Quadrisi esso $10 + 2^{\underline{1}}$, fa $100 + 40^{\underline{1}} + 4^{\underline{2}}$, che giontoli il quarto, ch'è $25 + 10^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$, fa $125 + 50^{\underline{1}} + 5$ che il suo lato è R.q.125 + R.q.$5^{\underline{1}}$, che cavatone $5 + 1^{\underline{1}}$, metà della quantità proposta, resta R.q.125 − 5 + R.q.$5^{\underline{1}} - 1^{\underline{1}}$ e questa è una parte; l'altra sarà lo restante, cioè 15 − R.q.125 + $3^{\underline{1}}$ − R.q.$5^{\underline{1}}$.

Problema LXXXI.

Trovinsi dui numeri tali che dal quadrato di qual si voglia di loro cavatone l'altro resti quadrato.

Ponghisi che il minore sia 1 più che numero si voglia e sia $1^{\underline{1}} + 2$; il suo quadrato sarà $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$ e se da $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$ si cavara $4^{\underline{1}} + 4$ restara $1^{\underline{2}}$

ch'è quadrato. Però ponghisi che il secondo numero sia $4^{\underline{1}} + 4$ e sodisfa alla prima parte che del quadrato del primo cavatone il secondo rimane quadrato. Ci resta hora che del quadrato del secondo cavatone il primo resti quadrato, ma il quadrato del secondo e $16^{\underline{2}} + 32^{\underline{1}} + 16$, che cavatone $1^{\underline{1}} + 2$, che fu posto il primo, resta $16 + 31^{\underline{1}} + 14$ e questo è eguale a un quadrato il lato del quale pongo che sia $4^{\underline{1}}$ meno un numero che il suo quadrato sia maggiore di 14 e sia $4^{\underline{1}} - 7$; il suo quadrato e $16 - 56^{\underline{1}} + 49$ e questo è eguale a $16^{\underline{2}}$ $+ 31^{\underline{1}} + 14$, che levato il meno e simile da simile resta $87^{\underline{1}}$ eguale a 35, che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{35}{87}$; però il primo, che fu posto $1^{\underline{1}} + 2$, sarà $2\frac{35}{87}$ e il secondo, che fu posto $4^{\underline{1}} + 4$, sarà $5\frac{53}{87}$, che sodisfanno a quanto si propone.

Problema LXXXII.

Faccisi di 20 due parti tali che del quadrato dell'una cavatone l'altra resti 50.

Ponghisi che l'una sia $1^{\underline{1}}$; l'altra sarà $20 - 1^{\underline{1}}$; il quadrato d'$1^{\underline{1}}$ è $1^{\underline{2}}$ che cavatone $20 - 1^{\underline{1}}$ resta $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}} - 20$ e questo è eguale A 50, che levato il meno, $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$ sarà eguale a 70, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$70\frac{1}{4}$ $-$ $\frac{1}{2}$ e tanto sarà una parte; l'altra sarà lo restante, cioè $20\frac{1}{2}$ $-$ R.q.$70\frac{1}{4}$.

Problema LXXXIII.

Trovinsi dui numeri tali che al quadrato di qual si voglia di loro gionto la somma loro faccia quadrato.

Ponghisi che il minor numero sia $1^{\underline{1}}$; il suo quadrato sarà $1^{\underline{2}}$ e questo si cavi del quadrato d'$1^{\underline{1}}$ più un numero come si voglia e sia $1^{\underline{1}} + 1$, che il suo quadrato è $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$, che cavatone $1^{\underline{2}}$ resta $2^{\underline{1}} + 1$ e cavatone anco $1^{\underline{1}}$, ch'è il primo, resta $1^{\underline{2}} + 1$ e questo sarà il secondo numero, che sodisfa alla prima parte, che il quadrato del primo, ch'è $1^{\underline{2}}$ gionto con tutti due li numeri fa $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$, ch'è quadrato; resta che il quadrato del secondo, ch'è $1^{\underline{2}} +$ $2^{\underline{1}} + 1$, gionto con $2^{\underline{1}} + 1$, somma delli due numeri, faccia quadrato, ma egli fa $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 2$ e questo è eguale a un quadrato, il lato del quale pongo che sia $1^{\underline{1}}$ meno un numero tale che il suo quadrato sia maggiore di 2 e sia $1^{\underline{1}} - 4$; il suo quadrato è $1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 16$ e questo è eguale a $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 2$, che levato il meno e simile da simile $12^{\underline{1}}$ saranno eguali a 14, che agguagliato, il Tanto valerà $1\frac{1}{6}$ e $1\frac{1}{6}$ sarà il minor numero e il maggiore sarà 1 di più, cioè $2\frac{1}{6}$, che li loro quadrati sono $\frac{40}{36}$ et $\frac{169}{36}$; che a ciascuno di loro aggionto $3\frac{1}{3}$, somma delli dui numeri, fanno $\frac{169}{36}$ e $\frac{289}{36}$, che sono numeri quadrati.

Problema LXXXVII.

Faccisi di 12 due parti tali che la prima divisa secondo la proportione che habbia il mezzo e dui estremi, tanto faccia moltiplicare la sua maggior parte per 4 quanto la menore per la seconda parte del 12.

Ponghisi che la maggior parte della prima parte divisa secondo la proportion detta sia $1^{\underline{1}}$, che la minore sara, per il problema 79 di questo, R.q.$1\frac{1}{4}^{\underline{1}} - \frac{1}{2}^{\underline{1}}$, che gionta con la maggiore fa R.q.$1\frac{1}{4}^{\underline{1}} + \frac{1}{2}^{\underline{1}}$ e questa è la parte del 12 qual è divisa secondo la proportion detta e questa si cavi di 12, resta $12 -$ R.q.$1\frac{1}{4}^{\underline{1}} - \frac{1}{2}^{\underline{1}}$ e questa è l'altra parte del 12, la quale si moltiplichi via R.q.$\frac{1}{4}^{\underline{1}} - \frac{1}{2}^{\underline{1}}$ parte minore della parte divisa secondo la proportion detta, fa R.q.$180^{\underline{1}} - 6^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}}$ e questo è eguale al produtto della maggior parte, ch'è $1^{\underline{1}}$, moltiplicata via 4 cioè a $4^{\underline{1}}$, che levato il meno e $4^{\underline{1}}$ per parte si haverà $1^{\underline{2}}$ eguale a R.q.$180^{\underline{1}} - 10^{\underline{1}}$, che abbassato una dignità si haverà $1^{\underline{1}}$ eguale a R.q.$180 - 10$, che il Tanto valerà R.q.$180 - 10$ e però la maggior parte della parte divisa secondo la proportion detta, che fu posta $1^{\underline{1}}$, sarà R.q.$180 - 10$ e la minore sarà $20 -$ R.q.320, che gionte insieme fanno $10 -$ R.q.20 e tanto sarà la prima parte del 12, cioè quella ch'è divisa secondo la proportion detta; l'altra parte sarà il resto sino in 12, cioè $2 +$ R.q.20. Et hanno le qualite. proposte, che moltiplicato la maggior parte della parte divisa secondo la proportione che habbia il mezzo e dui estremi, ch'è R.q.$180 - 10$, per 4 fa R.q.$2880 - 40$ e tanto similmente fa a moltiplicare la minor parte, ch'è $20 -$ R.q.320, via la seconda parte del 12, ch'è $2 +$ R.q.20, che il suo produtto è pur R.q.$2880 - 40$.

Problema LXXXVIII.

Trovinsi dui numeri tali che al produtto loro gionto qual si voglia di loro faccia numero quadrato e che li lati delli dui numeri quadrati gionti insieme faccino 12.

Tutti li numeri che intra di loro hanno proportione come di numero quadrato a numero quadrato, il produtto loro e quadrato, come 2 e 8 fa 16, 3 e 48 fa 144, che l'uno e l'altro e quadrato. Però se di 8 si cava 1 resta 7 e se si moltiplicara 2 via 7 fa 14 e aggiontoli il 2 fa 16, ch'è numero quadrato e così 3 con 47 fa 141, aggiontoli il 3 fa 144 ch'è quadrato. E havendosi questa notitia ponghisi il minore essere $1^{\underline{1}}$ e il maggiore $4^{\underline{1}} - 1$ e il produtto loro con il minore è $4^{\underline{2}}$ e il suo lato è 2 perché li lati di tutti dui li quadrati devono essere 12 et essendo l'uno $2^{\underline{1}}$, l'altro sari $12 - 2^{\underline{1}}$ e il suo quadrato $144 + 4^{\underline{2}} - 48^{\underline{1}}$ e tanto deve essere il produtto dell'uno nell'altro aggiontovi il maggiore, ma esso produtto è $4^{\underline{2}} - 1^{\underline{1}}$ e aggiontoli $4^{\underline{1}} - 1$ fa $4^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} - 1$ e questo è eguale a $4^{\underline{2}} + 144 - 48^{\underline{1}}$, che levato simile da simile e il mono si haverà 145 eguale a $51^{\underline{1}}$, che il Tanto valerà $2\frac{43}{51}$ e tanto sarà 11 minore e il maggiore $10\frac{19}{51}$, che il produtto dell'uno e dell'altro è $\frac{76705}{2601}$, che aggionto con $2\frac{43}{51}$ farà $\frac{84100}{2601}$, e aggionto con $10\frac{19}{51}$ fa $\frac{103684}{2601}$, che li loro lati sono $\frac{290}{51}$ et $\frac{322}{51}$, che gionti insieme fanno 12 (come fu proposto) e ne nasce la seguente regola.
Quando si haveranno a trovare dui numeri tali che il produtto loro on qual si voglia di loro faccia numero quadrato e che li lati di essi dui numeri quadrati gionti insieme faccino un dato numero, quadrisi il dato numero e al produtto si gionghi 1 e la somma si salvi. Poi si pigli un nuniero a beneplacito e del suo doppio si cavi 1 per regola e quel che resta si aggionghi al produtto del dato numero moltiplicato nel doppio del numero tolto a beneplacito e per la somma si parta il numero serbato e l'avvenimento sarà il numero minore il quale si moltiplicara per il quadrato del numero tolto a beneplacito e del produtto si cavarà 1 e to restante sarà l'altro; come per essempio, sia il dato numero 7, il suo quadrato è 49, giontoli 1 fa 50. Il numero tolto a beneplacito sia 3, il suo doppio è 6, moltiplicato per 7, numero dato, fa 42 e giontoli 5,

cioè 1 meno di 6, fa 47 e partito 50 per 47 ne viene $\frac{50}{47}$ e tanto sarà il minore e per trovare il maggiore moltiplichisi esso minore per 9, quadrato del 3, fa $\frac{450}{47}$ e se ne cavi 1 per regola, resta $\frac{403}{47}$ e questo è il numero maggiore.

Problema LXXXIX.

Trovinsi dui numeri tali che il produtto loro meno ciascuno di loro faccia numero quadrato delli quali li lati gionti insieme faccino 6.
Per la ragione detta nella passata, se al maggiore di dui numeri che siano in proportione come da numero quadrato a numero quadrato si giongerà 1, la moltiplication loro meno il minore sarà quadrata e sia 2 e 8; aggionto 1 a 8 fa 9, il suo produtto via 2 e 18, cavatone il minore, ch'è 2, resta 16, numero quadrato; però pongo il minore $1^{\underline{1}}$ e il maggiore $4^{\underline{1}} + 1$, il produtto loro meno il minore è $4^{\underline{2}}$ e il suo lato è $2^{\underline{1}}$ che cavato di 6 resta $6 - 2^{\underline{1}}$ e questo conviene che sia il lato del quadrato del produtto del minore via il maggiore e cavatone il maggiore, ma il produtto loro e $4^{\underline{2}} - 3^{\underline{1}} - 1$ e questo è eguale a $4^{\underline{2}} + 36 - 24^{\underline{1}}$, quadrato di $6 - 2^{\underline{1}}$, che levato il meno e simile da simile si haverà $21^{\underline{1}}$ eguale a 37, che il Tanto valerà $\frac{16}{21}$ e questo sarà il numero minore, e il maggiore, che fu posto $4^{\underline{1}} + 1$, sarà $8\frac{1}{21}$, che il produtto loro è $\frac{6253}{441}$ che cavatone $1\frac{16}{21}$ et $8\frac{1}{21}$ resta $\frac{5476}{441}$ e $\frac{2704}{441}$ che sono numeri quadrati e li loro lati sono $\frac{74}{21}$ et $\frac{52}{21}$, che gionti insieme fanno 6 (come fu proposto).

Problema XC.

Trovinsi dui numeri quadrati tali che il loro produtto pigliando ciascuno di loro faccia numero quadrato.
Ponghisi che l'uno sia $1^{\underline{2}}$ e l'altro numero quadrato sia 4, il produtto loro è $4^{\underline{2}}$, che giontoli 4 fa $4^{\underline{2}} + 4$ e questo è eguale a un quadrato il lato del quale m'immagino che sia $2^{\underline{1}} + 1$, che il quadrato e $4^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + {}^{\underline{1}}$ ed è eguale a $4^{\underline{2}} + 4$, che levato simile da simile $4^{\underline{1}}$ sono eguali a 3, che il Tanto vale $\frac{3}{4}$ e la potenza vale $\frac{9}{16}$. Hor pongo di novo che l'uno sia $\frac{9}{16}$ e l'altro $4^{\underline{2}}$, cioè il numero quadrato che fu preso prima, ma siano potenze, il produtto loro e $2\frac{1}{4}^{\underline{2}}$ che giontoli $4^{\underline{2}}$ fa $6\frac{1}{4}^{\underline{2}}$ ch'è quadrato et è sodisfatto a una parte; resta che

il produtto loro, ch'è $2\frac{1}{4}^{\underline{2}}$, insieme con $\frac{9}{16}$ faccia quadrato, ma fa $2\frac{1}{4}^{\underline{2}} + \frac{9}{16}$ e questo è eguale a un quadrato, il lato del quale m'immagino che sia $1^{\underline{1}} + \frac{3}{4}$, che il quadrato sarà $1^{\underline{2}} + 1\frac{1}{2}^{\underline{1}} + 16$ eguale a $2\frac{1}{4}^{\underline{2}} + \frac{9}{16}$, che levato simile da simile $1\frac{1}{4}^{\underline{2}}$ sarà eguale a $1\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà, $1\frac{1}{5}$ e la potenza $1\frac{11}{25}$ e il numero che fu posto $4^{\underline{2}}$ sarà $5\frac{19}{25}$ e l'altro $\frac{9}{16}$, che il produtto loro è $\frac{81}{25}$, che giontoli $5\frac{19}{25}$ et $\frac{9}{16}$ fa 9 e $\frac{1521}{400}$, che l'uno e l'altro è quadrato e li suoi lati sono 3 e $1\frac{19}{20}$.

Problema XCI.

Trovinsi dui numeri quadrati tali che del produtto loro cavandone ciascuno di loro gli restanti siano numeri quadrati.

Ponghisi che l'uno sia $1^{\underline{2}}$ e l'altro un numero quadrato e sia 9; il Ior produtto è $9^{\underline{2}}$ che cavatone 9 resta $9^{\underline{2}} - 9$ e questo è eguale a un quadrato il lato del quale m'immagino che sia $3^{\underline{1}} - 1$, che il quadrato sarà $9^{\underline{2}} - 6^{\underline{1}} + 1$ e sarà eguale a $9^{\underline{2}} - 9$, che levato il meno e simile da simile restarà $6^{\underline{1}}$ eguale a 10, che il Tanto valerà $1\frac{2}{3}$ e la potenza $\frac{23}{9}$. Però di nuovo porrò l'uno delli dui numeri essere e l'altro $9^{\underline{2}}$, cioè il numero quadrato che fu tolto, che il produtto loro è $25^{\underline{2}}$, che cavatone $9^{\underline{2}}$ resta 16 ch'è quadrato e basta a una delle conditioni. Hor resta che il produtto loro meno $\frac{25}{9}$ sia quadrato, ma esso e $25^{\underline{2}} - \frac{25}{9}$ e questo è eguale a un quadrato, il lato del quale m'immagino che sia $5^{\underline{1}} - 1$, che il quadrato sarà $25^{\underline{2}} - 10^{\underline{1}} + 1$, che levato il meno e simile da simile si haverà $10^{\underline{1}}$ eguale a $\frac{34}{9}$ che il Tanto valerà $\frac{17}{45}$ e la potenza $\frac{289}{2025}$ e l'uno de'numeri sarà $\frac{25}{9}$ e l'altro 9 volte $\frac{289}{2025}$, cioè $\frac{289}{225}$, che il produtto loro è $\frac{289}{81}$, che cavatone $\frac{25}{9}$ e $\frac{289}{225}$, resta $\frac{64}{81}$ et $\frac{4624}{2025}$ che l'uno e l'altro è numero quadrato e li loro lati sono $\frac{8}{9}$ et $\frac{68}{45}$.

Problema XCII.

Trovinsi dui numeri tali che al produtto loro giongendo essi numeri, overo cavandoli resti quadrato.

Piglisi un numero quadrato a beneplacito e sia 49; cavisene 1 per regola, resta 48, che la metà e 24 e cavato di 49 resta 25. Hora habbiamo un numero, ch'è 25, che giontoli 24 e cavatone fa quadrato. Hora pongo che li dui numeri siano 24 e il produtto loro 25 che al produtto loro o giongendo o cavando essi numeri fa quadrato, cioè $49^{\underline{2}}$ e 1 che ciascun di loro e quadrato. Hora per trovare essi numeri separatamente pongo che l'uno sia $1^{\underline{1}}$ e l'altro $25^{\underline{1}}$, che il produtto loro e $25^{\underline{2}}$; resta che gionti insieme faccino $24^{\underline{2}}$, ma fanno $26^{\underline{1}}$, però $26^{\underline{1}}$ sono eguali a $24^{\underline{2}}$ che agguagliato, il Tanto valerà $1\frac{1}{12}$ e tanto sarà l'uno de' numeri e l'altro, che fu posto $25^{\underline{1}}$, sarà $27\frac{1}{12}$; il produtto loro è $\frac{4225}{144}$, che giontoli e cavatone la somma di essi dui numeri ch'è $28\frac{1}{6}$, fa $\frac{8281}{144}$ e $\frac{169}{144}$, che l'uno e l'altro è numero quadrato.

Problema XCIII.

Faccisi di un numero quadrato due tal parti che al loro produtto giongendo over cavando esso numero quadrato la somma e il restante siano quadrati.

Ponghisi ch'il numero quadrato sia $16^{\underline{2}}$. Hor trovinsi dui numeri quadrati che il loro eccesso sia 32, cioè il doppio di 16, che per la 64 di questo, saranno 49 e 81 et a 49 si aggionga 16, numero del numero quadrato, fa 65. Hor pongasi che il produtto loro sia $65^{\underline{2}}$ e il numero quadrato si è posto $16^{\underline{2}}$ che aggionto e cavato di $65^{\underline{2}}$ fa $81^{\underline{2}}$ et $49^{\underline{2}}$, che sodisfa a quanto si è proposto. Ma li numeri sono composti insieme e sono ambedui $16^{\underline{2}}$ e il produtto loro è $65^{\underline{2}}$ che per trovarli separatamente ponghisi che l'uno sia $13^{\underline{1}}$ e l'altro $5^{\underline{1}}$ acciochè il produtto loro sia $65^{\underline{2}}$; resta che la somma loro sia $16^{\underline{2}}$ ma essa è $18^{\underline{1}}$. Però $18^{\underline{1}}$ sono eguali a $16^{\underline{2}}$, che abbassato, $16^{\underline{1}}$ sono eguali a 18, che il Tanto valerà $1\frac{1}{8}$. Però il maggiore, che fu posto $13^{\underline{1}}$, sarà $14\frac{5}{8}$ e l'altro, che fu posto $5^{\underline{1}}$, sarà $5\frac{5}{8}$, che il lor composto è $20\frac{1}{4}$, ch'è numero quadrato; però il numero quadrato che si cerca sarà $20\frac{1}{4}$ e le parti di esso saranno $14\frac{5}{8}$ et $5\frac{5}{8}$, che il loro produtto è $\frac{5265}{64}$, che giontoli e cavatone $20\frac{1}{4}$ fa $\frac{6561}{64}$ et $\frac{3969}{64}$, che l'uno e l'altro è quadrato e gli lati loro sono $\frac{63}{8}$ e $\frac{81}{8}$.

Problema XCIIII.

Faccisi di 14 tre parti in continua proportione.
Questa proposta può venire in infiniti modi perché non astringe in che proportione habbian ad essere esse parti. Però ponghisi che siano in proportione dupla e ponghisi che la prima sia $1^{\underline{1}}$, la seconda sarà $2^{\underline{1}}$ e la terza $4^{\underline{1}}$, che gionte insieme fanno $7^{\underline{1}}$ e doverebbono fare 14; però $7^{\underline{1}}$ sono eguali a 14, che il Tanto vale 2 e però la prima parte, che fu posta $1^{\underline{1}}$, sarà 2, la seconda sarà 4 e la terza 8, che gionte insieme fanno 14 (come si vuole). Ma se vogliamo ch'esse parti siano in proportion tripla ponghisi che la prima sia $1^{\underline{1}}$, la seconda $3^{\underline{1}}$, la terza $9^{\underline{1}}$, che gionte insieme fanno $13^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 14, che agguagliato, il Tanto valerà $1\frac{1}{13}$ e tanto sarà la prima parte, la seconda sarà $3\frac{3}{13}$ e la terza $9\frac{3}{13}$, che gionte insieme fanno 14.

Problema XCV.

Faccisi di 14 tre parti in continua proportione che li loro quadrall gionti insieme faccino 84.
Si deve avertire che se tre quantità saranno continue proportionall tanto fa il quadrato della seconda quanto il produtto della prima moltiplicata nella terza. Però ponghisi che la seconda parte sia $1^{\underline{1}}$; la prima e terza insieme saranno $14 - 1^{\underline{1}}$ e perché si è detto che tanto fa a moltiplicare la prima via la terza quanto la seconda in se, faccisi di $14 - 1^{\underline{1}}$ due parti tali che il produtto loro sia $1^{\underline{2}}$ quadrato della seconda, che si è posta $1^{\underline{1}}$, che per la regola della 49 di questo, si piglia la metà di $14 - 1^{\underline{1}}$ e si quadra fa $49 - 7^{\underline{1}} + \frac{1}{4}^{\underline{2}}$ e di questo se ne cava $1^{\underline{2}}$, quadrato della seconda e del resto se ne piglia il lato, ch'è R.q.$\llcorner 49 - 7^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}} \lrcorner$ e si cavi della metà di $14 - 1^{\underline{1}}$, resta $7 - \frac{1}{2}^{\underline{1}} -$ R.q.$\llcorner 49 - 7^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}} \lrcorner$ e questa è la prima e la terza sarà $7 - \frac{1}{2}^{\underline{1}} +$ R.q.$\llcorner 49 - 7^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}} \lrcorner$ e questa è la divisione di 14 in tre parti in continua proportione, cioè la prima è $7 - \frac{1}{2}^{\underline{1}} -$ R.q.$\llcorner 49 - 7^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}} \lrcorner$, la seconda è $1^{\underline{1}}$ e la terza è $7 - \frac{1}{2}^{\underline{1}} +$ R.q.$\llcorner 49 - 7^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}} \lrcorner$. Li loro quadrati sono questi, cioè il quadrato della prima è $98 - 14^{\underline{1}} - \frac{1}{2}^{\underline{2}} -$ R.q.$\llcorner 9604 - 2744^{\underline{1}} + 200^{\underline{2}} + 14^{\underline{3}} - 3^{\underline{4}} \lrcorner$, il quadrato della seconda è $1^{\underline{2}}$ e il quadrato della terza è $98 - 14^{\underline{1}} - \frac{1}{2}^{\underline{2}} +$ R.q.$\llcorner 9604 - 2744^{\underline{1}} + 200^{\underline{2}} + 14^{\underline{3}} - 3^{\underline{4}} \lrcorner$, che gionti insieme fanno $196 - 28^{\underline{1}}$, che le R.q. legate sono una

più e l'altra meno, che a sommarle si scancellano. Però si haverà 196 $-$ $28^{\underline{1}}$ eguale a 84, che levato il meno e il minor numero $28^{\underline{1}}$ saranno eguali a 112, che il Tanto valerà 4 e 4 sarà la seconda, che fu posta $1^{\underline{1}}$. Hora err trovare la prima e terza cavisi 4 di 14 resta 10, del qual 10 si faccino due parti tali che il produtto loro sia 16, quadrato di 4, ch'è la seconda, che per farlo (servendoci della regola sopradetta) pigliaremo la metà di 10, ch'è 5, e la quadraremo, fa 25, del quale ne cavaremo il 16, resta 9, lu il suo lato è 3, il quale cavato e gionto a 5, metà di 10, fa 2 et 8 e queste sono le parti addimandate, che il loro produtto è 16; però le quantità in continua proportione che si cercano saranno 2, 4 e 8, che gionte insieme fanno 14 e li loro quadrati sono 4, 16 et 64, che la somma loro è 84 (come si vuole) e di qui ne nasce la seguente regola.

Se una quantità si haverà a dividere in tre parti in continua proportione di modo che li loro quadrati gionti insieme faccino un dato numero quadrisi essa quantità e del quadrato si cavi il dato numero e lo restante si parta per il doppio della quantità e l'avenimento sarà la sconda parte; l'altre due poi si trovano con la regola detta di sopra.

Faccisi di 10 + $2^{\underline{1}}$ tre parti in continua proportione che li loro quadrati gionti insieme faccino 100.

Per la regola sopradetta quadrisi 10 + $2^{\underline{1}}$ fa $4^{\underline{2}}$ + $40^{\underline{1}}$ + 100, che cavatone 100 resta $4^{\underline{2}}$ + $40^{\underline{1}}$, quale restante si ha da partire per 20 + $4^{\underline{1}}$, doppio della quantità, che ne verrà $4^{\underline{2}}$ + $40^{\underline{1}}$, esimi di $4^{\underline{1}}$ + 20 e questa è la seconda parte; le altre due si trovaranno come nella proposta passata.

Problema XCVI.

Trovinsi tre numeri che il quadrato del primo gionto col secondo faccia numero quadrato e il quadrato del secondo gionto co'l terzo faccia similmente numero quadrato e parimente il quadrato del terzo gionto col primo faccia numero quadrato.

Ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$ e il secondo $2^{\underline{1}}$ + 1, che il quadrato d'$1^{\underline{1}}$, ch'è $1^{\underline{2}}$, gionto con $2^{\underline{1}}$ + 1 fa $1^{\underline{2}}$ + $2^{\underline{1}}$ + 1, ch'è quadrato e si è trovata la regola, che il secondo è il doppio del primo è 1 più; però poneremo che il terzo sia il doppio del secondo e 1 più, che sarà $4^{\underline{1}} + 3$; resta che il quadrato del terzo, pigliando il primo, faccia quadrato. Ma il quadrato del terzo e $16 + 24^{\underline{1}} + 9$, che giontoli il primo, ch'è $1^{\underline{1}}$, fa $16^{\underline{2}} + 25^{\underline{1}} + 9$ e questo è eguale a un quadrato, il lato del quale pongo che sia $4^{\underline{1}} - 5$, che il quadrato sarà $16^{\underline{2}} - 40^{\underline{1}} + 25$ e questo è eguale a $16^{\underline{2}} + 25^{\underline{1}} + 9$, che levato il meno e simile da simile si haverà $65^{\underline{1}}$ eguale a 16, che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{16}{65}$ e $\frac{16}{65}$ sarà il primo; il secondo sarà il doppio è 1 più, cioè $1\frac{32}{65}$ e il terzo sarà il doppio di questo e 1 più, cioè $3\frac{64}{65}$, che fanno quanto si proposto.

Problema XCVII.

Trovinsi tre numeri tali che del quadrato del primo cavatone il secondo e del quadrato del secondo cavatone il terzo e del quadrato del terzo cavatone il primo gli restanti siano numeri quadrati.
Ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$ più che numero si voglia e sia $1^{\underline{1}} + 1$; il suo quadrato sarà $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$, che cavandosene $2^{\underline{1}} + 1$ restara $1^{\underline{2}}$, ch'è quadrato; per il ponghisi che il secondo sia $2^{\underline{1}} + 1$, accioch cavato del quadrato del primo resti quadrato, e si a già trovata la regola che il secondo e il doppio del primo meno 1; per il terzo sarà il doppio del secondo meno 1 cioè $4^{\underline{1}} + 1$, che il suo quadrato e $16^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 1$, che cavatone il primo, cioè $1^{\underline{1}} + 1$, resta $16^{\underline{2}} + 7^{\underline{1}}$ e questo è eguale a un quadrato, il lato del quale pongo che sia $4^{\underline{1}} - 2$, che il quadrato sarà $16 - 16^{\underline{1}} + 4$ e questo è eguale a $16^{\underline{2}} + 7^{\underline{1}}$, che levato il meno e simile da simile $23^{\underline{1}}$ saranno eguali a 4, che il Tanto valerà $\frac{4}{25}$; però il primo, che fu posto $1^{\underline{1}} + 1$, sarà $1\frac{4}{25}$ il secondo sarà il doppio di questo meno 1, cioè $1\frac{8}{23}$ e il terzo il doppio di questo secondo meno 1, cioè $1\frac{16}{23}$, che il quadrato del primo è $\frac{729}{529}$, che cavatone il secondo, ch'è $1\frac{8}{23}$, resta $\frac{16}{529}$, ch'è quadrato e il quadrato del secondo è $\frac{961}{529}$ che cavatone il terzo, ch'è $1\frac{16}{23}$, resta $\frac{64}{529}$, ch'è quadrato, e il quadrato del terzo è $\frac{1521}{529}$, che cavatone il primo, ch'è $1\frac{4}{23}$, resta $\frac{900}{529}$, ch'è quadrato. Et ancora in luogo del $4^{\underline{1}} - 2$ si poteva pigliare un umero di Tanti che il suo quadrato fusse più di $6^{\underline{2}}$ e poniamo che sia $5^{\underline{1}}$; il suo quadrato è $25^{\underline{2}}$ e questo è eguale a $16^{\underline{2}} + 7^{\underline{1}}$, che agguagliato il Tanto vale $\frac{7}{9}$ e il primo sarà $1\frac{7}{9}$ e il secondo $2\frac{5}{9}$ e il terzo $4\frac{1}{9}$.

Problema XCVIII.

Trovinsi tre numeri tali che la somma loro gionta con il quadrato di qual si voglia di loro faccia numero quadrato.

Prima bisogna trovare tre quadrati che gionto un dato numero a iascun di loro faccino quadrato e per trovar la regola pongo di havrre a trovare un numero quadrato che giontoli 24 faccia quadrato. Pongo che il numero quadrato sia $1^{\underline{2}}$ aggiontoli 24 fa $24 + 1^{\underline{2}}$ e questo è eguale a un quadrato, il lato del quale pongo che sia $1^{\underline{1}} + 1$, che il quadrato sarà $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$, che levato simile da simile si haverrà $2^{\underline{2}}$ eguale a 23, che il Tanto valerà $11\frac{1}{2}$ e questo è uno delli numeri, che al suo quadrato gionto 24 fa quadrato. E per trovar l'altro I quadrato che si pose essere $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$ si ponghi essere di nuovo $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$ e sarà similmentè eguale a $1^{\underline{2}} + 24$, che levato simile da simile si haverà $4^{\underline{1}}$ eguale a 20, che il Tanto valerà 5 e questo è I';iltro numero che al suo quadrato gionto 24 fa quadrato, e per trovare il terzo porrò che il quadrato sia $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 9$ eguale a $1^{\underline{2}} + 24$, che levato simile da simile $6^{\underline{1}}$ saranno eguali a 15, che il Tanto valerà $2\frac{1}{2}$ e questo sarà il terzo numero che al suo quadrato gionto 24 fa gnadrato e si sono trovati tre numeri che gionto 24 al quadrato di ciani di loro fa quadrato e sono $11\frac{1}{2}$, 5 et $2\frac{1}{2}$. Hora tornando al principio pongo che tutti tre li numeri che si cercano gionti insieme siano $24^{\underline{2}}$ e il primo sia $11\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, il secondo $5^{\underline{2}}$ e il terzo $2\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, che il quadrato di ciascun di loro gionto con $24^{\underline{2}}$ fa quadrato; resta che tutti tre insieme faccino $24^{\underline{2}}$, ma fanno $19^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{19}{24}$; però il primo, che fu posto $11\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, sarà $\frac{437}{48}$; il secondo, che fu posto $5^{\underline{1}}$ sarà $\frac{95}{24}$ e il terzo, che fu posto $2\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, sarà $\frac{95}{48}$ e fanno quanto si è proposto.

Problema XCIX.

Trovinsi dui numeri tali che dal quadrato di ciascun di loro cavato il composto loro resti quadrato.

Prima bisogna trovare tre numeri che del quadrato di ciascun di loro cavatone un dato numero li restanti siano quadrati; però se si pigliara il dato numero essere 24 (come nel Problema passato) haveremo li numeri quadrati cercati, che saranno $156\frac{1}{4}$, 49 et $30\frac{1}{4}$, che di ciascun di loro cavatone 24 resta quadrato e li lati loro sono $12\frac{1}{2}$, 7 e $5\frac{1}{2}$. Hora ponghisi che tutti tre li numeri insieme siano $24^{\underline{2}}$ e ch'essi da se il primo sia $12\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, il secondo $7^{\underline{1}}$ e il terzo $5\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, che gionti insieme fanno $25^{\underline{1}}$ e sono eguali a $24^{\underline{2}}$ che abbassato una dignita si haverà $24^{\underline{1}}$ eguale a 25, che agguagliato, il Tanto valerà $1\frac{1}{24}$; però il primo numero, che fu posto $12\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, sarà $13\frac{1}{48}$; il secondo, che fu posto $7^{\underline{1}}$, sarà $7\frac{7}{24}$ e il terzo, che fu posto $5\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, sarà $5\frac{35}{48}$ e fanno quanto si è proposto.

Problema C.

Trovinsi tre numeri tali che il quadrato di ciascuno di loro cavato del composto loro, li restanti siano quadrati.

Piglinsi dui numeri quadrati a beneplacito e siano 36 e 16, che gionti insieme fanno 52 e per il 63 problema, dividasi di nuovo 52 in due numeri quadrati, che saranno $\frac{1296}{25}$ e $\frac{4}{25}$. Hor ponghisi che tutti tre li numeri siano $52^{\underline{2}}$ e che da se il primo sia $6^{\underline{1}}$, il secondo $4^{\underline{1}}$ e il terzo $\frac{2}{5}^{\underline{1}}$, acciochè ciascuno delli loro quadrati che sono $36^{\underline{2}}$, $16^{\underline{2}}$ e $\frac{4}{25}^{\underline{2}}$, cavato di $52^{\underline{2}}$ resti quadrato. Ci resta hora che tutti tre li numeri siano $52^{\underline{2}}$ ma essi sono $10\frac{2}{5}^{\underline{1}}$. Però $52^{\underline{2}}$ saranno eguali a $10\frac{2}{5}^{\underline{1}}$, che abbassato una dignita ciascuna delle parti et agguagliato, il Tanto valerà $\frac{1}{5}$; però il primo, che fu posto $6^{\underline{1}}$, sarà $1\frac{1}{5}^{\underline{1}}$; il secondo, che fu posto $4^{\underline{1}}$, sarà $\frac{4}{5}$ e il terzo, che fu posto $\frac{2}{5}^{\underline{1}}$, sarà $\frac{2}{25}$, che tutti tre insieme sono $\frac{52}{25}$ e gli quadrati loro sono $\frac{36}{25}$, $\frac{16}{25}$ e $\frac{4}{625}$, che cavato ciascun di loro di $\frac{52}{25}$ resta $\frac{16}{25}$, $\frac{36}{25}$ et $\frac{1296}{625}$ che tutti sono quadrati, che li lati loro sono $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{5}$ e $\frac{36}{25}$.

Problema CI.

Trovinsi tre numeri tali che al quadrato del composto loro gionto qual si voglia di loro faccia quadrato.

Pongo che il quadrato del composto loro sia $1^{\underline{2}}$ e che il primo sia $3^{\underline{2}}$, il secondo $15^{\underline{2}}$ e il terzo $24^{\underline{2}}$ acciochè a ciascun di loro gionto $1^{\underline{2}}$, che si a posto essere il quadrato del composto loro, faccia quadrato, cioè $4^{\underline{2}}$, $16^{\underline{2}}$ e $25^{\underline{2}}$ che ciascun di loro e quadrato; resta che il composto di tutti tre insieme sia $1^{\underline{1}}$, perché si è posto che il quadrato di tutti tre insieme sia $1^{\underline{2}}$, ma il composto di tutti tre insieme è $42^{\underline{2}}$ e questo è eguale a $1^{\underline{1}}$ che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{1}{42}$ e la potenza $\frac{1}{1764}$ però il primo numero, che fu posto $3^{\underline{2}}$, sarà $\frac{3}{1764}$; secondo, che fu posto $15^{\underline{2}}$, sarà $\frac{15}{1764}$ e il terzo, che fu posto $24^{\underline{2}}$, sarà $\frac{24}{1764}$, che il composto loro è $\frac{1}{42}$ e il suo quadrato è $\frac{1}{1764}$ al quale gionto ciascuno di essi numeri fa $\frac{4}{1764}$, $\frac{16}{1764}$ e $\frac{25}{1764}$, che ciascuno di loro e quadrato e li suoi lati sono $\frac{1}{21}$, $\frac{2}{21}$ e $\frac{5}{42}$.

Problema CII.

Trovinsi tre numeri tali che del quadrato del composto loro cavato qual si voglia di loro resti quadrato.

Ponghisi che il composto di tutti tre sia $6^{\underline{1}}$, il suo quadrato sarà $36^{\underline{2}}$ e di questo si cavino tre numeri quadrati (come si voglia) purchè siano minori di 36 e siano 4, 9 et 25, che resta 32, 27 e 11. Hora ponghisi che il primo numero sia $32^{\underline{2}}$, il secondo $27^{\underline{2}}$ e il terzo $11^{\underline{2}}$ che cavato ciascun di loro di $36^{\underline{2}}$ resta quadrato. Ci resta hora che tutti tre insieme siano $6^{\underline{1}}$, ma sono $70^{\underline{2}}$. Però $70^{\underline{2}}$ sono eguali a $6^{\underline{1}}$ che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{3}{35}$ e la potenza $\frac{9}{1225}$; Però il primo, che fu posto $32^{\underline{2}}$, sarà $\frac{288}{1225}$, il secondo $\frac{243}{1225}$ e il terzo $\frac{99}{1225}$, che fanno quanto si è proposto.

Problema CIII.

Trovinsi tre numeri tali che il quadrato del suo composto cavato di qual si voglia di loro lo restante sia quadrato.
Ponghisi che tutti tre insieme siano $1^{\underline{1}}$; il suo quadrato sarà $1^{\underline{2}}$. Hor piglinsi tre numeri quadrati come si voglia e siano 1, 4 et 16 alli quali si gionghi 1, numero del quadrato di tutti tre insieme, fa 2, 5 e 17. Hor ponghisi che

il primo sia $2^{\underline{2}}$, il secondo $5^{\underline{2}}$ e il terzo $17^{\underline{2}}$, che diciascun di loro cavato $1^{\underline{2}}$ quadrato del composto loro, resta quadrato; resta che tutti tre insieme siano $1^{\underline{1}}$, ma sono $24^{\underline{2}}$. Però $24^{\underline{2}}$ eguali sono a $1^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{1}{24}$ e la potenza $\frac{1}{576}$; però il primo, che fu posto $2^{\underline{2}}$, sarà $\frac{2}{576}$, il secondo, che fu posto $5^{\underline{2}}$, sarà $\frac{5}{576}$ e il terzo che fu posto $17^{\underline{2}}$, sarà $\frac{17}{576}$, che il composto loro è $\frac{1}{24}$ e il suo quadrato è $\frac{1}{576}$ che cavato di essi numeri resta $\frac{1}{576}$, $\frac{4}{576}$ e $\frac{16}{576}$, che ciascun di loro è numero quadrato, che li suoi lati sono $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{12}$ e $\frac{1}{6}$.

Problema CIIII

Trovisi un numero quadrato tale che fattone tre parti e pigliate a due a due superino l'altra di un numero quadrato.

Ponghisi che il numero quadrato sia $1^{\underline{2}}$ + $4^{\underline{1}}$ + 4 o qual si voglia altro quadrato, e di questo si cavi un numero quadrato a beneplacito e sia 4; resta $1^{\underline{2}}$ + $4^{\underline{1}}$ e questo si divida per mezzo, ne viene $\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ + $2^{\underline{1}}$. Hor pongo che la terza parte sia $\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ + $2^{\underline{1}}$ e la prima e seconda $\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ + $2^{\underline{1}}$ + 4, acciochc gionte insieme faccino il quadrato proposto e che il composto della prima e seconda avanzi la terza di 4, numero quadrato. E di nuovo ponghisi che il secondo e terzo superino il primo d'$1^{\underline{2}}$; il primo sarà $2^{\underline{1}}$ + 2 e il secondo e terzo $1^{\underline{2}}$ + $2^{\underline{1}}$ + 2 e perché il primo e secondo sono $\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ + $2^{\underline{1}}$ + 4, essendo il primo $2^{\underline{1}}$ + 2, il secondo sarà $\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ + 2; resta che il primo e terzo superino il secondo di un numero quadrato, ma il primo è $2^{\underline{1}}$ + 2 e il terzo $\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ + $2^{\underline{1}}$ et ambidui insieme sono $\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ + $4^{\underline{1}}$ + 2 e il secondo è $\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ + 2, però l'avanzano di $4^{\underline{1}}$ e questo deve essere un numero quadrato; però faccisi che sia 36 e si haverà $4^{\underline{1}}$ eguale a 36, che il Tanto valerà 9; però il numero quadrato, che fu posto $1^{\underline{2}}$ + $4^{\underline{1}}$ + 4, sarà 121 e la prima parte, ch'era $2^{\underline{1}}$ + 2, sarà 20; la seconda, ch'era $\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ + 2, sarà $42\frac{1}{2}$ e la terza sarà $58\frac{1}{2}$, che tutte tre insieme sono 121, numero quadrato e la prima e seconda superano la terza di 4, numero quadrato e la seconda e terza superano la prima di 81, numero quadrato e la terza e prima superano la seconda di 36, numero quadrato.

Problema CV.

Trovisi un numero quadrato tale che diviso in tre parti e pigliate a due a due faccino numero quadrato.

Ponghisi che il numero quadrato sia $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$ o qual altro quadrato si voglia e ponghisi che la prima et seconda parte insieme siano $1^{\underline{2}} - 4^{\underline{2}} + 4$ o qual si voglia altra dignità quadrata, pur che sia minore del quadrato supposto e ponghisi che la seconda e terza sia $1^{\underline{2}}$ se da tutte tre, che sono $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$ si cavara il secondo e terzo restara $4^{\underline{1}} + 4$ per il primo e se di tutte tre si cavara il primo e secondo, che sono $1^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 4$, restara $8^{\underline{1}}$ per il terzo et essendo il primo e terzo $12^{\underline{1}} + 4$ il secondo sarà $1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}}$, acciochè tutti tre insieme siano $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$; resta che il primo e terzo siano pari a un quadrato, Ina essi sono $12^{\underline{1}} + 4$ e questo è eguale a un quadrato, il quale bisogna tigliarlo tale che il Tanto debbia valere più di 8, perché non valendo il Tanto più di 8, il secondo, ch'è $1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}}$, non haverebbe parte alcuna. Hora sia il quadrato 256 eguale a $12^{\underline{1}} + 4$, che levato 4 da ogni parte et agguagliato, il Tanto valerà 21; però il numero quadrato che fu posto $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$ sarà 529 e la prima parte, ch'era $4^{\underline{1}} + 4$, sarà 88, la seconda 273 e la terza 168, che tolte a due a due fanno 361, 441 e 256, che ciascuno di loro e numero quadrato.

Problema CVI.

Trovisi un numero tale che diviso in tre numeri e tolti a dui a dui laccino tre numeri quadrati che li loro eccessi siano eguali.

Ponghisi che il primo e secondo siano $1^{\underline{2}}$ e il secondo e terzo $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$, che l'eccesso loro e $2^{\underline{1}} + 1$ e sea $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$ si aggiongerà $2^{\underline{1}} + 1$ eccesso loro, si haverà il primo e terzo, che sono $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 2$ e devono essere un quadrato, il quale presupongo che sia $1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 16$ e tanto potria essere $1^{\underline{2}} - 10^{\underline{1}} + 25$ overo altra quantità, purche il lato nascesse da $1^{\underline{1}}$ meno un numero che il suo quadrato fusse maggiore del 2 ch'è accompagnato con $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$, e tornando al principio $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 2$ è eguale a $1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 16$ che levato il meno e simile da simile si haverà $12^{\underline{1}}$ eguale a 14, che il Tanto valerà $1\frac{1}{6}$; però il primo e secondo, che fu posto $1^{\underline{2}}$, sarà $\frac{49}{36}$ e il secondo e terzo saranno $\frac{169}{36}$ e il terzo e primo $\frac{289}{36}$; levisi il rotto a ciascuno per minor difficultà e si haverà 49, 169 e 289, ma habbiamo li numeri a dui a dui; però per trovarli separatamente ponghisi di nuovo che tutti tre siano $1^{\underline{1}}$ e essendo il primo e secondo 49, il terzo sarà $1^{\underline{1}} - 49$ ed essendo il secondo e terzo 169, il primo sarà $1^{\underline{1}} - 169$ e il secondo, per la medesima ragione sarà $1^{\underline{1}} - 289$ e tutti tre insieme saranno $3^{\underline{1}} - 507$ e questo sarà eguale a $1^{\underline{1}}$, perché fu posto che tutti tre fussero $1^{\underline{1}}$, che levato il meno e $1^{\underline{1}}$ per parte $2^{\underline{1}}$ saranno eguali a 507, che il Tanto valerà $253\frac{1}{2}$; però il primo, ch'era $1^{\underline{1}} - 169$, sarà $84\frac{1}{2}$; il secondo, ch'era $1^{\underline{1}} - 289$, sarà meno $35\frac{1}{2}$, però la cosa sarebbe sofistica, perché 289 a maggiore della valuta del Tanto, per il che bisogna avertire che quando si fa la positione ciascuno delli tre quadrati sia minore della metà di tutti tre insieme, il ch'è facile da fare, perch8 quando si haveva $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 2$ eguale a un quadrato, non essendo astretto a pigliar più un quadrato che un altro, si può pigliar tale che agguagliato, il Tanto vaglia più di 2; perché se valesse 2, la potenza valerebbe 4 e l'altro numero quadrato, che fu posto $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$, sarebbe 9 e il terzo sarebbe 14 per essere di eguale eccesso, e tutti tre sariano 27, che la metà a $13\frac{1}{2}$, ch'è minore di 14, che ripugna a quello che fu detto di sopra e tornando da capo: habbisi $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 2$ eguale a $1^{\underline{2}} - 16^{\underline{1}} + 64$, che levato il meno e simile da simile si haverò $20^{\underline{1}}$ eguale a 62, che il Tanto valerà $\frac{31}{10}$ et il primo numero quadrato, che fu posto $1^{\underline{2}}$ sarà $\frac{961}{100}$, il secondo $\frac{1681}{100}$ et il terzo $\frac{2401}{100}$ che per meno difficultà si levi il rotto a ciascuno e si haverà 961, 1681 e 2401 e sono tre numeri quadrati di eguale eccesso. Hor per trovare essi numeri separatamente (come si è detto di sopra) ponghisi che tutti tre siano $1^{\underline{1}}$ et essendo il primo e secondo 961 il terzo sarà $1^{\underline{1}} - 961$, et essendo il secondo e terzo 2401, il primo sarà $1^{\underline{1}} - 2401$, et essendo il terzo e primo 1681, il secondo sarà $1^{\underline{1}} - 1681$ e tutti tre insieme saranno $31 - 5043$ e questo sarà eguale a $1^{\underline{1}}$, perché tutti tre furno posti $1^{\underline{1}}$, che levato il meno et $1^{\underline{1}}$ per parte $2^{\underline{1}}$ saranno eguali a 5043, che agguagliato, il Tanto valerà $2521\frac{1}{2}$; però il primo, ch'era $1^{\underline{1}} - 2401$, sarà $120\frac{1}{2}$; il secondo, che fu posto $1^{\underline{1}} - 1681$, sarà $840\frac{1}{2}$ et il terzo sarà $1560\frac{1}{2}$, che gionti insieme fanno 2521 e questo 8 il numero diviso nelli tre numeri sopradetti, che gionti insieme a dui a dui fanno 961, 1681 et 2401, che sono numeri quadrati di eguale eccesso (come si propone).

Problema CVII.

Faccisi di 18 tre parti in continova proportione che la prima sia 3.

Ponghisi che la seconda sia $1^{\underline{1}}$, la terza sarà $15 - 1^{\underline{1}}$. Hor moltiplichisi 3, ch'8 la prima, con $15 - 1^{\underline{1}}$, ch'è la terza, fa $45 - 3^{\underline{1}}$ e questo deve esserè eguale al quadrato della seconda, ch'è $1^{\underline{2}}$, che levtao il meno si haverà $1^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}}$ eguale a 45, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$47\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2}$ e questa a la seconda parte e la terza sarà $16\frac{1}{2}$ − R.q.$47\frac{1}{4}$ che moltiplicata la prima, ch'è 3, via la terza fa $49\frac{1}{2}$ − R.q.$425\frac{1}{4}$ ch'è tanto quanto $49\frac{1}{2}$ − R.q.$425\frac{1}{4}$ quadrato ilrlla seconda e ne nasce la seguente regola.
Quando si haverà a dividere una quantità in tre parti in continova proportione delle quali la prima sia nota, per trovar l'altre due cavisi la prima di tutta la quantità e quello che resta si moltiplichi via detta prima ed al produtto si gionghi il quarto del quadrato della prima e della xunnma se ne pigli il lato e se ne cavi la metà della prima e lo restante Ida la seconda parte; la terza poi a lo restante che rimane a cavare la xotnma della prima et seconda di tutta la quantità.
Faccisi di $10 + 1^{\underline{1}}$ tre parti in continua proportione che la prima sia $1^{\underline{1}}$.
Cavisi $1^{\underline{1}}$ di $10 + 1^{\underline{1}}$, resta 10, che moltiplicato via la prima, cioè via $1^{\underline{1}}$, fa $10^{\underline{1}}$, che giontoli $\frac{1}{4}^{\underline{2}}$, quarto del quadrato della prima, fa $10^{\underline{1}} + \frac{1}{4}^{\underline{2}}$, che il suo lato è R.q.$\llcorner 10^{\underline{1}} + \frac{1}{4}^{\underline{2}} \lrcorner$, che cavatone $\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, metà della prima, resta R.q.$\llcorner 10^{\underline{1}} + \frac{1}{4}^{\underline{2}} \lrcorner - \frac{1}{2}^{\underline{1}}$ e questo è la seconda parte e la terza è lo restante sino a 10, cioè $10 + \frac{1}{2}^{\underline{1}}$ − R.q.$\llcorner 10^{\underline{1}} + \frac{1}{4}^{\underline{2}} \lrcorner$.

Problema CVIII.

Faccisi di 14 tre parti in continua proportione che la seconda sia 4.

Questa domanda non vuole dire altro che faccisi di 10, ch'c lo restante di 4 sino a 14, due parti tali (che saranno la prima e terza) che il produtto loro sia 16, quadrato della seconda. Pere ponghisi che una di dette parti sia $1^{\underline{1}}$ l'altra sarà $10 - 1^{\underline{1}}$, che il produtto loro e 10 S $- 1^{\underline{2}}$ et a eguale a 16, quadrato della seconda, che levato il meno si haverh $10^{\underline{1}}$ eguale a $1^{\underline{2}} + 16$ et agguagliato, il Tanto valerà 2 e 2 sarà la prima parte e la terza sarà lo restante sino a 10, cioè 8 e ne nasce Ia seguente regola.
Se una quantità si haverh a dividere in tre parti in continua proportione et che la seconda sia nota, cavisi essa seconda di tutta la quantità e del restante si pigli la meth e si quadri e di esso quadrato si cavi il quadrato della seconda e del resto se ne pigli il lato e si cavi di quella meth che fu quadrata e lo restante sari la prima parte, la quale gionta conla seconda e la somma cavata di tutta la quantità ne restara la terza.
Faccisi di 10 tre parti in continua proportione che la seconda sia $1^{\underline{1}}$.
Cavisi $1^{\underline{1}}$ di 10 resta $10 - 1^{\underline{1}}$, che la metà e $5 - \frac{1}{2}^{\underline{1}}$ e questo, quadrato, fa $25 - 5^{\underline{1}} + \frac{1}{4}^{\underline{2}}$, e di questo cavatone il quadrato della seconda, cioè $1^{\underline{2}}$ resta $25 - 5^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}}$, che il suo lato è R.q.$\llcorner 25 - 5^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}}\lrcorner$, il quale cavato di $5 - \frac{1}{2}^{\underline{1}}$ resta $5 - \frac{1}{2}^{\underline{1}} -$ R.q.$\llcorner 25 - 5^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}}\lrcorner$ e questa è la prima parte; la seconda è $1^{\underline{1}}$ (come fu posta) e la terza è lo restante sino a 10, cioè $5 - \frac{1}{2}^{\underline{1}} +$ R.q.$\llcorner 25 - 5^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}}\lrcorner$.

Problema CIX.

Faccisi di 14 tre parti in continua proportione tali che la terza sia 8.

Cavisi 8 di 14 resta 6 del quale si faccia due parti tali che il quadrato della seconda sia eguale al produtto della prima moltiplicata per 8, cioè per la terza parte. Hor ponghisi che la seconda parte sia $1^{\underline{1}}$, che la prima sarà $6 - 1^{\underline{1}}$ la quale moltiplicata per 8 fa $48 - 8^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 1 quadrato della seconda parte, che levato il meno si haverà $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}}$ eguale a 48, che agguagliato, cioè tolto la metà delli Tanti, ch'è 4 e quadrato fa 16, al quale gionto 48 fa 64, che il suo lato è 8, del quale cavato 4, metà delli $^{\underline{1}}$, resta 4

e 4 e la valuta del Tanto; però la seconda parte, che fu posta $1^{\underline{1}}$, sarà 4 e la prima sarà lo restante sino a 6, cioè 2 e ne nasce la seguente regola.
Se di tre quantità in continua proportione sia nota la terza, per trovare la prima e seconda, sapendo il composto loro, cavisi la terza del composto di tutte tre e lo restante si moltiplichi via la terza ed il produtto si gionghi al quadrato della metà della terza e della somma si pigli il lato, del quale se ne cavi la metà della terza e lo restante sarà la seconda, la qual gionta con la terza e la somma cavata del composto loro restara la prima.
Trovinsi tre quantità in continua proportione che la prima et seconda siano $10 - 1^{\underline{1}}$ e la terza sia $1^{\underline{1}}$.
Per la regola sopradetta moltiplichisi $1^{\underline{1}}$ via $10 - 1^{\underline{1}}$, fa $10^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}}$ e questo si gionghi al quadrato della metà d'$1^{\underline{1}}$, ch'è $\frac{1}{4}^{\underline{2}}$ fa $10^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}}$, e di questo si pigli il lato, ch'è R.q.$\llcorner 10^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}} \llcorner$ del quale se ne cavi $\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ ch'è la metà della terza, resta R.q.$\llcorner 10^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}} \llcorner$ e questa è la seconda, la quale cavata di $10 - 1^{\underline{1}}$ resta $10 - \frac{1}{2}^{\underline{1}} -$ R.q.$\llcorner 10^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}} \lrcorner$ e questa è la prima, la quale moltililicata per $1^{\underline{1}}$, cioè per la terza fa $10^{\underline{1}} - \frac{1}{2}^{\underline{2}} -$ R.q.$\llcorner 10^{\underline{3}} - \frac{3}{4}^{\underline{4}} \lrcorner$ ch'è eguale al quadrato della seconda, ch'è anch'egli $10^{\underline{1}} - \frac{1}{2}^{\underline{2}} -$ R.q.$\llcorner 10^{\underline{3}} - \frac{3}{4}^{\underline{4}} \lrcorner$.

Problema CX.

Trovinsi tre numeri tali che il composto delli dui qual si voglia giontoli 6 faccia quadrato et il composto di tutti tre insieme con 6 sia similmente quadrato.

Ponghisi che il composto del primo e secondo insieme con 6 sia un quadrato, il lato del quale sia $1^{\underline{1}}$ più un numero a beneplacito et sia $1^{\underline{1}} + 3$; il quadrato sarà $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 9$, che cavatone 6 resta $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 3$ et tanto si porrà essere il primo e secondo. Hor ponghisi che il secondo e terzo insieme con il 6 sia un quadrato, il lato del quale sia $1^{\underline{1}}$ più un numero a beneplacito ma maggior del passato e sia $1^{\underline{1}} + 4$, che il quadrato sarà $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 16$, che cavatone 6 resta $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 10$ e tanto si ponghi il secondo e terzo. Hor ponghisi che tutti tre insieme con il 6 siano un numero quadrato il cui lato sia $1^{\underline{1}}$ più no numero a beneplacito, ma che sia maggior del passato e sia $1^{\underline{1}}$ + 6; il suo quadrato è $1^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 36$, che cavatone 6 resta $1^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 30$ e tanto si porranno essere tutti tre insieme. E perché si pose il primo è secondo $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 3$, se si cavara del composto di tutti tre ne restara il terzo, che sarà $6^{\underline{1}} + 27$ et se si cavara il secondo e terzo, ch'è $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 10$, di tutti tre, ne restara il primo, che sarà $4^{\underline{1}} + 20$; resta che il primo e terzo con 6 faccino quadrato, ma fanno $10^{\underline{1}} + 53$ e questo è eguale a un quadrato a nostro beneplacito, pur che sia tale che agguagliato, la valuta del Tanto sia tale che $6^{\underline{1}} + 27$ sia minore d'$1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 3$, composto del primo e secondo, la qual cosa a facile con ogni poco di pratica. Hor sia il numero quadrato 100, che si agguagli a $10^{\underline{1}} + 53$, che il Tanto valerà $4\frac{7}{10}$. Et il primo, ch'era $4^{\underline{1}} + 20$, sarà $38\frac{4}{5}$, il terzo, ch'era $6^{\underline{1}} + 27$, sarà $55\frac{1}{5}$. Et per trovare il secondo sappiamo che il primo e secondo erano $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 3$, cioè $53\frac{29}{100}$ e cavandosene il primo, ch'è $38\frac{4}{5}$ restara il secondo, cioè $14\frac{49}{100}$ e fanno quanto si a proposto, perché tutti tre insieme sono $108\frac{49}{100}$, che giontoli 6 fa 114 a, ch'è numero quadrato, il cui lato a $10\frac{7}{10}$. Et il primo e secondo insieme con 6 è $59\frac{29}{100}$, ch'è numero quadrato, che il suo lato è $7\frac{7}{10}$; il secondo e terzo con 6 è $75\frac{69}{100}$, che il suo lato è $8\frac{7}{10}$ e il primo e terzo insieme con 6 e 100, che il suo lato è 10.

Problema CXI

Trovinsi tre numeri tali che del composto di qual si voglia dui di loro cavatone 6 resti quadrato e similmente cavato 6 del composto di tutti tre insieme resti quadrato.

Ponghisi che il primo e secondo siano $1^{\underline{2}} + 6$, acciochè cavatone 6 resti quadrato e che il secondo e terzo siano $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 10$, acciochè cavatone 6 resti quadrato e ponghisi che tutti tre insieme siano una quantità tale che cavatone 6 resti un quadrato, il lato del quale sia maggiore d'$1^{\underline{1}} + 2$, lato del secondo e terzo cavatone 6, e sia la quantità $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 15$, che cavatone 6 resta $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 9$, ch'è quadrato; però ponghisi che tutti tre insieme siano $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 15$, che se ne cavarà il primo e secondo, ch'è $1^{\underline{2}} + 6$, restarà $6^{\underline{1}}$ +

9 per il terzo, e perché il secondo e terzo sono $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 10$, se ne cavarà il terzo, ch'è $6^{\underline{1}} + 9$, restarà $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 1$ e tanto sarà il secondo, il quale si cavi d'$1^{\underline{2}} + 6$, composto del primo e secondo, resta $2^{\underline{1}} + 5$ e tanto e il primo; resta che del composto del primo e terzo cavatone 6 resti quadrato, ma esso composto e $8^{\underline{1}} + 14$, che cavatone 6 resta $8^{\underline{1}} + 8$ e questo è eguale a un quadrato il quale sia tale che agguagliato, $1^{\underline{2}} + 1$ sia maggiore di $2^{\underline{1}}$, perché il secondo e $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 1$. Hor sia il numero quadrato 64 eguale a $8^{\underline{1}}$ $+ 8$, che agguagliato, il Tanto valerà 7. Però il primo, ch'era $2^{\underline{1}} + 5$, sarà 19; il secondo, ch'era $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 1$, sarà 36 et il terzo, ch'era $6^{\underline{1}} + 9$, sarà 51 e fanno quanto si è proposto, che tutti tre insieme sono 106, che cavatone 6 resta 100, ch'è quadrato. Il primo e secondo e 55, il secondo e terzo e 87 et il primo e terzo e 70, che di ciascun di questi composti cavato 6 resta 49, 81 e 64, che ciascun di essi e numero quadrato.

Problema CXII.

Faccisi di 12 tre parti in continua proportione che la prima moltiplicata via la seconda e col produtto via la terza faccino 27.

Ponghisi che la seconda sia $1^{\underline{1}}$, che l'altre due saranno.$12 - 1^{\underline{1}}$ e separatamente l'una sarà $6 - \frac{1}{2}1 - \text{R.q.}\llcorner 36 - 6^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}}\lrcorner$, e l'altra $6 - \frac{1}{2}^{\underline{1}} + \text{R.q.}\llcorner 36 - 6^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}}\lrcorner$ e perché la proposta dice che a moltiplicare la prima via la seconda ed il produtto via la terza faccia 27, il medesimo e a dire che moltiplicato la prima via la terza ed il produtto via la seconda; ma a moltiplicare la prima via la terza fa quanto il quadrato della seconda, cioè $1^{\underline{2}}$ e questo moltiplicato via $1^{\underline{1}}$, ch'è la seconda, fa $1^{\underline{3}}$ e questo è eguale a 27, che tolto la R.c. di ciascuna parte haveremo $1^{\underline{1}}$ eguale a 3, perb il Tanto valerà 3 e 3 sarà la seconda parte; l'altre due saranno 9 e da se l'una sarà $4\frac{1}{2} - \text{R.q.}4\frac{1}{4}$ e l'altra sarà $4\frac{1}{2} + \text{R.q.}4\frac{1}{4}$ e ne nasce la seguente regola.
Se si haverà a dividere una quantità in tre parti in continua proportione tali che il produtto della prima via la seconda moltiplicato via la terza debbia fare un dato numero, piglisi il lato cubico del dato numero e quello sarà la

seconda parte; l'altre due poi si trovino per la regola della 107 di questo.
Fammi di 12 tre parti in continua proportione che a moltiplicare la prima per la seconda e quello che fa per la terza il produtto sia $1^{\underline{3}}$.
Per la regola sopradetta piglisi il lato cubico d'1 ch'è $1^{\underline{1}}$ e tanto sarà la seconda; l'altre due insieme saranno $12 - 1^{\underline{1}}$ e per la 107 di questo, l'una di loro sarà $6 - \frac{1}{2}\underline{1} - \text{R.q.}\llcorner 36 - 6^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}}\lrcorner$ e l'altra $6 - 2^{\underline{1}} + \text{R.q.}\llcorner 36 - 6^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}}\lrcorner$.

Problema CXIII.

Trovinsi tre numeri tali che al produtto di due qual si voglino gionto 24 faccino numero quadrato.

Se di qual si voglia numero quadrato si cavara 24, lo restante potra essere il produtto del primo e secondo e sia il numero quadrato 36, del quale cavatone 24 resta 12 e 12 sarà il produtto del primo e secondo e presuposto che il primo sia 12 et il secondo 1, per venire alla positione ponghisi che il primo sia $12^{\underline{1}}$ et il secondo 1 esimo d'$l^{\underline{1}}$, acciochè il loro produtto sia 12, il quale gionto con 24 fa 36, numero quadrato e di nuovo se si pigliara un altro numero quadrato e se ne cavi 24, lo restante potra essere il produtto del secondo nel terzo e sia il numero quadrato 64, che cavatone 24 resta 40 e questo sia il produtto del se-condo nel terzo e perché il secondo e 1 esimo d'1 terzo sarà $40^{\underline{1}}$; resta che il produtto del primo nel terzo insieme con 24 faccia numero quadrato et il detto produtto e $480^{\underline{2}}$, che gionto con 24 fa $480^{\underline{2}} + 24$ e questo deve esserè eguale a un quadrato e perché il 24 non e numero quadrato, ne meno il $480^{\underline{2}}$, della agguagliatione e impossibile che ne venga numero rationale, ma se si avertisce da ch'è produtto il 480 si vede ch'è produtto da 12 e 40, restanti di 36 e 64, numeri quadrati, cavatone 24 e se questi fussero stati numeri quadrati il produtto loro sarebbe quadrato e si haverebbe quanto si desidera; però la cosa si riduce a trovare dui numeri quadrati che a ciascuno di loro gionto 24 facci quadrato, il ch'è facile (per la 62 di questo) e l'uno sarà 25 e l'altro 1; cosi, tornando da capo, pongo che il primo sia $25^{\underline{1}}$, il secondo 1 esimo d'$1^{\underline{1}}$ et il terzo $1^{\underline{1}}$ et il produtto del primo nel terzo e 25 che giontoli 24 fa $25^{\underline{2}} + 24$ e questo è eguale a un quadrato, il lato del quale presupongo che sia $5^{\underline{1}} + 1$, che il quadrato e $25^{\underline{2}} + 10^{\underline{1}} + 1$ e questo è eguale a $25^{\underline{2}} + 24$, che levato 25 et 1 da ogni parte si haverà 10 i eguale a 23 e il Tanto valerà $2\frac{3}{10}$ e tanto sarà il terzo numero, ch'era $1^{\underline{1}}$; il secondo, ch'era 1 esimo d'$1^{\underline{1}}$, sarà $\frac{10}{23}$ e il primo, ch'era $25^{\underline{1}}$, sarà $57\frac{1}{2}$, che il produtto del primo nel secondo e 25, il produtto del secondo nel terzo è 1 et il produtto del primo nel terzo e $132\frac{1}{4}$ che a ciascuno di questi produtti gionto 24 fa 49, 25 e $156\frac{1}{4}$, che ciascun di essi e numero quadrato.

Problema CXIIII.

Trovinsi tre numeri tali che del produtto di due qual si voglia cavatone 24 resti numero quadrato.

Se a qual si voglia numero quadrato si giongerà 24, la somma potra essere il produtto di due delli tre numeri che si cercano e sia del primo e secondo e sia il numero quadrato 16, che giontoli 24 fa 40. Hor ponghisi che il primo numero sia $40^{\underline{1}}$ et il secondo 1 esimo d'$1^{\underline{1}}$, acciochè il produtto loro sia 40, che cavatone 24 resta 16, numero quadrato e per trovar il terzo piglisi un altro numero quadrato et sia 4, che giontoli 24 fa 28 e questo sia il produtto del secondo nel terzo et essendo il secondo 1 esimo d'1 terzo verrà ad essere $28^{\underline{1}}$; resta che il produtto del primo nel terzo, ch'è $1120^{\underline{2}}$, cavatone 24, resti quadrato, ma resta $1120^{\underline{2}} - 24$ e questo deve esserè eguale a un quadrato e perché il 1120 non è numero quadrato, della agguagliatione non ne può venire numero rationale; ma esso 1120 nasce dalla moltiplicatione di 40 in 28, li quali due numeri, se fussero quadrati, si haverebbe l'intento e il 40 e 28 nasceno da dui numeri quadrati gionti con 24. Però bisogna trovare due numeri quadrati che giontoli 24 faccino numero quadrato e per trovargli aggionghisi 1 a 24 fa 25, la metà è $12\frac{1}{2}$, il suo quadrato e $156\frac{1}{4}$, del quale si cavi 24: resta $132\frac{1}{4}$, ch'è numero quadrato; ponghisi dunque che il primo numero sia $156\frac{1}{4}^{\underline{1}}$ et il secondo 1 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che il loro produtto è $156\frac{1}{4}$ che cavatone 24 resta $132\frac{1}{4}$ numero quadrato. Hora per trovare il terzo trovisi un numero quadrato che gionto con 24 faccia quadrato, che per la 62 di questo sarà 25, che gimito con 24 fa 49. Però ponghisi che il terzo sia $49^{\underline{1}}$, che moltiplicato via il secondo fa 49 e cavatone 24 resta 25, numero quadrato. Resta Tura che il produtto del primo nel terzo, cavatone 24, faccia numero 4Inadrato, ma tal produtto e $7656\frac{1}{4}^{\underline{2}}$, che cavatone 24 resta $7656\frac{1}{4}^{\underline{2}} - 24$ e questo è eguale a un quadrato, il lato del quale sia $87\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ meno un numero come si voglia e sia $87\frac{1}{2}^{\underline{1}} - 6$, che il quadrato sarà $7656\frac{1}{4}^{\underline{2}} - 1050^{\underline{1}} + 36$ e questo è eguale a $7656\frac{1}{4}^{\underline{2}} - 24$, che cavato simile da simile et il meno si haverà $1050^{\underline{1}}$ eguale a 60, che il Tanto valerà $\frac{2}{35}$. Però il primo, che fu posto $156\frac{1}{4}^{\underline{1}}$, sarà $8\frac{13}{14}$; il secondo, che fu posto 1 esimo d'$1^{\underline{1}}$, sarà $17\frac{1}{2}$ et il terzo, che fu posto $49^{\underline{1}}$, sarà $2\frac{4}{5}$, che il produtto del primo nel secondo è $156\frac{1}{4}$ che cavatone 24 Testa $132\frac{1}{4}$, ch'è numero quadrato; et il produtto del secondo nel terzo è 49, che cavatone 24 resta 25, ch'è numero quadrato; et il produtto del primo nel terzo e 25, che cavatone 24 resta 1, ch'è numero quadrato (come si propone).

Problema CXV.

Trovinsi tre numeri over quantità tali che il produtto del primo nel secondo faccia 20, il produtto del secondo nel terzo faccia 25 et il pro-dutto del terzo nel primo faccia 30.

Ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$, il secondo sarà 20 esimo d'$1^{\underline{1}}$, acciochè il produtto loro sia 20 e per la medesima ragione il terzo sarà 30 esimo d'$1^{\underline{1}}$; resta che il produtto del secondo nel terzo faccia 25, ma esso e 600 esimo d'$1^{\underline{2}}$ e questo è eguale a 25, che levato il rotto si haverà 600 eguale a $25^{\underline{2}}$, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.24 e tanto sarà il primo; il secondo sarà 20 partito per R.q.24, cioè R.q.$16\frac{2}{3}$ e il terzo sarà R.q.$37\frac{1}{2}$ e ne nasce la seguente regola.
Se si haveranno a trovare tre numeri tali che il produtto dell'uno nell'altro faccia tre numeri dati, moltiplichinsi dui delli numeri dati fra di loro e l'avenimento si parta per l'altro numero dato e dell'avenimento se ne pigli il

lato, il quale sarà uno delli numeri cercati, col qual con la medesima regola si trovaranno gli altri dui.

Problema CXVI.

Trovinsi tre numeri tali che al produtto di dui di loro qual si voglia gionto l'altro faccia numero quadrato.

Se di qual si voglia numero quadrato se ne cavara una parte lo restante si potra ponere per il produtto delli altri dui e sia il quadrato $1^{\underline{2}}$ + $8^{\underline{1}}$ + 16 del quale se ne cavi 16 per il terzo numero e restara $1^{\underline{2}}$ + $8^{\underline{1}}$ e questo si ponga essere il produtto del primo nel secondo. Hor ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$, il secondo sarà $1^{\underline{1}}$ + 8 e il terzo 16; resta che il produtto del secondo nel terzo insieme col primo faccia quadrato, ma esso produtto e $16^{\underline{1}}$ + 128 al quale gionto $1^{\underline{1}}$, che si è posto essere il primo, fa $17^{\underline{1}}$ + 128 e questo è eguale a un quadrato; bisogna parimente che il produtto del primo nel terzo insieme col secondo faccia quadrato, ma esso produtto è $16^{\underline{1}}$, che giontoli $1^{\underline{1}}$ + 8, che si è supposto essere il secondo, fa $17^{\underline{1}}$ + 8 e questo è eguale a un quadrato e per far l'agguagliamento cavisi $17^{\underline{1}}$ + 8 di $17^{\underline{1}}$ + 128, resta 120. Hor bisogna trovare dui numeri quadrati che l'uno sia 120 più dell'altro, ma che il minore sia più di 8, per poterlo agguagliare a $17^{\underline{1}}$ + 8, che per la 62 di questo saranno 169 e 289; però si potra agguagliare il minore a $17^{\underline{1}}$ + 8 overo il maggiore a $17^{\underline{1}}$ + 128, che nell'un modo e nell'altro il Tanto valerà 9 e tanto sarà il primo, che fu posto $1^{\underline{1}}$; il secondo, che fu posto $1^{\underline{1}}$ + 8, sarà $17\frac{8}{17}$ et il terzo sarà il 16 che si pose essere nel principio, che il produtto del primo nel secondo è $\frac{47817}{289}$ al quale gionto il terzo, ch'è 16, fa $\frac{52441}{289}$ che e numero quadrato et il suo lato è $\frac{229}{17}$; il produtto del secondo nel terzo e $279\frac{9}{17}$ al quale gionto $9\frac{8}{17}$ ch'è il primo, fa 289, ch'è numero quadrato, che il suo lato è 17. Et il produtto del primo nel terzo e $151\frac{9}{17}$ al quale gionto $17\frac{8}{17}$, ch'è il secondo, fa 169, ch'è numero quadrato, che il suo lato è 13.

Problema CXVII.

Trovinsi tre numeri tali che dal produtto di qual si voglia di lor dui cavatone l'altro resti numero quadrato.

Ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$ et il secondo $1^{\underline{1}}$ più un numero quadrato come si voglia, e sia $1^{\underline{1}} + 16$; il loro produtto e $1^{\underline{2}} + 16^{\underline{1}}$, del quale cavatone $16^{\underline{1}}$ resta quadrato; però ponghisi che il terzo sia $16^{\underline{1}}$; resta che il produtto del secondo nel terzo meno il primo et itprodutto del primo nel terzo meno il secondo faccino quadrato, ma il produtto del secondo nel terzo e $16^{\underline{2}} + 256^{\underline{1}}$, che cavatone il primo, ch'è posto $1^{\underline{1}}$, resta $16^{\underline{2}} + 255^{\underline{1}}$ che deve esserè eguale a un quadrato produtto del primo nel terzo e 16 che cavatone il secondo, che fu posto $1^{\underline{1}} + 16$, resta $16 - 1^{\underline{1}} - 16$ e questo è eguale ad un altro quadrato et questa operatione si chiama doppiù agguaglianza e fassi in questo modo. Vedasi l'eccesso ch'è fra $16^{\underline{2}} + 255^{\underline{1}}$ e $16 - 1^{\underline{1}} - 16$, ch'è $256^{\underline{1}} + 16$. Hor si cerchino due quantità che il loro produtto sia $256^{\underline{1}} + 16$, delle quali quantità bisogna che l'una sia tanti$^{\underline{1}}$ quanto il doppio del lato di 16, numero quadrato di prima preso; però sia l'una $8^{\underline{1}} + 2$ e l'altra 32 e si sommino insieme, fanno $8^{\underline{1}} + 32\frac{1}{2}$ et di questo per regola se ne pigli la meta, ch'è $4^{\underline{1}} + 16\frac{1}{4}$ e si quadri; fa $16^{\underline{2}} + 130^{\underline{1}} + 264\frac{1}{16}$ e questo è eguale alla parte maggiore, ch'è $16^{\underline{2}} + 255^{\underline{1}}$, che levato simile da simile si haverà $125^{\underline{1}}$ eguale a $264\frac{1}{16}$, che agguagliato, il Tanto valerà $2\frac{9}{80}$ e tanto sarà il primo, che fu posto $1^{\underline{1}}$; il secondo sarà $18\frac{9}{80}$, che fu posto $1^{\underline{1}} + 16$ et il terzo, che fu posto $16^{\underline{1}}$ sara, $33\frac{4}{5}$, che fanno quanto si è proposto.

Problema CXVIII.

Trovinsi cinque numeri over quantità tali che il produtto del primo nel secondo sia 20, il produtto del secondo nel terzo sia 25, il produtto del terzo nel quarto sia 30, il produtto del quarto nel quinto sia 12 et il produtto del quinto nel primo sia 35.

Ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$, il secondo sarà 20 esimo d'$1^{\underline{1}}$, acciochè il loro produtto sia 20 et il terzo sarà $1\frac{1}{4}^{\underline{1}}$, acciochè il suo produtto via il secondo sia 25 et il quarto sarà 24 esimo d'$1^{\underline{1}}$, acciochè il suo produtto via il terzo sia 30 et il quinto si ponghi 35 esimo d'$1^{\underline{1}}$ acciochè iuoltiplicato via il primo, che si è posto $1^{\underline{1}}$, il suo produtto sia 35; ci resta che il produtto del quarto nel quinto sia 12 ma esso e 840 esimo d'$1^{\underline{2}}$; però sarà eguale a 12, che levato il rotto si haverà $12^{\underline{2}}$ eguale a 840, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.70; però il primo, che fu po sto $1^{\underline{1}}$, sarà R.q.0, il secondo R.q.$5\frac{5}{7}$ terzo R.q.$109\frac{3}{8}$, il quarto R.q.$8\frac{8}{35}$ e il quinto R.q.$17\frac{1}{2}$ e fanno quanto si è proposto.

Problema CXIX.

Trovinsi dui numeri over quantità tali che gionto 4 al primo e la somma moltiplicata per il secondo faccia 30 et gionto 4 al secondo et la somma moltiplicata per il primo faccia 20.

Ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$; adunque la somma del secondo con 4 sarà 20 esimo d'$1^{\underline{1}}$, acciochè moltiplicata via $1^{\underline{1}}$ faccia 20; però il secondo da se sarà 20 esimo d'$1 - 4$. Hor gionghisi 4 al primo fa $1^{\underline{1}} + 4$ e questo si moltiplichi per il secondo fa $4 - 4^{\underline{1}} + 80$ esimo d'l$^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 30, che levato il meno e simile da simile si haverà $4^{\underline{1}} + 26$ eguale a 80 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che levato il rotto si haverà $4^{\underline{2}} + 26^{\underline{1}}$ eguale a 80, che ridutto a 1 et agguagliato, il Tanto valerà R.q.$30\frac{9}{16} - 3\frac{1}{4}$, e tanto sarà il primo, che fu posto $1^{\underline{1}}$ et il secondo, che fu posto 20 esimo d'l$^{\underline{1}} - 4$, sarà R.q.$30\frac{9}{16} - 3\frac{1}{4}$, che fanno quanto si propone.

Problema CXX.

Trovinsi tre numeri tali che al produtto di dui di loro qual si voglia aggiontovi il quadrato dell'altro faccia numero quadrato.

Ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$, il secondo $4^{\underline{1}} + 4$ e il terzo 1, acciochè il produtto del primo nel secondo, ch'è $4^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$, gionto con 1, quadrato del terzo, faccia quadrato e similmente che il produtto del secondo nel terzo, ch'è $4^{\underline{1}} + 4$, gionto con 1 quadrato del primo, faccia quadrato. Ci resta hora che al produtto del primo nel terzo, ch'è $1^{\underline{1}}$, aggionto il quadrato del secondo, ch'è $16^{\underline{2}} + 32^{\underline{1}} + 16$, faccia quadrato, ma fa 161. $+ 33^{\underline{1}} + 16$ e questo è eguale a un quadrato, il lato del quale si ponghi essere $4^{\underline{1}}$ meno un numero che il suo quadrato sia maggiore di 16 e sia $4^{\underline{1}} - 6$, che il quadrato sarà 16 I. $- 48^{\underline{1}} + 36$, che agguagliato $16^{\underline{2}} + 33^{\underline{1}} + 16$, levando il meno e simile da simile haveremo $81^{\underline{1}}$ eguale a 20, che il Tanto valerà a c tanto sarà il primo numero, che fu posto $1^{\underline{1}}$, il secondo, che fu posto $4^{\underline{1}} + 4$, sarà 4 e il terzo sarà 1 come si pose et fanno quanto si propone, che il produtto del primo nel secondo è $\frac{8080}{6561}$, che giontoli 1, quadrato del terzo, fa $\frac{14641}{6561}$, ch'è numero quadrato, che il suo lato è $\frac{121}{81}$. Il produtto del secondo nel terzo è $4\frac{80}{81}$ che giontoli $\frac{400}{6561}$ quadrato del fa $\frac{33124}{6561}$ ch'è numero qadrato, che il suo lato è $\frac{182}{81}$. Et il produtto del terzo nel primo è $\frac{20}{81}$ che giontoli $\frac{163216}{6561}$ quadrato del secondo, fa $\frac{164836}{6561}$, ch'è numero quadrato et il suo lato è $\frac{406}{81}$.

Problema CXXI.

Trovinsi tre numeri tali che al produtto di dui di loro qual si voglia Mioll-to la somma delli medesimi dui faccia numero quadrato.

Perche di ogni dui numeri quadrati che ordinatamente si seguono, 1i146 che il lato dell'uno e 1 più del lato dell'altro, il produtto loro innic ntc con la somma loro fa numero quadrato, ponghisi che il primo sia 9 e il secondo 16, acciochè il produtto loro, ch'è 144, insieme con la somma loro ch'è 25, faccia quadrato, cioè 169; resta che il produtto del secondo nel terzo insieme con la somma loro e similmente il produtto c1c¡E1 primo nel terzo insieme con la somma loro faccino quadrato. Hor ponghisi che il terzo sia $1^{\underline{1}}$, il produtto del quale nel secondo è $16^{\underline{1}}$, che con la somma loro fa $17^{\underline{1}} + 16$ e questo è eguale a un quadrato. Et il produtto del primo nel terzo e $9^{\underline{1}}$, che con la somma loro fa $10^{\underline{1}} + 9$ e questo è similmentè eguale a un quadrato et habbiamo doppiù agguaglianza; però piglisi l'eccesso di queste due quantita, ch'è $7^{\underline{1}} + 7$ et si piglino poi due quantità che il produtto loro sia $7^{\underline{1}} + 7$ e sia l'una $1^{\underline{1}} + 1$ e l'altra 7; la somma loro e $1^{\underline{1}} + 8$, che la sua metà e $\frac{1}{2}^{\underline{1}} + 4$ et il quadrato di questo è $\frac{1}{4}^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 16$ e questo è eguale a $17^{\underline{1}} + 16$, che levando simile da simile haveremo $\frac{1}{4}^{\underline{2}}$ eguale a $13^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 52 e 52 sarà il terzo numero, il secondo 16 et il primo 9 (come si pose) che fanno quanto si propone.

Problema CXXII.

Trovinsi tre numeri tali che del produtto di dui di loro qual si voglino cavato la somma di essi dui resti quadrato.

Ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$ et il secondo un numero a beneplacito ct sia 5; il produtto loro è $5^{\underline{1}}$, che cavatone la somma loro resta $4^{\underline{1}} - 5$ et questo è eguale a un quadrato e sia 25, che agguagliato, il Tanto vale $7\frac{1}{2}$ e così il primo sarà $7\frac{1}{2}$ et il secondo 5. Hor sia il terzo $1^{\underline{1}}$, che il suo produtto nel secondo meno ambidue loro è $4^{\underline{1}} - 5$ e questo è eguale a un quadrato et il produtto del primo nel terzo meno ambidue luro $6\frac{1}{2}^{\underline{1}} - 7\frac{1}{2}$ e questo è similmentè eguale a un quadrato e perché la proportione delli Tanti dell'una alli Tanti dell'altra e la proportione del numero al numero none come di numero quadrato a numero quadrato, non si può fare l'agguagliatione che ne venghi quantità rationale; però la coca si riduce a cercare dui numeri tali che il produtto loro meno ambidui loro sia quadrato e che la proportione dell'uno all'altro sia come di numero quadrato a numero quadrato; però ponghisi il primo $1^{\underline{1}} + 1$ et il secondo $4^{\underline{1}} + {}^{\underline{1}}$; il produtto loro meno ambidue loro e $4^{\underline{2}} - 1$ e questo è eguale a un quadrato, il cui lato sia $2^{\underline{1}}$ meno un numero come si voglia, poniamo $2^{\underline{1}} - 2$, che il quadrato sarà $4^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 4$, che agguagliato con $4^{\underline{2}} - 1$ il Tanto valerà $\frac{5}{8}$; però il primo sarà $1\frac{5}{8}$ et il secondo $3\frac{1}{2}$. Hor ponghisi il terzo essere $1^{\underline{1}}$; il produtto del secondo nel terzo meno ambidui loro sarà $2\frac{1}{2}^{\underline{1}} - 3\frac{1}{2}$ e questo è eguale a un quadrato; però se lo moltiplicaremo per un numero quadrato il produtto sarà quadrato e sia moltiplicato per 16 che farà $40^{\underline{1}} - 56$ e questo è pur eguale a un quadrato. Hor il produtto del primo nel terzo meno ambidue loro è $\frac{5}{8}^{\underline{1}} - 1\frac{5}{8}$ et è eguale a un quadrato. Poi bisogna trovar un quadrato che moltiplicato per $\frac{5}{8}$ faccia 40, il quale si trova partendo 40 per $\frac{5}{8}$ che ne verrà 64. Hor moltiplichisi $\frac{5}{8}^{\underline{1}} - 1\frac{5}{8}$ a per 64, fa $40^{\underline{1}} - 104$ e questo anco egli per la ragion detta di sopra è eguale a un quadrato, che si haverà doppiù agguaglianza. L'eccesso loro è 48 e gli dui numeri che il loro produtto sia 48 sono 4 e 12; la somma loro e 16 et il quadrato della metà e 64 e questo è eguale alla maggior quantita, ch'è $40^{\underline{1}} - 56$, che levato il meno et agguagliato, il Tanto valerà 3 e 3 sarà il terzo numero, il secondo $3\frac{1}{2}$ et il primo $1\frac{5}{8}$ (come si pose) che fanno quanto si propone.

Problema CXXIII.

Trovinsi dui numeri tali che al produtto loro giontoli qual si voglia di essi o tutti dui insieme faccia quadrato.

Perche d'ogni dui numeri che l'uno sia quadruplo all'altro meno 1, il produtto loro più il minore sarà quadrato, ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$ et il secondo $4^{\underline{1}} - 1$, il produtto loro e $4^{\underline{2}} - 1^{\underline{1}}$, che giontoli il secondo e tutti due insieme fa $4^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} - 1$ e $4^{\underline{2}} + 4$ i $- 1$ e ciascun di questi è eguale a un quadrato e perch'è doppiù agguaglianza, piglisi l'eccesso loro, ch'è $1^{\underline{1}}$ e trovinsi due numeri tali che il loro produtto sia $1^{\underline{1}}$, ma che un di essi sia $4^{\underline{1}}$, acciochè il quadrato della metà agguagli le $4^{\underline{2}}$, che così l'altro sarà $\frac{1}{4}$, che gionti insieme fanno $4^{\underline{1}} + \frac{1}{4}$; il quadrato della metà e $4^{\underline{2}} + \frac{1}{2}^{\underline{1}} + \frac{1}{64}$ e questo è eguale a $4^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} - 1$, che levato simile da simile e il meno si haverà $3\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ eguale a $1\frac{1}{64}$ et il Tanto valerà $\frac{65}{224}$; però il primo, che fu posto $1^{\underline{1}}$, sarà $\frac{65}{224}$ et il secondo, che fu posto $4^{\underline{1}} - 1$, sarà $\frac{9}{56}$.

Problema CXXIIII.

Trovinsi due numeri tali che del produtto loro cavatone qual si voglia o tutti dui loro insieme resti numero quadrato.

Perche di ogni dui numeri che l'uno sia quadruplo all'altro men 4 il produtto loro meno il maggiore e numero quadrato, pongo che il primo sia $1^{\underline{1}} + 1$ et il secondo $4^{\underline{1}}$, acciochè del produtto loro cavatone il maggiore, cioè $4^{\underline{1}}$, resti $4^{\underline{2}}$, ch'è quadrato; resta che del produtto loro, ch'è $4^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$, cavatone il minore, cioè $1^{\underline{1}} + 1$, e tutti due insieme, cioè $5^{\underline{1}} + 1$, resti quadrato, ma resta $4^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} - 1$ e $4^{\underline{2}} - 1^{\underline{1}} - 1$, che ciascun di loro è eguale a un quadrato e si ha doppiù agguaglianza; però tolto l'eccesso loro, ch'è 41, trovinsi dui numeri tali che il produtto loro sia $4^{\underline{1}}$ ma che l'uno sia $4^{\underline{1}}$ acciochè il quadrato della metà agguagli le $4^{\underline{2}}$, ch'essendo l'uno $4^{\underline{1}}$'altro sarà 1 che gionti insieme fanno $4^{\underline{1}} + 1$; il quadrato della metà e $4^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 4$ e questo è eguale a $4^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} - 1$, che levato simile da simile, il meno e agguagliato, il Tanto valerà $1\frac{1}{4}$; però il primo numero, che fu posto $1^{\underline{1}} + 1$, sarà $2\frac{1}{4}$ et il secondo, che fu posto $4^{\underline{1}}$, sarà 5, che il loro produtto e $11\frac{1}{4}$, del quale cavatone ciascuno di loro o tutti due insieme resta 9, $6\frac{1}{4}$ e 4, che ciascuno di loro e quadrato, come si propose.

Problema CXXV.

Trovinsi dui numeri over quantità che l'uno sia 2 più dell'altro e che li loro quadrati gionti insieme faccino 28.

Ponghisi che l'uno sia $1^{\underline{1}}$, l'altro sarà $1^{\underline{1}} + 2$; li loro quadrati sono $1^{\underline{2}}$ et $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$, che gionti insieme fanno $2^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$ e questo è eguale a 28, che levato 4 da ogni parte e ridutto a 1 si haverà $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ eguale a 12 che agguagliato, il Tanto valerà R.q.13 $-$ 1 e questo è l'uno delli dui numeri; l'altro sarà R.q.13 + 1. Avertendosi che ne può anco venire $^{\underline{2}}$ eguale a numero in questo modo. Ponghisi che l'uno delli numeri, cioè il maggiore, sia $1^{\underline{1}}$ più 1, metà della differenza loro; l'altro sarà $1^{\underline{1}} - 1$, che li loro quadrati sono $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$ e $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 1$, che gionti insieme fanno $2^{\underline{2}} + 2$ e questo è eguale a 28, che levato il 2 da ogni parte et ridutto a $1^{\underline{2}}$ si haverà $1^{\underline{2}}$ eguale a 13, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.13, però il primo numero, che fu posto $1^{\underline{1}} + 1$, sarà R.q.13 + 1 et il secondo sarà R.q.13 $-$ 1 e ne nasce la seguente regola.
Se saranno dui numeri che l'uno sia maggiore dell'altro un dato numero e che li loro quadrati gionti insieme debbiano fare un terminato numero, piglisi la metà del dato numero, cioè della differenza loro, e quadrisi e il produtto si cavi della metà del terminato numero e del restante se ne pigli il lato e si

gionghi con la metà del dato numero e la somma sarà il maggior numero.
Trovinsi dui numeri tali che cavato l'uno dell'altro resti $1^{\underline{1}}$ e li loro quadrati gionti insieme faccino 50.
Per la regola sopradetta piglisi la metà d'$1^{\underline{1}}$, ch'è $\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, che il suo quadrato sarà $\frac{1}{4}^{\underline{2}}$ che cavato di 25, metà di 50, resta $25 - \frac{1}{4}^{\underline{2}}$, che pigliatone il lato e giontoli $\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, metà della differenza delli dui numeri, fa $R.q.\llcorner 25 - \frac{1}{4}^{\underline{2}} \lrcorner + \frac{1}{2}^{\underline{1}}$ e questo è uno delli numeri; l'altro sarà $R.q.\llcorner 25 - \frac{1}{4}^{\underline{2}} \lrcorner - \frac{1}{2}^{\underline{1}}$.

Problema CXXVI.

Trovinsi quattro numeri tali che al quadrato del composto loro giongendo o cavando qual si voglia di loro faccia quadrato.

Perche in ogni triangolo rettangolo il quadrato ch'è fatto dal lato opposito all'angolo retto e tale che giontoli o cavatone il doppio del produtto delli altri due lati fa quadrato, io cerco quattro triangoli che habbino il lato opposito all'angolo retto eguale; in questo modo piglisi 3, 4 e 5 et 5, 12 et 13, lati di dui triangoli retti angoli e moltiplichisi 3, 4 et 5 per il 13, fa 39, 52 et 65, et poi moltiplichisi 5, 12 et 13 per 5, lato del primo triangolo, fa 25, 60 et 65 e questi sono dui triangoli rettangoli che hanno il lato opposito all'angolo retto eguale, ch'è 65, et per trovar gli altri dui dividasi 65 in dui quadrati due volte, cioè in 49 e 16 et in 64 e 1 e questo avviene perché 65 e contenuto da 13 e 5, ciascun delli quali e divisibile in due numeri quadrati. Hor di questi quattro numeri, cioè 49, 16, 64 e 1 se ne piglino i lati, che sono 7, 4, 8 et 1; il produtto delli dui primi e 28 e delli secondi e 8, il doppio loro e 56 et 16, che sono lati delli altri dui triangoli rettangoli; però essendo il lato opposito all'angolo retto 65 e l'un de' lati 56 e 16, l'altro sarà 33 et 63 e così habbiamo tutti il lati di dui triangoli, che sono 33, 56 rI 65, et 63, 16 et 65. Hor tornando al principio ponghisi che tutti quattro li numeri insieme siano $65^{\underline{2}}$ e che ciascun da se sia tante potenze tlttanto e quattro volte la superficie di ciascuno delli quattro triangoli rettangoli, cioè $4056^{\underline{2}}$, $3000^{\underline{2}}$, $3696^{\underline{2}}$, e $2016^{\underline{2}}$, che tutti quattro tttsieme saranno $12768^{\underline{2}}$ e saranno eguali a $65^{\underline{1}}$, che fu posto essere il composto loro, che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{65}{12768}$; però il primo, che fu posto $4056^{\underline{2}}$ sarà $\frac{714025}{6792576}$, il secondo $\frac{528125}{6792576}$, il terzo $\frac{325325}{3396288}$ et il quarto $\frac{88725}{1698144}$ et fanno quanto si è proposto.

Problema CXXVII.

Faccisi di 40 due parti tali che trovato un numero quadrato e cavatone qual si voglia di esse resti quadrato.

Ponghisi che il numero quadrato che si deve trovare sia $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$, del quale se ne cavara $4^{\underline{1}} + 4$; restara $1^{\underline{2}}$ ch'è quadrato et se se tie cavara 81 restara $1^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 4$, ch'è similmente quadrato. Hor ponghisi che una parte sia $4^{\underline{1}} + 4$ e l'altra $8^{\underline{1}}$, che gionte insieme fanno $12^{\underline{1}} + 4$ et doverebbono essere 40, però $12^{\underline{1}} + 4$ sono eguali a 40, che levato 4 da ogni parte et agguagliato, il Tanto valerà 3; però la prima parte, ch'era $4^{\underline{1}} + 4$, sarà 16 e la seconda 24, et il numero tuadrato, che fu posto $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$, sarà 25.

Problema CXXVIII.

Faccisi di 40 due parti tali che trovato un numero quadrato e giontoli qual si voglia di esse la somma sia quadrata.

Ponghisi che il numero quadrato che si deve trovare sia $1^{\underline{2}}$, che giontoli $4^{\underline{1}} + 4$ overo $2^{\underline{1}} + 1$ fa quadrato; però ponghisi che l'una parte sia $4^{\underline{1}} + 4$ e l'altra $2^{\underline{1}} + 1$, che gionte insieme fanno $6^{\underline{1}} + 5$ e questo è eguale a 40, che levato simile da simile et agguagliato, il Tanto valerà $5\frac{5}{6}$; per-6 il numero quadrato, che fu posto $1^{\underline{2}}$, sarà $34\frac{1}{36}$ e le parti saranno $27\frac{1}{3}$ et $12\frac{2}{3}$.

Problema CXXIX.

Faccisi di 10 due parti tali che li loro cubi gionti insieme faccino 370.

Ponghisi che l'una parte sia $5 + 1^{\underline{1}}$ e l'altra $5 - 1^{\underline{1}}$ li loro cubi sono 125 + $75^{\underline{1}} + 15^{\underline{2}} + 1^{\underline{3}}$ e $125 - 75^{\underline{1}} + 15^{\underline{2}} - 1^{\underline{3}}$ che gionti insieme fanno 250 + 30

. e questo è eguale a 370, che agguagliato, il Tanto valerà 2 e però la prima parte sarà 7 e l'altra 3. Ma se questi dui cubi havessero a fare 400, il 250 + $30^{\underline{2}}$ sarebbè eguale a 400, che agguagliato, il Tanto valerebbe R.q.5; però una parte sarebbe 5 + R.q.5 e l'altra 5 − R.q.5 e ne nasce la seguente regola.
Se si haverà una quantità della quale si voglia fare due parti tali che li loro cubi gionti insieme faccino un dato numero, piglisi il quarto del cubo della proposta quantità e cavisi del dato numero e lo restante si parta per il triplo del dato numero e la R.q. dell'avenimento si gionghi et cavi della metà della proposta quantità e ne verranno le parti che si cercano.

Problema CXXX.

Faccisi di 10 due parti tali che il cubato della minore aggionto col cubato della maggiore e della somma cavatone il triplo del quadrato di una di dette parti moltiplicato per il detto 10 resti nulla.

Ponghisi che una parte sia $1^{\underline{1}}$; l'altra sarà $10 - 1^{\underline{1}}$ li loro cubati sono $1^{\underline{3}}$ e $1000 - 300^{\underline{1}} + 30^{\underline{2}} - 1^{\underline{3}}$ che gionti insieme fanno $1000 - 300^{\underline{1}} + 30^{\underline{2}}$. Hor piglisi la parte ch'è $1^{\underline{1}}$ e quadrisi fa $1^{\underline{2}}$, che triplato fa $3^{\underline{2}}$ e moltiplicato per 10 fa $30^{\underline{2}}$, che cavato di $1000 - 300^{\underline{1}} + 30^{\underline{2}}$ resta $1000 - 3001$ et è eguale a 0, che levato il meno haveremo $300^{\underline{1}}$ eguale a 1000, che il Tanto valerà $3\frac{1}{3}$ e $3\frac{1}{3}$ sarà una di dette parti e l'altra sarà $6\frac{2}{3}$.

Problema CXXXI.

Faccisi di 16 tre parti in continua proportione tali che moltiplicato la prima per 8 e la seconda per 4 e li produtti gionti insieme faccino quanto a moltiplicare la terza per 2.

Ponghisi che la seconda sia $1^{\underline{1}}$'altre due saranno $16 - 1^{\underline{1}}$, del quale si faccia due parti tali che il produtto loro sia $1^{\underline{2}}$, quadrato della seconda, che (per la 49 di questo) l'una sarà $8 - \frac{1}{2}^{\underline{1}} - \text{R.q.}\llcorner 64 - 8^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}}\lrcorner$ et l'altra $8 - \frac{1}{2}^{\underline{1}} + \text{R.q.}\llcorner 64 - 8^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}}\lrcorner$ e queste sono le tre quantità in continova proportione, che moltiplicata la prima per 8 fa $64 - 4^{\underline{1}} -$ R.q.$\llcorner 4096 - 512^{\underline{1}} - 48^{\underline{2}}\lrcorner$ e moltiplicata la seconda per 4 fa $4^{\underline{1}}$, che gionte insieme fanno $64 -$ R.q.$\llcorner 4096 - 512^{\underline{1}} - 48^{\underline{2}}\lrcorner$ e questo è eguale a $16 - 1^{\underline{1}} +$ R.q.$\llcorner 256 + 32^{\underline{1}} - 3^{\underline{2}}\lrcorner$, produtto della terza via 2, che levato simile da simile il meno giongendo le due R.q.legate insieme per essere fra di loro proportione come da numero quadrato a numero quadrato, che la maggiore e quattro volte la minore; però si moltiplicata la minore per 25, quadrato di 5 et haveremo $48 + 1^{\underline{1}}$ eguale a R.q.$\llcorner 6400 - 8001 - 75^{\underline{2}}\lrcorner$, che levato la R.q. legata (quadrando ciascuna parte) si haverà $2304 + 96^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$ eguale a $6400 - 800^{\underline{1}} - 75^{\underline{2}}$, che levato il uieno e simile da simile si haverà $896^{\underline{1}} + 76^{\underline{2}}$ eguale a 4096, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$88\frac{232}{361} - 5\frac{17}{19}$ e tanto e la seconda; I'altre due si trovaranno con la regola della 49 di questo.

Problema CXXXII.

Faccisi di 14 tre parti in continua proportione tali che a moltiplicare la prima per 4, la seconda per 6 e la terza per 8 e tutte queste moltiplicationi gionte insieme faccino 96.

Ponghisi che la seconda sia 1 che (per la 49 di questo) l'altre due uc saranno $7 - \frac{1}{2}^{\underline{1}} -$ R.q.$\llcorner 49 - 7^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}}\lrcorner$ et $7 - \frac{1}{2}^{\underline{1}} +$ R.q.$\llcorner 49 - 7^{\underline{1}} - 4\ \frac{3}{4}^{\underline{2}}\lrcorner$, che moltiplicata la prima per 4 fa $28 - 2^{\underline{1}} -$ R.q.$\llcorner 784 - 112^{\underline{1}} - 12^{\underline{2}}\lrcorner$ e moltiplicata la seconda per 6 fa $6^{\underline{1}}$ e la terza per 8 fa $56 - 4^{\underline{1}} +$ R.q.$\llcorner 3136 - 4481 - 48^{\underline{2}}\lrcorner$ ehc gionte tutte tre queste moltiplicationi insieme fanno $84 +$ R.q.$\llcorner 784 - 112^{\underline{1}} - 12^{\underline{2}}\lrcorner$ e questo è eguale a 96, che levato 84 da ogni parte e la R.q. legata haveremo $784 - 112^{\underline{1}} - 12^{\underline{2}}$ eguale a 144, die levato il meno e 144 per parte e ridutto a $1^{\underline{2}}$ haveremo $1^{\underline{2}} + 9\frac{1}{3}^{\underline{1}}$ 1 eguale a $53\frac{1}{3}$ che agguagliato, il Tanto valerà 4; però la seconda, che posta $1^{\underline{1}}$, sarà 4 e (per la 49 di questo) la prima sarà 2 e la terza 8, die fanno quanto si propone.

Problema CXXXIII.

Trovinsi due numeri over quantità che l'uno sia 6 più dell'altro e che li loro cubi cavati l'un dell'altro resti 504.

Ponghisi che l'uno sia $1^{\underline{1}} + 3$ e l'altro $1^{\underline{1}} - 3$; li loro cubi sono $1^{\underline{3}} + 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} + 27$ e $1^{\underline{3}} - 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} - 27$ che cavato l'un dell'altro Testa $18^{\underline{2}} + 54$ e questo è eguale a 504, che cavato 54 da ogni parte et agguagliato, il Tanto valerà 5; però il primo sarà 8 et il secondo 2.

Problema CXXXVII.

Trovisi un numero quadrato e poi un numero il quale gionto con il lato del numero quadrato e poi con il numero quadrato, delle somme, Il prima sia un numero quadrato e la seconda il suo lato.

Ponghisi che il numero quadrato sia $1^{\underline{2}}$, il suo lato è $1^{\underline{1}}$ et il numero da giongere sia tanto che gionto con $1^{\underline{1}}$ faccia quadrato e sia $9^{\underline{2}} - 1$ che gionto a $1^{\underline{1}}$ fa $9^{\underline{2}}$ e gionto a $1^{\underline{2}}$ fa $10^{\underline{2}} - 1^{\underline{1}}$ e questo è eguale a $3^{\underline{1}}$, lato di 9 che levato il meno et agguagliato, il Tanto valerà $\frac{2}{5}$; però il numero quadrato sarà $\frac{4}{25}$, che fu posto $1^{\underline{2}}$ e il numero da giongere, che fu posto $9^{\underline{2}} - 1^{\underline{1}}$, sarà $1\frac{1}{25}$ che gionto con $\frac{2}{5}$, lato, et con $\frac{4}{25}$, numero quadrato, fa $\frac{36}{25}$ e $\frac{6}{5}$, che l'uno e nu-mero quadrato e l'altro il suo lato (come si propone).

Problema CXXXVIII.

Trovinsi dui numeri, l'un cubo e l'altro quadrato, e poi si trovi un altro numero quadrato che gionto con ciascun di loro, le somme siano un numero cubo et un numero quadrato.

Ponghisi che il numero cubo sia 1 et il numero quadrato sia una quantità di potenze che sia quadrata e sia $9^{\underline{2}}$ et il numero quadrato da giongere sia tante potenze che gionto con $9^{\underline{2}}$ faccia quadrato, che (per la 62 di questo) sarà $16^{\underline{2}}$, il quale gionto con $9^{\underline{2}}$ fa $25^{\underline{2}}$, ch'è quadrato e gionto con $1^{\underline{3}}$ fa $1^{\underline{3}}$

$+\ 16^{\underline{2}}$ e questo è eguale a una quantità cubica, qual sia $27^{\underline{3}}$, che levato $1^{\underline{3}}$ da ogni parte et agguagliato, il Tanto valerà $\frac{8}{13}$; però il numero cubo, che fu posto $1^{\underline{3}}$, sarà $\frac{512}{2197}$ et il numero quadrato, che fu posto $9^{\underline{2}}$, sarà $3\frac{69}{169}$ et il numero quadrato da giongere, che fu posto $16^{\underline{2}}$, sarà $6\frac{10}{169}$, che fanno quanto si propone.

Problema CXXXIX.

Faccisi di 28 tre parti in continua proportione tali che li quadrati della prima e della terza gionti insieme faccino tanto quanto il quadIrato della seconda moltiplicato per $4\frac{1}{4}$.

Ponghisi che la seconda sia $1^{\underline{1}}$ e per la 49 di questo la prima sarà $14 - \frac{1}{2}^{\underline{1}} - \text{R.q.}\llcorner 196 - 14^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}}\lrcorner$ e la terza $14 - \frac{1}{2}^{\underline{1}} + \text{R.q.}\llcorner 196 - 14^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{\underline{2}}\lrcorner$. Il quadrato della prima sarà $392 - 28^{\underline{1}} - \frac{1}{2}^{\underline{2}} - \text{R.q.}\llcorner 153664 - 21952^{\underline{1}} + 392^{\underline{2}} + 28^{\underline{3}} - \frac{3}{4}^{\underline{4}}\lrcorner$ et il quadrato della terza sarà $392 - 28^{\underline{1}} - \frac{1}{2}^{\underline{2}} + \text{R.q.}\llcorner 153664 - 21952^{\underline{1}} + 392^{\underline{2}} + 28^{\underline{3}} - \frac{3}{4}^{\underline{4}}\lrcorner$ che gionti insieme fanno $784 - 56^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}}$ e questo sarà eguale a $4frac14^{\underline{2}}$ produtto del quadrato della seconda, ch'è $1^{\underline{2}}$, moltiplicato per $4\frac{1}{4}$ che levato il meno e ridutto a $1^{\underline{2}}$ et agguagliato il Tanto valerà 8 et 8 sarà la seconda, che fu posta $1^{\underline{1}}$ e la prima (per la 49 di questo) sarà 4 e la terza 16, che ne nasce la seguente regola.
Se una quantità si haverà a dividere in tre parti in continua proportione in tal modo che gli quadrati della prima e terza gionti insieme siano eguali al quadrato della seconda moltiplicato per un dato numero, quadrisi essa quantità ed il produtto si parta per 1 più del dato numero e l'avenimento si salvi; poi doppijsi la quantità et il duplato si parte anch'egli per 1 più del dato numero e dell'avenimento si pigli la metà e si quadri e si gionghi col numero serbato e della somma si pigli il lato e se ne cavi la metà dell'avenimento della quantità che si duplò e lo restante sarà la seconda parte.

Problema CXL.

Trovinsi dui numeri, l'un cubo e l'altro quadrato e poi si trovi un altro numero quadrato che gionto col numero cubo facci numero quadrato e gionto col quadrato faccia il cubo medesimo.

Sia il numero cubo A, il quadrato B et il numero quadrato da giongere sia C e perché bisogna che il quadrato C gionto col quadrato B faccia un cubo, faccisi il cubo A tale che sia maggiore del quadrato B nel quadrato C, cioè di un quadrato, perché il C e quadrato; e perché di qualunque dui numeri il produtto dell'uno in l'altro due volte insieme con li quadrati loro fa quadrato: però pone che li dui supplimenti siano il C et il C e quadrato, onde il fatto da loro due volte e quadrato; ponghisi dunque che il lato del B sia $1^{\underline{1}}$ e il lato del C due $^{\underline{1}}$, cioè la metà d'un numero quadrato, acciochè il produtto loro due volte faccia quadrato; li dui quadrati gionti insieme fanno $5^{\underline{2}}$ e perché il B insieme col C è eguale all'A $5^{\underline{2}}$ sono eguali a $1^{\underline{3}}$ che agguagliato, il Tanto vale 5; I però il cubo A sarà 125, il quadrato B 25 et il quadrato C 100.
In altro modo, sia similmente A il cubo, B il quadrato et C il quadrato da giongere e perché il C con il B deve fare il cubo A e dall'altra parte l'A col C deve fare un quadrato, però il B insieme con due volte il C deve fare quadrato; così bisogna trovar dui quadrati la somma de' quali insieme con un di loro faccia quadrato; ponghisi che l'uno sia $1^{\underline{2}}$ e l'altro un quadrato a beneplacito e sia 4; gionti insieme fanno $1^{\underline{2}} + 4$ e giontoli $1^{\underline{2}}$ fa $2^{\underline{2}} + 4$ e questo è eguale a un quadrato il cui lato sia tanti $^{\underline{1}}$ che il suo quadrato sia maggiore delli $2^{\underline{2}}$, meno un numero che sia lato del 4 ch'è accompagnato con li $2^{\underline{2}}$, cioè men 2 e sia $2^{\underline{1}} - 2$; il quadrato sarà $4^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 4$ e questo è eguale a $2^{\underline{2}} + 4$, che levato simile da simile et il meno haveremo $2^{\underline{2}}$ eguale a $8^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 4; però l'un numero quadrato sarà 16 I'altro i14 che si pose. Ho rponghisi che il quadrato C sia $16^{\underline{2}}$ et il quadrato B 4 i; aggionti insieme fanno 20 e tutti dui insieme devono essere eguali al cubo A, il quale si pone $1^{\underline{3}}$; però $20^{\underline{2}}$ saranno eguali a $1^{\underline{3}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 20; però il numero A sarà 8000, il B 1600 et il C 6400.

Problema CXLI.

Trovisi un numero cubo e poi un altro numero tale che gionto insieme con il numero cubo et il suo lato, le somme siano una numero cubo e l'altra il suo lato.

Ponghisi che il numero da giongersi sia $1^{\underline{1}}$ e il lato del cubo quanti tanti si voglia et sia $2^{\underline{1}}$, che il cubo sarà $8^{\underline{3}}$; se dunque a $1^{\underline{1}}$ si giongerà $2^{\underline{1}}$, lato di $8^{\underline{3}}$, la somma sarà $3^{\underline{1}}$ e se si giongerà $1^{\underline{1}}$ a $8^{\underline{3}}$ la somma sarà $8^{\underline{3}} + 1^{\underline{1}}$ e questo sarà eguale al cubo di $3^{\underline{1}}$, ch'è $27^{\underline{3}}$, che levato simile da simile e schifato si haverà $19^{\underline{2}}$ eguale a 1, che l'agguagliatione non si pm) fare per numero rationale, per non essere 19 numero quadrato; ma il 19 nasce dallo eccesso di dui cubi, che sono 27 et 8, li quali nascono da $3^{\underline{1}}$ et $2^{\underline{1}}$ e li $2^{\underline{1}}$ sono il numero della positione del primo cubo e li $3^{\underline{1}}$ e $1^{\underline{1}}$ più delli $2^{\underline{1}}$; la cosa dunque si riduce a trovar dui numeri che uno sia 1 più dell'altro e che l'eccesso delli loro cubi sia quadrato e sia l'uno $1^{\underline{1}}$ e l'altro $1^{\underline{1}} + 1$; li loro cubi Sono $1^{\underline{3}}$ e $1^{\underline{2}} + 3^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} + 1$, che il loro eccesso è $3^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} + 1$ e questo è eguale a un quadrato il cui lato sia tanti $^{\underline{1}}$ che il suo quadrato sia maggiore di $3^{\underline{2}}$ meno 1, lato del numero ch'è accompagnato con le $3^{\underline{2}}$, e sia $2^{\underline{1}} - 1$, che il quadrato sarà $4^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 1$ e questo è eguale a $3^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} + 1$, che levato simile da simile, il meno et agguagliato, il Tanto valerà 7; però l'uno delli numeri cercati sarà 7 e l'altro 8. Si tornarà dunque a porre che il lato del cubo sia $7^{\underline{1}}$, che il cubo sarà $343^{\underline{3}}$ et il numero da giongere sia pur $1^{\underline{1}}$, che gionto con $343^{\underline{3}}$ farà $343^{\underline{3}} + 1^{\underline{1}}$ e questo è eguale a un cubo il cui lato sia $8^{\underline{1}}$, cioè la somma delli $7^{\underline{1}}$ e $1^{\underline{1}}$, che esso cubo sarà $512^{\underline{3}}$, che levato simile da simile e schifato haveremo $169^{\underline{2}}$ eguali a 1, che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{1}{13}$; però il numero da giongere, che fu posto $1^{\underline{1}}$, sarà i3 et il lato del cubo, che fu posto $7^{\underline{1}}$, sarà $\frac{7}{13}$ et il numero cubo sarà $\frac{343}{2197}$ che fanno quanto si propone. 2197,

Problema CXLII.

Trovisi un numero cubo e poi un altro numero il quale aggionto con il lato del cubo e con il cubo, delle due somme la prima sia un numero cubo e la seconda il suo lato.

Sia il numero cubo $8^{\underline{3}}$et il suo lato $2^{\underline{1}}$ e sia il numero da giongere $27^{\underline{3}} - 2^{\underline{1}}$, acciochè gionto con $2^{\underline{1}}$ faccia $27^{\underline{3}}$, ch'è cubo, il lato del quale e $3^{\underline{1}}$ e questo deve esserè eguale alla somma di $8^{\underline{3}}$gionti con $27^{\underline{3}} - 2^{\underline{1}}$, ch'è $35^{\underline{3}} - 2^{\underline{1}}$, che levato il meno e schifato haveremo $35^{\underline{2}}$ eguale a 5, della quale agguagliatione non ne viene numero rationale, perché fra 35 et 5 non e proportione come da numero quadrato a numero quadrato, cioè a partir 5 per 35 non ne viene numero quadrato. Però bisogna cercar dove nasce il 35 et il 5, che il 35 nasce dal composto di due cubi, cioè 8 e 27 et il 5 dal composto delli loro lati. Però bisogna trovare dui numeri cubi che il composto loro col composto de' lati loro habbia proportione come da numero quadrato a numero quadrato e per trovar pongasigli che i lati loro gionti insieme siano qual numero si voglia e sia 2 et il lato di uno di loro sia $1^{\underline{1}}$ e dell'altro $2 - 1^{\underline{1}}$; li lor cubi gionti insieme saranno $6^{\underline{2}} - 12^{\underline{1}} + 8$ e si vuole che questo con il 2, somma de' lati loro, habbia proportione come da numero quadrato a numero quadrato e perché il 2 in proportione dell'8 e come da numero quadrato a numero quadrato, però partendo $6^{\underline{2}} - 12^{\underline{1}} + 8$ per 2 ne viene $3^{\underline{2}} - 6^{\underline{1}} + 4$ e questo è eguale a un quadrato, il cui lato bisogna che sia 2, lato del 4, meno tanti$^{\underline{1}}$ che il suo quadrato sia maggiore delle $3^{\underline{2}}$ e sia $2 - 4^{\underline{1}}$; il quadrato sarà $16^{\underline{2}} - 16^{\underline{1}} + 4$, che agguagliato a $3^{\underline{2}} - 6^{\underline{1}} + 4$, il Tanto valerà e però l'uno delli dui numeri sarà $\frac{10}{13}$ e l'altro lo restante sino a 2, cioè $1\frac{3}{13}$, che levato il rotto et schifato l'uno sarà 5 e l'altro 8. Hor tornando al principio pongo che il lato del cubo sia $5^{\underline{1}}$, il cubo sarà $125^{\underline{3}}$ e pongo che il numero da giongere sia $512^{\underline{3}} - 5^{\underline{1}}$, cioè il cubo dell'8 trovato meno li $5^{\underline{1}}$, lato del primo cubo, che giontolo con $5^{\underline{1}}$ farà cubo e gionto con $125^{\underline{3}}$ fa $637^{\underline{3}} - 5^{\underline{1}}$ e questo è eguale a $8^{\underline{1}}$, lato del $512^{\underline{3}}$, che levato simile da simile et il meno si haveranno $637^{\underline{3}}$ eguale a $13^{\underline{1}}$ che schifato e partito per 13 si haverà $49^{\underline{2}}$ eguale a 1, che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{1}{7}$; però il lato del numero cubo che fu posto $5^{\underline{1}}$, sarà $\frac{5}{7}$, il numero cubo sarà $\frac{125}{343}$ et il numero da giongere sarà $\frac{267}{343}$, che fanno quanto si propone.

Problema CXLIII.

Faccisi di 14 tre parti in continua proportione tali che la seconda sia 2 più della prima.

Ponghisi che la prima sia $1^{\underline{1}}$; la seconda sarà $1^{\underline{1}} + 2$ e la terza sarà $12 - 2^{\underline{1}}$ acciochè tutte tre insieme siano 14. Hor vedasi se a moltiplicare la prima via la terza fa quanto a moltiplicare la seconda in se, che il produtto della prima nella terza e $12^{\underline{1}} - 2^{\underline{2}}$ e sono eguali a $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$, quadrato della seconda, che levato il meno e simile da simile si haverà $3^{\underline{2}} + 4$ eguale a $8^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 2. Però la prima sarà 2, la seconda 4 e la terza 8 e ne nasce la seguente regola.
Se si haverà a dividere una quantità in tre parti in continua proportione che la seconda sia un dato numero più della prima, moltiplichisi il dato numero per 3 ed il produtto si cavi della quantità proposta e del restante se ne pigli la sesta parte e si quadri e del quadrato se ne cavi il tcrzo del quadrato del dato numero e del restante si pigli il lato il quale si gionghi o cavi del sesto detto di sopra che si quadro, e la somma o lo restante sarà la prima parte.

Problema CXLIIII.

Trovinsi dui numeri overo quantità che il loro produtto sia 8 e la somma delli loro quadrati sia 24.

Ponghisi che l'uno di essi sia $1^{\underline{1}}$; l'altro sarà 8 esimo d'$1^{\underline{1}}$ loro quadrati sono $1^{\underline{2}}$ e 64 esimo d'$1^{\underline{2}}$, che gionti insieme fanno $64 + 1^{\underline{4}}$ esimo d'$1^{\underline{2}}$ e questo è eguale a 24, che levato il rotto (moltiplicando ciascuna parte per $1^{\underline{2}}$) haveremo $64 + 1^{\underline{4}}$ eguale a $24^{\underline{2}}$, che agguagliato, pigliando il quadrato della metà delle potenze, ch'è 144, e cavandone il numero, cioè 64, che resta 80, il lato del qual'e R.q.80 e questo cavato di 12, metà delle potenze, resta 12 − R.q.80, che il suo lato è R.q.10 − R.q.2 e questo è la valuta del Tanto ed il primo numero, col quale partendo 8 ne viene R.q.10 + R.q.2 e questo è il secondo numero e ne nasce la seguente regola.
Se si haveranno a trovare dui numeri tali che il loro produtto sia un dato numero e la somma delli loro quadrati sia un terminato numero, piglisi la metà del terminato numero e del suo quadrato si cavi il quadrato del dato numero e del restante si pigli il lato il quale si cavi della metà del terminato

numero e del restante si pigli il lato il quale sarà il primo numero, col quale partito il dato numero ne verrà il secondo.

Problema CXLV.

Trovinsi dui numeri overo quantità che il loro produtto sia 8 e che la differenza delli loro quadrati sia 24.

Ponghisi che l'uno di detti dui numeri sia $1^{\underline{1}}$; l'altro sarà 8 esimo d'$1^{\underline{2}}$ loro quadrati sono $1^{\underline{2}}$ e 64 esimo d'$1^{\underline{2}}$, che cavato $1^{\underline{2}}$ di 64 esimo d'$1^{\underline{2}}$ resta $64 - 1^{\underline{4}}$ esimo d'$1^{\underline{2}}$ e questo è eguale a 24, che levato il rotto et il meno haveremo $1^{\underline{4}} + 24^{\underline{2}}$ eguale a 64, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$\llcorner$R.q.208 $-$ 12$\lrcorner$ e tanto sarà il primo numero; il secondo sarà il Binomio del primo, cioè R.q.$\llcorner$R.q.208 $+$ 12$\lrcorner$ e ne nasce la seguente regola.
Se si haveranno a trovar dui numeri che il lor produtto sia un dato numero e l'eccesso delli loro quadrati sia un terminato numero, piglisi la metà del terminato numero et al suo quadrato si gionghi il quadrato del dato numero e della somma se ne pigli il lato e di esso si cavi la metà del terminato numero et il lato del restante sarà uno delli numeri che si cercano, col quale partendo il dato numero ne verrà l'altro.

Problema CXLVI.

Trovinsi dui numeri overo quantità tali che il loro produtto sia 8 r la somma delli loro cubati sia 48.

Ponghisi che l'uno di detti numeri sia $1^{\underline{1}}$; l'altro sarà 8 esimo d'$1^{\underline{1}}$, che li loro cubati sono $1^{\underline{3}}$ e 512 esimo d'$1^{\underline{3}}$ che gionti insieme fanno $512 + 1^{\underline{6}}$ esimo d'$1^{\underline{3}}$ e questo è eguale a 48, che levato il rotto si haverà $1^{\underline{6}} + 512$ eguale a $48^{\underline{3}}$, che per far l'agguagliatione piglisi la metà de' cubi, ch'è 24, quadrisi fa 576, del quadrato se ne cavi il nurnero, ch'è 512, resta 64 che il suo lato è 8, il quale cavato di 24, metà de' cubi, resta 16, che il suo lato cubico e R.c.16 e questo è la valuta del Tanto et il primo numero, col quale partendo 8 ne

viene R.c.32 e questo è il secondo numero e ne nasce la seguente regola.
Se si haveranno a trovare dui numeri che il lor produtto sia un dato numero e la somma delli loro cubati sia un terminato numero, piglisi la metà del terminato numero e del suo quadrato si cavi il cubato del dato numero e del restante si pigli il lato il quale si cavi della metà del terminato numero, che il lato cubico del restante sarà uno delli do-rnandati numeri, col quale partasi il dato numero e l'avenimento sarà l'altro numero.

Problema CXLVII.

Trovinsi dui numeri overo quantità tali che il lor produtto sia 2 e la differenza delli loro cubati sia 20.

Ponghisi che l'uno delli numeri sia $1^{\underline{1}}$; l'altro sarà 2 esimo d'$1^{\underline{1}}$ che li lor cubati sono $1^{\underline{3}}$ e 8 esimo d'$1^{\underline{3}}$, che cavato $1^{\underline{3}}$ di 8 esimo d'$1^{\underline{3}}$ resta $8 - 1$ esimo d'$1^{\underline{3}}$ e questo è eguale a 20, che levato il rotto et il meno si haverà $1^{\underline{6}} + 20^{\underline{3}}$ eguale a 8, che per far l'agguagliatione piglisi la metà delli cubi, ch'è 10, et al suo quadrato si gionghi il numero, ch'è 8, fa 108, che il suo lato è R.q.108, del quale se ne cavi la metà delli cubi, ch'è 10, resta R.q.108 $-$ 10 che il suo lato cubico e R.q.3 $-$ 1 e questa 6 la valuta del Tanto et il primo numero, col quale partasi 2 ne viene R.q.3 + 1 per il secondo e ne nasce la seguente regola.
Se si haveranno a trovare dui numeri tali che il lor produtto sia un dato numero e la differenza delli loro cubati sia un terminato numero, piglisi la metà del terminato numero e quadrisi et al produtto si gionghi il cubo del dato numero e della somma si pigli il lato del quale si cavi la metà del terminato numero, che il lato cubico del restante sarà l'un delli cercati numeri, col quale si parta il dato numero e l'avenimento sarà l'altro numero cercato.

Problema CXLVIII.

Trovinsi dui numeri cubi tali che la somma loro sia eguale alla somma delli lor lati.

Ponghisi che il lato d'un d'essi sia $2^{\underline{1}}$ e il lato dell'altro $3^{\underline{1}}$ lor cubi gionti insieme fanno $35^{\underline{3}}$ e li lati $5^{\underline{1}}$, che schifato, $35^{\underline{2}}$ sono eguali a 5, che l'agguagliatione non si può fare per numero rationale, per non essere da 35 a 5 proportione come da numero quadrato a numero quadrato; però la cosa si riduce a trovare dui cubi tali che la somma loro alla somma de' suoi lati habbia proportione come da numero quadrato a numero quadrato, che (come nella 143 di questo) l'uno haverà di lato 5 e l'altro 8. Hor tornando al principio ponghisi che il lato d'un delli cubi sia $5^{\underline{1}}$ e dell'altro $8^{\underline{1}}$; li loro cubi gionti insieme sono $637^{\underline{3}}$e li lati $13^{\underline{1}}$, che schifato, 637 saranno eguali a 13 et il Tanto valerà; però il lato d'un delli cubi sarà e dell'altro sarà 8 e li cubi saranno $\frac{125}{343}$ e $\frac{512}{343}$ la somma loro è $1\ \frac{6}{7}$ e la somma de' lor lati è similmente $1\frac{6}{7}$ (come si propone).

Problema CXLIX.

Trovinsi dui numeri cubi tali che la differenza loro sia eguale alla differenza de' lati loro.

Ponghisi che il lato di un di essi numeri sia $2^{\underline{1}}$ e il lato dell'altro $3^{\underline{1}}$; li loro cubi sono $8^{\underline{3}}$ e $27^{\underline{3}}$, che l'eccesso loro è $19^{\underline{3}}$ e questo è eguale a $1^{\underline{1}}$, eccesso de' lati loro, che per non essere da 19 a 1 proportione come da numero quadrato a numero quadrato, l'agguagliatione non si pm) fare per numero rationale. Però la cosa si riduce a trovare dui numeri cubi che l'eccesso loro all'eccesso de' lati loro habbia proportione come da numero quadrato a numero quadrato; però ponghisi che il lato dell'uno sia $1^{\underline{1}}$ e dell'altro $1^{\underline{1}} + 1$, acciochè l'eccesso loro sia quadrato, ch'è 1, e l'eccesso de' loro cubi e $3^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} + 1$ e questo ad 1, eccesso de' lati, deve haver proportione come da quadrato a quadrato e però moltiplicato l'1 per $3^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} + 1$ deve far quadrato, ma fa $3^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} + 1$; però questo è eguale a un quadrato, il lato del quale sia 1, lato dell'1 accompagnato con le $3^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}}$, meno tanti$^{\underline{1}}$ che il suo quadrato sia maggiore delle $3^{\underline{2}}$, e sia $1 - 2^{\underline{1}}$; il quadrato sarà $4^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 1$, che levato il meno e simile da simile et agguagliato, il Tanto valerà 7 e 7 sarà l'un de' numeri e l'altro sarà 8. Hor, tornando rl principio, ponghisi che il lato d'un delli cubi sia $7^{\underline{1}}$ e il lato dell'altro $8^{\underline{1}}$; l'eccesso de' cubi loro è $169^{\underline{3}}$ e questo è eguale a $1^{\underline{1}}$, eccesso de lati loro, che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{1}{13}$; però il lato del primo cubo sarà $\frac{7}{13}$ et il lato del secondo sarà $\frac{8}{13}$ e li cubi saranno $\frac{343}{2197}$ e $\frac{512}{2197}$.

Problema CL.

Trovinsi dui numeri tali che il cubato del maggiore insieme con il minore sia eguale al cubato del minore insieme col maggiore.

Ponghisi che l'un de' numeri sia $2^{\underline{1}}$ e l'altro $3^{\underline{1}}$, che il cubo del maggiore con il minore e $27 + 2^{\underline{1}}$ et il cubo del minore con il maggiore è $8^{\underline{3}} + 3^{\underline{1}}$, ch'è eguale a $27^{\underline{3}} + 2^{\underline{1}}$, che levato simile da simile e schifato si haverà $19^{\underline{2}}$ eguale a 1, che non ne può venire numero rationale, per non esser proportione fra 19 e 1 come da numero quadrato a numero quadrato, ma il 19 nasce dall'eccesso di dui cubi e l'1 dallo eccesso de' suoi lati; però bisogna trovare dui numeri cubi che l'eccesso loro all'eccesso de' suoi lati habbia proportione come da numero quadrato a numero quadrato, che (come nella passata) il lato dell'uno sarà 7 e il lato dell'altro 8. Hor ponghisi che il lato di un delli cubi, cioè l'un delli numeri, sia $7^{\underline{1}}$ e l'altro $8^{\underline{2}}$, che si trovara (come nella passata) che l'uno sarà $\frac{7}{13}$ e l'altro $\frac{8}{13}$.

Problema CLI.

Trovinsi dui numeri tali che gionto una unità a qual si voglia di loro o alla somma loro o all'eccesso loro le somme siano numero quadrato.

Se da qual si voglia quadrato si cavara 1 lo restante si potra ponere per il primo numero, e sia il quadrato $9^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 1$, che cavatone 1 testa $9^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}}$ e questo si ponga per il primo numero e per trovare il Mrcondo se si trovara un quadrato che giontoli $9^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}}$ faccia quadrato e di quello ne cavaremo l'unita, lo restante si potra ponere per il secondo r per trovar tal quadrato trovisi un numero quadrato che gionto con 9, numero delle potenze, faccia quadrato, che esso (per la 62 di questo) sarà 16, che il suo lato è 4; però si ponera il lato del quadrato essere $4^{\underline{1}} + 3$, lato del 9, numero delle $^{\underline{2}}$; il quadrato sarà $16^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 9$, che cavatone 1 resta $16^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 8$ e questo si ponghi per il secondo numero, che gionto con $9^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}}$, che si pone il primo, e con l'unita fa $25^{\underline{2}} + 30^{\underline{1}} + 9$, ch'è quadrato. Resta che all'eccesso loro, ch'è $7^{\underline{2}} + 18^{\underline{1}} + 8$, gionto l'unità faccia quadrato; però $7^{\underline{2}} + 18^{\underline{1}} + 8$ è eguale a un quadrato, che il suo lato sia tanti $^{\underline{1}}$ che il suo quadrato sia maggiore di $7^{\underline{2}}$, meno 3, lato del 9, cioè sia poniamo $4^{\underline{1}} - 3$, che il quadrato sarà $16^{\underline{2}} - 24^{\underline{1}} + 9$, che levato simile da simile et il meno haveremo $9^{\underline{2}}$ eguale a $42^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà $4\frac{2}{3}$; però il primo numero, che fu posto $9^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}}$, sarà 224 et il secondo, che fu posto $1^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 8$, sarà $468\frac{4}{9}$ et il numero da giongersi 1, che fa quanto si propone.

Problema CLII.

Trovinsi tre numeri quadrati tali che la somma loro sia eguale alla somma delli tre eccessi che sono l'uno dal primo al secondo, l'altro dal secondo al terzo e l'altro dal terzo al primo.

Perche di ogni tre numeri l'eccesso ch'è dal maggiore al mezzano e dal mezzano al minore e dal maggiore al minore e quanto l'eccesso di tutti tre gionti insieme e perché l'eccesso di tutti tre gionti insieme e quanto l'eccesso del maggiore al minore due volte e l'eccesso del maggiore al minore e pari agli altri due, però ponghisi che il minore delli tre numeri quadrati sia 1 et il maggiore $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$, che l'eccesso loro e $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$; adunque tutti tre insieme sono il doppio, cioè $2^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ et essendo il maggiore e il minore insieme $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 2$ il mezzano sarà lo restante, cioè $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} - 2$ e questo deve essere quadrato; così lo agguagliaremo a un quadrato, il lato del quale sia $1^{\underline{1}}$ meno un numero come si voglia e sia $1^{\underline{1}} - 4$, che il quadrato sarà $1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 16$, che levato simile da simile et il meno haveremo 101 eguale a 18, che il Tanto valerà $1\frac{4}{5}$; però il minore sarà 1 (come si pose), il maggiore $7\frac{21}{25}$, che si pose $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$ et il mezzano $4\frac{21}{25}$, che fanno quanto si propone.

Problema CLIII.

Trovinsi tre numeri tali che la somma del primo e del secondo moltiplicata nel terzo faccia 35, la somma del secondo e terzo via il primo faccia 27 e la somma del primo e terzo via il secondo faccia 32.

Ponghisi che il terzo numero sia 1 esimo d'$1^{\underline{1}}$ e perché moltiplicato ncl primo e secondo deve far 35 essi saranno $35^{\underline{1}}$, delli quali se ne faccino due parti a beneplacito e siano $10^{\underline{1}}$ e $25^{\underline{1}}$ e ponghisi che il primo sia $10^{\underline{1}}$ et il secondo $25^{\underline{1}}$ e sodisfanno alla prima conditione. Il produtto del secondo e terzo via il primo e $250^{\underline{2}} + 10$ e questo deve esserè eguale a 27 et il produtto del primo e terzo via il secondo e $250^{\underline{2}} + 25$ e questo deve esserè eguale a 32; l'eccesso da 27 a 32 e 5, ma lo eccesso da $250^{\underline{2}} + 10$ a $250^{\underline{2}} + 25$ e 15, che se fusse 5 si haveria quanto si desidera, ma la divisione del 35 fu fatta a caso; però se si farà con ragione haveremo l'intento. Dividasi dunque 35 in dui numeri tali che l'uno sia 5 più dell'altro, che saranno 15 e 20; ponghisi dunque che il primo delli numeri che si cercano sia $15^{\underline{1}}$ et il secondo $20^{\underline{1}}$; il produtto del del secondo e terzo nel primo e $15 + 300^{\underline{2}}$ et è eguale a 27 et il produtto del primo e terzo nel secondo e $20 + 300^{\underline{2}}$ et è eguale a 32, che agguagliato qual si voglia il Tanto valerà $\frac{1}{5}$; però il primo, che fu posto $15^{\underline{1}}$, sarà 3; il secondo, che fu posto $20^{\underline{1}}$, sarà 4 et il terzo, che fu posto 1 esimo d'$1^{\underline{1}}$, sarà 5, che fanno quanto si propone.

Problema CLIIII.

Trovinsi dui numeri over quantità tali che il loro produtto sia 16 e che partito l'un per l'altro ne venga 4.

Ponghisi che l'uno di detti numeri sia $1^{\underline{1}}$; l'altro sarà 16 esimo d'$l^{\underline{1}}$ acciochè il lor produtto sia 16. Hor vedasi se a partire Fun per l'altro ne vien 4; però partasi 16 esimo d'$1^{\underline{1}}$, per $1^{\underline{1}}$, ne viene 16 esimo d'$1^{\underline{2}}$ e questo è eguale a 4, che levato il rotto et agguagliato, il Tanto valerà 2; però il primo numero sarà 2 et il secondo 8 e ne nasce la seguente regola.

Se si haveranno a trovare dui numeri tali che il lor produtto sia un dato numero e che partito l'un per l'altro ne venghi un terminato numero, partasi il dato numero per il terminato numero e dell'avenimento si pigli il lato, il quale sarà uno delli cercati numeri, col quale si parta il dato numero o si moltiplichi il terminato numero e ne verrà l'altro.

Problema CLV.

Trovinsi dui numeri overo quantità tali che il lor produtto sia 16 e che partito il maggiore per il minore et il minore per il maggiore e gli avenimenti gionti insieme faccino $4\frac{1}{4}$.

Ponghisi che l'uno di detti dui numeri sia $1^{\underline{1}}$ e l'altro 16 esimo d'$1^{\underline{1}}$ acciochè il loro produtto sia 16. Hor partasi 16 esimo d'$1^{\underline{1}}$ per $1^{\underline{1}}$, ne viene 16 csimo d'$1^{\underline{2}}$ e partito $1^{\underline{1}}$ per 16 esimo d'$1^{\underline{1}}$ ne viene $1^{\underline{2}}$ esimo di 16 e questi avenimenti gionti insieme fanno $1^{\underline{4}}$ + 256 esimo di $16^{\underline{2}}$ e questo è eguale a $4\frac{1}{4}$, che levato il rotto e ridutto a $1^{\underline{4}}$ si haverà $1^{\underline{4}}$ + 256 eguale a $68^{\underline{2}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 2; però il primo numero, che fu posto $1^{\underline{1}}$, sarà 2 et il secondo, che fu posto 16 esimo d'$1^{\underline{1}}$, sarà 8 e ne nasce la seguente regola.
Se si haveranno a trovare dui numeri tali che il lor produtto sia un terminato numero e che partito il maggiore per il minore et il minore per il maggiore e gli avenimenti gionti insieme faccino un dato numero, moltiplichisi il dato numero via il terminato numero e la metà del produtto si salvi e l'altra si moltiplichi in se stessa e del produtto si cavi il quadrato del terminato numero e del restante si pigli il lato, il quale si cavi della metà serbata di sopra e del restante si pigli il lato, il quale sarà uno delli numeri cercati col quale si parta il terminato numero e ne verrà l'altro.

Problema CLVI.

Faccisi di 10 due parti tali che il loro produtto sia eguale alla somma delli loro quadrati partita per esso 10.

Ponghisi che a moltiplicare l'una via l'altra il produtto habbia ad essere $1^{\underline{1}}$ e faccisi di 10 due parti tali che il lor produtto sia $1^{\underline{1}}$, che per la 80 di questo l'una sarà $5 - \text{R.q.}\llcorner 25 - 1^{\underline{1}}\lrcorner$, e l'altra $5 + \text{R.q.}\llcorner 25 - 1^{\underline{1}}\lrcorner$, che li loro quadrati sono $50 - 1^{\underline{1}} - \text{R.q.}\llcorner 2500 - 100^{\underline{1}}\lrcorner$ e $50 - 1^{\underline{1}} + \text{R.q.}\llcorner 2500 - 100^{\underline{1}}\lrcorner$, che gionti insieme fanno $100 - 2^{\underline{1}}$, che partito per 10 ne viene $10 - \frac{1^{\underline{1}}}{5}$ e questo è eguale a $1^{\underline{1}}$ che si pose essere il produtto delle due parti cercate, che levato il meno et agguagliato, il tanto valerà $8\frac{1}{3}$ e questo è il produtto delle due parti. Hor bisogna far di 10 due tal parti che il loro produtto sia $8\frac{1}{3}$ che per la regola sua di questo si deve pigliar la metà di 10, ch'è 5 e quadrarla, fa 25, che cavatone $8\frac{1}{3}$ resta $16\frac{2}{3}$; il suo lato è R.q.16 che gionto e cavato di 5 fa $5 + \text{R.q.}16\frac{2}{3}$ e $5 - \text{R.q.}16\frac{2}{3}$ e queste sono le due parti domandate. Avertendosi che in principio si potea ancor ponere che l'una delle parti fusse $1^{\underline{1}}$ e l'altra 10 esimo d'$1^{\underline{1}}$.

Problema CLVII

Faccisi di 10 due parti tali che il produtto loro sia eguale al quadrato di una di dette parti giontoli 6.

Ponghisi che l'una parte sia $1^{\underline{1}}$ e l'altra $10 - 1$ che il quadrato d'$1^{\underline{1}}$ e $1^{\underline{2}}$ al qual gionto 6 fa $1^{\underline{2}} + 6$ e questo è eguale a $10^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}}$, produtto dell'una parte nell'altra, che levato il meno e ridutto a $1^{\underline{2}}$, si haverà $1^{\underline{2}} + 3$ eguale a $5^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà $2\frac{1}{2} - \text{R.q.}3\frac{1}{4}$ e questa sarà una parte; l'altra sarà il resto sino a 10, cioè $7\frac{1}{2} + \text{R.q.}3\frac{1}{4}$, che fanno quanto si è proposto e ne nasce la seguente regola.
Se si haverà a dividere una quantità in due tal parti che il produtto Toro sia eguale al quadrato di una di dette parti giontoli il dato numero, piglisi la metà della proposta quantità e del suo quadrato si cavi la metà del dato numero et il lato del restante si cavi del detto quarto della quantità che il rimanente sarà una delle parti cercate, quale cavata della proposta quantità ne verrà l'altra parte.

Problema CLVIII.

Dividasi un numero quadrato in tre parti tali che il quadrato della prima gionto con la seconda, il quadrato della seconda gionto con la terza et il quadrato della terza gionto con la prima, le somme loro siano numero quadrato.

Ponghisi che la seconda parte sia $4^{\underline{1}}$ e la prima il lato d'un quadrato tale che giontoli $4^{\underline{1}}$ faccia quadrato, che sarà $1^{\underline{1}} - 1$ et è soddisfatto alla prima conditione. Hora al quadrato del secondo, ch'è $16^{\underline{2}}$, se se li giongerà $8^{\underline{1}} + 1$ farà quadrato; però il terzo si ponghi essere $8^{\underline{1}} + 1$; resta di vedere se tutti tre insieme fanno quadrato, ma tutti Ire insieme sono $13^{\underline{1}}$ e sono eguali a un quadrato, qual sia 169, che il Tanto valerà 13; però li 4 Tanti della seconda saranno 52, li 8 Tanti

della terza saranno 104 et il Tanto della prima 13. Hor tornando al principio ponghisi che il primo sia $13^{\underline{2}} - 1$, il secondo 521. et il terzo $104^{\underline{2}}$ $+ 1$ acciochè tutti tre insieme faccino quadrato, e il quadrato del primo col secondo fa quadrato, il quadrato del secondo col terzo fa quadrato; resta che il quadrato del terzo col primo faccia quadrato. II quadrato di esso terzo e $10816\ ^{\underline{4}}+ 208^{\underline{2}} + 1$, che giontoli $13^{\underline{2}} - 1$, ch'e il primo, fa $10816^{\underline{4}} + 221^{\underline{2}}$ e questo a eguale a un quadrato, il lato del quale sia 104 più quanti Tanti si vogliono, pure che il suo quadrato sia minore di 221, e sia $104^{\underline{2}} + 11$, che il quadrato sarà $108161^{\underline{4}} + 208^{\underline{2}} + 1$ che levato simile da simile e schifato haveremo $208^{\underline{1}}$ eguale a 220, che agguagliato, il Tanto valera $1\frac{3}{5}$; però il primo numero o la prima parte, ch'era $13^{\underline{2}} - 1$, sarà $\frac{317304}{2704}$; la seconda, ch'era $52^{\underline{2}}$, sarà $\frac{157300}{2704}$ e la terza, ch'era $104^{\underline{2}} + 1$, sarà $\frac{317304}{2704}$ et il numero quadrato diviso sarà $\frac{511225}{2704}$ e fanno quanto si è proposto.

Problema CLIX.

Trovinsi tre numeri tali che la somma loro sia numero quadrato e che del quadrato di ciascun di loro cavato il numero seguente resti numero quadrato.

Ponghisi che il secondo sia $4^{\underline{1}}$ et il primo sia $1^{\underline{1}} + 1$ acciochè del suo quadrato cavatone $4^{\underline{1}}$ (cioe il secondo) resti quadrato. Il quadrato del secondo e $16^{\underline{2}}$ che cavatone $8^{\underline{1}} - 1$ restara quadrato; però si ponera che il terzo sia $8^{\underline{1}} - 1$; resta che tutti tre insieme siano un quadrato e che il quadrato del terzo meno il primo sia quadrato, ma prima si risolva l'una e poi l'altra. La somma di tutti tre e $13^{\underline{1}}$ etè eguale a un quadrato e sia 169, che il Tanto valera 13 e facciasi che siano potenze; però ponghisi che il primo sia $13^{\underline{2}} + 1$, il secondo $52^{\underline{2}}$ et il terzo $104^{\underline{2}} - 1$, che la somma loro e quadrato; resta che il quadrato del terzo meno il primo sia quadrato, mail quadrato del terzo e $10816^{\underline{4}} - 208^{\underline{2}} + 1$, che cavatone il primo, ch'e $13^{\underline{2}} + 1$, resta $10816^{\underline{4}} - 221^{\underline{2}}$, ch'e eguale a un quadrato il cui lato sia $104^{\underline{2}} - 1^{\underline{1}}$, che il quadrato sarà $10816^{\underline{4}} - 208^{\underline{3}} + 1^{\underline{2}}$, che levato simile da simile, il meno e schifato si haverà $208^{\underline{1}}$ eguale a 222, che agguagliato, il Tanto valera $1\frac{7}{104}$; però il primo numero, che fu posto $13^{\underline{2}} + 1$, sarà $\frac{170989}{10816}$ il secondo, che fu posto $52^{\underline{2}}$, sarà $\frac{640692}{10816}$ et il terzo, che fu posto $104^{\underline{2}} - 1$, sarà $\frac{1270568}{10816}$ che fanno quanto si è proposto.

Problema CLX.

Trovinsi dui numeri tali che il cubato del primo gionto co'l secondo faccia un numero cubo e che il quadrato del secondo gionto col primo faccia un numero quadrato.

Ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$ et il secondo un numero cubo meno $1^{\underline{3}}$ e sia $8 - 1^{\underline{3}}$ che il cubato del primo gionto col secondo fara 8, ch'e numero cubo; resta che il quadrato del secondo gionto co'l primo faccia quadrato, ma il quadrato del secondo e $1^{\underline{6}} - 16^{\underline{3}} + 64$, che giontoli il primo fa $1^{\underline{6}} - 16^{\underline{3}} + 64 + 1^{\underline{1}}$ e questo è eguale a un quadrato il lato del quale sia $1^{\underline{3}} + 8$, che il quadrato sarà $1^{\underline{6}} + 16^{\underline{3}} + 64$, che levato simile da simile, il meno e schifato, si haverà $32^{\underline{2}}$ eguale a 1. Ma perché non puo venir numero rationale della agguagliatione, per non essere il 32 quadrato, però bisogna far nuova positione e perché il 32 nasce da quattro volte l'8, numero cubo, e se l'8 fusse stato numero quadrato si haverebbe quanto si cerca, però bisogna che il numero del secondo sia un numero cubo quadrato e sia dunque il cubo cercato 1, overo 64, ma per più commodità si pigli l'1; il quadruplo suo e 4, però si haverà $4^{\underline{2}}$ eguale a 1, che agguagliato, il Tanto valera $1\frac{7}{104}$; però il primo numero, che fu posto $1^{\underline{1}}$, sarà $\frac{1}{2}$ et il secondo, che fu posto $1 - 1^{\underline{3}}$, sara.

Problema CLXI.

Trovinsi tre quantità indeterminate di dignità che al produtto di due qual si voglia gionto l'unita faccia quadrato.

Perche si vuole che il produtto della prima nella seconda insieme con l'unita faccia quadrato, però se da qual si voglia quadrato si cavara l'unità, lo restante si potra ponere per il produtto del primo nel secondo e sia il quadrato $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$, che cavatone l'unita resta $1^{\underline{2}} + 2^{\ \underline{1}}$ e questo poneremo per produtto del primo nel secondo e per trovarli separatamente pongo che il secondo sia $1^{\underline{1}}$ et il primo sarà $1^{\underline{1}} + 2$ e perché il produtto del secondo nel terzo insieme conl'unita deve fare un quadrato, pongo un altfo quadrato, qual sia $9^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 1$, che cavatone l'unita resta $9^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}}$ e questo pongo per produtto del secondo nel terzo e perché il secondo fu posto $1^{\underline{1}}$, il terzo sarà $9^{\underline{1}} + 6$; resta che il produtto del terzo nel primo, qual'e $9^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 12$, insieme con l'unita, ch'e in tutto $9^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 13$, sia eguale a un quadrato e se fusse $9^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 16$ sarebbe espedita l'altra conditione. Ma il 13 nasce dal produtto delle due unita e del 6 accompagnato con l'unita et il 2 viene dal doppio d'$1^{\underline{1}}$ via 1 et il 6 nasce dal doppio fatto da $3^{\underline{1}}$ via 1; bisogna dunque che due volte li Tanti insieme con l'unita faccino un quadrato e perché habbino a fare tale effetto bisogna che il numero delli Tanti delli lati delli dui quadrati si seguitino, cioe che se l'uno e 2 o 3 l'aitro sia 3 o 4; ponghisi dunque che il lato del primo quadrato sia $1^{\underline{1}} + 1$, il quadrato sarà $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$, che levatone l'unita resta $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ e questo si ponghi per produtto del primo e secondo; ponghisi il secondo essere $1^{\underline{1}}$ et il primo sarà $1^{\underline{1}} + 2$ e per l'altro quadrato si pigli per suo lato $2^{\underline{1}} + 1$, che il quadrato sarà $4^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 1$, che cavatone l'unita resta $4^{\underline{2}} + 41$ per produtto del secondo nel terzo et essendo il secondo $1^{\underline{1}}$, il terzo sarà $4^{\underline{1}} + 4$. Il produtto del primo nel terzo con l'unita e $9^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 9$, ch'è quadrato e così habbiamo trovato le tre quantita, che la prima e $1^{\underline{1}} + 2$, la seconda $1^{\underline{1}}$ e la terza $4^{\underline{1}} + 4$, che fanno quanto si propone.

Problema CLXII.

Trovinsi quattro numeri tali che al produtto di dui qual si voglia gionto l'unita faccia quadrato. Perchè il produtto del primo nel secondo insieme con l'unita deve fare un quadrato se di qual si voglia quadrato si cavara l'unita si haverà il produtto del primo nel secondo. Hor sia il quadrato $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$, che il suo lato e $1^{\underline{1}} + 1$; se se ne cavara 1 restara $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ e questo si puo ponere per produtto del primo nel secondo e ponendo il primo $1^{\underline{1}}$, il secondo sarà $1^{\underline{1}} + 2$. Hor per trovare il produtto del primo e terzo m'immagino un quadrato fatto da $2^{\underline{1}} + 1$ per la ragione detta nella passata, il quale quadrato sarà $4^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 1$, del quale cavatone l'unita resta $4^{\underline{2}} + 41$ e questo sia il produtto del primo e terzo e perché il primo fu posto 1 terzo sarà $4^{\underline{1}} + 4$ e per trovar il quarto m'immagino un quadrato fatto da $3^{\underline{1}} + 1$ (per la ragione detta nella passata) il quale sarà $9^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 1$, che cavatone l'unita resta $9^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}}$ e questo ponere per produtto del primo nel quarto, che per essere il primo $1^{\underline{1}}$, il quarto sarà $9^{\underline{1}} + 6$; e perché il produtto del secondo nel terzo insieme con l'unita a quadrato, resta che il produtto del secondo nel quarto insieme con l'unita sia quadrato; ma e $9^{\underline{2}} + 24^{\underline{1}} + 13$; però sarà eguale a un quadrato, il quale sia fatto da $3^{\underline{1}}$ meno che numero si voglia, purche il suo quadrato sia maggiore di 13 e sia fatto da $3^{\underline{1}} - 4$ acciochè il suo quadrato sia maggiore di 13, che il quadrato sarà $9^{\underline{2}} - 24^{\underline{1}} + 16$, che levato simile da simile et il meno si haverà 481 eguale a 3, che il Tanto valera 16 e perché il primo fu posto $1^{\underline{1}}$ sarà 16; il secondo, che fu posto $1^{\underline{1}} + 2$, sarà $2^{\underline{1}}$; il terzo, che fu posto $4^{\underline{1}} + 4$, sarà 4 et il quarto, che fu posto $9^{\underline{1}} + 6$, sarà $6\frac{9}{16}$ che li loro produtti moltiplicati a dui a dui sono $\frac{23}{256}$, $\frac{68}{256}$, $\frac{105}{256}$, $\frac{2244}{256}$, $\frac{3465}{256}$, et $\frac{7140}{256}$, che gionto a ciascun di loro una unità le somme sono $\frac{289}{256}$, $\frac{324}{256}$, $\frac{361}{256}$, $\frac{2500}{256}$, $\frac{3721}{256}$ et $\frac{7396}{256}$ che ciascuna di loro e quadrata e il lati sono $\frac{17}{16}$, $\frac{18}{16}$, $\frac{19}{16}$, $\frac{50}{16}$, $\frac{61}{16}$ et $\frac{89}{16}$.

Problema CLXIII.

Trovinsi dui numeri over quantità tali che la somma delli loro quadrati sia 104 e che il quadrato dell'uno moltiplicato per 25 sia eguale al quadrato dell'altro.

Ponghisi che l'uno di detti numeri sia $1^{\underline{1}}$ e per trovar l'altro quadrisi, fa 1 e questo si cavi di 104 resta $104 - 1^{\underline{2}}$ che il suo lato è R.q.$\llcorner 104 - 1^{\underline{2}} \lrcorner$ e questo e l'altro che il suo quadrato, ch'e $104 - 1^{\underline{2}}$è eguale al quadrato dell'altro numero, ch'era 11, moltiplicato per 25, cioe a $25^{\underline{2}}$, che levato il meno et agguagliato, il Tanto valerà 2; però l'un delli due numeri, che fu posto $1^{\underline{1}}$ sarà 2, che quadrato fa 4 e questo cavato di 104 resta 100, che il suo lato e 10 e 10 sarà l'altro numero, che il suo quadrato, ch'e 100,è eguale al quadrato dell'altro, ch'e 2, moltiplicato per 25 (come si propose) e ne nasce la seguente regola.

Se si haveranno a trovare dui numeri tali che la somma delli loro quadrati sia un dato numero e che il quadrato dell'uno moltiplicato per un terminato numero sia eguale al quadrato dell'altro, aggionghisi 1 per regola al terminato numero e con la somma si parta il dato numero, che il lato dell'avvenimento sarà uno delli domandati numeri e per trovar l'altro quadrisi esso numero trovato et il quadrato si cavi del dato numero che il lato del restante sarà l'altro numero cercato. 407

Problema CLXIIII.

Trovinsi tre numeri in continua proportione tali che l'eccesso di dui di loro qual si voglia sia quadrato.

Ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$ e il secondo $1^{\underline{1}} + 4$, acciochè il loro eccesso sia quadrato; il terzo sia $1^{\underline{1}} + 6\frac{1}{4}$ acciochè l'eccesso del primo e terzo, e del secondo e terzo sia quadrato, che per trovar li $6\frac{1}{4}$ bisogna trovare un numero quadrato che cavatone 4 resti quadrato. Ci resta hora che queste tre quantità siano in continua proportione et però il quadrato della seconda, ch'e $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}}$ + 16 deve essere eguale al produtto della prima nella terza, ch'e $1^{\underline{2}} + 6\frac{1}{4}^{\underline{1}}$ e perché l'agguagliatione non si pile fare per essere li $6\frac{1}{4}^{\underline{1}}$ meno di $8^{\underline{1}}$ bisogna ponere che il secondo sia $1^{\underline{1}} + 2$ che così haveremo $1^{\underline{2}} + 4\frac{1}{4}^{\underline{1}} + 5\frac{1}{16}$ eguale a $1^{\underline{2}}$

$+\ 6\frac{1}{4}^{\underline{1}}$, che levato simile da simile si haverà $1\frac{3}{4}^{\underline{1}}$ eguale a $5\frac{1}{16}$ et agguagliato, il Tanto valerà $\frac{81}{28}$ et però il primo numero, che fu posto $1^{\underline{1}}$, sarà 28; il secondo, che fu posto $1^{\underline{1}} + 2\frac{1}{4}$, sarà $\frac{144}{28}$ et il terzo, che fu posto $1^{\underline{1}} + 6\frac{1}{4}$ sarà $\frac{256}{28}$, che sono in continua proportione (come si propone) e li loro eccessi sono $\frac{9}{4}$, $\frac{16}{4}$ et $\frac{25}{4}$ che ciascun di loro e quadrato, che li loro lati sono $1\frac{1}{2}$, 2 et $2\frac{1}{2}$,

Problema CLXV.

Faccisi di 12 due parti tali che la somma delli loro quadrati moltiplicata via la differenza di esse parti facci 832.

Ponghisi che l'unadi dette parti sia $6 + 1^{\underline{1}}$ e l'altra $6 - 1^{\underline{1}}$, che li loro quadrati sono $36 + 12^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$ e $36 - 12^{\underline{1}} + 1$ e gionti insieme fanno $72 + 2^{\underline{2}}$ e questo moltiplicato per $2^{\underline{1}}$, ch'e la differenza delle parti, fa $4^{\underline{3}} + 144^{\underline{1}}$ ch'e eguale a 832, che ridutto a 1 si haverà $1^{\underline{3}} + 36^{\underline{1}}$ eguale a 208, the per agguagliarlo aggionghisi al quadrato della meth del numero, ch'e 10816, il cubato del terzo delli ch'e 1728, fa 12544, che il suo lato e 112 al quale si gionghi e cavi la metà del numero, ch'e 104, fa 216 e 8; li loro lati cubi sono 6 e 2, the cavato 2 di 6 resta 4 e 4 e la valuta del Tanto; però le parti, che furno poste $6 + 1^{\underline{1}}$ e $6 - 1^{\underline{1}}$, saranno 10 e 2, che la somma delli loro quadrati e 104, quale moltiplicata per 8, differenza delle parti, fa 832 (come si propone). Notisi che si potea ancor ponere che l'unaparte fosse 1 e l'altra $12 - 1^{\underline{1}}$, ma sempre arreca più difficulth nell'operare e nelle domande fastidiose assai volte nel far la positione come si e fatto in questa si leva impaccio grande nell'agguagliare.

Problema CLXVI.

Faccisi di 16 due parti tali che la somma delli loro quadrati moltiplicata via la differenza d'essi quadrati faccia 1024.

Ponghisi che l'unaparte sia $8 + 1^{\underline{1}}$ e l'altra $8 - 1^{\underline{1}}$; li loro quadrati sono $1^{\underline{2}} + 16^{\underline{1}} + 64$ e $1^{\underline{2}} - 16^{\underline{1}} + 64$, che gionti insieme fanno $2^{\underline{2}} + 128$ e cavati l'un dell'altro resta $32^{\underline{1}}$, che moltiplicato via $2 + 128$ fa $64^{\underline{3}} + 4096^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 1024, che ridutto a 1 si haverà $1^{\underline{3}} + 64^{\underline{1}}$ eguale a 16, che per agguagliarlo, al quadrato della metà del numero, ch'e 64, giongeremo il cubato del terzo delli $^{\underline{1}}$, ch'e $9709\frac{1}{27}$, fa $9773\frac{1}{27}$, che il suo lato è R.q. $9773\frac{1}{27}$, al quale si gionge e cava la metà del numero, ch'e 8, fa R.q. $9773\frac{1}{27} + 8$ e R.q. $9773\frac{1}{27} - 8$, che cavato il lato cubo della minor quantità del lato cubo della maggiore resta R.c.$\llcorner$R.q. $9773\frac{1}{27} + 8\lrcorner$ $-$ R.c.$\llcorner$R.q.$9773\frac{1}{27} - 8\lrcorner$ e questa è la valuta del Tanto; però le parti, che furono poste $8 + 1^{\underline{1}}$ et $8 - 1^{\underline{1}}$, saranno $8 +$ R.c.$\llcorner$R.q. $9773\frac{1}{27} + 8\lrcorner$ $-$ R.c.$\llcorner$R.q.$9773\frac{1}{27} - 8\lrcorner$ e $8 -$ R.c.$\llcorner$R.q. $9773\frac{1}{27} + 8\lrcorner$ $+$ R.c.$\llcorner$R.q. $9773\frac{1}{27} - 8\lrcorner$, che fanno quanto si propone.

Problema CLXVII.

Trovinsi tre numeri tali che al produtto del primo nel secondo moltiplicato per il terzo gionto qual si voglia delli tre numeri faccia numero quadrato.

Ponghisi che il produtto di tutti tre li numeri sia $12^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ e il primo sia 1 acciochè gionto con $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ la somma sia quadrato e perché il produtto delli tre numeri è posto $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$, se esso si cavarà di qual si voglia quadrato il restante sarà il secondo over terzo, e sia il quadrato $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 9$, che cavatone $1 + 2^{\underline{1}}$ resta $4^{\underline{1}} + 9$ e questo si ponera per il secondo e perché il produtto del primo nel secondo è $4^{\underline{1}} + 9$, se per esso $4^{\underline{1}} + 9$ si partira $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ ne verrà il terzo. Ma non si puo far tal partitione, per non essere proportione eguale fra di loro, perché tal proportione bisogna che habbia $1^{\underline{2}}$ con $4^{\underline{1}}$ quale ha $2^{\underline{1}}$ con 9, overo $1^{\underline{2}}$ con $2^{\underline{1}}$ quale ha $4^{\underline{1}}$ con 9; però intendendosi come da numero a numero, che se $4^{\underline{1}}$ fussero la metà di 9 si potria far la parti-tione. Vedasi dunque di dove nascono questi numeri: il 4 nasce dall'ec-cesso di $6^{\underline{1}}$ e $2^{\underline{1}}$ e li $6^{\underline{1}}$ nascono dal doppio di 3 moltiplicato con un 1 e il 9 nasce dal quadrato di detto 3. Però bisogna trovare un numero che del suo doppio cavatone 2 il restante sia la metà del suo quadrato. Ponghisi che tal numero sia $1^{\underline{1}}$; il suo doppio sarà $2^{\underline{1}}$, che cavatone 2 resta $2^{\underline{1}} - 2$. Il suo quadrato e $1^{\underline{1}}$; adunque $\frac{1}{2}^{\underline{2}}$è eguale a $2^{\underline{1}} - 2$, che levato il meno, ridutto a 1 e agguagliato, il Tanto valera 2 e 2 sarà il numero cercato. Hor, tornando al principio essendo il primo numero 1 e il produtto delli tre $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$, poneremo che il quadrato sia $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$, cioe il quadrato d'$1^{\underline{1}} + 2$, numero trovato di sopra, e di questo quadrato se ne cavara $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$: restara $2^{\underline{1}} + 4$ per il secondo numero e il produtto del primo nel secondo e $2^{\underline{1}} + 4$; però se con esso si partira $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$, produtto di tutti tre, ne verra $\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ per il terzo numero; resta che il produtto loro con il terzo numero faccia quadrato, ma fa $1^{\underline{2}} + 2\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, però questoè eguale a un quadrato, il quale sia, poniamo, $4^{\underline{2}}$, che levato $1^{\underline{2}}$ da ogni parte e agguagliato, il Tanto valera però li numeri, che si posero essere 1, $2^{\underline{1}} + 4$ e $\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, saranno 1, $5\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{12}$, che il loro produtto è $\frac{85}{36}$ al quale gionto essi numeri a uno a uno, le somme saranno $\frac{121}{36}$, $\frac{289}{36}$ e $\frac{100}{36}$ che ciascuna di loro 6 quadrato e li loro lati sono $\frac{11}{6}$, $\frac{17}{6}$ e $\frac{10}{6}$.

Problema CLXVIII.

Trovinsi tre numeri tali che del solido fatto da loro cavatone qual si voglia di loro resti numero quadrato. Ponghisi che il primo numero sia $1^{\underline{1}}$ e il solido fatto da loro sia $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$ acciochè cavatone il primo resti quadrato e partendo $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$, solido loro, per $1^{\underline{1}}$ ch'e il primo, ne viene $1^{\underline{1}} + 1$ e questo e il produtto del secondo nel terzo; hor sia il secondo 1, il terzo sarà $1^{\underline{1}} + 1$; resta hora che il secondo e anco il terzo cavato del solido delli tre numeri resti quadrato, ma li restanti sono $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}} - 1$ e $1^{\underline{2}} - 1$, che habbiamo doppia agguaglianza; però piglisi l'eccesso loro, ch'e $1^{\underline{1}}$, e trovinsi dui numeri che il loro produtto sia $1^{\underline{1}}$, ma che d'essi l'un sia $2^{\underline{1}}$ acciochè il quadrato della sua metà faccia $1^{\underline{2}}$ per poter fare l'agguagliatione, si che il secondo sarà $\frac{1}{2}$ essendo il primo $2^{\underline{1}}$, che gionti insieme fanno $2^{\underline{1}} + \frac{1}{2}$; il quadrato della metà è $1^{\underline{2}} + \frac{1}{2}^{\underline{1}} + \frac{1}{16}$ e questo è eguale a $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}} - 1$, che levato simile da simile e il meno si haverà $\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ eguale a $1\frac{1}{16}$ che agguagliato, il Tanto valerà $2\frac{1}{8}$; però il primo numero, che fu posto $1^{\underline{1}}$, sarà $2\frac{1}{8}$; il secondo, che si pose 1, sarà 1 e il terzo, che si pose $1^{\underline{1}} + 1$, sarà $3\frac{1}{8}$, che il solido loro è $\frac{425}{64}$ del quale cavatone li tre numeri a uno a uno li restanti sono $\frac{289}{64}$, $\frac{361}{64}$ e $\frac{225}{64}$, che ciascun di loro e numero quadrato (come si vuole).

Problema CLXIX.

Faccisi di 6 due parti tali che il produtto loro sia un numero cubo meno il suo lato.

Ponghisi che la prima sia $1^{\underline{1}}$, l'altra sarà $6 - 1^{\underline{1}}$; il produtto loro è $6^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}}$ e questo deve essere eguale a un cubo meno il suo lato, et sia il lato del cubo quanti $^{\underline{1}}$ si vogli meno 1, cioè $2^{\underline{1}} - 1$; il suo cubo sarà $8^{\underline{3}} - 12^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} - 1$, che cavatone il suo lato resta $8^{\underline{3}} - 12^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ e questo è eguale a $6^{\underline{1}} - 1$ che questo agguagliamento non si può fare in numero rationale, ma se li $6^{\underline{1}}$ fussero pari alli $4^{\underline{1}}$ si haveriano li eguali alle e dello agguagliamento ne verrebbe numero rationale, ma li $4^{\underline{1}}$ nascono dal triplo di $2^{\underline{1}}$, lato del cubo, cavatone li medesimi $2^{\underline{1}}$; però bisogna trovare un numero che cavato del suo triplo resti 6, che tal numero sarà 3; ponghisi dunque che il lato del cubo sia $3^{\underline{1}} - 1$, che il cubo sarà $27^{\underline{3}} - 27 + 9^{\underline{1}} - 1$, che cavatone il suo lato resta $27 - 27^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}}$ e questo è eguale a $6^{\underline{1}} - 1$ che levato il meno e simile da simile e schifato, si haverà $27^{\underline{1}}$ eguale a 26, che agguagliato, il Tanto valerà 27; peròla prima parte sarà $\frac{26}{27}$ e la seconda $5\frac{1}{27}$ e il lato del cubo, che fu posto $3^{\underline{1}} - 1$, sarà $\frac{51}{27}$ e il cubo sarà $\frac{4913}{729}$, che cavatone 27, suo lato, resta 729, ch'è il produtto delle due parti (come si vuole).

Problema CLXX.

Faccisi di 23 tre parti tali che il solido loro sia numero cubo e li eccessi loro gionti insieme siano il suo lato.

Ponghisi che il numero cubo sia $8^{\underline{3}}$, il cui lato è $2^{\underline{1}}$ e perché l'eccesso del primo e secondo e quello del secondo e terzo gionti insieme sono sempre eguali all'eccesso del primo e terzo e l'eccesso del primo e terzo è la metà dell'eccesso di tutti tre, essendo l'eccesso di tutti tre $2^{\underline{1}}$, cioè il lato cubo delli $8^{\underline{3}}$, l'eccesso del primo e terzo sarà $1^{\underline{1}}$; ponghisi il primo quanti 1 si voglia e sia $2^{\underline{1}}$; il terzo dunque sarà $3^{\underline{1}}$ e perché il solido delli tre e $8^{\underline{3}}$e il produtto del primo e terzo e $6^{\underline{2}}$, adunque il secondo sarà $1^{\underline{3}}1$, il quale, se fusse maggior del primo e minor del terzo si sarebbe satisfatto a quanto si ricerca, ma il secondo e venuto dal partire $8^{\underline{3}}$ per 6 produtto del primo et terzo. Però bisogna trovar dui numeri che uno sia 1 più dell'altro e che col loro produtto partito 8, l'avenimento sia un numero maggiore del minore e minore del maggiore delli dui. Ponghisi dunque che il minore sia $1^{\underline{1}}$, il maggiore sarà $1^{\underline{1}} + 1$, che il produtto loro e $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$, col quale partito 8 ne viene 8 esimo d'$1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$, il quale ha da essere maggiore d'$1^{\underline{1}}$ e minore d'$1^{\underline{1}} + 1$ e perché l'eccesso loro e 1 bisogna che l'eccesso del primo e secondo sia minor d'1, tal che il secondo con 1 conviene che sia maggiore del terzo, peròa 8 esimo d'$1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$ si gionghi 1, fa $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}} + 8$, esimo d'$1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$ e questo deve essere maggiore d'$1^{\underline{1}} + 1$, che levato il rotto si haverà $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}} + 8$ maggiore d'$1^{\underline{3}} + 2^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$, che levato simile da simile 8 sarà maggiore d'1 + 1 i: sia dunque eguale a $1^{\underline{3}} + 1^{\underline{2}} + \frac{1}{3}^{\underline{1}} + \frac{1}{27}$, quantità cuba fatta da $1^{\underline{1}} + \frac{1}{3}$, che così 2, lato cubo d'8, sarà eguale a $1^{\underline{1}} + \frac{1}{3}$, che levato simile da simile e agguagliato, il Tanto valerà $\frac{5}{3}$; il primo numero dunque, cioè il minore, che fu posto $1^{\underline{1}}$, sarà $\frac{25}{15}$; il secondo $\frac{9}{5}$ e il terzo $\frac{8}{3}$, che ridutti a una denominatione, il primo sarà $\frac{25}{15}$, il secondo $\frac{9}{5}$ e il terzo $\frac{8}{3}$; levisi il rotto a ciascuno e haveremo 25, 27 e 40 e così sono trovati tre numeri che il solido fatto da loro e cubo, il lato del quale e la somma delli eccessi loro: hor pongo che la prima parte sia $25^{\underline{1}}$, la seconda $27^{\underline{1}}$ e la terza $40^{\underline{1}}$, che gionte insieme fanno $92^{\underline{1}}$ e hanno da fare 23; però $92^{\underline{1}}$ sono eguali a 23, che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{1}{4}$; però la prima parte sarà $6\frac{3}{4}$, la seconda $6\frac{3}{4}$ e la terza 10, che il solido fatto da loro è $\frac{3375}{8}$, ch'è numero cubo, il lato del quale è $7\frac{1}{2}$, somma delli eccessi delle tre parti (come si vuole).

Problema CLXXI.

Trovinsi dui numeri tali che al produtto loro gionto qual si voglia d'essi faccia numero cubo. Ponghisi il primo numero un numero cubo di 1 e sia $5^{\underline{1}}$ e il secondo $1^{\underline{2}} - 1$ acciochè al produtto loro, ch'è $8^{\underline{3}} - 8^{\underline{1}}$, gionto il primo faccia

$8^{\underline{3}}$, ch'è cubo; resta che il produtto loro, ch'è $8^{\underline{3}} - 8^{\underline{1}}$, gionto col secondo, ch'è $1^{\underline{2}} - 1$, faccia cubo, ma fa $8^{\underline{3}} + 1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} - 1$ e questo è eguale a un cubo, il cui lato bisogna che sia $2^{\underline{1}}$, lato cubico d'8 meno 1, lato cubico del $-$ 1, che il cubo sarà $8 - 12^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} - 1$, ch'è eguale a $8^{\underline{3}} + 1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} - 1$, che levato il meno e simile da simile $13^{\underline{2}}$ saranno eguali a $14^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{14}{13}$; però li dui numeri, che si posero $8^{\underline{1}}$ e $1^{\underline{2}} - 1$, saranno $8\frac{8}{13}$ e $\frac{27}{169}$, che fanno quanto si propone.

Problema CLXXII.

Trovisi dui numeri tali che del produtto loro cavatone qual si voglia di loro resti numero cubo. Ponghisi che il primo sia $8^{\underline{1}}$ e il secondo $1^{\underline{2}} + 1$, acciochè del produtto loro cavatone il primo resti cubo; ma cavatone il secondo resta $8^{\underline{3}} + 8^{\underline{1}} - 1 - 1$ e questo è eguale a un cubo, il lato del quale di necessità bisogna che sia $2^{\underline{1}} - 1$ (come nella passata), che il cubo sarà $8^{\underline{3}} - 12^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} - 1$, che levato simile da simile e il meno, si haverà $11^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ eguale a nulla, che l'agguagliatione non si può fare; però bisogna mutar positione e ponghisi che il primo sia $8^{\underline{1}} + 1$ e il secondo 1 che il produtto loro meno il secondo fa $8^{\underline{3}}$, ma il produtto loro meno il primo e $8^{\underline{3}} + 1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} - 1$ e questo è eguale a $8^{\underline{3}} - 12^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} - 1$ detto di sopra, che levato simile da simile, il meno e schifato, si haverà $13^{\underline{1}}$ eguale a 14, che agguagliato, il Tanto valerà $1\frac{1}{13}$; però il primo numero, che si pose $8^{\underline{1}} + 1$, sarà $9\frac{8}{13}$ e il secondo, che fu posto $1^{\underline{2}}$, sarà $\frac{196}{169}$, che fanno quanto si propone.

Problema CLXXIII.

Trovinsi dui numeri tali che al produtto loro gionto o cavato la somma loro faccia numero cubo.

Ponghisi che il produtto loro insieme con la somma loro sia 64, numero cubo, e che il produtto loro meno la somma loro sia 8, numero cubo: l'eccesso di questi dui cubi e 56, che la metà e 28; adunque bisogna che il produtto loro sia 36 e la somma loro 28, acciochè a 36 gionto 28 faccia 64 e cavatone 28 resti 8; peròbisogna fare di 28 due parti che il produtto loro sia 36. Ponghisi che la prima sia $14 + 1^{\underline{1}}$ e la seconda $14 - 1^{\underline{1}}$, che il produtto loro è $196 - 1^{\underline{2}}$ et è eguale a 36, che levato il meno e 36 da ogni parte si haverà $1^{\underline{2}}$ eguale a 160, che l'agguagliatione non si può fare che ne venghi numero rationale per non essere il 160 numero quadrato, ma il 160 nasce dall'eccesso di 196 e 36; il 196 e il quadrato di 14, metà di 28, di modo che il 196 e il quarto del quadrato di 28 e il 28 e la metà di 56, eccesso delli cubi e il 36 e la metà d'ambedue li cubi; adunque la cosa si riduce a trovar dui numeri cubi tali che il quarto del quadrato della metà dell'eccesso loro meno la metà della somma loro faccia quadrato. Ponghisi che il lato del maggior cubo sia $1^{\underline{1}} + 1$ e il lato del minore $1^{\underline{1}} - 1$; li cubi saranno $1^{\underline{3}} + 3^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} + 1$ e $1^{\underline{3}} - 3^{\underline{2}} + 3 \lrcorner - 1$, che l'eccesso loro e $6^{\underline{2}} + 2$ e la sua metà e $3^{\underline{2}} + 1$; il suo quadrato è $9^{\underline{4}} + 6^{\underline{2}} + 1$ e il suo quarto e $2\frac{1}{4}^{\underline{4}} + 1\frac{1}{2}^{\underline{2}} + \frac{1}{4}$. La metà della somma delli cubi e $1^{\underline{3}} + 3^{\underline{1}}$, che cavato di $2\frac{1}{4}^{\underline{4}} + 1\frac{1}{2}^{\underline{2}} + \frac{1}{4}$ resta $2\frac{1}{4}^{\underline{4}} + 1\frac{1}{2}^{\underline{2}} + \frac{1}{4} - 1^{\underline{3}} - 3^{\underline{1}}$ e questo è eguale a un quadrato, il lato del quale bisogna che sia $1\frac{1}{2}^{\underline{2}} - 3^{\underline{1}} + \frac{1}{2}$, per scancellare le $2\frac{1}{4}^{\underline{4}}$, 4 e li $3^{\underline{1}}$, che questo quadrato sarà $2\frac{1}{4}^{\underline{4}} - 9^{\underline{3}} + 10\frac{1}{2}^{\underline{2}} - 3^{\underline{1}} + \frac{1}{4}$ che levato simile da simile et il meno si haverà $8^{\underline{3}}$ eguale a $9^{\underline{2}}$ che agguagliato, il Tanto valerà $1\frac{1}{8}$ e però il lato del maggior cubo, che si pose $1^{\underline{1}} + 1$, sarà $2\frac{1}{8}$ e il lato del minore, che si pose $1^{\underline{1}} - 1$, sarà e li cubi saranno $\frac{4913}{512}$ e $\frac{1}{512}$. Hor tornando al principio ponghisi che il produtto delli dui numeri cercati insieme con la somma loro sia $\frac{4913}{512}$ e il produtto loro meno la somma loro sia l'eccesso loro e 592 e tutti dui li numeri insieme saranno la metà di $\frac{4912}{512}$, cioè $\frac{2456}{512}$ e produtto loro sarà $\frac{2457}{512}$ però di $\frac{2456}{512}$ bisogna far due parti tali che il produtto loro sia 512; ponghisi che l'una sia $\frac{1228}{512} + 1^{\underline{1}}$ e l'altra $\frac{1228}{512} - 1^{\underline{1}}$, che il loro produtto è $\frac{1507984}{262144} - 1^{\underline{2}}$ e questo è eguale a $\frac{2457}{512}$, che levato il meno et simile da simile, si haverà $1^{\underline{2}}$ eguale a $\frac{250000}{262144}$ e agguagliato, il Tanto valerà $\frac{500}{512}$; però la prima parte, che fu posta $\frac{1228}{512} + 1^{\underline{1}}$, sarà $\frac{1728}{512}$ e la seconda, che fu posta $\frac{1228}{512} - 1^{\underline{1}}$ sarà $\frac{728}{512}$, che schifate sono $\frac{216}{64}$ e $\frac{91}{64}$ e questi sono li dui numeri che si cercano, il produtto de' quali è $\frac{19656}{409}$ e la somma è $\frac{19648}{4096}$, quale gionta al produtto fa $\frac{39304}{4096}$, ch'è numero cubo e il suo lato è $\frac{34}{16}$, e cavata del produtto resta $\frac{8}{4096}$, ch'è similmente numero cubo e il suo lato è $\frac{2}{16}$.

Problema CLXXIIII.

Faccisi di 30 quattro parti in continua proportione tali che la somma della prima e seconda sia 6.

Cavisi 6 di 30 resta 24, che tanto saranno la terza e quarta insieme, qual 24 partito per il 6 ne viene 4. Hor ponghisi che la prima sia $1^{\underline{1}}$, la seconda sarà $6 - 1^{\underline{1}}$ e per trovar la terza moltiplichisi la prima via il 4, avenimento detto di sopra, fa $4^{\underline{1}}$ e questo si ponga per la terza, quale cavato di 24 resta $24 - 4^{\underline{1}}$ e questa è la quarta, che tanto fa a moltiplicare la prima via la quarta quanto la seconda via la terza; hor vedasi se il quadrato della secondaè eguale alla moltiplicatione della prima via la terza, ma il quadrato della seconda e $1^{\underline{2}} - 12^{\underline{1}} + 36$ et è eguale a $4^{\underline{2}}$, moltiplicatione della prima via la terza, che levato simile da simile et il meno si haverà $3^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}}$ eguale a 36, che agguagliato, il Tanto valerà 2; peròla prima parte sarà 2 et la seconda il resto sino a 6, cioè 4; la terza sarà 8, che fu posta $4^{\underline{1}}$; il resto poi sino a 30, ch'$6^{\underline{1}}6$, sarà la quarta.

Problema CLXXV.

Trovinsi quattro quantità in continua proportione tali che la somma della prima e quarta sia 18 e la somma della seconda e terza sia 12.

Ponghisi che la prima sia $1^{\underline{1}}$; la quarta sarà $18 - 1^{\underline{1}}$ acciochè la somma loro sia 18; hor moltiplichisi la prima via la quarta, fa $18^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}}$ e questo è eguale al produtto della seconda e terza; peròfaccisi di 12, somma della seconda e terza, dui parti tali che il lor produtto sia $18^{\underline{1}} - 1$ che (per la regola della 49 di questo) l'una sarà $6 + -$ R.q.$\llcorner 36 - 18^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}\lrcorner$ e l'altra sarà $6 +$ R.q.$\llcorner 36 - 18^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}\lrcorner$ e così haveremo quattro quantità proportionali, che la prima sarà $1^{\underline{1}}$, la seconda $6-$R.q.$\llcorner 36 - 18^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$,1, la terza $6 +$ R.q.$\llcorner 36 + - 18^{\underline{1}} + 1 - 2^{\underline{2}}\lrcorner$ e la quarta $18 - 1^{\underline{1}}$; resta che esse siano in continua proportione, cioè che il produtto della prima nella terza sia eguale al quadrato della seconda, ma il produtto della prima via la terza e $6^{\underline{1}} +$ R.q.$\llcorner 36^{\underline{2}} - 18^{\underline{3}} + 1^{\underline{4}}\lrcorner$ e questo è eguale a $72 - 18^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}} -$ R.q.$\llcorner 5184 - 2592^{\underline{1}} + 144^{\underline{2}}\lrcorner$ quadrato della seconda. Hor levisi la men R.q. legata e si haverà $6^{\underline{2}} +$ R.q.$\llcorner 36^{\underline{2}} - 18^{\underline{3}} + 1^{\underline{4}}\lrcorner +$ R.q.$\llcorner 5184 - 2592^{\underline{1}} + 144^{\underline{2}}\lrcorner$ eguale a $72 - 18^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$ e perché le dette due R.q. legate si possono sommare insieme, si sommino in questo modo. Moltiplichisi l'una via l'altra fanno $144^{\underline{6}} - 5184^{\underline{5}} + 57024^{\underline{4}} - 186624^{\underline{3}} + 186624^{\underline{2}}$, che il suo lato è $12^{\underline{3}} - 216^{\underline{2}} + 432^{\underline{1}}$, che duplato fa $24^{\underline{3}} - 432^{\underline{2}} + 864^{\underline{1}}$, che gionto col quadrato di tutte due le R.q. legate e pigliatone il lato e gionto con li $6^{\underline{1}}$ che erano con le R.q. legate, fa $6^{\underline{1}} +$ R.q.$\llcorner 1^{\underline{4}} + 6^{\underline{3}} - 252^{\underline{2}} - 1728^{\underline{1}} + 5184\lrcorner$ e questo è eguale a $72 - 18^{\underline{1}} + 1$ che levati li $6^{\underline{1}}$ da ogni parte si haverà essa R.q. legata eguale a $72 - 24^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$, che levata la R.q legata, quadrando ogni parte, si haverà $1^{\underline{4}} + 6^{\underline{3}} - 252^{\underline{2}} - 1725^{\underline{1}} + 5184$ eguale a $1^{\underline{1}} - 48^{\underline{3}} + 720^{\underline{2}} - 3456^{\underline{1}} + 5184$, che levato si. mile da simile et il meno si haverà $54^{\underline{3}} + 1728^{\underline{1}}$ eguale a $972^{\underline{2}}$, che ridutto a $1^{\underline{3}}$ si haverà $1^{\underline{3}} + 32^{\underline{1}}$ eguale a $18^{\underline{2}}$, che schifato ciascuna parte per $1^{\underline{1}}$ haveremo $1^{\underline{2}} + 32$ eguale a $18^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 2; peròla prima quantita, che fu posta $1^{\underline{1}}$, sarà 2 e la quarta il resto sino a 18, cioè 16. Hor per trovare la seconda et terza moltiplichisi la prima via la quarta fa 32, poi faccisi di 12 due parti tali che il produtto loro sia 32, che (per la 49 di questo) l'una sarà 4 e l'altra 8, che il 4 sarà la seconda quantita e l'8 la terza.

Problema CLXXVI.

Faccisi di 30 quattro parti in continua proportione delle quali la seconda sia 2 più della prima.

Ponghisi che la prima sia $1^{\underline{1}}$; la seconda sarà $1^{\underline{1}} + 2$, acciochè sia 2 più della prima; la terza sarà $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$ esimo d'$1^{\underline{1}}$, che sommate tutte tre insieme e la somma cavata di 30 resta $24^{\underline{1}} - 3^{\underline{3}} - 4$ esimo d'$l^{\underline{1}}$ e questo sarà la quarta; hora bisogna che il produtto della prima nella quarta sia eguale al produtto della seconda nella terza, ma l'uno produtto e $24^{\underline{1}} - 3\ ^{\underline{2}} - 4$ e l'altro e $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 8$ esimo d'$1^{\underline{1}}$, che levato il rotto si haverà $1 + 6^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 8$ eguale a $24^{\underline{2}} - 3^{\underline{3}} - 4^{\underline{1}}$, che levato il meno e le $6^{\underline{2}}$ si haverà $4 + 16^{\underline{1}}$

$+\ 8$ eguale a $18^{\underline{2}}$, che ridutto a 1 si haverà $1^{\underline{3}} + 4^{\underline{1}} + 2$ eguale a $4\frac{1}{2}^{\underline{2}}$, che per agguagliarli, moltiplichinsi le potenze via la sua terza parte, fa 6 del quale se ne cavi 4, numero delli Tanti, resta $2\frac{3}{4}$, qual si salva. Poi cubisi il terzo delle $^{\underline{2}}$, fa $3\frac{3}{8}$, che aggionto col numero, ch'è 2, fa $5\frac{3}{8}$e cavatone $4\frac{1}{8}$, produtto d'$1\frac{1}{2}$, terzo delle $^{\underline{2}}$, via $2\frac{3}{4}$ che si salvo, resta $1\frac{1}{4}$ che gionto a $1^{\underline{3}}$ fa $1^{\underline{3}} + 1\frac{1}{4}$ e questo è eguale a $2\frac{3}{4}^{\underline{1}}$, che è il numero che si salvo, qual doventa $^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto di questa agguagliatione valerà $\frac{1}{2}$, quale si gionga con $1^{\underline{2}}$, terzo delle$^{\underline{2}}$, fa 2 e 2 e la valuta del Tanto della nostra agguagliatione; peròla prima parte, che fu posta $1^{\underline{1}}$, sarà 2; la seconda sarà 2 pin, cioè 4, la terza 8 e la quarta 16.

Problema CLXXVII.

Faccisi di 30 quattro parti in continua proportione tali che la terza sia 4 più della seconda.

Ponghisi che la seconda sia $1^{\underline{1}} - 2$; la terza sarà $1^{\underline{1}} + 2$; la lor somma è $2^{\underline{1}}$, che cavato di 30 resta $30 - 2^{\underline{1}}$ e questa è la somma della prima e quarta e per trovar la prima partasi il quadrato della seconda per la terza; ne viene $1^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 4$ esimo d'$1^{\underline{1}} + 2$ e questa sarà la prima; per trovar poi la quarta partasi il quadrato della terza per la seconda, ne viene $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{2}} + 4$ esimo d'$1^{\underline{1}} - 2$ e questa sarà la quarta, che gionta con la prima fa $2^{\underline{3}} + 24^{\underline{1}}$ esimo d'$1^{\underline{2}} - 4$ e questo è eguale a $30 - 2^{\underline{1}}$, ch'è la somma della prima e quarta, che levato il rotto haveremo $2^{\underline{3}} + 241$ eguale a $30^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} - 120 - 2^{\underline{3}}$, che levato il meno e $8^{\underline{1}}$ per parte e ridutto a $1^{\underline{3}}$ si haverà $1^{\underline{3}} + 4^{\underline{1}} + 30$ eguale a $7\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ che agguagliato, il Tanto valerà 6; però la seconda parte, che fu posta $1^{\underline{1}} - 2$, sarà 4, la terza sarà 8, la quarta 16 e la prima 2.

Problema CLXXVIII

Faccisi di 30 quattro parti in continua proportione tali che la prima e terza siano 10 e la seconda e quarta siano 20.

Partasi la seconda e quarta per la prima e terza, ne vien 2 e tal proportione deve essere dalla prima alla seconda. Hor ponghisi che la prima sia $1^{\underline{1}}$; la seconda sarà $2^{\underline{1}}$ e la terza $4^{\underline{1}}$, che gionte insieme la prima e terza fanno $5^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 10, che devono essere la detta prima e terza, che agguagliato, il Tanto valerà 2; peròla prima parte, ch'era $1^{\underline{1}}$, sarà 2; la seconda, ch'era $2^{\underline{1}}$, sarà 4, la terza 8 e la quarta 16.

Problema CLXXIX.

Trovinsi quattro numeri quadrati tali che la somma gionta con la somma de' suoi lati faccia 12.

Perche ogni quadrato insieme con il suo lato è $\frac{1}{4}$ più fa quadrato, il lato del quale meno zè eguale al lato del primo quadrato, et essendo li quattro numeri insieme con li loro lati 12, se a ciascuno si giongerà $\frac{1}{4}$ saranno 13; convien dunque dividere 13 in quattro quadrati delli lati de' quali cavatone poi $\frac{1}{2}$ restaranno i lati delli quattro quadrati cercati e per far questo dividasi 13 in dui quadrati secondo la regola sua e siano 4 e 9 e poi dividasi ciascun di questi in dui altri numeri quadrati, che haveremo li primi $\frac{64}{25}$ e $\frac{36}{25}$ gli altri $\frac{144}{25}$ e $\frac{81}{25}$, che li lati loro sono $\frac{8}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{12}{5}$ e $\frac{9}{5}$ che di ciascuno cavatone $\frac{1}{2}$ restaranno $\frac{11}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{19}{10}$ e $\frac{13}{10}$ che questi sono li lati delli quattro quadrati cercati, che la somma loro è 5 e li quadrati sono $\frac{121}{100}$, $\frac{49}{100}$, $\frac{361}{100}$, e $\frac{169}{100}$, che la somma loro è 7, che gionta con 5, somma de'lati, fa 12 (come si vuole).

Problema CLXXX.

Trovinsi quattro numeri quadrati tali che della somma loro cavatone la somma dei lati loro resti 16.

Per la ragion detta nella passata se a 16 si giongerà 1 e la somma, ch'è 17, si dividera in quattro numeri quadrati e alli lati di ciascuno si giongerà $\frac{1}{2}$ si haveranno gli lati delli quadrati cercati. Dividasi dunque 17 in due numeri quadrati che l'uno sia 1 e l'altro 16 e ciascun di questi si divida in dui numeri quadrati, che li primi saranno $\frac{9}{25}$ e $\frac{16}{25}$, li altri dui saranno $\frac{144}{25}$ e $\frac{256}{25}$; li loro lati sono $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{12}{5}$ e $\frac{16}{5}$, che gionto $\frac{1}{2}$ a ciascuno fanno $\frac{11}{10}$, $\frac{13}{}10$, $\frac{29}{10}$ e $\frac{37}{10}$, che questi sono gli lati delli quattro quadrati cercati, che gionti insieme fanno 9 e li quadrati sono $\frac{121}{100}$, $\frac{169}{100}$, $\frac{841}{100}$ e $\frac{1369}{100}$, che la somma loro e 25, della quale cavato 9, somma de'lati loro, resta 16 (come si vuole).

Problema CLXXXI.

Dividasi 1 in due parti tali che all'una gionto 3 e all'altra 5 e le somme moltiplicate insieme, il produtto sia numero quadrato.

Ponghisi che la prima parte sia $1^{\underline{1}}$; la seconda sarà $1 - 1^{\underline{1}}$, che gionto 3 alla prima e 5 alla seconda fanno $1^{\underline{1}} + 3$ e $6 - 1^{\underline{1}}$, che il loro produtto e $3^{\underline{1}} + 18 - 1^{\underline{2}}$ e questo deve essere eguale a un quadrato e sia $4^{\underline{2}}$, che levato il meno 5 saranno eguali a $3^{\underline{1}} + 18$, che l'agguagliatione non si può fare per numero rationale, ma se il produtto di 5 via 18 giontoli $2\frac{1}{4}$, quadrato della metà delli $3^{\underline{1}}$, facesse numero quadrato l'agguagliamento verrebbe a numero rationale; peròbisogna venire al nascimento di detti numeri.

Il 5 nasce da un quadrato gionto con l'unita, peròbisogna trovare un numero quadrato tale che giontoli 1 e moltiplicato poi per 18 e al produtto gionto $2\frac{1}{4}$ faccia numero quadrato.

Ponghisi che il numero quadrato sia $1^{\underline{2}}$ che giontoli 1 fa $1^{\underline{2}} + 1$ e moltiplicato via 18 e al produtto gionto $2\frac{1}{4}$ fa $18^{\underline{2}} + 20\frac{1}{4}$ e questo è eguale a un quadrato, il lato del quale sia $4^{\underline{1}} + 4\frac{1}{2}$ acciochè si posta fare l'agguagliatione, che il quadrato sarà $16^{\underline{2}} + 36^{\underline{1}} + 20$ che levato simile da simile et agguagliato, il Tanto valerà 18 et il numero quadrato sarà 324; però tornando al principio, $3^{\underline{1}} + 18$ sono eguali a $325^{\underline{2}}$, che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{6}{25}$; però la prima parte, che fu posta $1^{\underline{1}}$ sarà $\frac{6}{25}$ e la seconda $\frac{19}{25}$, che gionto 3 alla prima e 5 allà seconda fanno $3\frac{6}{25}$ et $5\frac{19}{25}$ che il produtto loro, ch'è $\frac{11664}{625}$, e numero quadrato (come si vuole) che il suo lato è $\frac{108}{25}$.

Problema CLXXXI

Dividasi 6 in tre parti tali che al produtto della prima e seconda giongendo o cavando la terza faccia quadrato.

Ponghisi che la terza sia $1^{\underline{1}}$; la seconda sia un numero minor di 6 e maggior d'1 e sia 2; la prima dunque sarà $4 - 1^{\underline{1}}$; resta che il produtto della prima nella seconda insieme con la terza o meno la terza faccia quadrato, ma il produtto della prima nella seconda e $8 - 2^{\underline{1}}$ che giontoli e cavatone la terza fa $8 - 1^{\underline{1}}$ e $8 - 3^{\underline{1}}$ e ciascun di loroè eguale a un quadrato e per non esser proportion fra loro come da numero quadrato a numero quadrato, bisogna mutar positione e la cosa si riduce a trovare un numero tale che il maggior di lui una unità al minor di lui una unità habbia proportione come da numero quadrato a numero quadrato, perché l'1, numero delli$^{\underline{1}}$ primi, e minore del 2, numero che si pose essere il secondo, una unità e $3^{\underline{1}}$, secondi, sono maggiori del medesimo 2 una unità. Però sia il numero che si cerca $1^{\underline{1}}$; il numero maggior di lui una unità sarà $1^{\underline{1}} + 1$ et il minore di lui una unità $1^{\underline{1}} - 1$ e questi vogliamo che habbiano proportion fra loro come da numero quadrato a numero quadrato: hora habbino quella ch'è fra 4 et 1, si che moltiplicato $1^{\underline{1}} + 1$ per 1 fa $1^{\underline{1}} + 1$ e moltiplicato $1^{\underline{1}} - 1$ per 4 fa $4^{\underline{1}} - 4$ e questi sono li numeri che devono havere la proportion fra loro come da numero quadrato a numero quadrato et hanno ad essere eguali fra loro, cioè $1^{\underline{1}} + 1$ e $4^{\underline{2}} - 4$, che levato il meno, simile da simile et agguagliato, il Tanto valerà $\frac{5}{3}$ e questo si ponera per il secondo numero; il terzo, come prima, sia $1^{\underline{1}}$, si che il primo sarà $\frac{13}{3} - 1^{\underline{1}}$; resta che il produtto del primo nel secondo giongendovi o cavandone il terzo faccia quadrato, ma il produtto del primo nel secondoè $\frac{65}{9} - \frac{5}{3}^{\underline{1}}$ che giontovi e cavatone $1^{\underline{1}}$, ch'è il terzo, fa $\frac{65}{9} - \frac{2}{3}^{\underline{1}}$ et $\frac{65}{9} - \frac{8}{3}^{\underline{1}}$ che ciascun di loroè eguale a un quadrato, che levato il rotto moltiplicando ogni cosa per 9, numero quadrato, haveremo $65 - 6^{\underline{1}}$ e $65 - 24^{\underline{1}}$, eguali ciascuna di loro a un quadrato. Hor moltiplichisi l'una di loro, ma per più commodità si moltiplichi il $65 - 6^{\underline{1}}$ per 4 e haveremo $260 - 24^{\underline{1}}$ eguale a un quadrato e $65 - 24^{\underline{1}}$ similmente eguale a un quadrato; l'eccesso loro e 195, che trovati dui numeri tali che il produtto loro sia 195 haveremo 13 e 15; il quadrato della metà dell'eccesso loro e 1 et è eguale alla minor parte, cioè a $65 - 241$, che levato il meno, simile da simile et agguagliato, il Tanto valerà $\frac{8}{3}$; peròla prima parte, che fu posta $\frac{13}{3} - 1\underline{1}$, sarà $\frac{8}{3}$, il secondo $\frac{5}{3}$ (come si pose) et il terzo, che fu posto $1\underline{1}$, sarà $\frac{8}{3}$, che il produtto della prima nella seconda e $\frac{25}{9}$ al quale gionto $\frac{8}{3}$,ch'è la terza, fa $\frac{49}{9}$, ch'è numero quadrato (come si vuole).

Problema CLXXXIII.

Faccisi di 22 tre parti in continua proportione tali che la seconda sia la somma della prima gionta con il suo lato.

Ponghisi che la prima sia $1\underline{2}$; la seconda dunque sarà $1\underline{2} + 1\underline{1}$ e per trovar la terza partasi il quadrato della seconda per la prima, ne viene $1\underline{4} + 2\underline{3} + 1\underline{2}$ esimo d'$1\underline{2}$, che schifato sarà $1\underline{2} + 2\underline{1} + 1$ e questa sarà la terza, che sommate tutte tre insieme fanno $3\underline{2} + 3\underline{1} + 1$ e questo è eguale a 22, che levato 1 da ogni parte e ridutto a $1\underline{2}$ si haverà $1\underline{2} + 1\underline{1}$ eguale a 7, che agguagliato, il Tanto valeta R.q.$7\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$ e la potenza valerà $7\frac{1}{2}$ − R.q.$7\frac{1}{4}$. Però la prima parte, che fu posta $1\underline{2}$, sarà $7\frac{1}{2}$ − R.q.$7\frac{1}{4}$ e la seconda, che fu posta $1\underline{2} + 1\underline{1}$, sarà 7 e la terza lo restante sino a 22, cioè $7\frac{1}{2}$ + R.q.$7\frac{1}{4}$ e ne nasce la seguente regola.
Se si haverà a dividere una quantità in tre parti in continua proportione tali che la seconda sia la somma della prima gionta con il suo lato, cavisi 1 per regola della proposta quantità e lo restante si parta per 3 et all'avenimento per regola si gionghi $\frac{1}{4}$ e della somma se ne pigli il lato, del quale per regola se ne cavi $\frac{1}{2}$ e lo restante si quadri che il quadrato sarà la prima parte.

Problema CLXXXIIII.

Trovinsi dui numeri tali over quantità che il produtto loro sia 12 e che dell'uno fatto tre parti in continua proportione tali che la seconda sia la somma della prima gionta con il suo lato, il produtto della prima moltiplicata via l'altro numero faccia 2.

Per la regola della passata ponghisi che l'un delli numeri sia $3^{\underline{2}} + \frac{1}{4}$ acciochè cavatone 1 e lo restante partito per 3 e all'avenimento gionto 4 la somma habbia lato, e ponendosi che l'uno sia $3^{\underline{2}} + \frac{1}{4}$, l'altro sarà 12 esimo di $3^{\underline{2}} + \frac{1}{4}$ e sia il numero da dividere quello, ch'è $3^{\underline{2}} + \frac{1}{4}$; per trovar la prima parte cavisene 1 per la regola passata, resta $3^{\underline{2}}$ − che partito per 3 ne viene $1^{\underline{2}}$ − al quale gionto 4 fa 1 ch'è quadrato, il cui lato è $1^{\underline{1}}$, che cavatone $\frac{1}{2}$ resta $1^{\underline{1}} - \frac{1}{2}$; il suo quadrato è $1^{\underline{2}} - 1^{\underline{1}} + \frac{1}{4}$ e questa è la prima delle tre parti in continua proportione, la quale moltiplicata per l'altro numero, che si è posto 12 esimo di $3^{\underline{2}} + 4$, fa $12 - 12^{\underline{1}} + 3$ esimo di $3^{\underline{2}} + \frac{1}{4}$ e questo è eguale a 2, che levato il rotto $12^{\underline{2}} - 12^{\underline{1}} + 3$ saranno eguali a $6^{\underline{2}} + \frac{1}{12}$, che levato il meno e simile da simile $6^{\underline{2}} + 2\frac{1}{2}$ sono eguali a $12^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 1 + R.q.$\frac{7}{12}$ e perché il numero diviso fu posto 3 + sarà 5 + R.q.21, col quale partito 12 ne viene 15 − R.q.189 e questo è l'altro numero; il lato della prima delle tre parti in continua proportione, ch'era $1^{\underline{1}} - \frac{1}{2}$,sarà R.q.$\frac{7}{12} + \frac{1}{2}$; il suo quadrato è $\frac{5}{6}$ + R.q.$\frac{7}{12}$ e tanto sarà detta prima parte; la seconda sarà la somma della prima gionta con il suo lato, cioè $1\frac{1}{3}$ + R.q.$2\frac{1}{3}$, che gionta con la prima fa $2\frac{1}{6}$ + R.q.$5\frac{1}{4}$ che cavato di 5 + R.q.21 resta $2\frac{5}{6}$ + R.q.$5\frac{1}{4}$ e tanto e la terza parte, la quale moltiplicata via la prima fa quanto il quadrato della seconda, cioè $4\frac{1}{9}$ + R.q.$16\frac{16}{27}$, che però esse tre parti sono in continua proportione e moltiplicata la prima di esse via il numero non diviso, ch'è 15 − R.q.189, fa 2 (come si propone).

Problema CLXXXV.

Trovinsi tre quantità in continua proportione tali che la terza sia 12 e la seconda sia la somma della prima gionta con il suo lato.

Ponghisi che la prima sia $1^{\underline{1}}$.; la seconda sarà $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$ e per trovar la terza partasi il quadrato della seconda per la prima, ne viene $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$ e questo è eguale a 12, che deve essere la terza, che levato 1 da ogni parte et agguagliato, il Tanto valerà R.q.12 − 1 e la potenza valerà 13 − R.q.48; peròla prima quantita, che fu posta $1^{\underline{2}}$, sarà 13 − R.q.48; la seconda, ch'era

$1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$, sarà $12 - $ R.q.12 e la terza sarà 12 (come si propone) e ne nasce la seguente regola.
Se si haveranno a trovare tre quantita in continua proportione tali che la terza sia un terminato numero e la seconda sia maggiore della prima il lato d'essa prima, cavisi 1 per regola del lato della terza e lo restante si quadri, che esso quadrato sarà la prima quantita.

Problema CLXXXVI.

Faccisi di 12 tre parti in continua proportione tali che la seconda sia il lato della somma dell'altre due.

Ponghisi che la seconda sia $1^{\underline{1}}$; l'altre due insieme saranno $12 + - 1^{\underline{1}}$, che il suo lato è R.q.$\llcorner 12 - 1^{\underline{1}} \lrcorner$ et è eguale alla seconda, cioè a $1^{\underline{1}}$, che levata la R.q. legata, $12 - 1^{\underline{1}}$ sarà eguale a $1^{\underline{2}}$, che levato il meno et agguagliato, il Tanto valerà 3; però la seconda, che fu posta $1^{\underline{1}}$, sarà 3, che cavato di 12 resta 9 e tanto sono la prima e terza gionte insieme, che per trovarle separatamente bisogna far di 9 due parti tali che il produtto sia 9, quadrato della seconda, che l'una sarà $4\frac{1}{2} - $ R.q.$11\frac{1}{4}$ e l'altra $4\frac{1}{2} + $ R.q.$11\frac{1}{4}$ et ne nasce la seguente regola.
Se si haverà a dividere una quantita in tre parti in continua proportione tali che la seconda sia il lato della somma dell'altre due, aggionghisi 4 per regola alla quantita e della somma se ne pigli il lato, del quale per regola se ne cavi $\frac{1}{2}$ e lo restante sarà la seconda parte.

Problema CLXXXVII.

Trovinsi dui numeri tali che la somma delli loro quadrati sia eguale alla somma delli dui numeri moltiplicata per 10, e che la differenza de' lor quadrati sia eguale alla somma loro.

Ponghisi che detti due numeri insieme siano $1^{\underline{1}}$. Hor faccisi d'$1^{\underline{1}}$ due parti tali che la differenza de'loro quadrati sia $1^{\underline{1}}$, che per la regola della 51 di questo, l'una sarà $\frac{1}{2}^{1} - \frac{1}{2}$ e l'altra $\frac{1}{2}^{1} + \frac{1}{2}$, che questi saranno li dui numeri cercati, che li quadrati loro gionti insieme fanno $\frac{1}{2}^{2} + \frac{1}{2}$ e questo è eguale a 10^{1} produtto d'1^{1}, somma delli dui numeri, via 10, che ridutto a 1^{2} et agguagliato, il Tanto valerà 10 + R.q. 99 e tanto sarà la somma di detti dui numeri et il primo, ch'era $\frac{1}{2}^{1} - \frac{1}{2}$, sarà $4\frac{1}{2}$ + R.q.$24\frac{3}{4}$ et il secondo, ch'era $\frac{1}{2}^{1}$ + $\frac{1}{2}$, sarà $5\frac{1}{2}$ + R.q.$24\frac{3}{4}$ che fanno quanto si propone.

Problema CLXXXVIII.

Trovinsi due numeri tali che il primo pigliando una parte dall'altro esso sia tre volte lo restante del secondo et il secondo, ricevendo la medesima parte dal primo sia cinque volte quanto lo restante del primo.

Ponghisi che il secondo sia $1^{1} + 1$ e la parte che da al primo sia 1; il primo sarà $3^{1} - 1$ acciochè pigliando 1 dal secondo, la somma sia tripla allo restante; resta che il primo, dando la medesima parte al secondo, la somma sia cinque volte quanto lo restante e perché tutti dui insieme sono 4^{1}, a volere che il secondo, ricevuto che haverà la parte dal primo, sia quintuplo allo restante, il detto 4 si partirà per 1 più di 5, cioè per 6 e ne verrà $\frac{2}{3}$ e tanto bisogna che resti il primo, dato che haverà la parte al secondo; peròse si cavara $\frac{2}{3}^{1}$ di 3^{1} $- 1$ restarà $2\frac{1}{3}^{1} - 1$, e tanto bisogna che dia il primo al secondo, acciochè la somma sia cinque volte quanto lo restante del primo. Hor bisogna vedere se tal parte è 1 d'$1^{1} + 1$, ch'è il secondo, qual'e $2\frac{1}{3}^{1} - 1$ di $3^{1} - 1$, ch'è il primo; peròil produtto d'1 via $3^{1} - 1$, ch'è $3^{1} - 1$ deve essere eguale al produtto di $2\frac{1}{3}^{1} - 1$ via $1^{1} + 1$, ch'è $2\frac{1}{3}^{2} + \frac{1}{3}^{1} - 1$, che levato simile da simile et agguagliato, il Tanto valerà $\frac{5}{7}$; però il primo, che fu posto $3^{1} - 1$, sarà $\frac{8}{7}$ et il secondo, che fu posto $1^{1} + 1$, sarà $\frac{12}{7}$,il quale dando 1 al primo resta $\frac{5}{7}$ et il primo doventa $\frac{15}{7}$, ch'è triplo a $\frac{5}{7}$ e dando il secondo 1, il primo convien che dia $\frac{2}{3}$, acciochè dia la medesma parte, che dando $\frac{2}{3}$ al secondo esso rimane $\frac{10}{21}$ et il secondo diviene $\frac{50}{21}$, ch'è quintuplo a $\frac{10}{21}$.

Problema CLXXXIX.

Trovinsi due quantità composte di dignità tali che il produtto loro insieme con la somma loro faccia 8.

Ponghisi che la prima sia $1^{\underline{1}}$ e la seconda qual numero si voglia (poniamo 3); il produtto loro insieme con la somma loro e $4^{\underline{1}} + 3$ e questo è eguale a 8, che levato il 3 da ogni parte et agguagliato, il Tanto valerà $1\frac{1}{4}$; peròil primo numero è $1\frac{1}{4}$ et il secondo 3. Hor considerisi di dove e nato $1\frac{1}{4}$, ch'è nato dal partir 5 per 4 et il 5 e nato dall'eccesso di 3 et 8 et il 4 da 1 gionto al 3 che si pose il secondo. Però ponghisi il secondo essere $1^{\underline{1}} - 1$, che cavato di 8 resta $9 - 1^{\underline{1}}$ e questo si deve partire per 1 più d'$1^{\underline{1}} - 1$, che sarà $1^{\underline{1}}$ e verrà $9 - 1^{\underline{1}}$, esimo d'$1^{\underline{1}}$ e questa è la prima quantità e la seconda $1^{\underline{1}} - 1$ (come si pose).

Problema CXC.

Trovinsi tre numeri tali che il produtto del primo e secondo co'1 composto di lor dui faccia 8, il produtto del secondo nel terzo insieme con il composto di loro dui faccia 15 et il produtto del primo nel terzo insieme con lor dui faccia 24.

Bisogna avertire che a volere che li numeri che si cercano venghino rationali fa di bisogno che li numeri dati, cioè l'8, 15 et 24, siano per una unità distanti da un numero quadrato. Hor ponghisi che il secondo sia $1^{\underline{1}} - 1$ e per la proposta passata il primo sarà $9 - 1^{\underline{1}}$, esimo d'$1^{\underline{1}}$ e per trovar il terzo, per la medesima regola, sarà $16 - 1^{\underline{1}}$, esimo d'$1^{\underline{1}}$; resta che il produtto del primo e terzo con ambidui loro faccia 24, ma il detto produtto e $144 - 25^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$, esimo d'$1^{\underline{2}}$, che giontoli la somma loro, ch'è $25 - 2^{\underline{1}}$, esimo d'$1^{\underline{1}}$, fa $144 - 1^{\underline{2}}$, esimo d'$1^{\underline{2}}$ e questo è eguale a 24, che levato il rotto haveremo $144 - 1^{\underline{2}}$ eguale a $24^{\underline{2}}$, che levato il meno si haverà $25^{\underline{2}}$ eguale a 144, che tolto il lato di ciascuno si haverà $5^{\underline{1}}$ eguale a 12, che agguagliato, il Tanto valerà $2\frac{2}{5}$ e così il secondo numero, che fu posto $1^{\underline{1}} - 1$, sarà $1\frac{2}{5}$; il primo, ch'era $9 - 1^{\underline{1}}$, esimo d'$1^{\underline{1}}$, sarà $6\frac{3}{5}$ esimo d'$1^{\underline{1}}$, cioè di $2\frac{2}{5}$, che partito $6\frac{3}{5}$ per $2\frac{2}{5}$ ne viene $2\frac{3}{4}$ per detto primo numero; il terzo, ch'era $16 - 1^{\underline{1}}$ esimo d'$1^{\underline{1}}$, sarà $5\frac{2}{3}$, che fanno quanto si propone.

Problema CXCI.

Trovinsi due quantità di dignità tali che il produtto loro meno la somma loro faccia 8.

Ponghisi che la prima sia $1^{\underline{1}}$ et il secondo qual si voglia numero (poniamo 3); il produtto loro meno ambidui loro e $2^{\underline{1}} - 3$ e questo è eguale a 8, che levato il meno et agguagliato, il Tanto valerà $5\frac{1}{2}$; peròil primo numero sarebbe $5\frac{1}{2}$ et il secondo 3 (come si pose). Ma perché noi cerchiamo dignità veggiasi di dove nasce il $5\frac{1}{2}$, che si vede che nasce dal partire 11 per 2 e l'11 nasce dal numero dato aggiontovi il secondo et il 2 nasce da 1 levato dal secondo. Se adunque si ponera il secondo una dignità (come si voglia) et sia $1^{\underline{1}} + 1$ e si giongerà con 8, numero dato, farà $1^{\underline{1}} + 9$ e questo si partirà per $1^{\underline{1}}$, cioè per 1 meno del secondo; ne verrà $1^{\underline{1}} + 9$, esimo d'$1^{\underline{1}}$ e questo sarà la prima quantità, la seconda $1^{\underline{1}} + 1$, che il produtto loro meno ambidui loro fa 8.

Problema CXCII.

Trovinsi tre numeri tali che il produtto del primo nel secondo meno ambidui faccia 8, il produtto del secondo nel terzo, meno ambidui, faccia 15 et il produtto del primo nel terzo meno ambidui faccia 24.

Bisogna avertire (come si disse nella 190) che l'8, 15 et 24 siano numeri differenti da numeri quadrati di una unità, acciochè ne vengano numeri rationali. Hor ponghisi che il secondo sia $1^{\underline{1}} + 1$ e per la passata il primo sarà $1^{\underline{1}} + 9$, esimo d'$1^{\underline{1}}$, e per la medesima il terzo sarà $1^{\underline{1}} + 16$, esimo d'$1^{\underline{1}}$. Resta hora che il produtto del primo e terzo meno ambidui loro faccia 24, ma il produtto loro e $144 + 25^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$, esimo d'$1^{\underline{2}}$ e la somma loro e $2^{\underline{1}} + 25$, esimo d'$1^{\underline{1}}$, che cavata del lor produtto resta $144 - 1^{\underline{2}}$, esimo d'$1^{\underline{2}}$ e questo è eguale a 24, che levato il rotto et il meno haveremo $25^{\underline{2}}$ eguale a 144, che tolto il lato di ciascuno et agguagliato, il Tanto valerà $2\frac{2}{5}$; così il primo numero, che fu posto $1^{\underline{1}} + 9$, esimo d'$1^{\underline{1}}$ sarà $\frac{57}{12}$; il secondo, che fu posto $1^{\underline{1}} + 1$, sarà $\frac{17}{5}$

et il terzo, che fu posto $1^{\underline{1}}$ + 16, esimo d'$1^{\underline{1}}$, sarà $18\frac{2}{5}$, esimo d'1 cioè di $2\frac{2}{5}$, che, partito esso terzo sarà $\frac{92}{12}$.

Problema CXCIII.

Trovinsi quattro numeri over quantità in continua proportione tali che il produtto della prima nella terza sia 20 et il produtto della seconda nella quarta sia 60.

Quando si haveranno a solvere simili domande per facilitare l'operatione, piglinsi due o tre sorti di quantità in continua proportione e si veda se fra di loro e proportione alcuna che faciliti tal domanda, che pigliato 2, 4, 8, 16 e 4, 6, 9, $13\frac{1}{2}$ e 1, 3, 9, 27, che moltiplicato la prima via la terza e la seconda via la quarta di ciascuna, le prime fanno 16 e 64, le seconde 36 e 81 e le terze 9 e 81, che la proportione ch'è da 16 a 64 e 4 e quella ch'è da 36 a 81 è $2\frac{1}{4}$ e da 9 a 81 e 9, che tolto i lati di ciascuno si haverà 2, $1\frac{1}{2}$ e 3 e in tal proportione sono le quantita, le prime come da 1 a $1\frac{1}{2}$, le seconde come da 1 a 1 le terze come da 1 a 3, si che e ritrovato la regola, che partito 60 per 20 ne vien 3, che il suo lato è R.q.3 et in tal proportione, cioè come da 1 a R.q.3, sono le quantita che si cercano. Però ponghisi che la prima sia $1^{\underline{1}}$, che moltiplicata via R.q.3 fa R.q.$3^{\underline{1}}$ e tanto e la seconda, e per trovar la terza dichisi: se $1^{\underline{1}}$ dà R.q.$3^{\underline{1}}$, che darà R.q.$3^{\underline{1}}$. Darà $3^{\underline{1}}$ e questa è la terza, la quale moltiplicata via la prima fa $3^{\underline{2}}$ e questo è eguale a 20 che agguagliato, il Tanto vale R.q.$6\frac{2}{3}$ e però la prima, che fu posta $1^{\underline{1}}$, sarà R.q.$6\frac{2}{3}$, la seconda R.q.20, la terza R.q.60 e la quarta R.q.180.

Problema CXCIIII.

Trovinsi dui numeri tali che il produtto loro sia tre volte quanto la somma loro.

Ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$ et il secondo un numero come si voglia e sia 5; il lor produtto è $5^{\underline{1}}$ e la lor somma e $1^{\underline{1}}$ + 5, che il suo triplo e $3^{\underline{1}}$ + 15

e questo è eguale a $5^{\underline{1}}$, che levato $3^{\underline{1}}$ da ogni parte et agguagliato, il Tanto valerà $7\frac{1}{2}$; però il primo numero sarà $7\frac{1}{2}$ et il secondo 5 e ne nasce la seguente regola.
Se si haveranno a trovare due numeri tali che il produtto loro con la somma loro habbia la proportion data, se sarà noto il secondo numero se ne cavara la proportion data e lo restante sarà partitore del produtto del secondo nella proportion data. Sia il secondo $1^{\underline{1}}$ e la proportion data quadrupla; moltiplichisi $1^{\underline{1}}$ per 4, denominatione della proportione, fa $4^{\underline{1}}$, il quale si parta per $1^{\underline{1}} - 4$ e ne viene 41 esimo d'$1^{\underline{1}} - 4$ e questo sarà il primo (essendo il secondo $1^{\underline{1}}$ come si è posto).

Problema CXCV.

Trovinsi tre numeri tali che il produtto del primo nel secondo sia tre volte quanto ambidui insieme et il produtto del secondo e terzo sia quattro volte quanto ambidui et il produtto del terzo e primo sia cinque volte quanto ambidui.

Ponghisi che il secondo sia $1^{\underline{1}}$ e per la passata regola il primo sarà $3^{\underline{1}}$ esimo d'$l^{\underline{1}} - 3$ et il terzo $4^{\underline{1}}$ esimo d'$1^{\underline{1}} - 4$; resta che il produtto del primo e terzo sia cinque volte ambidui loro, ma esso produtto e 121. esimo d'$l^{\underline{2}} + 12 - 7^{\underline{1}}$ et ambidui loro sono $7^{\underline{2}} - 24^{\underline{1}}$ esimo d'$1^{\underline{2}} + 12 - 7^{\underline{1}}$; adunque levando il rotto $12^{\underline{2}}$ sono eguali al quintuplo di $7^{\underline{2}} - 24^{\underline{1}}$, ch'è $35^{\underline{2}} - 120^{\underline{1}}$, che levato il meno e simile da simile $23^{\underline{2}}$ sono eguali a $120^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{120}{17}$ e però il primo, che fu posto $3^{\underline{1}}$ esimo d'$1^{\underline{1}} - 3$, sarà $\frac{360}{51}$, che schifato è $\frac{120}{17}$; il secondo, che fu posto $1^{\underline{1}}$, sarà $\frac{120}{23}$ et il terzo, che fu posto $4^{\underline{1}}$ esimo d'$1^{\underline{1}} -$ 4, sarà $\frac{120}{7}$, che fanno quanto si propone.

Problema CXCVI.

Trovinsi tre numeri tali che il produtto del primo nel secondo sia tre volte quanto tutti tre, il produtto del secondo nel terzo sia quattro volte quanto tutti tre et il produtto del primo nel terzo sia cinque volte quanto tutti tre.

Ponghisi che tutti tre insieme siano un numero a beneplacito e siano 5; il produtto del primo e secondo sarà 15, acciochè sia tre volte quanto tutti tre. Ponghisi che il secondo sia 1 esimo d'$1^{\underline{1}}$; il primo sarà 15 e perché il produtto del secondo e terzo deve esser quadruplo al 5 esso produtto sarà 20 et essendo il secondo [1 esimo] d'$1^{\underline{1}}$, il terzo verrà ad essere $20^{\underline{1}}$; resta che il produtto del terzo nel primo sia quintuplo al 5 (cioè sia eguale a 25), ma il produtto e $300^{\underline{2}}$, però$300^{\underline{2}}$, sono eguali a 25, che per non esser fra 300 e 25 proportione come da numero quadrato a numero quadrato non ne può venire numero rationale: peròbisogna mutar positione e trovar il nascimento di essi numeri, che il 300 nasce dalla moltiplicatione di 15 via 20, il 15 nasce dal triplo di 5, il 20 dal quadruplo di 5 et il 25 nasce dal quintuplo del medesimo 5, e perché il 5 fu posto a caso, bisogna cercare un numero che il produtto del suo triplo nel suo quadruplo habbia proportione al suo quintuplo come da numero quadrato a numero quadrato. Ponghisi che tal numero sia $1^{\underline{1}}$; il suo triplo e $3^{\underline{1}}$ et il suo quadruplo è $4^{\underline{1}}$, che il produtto e $12^{\underline{2}}$; il quintuplo d'$1^{\underline{1}}$ è $5^{\underline{1}}$; adunque bisogna che la proportione ch'è da $5^{\underline{1}}$ a $12^{\underline{2}}$ sia si come da numero quadrato a numero quadrato, et essendo la proportion loro come da numero quadrato a numero quadrato, il produtto loro sarà quadrato, ma tal produtto è $60^{\underline{3}}$ e questo è eguale a un quadrato e sia $900^{\underline{2}}$ che agguagliato, il Tanto vale 15 e 15 sarà il numero cercato. Hor, tornando al principio, siano tutti tre li numeri insieme 15; il produtto del primo e secondo sarà 45 e sia il secondo 1 esimo d'1 adunque il primo sarà $45^{\underline{1}}$ et il produtto del se.

secondo e terzo sarà 60, che partito per il secondo, ch'è 1 esimo d'1 ne viene $60^{\underline{1}}$ per il terzo; resta che il produtto del primo e terzo, ch'è 2700 sia eguale a 75, quintuplo del 15, che agguagliato, il Tanto valerà così il primo numero, che fu posto $45^{\underline{1}}$, sarà $7\frac{1}{2}$; il secondo, che fu posto 1 esimo d'$1^{\underline{1}}$, sarà 6 et il terzo, che fu posto $60^{\underline{1}}$, sarà 10, che il composto di tutti tre è $23\frac{1}{2}$; così se fusse 15 satia finita la proposta; adunque, tornando da capo, pongo che il composto delli tre sia $15^{\underline{2}}$ et il primo numero sia $7\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, il secondo $6^{\underline{1}}$ et il terzo $10^{\underline{1}}$, li quali tre hanno tutte l'altre conditioni proposte; solo resta che tutti tre siano $15^{\underline{2}}$, ma sono $23\frac{1}{2}^{\underline{1}}$; però $15^{\underline{1}}$ sono eguali a $23\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto vale $\frac{47}{30}$; però il primo numero, che fu posto $7\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, sarà $\frac{47}{4}$; il secondo, che fu posto $6^{\underline{1}}$, sarà $\frac{47}{5}$ et il terzo, che fu posto $10^{\underline{1}}$ sarà $\frac{47}{3}$, che il composto loro è $\frac{2209}{60}$; il produtto del primo nel secondo è $\frac{2209}{20}$ ch'è triplo al lor composto; il produtto del secondo nel terzo è $\frac{2209}{15}$, che li e quadruplo e il produtto del terzo nel primo è $\frac{2209}{12}$, che e quintuplo al detto suo composto.

Problema CXCVII.

Trovinsi tre numeri tali che il composto di essi moltiplicato nel primo faccia un numero triangolare e moltiplicato nel secondo faccia numero quadrato e moltiplicato nel terzo faccia numero cubo. Ponghisi che tutti tre insieme siano 1 esimo d'$1^{\underline{2}}$ et il primo sia un numero triangolare di$^{\underline{2}}$ e sia $6^{\underline{2}}$, che moltiplicato nella somma di tutti tre fa 6, numero triangolare et il secondo sia un numero quadrato di $^{\underline{2}}$ e sia $4^{\underline{2}}$, che moltiplicato in tutti tre fa 4, numero quadrato et il terzo sia un numero cubo di $^{\underline{2}}$ e sia $8^{\underline{2}}$ che moltiplicato in tutti tre fa 8, numero cubo; resta che tutti tre insieme siano 1 esimo d'$1^{\underline{2}}$, ma essi sono $18^{\underline{2}}$ che levato il rotto $18^{\underline{4}}$ sono eguali a 1, che se il 18 fusse numero quadroquadrato si potria havere dalla agguagliatione numero rationale; però bisogna considerare che il 18 nasce da un numero triangolare, da un cubo e da un quadrato gionti insieme e la cosa si riduce a trovare tre numeri, un triangolare, un quadrato et un cubo, la somma de' quali sia un numero quadroquadrato. Sia il numero quadroquadrato $1^{\underline{4}}$ et il numero quadrato $1^{\underline{4}} - 2^{\underline{2}} + 1$, che cavato d'$1^{\underline{4}}$, quadroquadrato, resta $2^{\underline{2}} - 1$ e questo convien che sia la somma del numero triangolare e del numero cubo. Hor sia il cubo 8; restarà per il triangolare $2^{\underline{2}} - 9$ e perché ogni numero triangolare moltiplicato per 8 et al produtto gionto 1 fa quadrato, adunque $16^{\underline{2}} - 71$ è eguale a un quadrato e sia il suo lato $4^{\underline{1}}$ meno che numero si voglia; poniamo $4^{\underline{1}} - 1$; il quadrato sarà $16^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 1$, che levato simile da simile, il meno e agguagliato, il Tanto valera 9; però il numero triangolare, che fu posto $2^{\underline{2}} - 9$, sarà 153; il numero quadrato, che fu posto $1^{\underline{4}} - 2^{\underline{2}} + 1$, sarà 6400 e il numero cubo sarà 8 (come si pose). Hor tornando al principio ponghisi che il composto delli tre numeri sia 1 esimo d'$1^{\underline{2}}$; il primo sia $153^{\underline{2}}$ acciochè moltiplicato nella detta somma faccia numero triangolare; il secondo sia $6400^{\underline{2}}$ et il terzo $8^{\underline{2}}$; resta che la somma loro, ch'e $6561^{\underline{2}}$, sia eguale a 1 esimo d'l che levato il rotto $6561^{\underline{4}}$. sono eguali a 1, che agguagliato, il Tanto valera +; però il primo numero, che fu posto $153^{\underline{2}}$, sarà il secondo, che fu posto $6400^{\underline{2}}$, sarà $\frac{6400}{81}$ e il terzo, che fu posto $8^{\underline{2}}$, sarà $\frac{8}{81}$, che la somma loro e 81, la quale moltiplicata per il primo fa 153, numero triangolare, moltiplicata per il secondo fa 6400, ch'e numero quadrato e moltiplicata per il terzo fa 8, ch'e numero cubo.

Problema CXCVIII.

Faccisi di 30 quattro parti in continua proportione tali che la prima sia 2.

Ponghisi che la seconda sia $1^{\underline{2}}$ et havendo nota la prima e seconda, per trovare la terza dicasi: se 2 dà $1^{\underline{2}}$, che darà $1^{\underline{2}}$? Darà $2\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ et questa sarà la terza, et per trovar la quarta si dica: se $1^{\underline{1}}$ dà $\frac{1}{2}^{\underline{2}}$, che darà $\frac{1}{2}^{\underline{2}}$? Darà $\frac{1}{4}^{\underline{3}}$ e questa e la quarta, che gionte tutte quattro insieme fanno $2 + 1^{\underline{1}} + \frac{1}{2}^{\underline{2}} + \frac{1}{4}^{\underline{3}}$ e questo è eguale a 30, che levato 2 per parte e ridutto a $1^{\underline{3}}$ si haverà $1^{\underline{3}} + 2^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ eguale a 112, che per agguagliare piglisi il terzo delle $^{\underline{2}}$ e moltiplichisi via il tutto fa $1\frac{1}{3}$, che cavato di 4, numero delli $^{\underline{1}}$, resta $2\frac{2}{3}$ qual si salvi; poi cubisi $\frac{2}{3}$, terzo delle $^{\underline{2}}$, fa $\frac{8}{27}$ il qual si gionghi al numero, fa $112\frac{8}{27}$, poi si moltiplichi il detto $\frac{2}{3}$ via $2\frac{2}{3}$ serbato, fa $1\frac{7}{9}$ e questo si gionghi a $112\frac{8}{27}$, fa $114\frac{2}{27}$; dipoi piglisi il terzo di $2\frac{2}{3}$ serbato, ch'è $\frac{8}{9}$, cubisi fa $\frac{512}{729}$ che gionto a $3253\frac{163}{729}$, quarto del quadrato di $114\frac{2}{7}$, fa $3253\frac{25}{27}$, che il suo lato è R.q.$3253\frac{25}{27}$, che giontoli $57\frac{1}{27}$, metà di $114\frac{2}{27}$, fa R.q.$3253\frac{25}{27} + 57\frac{1}{27}$ che del lato cubo di questo binomio cavatone il lato cubo del suo residuo con 3, terzo delle valerà il Tanto, cioè R.c.⌞R.q.$3253\frac{25}{27} + 57\frac{1}{27}$⌟ − R.c.⌞R.q.$3253\frac{25}{27} - 57\frac{1}{27}$⌟ − $\frac{2}{5}$, ma perché dette R.q. legate hanno lato cubico, ch'è della prima R.q.$6\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3}$ e della seconda R.q.$6\frac{1}{3} - 2\frac{1}{3}$ che cavato la seconda della prima resta $4\frac{2}{3}$ e di questo cavato $\frac{2}{3}$ resta 4; la valuta del Tanto e la seconda delle quattro parti cercate sarà 4, la terza 8 et la quarta 16.

Problema CXCIX.

Partasi 12 per un numero tale che l'avenimento sia 4 più che il partitore.

Ponghisi che il partitore sia $1^{\underline{1}}$, col quale partito 12 ne viene 12 esimo d'$1^{\underline{1}}$ e questo è eguale al partitore più 4, cioè a $1^{\underline{1}} + 4$, che levato il rotto si haverà $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$ eguale a 12, che agguagliato, il Tanto valerà 2; però 2 sarà il numero col qual partito 12 ne vien 6, ch'è 4 più di 2 partitore e ne nasce la seguente regola.

Se haveremo una data quantità la qual si voglia dividere per tal modo che l'avenimento sia maggiore del divisore in un dato numero, piglisi la metà del dato numero e si quadri et al quadrato s'aggionghi la data quantità e della somma se ne pigli il lato, del quale se ne cavi la metà del dato numero e lo restante sarà il divisore cercato, cioè quel numero o quantità co'l qual partito la quantità data, l'avenimento sarà maggiore del divisore nel numero dato.

Problema CC.

Trovinsi tre numeri tali che l'eccesso del maggiore e mezzano sia tre volte quanto l'eccesso del mezzano e minore e che dui di questi tre numeri qual si voglino gionti insieme faccino numero quadrato.

Ponghisi che il minore et il mezzano insieme siano 4 acciochè la somma loro sia quadrato; adunque bisogna che il mezzano sia maggiore di 2, metà del 4, e sia $2 + 1^{\underline{1}}$ et il minore $2 - 1^{\underline{1}}$; l'eccesso loro e 21; adunque l'eccesso del maggiore e mezzano sarà $6^{\underline{1}}$ e perché il mezzano e $2 + 1^{\underline{1}}$, il maggiore sarà $2 + 7^{\underline{1}}$; resta hora che la somma del maggiore e mezzano e quella del maggiore e minore siano quadrate, quali somme sono $4 + 8^{\underline{1}}$ e $4 + 6^{\underline{1}}$, che ciascuna di loroè eguale a un quadrato e perché il 4 e quadrato e facile agguaglianza; piglinsi dui numeri il produtto de' quali sia $2^{\underline{1}}$ eccesso loro, ma un delli dui numeri sia il doppio del lato del 4, cioè 4, che essendo l'un 4 l'aitro sarà $\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, che il quadrato della metà della somma loro, qual è is$^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}} + 4$, sarà eguale a $8^{\underline{1}} + 4$, che levato simile da simile et agguagliato, il Tanto valerà 112 e perché il minor delli tre numeri fu posto $2 - 1^{\underline{1}}$ esso sarebbe $-\ 110$, che non fa a proposito; però bisogna mu-tar positione e trovar un numero minor del 2 per il numero minore, e perché il minore e mezzano si son posti esser 4 e l'eccesso del maggiore e mezzano a tre volte quanto l'eccesso del mezzano e minore e l'eccesso del minore e mezzano non pue giongere a 4, per questo l'eccesso del maggiore e mezzano non giongerà a 12 e non giongendo a 12, la somma del maggiore e minore non potra giongere a 16 e per questa ragione bisogna che $6^{\underline{1}} + 4$, somma del primo e terzo, sia minor di 16; peròhabbiamo tre quadrati, l'uno e $8^{\underline{1}} + 4$, l'altro $6^{\underline{1}} + 4$ e l'altro 4, con le conditioni proposte, che l'eccesso del maggiore e mezzano e tre volte quanto l'eccesso del mezzano e minore; la cosa dunque si riduce a trovar tre quadrati, de' quali il minore sia 4 e tali che l'eccesso del maggiore al mezzano sia tre volte quanto l'eccesso del mezzano al minore e che il mezzano sia minor di 16 per la ragion detta di sopra, e la conditione delli eccessi di questi quadrati nasce da questo: che se saranno tre numeri, li eccessi de' quali habbino una proportion fra di loro, li tre numeri che nasceranno dal giongerli insieme a dui a dui per ordine, haveranno nelli loro eccessi la medesima proportione che haveano li eccessi delli primi tre numeri. Ponghisi che il quadrato mezzano sia $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$ et il minore e 4: l'eccesso loro e $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}}$. Però l'eccesso del maggiore e mezzano sarà $s^{\underline{2}} + 1^{\underline{3}}$' et il maggiore sarà $1\frac{1}{3}^{\underline{2}} + 5\frac{1}{3}^{\underline{1}} + 4$ e questo è eguale a un quadrato e perché bisogna che il quadrato mezzano sia minor di 16, il suo lato sarà minor di 4, il qual lato e stato posto $1^{\underline{1}} + 2$. Pere bisogna che $1^{\underline{1}}$ sia minor di 2 e perché $1\frac{1}{3}^{\underline{2}} + 5\frac{1}{3}^{\underline{1}} + 4$è eguale a un quadrato, lo moltiplico per 9, numero quadrato, per fuggir rotti, fa $12^{\underline{2}} + 48^{\underline{1}} + 36$ e questo è eguale a un quadrato tale che agguagliato, il Tanto vaglia men di 2, il lato del qual quadrato bisogna che sia 6 (per scancellare il 36, numero accompagnato con le $12^{\underline{2}} + 48^{\underline{1}}$, acciochè ne venghi eguale a I) meno un numero di$^{\underline{1}}$ tale che del suo quadrato cavatone 12, numero delle$^{\underline{2}}$, e per to restante partito la somma del produtto delli detti $^{\underline{1}}$ moltiplicati per 12, doppio del 6, numero, accompagnato con 48, nu, mero delli $^{\underline{1}}$ che sono con le $12^{\underline{2}} + 36$, ne venghi meno di 2; e bench questo si potesse cercare ponendo a tentoni, pur per regola si farà in questo modo. Ponghisi che sia $1^{\underline{1}}$ il meno; il suo quadrato e $1^{\underline{2}}$, che cavatone 12 resta $1^{\underline{2}} - 12$ e moltiplicato $1^{\underline{1}}$ per 12 fa $12^{\underline{1}}$, aggionto con 48 fa $12^{\underline{1}} + 48$, che partito per $1^{\underline{2}} - 12$ ne viene $12^{\underline{1}} + 48$ esimo d'$1^{\underline{2}} - 12$ e questo è eguale a meno di 2, che levato il rotto $12^{\underline{1}} + 48$ sono eguali a meno di $2^{\underline{2}} - 24$, che levato il $- 24$ dalle parti resta $2^{\underline{2}}$ eguale a meno di $12^{\underline{1}} + 72$. Moltiplichisi il numero delle per il numero fa 144, che giontoli 36, quadrato della metà delli $12^{\underline{1}}$, fa 180 il lato del quale saria più di 13 e meno di 14, ma perché il Tanto deve valere meno di 2 piglisi il 14 e gionghisi con 6, metà delli $^{\underline{1}}$, fa 20, che la metà è 10 e questo è il numero delli $^{\underline{1}}$ che va cavato del 6; peròhaveremo $6 - 101$, che il suo quadrato e $36 - 120^{\underline{1}} + 100^{\underline{2}}$ e questo sarà eguale a $12^{\underline{2}} + 48^{\underline{1}} + 36$, che levato simile da simile et il meno haveremo $88^{\underline{2}}$ eguale a $168^{\underline{1}}$, che schifato et agguagliato, il Tanto valerà però il lato del mezzano, che si pose $1^{\underline{1}} + 2$, sarà $\frac{43}{12}$ et il quadrato $\frac{1849}{121}$. Ritornando dunque al principio $6^{\underline{1}} + 4$ sono eguali a 1219, che levato il 4 da ogni parte $6^{\underline{1}}$ sono eguali a $\frac{1365}{121}$, che agguagliato, il Tanto vale $\frac{455}{242}$ et è minor di 2 (come si cercava); percio il numero minore, che fu $2 - 1^{\underline{1}}$, sarà $\frac{29}{242}$ et il mezzano, che fu posto $1^{\underline{1}} + 2$, sarà $\frac{939}{242}$ et il maggiore, ch'era $7^{\underline{1}} + 2$, sarà $\frac{3669}{242}$ e perché il 242, denominator di questi rotti, moltiplicato per 2 fa quadrato, moltiplichinsi tutti tre detti rotti per 2 e se gli levi il denominatore che così li tre numeri cercati si haveranno in numeri sani e saranno 58, 1878 e 7338, che l'eccesso del maggiore e mezzano, ch'è 5460 e triplo all'eccesso del mezzano e minore, ch'è 1820 e le somme di detti tre numeri tolti a dui a dui ordinatamente sono 1936, 9216 e 7396, che ciascuna di Toro e numero quadrato, li lati de' quali sono 44, 96 et 86.

Problema CCI.

Trovinsi tre numeri tali che la differenza ch'è dal quadrato del maggiore al quadrato del mezzano sia tre volte quanto la differenza ch'è dal mezzano al minore e che essi numeri tolti a dui a dui faccino numero quadrato.

Ponghisi che il maggiore e mezzano siano $16^{\underline{2}}$ acciochè sia quadrato; adunque il maggiore sarà più d'8 e sia $8^{\underline{2}} + 2$ e perché il maggiore e mezzano sono maggiori del mezzano e minore, il mezzano e minore saranno minori di $16^{\underline{2}}$ e siano il maggiore e minore $9^{\underline{2}}$ et essendo il maggiore $8^{\underline{2}} + 2$, i1 minore sarà $1^{\underline{2}} - 2$ et il mezzano $8^{\underline{2}} - 2$ e perché la differenza del quadrato del maggiore al quadrato del mezzano deve esser tre volte quanto la differenza del mezzano al minore, ma l'eccesso delli detti dui quadrati e $64^{\underline{2}}$ è l'eccesso delli detti dui numeri e $7^{\underline{2}}$ e questo triplato deve essere eguale a $64^{\underline{2}}$, ch'è impossibile che $21^{\underline{2}}$ siano eguali a $64^{\underline{2}}$, però bisogna mutar positione. Si vede che le 64 Z. nascono dal doppio di 32, doppio di 16, numero delle $^{\underline{2}}$ che fu posto esser la somma del maggior e mezzano; peròbisogna trovar un numero che moltiplicato per 32 faccia 21, ch'è $\frac{21}{32}$; ponghisi di nuovo che il maggior sia $8^{\underline{2}} + \frac{21}{32}$, il mezzano $8^{\underline{2}} - \frac{21}{32}$ et il minore $1^{\underline{2}} - \frac{21}{32}$. Ci resta che il mezzano e minore insieme siano quadrato, ma sono $9^{\underline{2}} + - 1^{\underline{1}}6$ e questo è eguale a un quadrato, qual sia $9^{\underline{2}} - 36^{\underline{1}} + 36$, che levato il meno, simile da simile et agguagliato, i1 Tanto valerà $1\frac{7}{192}$ e la potenza valerà $\frac{39601}{36864}$; Però il maggiore delli tre numeri che si cercano, qual fu posto $8^{\underline{2}} + 32$, sarà $\frac{341000}{36864}$, il mezzano che fu posto $8^{\underline{2}} - \frac{21}{32}$, sarà $\frac{299616}{36864}$ et il minore, che fu posto $1^{\underline{2}} - \frac{21}{32}$, sarà $\frac{15409}{36864}$, che fanno quanto si è proposto.

Problema CCII.

Trovinsi tre numeri in continua proportione tali che di ciascun di loro cavato 12 lo restante sia quadrato.

Prima si devono trovar dui numeri quadrati tali che l'uno sia 12 più dell'altro, che saranno $30\frac{1}{4}$, e $\frac{1}{4}$. Hor pongo che i1 primo numero sia $1^{\underline{2}}$, il secondo $6\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ et il terzo $42\frac{1}{4}$, che sono in continua proportione e del terzo cavato 12 resta quadrato. Ci resta che del primo e secondo cavato 12 resti quadrato, ma resta $1^{\underline{2}} - 12$ et $6\frac{1}{2}^{\underline{1}} - 12$, che ciascunoè eguale a un quadrato e ne nasce doppiù agguaglianza; così si trovi l'eccesso loro, ch'è $1^{\underline{2}} - 6\frac{1}{2}^{\underline{1}}$; li dui numeri, il produtto de' quali sia detto eccesso sono $1^{\underline{1}}$ e $1^{\underline{1}} - 6\frac{1}{2}$; l'eccesso loro è $6\frac{1}{2}$, il quadrato della metà e $10\frac{9}{16}$ e questo è eguale alla minor quantita, cioè a $6\frac{1}{2}^{\underline{1}} - 12$, che levato il meno et agguagliato, il Tanto valerà $\frac{361}{104}$ e però il primo numero, che fu posto $1^{\underline{2}}$, sarà $\frac{130321}{10816}$; il secondo, che fu posto $6\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, sarà $\frac{2693}{208}$ et il terzo sarà $42\frac{1}{4}$ (come si pose).

Problema CCIII.

Trovinsi tre numeri in continua proportione tali che a ciascun di loro gionto 20 la somma sia quadrata.

Prima si devono trovare dui numeri quadrati tali che l'uno sia 20 più dell'altro, che sono 16 e 36. Hor ponghisi che il terzo numero sia 16 et il mezzano $4^{\underline{1}}$ et il primo $1^{\underline{2}}$ che così saranno in continua propor. tione et al terzo gionto 20 fa quadrato. Ci resta hora che giongendo 20 a ciascun delli altri dui faccia quadrato, ma il primo fa $1^{\underline{2}} + 20$ et il secondo $4^{\underline{1}} + 20$ e ciascun di loro deve essere eguale a un quadrato e ne nasce doppiù agguaglianza. L'eccesso loro è $1^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}}$; li dui numeri che lo producono sono $1^{\underline{1}}$ et $1^{\underline{1}} - 4$, l'eccesso loro è 4, il quadrato della sua metà a pur 4 et questoè eguale al minore, cioè a $4^{\underline{1}} + 20$, che la agguagliatione non si può fare; peròbisogna mutar positione e considerare che il 4 numero e la quarta parte di 16 e 16 non e numero determinato, ma e un quadrato tale che giontoli 20 fa quadrato. Però bisogna cercare un altro quadrato tale che la sua quarta parte sia maggior di 20, cioè che esso quadrato sia maggior di 80 e che giontoli 20 faccia quadrato; ponghisi che il lato di tal quadrato sia $9 + 1$ quadrato sarà $1^{\underline{2}} + 18^{\underline{1}} + 81$ eta questo gionto 20 fa $1^{\underline{2}} + 18^{\underline{1}} + 101$ et questoè eguale a un quadrato, il lato del quale sia $1^{\underline{1}} - 11$, che il quadrato sarà $1^{\underline{2}} - 22^{\underline{1}} + 121$, che levato simile da simile, il meno e agguagliato, il Tanto valerà $\frac{1}{2}$. Però il lato del quadrato, che fu posto $9 + 1^{\underline{1}}$, sarà $9\frac{1}{2}$ et il quadrato sarà $90\frac{1}{4}$. Hor tornando al principio, ponghisi l'un delli tre numeri essere $90\frac{1}{4}$, il mezzano $9\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ e l'altro $1^{\underline{2}}$ che gionto 20 a $1^{\underline{2}}$ et a $9\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ fa $1^{\underline{2}} + 20$ e $9\frac{1}{2}^{\underline{1}} + 20$, che ciascun di loroè eguale a un quadrato. Però piglisi l'eccesso loro, ch'è $1^{\underline{2}} - 9\frac{1}{2}^{\underline{1}}$; li dui numeri che lo producono sono $1^{\underline{1}}$ et $1^{\underline{1}} - 9\frac{1}{2}^{\underline{1}}$; la lor differenza è $9\frac{1}{2}$; il quadrato della metà è $\frac{361}{16}$ e quest'è eguale alla minor quantita, cioè a $9\frac{1}{2}^{\underline{1}} + 20$, che levato 20 da ogni parte et agguagliato, il Tanto valerà $\frac{41}{152}$.

Però li numeri che furno posti $1^{\underline{2}}$, $9\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ et $90\frac{1}{4}$, saranno $\frac{1681}{23104}$, $\frac{779}{304}$ et $90\frac{1}{4}$, che fanno quanto si propone.

Problema CCIIII.

Faccisi di 30 quattro parti in continua proportione tali che li loro quadrati gionti insieme faccino 340.

Prima che si venga alla operatione si deve sapere che di ogni quattro quantità in continua proportione tanto fa a cubare il composto della seconda e terza e detto cubato partirlo per il triplo del composto delle dette seconda e terza aggionto con il composto della prima e quarta, quanto a moltiplicare la prima nella quarta, overo la seconda nella terza. Come per essempio, siano le quattro quantità in continua proportione 4, 6, 9, $13\frac{1}{2}$; il composto della seconda e terza a 15, che il suo cubato 3375 il quale si deve partire per il triplo della seconda e terza, ch'è 45, gionto con il composto della prima e quarta, ch'è $17\frac{1}{2}$, che la lor somma è $62\frac{1}{2}$ e questo è il partitore col qual partito 3375 ne viene 54, ch'è eguale al produtto della prima nella quarta o della seconda nella terza. E per venire alla solutione del problema, ponghisi che la seconda e terza insieme siano $1^{\underline{1}}$; la prima e quarta saranno $30 - 1^{\underline{1}}$, che cubato la seconda e terza fa 1 e questo si parta per il triplo della seconda e terza, ch'è $3^{\underline{1}}$, gionto con la somma della prima e quarta, ch'è $30 - 1^{\underline{1}}$, cioè per $30 + 2^{\underline{1}}$; ne viene 1 esimo di $30 + 2^{\underline{1}}$ e tanto deve essere il produtto della seconda nella terza e similmente il produtto della prima nella quarta; penrò d'$1^{\underline{1}}$, composto della seconda e terza si faccino due parti tali che il produtto loro sia $1^{\underline{3}}$ esimo di $30 + 2^{\underline{1}}$, che per farlo piglisi la metà d'$1^{\underline{1}}$ e quadrisi, fa 4 e se ne cava $1^{\underline{3}}$ esimo di $30 + 2^{\underline{1}}$, resta $7\frac{1}{2}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{3}}$ esimo di $30 + 2^{\underline{1}}$, che gionto e cavato il suo lato d'$\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ fa $\frac{1}{2}^{\underline{1}} - \text{R.q.}\llcorner 7\frac{1}{2}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{3}}$, esimo di $30 + 2^{\underline{1}}\lrcorner$ e $\frac{1}{2}^{\underline{1}} + \text{R.q.}\llcorner 7\frac{1}{2}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{3}}$, esimo di $30 + 2^{\underline{1}}\lrcorner$ e queste sono le parti cercate delle quali la prima e la seconda [delle] parti [che] sono in continua proportione e l'altra e la terza; nel medesimo modo si trovaranno la prima e quarta cioè facendo di $30 - 1^{\underline{1}}$, composto loro, due parti tali che il loro produtto sia 1 esimo di 30

$+\ 2^{\underline{1}}$, che l'una sarà $15 - \frac{1}{2}^{\underline{1}} - \text{R.q.}\llcorner 6750 - 22\frac{1}{2}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{3}}$, esimo di $30 + 2^{\underline{1}}\lrcorner$ e questa sarà la prima delle quattro parti in continua proportione; l'altra sarà $15 - 2^{\underline{1}} + \text{R.q.}\llcorner 6750 - 22\frac{1}{2}^{\underline{2}} - \frac{1}{3}^{\underline{3}}$, esimo di $30 + 2^{\underline{1}}\lrcorner$ e questa sarà la quarta parte delle continue proportionali. Bisogna hor vedere se i lor quadrati gionti insieme fanno 340, che il quadrato della prima e $225 - 15^{\underline{1}} + \frac{1}{4}^{\underline{2}}$ più questo rotto: $6750 - 22\frac{1}{2}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{3}}$, esimo di $30 + 2^{\underline{1}}$, meno una R.q. legata la quale non accade nominare perché scancella una R.q. legata simile ch'è in più nel quadrato della quarta. Il quadrato della seconda e 4 più questo rotto: $7\frac{1}{2}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{3}}$, esimo di $30 + 2^{\underline{1}}$ meno una R.q. legata la quale non accade nominare perché con essa si leva una R.q. legata simile ch'è in più nel quadrato della terza. Il quadrato delta terza e $\frac{1}{4}^{\underline{2}}$ più questo rotto: $7\frac{1}{2}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{3}}$, esimo di 30 $+\ 2^{\underline{1}}$ più la R.q. legata detta nel quadrato della seconda. I1 quadrato della quarta e $225 - 15^{\underline{1}} + \frac{1}{4}^{\underline{2}}$ più questo rotto: $6750 - 22\ \frac{1}{2}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{3}}$ esimo di $30 +$ $2^{\underline{1}}$ più la R.q. legata detta nel quadrato della prima, che sonmmati insieme li detti quattro quadrati fanno $450 - 30^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$ più, questo rotto $13500 - 30$ $-\ 2^{\underline{2}}$, esimo di $30 + 2^{\underline{1}}$, che ridutto tutto a rotto fa $27000 - 60^{\underline{2}}$ esimo di 30 $+\ 2^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 340 che si vuole che sia la somma delli quadrati di- queste parti, che levato il rotto si haverà $27000 - 60^{\underline{2}}$ eguale a $10200 + 680^{\underline{1}}$, che levato il meno, il minor numero e ridutto a $1^{\underline{2}}$ si haverà $1 + 11\frac{1}{3}^{\underline{1}}$ eguale a 280, che agguagliato, il Tanto valerà 12; però il composto della seconda e terza, che si pose essere $1^{\underline{1}}$, sarà 12 et il composto della prima e quarta sarà lo restante sino a 30, cioè 18 e per trovarle separatamente cubisi il composto della seconda e terza, cioè 12, fa 1728 e questo si parta per 54, triplo del 18 giontoli poi 18, composto della prima e quarta; ne viene 32 e 32 deve essere il produtto della seconda nella terza e similmente della prima nella quarta. Però faccisi di 12 e poi di 18, due parti tali che il produtto loro sia 32, che le parti del 12 sono 4 et 8, che il 4 e la seconda parte e l'8 la terza delle quantità in continua proportione che si cercano, e le parti del 18 sono 2 e 16, che il 2 e la prima et il 16 la quarta delle quattro parti in continua proportione che si cercano; cioè la prima e 2, la seconda 4, la terza 8 e la quarta 16, che li lor quadrati sono 4, 16, 64 et 256, che gionti insieme fanno 340 (come si vuole).

Ma volendo solvere tal domanda senza far positione, cubisi il 30, somma delle quattro quantità, e del cubato se ne cavi il produtto della moltiplicatione del 30 via la somma delli loro quadrati, qual produtto e 10200, che cavato di 27000 resta 16800 e questo per regola si parta per 60, doppio della somma delle quattro quantità, ne viene 280, il quale per regola sarà eguale a $1^{\underline{2}}$ più tanti$^{\underline{1}}$ quanto e il numero che ne viene a partire 340, somma de' quadrati, per 30, somma delle quantità, ch'è $11\frac{1}{3}$; cioè 280 numero sarà eguale a $1 + 11\frac{1}{3}^{\underline{1}}$, che agguagliato, ne verrà il composto della seconda e terza quantità; nel resto poi si procedera come di sopra.

Problema CCV.

Faccisi di 32 quattro parti in continua proportione tali che li lor quadrati gionti insieme faccino 320.

Per la regola breve detta nella passata cubisi 32 fa 32768 che cavatone 10240, produtto di 32 via 320, resta 22528 quale partito per 64, doppio di 32 somma delle quantita, ne viene 352, ch'è eguale a $1^{\underline{2}} + 10^{\underline{1}}$, che li $10^{\underline{1}}$ si trovano col partire 320 per 32, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.377 − 5 e quest'è la somma della seconda e terza delle quattro parti in continua proportione; la prima e quarta saranno il resto sino a 32, cioè 37 − R.q.377, e per trovar quanto a ciascuna da se, cubisi la seconda e terza, cioè R.q.377 − 5, fa R.q.77022608 + − 5780 e questo si parta per R.q.1508 + 22, somma del triplo della seconda e terza gionto con la prima e quarta, ne viene 457 − R.q.166257 e tanto e il produtto della seconda nella terza e similmente della prima nella quarta; peròfaccisi di R.q.377 − 5, somma della seconda e terza, due parti tali che moltiplicate l'una via l'altra faccino 457 + − R.q.166257, che per farlo piglisi la metà di R.q.377 − 5 e quadrisi, fa $100\frac{1}{2}$ − R.q.$2356\frac{1}{4}$, del qual cavatone 457 − R.q.166257 resta R.q.$129028\frac{1}{4}$ − $356\frac{1}{2}$, che cavato il suo lato di R.q. $94\frac{1}{4}$ − $2\frac{1}{2}$, metà di R.q.377 − 5, resta R.q.$94\frac{1}{4}$ − $2\frac{1}{2}$ − R.q.$\llcorner$R.q.$129028\frac{1}{4}$ − $356\frac{1}{2}\lrcorner$ e tanto e la seconda parte delle quattro quantita e lo restante sino a R.q.377 − 5, ch'è R.q. $94\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2}$ + R.q.$\llcorner$R.q.$129028\frac{1}{4} - 356\frac{1}{2}\lrcorner$ sarà la terza; e per trovar la prima e quarta faccisi di 37 − R.q.377, composto loro, due parti tali che il lor produtto sia 457 − R.q.166257, che la prima sarà $18\frac{1}{2}$ − R.q.$94\frac{1}{4}$ − R.q.$\llcorner$R.q.$2356^{\underline{1}}4 - 20\frac{1}{2}\lrcorner$ e questa è la prima parte delle quattro quantita; l'altra sarà $18\frac{1}{2}$ − R.q. $94\frac{1}{4}$ + R.q.$\llcorner$R.q.$2356\frac{1}{4} - 20\frac{1}{2}\lrcorner$ e questa è la quarta parte, che fanno quanto si propone.

Problema CCVI.

Faccisi di 30 quattro quantita in continua proportione tali che li quadrati della seconda e terza gionti insieme faccino 80.

Per trovar dette parti ponghisi che la seconda e terza insieme siano $1^{\underline{1}}$ e procedendosi come nel precedente Problema si fece, la prima sarà $15 - \frac{1}{2}^{\underline{1}}$ − R.q.$\llcorner 6750 - 22\frac{1}{2}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{3}}$, esimo di $30 + 2^{\underline{1}}\lrcorner$, la seconda $\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ − R.q.$\llcorner 7\frac{1}{2}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{3}}$, esimo di $30 + 2\ ^{\underline{1}}\lrcorner$, la terza $\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ + R.q.$\llcorner 7\frac{1}{2}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{3}}$, esimo di $30 + 2^{\underline{1}}\lrcorner$ e la quarta $15 - \frac{1}{2}^{\underline{1}}$ + R.q.$\llcorner 6750 - 22\frac{1}{2}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{3}}$ esimo di $30 + 2^{\underline{1}}\lrcorner$, che il quadrato della seconda è $\frac{1}{4}^{\underline{2}}$ più questo rotto: $7\frac{1}{2}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{3}}$, esimo di $30 + 2^{\underline{1}}$, − R.q.$\llcorner 7\frac{1}{2}^{\underline{4}} - \frac{1}{2}^{\underline{2}}$, esimo di $30 + 2^{\underline{1}}\lrcorner$ et il quadrato della terza è $^{\underline{2}}$ più questo rotto: $7\frac{1}{2}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{3}}$, esimo di $30 + 2^{\underline{1}}$, + R.q.$\llcorner 7\frac{1}{2}^{\underline{4}} - \frac{1}{2}^{\underline{5}}$, esimo di $30 + 2^{\underline{1}}\lrcorner$, che sommati insieme fanno 2 Z. più questo rotto: $7\frac{1}{2}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{3}}$ esimo di $15 + 1^{\underline{1}}$, che ridutto tutto a rotto e $15^{\underline{2}}$ esimo di $15 + 1^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 80, che si vuol che sia la somma di detti quadrati, che levato il rotto et ridutto a $1^{\underline{2}}$, si haverà $1^{\underline{2}}$ eguale a $80 + 5\frac{1}{3}^{\underline{1}}$ che agguagliato, il Tanto valerà 12 e tanto e la seconda e terza quantità che furno poste $1^{\underline{1}}$. Hor bisogna fare di 12 due parti tali che li lor quadrati gionti insieme faccino 80, che per la regola sua di questo l'una sarà 4 e l'altra 8; peròla seconda quantità sarà 4 e la terza 8; le altre due saranno lo restante sino a 30, cioè 18, che per trovarle separatamente bisogna fare di 18 due parti tali che moltiplicate l'una via l'altra faccino 32, produtto della seconda nella terza, che l'una sarà 2 e l'altra 16; però la prima quantità sarà 2 et la quarta sarà 16. Ma volendo trovare dette quantità senza far positione faccisi cosi.

Partasi l'80, somma data delli dui quadrati, per 30, somma delle quantità, ne viene $2\frac{2}{3}$, che si quadra e fa $7\frac{1}{9}$ e questo si aggionga al medesimo 80, fa $87\frac{1}{9}$, cheil suo lato è $9\frac{1}{3}$, il quale aggionto al $2\frac{2}{3}$ fa 12 e questo è la somma della seconda e terza; nel resto procedasi come di sopra.

Problema CCVII.

Faccisi di 30 quattro quantità in continua proportione tali che li quadrati della prima e quarta gionti insieme faccino 260.

Ponghisi che la seconda e terza insieme siano $1^{\underline{1}}$ (come si fece nella passata) che le quattro quantità saranno be medesime et il quadrato della prima sarà $225 - 15^{\underline{1}} + \frac{1}{4}^{\underline{2}}$ più questo rotto: $6750 - 22\frac{1}{2}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{3}}$ esimo di $30 + 2^{\underline{1}}$ meno una R.q. legata la quale non accade nominare perché il quadrato della quarta ha la medesima R.q. legata in più si che l'una scancella l'altra e detto quadrato della quarta, cavatone essa R.q. legata (che non fa a proposito) rimane $225 - 15^{\underline{1}} + \frac{1}{4}^{\underline{2}}$ più questo rotto: $6750 - 22\frac{1}{2}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{3}}$ esimo di $30 + 2^{\underline{1}}$, che gionto col quadrato della prima detto di sopra fa $450 - 30^{\underline{1}} + \frac{1}{2}^{\underline{2}}$ più questo rotto: $13500 - 45^{\underline{2}} - 1$ esimo di $30 + 2^{\underline{1}}$, che ridutto tutto a rotto sarà $27000 - 90^{\underline{2}}$, esimo di $30 + 2^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 260, che deve essere la somma di detti due quadrati, che levato il rotto, il meno, simile da simile e ridutto a $1^{\underline{2}}$ si haverà $1^{\underline{2}} + 5\frac{7}{9}^{\underline{1}}$ eguale a $213\frac{1}{3}$, che agguagliato, il Tanto valerà 12 e 12 sarà il composto della seconda e terza, il qual fu posto $1^{\underline{1}}$; però (come nella passata) le quattro quantità che si cercano saranno 2, 4, 8 et 16, che il quadrato della prima e 4 e il quadrato della quarta e 256, che gionti insieme fanno 260 (come si propone).

Problema CCVIII.

Trovinsi quattro quantità in continua proportione tali che il quadrato della prima gionto col quadrato della seconda faccia 20 e che il quadrato della terza gionto col quadrato della quarta faccia 320.

In questa domanda si proceda come in quel problema di questo, ove il produtto della prima nella terza havea da fare un terminato numero e così il produtto della seconda nella quarta. Cioe, piglinsi due o tre sorti di quantità in continua proportione e siano 1, 2, 4, 8 et 1, 3, 9, 27 e si gionghino i quadrati della prima e seconda e poi quelli della terza e quarta di ciascuna delle due sorti di proportioni, che haveremo dalla prima sorte 5 e 80 e dalla seconda 10 e 810, che la proportione ch'è da 5 a 80 e come da 1 a 16 e quella ch'è da 10 a 810 e come da 1 a 81, che si vede che il lato del lato di 16, ch'è 2, e la proportione delle prime quantità e il lato del lato d'81, ch'è 3, e la proportion delle seconde quantità, e peròne nasce questa regola che a partire la somma delli quadrati della terza e quarta per la somma delli quadrati della seconda e prima e dell'avenimento tolto il lato quadroquadrato ne viene la proportione che hanno le quattro quantità fra loro; peròpartasi 320 per 20, numeri dad, ne viene 16 che il suo lato quadroquadrato e 2 e però le quantità che si cercano diremo essere in proportion dupla fra loro. Hor ponghisi che la prima quantità sia $1^{\underline{1}}$; la seconda sarà $2^{\underline{1}}$; li lor quadrati gionti insieme fanno $5^{\underline{2}}$ e doverebbono far 20, però $5^{\underline{2}}$ sono eguali a 20, che agguagliato, il Tanto valerà 2; peròla prima quantità sarà 2, che fu posta $1^{\underline{1}}$ e essendo (come e detto) esse quantitadi in proportion dupla fra loro, la seconda sarà 4, la terza 8 e la quarta 16, che fanno quanto si propone.

Problema CCIX.

Trovinsi tre numeri tali che a ciascun di loro gionto 5 faccia numero quadrato e che al produtto di dui di loro qual si voglino gionto il medesimo 5 faccia numero quadrato.

Se saranno dui numeri quadrati che si seguitino, cioè che il lato dell'uno sia una unità più del lato dell'altro e che da ciascun di loro si cavi un numero qual si voglia, il produtto delli restanti insieme con il medesmo numero farà quadrato e se il doppio di detti dui restanti meno una unità si moltiplicara per qual si voglia d'essi restanti e al produtto si giongerà il dato numero, la somma sarà numero quadrato. Come per essempio siano 16 e 25, che cavato di ciascun di loro 5 resta 11 e 20, che il produtto loro e 220 che giontoli il 5 fa 225, ch'è numero quadrato. E se del doppio della somma d'essi restanti, ch'è 62, si cavara 1 e il restante, ch'è 61, si moltiplicara per 11 overo per 20 e alli produtti, che sono 671 e 1220, si giongerà 5, le Somme, che sono 676 e 1225, saranno numeri quadrati. Percio dunque per solvere la proposta si trovino dui quadrati che il lato dell'uno sia una unità più del lato del-l'altro e sia il lato dell'uno $1^{\underline{1}} + 3$ e il lato dell'altro $1^{\underline{1}} + 4$, che li quadrati saranno $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 9$ e $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 16$ e di ciascun di loro si cavi il 5 proposto: resta $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 4$ et $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 11$ e questi dui restanti si ponghino per dui delli numeri che si cercano, cioè $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 4$ per il primo e $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 11$ per il secondo, e per trovar il terzo (per la regola sopradetta) si deve doppiare la somma di questi dui e del duplato cavare una unità che restarà $4^{\underline{2}} + 28^{\underline{1}} + 29$, qual si ponera per il terzo; resta hora che gionto 5 a esso terzo faccia quadrato, ma fa $4^{\underline{2}} + 28^{\underline{1}} + 34$ e questo è eguale a un quadrato e sia il lato del quadrato $2^{\underline{1}} - 6$, che il quadrato sarà $4 - 24^{\underline{1}} + 36$, che levato simile da simile e il meno e agguagliato, il Tanto valerà 2s; però li tre numeri, che furno posti $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 4$, $1^{\underline{2}} + 8^{\underline{1}} + 11$ et $4^{\underline{2}} + 28^{\underline{1}} + 29$, saranno $\frac{2861}{676}$, $\frac{7645}{676}$ e $\frac{20336}{676}$ che fanno quanto si propone.

Problema CCX.

Trovinsi tre numeri tali che di qual si voglia di loro cavato 6 resti quadrato e che del produtto di dui di loro qual si voglia cavato il medesimo 6 resti numero quadrato.

Bisogna avertire che quello che si disse nella regola della proposta passata del cavare un numero dato, il medesimo serve anco nell'aggiongerlo; peròponghisi che il lato d'un quadrato sia $1^{\underline{1}}$ e il lato dell'altro $1^{\underline{1}} + 1$; li quadrati sono $1^{\underline{2}}$ e $1 + 2^{\underline{1}} + 1$, che a ciascun di loro gionto 6 fanno $1^{\underline{2}} + 6$ e $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 7$; hor similmente (come nella passata) per trovar il terzo, del doppio della somma di questi dui si cavi l'unita e restara per il terzo $4^{\underline{2}} +$

$4^{\underline{1}} + 25$; resta hora che di questo cavatone 6 resti quadrato, però il detto restante, ch'è $4^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 19$ sarà eguale a un quadrato, il lato del quale si ponghi essere $2^{\underline{1}} - 6$, che il quadrato sarà $4^{\underline{2}} - 24^{\underline{1}} + 36$, che levato il meno e simile da simile e agguagliato, il Tanto valerà $\frac{17}{28}$; però il primo numero sarà $\frac{4993}{784}$, il secondo $\frac{6829}{784}$ e il terzo $\frac{22660}{784}$, che fanno quanto si propone.

Problema CCXI.

Trovinsi tre numeri quadrati tali che il produtto di dui di loro qual si voglia gionto con ambidue loro o con il numero che resta faccia quadrato.

Se saranno dui numeri quadrati che si seguitino, il doppio loro più dui fa un altro numero, quale moltiplicato per qual si voglia di detti dui numeri quadrati e al produtto gionto li dui moltiplicati, overo quell'altro, la somma sarà numero quadrato; peròponghisi il primo numero essere $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$ e il secondo $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$, che il terzo sarà $4^{\underline{2}} + 12^{\underline{1}} + 12$ e questo deve essere eguale a un quadrato, il lato del quale sia $6 - 2^{\underline{1}}$, che il quadrato sarà $4^{\underline{2}} - 24^{\underline{1}} + 36$, che levato il meno, simile da simile et agguagliato, il Tanto valerà e però il lato del primo numero, ch'era $1^{\underline{1}} + 1$, sarà 3, il lato del secondo, ch'era $2 + 1^{\underline{1}}$, sarà $\frac{8}{3}$ e il lato del terzo, ch'era $6 - 2^{\underline{1}}$, sarà a e li numeri quadrati saranno $\frac{25}{9}$, $\frac{64}{9}$ e $\frac{196}{9}$, che produtto del primo e secondo è $\frac{1600}{81}$ al qual gionto il composto loro, ch'è overo il terzo numero, fa $\frac{2401}{81}$ e $\frac{3364}{81}$, che ciascun di loro è quadrato e li lati sono $\frac{49}{9}$ e $\frac{58}{9}$. Il produtto del secondo nel terzo è $\frac{12544}{81}$, che giontoli il composto loro, ch'è $\frac{260}{9}$, overo il primo, fa $\frac{14884}{81}$ e $\frac{12769}{81}$, che ciascun di loro è quadrato e li lati sono $\frac{122}{9}$ e $\frac{113}{9}$ il produtto del primo nel terzo è $\frac{4900}{81}$ al quale gionto il composto loro, ch'è $\frac{221}{9}$, overo il secondo, fa $\frac{6889}{81}$ e $\frac{5476}{81}$, che ciascun di loro è quadrato e li lati sono $\frac{83}{9}$ e $\frac{74}{9}$.

Problema CCXII.

Trovinsi tre numeri tali che di ciascun di loro cavato 2 resti quadrato e che del produtto di dui di loro qual si voglia cavato la somma delli dui che si moltiplicano overo il numero che resta, faccia quadrato.

Se a ciascuno delli numeri trovati nella proposta passata giongeremo 2, le somme faranno quanto si propone; però li tre numeri che si cercano saranno $\frac{43}{9}$, $\frac{82}{9}$ e $\frac{214}{9}$, che il produtto del primo nel secondo è $\frac{3526}{81}$, del qual cavato la somma loro, ch'è $\frac{125}{9}$, overo il terzo numero, resta $\frac{2401}{81}$ e $\frac{1600}{81}$, che ciascun e quadrato, li lati de' quali sono $\frac{49}{9}$ e $\frac{40}{9}$. Il produtto del secondo nel terzo è $\frac{17548}{81}$ del quale cavato la somma loro, ch'è $\frac{296}{9}$, overo il primo numero, resta $\frac{14884}{81}$ e $\frac{17161}{81}$, che ciascuno e quadrato e li lati sono $\frac{122}{9}$ e $\frac{131}{9}$ et il produtto del primo nel terzo è $\frac{9202}{81}$ del quale cavato la somma loro overo il secondo numero resta $\frac{6889}{81}$ e $\frac{8464}{81}$, che son quadrati e li loro lati sono $\frac{83}{9}$ e $\frac{92}{9}$.

Problema CCXIII.

Trovinsi dui numeri tali che il produtto loro gionto con la somma de' quadrati loro faccia numero quadrato.

Sia il primo $1^{\underline{1}}$ e il secondo un numero come si voglia e sia 1; il produtto loro è $1^{\underline{1}}$ e la somma de' loro quadrati e $1^{\underline{2}} + 1$, che gionti insieme fanno $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}} + 1$ e quest'è eguale a un quadrato, il lato del quale sia $1^{\underline{1}} - 2$, ch'egli sarà $1^{\underline{2}} - 4^{\underline{1}} + 4$, che levato simile da simile, il meno e agguagliato, il Tanto valerà $\frac{3}{5}$; però l'un delli numeri sarà $\frac{3}{5}$ e l'altro 1, che levato il rotto moltiplicando ognun di loro per 5 saranno 3 e 5 e se qual si voglia numero si moltiplicarà per 3 e 5, li dui produtti haveranno la medesma qualità.

Problema CCXIIII.

Trovinsi tre numeri over quantità il produtto de' quali sia $12\frac{1}{2}$ e l'un d'essi si divida in tre parti in continua proportione tali che la seconda sia maggior della prima quanto e il lato di essa prima e che partito l'uno delli dui numeri per l'altro ne venga $\frac{1}{2}$.

Ponghisi che la prima delle tre parti proportionali sia $1^{\underline{2}}$ la seconda sarà $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$ acciochè sia maggiore della prima il suo lato, e la terza $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$; la somma loro e $3^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} + 1$ e questo è uno delli numeri cercati, col qual si parta $12\frac{1}{2}$; ne viene $12\frac{1}{2}$ esimo di $3^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} + 1$ e questo è l'altro numero. Resta che a partire l'un per l'altro ne venga I, ma partendo $12\frac{1}{2}$ esimo di $3^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} + 1$ per $3^{\underline{2}} + 3^{\underline{2}} + 1$ ne viene $12\frac{1}{2}$ esimo di $9^{\underline{4}} + 18^{\underline{3}} + 15^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 1$ e questo è eguale a $\frac{1}{2}$, che levato il rotto $\frac{9^{\underline{4}}}{2} + 9^{\underline{3}} + \frac{15^{\underline{2}}}{2} + 3^{\underline{1}} + \frac{1}{2}$ sono eguali a $12\frac{1}{2}$, che moltiplicato ciascuna parte per 2 (per levare il rotto) si haverà $9^{\underline{4}} + 18^{\underline{3}} + 15^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} + 1$ eguale a 25 e tolto il lato di ciascuna parte si haverà $3^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} + 1$ eguale a 5, che levato 1 per parte e ridutto a $1^{\underline{2}}$ si haverà $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$ eguale a che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$1\frac{7}{12} - \frac{1}{2}$; però la prima delle tre parti proportionali, che si pose $1^{\underline{2}}$, sarà $1\frac{5}{6} -$ R.q.$1\frac{7}{12}$; la seconda, che si pose $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$, sarà $1\frac{1}{3}$, il quadrato della quale partito per la prima ne viene $1\frac{5}{6} +$ R.q.$1\frac{7}{12}$ et tanto c' la terza, quali gionte insieme fanno 5 e così 5 e l'uno delli numeri cercati, col quale partito $12\frac{1}{2}$ ne viene $2\frac{1}{2}$ e questo è l'altro numero, il quale partito per 5, già trovato, ne viene $\frac{1}{2}$ (come si propone).

Problema CCXV.

Trovinsi tre triangoli rettangoli eguali di superficie e tali che i lati di ciascuno siano rationali. Per trovar li lati maggiori di questi Triangoli piglinsi dui numeri Bella qualita della proposta avanti la passata e siano 3 e 5; il produtto loro insieme con li quadrati loro e 49, il lato del quale e 7, il quale si accompagni con li primi dui numeri e si haverà 3, 5, 7 e questi accompagnati con 8, somma di 3 e 5, fanno 3, 5, 7, 8; giongasi hora il quadrato del 7 con li quadrati di 3, 5 e 8, fa 58, 74 e 113 e questi sono i lati maggiori delli tre Triangoli e per trovar i lati minori piglisi la somma et eccesso di 7 e 3, 7 e 5 e 7 e 8, che sono 10 e 4, 12 e 2 e 15 e 1, che il produtto di ciascun delli dui e 40, 24 e 15 e questi sono i lati minori; li altri adunque saranno 42, 70 e 112.

Problema CCXVI.

Trovinsi tre numeri tali che del quadrato di qual si voglia di loro cavando over giongendo il composto loro faccia quadrato.

In ogni triangolo rettangolo se del quadrato del lato opposito al-l'angolo retto se ne cavara il quadruplo della sua superficie, overo se gli giongera, la somma o lo restante sarà numero quadrato; peròti tre qua. drati che si cercano saranno lati di tre Triangoli oppositi all'angolo retto. Adunque il composto delli tre numeri che si cercano sarà quattro volte la superficie de' Triangoli, avertendo ch'essi Triangoli habbiano una medesma superficie, quali si sono trovati nella passata di questo, e li suoi lati sono 40, 42, 58; 24, 70, 74; e 15, 112, 113. Hor tornando al principio pongo che li numeri che si cercano siano li lati più longhi delli tre Triangoli e siano $58^{\underline{1}}$, $74^{\underline{1}}$ e $113^{\underline{1}}$; la superficie de' Triangoli è 840, il quadruplo è 3360; però poneremo che la somma delli tre numeri sia $3360^{\underline{2}}$, ma essa è $245^{\underline{1}}$; però sarà eguale a $3360^{\underline{2}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 96; però li tre numeri cercati, che furno posti $58^{\underline{1}}$, $74^{\underline{1}}$ e $113^{\underline{1}}$, saranno $\frac{406}{96}$, $\frac{518}{96}$ e $\frac{791}{96}$.

Problema CCXVII.

Trovinsi tre numeri tali che moltiplicati a dui a dui facciano 4, 9 e 16, numeri quadrati.

Ponghisi il primo $1^{\underline{1}}$; il secondo 4 esimo d'$1^{\underline{1}}$ e il terzo 16 esimo d'$1^{\underline{1}}$ e sodisfanno a due conditioni, che il produtto del secondo nel primo fa 4 e [del primo] nel terzo fa 16; resta che il secondo nel terzo faccia 9, ma fa 64 esimo d'$1^{\underline{2}}$ et è eguale a 9, che levato il rotto e agguagliato, il Tanto vale $\frac{8}{3}$; però il primo numero sarà $\frac{8}{3}$, il secondo $1\frac{1}{2}$ e il terzo 6 e ne nasce la regola che il produtto delli dui partito per l'altro fa il quadrato d'un delli numeri.

Problema CCXVIII.

Trovinsi tre numeri tali che al produtto di dui di loro qual si voglia giongendo o cavando il composto di tutti tre faccia numero quadrato.

Di nuovo si cerchino tre Triangoli rettangoli pari di superficie che li lati loro oppositi all'angolo retto sono 58, 74 e 113 (come fu detto); piglinsi li quadrati loro, che sono 3364, 5476 e 12769 e così habbiamo trovato tre numeri che il produtto di dui qual si voglia fa quadrato, a ciascun delli quali giongendo over cavando 3360, ch'è quattro volte la superficie de' Triangoli, fa quadrato. Hor, per la regola della passata, trovaremo tre numeri che li produtti loro moltiplicati a dui a dui facciano 3364, 5476 e 12769, numeri quadrati, che si trovaranno partento il produtto di dui lati di questi quadrati per il lato dell'altro e saranno $\frac{4292}{113}$, $\frac{4181}{29}$ e $\frac{3277}{37}$. Hor ponghisi che ciascuno di questi numeri trovati sia $^{\underline{1}}$, che la somma loro sarà $\frac{32824806}{121249}{}^{\underline{1}}$ e deve essere $3360^{\underline{2}}$, cioè quattro volte la superficie de' triangoli, ponendo che i lati loro siano 1, che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{781543}{9699920}$ e il primo sarà $\frac{838595639}{274022740}$, il secondo $\frac{3267631283}{281297680}$ e il terzo $\frac{2561116411}{358897040}$, che fanno quanto si propone.

Problema CCXIX.

Faccisi dell'unita due parti tali che a ciascuna di loro aggionto 6 faccia numero quadrato. Bisogna avertire che il dato 6 non sia numero disparo e il suo doppio gionto con l'unita convien che faccia numero primo e perché a ciascuna delle parti che si cercano gionto 6 deve far quadrato, però la somma di detti dui numeri quadrati sarà 13. Convien dunque dividere 13 in dui numeri quadrati che ciascun di loro sia maggiore di 6 e per farlo piglisi la metà di 13, ch'è $6\frac{1}{2}$, e se a questo si giongerà un rotto minor d'$\frac{1}{2}$, tale che la somma sia numero quadrato, questo potrà essere un delli numeri cercati e per fuggir il rotto si moltiplichi $6\frac{1}{2}$ per 4, numero quadrato, e fa 26, e sia la parte che si ha da giongere 1 esimo d'1 che gionta con 26 fa $26^{\underline{2}} + 1$, esimo d'$1^{\underline{2}}$ e questo è eguale a un quadrato; levisi il rotto, perché e quadrato, che si haverà $26^{\underline{2}} + 1$ eguale a un quadrato, il cui lato sia $2\frac{1}{2}{}^{\underline{1}} + 1$, che esso quadrato sarà $6\frac{1}{4}{}^{\underline{2}} + 5^{\underline{1}} + 1$, che levato simile da simile e agguagliato, il Tanto valerà 20 e il numero che fu posto 1 esimo d'$1^{\underline{2}}$ sarà $\frac{1}{400}$, che gionto a $6\frac{1}{2}$ fa $\frac{2601}{400}$ ch'è quadrato e il suo lato è $\frac{51}{20}$ e perché il 13 e divisibile in 9 e 4, numeri quadrati, e tutti dui li lati delli quadrati che si cercano hanno ad essere appresso a $2\frac{11}{20}$, ponghisi che l'uno sia il lato del 4, cioè $2 + \frac{11}{20}{}^{\underline{1}}$, l'altro il lato del 9, cioè $3 - \frac{9}{20}{}^{\underline{1}}$, ch'è to restante da $\frac{11}{2}0$ sino all'unita che il composto delli quadrati loro, ch'è $\frac{101}{200}{}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}{}^{\underline{1}} + 13$è eguale a 13, che levato il meno, simile da simile e agguagliato, il Tanto valerà $\frac{100}{101}$; sarà dunque il lato dell'uno delli quadrati

$\frac{257}{101}$ e il lato dell'altro $\frac{258}{101}$, che cavato 6 dal quadrato di ciascuno resta $\frac{5358}{10201}$ e $\frac{4843}{10201}$ e queste sono le parti cercate.

Problema CCXX.

Dividasi l'unita in due parti tali che all'una gionto 2 e all'altra 6 le somme siano quadrate.

Se a 6 e 2 si gionge l'unita fa 9; però tutti dui li quadrati devono essere 9 e l'un di loro deve essere maggiore di 2 e minor di 3; sia adunque il primo $1^{\underline{2}}$; l'altro sarà $9 - 1^{\underline{2}}$ il qual $9 - 1^{\underline{2}}$ sarà eguale a un qua. drato che sia maggior di 2 e minor di 3; peròtrovinsi dui quadrati che siano maggiori di 2 e minori di 3 e per trovarli piglisi un numero mag. giore di 10 perché quanto maggior sarà tanto più facilmente si trovaranno e sia 12; i1 suo quadrato e 144, che moltiplicato per 2 fa 288 e il primo numero quadrato ch'è dopo 288 e 289; però $\frac{289}{144}$ sarà il quadrato maggiore di 2 e per trovare il minor di 3 e maggior di 2, cioè l'altro, moltiplichisi 144 per 3 fa 432; hor fra 289 e 432 si pigli un quadrato a beneplacito e sia 361, che $\frac{361}{144}$ sarà l'altro quadrato, che li loro lati sono $\frac{17}{12}$ e $\frac{19}{12}$. Hor, perché $9 - 1^{\underline{2}}$ è eguale a un quadrato, il quadrato deve esser tale che il Tanto vaglia più di $\frac{17}{12}$; e meno di 12; peròil lato di tal quadrato convien che sia 3, per scancellare il 9, meno un numero di$^{\underline{1}}$ tale che moltiplicato per 6 e diviso il produtto per il suo quadrato più 1, ne venga più di 12 e meno di 12 e sia il numero delli $^{\underline{1}}$ che si cerca $1^{\underline{1}}$; moltiplicato per 6 fa $6^{\underline{1}}$ e questo va partito per $1^{\underline{2}} + 1$; però bisogna che $1^{\underline{2}} + 1$ habbia maggior proportione con $6^{\underline{1}}$ che 17 con 12; adunque $72^{\underline{1}}$ hanno da esser maggiori di $17^{\underline{2}} + 17$ e faccisi l'agguagliatione che ne verrà R.q.$\frac{107}{289} + \frac{36}{17}$ e perché deve essere maggiore, piglisi il primo numero quadrato inanzi il $\frac{1007}{289}$, ch'è $\frac{961}{289}$; il suo lato è $\frac{31}{17}$ e che gionto con $\frac{36}{17}$ fa $\frac{67}{17}$ e questo è il numero delli $^{\underline{1}}$ da cavar di 3, che restara $3 - 6\frac{67}{17}$ e il suo quadrato è ${\frac{4489}{289}}^{\underline{2}} - {\frac{407}{17}}^{\underline{1}} + 9$ e questo è eguale a $9 - 1^{\underline{2}}$ che levato il meno, simile da simile e agguagliato, il Tanto valerà $\frac{3417}{2389}$ e questo sarà il lato d'uno delli quadrati, che il quadrato sarà $\frac{11675889}{5707321}$ e l'altro quadrato sarà lo restante sino a 9, cioè $\frac{39690000}{5707321}$ e di questo cavato 6 e del primo 2 restano le parti dell'unita che si cercano, cioè $\frac{5446074}{707321}$ e $\frac{261247}{5707321}$.

Problema CCXXI.

Dividasi l'unita in tre parti tali che a qual si voglia di loro gionto 3 faccia numero quadrato.

Bisogna avertire che il dato numero non sia 2 ne alcun numero che nasca da una o più volte l'8 gionto con il 2, perché si vede che li tre numeri quadrati gionti insieme devono far 10 et che ciascun di loro bisogna che sia più di 3; se si dividera 10 in tre parti pari ognuna di loro sarà $3\frac{1}{2}$ e di ciascuna si potra cavar 3 e se a $3\frac{1}{2}$ si giongerà una parte dell'unita tale che la somma sia quadrato quello potra essere uno delli quadrati cercati, ma bisogna ch'essa parte non arrivi a $\frac{2}{3}$ e per fuggir rotti moltiplichisi $3\frac{1}{2}$ per 9, numero quadrato, fa 30 e ponghisi che la particella qual si deve giongere a 30 sia 1 esimo d'$1^{\underline{2}}$, che gionto a 30 fa $30^{\underline{2}} + 1$, esimo d'1 e questo è eguale a un quadrato, il cui lato sia $5^{\underline{1}} + 1$, esimo d'$1^{\underline{1}}$, cioè $25^{\underline{2}} + 10^{\underline{1}} + 1$ esimo d'l$^{\underline{2}}$ che levato il rotto si haverà $30^{\underline{2}} + 1$ eguale a $25^{\underline{2}} + 10^{\underline{1}} + 1$, che levato simile da simile e agguagliato, il Tanto valerà 2; però$^{\underline{1}}$ esimo d'$1^{\underline{2}}$ sarà $\frac{1}{4}$, qual gionto a 30 fa $30\frac{1}{4}$ e partito per 9, col quale fu moltiplicato $3\frac{1}{3}$, ne viene $3\frac{13}{36}$, che il suo lato è $1\frac{5}{6}$; però ciascuno delli lati delli tre numeri quadrati sarà quasi $\frac{11}{6}$. Hor dividasi 10 in tre numeri quadrati come si voglia per poter far l'agguagliatione e siano 9, $\frac{16}{25}$ e $\frac{9}{25}$; li loro lati sono 3, $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{5}$ e per più facilità riduchisi l'$\frac{11}{6}$ a trentesimi per fuggir i1 rotto delli quinti, che saranno $\frac{55}{30}$. Hor ponghisi che il lato dell'uno delli quadrati sia $3 - \frac{35}{30}{}^{\underline{1}}$, perché si presupone che il Tanto habbia a valere 1, che $3 - \frac{35}{30}{}^{\underline{1}}$ sarà $\frac{11}{6}$; il lato dell'altro sia $31^{\underline{1}} + \frac{4}{5}$ e il lato del terzo $\frac{37}{30}{}^{\underline{1}} + \frac{3}{5}$; li quadrati loro gionti insieme saranno $\frac{3555}{900}{}^{\underline{2}} - \frac{116}{30}{}^{\underline{1}} + 10$, che questo è eguale a 10, perché li tre quadrati gionti insieme devono far 10, onde levato simile da simile, il meno e agguagliato, il Tanto valerà $\frac{232}{237}$ e però li lati delli tre quadrati saranno $\frac{1321}{721}$, $\frac{1285}{721}$ e $\frac{1288}{721}$, che di ciascuno delli quadrati loro cavato 3 restara $\frac{134662}{505521}$, $\frac{124662}{505521}$ e $\frac{142381}{505521}$ e queste le parti sono dell'unita domandate.

Problema CCXXII.

Dividasi l'unita in tre parti tali che alla prima gionto 2, alla seconda 3 e alla terza 4 le somme siano quadrate.

Di nuovo li tre numeri quadrati gionti insieme saranno 10; però bisogna dividere 10 in tre quadrati tali che il primo sia maggior di 2, il secondo di 3 e il terzo di 4. Dividasi la unità per mezzo e la metà si aggionghi al 2, fa $2\frac{1}{2}$; però il primo numero quadrato deve essere maggiore di 2 e minor di $2\frac{1}{2}$ e gli altri due devono essere lo restante sino a 10 e perché 10 e divisibile in 9 e 1, numeri quadrati, ridividasi di nuovo in dui altri quadrati cosi: piglisi il lato di 9 e 1, ch'è 3 e 1 e il lato del primo si ponga essere $1^{\underline{1}}$ più il lato del minore, cioè + 1 e il lato dell'altro si ponga essere $10^{\underline{1}} - 3$, lato del quadrato maggiore e li $10^{\underline{1}}$ sono la somma di tutti dui essi numeri quadrati; li loro quadrati saranno $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$ e $100^{\underline{2}} - 60^{\underline{1}} + 9$, gionti insieme fanno $101^{\underline{2}} - 58^{\underline{1}} + 10$ e questo è eguale a 10, che levato 10 da ogni parte e agguagliato, il Tanto valerà $\frac{58}{101}$ e però il lato del primo quadrato, che fu posto $1^{\underline{1}} + 1$, sarà $\frac{159}{101}$ e il quadrato $\frac{25281}{10201}$ e questo è il quadrato, ch'è minore di $2\frac{1}{2}$ e maggior di 2, che cavatone 2 resta $\frac{4879}{10201}$ per una parte dell'unita. Hor bisogna di nuovo dividere lo restante di 10, ch'è $\frac{76729}{10201}$ in dui numeri quadrati tali che l'uno sia più di 3 e meno di $3\frac{1}{2}$, che (per la 221 di questo) ponghisi il lato d'un di detti quadrati essere $1^{\underline{1}}$ e il lato dell'altro $\frac{277}{101} - \frac{270}{101}^{\underline{1}}$; i quadrati loro sono $1^{\underline{2}}$ e $\frac{72900}{10201}^{\underline{2}} - \frac{149580}{10201}^{\underline{1}} + \frac{76729}{10201}$ che gionti insieme la somma sarà eguale a $\frac{76729}{10201}$, che levato simile da simile e il meno haveremo fatta l'agguagliatione, che il Tanto vale $\frac{149580}{83101}$ e tanto sarà il lato dell'un quadrato e egli sarà $\frac{22374176400}{6905776201}$ che cavatone 3 resta $\frac{1656847797}{6905776201}$ per la seconda parte dell'unita, che lo restante cavatone questa seconda e la prima sarà la terza parte dell'unita, cioè $\frac{19851036564525}{70445823026401}$ alla qual gionto 4 fa $\frac{301634328670129}{70445823026401}$ ch'è numero quadrato (come si vuole), il lato del quale è $\frac{17367623}{8393201}$.

Problema CCXXIII.

Trovami tre numeri over quantità tali che il secondo sia due volte quanto il primo più 4 e il terzo sia il produtto del primo nel secondo e che sommati tutti tre insieme faccino quanto il primo moltiplicato per 15.

Ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$ secondo sarà $2^{\underline{1}} + 4$ e il terzo il produtto di questi due, cioè $2^{\underline{1}} + 4^{\underline{1}}$; il composto loro e $2^{\underline{2}} + 7^{\underline{1}} + 4$ e questo è eguale al produtto del primo moltiplicato per 15, cioè a $15^{\underline{1}}$, che cavato $7^{\underline{1}}$ da ogni parte e ridutto a $1^{\underline{2}}$ haveremo $1^{\underline{2}} + 2$ eguale a $4^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà $2 +$ R.q.2 overo $2 -$ R.q.2; però il primo numero, che fu posto $1^{\underline{1}}$, sarà $2 +$ R.q.2 overo $2 -$ R.q.2, ch'essendo $2 +$ R.q.2, il secondo, ch'è il suo doppio più 4, sarà $8 +$ R.q.8 e il terzo, ch'è il produtto delli dui primi, sarà $20 +$ R.q.288, che il composto loro e $30 +$ R.q.450, ch'è eguale al produtto del primo moltiplicato per 15. Ma essendo il primo $2 -$ R.q.2, il secondo sarà $8 -$ R.q.8 e il terzo $20 -$ R.q.288.

Problema CCXXIIII.

Trovisi un numero tale che giontoli la sua quarta parte e della sornma cavatone 24 e al restante giontoli la sua quarta parte e della comma cavato 24 e al restante gionto la sua quarta parte e della somma cavato 24 e al restante gionto la sua quarta parte e della somma cavato 24 resti nulla.

Ponghisi che il numero cercato sia $1^{\underline{1}}$, che giontoli la sua quarta parte e della somma cavato 24 resta $1\frac{1}{4}^{\underline{1}} - 24$ e a questo gionto la sua quarta parte, ch'è $\frac{5}{16}^{\underline{1}} - 6$, fa $1\frac{9}{16}^{\underline{1}} - 30$, che cavatone 24 resta $1\frac{9}{16}^{\underline{1}} - 54$ e a questo gionto la sua quarta parte, ch'è $\frac{25}{64}^{\underline{1}} - 13\frac{1}{2}$, fa $1\frac{61}{64}^{\underline{1}} - 67\frac{1}{2}$, che cavatone 24 resta $1\frac{61}{64}^{\underline{1}} - 91\frac{1}{2}$ e a questo gionto la sua quarta parte, ch'è $\frac{125}{256}^{\underline{1}} - 22\frac{7}{8}$, fa $2\frac{113}{256}^{\underline{1}}$ $- 114\frac{3}{8}$, che cavatone 24 resta $2\frac{113}{256}^{\underline{1}} - 138\frac{3}{8}$ e questo è eguale a 0, che levato il meno $2\frac{113}{256}^{\underline{1}}$ sono eguali a $138\frac{3}{8}$, che agguagliato, il Tanto valerà $56\frac{424}{625}$ e questo è il numero che si cercava.

Problema CCXXV.

Dividasi 10 in tre numeri tali che accoppiati a dui a dui faccino numero quadrato.

Perche ogni dui delli tre numeri che si cercano gionti insieme fanno un quadrato, essi tre quadrati saranno 20; bisogna dunque dividere 20 in tre quadrati tali che ciascun di loro sia minor di 10 e se si ponera che l'uno sia 4, converrà poi dividere 16 in due quadrati tali che ciascun di loro sia minor di 10. Ponghisi che l'uno sia $1^{\underline{2}}$; l'altro sarà $16 - 1^{\underline{2}}$ e questo è eguale a un quadrato, il lato del quale sia $4 - \frac{21}{8}^{\underline{1}}$, li quali $\frac{21}{8}$ si trovano come insegna la 201 di questo, e il quadrato sarà $16 - \frac{168}{8} + \frac{441}{64}^{\underline{2}}$ eguale a $16 - 1^{\underline{2}}$ che levato il meno, simile da simile e agguagliato, il Tanto valerà $\frac{1344}{505}$; peròil primo quadrato sarà $\frac{1806336}{255025}$ quale cavato di 16 resta $\frac{2274064}{255025}$ e quest'è l'altro quadrato. Hora bisogna trovar li tre numeri che gionti a dui a dui faccino li sopradetti tre quadrati, che si trovaranno in questo modo: gionghinsi questi tre quadrati a dui a dui insieme e della somma se ne cavi il quadrato che resta e delli tre restanti se ne pigli la metà di ciascuno di essi, quali sono 6 e $\frac{276191}{255025}$ e $\frac{743909}{255025}$ e sono li tre numeri nelli quali si divide il 10.

Problema CCXXVI.

Dividasi 10 in quattro numeri tali che accompagnati a tre a tre faccino numero quadrato.

Perche li numeri che si cercano vanno accompagnati a tre a tre ogni numero viene a essere compreso tre volte nelli numeri quadrati; però tutti quattro li numeri quadrati saranno 30, di modo che bisogna dividere 30 in quattro quadrati tali che ciascun di loro sia minor di 10 e sia il primo 9 e il secondo 4, che resta 17 per gli altri due, qual 17, perch'è divisibile in 1 e 16, numeri quadrati i lati dei quali sono 1 e 4, ponghisi che il lato dell'uno sia $1^{\underline{1}} + 1$ e il lato dell'altro quadrato $4 - 3\frac{2}{3}^{\underline{1}}$, che li quadrati loro sono $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$ e $16 - \frac{88}{3}^{\underline{1}} + \frac{121}{9}^{\underline{2}}$ che gionti insieme fanno $17 + \frac{130}{9}^{\underline{2}} - \frac{82}{3}^{\underline{1}}$ ch'è eguale a 17; però levisi 17 da ogni parte e il meno, che si haverà $\frac{130}{9}^{\underline{2}}$ eguale a $\frac{82}{3}^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{123}{65}$; però li lati delli dui quadrati, che si posero $1^{\underline{1}} + 1$ e $4 - 3\frac{2}{3}^{\underline{1}}$, saranno $\frac{189}{65}$ e $\frac{191}{65}$ e li quadrati saranno $\frac{35344}{4225}$ e $\frac{36481}{4225}$. Ci resta hora a trovare li quattro numeri che accompagnati a tre a tre faccino li quattro quadrati trovati, li quali si trovaranno cavando ciascuno delli quattro quadrati di 10, che li quattro restanti, quali sono 6, 1, $\frac{6906}{}$ e $\frac{5769}{4225}$, sono li quattro numeri nelli quali si divide il 10.

Problema CCXXVII.

Trovinsi dui numeri quadrati tali che del primo cavatone il suo lato è allo restante gionto 12 faccia tanto quanto il secondo gionto col lato del primo e che del secondo cavatone il suo lato è allo restante gionto 6 faccia tanto quanto il primo gionto col lato del secondo.

Ponghisi che il secondo sia $1^{\underline{2}}$, che cavatone il suo lato è giontoli 6 fa $1^{\underline{2}} - 1^{\underline{1}} + 6$ e tanto bisogna che sia il primo ricevuto che egli haverà il lato del secondo; peròesso primo viene a essere da se $1^{\underline{2}} + - 2^{\underline{1}} + 6$, il quale, dato il suo lato al secondo e al suo restante gionto 12, il primo sarà $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 18 - \text{R.q.}\llcorner 1 - 2^{\underline{1}} + 6\lrcorner$ e il secondo sarà $1^{\underline{2}} + \text{R.q.}\llcorner 1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 6\lrcorner$ e queste due quantita devono essere eguali fra loro; peròper agguagliare levisi il meno dalle parti e si haverà $1 + 18$ eguale a $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + \text{R.q.}\llcorner 4^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}}\ 4 - 24\lrcorner$, che levato $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ per parte si haverà $18 - 2^{\underline{1}}$ eguale a $\text{R.q.}\llcorner 4^{\underline{2}} - 5^{\underline{1}} + 24\lrcorner$, che quadrando ciascuna parte $4^{\underline{2}} - 72^{\underline{1}} + 324$ sarà eguale a $4^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 24$, che levato il meno e simile da simile si haverà $64^{\underline{1}}$ eguale a 300, che agguagliato, il Tanto valerà $4\frac{11}{16}$; peròil secondo numero, che fu posto $1^{\underline{2}}$ sarà $21\frac{249}{256}$ e il primo, ch'era $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 6$, sarà $18\frac{153}{256}$, che volendo solverla senza far positione faccisi cosi. Moltiplichisi 6, un delli numeri dati, per 4 per regola, fa 24 e si cavi del quadrato della somma delli dui numeri dati, resta 300; poi si moltiplichi la somma delli numeri dati sempre per 4 per regola e del produtto se ne cavi 8 per regola, resta 64 col quale si parta il 300; ne viene 4 quadrato del quale è $21\frac{249}{256}$ e questo è il secondo numero, e per trovar il primo a questo trovato si gionghi 6, numero dato e della somma si cavi $9\frac{3}{8}$, doppio di $4\frac{11}{16}$ lato del secondo: resta $18\frac{153}{256}$ e questo è il primo numero.

Problema CCXXVIII.

Trovisi un numero over quantita tale che giontoli la sua quarta parte e della somma cavato 24 e allo restante giontoli similmente la sua quarta parte e cavatone un numero alla proportion del primo resti 100.

Ponghisi che tal numero sia $1^{\underline{1}}$, che giontoli il suo quarto e cavatone 24 fa $1\frac{1}{4}^{\underline{1}} - 24$ e a questo giontoli il suo quarto fa $1\frac{9}{16}^{\underline{1}} - 30$ e per sapere quanto se ne deve cavare dichisi: se quando era $1^{\underline{1}}$ si cavò 24, che si cavara essendo $1\frac{1}{4}^{\underline{1}} - 24$, che moltiplicato e partito si vedra che se ne deve cavare $30^{\underline{1}} - 576$, esimo d'$1^{\underline{1}}$, quale cavato di $1\frac{9}{16}^{\underline{1}} - 30$, resta $1\frac{9}{16}^{\underline{2}} + 576 - 60^{\underline{1}}$, esimo d'$1^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 100 che deve restare; però levisi il rotto, il meno et riduchisi a $1^{\underline{2}}$ che si haverà $1^{\underline{2}} + 368\frac{16}{25}$ eguale a $102\frac{2}{5}^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà $51\frac{1}{5} + \text{R.q.}2252\frac{4}{5}$ e questo è il numero che si cerca.

Problema CCXXIX.

Trovinsi tre quantita in continua proportione tali che la seconda sia maggiore della prima il lato d'essa prima più 2 e la terza sia 120.

Ponghisi che la prima sia $1^{\underline{2}}$; la seconda sarà $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}} + 2$ e per trovar la terza partasi il quadrato della seconda per la prima, ne viene $1^{\underline{4}} + 2^{\underline{3}} + 5^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$, esimo d'1 e questo è eguale a 120, perché la terza quantita deve essere 120; però levato il rotto si haverà $1^{\underline{4}} + 2^{\underline{3}} + 5^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} + 4$ eguale a $120^{\underline{2}}$ e tolto il lato di ciascuna parte $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}} + 2$ sarà eguale a $\text{R.q.}120^{\underline{1}}$, che levato $1^{\underline{1}}$ per parte si haverà $1^{\underline{2}} + 2$ eguale a $\text{R.q.}120^{\underline{1}} - 1^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà $\text{R.q.}30 - \frac{1}{2} + \text{R.q.}\llcorner 28\frac{1}{4} - \text{R.q.}30\lrcorner$ e perché la prima quantità fu posta 1 quadrisi la valuta del Tanto fa $58^{\underline{2}} - \text{R.q.}120 + \text{R.q.}\llcorner 3418\frac{1}{4} - \text{R.q.}16426801$ e quest'è la prima quantità, quale moltiplicata via 120, ch'è la terza, e del produtto tolto il lato, ne viene $\text{R.q.}\llcorner 1755 - \text{R.q.}108000 + \text{R.q.}\llcorner 3076425 - \text{R.q.}83160675000\lrcorner\lrcorner$ e tanto è la seconda.

Problema CCXXX.

Trovisi un numero over quantità tale che giontoli i suoi due lati più 1 e alla somma ancora giontoli il suo lato più 2 faccia 120.

Ponghisi che il numero che si cerca sia 1 che il suo lato è $1^{\underline{1}}$ e li dui suoi lati più 1 sono $2^{\underline{1}} + 1$, che gionti a $1^{\underline{2}}$ fa $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$, il lato del quale e $1^{\underline{1}} + 1$, al quale gionto 2 fa $1^{\underline{1}} + 3$ e questo gionto con $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$ fa $1 + 3^{\underline{1}} + 4$ e questo è eguale a 120, che levato 4 da ogni parte si haverà $1^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}}$ eguale a 116, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$118\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2}$ e la potenza $120\frac{1}{2}$ − R.q.$1064\frac{1}{4}$; però il numero che si cerca, qual fu posto $1^{\underline{2}}$, sarà $120\frac{1}{2}$ − R.q.$1064\frac{1}{4}$.

Problema CCXXXI.

Trovinsi dui numeri over quantità tali che dando il secondo al primo il doppio del suo lato il primo doventi doppio al rimanente del secondo et il secondo ricevendo dal primo tal parte qual egli ha data a esso primo, esso sia sei volte quanto il rimanente del primo.

Ponghisi che il secondo sia $1^{\underline{2}}$, che dato che haverà il doppio del suo lato al primo restara $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}}$ e perché il primo e doppio a questo rimanente sarà $2 - 4^{\underline{1}}$; però cavatone $2^{\underline{1}}$ che riceve dal secondo resta $2^{\underline{2}} - 6^{\underline{1}}$ e questo è il primo numero e per sapere quanto deve dare al secondo dicasi: se $1^{\underline{2}}$ da $2^{\underline{1}}$ che dara $2^{\underline{2}} - 6^{\underline{1}}$? Dara $4^{\underline{1}} + - 12$, quale cavato del primo resta $2^{\underline{2}} - 10^{\underline{1}} + 12$ e gionto al secondo fa $1^{\underline{2}} + 4^{\underline{1}} - 12$ e questo è eguale a sei volte il rimanente del primo, cioè a 12 I. $- 60^{\underline{1}} + 72$, che levato il meno, simile da simile e ridutto a $1^{\underline{2}}$ si haverà $1^{\underline{2}} + 7$ li eguale a 5 $s^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà 3 li e la potenza 14121; però il primo numero, ch'era $2^{\underline{2}} - 6^{\underline{1}}$, sarà $6^{\underline{1}}21$ e il secondo, quale fu posto essere $1^{\underline{2}}$, sarà $14\frac{70}{121}$ che fanno quanto si propone.

Problema CCXXXII.

Trovinsi tre numeri tali che al cubo del composto loro giontovi qual si voglia di loro faccia numero cubo.

Ponghisi che il composto loro sia $1^{\underline{1}}$; il suo cubo è $1^{\underline{3}}$ e ponghisi che li tre numeri siano $7^{\underline{3}}$, $26^{\underline{3}}$ e $63^{\underline{3}}$ acciochè gionto $1^{\underline{3}}$ a qual si voglia di loro faccino numero cubo; resta che il composto loro sia $1^{\underline{1}}$ ma è $96^{\underline{3}}$: però sono eguali a $1^{\underline{1}}$, che se il 96 fusse numero quadrato ne verria numero rationale; ma il 96 nasce dal composto di tre cubi cavatone 3, però bisogna trovare tre numeri cubi tali che del composto loro cavatone 3 resti quadrato e per trovarli ponghisi che il lato del primo sia $1^{\underline{1}} + 1$, del secondo $2 - 1^{\underline{1}}$ e del terzo 2; li loro cubi sono $1^{\underline{3}} + 3^{\underline{2}} + 3^{\underline{1}} + 1$ e $8 - 12^{\underline{1}} + 6^{\underline{2}} - 1^{\underline{3}}$ e 8, che del composto loro cavato 3 resta $9^{\underline{2}} + 14 - 9^{\underline{1}}$ e questo è eguale a un quadrato, il lato del quale sia $3^{\underline{1}} - 4$, che il quadrato è $9^{\underline{2}} - 24^{\underline{1}} + 16$, che levato il meno, simile da simile e agguagliato, il Tanto valerà $\frac{2}{15}$ però il lato del primo cubo, che si pose $1^{\underline{1}} + 1$, sarà lato del secondo, che si pose $2 - 1^{\underline{1}}$, sarà $\frac{28}{15}$ e il lato del terzo sarà 2 (come si pose), che di ciascuno delli loro cubi cavato 1 resta $\frac{1538}{3375}$, $\frac{18577}{3375}$ e 7; hor ponghisi che li tre numeri che si cercano siano $\frac{1538}{3375}^{\underline{3}}$, $\frac{18577}{3375}^{\underline{3}}$, e $7^{\underline{3}}$, che a ciascun di loro gionto $1^{\underline{3}}$, cubato del composto loro, fa numero cubo; resta che il cornposto loro sia $1^{\underline{1}}$, ma è $\frac{2916}{225}^{\underline{3}}$; però è eguale a $1^{\underline{1}}$,che agguagliato il Tanto vale $\frac{5}{18}$; però li tre numeri, che furno posti $\frac{1538}{3375}^{\underline{3}}$, $\frac{18577}{3375}^{\underline{3}}$, e $7^{\underline{3}}$, saranno $\frac{1538}{157664}$, $\frac{18577}{157464}$ e $\frac{23625}{157464}$, che il loro composto è $\frac{5}{18}$, il suo cubo $\frac{125}{5832}$, che gionto a qual si voglia di loro fa numero cubo.

Problema CCXXXIII.

Trovinsi tre numeri tali che del cubo del composto loro cavatone qual si voglia di loro resti numero cubo.

Ponghisi che il composto di questi tre numeri sia $1^{\underline{1}}$; il suo cubo è $1^{\underline{3}}$ e ponghisi che li tre numeri siano $\frac{7}{8}^{\underline{3}}$, $\frac{26}{27}^{\underline{1}}$ e $\frac{63}{64}^{\underline{3}}$, che cavato qual si voglia di loro d'$1^{\underline{3}}$ resta cubo. Bisogna hora che il composto loro sia $1^{\underline{1}}$, ma è $\frac{4877}{1728}^{\underline{3}}$: però è eguale a $1^{\underline{1}}$, che per non essere $\frac{48}{1728}$ numero quadrato non ne può venire numero rationale, ma esso nasce dal cavare $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{64}$, numeri cubi, d'$1^{\underline{3}}$ e sommare li restanti insieme; bisogna dunque trovare tre numeri cubi tali che ciascun di loro cavato d'1 e li restanti sommati insieme faccino numero quadrato e per farlo bisogna trovare tre numeri di $^{\underline{1}}$ minori dell'unita che habbino la qualità cercata e per trovarli moltiplichisi l'unita per un numero cubo che habbia molte parti e sia 216, che sarà $\frac{216}{216}$, del quale se ne cavi un numero quadrato e sia $\frac{1}{4}$: resta 162, lassando il denominator del rotto, il qual 162 bisogna vedere se e divisibile in tre numeri cubi. Se si pone che l'uno sia 125 ci resta 37, quale e divisibile in dui numeri cubi, per essere restante fra 64 e 27, numeri cubi, e per dividere il detto 37 in dui numeri cubi faccisi cosi: ponghisi che i1 lato d'un delli cubi sia $1^{\underline{1}} - 3$; il suo cubato e $1^{\underline{3}} - 9^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}} - 27$; il lato dell'altro bisogna che sia 4 meno tanti$^{\underline{1}}$ che nel cubare ne venga $- 27^{\underline{1}}$ per scancellare li $27^{\underline{1}}$ che sono nel cubo passato, e si trovano cosi: cubisi $4 - 1^{\underline{1}}$, fa $64 - 48^{\underline{1}} + 12^{\underline{2}} - 1^{\underline{3}}$. Il $27^{\underline{1}}$ si parte per $48^{\underline{1}}$ ne viene $\frac{9}{16}$ e questo è il numero delli $^{\underline{1}}$ che si deve cavare di 4, che resta $4 - \frac{9}{16}^{\underline{1}}$, che il suo cubo è $64 - 27^{\underline{1}} + \frac{243}{64}^{\underline{2}} - \frac{729}{4096}^{\underline{3}}$ che gionto con l'altro cubo fa $37 + \frac{3367}{4096}^{\underline{3}} - \frac{333}{64}^{\underline{2}}$ e questo è eguale a 37, che levato simile da simile, il meno e schifato si haverà $\frac{3367}{4096}^{\underline{1}}$ eguale a $\frac{333}{64}$, che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{21312}{3367}$ e il lato d'uno delli cubi, che fu posto $1^{\underline{1}} - 3$, sarà $\frac{11211}{3367}$ e il lato dell'altro, che fu posto $4 - \frac{9}{16}^{\underline{1}}$, sarà $\frac{1480}{3367}$ e cubi saranno $\frac{1409071586931}{38170631863}$ e $\frac{3241792000}{38170631863}$, che gionti insieme fanno 37 e questo gionto con l'altro cubo, ch'è 125, fa 162 (come si vuole) e questi tre cubi sono 216 esimi, che cavati di 3 resta $2\frac{1}{4}$, ch'è numero quadrato come si cercava; però, perché essi cubi sono 216 esimi, partansi per 216: ne viene $\frac{1409071586931}{8244856482408}$, $\frac{3241792000}{8244856482408}$ e $\frac{125}{216}$, i quali cavati a uno a uno dell'unita resta $\frac{8241614690408}{8244856482408}$ e $\frac{6835784895477}{8244856482408}$ e $\frac{91}{216}$. Hora tornando al principio, ponghisi che li tre numeri che si cercano siano questi ultimamente detti, ma siano $^{\underline{3}}$, che ciascun di loro cavato d'$1^{\underline{3}}$ che si pone che sia il cubo del composto loro, resta numero cubo; ci resta hora che il composto loro sia $1^{\underline{1}}$ (come si pone) ma e $2\frac{1}{4}^{\underline{3}}$: però è eguale a $1^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto vale $\frac{2}{3}$ e tanto sarà il composto delli numeri che si cercano e il suo cubato sarà $\frac{8}{27}$ e li tre numeri saranno $\frac{8241614690408}{278263911878127}$ e $\frac{6835784895477}{278263911878127}$ e $\frac{91}{729}$, che cavato qual si voglia di loro d'$\frac{8}{27}$ resta numero cubo.

Problema CCXXXIIIli.

Trovinsi tre numeri tali che di qual si voglia di loro cavato il cubo del composto loro resti numero cubo.

Ponghisi che tutti tre insieme siano $1^{\underline{1}}$; il suo cubo è $1^{\underline{3}}$; ponghisi poi che li tre numeri siano $2^{\underline{3}}$, $9^{\underline{3}}$ e $28^{\underline{3}}$ acciochè di ciascun di loro cavato $1^{\underline{3}}$ resti cubo. Resta solo che tutti tre insieme siano 1 ma sono $39^{\underline{3}}$; però $39^{\underline{3}}$ sono eguali a $1^{\underline{1}}$, che l'agguagliatione non si può fare per numero rationale, per non essere il 39 numero quadrato; però bisogna trovar tre numeri cubi tali che a ciascun di loro gionto l'unita e sommati poi insieme faccino numero quadrato e ponghisi che il lato del primo cubo sia $1^{\underline{1}}$, del secondo $3 - 1^{\underline{1}}$ per il qual 3 si potea ancor pigliare un altro numero, pur che fusse la terza parte d'un numero quadrato; il lato dell'altro cubo sia un numero come si voglia e sia 1; li cubi saranno $1^{\underline{3}}$, $27 - 27^{\underline{1}} + 9^{\underline{2}} - 1^{\underline{3}}$ e 1, che il composto loro insieme con tre unità e $9^{\underline{2}} - 27^{\underline{1}} + 31$ e questo è eguale a un quadrato, il lato del quale sia $3^{\underline{1}} - 7$, che il quadrato sarà $9^{\underline{2}} - 42^{\underline{1}} + 49$, che agguagliato con $9^{\underline{2}} - 27^{\underline{1}} + 31$, levando prima simile da simile e il meno, il Tanto valerà $\frac{6}{5}$; però li lati delli cubi, che si sono posti $1^{\underline{1}}$, $3 - 1^{\underline{1}}$ e 1, saranno $\frac{6}{5}$, $\frac{9}{5}$ e 1 e li cubi sono $\frac{216}{125}$, $\frac{729}{125}$ e 1, quali gionti insieme con 3 fanno numero quadrato; però ponghisi di nuovo che li tre cubi siano $\frac{216}{125}^{\underline{3}}$, $\frac{729}{125}^{\underline{3}}$ e $1^{\underline{3}}$, a ciascun delli quali gionto $1^{\underline{3}}$ -16 e sommati insieme fanno $\frac{1445}{125}^{\underline{3}}$ e questo è eguale a $1^{\underline{1}}$, che schifato si haverà $\frac{289}{25}^{\underline{2}}$ eguale a 1, overo $\frac{17}{5}^{\underline{1}}$ eguale a 1, che agguagliato, il Tanto valerà $\frac{5}{17}$ e questo è il composto delli tre numeri cercati e il suo cubo è $\frac{125}{4913}$ e li lati delli tre cubi saranno $\frac{6}{17}$, $\frac{9}{17}$ e $\frac{5}{17}$, che al cubo di ciascun di loro gionto il detto $\frac{125}{4913}$ fanno $\frac{341}{4913}$, $\frac{854}{4913}$ e $\frac{250}{4913}$ e questi Sono tre numeri cercati.

Problema CCXXXV.

Trovinsi tre numeri tali che il composto loro sia quadrato e che il cubo di esso loro composto insieme con qual si voglia di loro faccia numero quadrato.

Ponghisi che il composto delli tre numeri sia $1^{\underline{2}}$ e li tre numeri siano $3^{\underline{6}}$, $8^{\underline{5}}$ e $15^{\underline{6}}$ acciochè il cubo del lor composto, che saria $1^{\underline{6}}$, gionto con qual si voglia di loro faccia quadrato; resta hora che il lor composto sia $1^{\underline{2}}$, ma e $26^{\underline{6}}$, che, schifato, $26^{\underline{4}}$ sono eguali a 1, che se 26 fusse numero quadroquadrato si potria far l'agguagliatione. Però bisogna trovar tre numeri tali che a ciascun di loro gionto 1 faccia quadrato e che la somma loro sia quadroquadrato e per trovarli ponghisi che l'uno delli numeri sia $1^{\underline{4}} - 2^{\underline{2}}$, l'altro $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ e l'altro $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}}$, che a ciascun di questi gionto 1 fa quadrato e gionti insieme fanno $1^{\underline{1}}$, ch'è quadroquadrato e questo è eguale a qual si vogli numero quadroquadrato e sia 81, che agguagliato, il Tanto valerà 3 e però il primo, che fu posto $1^{\underline{4}} - 2$ sarà 63; il secondo, che fu posto $1^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}}$ sarà 15 e il terzo, che fu posto $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}}$, sarà 3 e notisi che il numero quadroquadrato che si ha da pigliare conviene che sia maggiore di 16. E tornando al principio ponghisi che il primo numero sia $63^{\underline{6}}$, il secondo $15^{\underline{6}}$ e il terzo $3^{\underline{6}}$, che gionti insieme fanno $81^{\underline{3}}$ e hanno da fare $1^{\underline{2}}$: però $81^{\underline{3}}$sono eguali a $1^{\underline{2}}$, che schifato e agguagliato, il Tanto valerà $\frac{1}{3}$ e il $^{\underline{6}}$ valerà $\frac{1}{729}$; però li numeri che si cercano saranno $\frac{21}{243}$, $\frac{5}{243}$ e $\frac{1}{243}$, che il composto loro è $\frac{1}{9}$, ch'è numero quadrato, al quale gionto, cioè al suo cubo, ch'è $\frac{1}{729}$, qual si voglia delli tre numeri fa $\frac{64}{729}$, $\frac{16}{729}$ e $\frac{4}{729}$, che ciascun di loro e numero quadrato.

Problema CCXXXVI.

Trovinsi tre numeri tali che il composto loro sia quadrato e che del cubo di detto lor composto cavatone qual si voglia di loro resti quadrato.

Ponghisi che il composto delli tre numeri sia $1^{\underline{2}}$ e che l'uno delli numeri sia ${\frac{3}{4}}^{\underline{6}}$, l'altro ${\frac{8}{9}}^{\underline{6}}$ e il terzo ${\frac{15}{16}}^{\underline{6}}$ acciochè cavato qual si voglia di loro d'$1^{\underline{6}}$, cubo del composto loro, resti quadrato; i quali numeri gionti insieme fanno ${\frac{371}{144}}^{\underline{6}}$ e questo è eguale a $1^{\underline{2}}$ che fu posto il composto loro, che se il $\frac{371}{144}$ fusse numero quadroquadrato della agguagliatione ne verria numero rationale; però bisogna trovare tre numeri tali che ciascun di loro cavato d'1 resti quadrato e che la somma loro sia quadroquadrato e per trovarli ponghisi che la somma di tutti tre sia 1, acciochè sia quadroquadrato; convien dunque di necessità che la somma delli tre numeri quadrati sia 2 acciochè ciascun di loro cavato d'1 e li restanti sommati insieme faccino 1; bisogna dunque dividere 2 in tre numeri quadrati tali che ciascun di loro sia meno d'1, che per la 222 di questo essi saranno $\frac{2025}{4225}$, $\frac{16}{25}$ e $\frac{3721}{4225}$, che cavato d'1 ciascun di loro resta $\frac{2200}{4225}$, $\frac{9}{25}$ e $\frac{504}{4225}$; peròponghisi che li tre numeri da trovarsi siano $\frac{2200}{4225}\underline{6}$, $\frac{9}{25}\underline{6}$ e $\frac{504}{4225}\underline{6}$ che qual si voglia di loro cavato del cubo d'$1\underline{2}$ che si è posto essere il composto loro, resta quadrato (come si vuole). Ci rimane solo che il lor composto sia $1\underline{2}$, ma è $1\underline{6}$ che agguagliato, il Tanto vale 1; peròli numeri cercati sono li medesimi che si sono posti, cioè $\frac{2200}{4225}$, $\frac{9}{25}$ e $\frac{504}{4225}$.

Problema CCXXXVII.

Dividasi $\frac{1}{4}$ in tre parti tali che di ciascuna di loro cavato $\frac{1}{64}$, cubo di detto $\frac{1}{4}$, resti numero quadrato.
Perchè il cubo d'$\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{64}$ bisogna fare d'$\frac{1}{4}$ tre parti tali che di ciascuna cavato $\frac{1}{64}$ resti quadrato e perché le tre parti sono $\frac{16}{64}$, che cavatone tre volte $\frac{1}{64}$ resta però bisogna dividere $\frac{13}{64}$ in tre numeri quadrati, che per la 222 di questo saranno $\frac{81}{1600}$, $\frac{144}{1600}$ e $\frac{100}{1600}$, che a ciascun di loro gionto $\frac{1}{64}$ fanno $\frac{106}{1600}$, $\frac{169}{1600}$ e $\frac{125}{1600}$ e queste sono le parti addomandate d'$\frac{1}{4}$.

Problema CCXXXVIII.

Dividasi $\frac{1}{4}$ in tre parti tali che a ciascuna di loro gionto $\frac{1}{64}$, cubo di detto $\frac{1}{4}$, faccia numero quadrato.

Perchè ci bisogna fare di $\frac{1}{4}$ tre parti [tali] che a ciascuna di loro gionto $\frac{1}{64}$ faccia numero quadrato e perché le tre parti sono $\frac{16}{64}$, che giontoli tre volte $\frac{1}{64}$ fa $\frac{19}{64}$, però bisogna dividere $\frac{19}{64}$ in tre numeri quadrati, che, per la 222 di questo, saranno $\frac{2601}{18496}$, $\frac{1521}{18496}$ e $\frac{1369}{18496}$, che di ciascuno di loro cavato $\frac{1}{64}$ resta $\frac{2312}{18496}$, $\frac{1232}{18496}$ e $\frac{1080}{18496}$ e queste sono le tre parti cercate, che gionte insieme fanno $\frac{1}{4}$ e a ciascuna di loro aggionto $\frac{1}{64}$ fanno numero quadrato (come si vuole).

Problema CCXXXIX.

Dividasi $\frac{1}{4}$ in quattro parti tali che a ciascuna di loro gionto $\frac{1}{64}$, cubo di detto $\frac{1}{4}$, faccia numero quadrato.

Perchè ci bisogna fare d'$\frac{1}{4}$ quattro parti che a ciascuna di loro gionto $\frac{1}{64}$ faccia numero quadrato e perché le parti sono $\frac{16}{64}$, che giontoli quattro volte $\frac{1}{64}$ fa $\frac{20}{64}$, però bisogna dividere $\frac{20}{64}$ in quattro numeri quadrati, che, seguendosi la regola del problema già detto intorno a tale operatione, saranno $\frac{2500}{40000}$, $\frac{3600}{40000}$, $\frac{4096}{40000}$ e $\frac{2304}{40000}$ che di ciascun di loro cavato $\frac{1}{64}$ resta $\frac{1875}{40000}$, $\frac{2975}{40000}$, $\frac{3471}{40000}$ e $\frac{1679}{40000}$ e queste sono le parti cercate, che gionte insieme fanno $\frac{1}{4}$ et a ciascuna di loro gionto $\frac{1}{64}$ fa numero quadrato.

Dividasi $\frac{1}{4}$ in cinque parti tali che a ciascuna di loro gionto $\frac{1}{64}$, cubo di detto $\frac{1}{4}$, faccia numero quadrato.

Perchè le cinque parti che si hanno a fare sono $\frac{16}{64}$, che a ciascuna di loro gionto $\frac{1}{64}$ sono in tutto $\frac{21}{64}$, bisogna dividere esso $\frac{21}{64}$ in cinque numeri quadrati, ma tali che ciascun di loro sia maggiore d'$\frac{1}{64}$ che se n'ha da cavare, che (per la 222 di questo) essi sono, cioè potranno essere $\frac{42614784}{739840000}$, $\frac{75759616}{739840000}$, $\frac{66585600}{739840000}$, $\frac{19360000}{739840000}$ e $\frac{38440000}{739840000}$, che di ciascun di loro cavato $\frac{1}{64}$ restaranno le cinque parti che si cercano, che gionte insieme fanno $\frac{1}{4}$ e saranno $\frac{485231}{11560000}$, $\frac{1003119}{11560000}$, $\frac{859775}{11560000}$, $\frac{121875}{11560000}$ e $\frac{420000}{11560000}$.

Problema CCXL.

Trovisi un binomio tale che al suo cubato giontoli il suo doppio la somma sia un binomio primo.

Ponghisi che la quantità che si cerca sia $1^{\underline{1}}$ che il suo cubato è $1^{\underline{3}}$ quale gionto a $2^{\underline{1}}$, suo doppio, fa $1^{\underline{3}} + 2^{\underline{1}}$ e questo è eguale a una quantità quadrata, poniamo a $4^{\underline{1}}$ perché il primo binomio e quantità quadrata, che schifato si haverà $1^{\underline{2}} + 2$ eguale a $4^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto vale $2 +$ R.q.2 e questa è la quantità che si cerca, che il suo cubato e $20 +$ R.q.392 e il suo doppio e

4 + R.q.8, che gionti insieme fanno 24 + R.q.512, ch'è binomio primo (come si vuole).

Problema CCXLI.

Trovinsi dui numeri over quantità tali che il primo sia quanto la somma del secondo gionto con li suoi sei lati e che il primo sia quanto il produtto del suo lato moltiplicato per 3.

Ponghisi che il secondo sia $1^{\underline{1}}$; li suoi sei lati sono $6^{\underline{1}}$: peròil primo sarà $1^{\underline{1}} + 6^{\underline{1}}$, che il suo lato è R.q.$\llcorner 1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}} \lrcorner$, che moltiplicato per 3 fa R.q.$\llcorner 9^{\underline{2}} + 54^{\underline{1}} \lrcorner$ e questo è eguale al detto $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}}$, che quadrando ciascuna parte per levar la R.q. legata, si haverà $9^{\underline{2}} + 54^{\underline{1}}$ eguale a $1^{\underline{4}} + 12^{\underline{2}} + 36^{\underline{2}}$, che levato $9^{\underline{2}}$ da ogni parte e schifato, si haverà $1^{\underline{3}} + 12^{\underline{2}} + 27^{\underline{1}}$ eguale a 54, che per agguagliare piglisi il terzo delle potenze, ch'è 4, e moltiplichisi via il tutto, fa 48 del quale cavato 27, numero delli $^{\underline{1}}$, resta 21, qual 21 sono $^{\underline{1}}$ e si salva; poi questo 21 si moltiplica per 4, terzo delle $^{\underline{2}}$, fa 84 quale si cavi di 118, somma di 64, cubato del terzo del numero delle $^{\underline{2}}$, gionto con il numero, ch'è 54; resta 34 che gionto con li $21^{\underline{1}}$ serbati fa $21^{\underline{1}} + 34$ e questo è eguale a $1^{\underline{3}}$, che gionto 8 a ciascuna parte fa $1^{\underline{3}} + 8$ eguale a $21^{\underline{1}} + 42$, che partita ciascuna parte per $1^{\underline{1}} + 2$ ne viene $1^{\underline{2}} - 2^{\underline{1}} + 4$ eguale a 21, che levato il meno e il 4 si haverà $1^{\underline{2}}$ eguale a $2^{\underline{1}} + 17$, che agguagliato, il Tanto vale R.q.18 + 1, dal quale cavato 4, terzo delle$^{\underline{2}}$ di prima, resta R.q.18 − 3 e questa è la vera valuta del Tanto; però il secondo numero, che fu posto $1^{\underline{2}}$, sarà il quadrato di R.q.18 − 3, cioè 27 − R.q.648 e il primo, che fu posto $1^{\underline{2}} + 6^{\underline{1}}$, sarà 9, che il suo lato è 3, quale moltiplicato per 3 fa 9, cioè esso primo numero (come si vuole).

Problema CCXLII.

Faccisi di 24 tre parti in continua proportione tali che la somma delli quadrati loro sia tanto quanto il cubato della seconda parte moltiplicato per 8.

Ponghisi che la seconda parte sia $1^{\underline{1}}$; l'altre insieme saranno $24 - 1^{\underline{1}}$ e per trovarle separatamente faccisi di $24 - 1^{\underline{1}}$ due parti tali che il loro produtto sia 1 cioè il quadrato della seconda parte, che (per la 49 di questo) saranno esse due parti, che sono l'una la prima e l'altra la terza delle proportionali, $12 - \frac{1}{2}^{1} - \text{R.q.}\llcorner 144 - 12^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{2}\lrcorner$ e $12 - \frac{1}{2}^{1} + \text{R.q.}\llcorner 144 - 12^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{2}\lrcorner$, che li quadrati di esse sono $288 - 24^{\underline{1}} - \frac{1}{2}^{2} - \text{R.q.}\llcorner 82944 - 13824^{\underline{1}} + 288^{\underline{2}} - 288^{\underline{3}} - \frac{3}{4}^{4}\lrcorner$ e $288 - 24^{\underline{1}} - \frac{1}{2}^{2} + \text{R.q.}\llcorner 82944 - 13824^{\underline{1}} + 288^{\underline{2}} - 288^{\underline{3}} - \frac{3}{4}^{4}\lrcorner$, che sommati insieme con $1^{\underline{2}}$, quadrato della seconda parte, la somma e $576 - 48^{\underline{1}}$ e questo è eguale a $8^{\underline{3}}$, produtto del cubo della seconda moltiplicato per 8, che ridutto a $1^{\underline{3}}$ e agguagliato che haveremo $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{1}}$ a 72, il Tanto valerà $\text{R.c.}\llcorner\text{R.q.}1304 + 36\lrcorner - \text{R.c.}\llcorner\text{R.q.}1304 - 36\lrcorner$ e tanto è la seconda delle tre parti in continua proportione, che fu posta $1^{\underline{1}}$, e per trovar la terza, che fu posta $12 - \frac{1}{2}^{1} + \text{R.q.}\llcorner 144 - 12^{\underline{1}} - \frac{3}{4}^{2}\lrcorner$ vedasi quanto vale la R.q. legata cosi. Si veda prima quanto vagliono le $-\frac{3}{4}^{2}$, che vagliono $\text{R.c.}\llcorner 1096\frac{7}{8} + \text{R.q.}1203123\frac{3}{8}\lrcorner + \text{R.c.}\llcorner 1096\frac{7}{8} - \text{R.q.}1203123\frac{3}{8}\lrcorner - 3$ e li $-12^{\underline{1}}$ vagliono $\text{R.c.}\llcorner\text{R.q.}60839424 + 7776\lrcorner - \text{R.c.}\llcorner\text{R.q.}60839424 - 7776\lrcorner$ che gionta con la valuta di $-\frac{3}{4}^{2}$ e la somma cavata del 144 numero della R.q. legata, resta $147 + \text{R.c.}\llcorner\text{R.q.}60839424 - 7776\lrcorner - \text{R.c.}\llcorner\text{R.q.}60839424 + 7776\lrcorner + - \text{R.c.}\llcorner 1096\frac{7}{8} + \text{R.q.}1203123\frac{3}{8}\lrcorner - \text{R.c.}\llcorner 1096\frac{7}{8} - \text{R.q.}1203123\frac{3}{8}\lrcorner$ e il lato, cioè la R.q. legata di tutto questo composto e la valuta della nostra R.q. legata, la quale gionta e cavata alla valuta di $12 - \frac{1}{2}^{1}$ ch'è $12 + \text{R.c.}\llcorner\text{R.q.}20\frac{3}{8} - 4\frac{1}{2}\lrcorner - \text{R.c.}\llcorner\text{R.q.}20\frac{3}{8} + 4\frac{1}{2}\lrcorner$, (per. che l'una parte e $12 - \frac{1}{2}^{1}$ più la R.q. legata e l'altra e $12 - \frac{1}{2}^{1}$ meno la R.q. legata) farà Faltre due parti, che la terza sarà $12 + \text{R.c.}\llcorner\text{R.q.}20\frac{3}{8} - 4\frac{1}{2}\lrcorner - \text{R.c.}\llcorner\text{R.q.}20\frac{3}{8} + 4\frac{1}{2}\lrcorner + \text{R.q.}\llcorner 147 + \text{R.c.}\llcorner\text{R.q.}60839424 - 7776\lrcorner - \text{R.c.}\llcorner\text{R.q.}60839424 + 7776\lrcorner - \text{R.c.}\llcorner 1096\frac{7}{8} + \text{R.q.}1203123\frac{3}{8}\lrcorner - \text{R.c.}\llcorner 1096\frac{7}{8} - \text{R.q.}1203123\frac{3}{8}\lrcorner\lrcorner$ e la prima $12 + \text{R.c.}\llcorner\text{R.q.}20\frac{3}{8} - 4\frac{1}{2}\lrcorner - \text{R.c.}\llcorner\text{R.q.}20\frac{3}{8} + 4\frac{1}{2}\lrcorner - \text{R.q.}\llcorner 147 + \text{R.c.}\llcorner\text{R.q.}60839424 - 7776\lrcorner - \text{R.c.}\llcorner\text{R.q.}60839424 + 7776\lrcorner - \text{R.c.}\llcorner 1096\frac{7}{8} + \text{R.q.}1203123\frac{3}{8}\lrcorner - \text{R.c.}\llcorner 1096\frac{7}{8} - \text{R.q.}1203123\frac{3}{8}\lrcorner\lrcorner$ che fanno quanto si propone.

Problema CCXLIII.

Faccisi di 10 due parti tali che li loro quadrati cavati di 100 e 95 e li lati delli restanti gionti insieme facciano 16.

Ponghisi che una parte sia $5 + 1^{\underline{1}}$ e l'altra $5 - 1^{\underline{1}}$ loro quadrati sono $25 + 10^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$ e $25 - 10^{\underline{1}} + 1^{\underline{2}}$ che cavato halo di 100 e l'altro di 95 (e non importa qual si cavi di 100, ma presuposto che se ne cavi il maggiore e il minore si cavi di 95) resta $75 - 10^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}}$ e $70 + 10^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}}$, che tolto il lato di ciascuno haveremo R.q.$\llcorner 75 - 10^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}}\lrcorner$ e R.q.$\llcorner 70 + 10^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}}\lrcorner$, perché non havendo proportione come da quadrato a quadrato non si possono sommare se non con il più e questo compostoè eguale a 16, che per far l'agguagliatione levisi una delle due R.q. legate qual si voglia da ciascuna delle parti, e levando per hora la prima restarà R.q.$\llcorner 70 + 10^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}}\lrcorner$ eguale a $16 -$ R.q,$\llcorner 75 - 10^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}}\lrcorner$; quadrisi ciascuna parte e si haverà $70 + 10^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}}$ eguale a $331 - 10^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}} -$ R.q.$\llcorner 76800 - 10240^{\underline{1}} - 1024^{\underline{2}}\lrcorner$; aggiongasi hora a ciascuna parte la sopradetta R.q. legata, che si haverà $70 + 10^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}} +$ R.q.$\llcorner 76800 - 10240^{\underline{1}} - 1024^{\underline{2}}\lrcorner$ eguale a $331 - 10^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}}$; levisi a ciascuna parte $70 + 10^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}}$ resta la R.q. legata eguale a $261 - 20^{\underline{1}}$; hor quadrisi ciascuna parte e sihaverà $76800 - 10240^{\underline{1}} - 10241^{\underline{2}}$ eguale a $68121 + 10440^{\underline{1}} + 400^{\underline{2}}$, che aggionto $1024^{\underline{2}}$ a ciascuna parte e cavatone 68121 resta $8679 - 10240^{\underline{1}}$ eguale a $1424^{\underline{2}} - 10440^{\underline{1}}$ che levato il meno a ciascuna parte si haverà $8679 + 200^{\underline{1}}$ eguale a $1424^{\underline{2}}$, che agguagliato, il Tanto vale R.q.$6\frac{892}{7921} + \frac{25}{356}$ e perché la parte maggiore fu posta $5 + 1^{\underline{1}}$, aggiongasegli 5, fa $5\frac{25}{356} +$ R.q.$6\frac{892}{7921}$ e questa è la parte maggiore; l'altra sarà il resto sino a 10, cioè $4\frac{331}{356} -$ R.q.$6\frac{892}{7921}$.

Problema CCXLIIII.

Trovisi un numero che cavatone 4 e del restante cavatone alla medesima proportione e del restantecavatone similmente alla medesima proportione, lo restante sia la metà del numero che si cerca.

Ponghisi che il numero cercato sia $1^{\underline{1}}$, che cavatone 4 resta $1^{\underline{1}} - 4$ et per saper quanto restara la seconda volta dichisi: se $1^{\underline{2}}$ torna $1^{\underline{1}} - 4$, che tornarà

$1^{\underline{2}} - 4$ che si vede che tornarà $1^{\underline{2}} - - 8^{\underline{1}} + 16$, esimo d'$1^{\underline{1}}$ et per saper quanto tornarà la terza volta dicasi similmente: se $1^{\underline{1}}$ torna $1^{\underline{1}} - 4$, che tornarà $1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 16$, esimo d'$1^{\underline{1}}$? che tornarà $1^{\underline{3}} - 12^{\underline{2}} + 48^{\underline{1}} - 64$, esimo d'$1^{\underline{2}}$ e questo è eguale a $\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, cioè alla metà del numero che si cerca, che levato il rotto si haverà $1^{\underline{3}} - 12^{\underline{2}} + 48^{\underline{2}} - 64$ eguale a $\frac{1}{2}^{\underline{3}}$; piglisi il lato cubo di ciascuna parte si haverà $1^{\underline{1}} - 4$ eguale a R.c.$\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ che levato il meno e R.c. $2^{\underline{1}}$ da ciascuna parte si haverà $1^{\underline{1}} -$ R.c.$\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ eguale a 4, che per partire il numero per li Tanti bisogna trovare il suo binomio (come si insegno nel primo libro) ch'è $1 +$ R.c.$\frac{1}{2}$ + R.c.$\frac{1}{4}$, quale moltiplicato per $1 -$ R.c.$\frac{1}{2}$ fa $\frac{1}{2}$ e moltiplicato per 4 fa 4 + R.c. 32 + R.c. 16, il quale partito per $\frac{1}{2}$ ne viene 8 + R.c. 256 + R.c. 128 e questa è la valuta del Tanto et è il numero che si cerca.

Problema CCXLV.

Trovisi un numero tale che cavatone 4 e del restante cavatone alla medesima proportione e del restantecavatone alla medesima proportione e del restante cavatone similmente alla medesima proportione resti la metà d'esso numero.

Ponghisi che questo numero sia $1^{\underline{1}}$; cavatone 4 resta $1^{\underline{1}} - 4$ et cavatone alla medesma proportione resta $1^{\underline{2}} - 8^{\underline{1}} + 16$ esimo d'1 (come nel quesito passato) e cavatone ancora alla medesima proportione resta pur (come nel passato quesito) $1^{\underline{3}} - 12 + 48^{\underline{1}} - 64$ esimo d'$1^{\underline{2}}$ e per saper quanto tornarà l'ultima volta dichisi: se 1 resta $1^{\underline{1}} - 4$, che restara $1^{\underline{3}} - 12^{\underline{2}} + 48^{\underline{1}} - 64$ esimo d'l$^{\underline{2}}$ $^{\underline{2}}$ che verrà a restare $1^{\underline{4}} - 16^{\underline{3}} + 96^{\underline{2}} - 256^{\underline{1}} + 256$ esimo d'$1^{\underline{3}}$ e questo è eguale a $\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, che levato il rotto e tolto il lato quadroquadrato di ciascuna parte si haverà $1^{\underline{1}} - 4$ eguale a RR.q.$\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, che levato il meno e RR.q.$\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ da ciascuna parte si haverà $1^{\underline{1}} -$ RR.q.$\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ eguale a 4, che per far la partitione bisogna trovare il residuo quadroquadrato delli Tanti, ch'è 1 + RR.q.$\frac{1}{2}$ + RR.q.$\frac{1}{4}$ + RR.q.$\frac{1}{8}$, che moltiplicato via 1 − RR.q.$\frac{1}{2}$ + fa $\frac{1}{2}$ e moltiplicato per 4 fa 4 + RR.q.128 + RR.q.64 + RR.q.32, il quale partito per $\frac{1}{2}$ ne viene 8 + RR.q.2048 + RR.q.1024 + RR.q.512 e questa è la valuta del Tanto e peròe il numero che si cerca. E da questi dui problemi ne nasce la regola in simili, ch'è questa. Piglisi il lato della parte del numero che rimane, il qual lato sia di tal sorte qual'e il numero de' termini, cioè se sono 2 si pigli quadrato, se 3 cubo, se 4 quadroquadrato etc. e esso lato si cavi sempre d'1 per regola e col restante si parta il numero che si cava la prima volta, cioè il numero dato e l'avenimento sarà il numero che si cerca.

Problema CCXLVI.

Trovisi un numero over quantita, alla quale gionto 8 e alla somma gionta la medesima proportione e anco alla somma gionta la medesima proportione faccia 16 volte quanto detto numero.

Ponghisi che il numero che si cerca sia $1^{\underline{1}}$, che giontoli 8 fa $1^{\underline{1}} + 8$; per saper quanto sarà la seconda somma dichisi: se $1^{\underline{1}}$torna $1^{\underline{1}} + 8$, che tornarà $1^{\underline{1}} + 8^{\underline{2}}$ che tornarà $1^{\underline{2}} + 16^{\underline{1}} + 64$, esimo d'$1^{\underline{1}}$ e per trovar l'altra somma dichisi: se $1^{\underline{1}}$torna $1^{\underline{1}} + 8$, che tornarà $1^{\underline{2}} + 16^{\underline{1}} + 64$ esimo d'$1^{\underline{1}}$? che si vedra che torna $1^{\underline{3}} + 24^{\underline{2}} + 192^{\underline{1}} + 512$, esimo d'$1^{\underline{2}}$ e questo è eguale a $16^{\underline{1}}$, che levato il rotto e tolto il lato cubico di ciascuna parte si haverà $1^{\underline{1}} + 8$ eguale a R.c.$16^{\underline{1}}$, che levato $1^{\underline{1}}$da ogni parte si haverà R.c. $16^{\underline{1}} - 1^{\underline{1}}$ eguale a 8, che per partire il numero per li Tanti bisogna trovare il binomio delli Tanti, ch'è 1 + R.c.16 + R.c.256, che moltiplicato per R.c.16 − 1 fa 15 e moltiplicato per 8 fa 8 + R.c.131072 + R.c.8192, il quale partito per 15 ne viene $\frac{8}{15}$ + R.c.$38\frac{2822}{3375}$ + R.c.$2\frac{1442}{3375}$ e questa è la valuta del Tanto et è il numero domandato perché fu posto essere $1^{\underline{1}}$.

Problema CCXLVII.

Trovinsi tre numeri in continua proportione tali che la somma del secondo e terzo partita per il primo e la somma del terzo e primo partita per il secondo e la somma del primo e secondo partita per il terzo e li tre avenimenti gionti insieme faccino 22.

Perche la proposta non ci lega a numero alcuno determinato, ponghisi che il primo sia un numero a beneplacito e sia 1; il secondo sia $1^{\underline{1}}$ e il terzo di necessità sarà 1 che partito il secondo e terzo per il primo ne viene $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$; diviso il primo e terzo per il secondo ne viene $1^{\underline{2}} + 1$, esimo d'l$^{\underline{1}}$ et diviso il primo e secondo per il terzo ne viene $1^{\underline{1}} + 1$, esimo d'$1^{\underline{2}}$ e questi avenimenti gionti insieme fanno $1^{\underline{4}} + 2^{\underline{3}} + 2^{\underline{1}} + 1$, esimo d'l$^{\underline{2}}$ e questo è eguale a 22, che levato il rotto si haverà $1^{\underline{4}} + 2^{\underline{3}} + 2^{\underline{1}} + 1$ eguale a 22 che gionto a ciascuna parte $3^{\underline{2}}$ e tolto il lato di ciascuna si haverà $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}} + 1$ eguale a $5^{\underline{1}}$, che levato $1^{\underline{1}}$ da ciascuna parte si haverà $1^{\underline{2}} + 1$ eguale a 4 che agguagliato, il Tanto valerà 2 + R.q.3 et questo sarà il secondo numero, che si pose $1^{\underline{1}}$; il terzo, che si pose $1^{\underline{2}}$, sarà 7 + R.q.48 e il primo sarà 1 (come si pose).

Problema CCXLVIII.

Faccisi di 25 tre parti in continua proportione tali che la somma della prima e seconda partita per la terza, la somma della seconda e terza partita per la prima e la somma della prima e terza partita per la seconda e li tre avenimenti gionti insieme faccino 22.

Per la positione fatta nella passata si è trovato le tre quantità in continua proportione con le conditioni dette, che fanno 22. Però ponghisi che le tre parti che si cercano siano le trovate nella passata, ma siano Tanti, cioè la prima sia $1^{\underline{1}}$, la seconda $2^{\underline{1}}$ + R.q.$3^{\underline{1}}$ e la terza $7^{\underline{1}}$ + R.q.$48^{\underline{1}}$; resta che la somma loro sia 25, ma e $10^{\underline{1}}$ + R.q.$75^{\underline{1}}$; però questoè eguale a 25, che agguagliato, il Tanto vale 10 − R.q.75; peròla prima parte, che fu posta $1^{\underline{1}}$, sarà 10 − R.q.75, la seconda, che fu posta $2^{\underline{1}}$ + R.q.$3^{\underline{1}}$ sarà 5 e la terza, che fu posta $7^{\underline{1}}$ + R.q.$48^{\underline{1}}$, sarà 10 + R.q.75, che la somma loro e 25 (come si vuole).

Problema CCXLIX.

Trovinsi tre quantità in continua proportione tali che il produtto del terzo in tutti tre sia 25 e che la somma del primo e terzo partita per il secondo e la somma del primo e secondo partita per il terzo e la somma del secondo e terzo partita per il primo e li tre avenimenti gionti insieme faccino 22.

Perche sappiamo per le proposte passate che li tre numeri in continua proportione che habbiano la ultima condition detta sono 1, 2 + R.q.3 e 7 + R.q.48, dunque poneremo che delli numeri che si cercano il primo sia $1^{\underline{1}}$, il secondo $2^{\underline{1}}$ + R.q.$3^{\underline{1}}$ et il terzo sia $7^{\underline{1}}$ + R.q.$48^{\underline{1}}$; la somma loro e $10^{\underline{1}}$ + R.q.$75^{\underline{1}}$, quale moltiplicata per il terzo, ch'è $7^{\underline{1}}$ + R.q.$48^{\underline{1}}$, fa 130 + R.q.$16875^{\underline{2}}$ e questo è eguale a 25, che tolto il lato di ciascuna parte si haverà R.q.$67\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ + R.q.$62\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ eguale a 5, che agguagliato, il Tanto vale R.q.$67\frac{1}{2}$ − R.q.$62\frac{1}{2}$; però il primo numero, che fu posto $1^{\underline{1}}$, sarà R.q.$67\frac{1}{2}$ − R.q.$62\frac{1}{2}$, il secondo, che fu posto $2^{\underline{1}}$ + R.q.$3^{\underline{1}}$, sarà R.q.270 + R.q.$202\frac{1}{2}$ − R.q.250 − R.q.$187\frac{1}{2}$ et il terzo, che fu posto $7^{\underline{1}}$ + R.q.$48^{\underline{1}}$, sarà R.q.$3307\frac{1}{2}$ + R.q.3240 − R.q.$3062\frac{1}{2}$ − R.q.3000.

Problema CCL.

Trovinsi tre numeri in continua proportione tali che tolti a dui a dui e partiti per l'altro li tre avenimenti gionti insieme faccino 13 e che il produtto del terzo nelli altri dui insieme con il primo faccia 20.

Ponghisi che il primo numero sia 1, il secondo $1^{\underline{1}}$ e il terzo 1 acciochè siano in continua proportione, che diviso il secondo e terzo per il primo ne viene $1^{\underline{2}}$ + $1^{\underline{2}}$ e diviso il terzo e primo per il secondo ne viene $1^{\underline{2}}$ + 1, esimo d'$1^{\underline{1}}$ e diviso il primo e secondo per il terzo ne viene $1^{\underline{1}}$ + 1, esimo d'$1^{\underline{2}}$ e questi avenimenti gionti insieme fanno $1^{\underline{4}}$ + $2^{\underline{3}}$ + $2^{\underline{1}}$ + 1, esimo d'1 e questo è eguale a 13, che levato il rotto, gionto 3 a ciascuna parte e poi toltone il lato si haverà $1^{\underline{2}}$ + $1^{\underline{1}}$ + 1 eguale a $4^{\underline{1}}$, che levato $1^{\underline{1}}$ per parte et agguagliato, il Tanto vale $1\frac{1}{2}$ + R.q.$1\frac{1}{4}$ e però il secondo numero, che si pose $1^{\underline{1}}$, sarà $1\frac{1}{2}$ + R.q.$1\frac{1}{4}$, il terzo, che fu posto $1^{\underline{2}}$, sarà $3\frac{1}{2}$ + R.q.$11\frac{1}{4}$ et il primo sarà 1 (come si pose). Hor facciasi un'altra positione e ponghisi che il primo delli numeri che si cerca sia $1^{\underline{1}}$, secondo $1\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ + R.q.$1\frac{1}{4}^{\underline{1}}$ e il terzo $3\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ + R.q.$11\frac{1}{4}^{\underline{1}}$ che gionti li dui primi insieme fanno $2\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ + R.q.$1\frac{1}{4}^{\underline{1}}$ e questo moltiplicato per il terzo fa $12\frac{1}{2}^{\underline{2}}$ + R.q.$151\frac{1}{4}^{\underline{2}}$ al quale gionto il primo, ch'è $1^{\underline{1}}$, fa $12\frac{1}{22}^{\underline{2}}$ + R.q.$151\frac{1}{4}^{\underline{2}}$ + $1^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 20 che ridutto a $1^{\underline{2}}$ si haverà $1^{\underline{2}}$ + $2\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ − R.q.$6\frac{1}{20}^{\underline{1}}$ eguale a 50 − R.q.2420, che agguagliato (giongendo al numero $3\frac{3}{40}$ − R.q $9\frac{29}{64}$, quadrato della metà delli Tanti) fa $53\frac{3}{40}$ − R.q.$2731\frac{61}{64}$ e la R.q. legata di questo meno il dimezzamento delli Tanti, cioè R.q.⌞$53\frac{3}{40}$ − R.q.$2731\frac{61}{64}$⌟ − $1\frac{1}{4}$ + R.q.$1\frac{41}{80}$, sarà la valuta del Tanto e tanto sarà il primo numero, che si pose essere $1^{\underline{1}}$.

Problema CCLI.

Trovinsi tre numeri over quantità in continua proportione tali che partito la somma di ciascun delli dui per l'altro e li tre avenimenti gionti insieme faccino 9 + e che il cubo del primo sia quanto il produtto del secondo moltiplicato via 1 più del terzo.

Ponghisi che il primo numero sia 1, il secondo $1^{\underline{1}}$ et il terzo $1^{\underline{2}}$ acciochè siano proportionali, che partito la somma di ciascun delli dui per l'altro e li tre avenimenti gionti insieme fanno (come nella passata) $1^{\underline{4}}$ + $2^{\underline{3}}$ + $2^{\underline{1}}$ + 1 esimo d'$1^{\underline{2}}$ et questoè eguale a $9\frac{1}{4}$, che levato il rotto gionto $3^{\underline{2}}$ a ogni parte e poi tolto il lato di ciascuna si haverà $1^{\underline{2}}$ + $1^{\underline{1}}$ + 1 eguale a $3\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, che levato $1^{\underline{1}}$ da ogni parte et agguagliato, il Tanto vale 2; peròil secondo numero, che si pose $1^{\underline{1}}$, sarà 2, il terzo, che si pose $1^{\underline{2}}$, sarà 4 et il primo, che si pose 1, sarà 1. Hor ponghisi di nuovo che li tre numeri che si cercano siano $1^{\underline{1}}$, $2^{\underline{1}}$ e $4^{\underline{1}}$, che il cubo del primo è $1^{\underline{3}}$ et è eguale al produtto del secondo moltiplicato via 1 più del terzo, cioè a $8^{\underline{2}}$ + $2^{\underline{1}}$ che, schifato, si haverà 1 eguale a $8^{\underline{2}}$ + 2, che agguagliato, il Tanto vale R.q.18 + 4; peròil primo numero sarà R.q.18 + 4; il secondo R.q.72 + 8 e il terzo R.q.288 + 16.

Problema CCLII.

Trovinsi tre numeri over quantità in continua proportione tali che partito la somma di ciascuno delli dui per l'altro e li tre avenimenti gionti insieme faccino $9\frac{1}{4}$ e che il cubo del primo sia quanto il produtto del secondo moltiplicato via 1 più del terzo e che il solido fatto da essi tre numeri sia 32.

Ponghisi che li numeri che si cercano siano li tre del Problema pas. Sato, acciochè habbino le prime conditioni dette, cioè ponghisi che il primo sia R.q.$18^{\underline{1}} + 4^{\underline{1}}$, il secondo R.q.$72^{\underline{1}} + 8^{\underline{1}}$ et il terzo R.q.$288^{\underline{1}} + 16^{\underline{1}}$, che sono in continua proportione e partito ciascun delli due per l'altro e li tre avenimenti gionti insieme fanno $9\frac{1}{4}$ (come si vuole); resta che il solido loro sia 32, ma e $2240^{\underline{3}}$ + R.q.$5018112^{\underline{3}}$: peròè eguale a 32, che partito il numero, cioè 32, per li cubi ne viene R.q.19602 − 140, che il suo lato cubico, cioè R.c.$\llcorner$R.q.19602 − 140$\lrcorner$, e la valuta del Tanto, la quale moltiplicata per ciascun delli tre numeri posti di sopra, ne verranno li tre numeri domandati.

Problema CCLIII.

Trovinsi tre numeri in continua proportione tali che partito la somma di ciascuno delli dui per l'altro e li tre avenimenti gionti insieme faccino $9\frac{1}{4}$ e che il solido fatto da essi tre numeri sia numero quadrato.

Prima trovinsi tre numeri in continua proportione che partiti a dui a dui per l'altro e li avenimenti gionti insieme faccino $9\frac{1}{4}$, che per la regola sua sono 1, 2 e 4. Hor ponghisi che delli tre numeri che si cercano, il primo sia $1^{\underline{1}}$, il secondo $2^{\underline{1}}$ et il terzo 41, che il solido loro e 8 e questo è eguale a un quadrato come si voglia, poniamo a $16^{\underline{2}}$, che agguagliato, il Tanto vale 2; però il primo numero, che fu posto $1^{\underline{1}}$, sarà 2, il secondo, ch'era $2^{\underline{1}}$, sarà 4 et il terzo, che fu posto $4^{\underline{1}}$, sarà 8, che il solido loro è 64 (come si vuole) ch'è numero quadrato.

Problema CCLIIII.

Trovinsi tre numeri over quantità in continua proportione tali che partito la somma di ciascuno delli dui per l'altro e li tre avenimenti gionti insieme faccino $9\frac{1}{4}$ e che il solido loro gionto con il produtto del primo moltiplicato via 48 faccia 64.

Ponghisi che li tre numeri che si cercano siano (come nella passata) $1^{\underline{1}}$, $2^{\underline{1}}$ et $4^{\underline{1}}$, acciochè habbiano le prime conditioni dette, che il solido loro e $8^{\underline{3}}$, il quale gionto con $48^{\underline{1}}$, produtto del primo moltiplicato per 48, fa $8^{\underline{3}} + 48^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 64, che ridutto a $1^{\underline{3}}$ si haverà $1^{\underline{3}} + 6^{\underline{1}}$ eguale a 8, che per agguagliare aggionghisi il cubato del terzo delli Tanti, ch'è 8, con il quadrato della metà del numero, ch'è 16, fa 24, che il suo lato è R.q.24 e questo si gionga con 4, metà del numero, fa R.q.24 + 4, che il suo lato cubico e R.c.⌞R.q.24 + 4⌟, del qual binomio si cava il suo residuo: resta R.c.⌞R.q.24 + 41 + − R.c.⌞R.q.24 − 4⌟ e questa è la valuta del Tanto; però il primo numero, ch'era $1^{\underline{1}}$, sarà R.c.⌞R.q.24 + 4⌟ − R.c.⌞R.q.24 − 4⌟; il secondo, ch'era $2^{\underline{1}}$, sarà R.c.⌞R.q.1536 + 32⌟ −R.c.⌞R.q.1536 + − 32⌟ et il terzo, ch'era $4^{\underline{1}}$, sarà R.c.⌞R.q. 98304 + 2561− R.c.⌞R.q. 98304 − 256⌟.

Problema CCLV.

Trovinsi cinque numeri over quantita in continua proportione tali che la somma di ciascuno delli quattro partita per l'altro e li cinque avenimenti gionti insieme faccino 836.

Ponghisi che il minore sia 1 (perché non si dando la quantità delli cinque numeri nè la conditione della proportione che deve essere fra loro il primo si può ponere un numero come si voglia), il secondo $1^{\underline{1}}$; il terzo di necessità sarà $1^{\underline{2}}$, il quarto $1^{\underline{3}}$ a et il quinto $1^{\underline{4}}$ che a partire li quattro ultimi per il primo ne viene $1^{\underline{4}} + 1^{\underline{3}} + 1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$ et a partire li altri quattro per il secondo ne viene $1^{\underline{4}} + 1^{\underline{3}} + 1^{\underline{2}} + 1$, esimo d'$1^{\underline{1}}$ e a partire li altri quattro per il terzo ne viene $1^{\underline{4}} + 1^{\underline{3}} + 1^{\underline{2}} + 1$, esimo d'$1^{\underline{1}}$ e a partire li altri quattro per il quarto ne viene $1^{\underline{4}} + 1^{\underline{2}} +1^{\underline{1}} + 1$, esimo d'$1^{\underline{3}}$ e a partire li altri quattro per il quinto ne viene $1^{\underline{3}} + 1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}} + 1$, esimo d'1 che questi avenimenti gionti insieme fanno $1^{\underline{8}} + 2^{\underline{7}} + 3^{\underline{6}} + 4^{\underline{5}} + 4^{\underline{3}} + 3^{\underline{2}} + 2^{\underline{2}} + 1$, esimo d'$1^{\underline{4}}$ e questo è eguale a 836, che levato il rotto si haveral $1^{\underline{8}} + 2^{\underline{7}} + 3^{\underline{6}} + 4^{\underline{5}} + 4^{\underline{3}} + 3^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$ egualea $836^{\underline{4}}$ e se a ciascuna parte si giongerà $5^{\underline{4}}$ si haverà $1^{\underline{8}} + 2^{\underline{7}} + 3^{\underline{6}} + 4^{\underline{5}} + 5^{\underline{4}} + 4^{\underline{3}} + 3^{\underline{2}} + 2^{\underline{1}} + 1$ eguale a $841^{\underline{4}}$, che ciascuno di loro ha lato, che l'uno sarà $1^{\underline{4}} + 1^{\underline{3}} + 1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}} + 1$ e l'altro $29^{\underline{2}}$ e se a ciascuna parte si giongerà $1\frac{1}{4}^{\underline{2}}$ si haverà $1^{\underline{4}} + 1^{\underline{3}} + 2\frac{1}{4}^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}} + 1$ eguale a $30\frac{1}{4}^{\underline{2}}$, che pigliato il lato di ciascuna parte si haverà $1^{\underline{2}} + \frac{1}{2}^{\underline{1}} + 1$ eguale a $5\frac{1}{2}^{\underline{1}}$, che levato simile da simile $1^{\underline{2}} + 1$ sarà eguale a $5^{\underline{1}}$, che agguagliato, il Tanto valerà $2\frac{1}{2}$ + R.q.$5\frac{1}{4}$; però il secondo numero, che fu posto $1^{\underline{1}}$, sarà $2\frac{1}{2}$ + R.q.$5\frac{1}{4}$; il terzo, che fu posto $1^{\underline{2}}$, sarà $11\frac{1}{2}$ + R.q.$131\frac{1}{4}$; il quarto, che fu posto $1^{\underline{2}}$, sarà 55 + R.q.3024 e il quinto, che fu posto $1^{\underline{4}}$, sarà $263\frac{1}{2}$ + R.q.$69431\frac{1}{4}$ e il primo sarà 1 (come si pose) e la regola di questo problema senza fare la positione e di gionger 5 al numero dato e della somma pigliare il lato e a esso lato giongere $1\frac{1}{4}$ per regola e della somma pigliarne il lato e di quest'ultimo lato cavarne $\frac{1}{2}$ e del restante pigliarne la metà e quadrarla e del quadrato cavarne 1 per regola e al lato di questo restante giongere la metà quadrata overo cavarla, che la somma o il restante potra essere il secondo numero; il suo quadrato sarà il terzo, il suo cubato sarà il quarto e il suo quadroquadrato sarà il quinto e il primo sarà 1.

Problema CCLVIII.

Trovinsi cinque quantità in continua proportione tali che la somma di ciascuna delle quattro partita per l'altra e li cinque avenimenti gionti insieme faccino 356 e che l'eccesso del primo e secondo moltiplicato via il quinto faccia 32.

Prima trovinsi cinque numeri in continua proportione che la somma di qual si voglia delli quattro partita per l'altro e li cinque avenimenti gionti insieme faccino 356, che, per la regola della passata, gionghisi 5 a 356, fa 361 che il suo lato è 19 al quale gionghisi $1\frac{1}{4}$, fa $20\frac{1}{4}$, che il suo lato è $4\frac{1}{2}$, del quale cavato $\frac{1}{2}$ resta 4; il quadrato della sua metà e 4, del quale cavato 1 resta 3, che il suo lato è R.q.3, al quale gionto 2, metà del 4 quadrata, fa 2 + R.q.3 e questo è il secondo numero, il quadrato del quale, ch'è 7 + R.q.48, e il terzo e il cubato di detto secondo, ch'è 26 + R.q.675, e il quarto e il quadroquadrato di detto secondo, ch'è 97 + R.q. 9408, e il quinto e il primo e 1. Hor ponghisi che li cinque numeri che si cercano siano li cinque detti, ma siano Tanti, cioè il primo sia 1 secondo $2^{\underline{1}}$ + R.q.$3^{\underline{1}}$, il terzo $7^{\underline{1}}$ + R.q.$48^{\underline{1}}$, il quarto $26^{\underline{1}}$ + R.q.$675^{\underline{1}}$ et il quinto $97^{\underline{1}}$ + R.q.$9408^{\underline{1}}$; l'eccesso del primo e secondo e R.q.$3^{\underline{1}}$ + $1^{\underline{1}}$, quale moltiplicato per il quinto fa R.q.70227 + $265^{\underline{2}}$ e questo è eguale a 32, che agguagliato il Tanto valerà R.q.$\llcorner$R.q.17978112 − 4240$\lrcorner$; però il primo numero, che fu posto $1^{\underline{1}}$, sarà R.q.$\llcorner$R.q.17978112 − 4240$\lrcorner$.

Problema CCLIX.

Trovinsi cinque quantità in continua proportione tali che la somma di ciascuno delli quattro partita per l'altro e li cinque avenimenti gionti insieme faccino 356 e che l'eccesso del secondo e terzo aggionto col quadrato del quinto faccia 48.

Prima bisogna trovare cinque numeri in continua proportione che habbino la prima delle due conditioni dette, che (come nella passata) il primo sarà 1, il secondo 2 + R.q.3, il terzo 7 + R.q.48, il quarto 26 + R.q.675 e il quinto 97 + R.q. 9408. Hor ponghisi che li cinque numeri che si cercano siano li cinque detti, ma ciascuno di loro sia Tanti, che l'eccesso del secondo e terzo e $5^{\underline{1}}$ + R.q.$27^{\underline{1}}$ e il quadrato del quinto e $18817^{\underline{2}}$ + R.q.354079488 che gionti insieme fanno $18817^{\underline{2}}$ + R.q.$354079488^{\underline{2}}$ + $5^{\underline{1}}$ + R.q.$27^{\underline{1}}$ e questo composto è eguale a 48, che ridutto a $1^{\underline{2}}$ si haverà $1^{\underline{2}}$ + R.q.$13623483^{\underline{1}}$ − $3691^{\underline{1}}$ eguale a 983216−R.q.815799140352, che gionto il quadrato della metà delli Tanti, ch'è 6811741 −R.q.46399815451080 con il numero fa 7714957 + − R.q.$59520561492168\frac{3}{4}$, della qual somma pigliatone il lato e cavatone la metà delli Tanti resta R.q.$\llcorner$7714957 − R.q.$59520561492168\frac{3}{4}\lrcorner$ − R.q.$3405870\frac{3}{4}$ + $1845\frac{1}{2}$ e questa è la valuta del Tanto e anco è il primo numero, perché egli fu posto essere $1^{\underline{1}}$.

Problema CCLX.

Trovinsi cinque quantità in continua proportione tali che la somma di ciascuno delli quattro partita per l'altro e li cinque avenimenti gionti insieme faccino 356 e che il solido fatto dal primo, secondo e quinto gionto con sei volte il quarto faccia 100.

Ponghisi che delli cinque numeri che si cercano il primo sia 11, il secondo $2^{\underline{1}}$ + R.q.$3^{\underline{1}}$; il terzo $7^{\underline{2}}$ + R.q.$48^{\underline{1}}$, il quarto $26^{\underline{1}}$ + R.q.$675^{\underline{1}}$ e il quinto $97^{\underline{1}}$ + R.q. $9408^{\underline{1}}$, acciochè siano in continua proportione e che habbiano la prima delle due conditioni dette (come insegna la 258 e 259); resta che il solido fatto dalla prima, seconda e quinta con sei volte la quarta faccia 100, ma il solido fatto dalla prima, seconda e quinta è $362^{\underline{3}}$ + R.q.$131043^{\underline{3}}$ al quale gionto quanto e sei volte la quarta, cioè $156^{\underline{1}}$ + R.q.$24300^{\underline{1}}$, fa $362^{\underline{3}}$ + R.q.$131043^{\underline{3}}$ + $156^{\underline{1}}$ + R.q.$24300^{\underline{1}}$ e questo è eguale a 100, che ridutto a $1^{\underline{3}}$ si haverà $1^{\underline{3}}$ + $42^{\underline{1}}$ − R.q.$1728^{\underline{1}}$ eguale a 36200 − R.q.1310430000, che per far l'agguagliatione aggionghisi il cubato del terzo delli Tanti, ch'è 10808 − R.q.116812800, con il quadrato della metà del numero, ch'è 655217500 − R.q.429309972300000000, fa 655228308 − R.q.429324135594412800, che il suo lato è R.q.⌞655228308 − R.q.429324135594412800⌟, il quale si gionga con la metà del numero, ch'è 18100 − R.q.327607500, fa R.q.⌞655228308 − R.q.429324135594412800⌟ + 18100 − R.q.327607500, che il suo lato cubico è R.c.⌞R.q.⌞655228308 − R.q.429324135594412800⌟ + 18100 − R.q.327607500⌟ del qual binomio cubo cavato il suo residuo resta R.c.⌞R.q.⌞655228308 − R.q.429324135594412800⌟ + 18100 − R.q.327607500⌟ − R.c.⌞R.q.⌞655228308 − R.q.429324135594412800,1 − 18100 + R.q.327607500⌟ e questa è la valuta del Tanto et è il primo delli cinque numeri cercati qual si pose essere $1^{\underline{1}}$.

Problema CCLXI.

Trovinsi cinque numeri cubi tali che la somma loro sia quanto la somma de' lati loro.

Bisogna trovare cinque numeri cubi che la somma loro e la somma de' lati loro sia numero quadrato, che se li lati loro cominciano dall'unità e si vadino accrescendo per 2 la somma loro sarà numero quadrato, perché li numeri quadrati nascono da detta progressione, cioè ponghisi che il lato del primo sia 1, del secondo 3, del terzo 5, del quarto 7 e del quinto 9, che la somma loro è 25. Hor vedasi se la somma de' cubi loro e quadrato, che li cubi sono 1, 27, 125, 343 e 729 che la somma loro è 1225, ch'è numero quadrato. Ponghisi dunque che delli cinque numeri cubi che si cercano il primo sia $1^{\underline{3}}$, il secondo $27^{\underline{3}}$, il terzo 125 il quarto $343^{\underline{3}}$ e il quinto $729^{\underline{3}}$, che la somma loro e $1225^{\underline{3}}$ e la somma de' lati loro è $25^{\underline{1}}$; però $1225^{\underline{3}}$ è eguale a $25^{\underline{1}}$, che schifato si haverà $1225^{\underline{2}}$ eguale a 25 e tolto il lato di ciascuna parte si haverà $35^{\underline{1}}$ eguale a 5, che agguagliato, il Tanto vale $\frac{1}{7}$; però li lati delli numeri cubi, che erano $1^{\underline{1}}$, $3^{\underline{1}}$, $5^{\underline{1}}$, $7^{\underline{1}}$ e $9^{\underline{1}}$ saranno, $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{7}$ e $\frac{9}{7}$ e li cinque numeri cubi saranno $\frac{1}{343}$, $\frac{27}{343}$, $\frac{125}{343}$, $\frac{343}{343}$ e $\frac{729}{343}$, che così la somma de' lati come quella de' cubi è $\frac{25}{7}$ (come si domanda).

Problema CCLXII.

Trovinsi tre quantità in continua proportione tali che la prima sia lato quadrato della seconda e lato cubico della terza e che il produtto della prima nella seconda faccia la terza e che sommata la prima con la seconda facciano la terza. Ponghisi che il primo numero sia $1^{\underline{1}}$, il secondo sarà $1^{\underline{2}}$ e il terzo $1^{\underline{3}}$ et è sodisfatto alla seconda conditione che il produtto del primo nel secondo fa 11 terzo; resta che il primo e secondo sia pari al terzo: però$1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}}$ sarà eguale a $1^{\underline{3}}$ che schifato per $1^{\underline{1}}$ si haverà $1^{\underline{1}} + 1$ eguale a $1^{\underline{2}}$, che agguagliato, il Tanto valerà R.q.$1\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$; però il primo numero, che fu posto $1^{\underline{1}}$, sarà R.q.$1\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$, il secondo, che fu posto $1^{\underline{2}}$, sarà $1\frac{1}{2}$ + R.q.$1\frac{1}{4}$ e il terzo, che fu posto $1^{\underline{3}}$, sarà 2 + R.q.5.

Problema CCLXIII.

Trovinsi dui numeri over quantità tali che la somma loro sia eguale al produtto loro e che gionti alli loro quadrati facciano 20.

Ponghisi che li dui numeri insieme siano $1^{\underline{1}}$; di necessità li quadrati loro saranno $20 - 1^{\underline{1}}$ acciochè gionti con li numeri facciano 20. Hor bisogna fare d'$1^{\underline{1}}$ due parti tali che li loro quadrati gionti insieme facciano $20 - 1^{\underline{1}}$ e (per la regola della 49) quadrisi $1^{\underline{1}}$ fa $1^{\underline{2}}$ cavisene $20 - 1^{\underline{1}}$ resta $1^{\underline{2}} + 1^{\underline{1}} - 20$; piglisene la meta, ch'è $\frac{1}{2}^{\underline{2}} + \frac{1}{2}^{\underline{1}} - 10$ e questo si cavi d'$\frac{1}{4}^{\underline{2}}$, quadrato della metà delli numeri, cioè d'$1^{\underline{1}}$ resta $10 - \frac{1}{4}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{1}}$ del che se ne pigli il lato, ch'è R.q.$\llcorner 10 - \frac{1}{4}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{1}} \lrcorner$ e questo si gionghi e cavi d'$\frac{1}{2}$, che si haverà per li due numeri cercati $\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ + R.q.$\llcorner 10 - \frac{1}{4}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{1}}$ e $\frac{1}{2}^{\underline{1}}$ − R.q.$\llcorner 10 - \frac{1}{4}^{\underline{2}} - \frac{1}{2}^{\underline{1}} \lrcorner$ e già si sono trovati dui numeri che li loro quadrati con la somma loro fa 20; resta che il produtto loro faccia $1^{\underline{1}}$, cioè la somma loro, ma il produtto loro è $\frac{1}{2}^{\underline{2}} + \frac{1}{2}^{\underline{1}} - 10$ e questo è eguale a $1^{\underline{1}}$, che levato il meno, simile da simile e ridutto a $1^{\underline{2}}$ si haverà $1^{\underline{2}}$ eguale a $1^{\underline{1}} + 20$, che agguagliato, il Tanto valerà 5 e 5 sarà la somma delli dui numeri cercati e per trovar ciascun da se, faccisi di 5 due parti che il produtto loro sia 5, che ponendo che l'una sia $1^{\underline{1}}$, l'altra sarà $5 - 1^{\underline{1}}$ produtto loro è $5^{\underline{1}} - 1^{\underline{2}}$ e questo è eguale a 5, che levato il meno e agguagliato, il Tanto valerà $2\frac{1}{2}$ + R.q.$1\frac{1}{4}$ e $2\frac{1}{2}$ − R.q.$1\frac{1}{4}$ e queste saranno le parti domandate e anco li numeri che si cercano e ancora si potea (havendo trovato li dui numeri esser 5) cavar 5 di 20, che resta 15 e fare di 5 due parti che li loro quadrati gionti insieme facciano 15 e la regola di questa proposta e di giongere $\frac{1}{4}$ al numero dato e della somma pigliarne il lato e a esso lato giongerli $\frac{1}{2}$ per regola e la somma a la somma delli due numeri cercati.

Problema CCLXIIII.

Faccisi di 12 due parti che li loro cubati gionti insieme facciano 900. Ben conviene che il 900 sia maggiore di due volte 216, cubo di 6 mezzo di 12, altramente si trattaria dell'impossibile.

Ponghisi l'una delle parti essere $6 + 1^{\underline{1}}$ e l'altra $6 - 1^{\underline{1}}$; li loro cubati sono $216 + 108^{\underline{1}} + 18^{\underline{2}} + 1$ e $216 - 108^{\underline{1}} + 18^{\underline{2}} - 1^{\underline{3}}$, che aggionte insieme fanno $432 + 36^{\underline{2}}$ e doverebbono fare 900, però $432 + 36^{\underline{2}}$ sono eguali a 900, che levato simile da simile $36^{\underline{2}}$ Sono eguali a 468, che il Tanto vale R.q.13; il primo, che fu posto $6 + 1^{\underline{1}}$, sarà 6 + R.q.13 e l'altro 6 − R.q.13 e fanno quanto fu proposto e ne nasce la infrascritta regola.

Se si haverà a dividere un dato numero in due parti tali che li loro cubati aggionti insieme habbiano a fare un terminato numero, piglisi il mezzo del dato numero e si cubi [si doppi] e lo avenimento per regola si cavi del terminato numero e lo restante si divida per tre volte il dato numero e dello avenimento si pigli il lato e si aggionghi e cavi della metà del dato numero e la comma e lo restante saranno le parti cercate.

Problema CCLXV.

Trovinsi tre numeri che al produtto del primo nel secondo giontogli il quadrato del terzo e al produtto del secondo nel terzo aggiontogli il quadrato del primo e al produtto del terzo nel primo aggiontogli il quadrato del secondo, facciano tre numeri quadrati delli quali pigliati i lati e aggionti insieme facciano numero quadrato.

Per la 120 di questo porrò che il primo sia $\frac{20}{81}{}^{\underline{1}}$ e il secondo $4\frac{80}{81}{}^{\underline{1}}$ et il terzo $1^{\underline{1}}$, che il produtto del primo nel secondo col quadrato del terzo è $\frac{14641}{6561}{}^{\underline{2}}$ et il produtto del secondo nel terzo etagiontoli il qua 6561 aggiontoli del primo è $\frac{33124}{6561}{}^{\underline{2}}$ et il produtto del terzo nel primo aggiontogli il quadrato del secondo è $\frac{164836}{6561}{}^{\underline{2}}$, che li loro lati sono $1\frac{40}{81}$, $2\frac{20}{81}$ e $5\frac{1}{81}$ Tanti, che gionti insieme fanno $8\frac{61}{81}{}^{\underline{1}}$ e questo sia eguale a un numero quadrato come si voglia e poniamo che sia 4, che partito per 8 ei ne viene,oà per la valuta del Tanto et il primo, che fu posto $\frac{20}{81}$ Tanto, sarà $\frac{80}{709}$ et il secondo, ch'era $4\frac{80}{81}{}^{\underline{1}}$, sarà $2\frac{198}{709}$ et il terzo $\frac{324}{709}$ e fanno quanto fu proposto.

Problema CCLXVI.

Trovinsi tre numeri che il produtto delli dui col quadrato dell'altro facciano numero quadrato e che le differentie delli lati delli quadrati gionte insieme facciano numero quadrato.

Ponghisi (come nell'altra) che il primo sia $\frac{20}{81}{}^{\underline{1}}$ et il secondo $4\frac{80}{81}{}^{\underline{1}}$ et il terzo $1^{\underline{1}}$, che li produtti di dui con il quadrato dell'altra (come nella passata) saranno $\frac{33124}{6561}^{\underline{2}}$, $\frac{164836}{6561}^{\underline{2}}$ e $\frac{14641}{6561}^{\underline{2}}$ che li lati sono $\frac{121}{81}^{\underline{1}}$, $\frac{182}{81}^{\underline{1}}$ e $\frac{406}{81}^{\underline{1}}$, che la differentia dal minore al mezzano è $\frac{61}{81}$ e dal mezzano al maggiore è $\frac{224}{81}$, che aggionti insieme fanno $\frac{95}{27}^{\underline{1}}$ e questo è eguale a un numero quadrato e sia 25, che agguagliato, il Tanto vale $7\frac{2}{19}$; il minore, che fu posto $\frac{20}{81}^{\underline{1}}$, sarà $1\frac{43}{57}$ et il mezzano, che fu posto $1^{\underline{1}}$, sarà $7\frac{2}{19}$ et il maggiore, che fu posto $4\frac{80}{81}^{\underline{1}}$, sarà $35\frac{25}{57}$ e fanno quanto fu proposto.

Problema CCLXVII.

Trovinsi tre numeri che il mezzano sia 2 più del minore e che il produtto di dui qual si voglia col quadrato dell'altro faccia numero quadrato.

Ponghisi (come nella passata) che il minore sia $\frac{20}{81}^{\underline{1}}$ il mezzano $1^{\underline{1}}$ et il maggiore $4\frac{80}{81}^{\underline{1}}$ e sodisfanno alle conditioni del produtto di [dui] qual si voglia aggiontoli il quadrato dell'altro fanno quadrato; resta che al minore giontoli 2 sia pari al mezzano, ma sarà ei $\frac{20}{81}^{\underline{1}} + 2$ eguale a $1^{\underline{1}}$, che levato simile da simile $\frac{61}{81}^{\underline{1}}$ sono eguali a 2, che agguagliato, il Tanto vale $2\frac{40}{61}$ et il minore, che fu posto $\frac{20}{81}^{\underline{1}}$, sarà $\frac{40}{61}$ et il mezzano, ch'era $1^{\underline{1}}$, sarà $2\frac{40}{61}$ et il maggiore sarà $3\frac{1277}{4961}$ e sodisfanno a tutte le conditioni proposte.

Problema CCLXVIII.

Faccisi di 20 tre parti tali che il produtto di due qual si voglia giongendoli il quadrato dell'altra faccia numero quadrato.

Ponghisi (come nell'altro) che il minore sia $\frac{20}{81}^{\underline{1}}$ et il mezzano $1^{\underline{1}}$ et il maggiore $4\frac{80}{81}^{\underline{1}}$ e sodisfanno alla conditione che il produtto di dui qual si voglia con il quadrato dell'altro fanno numero quadrato; resta che la somma loro faccia 20, ma la somma loro fa $6\frac{19}{81}^{\underline{1}}$ et è eguale a 20, che agguagliato, il Tanto vale $3\frac{21}{101}$; il minore, che fu posto sarà $\frac{20}{81}^{\underline{1}}$, et il mezzano $3\frac{21}{181}$ et il maggiore 16 e fanno quanto fu proposto.

Problema CCLXIX.

Trovinsi tre quantità che al produtto della prima nella seconda e nella terza et al produtto della seconda nella terza aggionto a ciascaduno produtto 2, e della somma di ciascuno pigliato il lato et aggionti insieme faccino 10.

Piglisi un quadrato fatto da quanti Tanti si voglia più R.q.2, lato del 2 che si deve giongere e sia $1^{\underline{1}}$ + R.q.2 che il quadrato e $1^{\underline{2}}$ + R.q.$8^{\underline{1}}$ + 2, del quale cavatone 2 resta $1^{\underline{2}}$ + R.q.$8^{\underline{1}}$ e questo porrò per il produtto del primo nel secondo e pongo che il secondo sia $1^{\underline{1}}$ et il primo sarà $1^{\underline{1}}$ + R.q.8. Hor per trovare il terzo (per la regola della 162) piglisi il quadrato fatto da $2^{\underline{1}}$ + R.q.2, ch'è $4^{\underline{2}}$ + R.q.$32^{\underline{1}}$ + 2, del quale se ne cava 2; resta $4^{\underline{2}}$ + R.q.$32^{\underline{1}}$ e questo ponghisi per il produtto del secondo nel terzo et essendo il secondo $1^{\underline{1}}$ il terzo sarà $4^{\underline{1}}$ + R.q.32 e ritornando al principio dico che il produtto del primo nel secondo con 2 più e $1^{\underline{2}}$ + R.q.$8^{\underline{1}}$ + 2 et il produtto del secondo nel terzo con 2 più e $4^{\underline{2}}$ + R.q.$32^{\underline{1}}$ + 2 et il produtto del primo e terzo con 2 più e $4^{\underline{2}}$ + R.q.$288^{\underline{1}}$ + 18, che i loro lati sono $1^{\underline{1}}$ + R.q.2, $2^{\underline{1}}$ + R.q.2 e $2^{\underline{1}}$ + R.q.18, che aggionti insieme fanno $5^{\underline{1}}$ + R.q.50 e questo è eguale a 10, che levato le R.q.50 a ciascuna delle parti si haverà $5^{\underline{1}}$ eguali a 10 − R.q.50 et il Tanto valerà 2 − R.q.2 et il primo sarà 2 + R.q.2, il secondo 2 − R.q.2 et il terzo 8 e fanno quanto si è proposto.

Problema CCLXX.

Trovinsi tre numeri over quantità che a ciascuno delli produtti di uno nell'altro aggiontoli 2 e delle tre Somme preso il lato di ciascuna, la loro somma sia pari al quadrato del minore.

Ponghisi che il primo sia $1^{\underline{1}}$ + R.q.8, il secondo $1^{\underline{1}}$ et il terzo $4^{\underline{1}}$ + R.q.32, per le ragioni dette nella passata; gli tre produtti con 2 più saranno 1 + R.q.$8^{\underline{1}}$ + 2, $4^{\underline{2}}$ + R.q.$32^{\underline{1}}$ + 2 e 4 + R.q.$288^{\underline{1}}$ + 18 e li loro lati saranno, aggionti insieme, $5^{\underline{1}}$ + R.q.50 e sono eguali al quadrato del minore, perché chiaro e che egli e il secondo, cioè $1^{\underline{1}}$, che agguagliato $1^{\underline{2}}$ a $5^{\underline{1}}$ + R.q.50, il Tanto valerà R.q.$\llcorner$R.q.50 + $6\frac{1}{4}\lrcorner$ + $2\frac{1}{2}$ e questo sarà il secondo; i1 primo, ch'era $1^{\underline{1}}$ + R.q.8, sarà R.q.8 + $2\frac{1}{2}$ + R.q.$\llcorner$R.q.50 + $6\frac{1}{4}\lrcorner$ et il terzo, ch'era $4^{\underline{1}}$ + R.q.32, sarà 10 + R.q.32 + R.q.$\llcorner$R.q.12800 + 1001 e fanno quanto si è proposto.

Problema CCLXXI.

Trovisi tre numeri over quantita che al produtto della prima nella terza aggiontoli 2 e così al produtto della prima e seconda, e seconda e terza e di ciascuna pigliato il lato e aggionti insieme siano pari al quadrato dello eccesso delle due parti maggiori [meno 16].

Ponghisi (come di sopra) che la prima sia $1^{\underline{1}}$ + R.q.8, la seconda $1^{\underline{1}}$ e la terza $4^{\underline{1}}$ + R.q.32, che li lati delli produtti saranno (com'e stato detto nella passata) $5^{\underline{1}}$ + R.q.50 e sono eguali al quadrato dello eccesso di $4^{\underline{1}}$ + R.q.32 et $1^{\underline{1}}$ + R.q.8, che sono le parti maggiori, ch'è $3^{\underline{1}}$ + R.q.8; sarà 9 + R.q.$288^{\underline{1}}$ + 8 meno 16, cioè $9^{\underline{2}}$ + R.q.$288^{\underline{1}}$ − 8 eguale a $5^{\underline{1}}$ + R.q.50; levisi il meno e simile da simile: resta 9 + R.q.$288^{\underline{1}}$ − $5^{\underline{1}}$ eguale a 8 + R.q.50; piglisi il mezzo delli Tanti, ch'è R.q.72 − $2\frac{1}{2}$ e quadrisi fa $78\frac{1}{4}$ − R.q.1800 et si gionge con 72 + R.q.4050, produtto delle potenze nel numero, fa $150\frac{1}{4}$ + R.q.450, del quale se ne piglia il lato e se ne cava il mezzo delli Tanti, resta R.q.$\llcorner 150\frac{1}{4}$ + R.q.$450\lrcorner$ + $2\frac{1}{2}$ − R.q.72; il tutto si parte per 9, numero delle potenze, che ne viene per la valuta del Tanto R.q.$\llcorner 1\frac{277}{324}$ + R.q.$\frac{450}{6561}\lrcorner$ + $\frac{5}{18}$ − R.q.$\frac{8}{9}$ e tanto sarà il secondo et il primo sarà $1^{\underline{2}}$ + R.q.8, cioè R.q.$\llcorner 1\frac{277}{324}$ + R.q.$\frac{450}{6561}\lrcorner$ + R.q.$3\frac{5}{8}$ + $\frac{5}{18}$ et il terzo sarà R.q.$\llcorner 29\frac{55}{81}$ + R.q.$17\frac{407}{729}\lrcorner$ + $\frac{10}{9}$ + R.q.$3\frac{5}{9}$ e fanno quanto si propone.

Problema CCLXXII.

Trovinsi tre quantita tali che il produtto del primo nel secondo e nel terzo et il secondo nel terzo et alli tre produtti aggionto 2 li loro lati siano in continua proportione.

Ponghisi (come nelle tre passate) che l'una sia $1^{\underline{1}}$, l'altra $1^{\underline{1}}$ + R.q.8 e l'altra $4^{\underline{1}}$ + R.q.32, che alli loro produtti aggionto a ciacuno 2 fanno (come fu detto nella 269) $1^{\underline{2}} + \text{R.q.}8^{\underline{1}} + 2$, $4^{\underline{2}} + \text{R.q.}32^{\underline{1}} + 2$ e $4^{\underline{2}} + \text{R.q.}288^{\underline{1}} + 18$, che li lor lati sono $1^{\underline{1}} + \text{R.q.}2$, $2^{\underline{1}} + \text{R.q.}2$ e $2^{\underline{1}} + \text{R.q.}18$; resta di vedere se sono in continua proportione, il che si conosce moltiplicando il primo nel terzo, che fa $2^{\underline{2}} + \text{R.q.}50^{\underline{1}} + 6$ e questo è eguale a $4^{\underline{2}} + \text{R.q.}32^{\underline{1}} + 2$, quadrato del secondo, che agguagliato, il Tanto vale $\text{R.q.}2\frac{1}{8} + \text{R.q.}\frac{1}{8}$, che sarà il minore et il mezzano sarà $1^{\underline{1}} + \text{R.q.}8$, cioè $\text{R.q.}10\frac{1}{8} + \text{R.q.}2\frac{1}{8}$ et il maggiore, ch'era $4^{\underline{1}} + \text{R.q.}32$, sarà $\text{R.q.}50 + \text{R.q.}34$, che fanno quanto fu proposto.

Io volea altri diversi et assai difficili Problemi porre in questo mio terzo libro, ma parendomi di havere a bastanza trattato sin qui delle operationi loro, però (rendendo le dovute gratie al Nostro Signor Dio, il qual concesso mi habbia di poter vedere gionta alla desiata perfettione questa mia fatica) et a quello e a tutta l'opera porrò fine, ancorche prima io fussi di animo di provare con dimostrationi Geometriche l'operatione di tutti questi problemi Arimetici, sapendo che queste due scientie (cioè l'Arimetica e Geometria) hanno intra di loro tanta convenientia che l'una e la prova dell'altra e l'altra e la dimostration dell'una, ne già puote il Matematico esser perfetto il quale in ambedue non sia versato, benchè a questi nostri tempi molti siano i quali si danno a credere altrimente; del che quanto si ingannino all'hor chiaramente lo conosceranno quando che l'una e l'altra mia opera havranno veduta; ma perché non e per ancora ridutta a quella perfettione che la eccellentia di questa disciplina ricerca, mi son risoluto di volerla prima meglio considerare, avanti che la mandi nel conspetto de gli huomini. Goda dunque il Lettore di presente questa prima parte delle mie fatiche, che in breve l'altra darogli e tanto più solecito saro a farlo, quanto che conosco se mai tempo fu a Bolognesi di mostrare il valore e saper loro questo essere, poiche a Nostro Signor Dio e piaciuto usargli questa benignitade, di dare al mondo per suo Vicario Gregorio decimoterzo, pur di questa nostra patria, huomo e di Santita e di dottrina ornatissimo, amatore di ogni scientia e de' professori di quelle affettionatissimo, talche a tempo di questo suo Pontificato si vedra risorgere quella felice prima eta d'oro, nella quale così fiorirno tutte le discipline e maggiormente questa delle Matematiche, per esser di quelle (per quanto odo da persone degne di fede) il Signor Giacomo Boncompagno, nepote di Sua Santita, studiosissimo e assai bene intelligente, come parimente in ogni altra buona disciplina e essercitato, non meno che sia d'ottimi costumi ornato.

II fine del terzo libro

Capitolo 8

Commento al Terzo libro

Nel terzo libro Bombelli presenta l'applicazione dei metodi esposti per la risoluzione di 272 problemi (di cui 143 diofantei) con dati numerici.
In una prima stesura della sua opera, egli si occupa di problemi enunciati *"sotto velame di attioni o negotij humani"* cioè *" vendite, compere, restitutioni, permute, scambij, interessi, deffalcationi, leghe di monete, di metalli, pesi, compagnie, o con perdite, o con guadagno, giochi, e simili altre infinite ationi, e operationi humane"*. Ma, dopo aver conosciuto l'Aritmetica di Diofanto decide di trattare esclusivamente problemi in cui i dati siano numeri astratti; un'altra prova dell'influenza avuta da Diofanto si trova nel disordine della successione dei problemi e nella formulazione di problemi indeterminati, di cui cerca solamente soluzioni razionali positive, al contrario della pratica odierna dove si cercano tutte le soluzioni intere.
Buona parte dei problemi trattati da Bombelli oggi si tradurrebbero in sistemi determinati di equazioni lineari. Occorre sottolineare come Bombelli, dopo avere risolto per via analitica il problema, proceda fornendo una regola generale che prescinde da ogni valore numerico.

1. *" Trovisi un numero che gionto con 40 faccia 100. "*

Sia x il numero da trovare.

L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$40 + x = 20$$

2. *“ Faccisi di 80 due parti che l'una sia 20 più dell'altra. ”*

   Sia x il numero da trovare.
   Dobbiamo dividere 80 in due parti, una sia x, allora l'altra sarà $x + 20$.
   L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$x + (x + 20) = 80$$

3. *“ Trovisi un numero che cavato di 10 resti 2. ”*

   Sia x il numero da trovare.
   L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$10 - x = 2$$

4. *“ Trovisi un numero che moltiplicato per 8 faccia 32. ”*

   Sia x il numero da trovare.
   L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$8x = 32$$

5. *“ Trovisi un numero che partito per 6 ne venga 8. ”*

   Sia x il numero da trovare.
   L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$\frac{x}{6} = 8$$

6. *" Trovisi un numero che moltiplicato per 6 et al produtto gionto 8 faccia 48. "*

   Sia x il numero da trovare.
   L'equazione risolvente sarà la seguente:

   $$6x + 8 = 68$$

7. *" Trovinsi dui numeri che l'uno sia 2 più dell'altro e aggionti insiemi faccino 20."*

   Sia x un numero, allora l'altro sarà $x + 2$.
   L'equazione risolvente sarà la seguente:

   $$x + (x + 2) = 20$$

8. *" Trovisi due numeri che siano in proportione l'uno all'altro come 2 gionti insieme faccino 25. "*

   Sia x il numero da trovare.
   L'equazione risolvente sarà la seguente:

   $$2x + 3x = 25$$

9. *" Trovisi due numeri che siano in proportione come 3 a 4 e che moltiplicato il minore per 5 e il maggiore per 2, li produtti gionti infaccino 46."*

   Sia x il numero da trovare.
   L'equazione risolvente sarà la seguente:

   $$(3x)5 + (4x)2 = 46$$

10. *“ Trovinsi dui numeri de’ quali il maggiore sia quattro volte il minore e che il maggiore sia 21 più del minore.”*

    Poniamo il numero minore come x, allora il maggiore è $4x$.
    L’equazione risolvente sarà la seguente:

$$4x = 21 + x$$

11. *“ Dividasi 100 in due numeri tali che il terzo dell’uno e il quinto dell’altro gionti insieme faccino 30. ”*

    Sia un numero x, allora l’altro sarà $100 - x$.
    L’equazione risolvente sarà la seguente:

$$\frac{x}{3} + \frac{100 - x}{5} = 30$$

12. *“ Trovinsi dui numeri che l’uno sia 4 più dell’altro e che il quadrato del maggiore sia 32 più del minore.”*

    Sia un numero x, allora l’altro sarà $4x$.
    L’equazione risolvente sarà la seguente:

$$(4x)^2 = 32 + x$$

13. *“ Dividasi 100 in due parti che il quarto del primo superi il sesto del nrcondo di 18.”*

    Sia un numero x, allora l’altro sarà $100 - x$.
    L’equazione risolvente sarà la seguente:

$$\frac{x}{4} = \frac{100 - x}{6} + 18$$

14. *“ Trovisi un numero che cavatone 90 e 30, li due restanti il maggiore sia quattro volte il minore.”*

Sia x il numero da trovare.
L’equazione risolvente sarà la seguente:

$$x - 30 = 4(x - 90)$$

15. *“ Trovisi un numero che giontoli 190 e 30 le somme siano in proportione dupla.”*

Sia x il numero da trovare.
L’equazione risolvente sarà la seguente:

$$x + 90 = 2(x + 30)$$

16. *“ Trovisi un numero che cavato di 20 e di 100 il maggior restante sia sei volte quanto il minore.”*

Sia x il numero da trovare.
L’equazione risolvente sarà la seguente:

$$x - 20 = 6(x - 100)$$

17. *“ Trovinsi due numeri che cavato il quadrato dell’uno del quadrato dell’altro resti 6.”*

- Sia x un numero e l’altro ad esempio sia $x + 2$ (il suo qudrato [4] è minore di 6).
  L’equazione risolvente sarà la seguente:

  $$x^2 - (x + 2)^2 = 6$$

- Sia x un numero e l'altro ad esempio sia $x - 4$ (il suo qudrato [16] è mggiore di 6).
  L'equazione risolvente sarà la seguente:
  $$x^2 - (x - 4)^2 = 6$$

18. *" Trovisi un numero che aggionto con 18 e cavato di 100 la somma Iuu restante siano in proportione tripla."*

    Sia x il numero da trovare.
    L'equazione risolvente sarà la seguente:
    $$x + 18 = 3(100 - x)$$
    oppure
    $$100 - x = 3(x + 18)$$

19. *" Trovisi un numero che giontoli 20 e cavatone 100, la comma e lo restante siano in proportion quadrupla."*

    Sia x il numero da trovare.
    L'equazione risolvente sarà la seguente:
    $$x + 20 = 4(x - 100)$$

20. *" Faccisi di 10 due parti che li loro quadrati cavati l'uno dell'altro resti 12."*

    Sia $5 + x$ un numero, allora l'altro sarà $5 - x$.
    L'equazione risolvente sarà la seguente:
    $$(5 + x)^2 + (5 - x)^2 = 12$$

21. *" Dividasi 200 in dui numeri e dipoi si divida in due altri numeri, talchè il maggiore della prima divisione con il minore della seconda habbia proportion dupla, e il maggiore della seconda divisione con il minore della prima habbia proportion tripla."*
    Si divida 200 in due numeri: x_1 e y_1 ($x_1 > y_1$). Poi lo si ridivida per altri due numeri x_2 e y_2 ($x_2 > y_2$).
    Il sistema risolvente sarà il seguente:

$$\begin{cases} 2x_1 = y_2 \\ x_1 + y_1 = 200 \\ 2y_1 = x_2 \\ x_2 + y_2 = 200 \end{cases}$$

22. *" Faccisi di 20 due parti che di una cavatone il quarto più 2 faccia auto quanto e l'altra aggiontoli il quinto men 5."*

    Sia $10 + x$ un numero, allora l'altro sarà $10 - x$.
    L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$10 + x - \left(\frac{10+x}{4} + 2\right) = 10 - x + \left(\frac{10-x}{5} - 5\right)$$

23. *" Trovinsi tre numeri che il primo sia in proportione al secondo com'e 2 a 3, il secondo al terzo com'e 2 a 1, et il primo moltiplicato per 2, il secondo per 3 et il terzo per 4 e gli produtti gionti insieme, faccino 38."*

    Sia $2x$ il primo numero, $3x$ il secondo e il terzo sarà $\frac{3}{2}x$
    L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$(2x)2 + (3x)3 + \left(\frac{3}{2}\right)4 = 38$$

24. *" Trovisi una radice che sia tal parte di 12 qual'è R.q.240 di 18."*

Sia x il numero da trovare.

L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$\frac{x}{12} = \frac{\sqrt{240}}{18}$$

25. *" Trovisi un numero che cavatone il terzo e di quello che resta cavatone il quarto e di quello che resta cavatone il sesto resti 140."*

Sia x il numero da trovare.

L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$\left[\left(x - \frac{x}{3}\right) - \frac{x}{4}\right] - \frac{x}{6} = 140$$

26. *" Dividasi 200 in due numeri tre volte, talche il maggiore della prima divisione sia triplo al minore della seconda e che il maggiore della seonda divisione sia doppio al minore della terza et il maggiore della Irrza sia quattro volte il minore della prima."*

Si divida 200 in due numeri: x_1 e y_1 ($x_1 > y_1$). Poi lo si ridivida per altri due numeri x_2 e y_2 ($x_2 > y_2$). Poi lo si ridivida un'altra volta per altri due numeri x_3 e y_3

Il sistema risolvente sarà il seguente:

$$\begin{cases} 2x_2 = y_3 \\ x_2 + y_2 = 200 \\ 2x_1 = y_2 \\ x_1 + y_1 = 200 \\ 3y_1 = x_3 x_3 + y_3 = 200 \end{cases}$$

27. *" Trovinsi dui numeri che il primo pigliando dal secondo 30 divendoppio allo restante del secondo, ed il secondo pigliando dal primo 50 divenghi triplo dello restante del primo."*

Sia $x + 30$ il secondo numero, dopo avere ceduto 30 al primo diventa x, e quindi il primo sarà $2x - 30$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$(x + 30) + 50 = 3\Bigg[(2x - 30) - 50\Bigg]$$

28. *" Trovinsi tre numeri che il primo col secondo sia 20, il secondo col terzo sia 30 et il terzo col primo sia 40."*

La somma dei tre numeri sia x.
Il primo sarà $x - 30$, il secondo $x - 40$ e il terzo $x - 20$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$(x - 30) + (x - 40) + (x - 20) = x$$

29. *" Trovinsi tre numeri che il primo sia il terzo di tutti tre, il secondo sia il sesto di tutti tre, e che il primo moltiplicato per 4, il secondo per 6 e il terzo per 2, li produtti del primo e terzo siano pari al quadrato del produtto del secondo per 6."*

Sia x il primo numero, allora la somma di tutti tre sarà $3x$. Dunque la somma del secondo e il terzo sarà $2x$. Il secondo numero sarà $\frac{x}{2}$, mentre il terzo sarà $\frac{3}{2}x$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$4x + \left(\frac{x}{2}6 + \left(\frac{3}{2}\right)2\right) = 6\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

30. *" Trovinsi quattro numeri tali che il primo, secondo e terzo faccino 20; il secondo, terzo e quarto faccino 22; il terzo, quarto e primo faccino 24; il quarto, primo e secondo faccino 27."*

La somma dei quattro numeri sia x.
Il primo sarà $x-22$, il secondo $x-24$, il terzo $x-27$ e il quarto $x-20$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$(x-22)+(x-24)+(x-27)+(x-20)=x$$

31. *“ Trovinsi tre numeri che il primo e secondo siano 20 più del terzo, il secondo e terzo siano 30 più del primo, e il terzo e primo siano 40 più del secondo.”*

La somma dei tre numeri sia $2x$.
Il primo sarà $x-10$, il secondo $x-15$ e il terzo $x-20$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$(x-10)+(x-15)+(x-20)=2x$$

32. *“ 'Faccisi di 50 due parti che dell'una cavatone il terzo e dell'altra il quarto, li restanti siano eguali.'*

Sia x un numero, allora l'altro sarà $50-x$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$x-\frac{1}{3}x=(50-x)-\frac{1}{4}(50-x)$$

33. *“ Trovinsi due numeri quadrati che il lato dell'uno sia 2 più del lato dell'altro e che cavato l'uno dell'altro resti 10.”*

Sia x un numero e l'altro sia $x+2$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$(x+2)-x^2=10$$

34. *" Trovisi tre numeri in tal modo che due di essi siano pari tra di loro li dui eguali insieme con il terzo dell'altro et dui più siano doppij dello restante del terzo, e se a uno delli dui pari si giongera 4 delli altri la somma sia li $\frac{2}{5}$ dello restante delli altri dui."*

Sia $3x$ il numero che non è uguale agli altri due, questi cedendo agli altri due numeri $x+2$, diventa $2x-2$.
La somma dei due numeri uguali con $x+2$ ceduto dal numero dispari è uguale a $2(2x-2)$, ovvero $4x-4$. Se togliamo $x+2$ otteniamo la somma dei numeri pari, che è $4x-4-(x+2)$, ovvero $3x-6$. Da questo deduciamo quanto valgono i due numeri uguali, ovvero $\frac{3x-6}{2}=\frac{3}{2}x-3$
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$\left(\frac{3}{2}x-3\right)+4=\frac{2}{5}\left[(3x)+\left(\frac{3}{2}x-3\right)-4\right]$$

35. *" Trovisi quattro numeri che il composto del primo, secondo e terzo avanzi il quarto di 20 e il composto del secondo, terzo e quarto avanzi il primo di 30, e il composto del terzo, quarto e primo avanzi il secondo di 40, e il composto del quarto, primo e secondo avanzi il terzo di 50."*

La somma dei quattro numeri sia $2x$.
Il primo sarà $x-10$, il secondo $x-15$, il terzo $x-20$ e il quarto $x-25$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$(x-10)+(x-15)+(x-20)+(x-25)=2x$$

36. *" Far di 200 tre parti tali che la prima e la seconda siano tre volte quanto la terza e la seconda e terza quattro volte quanto la prima."*

- Terzo numero - Sia x_3 il terzo numero, così la somma dei primi due sarà $3x$.

La prima equazione risolvente sarà la seguente:

$$3x_3 + x_3 = 200$$

- Primo numero - Sia x_1 il primo numero, così la somma del secondo e terzo sarà $4x$.
  La seconda equazione risolvente sarà la seguente:

  $$4x_1 + x_1 = 200$$

- Secondo numero - Sia x_2 il secondo numero. La terza equazione risolvente sarà la seguente:

  $$x_2 = 200 - (x_3 + x_2)$$

37. *" Trovisi tre numeri tali che il primo avanzi il secondo [della terza parte] del terzo e il terzo avanzi di 10 la terza parte del secondo e il secondo avanzi il terzo della terza parte del primo."*

    Sia $3x$ il secondo numero, allora il terzo sarà $x + 10$ e il secondo sarà $3\Big[3x - (x + 10)\Big]$, ovvero $6x - 30$. D'altra parte il secondo è anche uguale a $3\Big[(6x - 30) - 3x\Big]$ ovvero $9x - 90$.
    L'equazione risolvente sarà la seguente:

    $$9x - 90 = x + 10$$

38. *" Trovisi due numeri quadrati che aggionti insieme la somma sia 1 quadrata."*

    Si deve scegliere un numero quadrato a piacere, come 9. Ora bisogna trovare due numeri [x e $x + 2$] tali che la differenza dei loro quadrati sia uguale a 9.
    L'equazione risolvente sarà la seguente:

    $$(x + 2)^2 - x^2 = 9$$

I due numeri quadrati che si cercavano saranno 9 e x^2.

39. *“ Trovisi tre numeri quadrati che la somma loro sia numero quadrato.”*

Si riutilizza due volte il procedimento descritto nel problema precedente.

40. *“ Trovisi dui numeri che la loro somma sia numero quadrato e cavato l'uno dell'altro resti numero quadrato.”*

Supponiamo che la somma dei due numeri da trovare sia $x^2 + 6x + 9$.
Così un numerò potrà essere $\frac{x^2}{2}$, mentre l'altro sarà $\frac{x^2}{2} + 6x + 9$
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$\frac{x^2}{2}+6x+9-x^2 = [\textit{numero quadrato scelto a piacere, maggiore di } 9]$$

41. *“ Trovisi tre numeri che il primo dando al secondo la terza parte di se stesso et il secondo dando al terzo il suo quarto et il terzo dando al primo il suo quinto, che all'hor poi tutte tre le somme siano eguali. ”*

Sia $3x$ il primo numero, il secondo sia un numero a piacere (preferibilmente multiplo di 4) ad esempio 8. Il primo cede al secondo il suo terzo ovvero x, il secondo cede al terzo il suo quarto ovvero 2. Così il secondo diventa $8 + x - 2$, ovvero $x + 6$.
Al primo, dopo aver ceduto x, resterà $2x$, perciò dovrà ricevere dal terzo una quantità tale che sommata con $2x$ verrà pari a $x + 6$. Allora tale quantità sarà $(x + 6) - 2x$, ovvero $6 - x$.
Il terzo cede quindi al primo $6 - x$, allora il terzo numero sarà $5(6 - x)$, ovvero $30 - 5x$. D'altra parte sappiamo che aquista dal secondo 2, allora diventa $(30 - 5x) + 2 - (6 - x)$, ovvero $26 - 4x$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$26 - 4x = x + 6$$

42. *“ Trovisi quattro numeri tali che il primo dia al secondo la sua terza parte e il secondo dia al terzo il suo quarto e il terzo dia al quarto il suo quinto e il quarto dia al primo il suo sesto, e, dato e ricevuto che haveranno queste parti, divenghino poi eguali.”*

Si riutilizza il procedimento descritto nel problema precedente.

43. *“ Faccisi di 12 due parti tali che gionto all’una la quarta parte dell’altra la somma sia 6.”*

Sia $4x$ un numero e l’altro sia $12 - 4x$.
L’equazione risolvente sarà la seguente:

$$12 - 4x + x = 6$$

44. *“ Trovisi quattro numeri tali che il primo ricevendo la terza parte di tutti tre gli altri insieme et il secondo pigliando il quarto di tutti tre gli altri insieme et il terzo pigliando il quinto di tutti tre gli altri insieme et il quarto pigliando il sesto di tutti tre gli altri insieme, essi siano tutti eguali.”*

45. *“ Trovisi tre numeri che il primo dia al secondo la sua terza parte, il secondo dia al terzo la sua quarta parte e il terzo dia al primo la sua quinta parte e dato e ricevuto che haveranno, ciascuno sia 12.”*

46. *“ Faccisi di 48 quattro parti tali che la prima dia alla seconda il suo terzo, la seconda dia alla terza il suo quarto, la terza dia alla quarta il suo quinto e la quarta dia alla prima il suo sesto e, dato e ricevuto he haveranno, esse siano pari.”*

47. *“ Trovisi due numeri over quantita che l’uno sia 2 più dell’altro e il loro quadrati gionti insieme faccino 24.”*

    Sia $5 + x$ un numero, allora l’altro sarà $x + 2$.
    L’equazione risolvente sarà la seguente:

$$(x)^2 + (x + 2)^2 = 24$$

48. *“ Trovisi due numeri che l’uno sia* $1^{\underline{1}}$ *più dell’altro e che li loro quadrati gionti insieme faccino 36.”*

    Si riutilizza il procedimento descritto nel problema precedente.

49. (a) *“ Faccisi di 10 due parti tali che moltiplicate l’una via l’altra faccino 16.”*

    Sia x un numero, allora l’altro sarà $10 - x$.
    L’equazione risolvente sarà la seguente:

$$x(10 - x) = 16$$

    Dopo aver dato la risoluzione algebrica, Bombelli passa ad enunciare la regola:
    “Se si haverà, a dividere una quantita in due parti che moltiplicata l’una via l’altra faccino un terminato numero, piglisi il mezzo della quantità che si deve dividere e quadrisi e del produtto se ne cavi il terminato numero e del restante se ne pigli il lato e si aggionghi alla metà di detta quantita, che la somma sarà una delle parti addomandate.
    ”
    ovvero $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$.

Di seguito analizza un altro esempio:
"Faccisi di 12 + $1^{\underline{1}}$ due parti tali che moltiplicata l'una via l'altra faccino 20."
L'equazione risolvente in questo caso è $y^2-(12+x)y+20=0$ che risolve utilizzando la formula:

$$y=\sqrt{16+6x+\frac{x^2}{4}}+6+\frac{x}{2}$$

o come scrive lui:

$$\text{R.q.}\llcorner 16.\text{p.}\tfrac{1}{4}^{2}\lrcorner\ \text{p.}6\ \text{p.}\tfrac{1}{2}^{1}$$

Con questo Bombelli compie un importante passo avanti che nessun algebrista aveva mai fatto prima.

(b) *" Faccisi di 12 due parti tali che li loro quadrati gionti insieme faccino 104"*

Sia x un numero, allora l'altro sarà $12-x$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$x^2+(12-x)^2=104$$

50. *" Trovisi un numero che moltiplicato per 200 e per 5 gli dui produtti siano l'uno il quadrato dell'altro."*

Sia x il numero da trovare.

L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$(5x)^2=200x$$

51. *" Faccisi di 20 due parti tali che lo eccesso delli loro quadrati sia 120."*

Sia $10 + x$ un numero, allora l'altro sarà $10 - x$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$(10 + x)^2 - (10 - x)^2 = 120$$

52. *" Faccisi di 10 due parti tali che moltiplicata l'una via l'altra faccino quanto la differenza di dette parti moltiplicata per 8."*
Sia x un numero, allora l'altro sarà $10 - x$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$x(10 - x) = 8\Bigg[(10 - x) - x\Bigg]$$

53. *" Trovinsi dui numeri over quantità che l'uno sia 4 più dell'altro e che moltiplicati l'uno per l'altro faccino 60."*

Sia $x + 2$ un numero, allora l'altro sarà $x - 2$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$(x + 2)(x - 2) = 60$$

54. *" Trovinsi due numeri tali che l'uno sia quattro volte quanto l'altro e che la somma delli quadrati loro sia cinque volte quanto la somma d'essi dui numeri."*

Sia x un numero, allora l'altro sarà $4x$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$x^2 + (4x)^2 = 5(x + 4x)$$

55. *" Trovisi dui numeri che il maggiore sia tre volte il minore a che il composto delli quadrati loro sia dodici volte l'eccesso loro."*

Sia x un numero, allora l'altro sarà $3x$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$x^2 + (3x)^2 = 12(3x - x)$$

56. *" Trovisi dui numeri tali che il maggiore sia tre volte il minore e che l'eccesso de'quadrati loro sia 12 volte quanto tutti dui li numeri insieme."*

Sia x un numero, allora l'altro sarà $3x$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$(4x)^2 - x^2 = 12(x + 3x)$$

57. *" Trovisi dui numeri tali che il maggiore sia tre volte il minore e che l'ecceesso de' quadrati loro sia 24 volte quanto l'eccesso di essi due numeri."*

Sia x un numero, allora l'altro sarà $3x$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$(3x)^2 - x^2 = 24(3x - x)$$

58. *" Trovisi dui numeri tali che il maggiore sia tre volte quanto il minore e che il quadrato del minore sia 12 volte quanto il maggiore."*

Sia x un numero, allora l'altro sarà $3x$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$x^2 = 12(3x)$$

59. *" Trovisi dui numeri tali che il maggiore sia tre volte il minore e che i1 quadrato del minore sia 4 volte quanto tutti dui li numeri insieme."*

Sia x un numero, allora l'altro sarà $3x$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$x^2 = 4(x + 3x)$$

60. *" Trovisi un numero che accompagnato con 6 e 10 e pigliati a dui a dui e moltiplicati nel restante, faccino tre numeri in proportione Aritmetica, cioè di eguale eccesso."*

Sia x il numero da trovare. I tre numeri che devono essere in proporzione sono: $6(x + 10)$, $10(x + 6)$, $6x + 10x$; ovvero $6x + 60$, $10x + 60$, $16x$
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$(10x + 60) - (6x + 60) = (10x + 60) - 16x$$

61. *" Dividasi 25, numero quadrato, in dui numeri quadrati."*

Sia x^2 un numero, allora l'altro sarà $25 - x^2$.
Bombelli procede in questo modo: suppone che la radice di $25 - x^2$ sia $5 - 3x$. [*5, lato del 25, meno tanti x quanti ne pare*]. L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$25 - x^2 = (5 - 3x)^2$$

62. *" È 52 divisibile in dui numeri quadrati, cioè in 36 e 16. Hor lo voglio ridividere in dui altri numeri quadrati che non siano li medesimi: si domanda quali saranno."*

Sia $4 + x$ un numero e l'altro $2x - 6$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$(4 + x)^2 + (2x - 6)^2 = 52$$

63. *" Trovisi dui numeri quadrati che l'uno sia 96 più dell'altro."*

Sia x un numero, allora l'altro sarà $x + 8$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$(x + 8)^2 = 96(x^2)$$

64. *" Facciasi di 50 due parti tali che la metà della seconda gionta alla prima faccia quanto il terzo della prima gionto con la seconda."*

Sia x un numero, allora l'altro sarà $50 - x$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$\frac{50 - x}{2} + x = \frac{x}{3} + 50 - x$$

65. *" Facciasi di 60 due parti che l'una moltiplicata per 12 faccia quanto l'altra moltiplicata per 22."*

Sia x un numero, allora l'altro sarà $60 - x$.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$12x = 22(12 - x)$$

66. *" Trovisi un numero che aggionto a 4 e a 6 faccia dui numeri quadrati."*

Sia $x^2 - 4$ il numero quadrato da trovare, tale che $(x^2 - 4) + 4$ (ovvero x^2) e $(x^2 - 4) + 10$ (ovvero $x^2 + 2$) siano quadrati. Il primo naturalmente è un quadrato, rimane da provare che anche il secondo lo sia.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$x^2 + 2 = (x - 5)^2$$

Il numero 5 viene scelto arbitrariamente, purché sia maggiore di 4.

67. *“ Trovisi un numero che cavatone 20 e 30 li restanti siano numeri quadrato.”*

Sia $x^2 + 20$ il numero quadrato da trovare, tale che $(x^2 + 20) - 20$ (ovvero x^2) e $(x^2 + 20) - 30$ (ovvero $x^2 - 10$) siano quadrati. Il primo naturalmente è un quadrato, rimane da provare che anche il secondo lo sia.
L’equazione risolvente sarà la seguente:

$$x^2 - 10 = (x - 4)^2$$

Il numero 4 viene scelto arbitrariamente.

68. *“ Faccisi di 12 due parti tali che li loro quadrati gionti insieme faccino quanto il moltiplicato di esse parti giontoli 48.”*

Sia x un numero, allora l’altro sarà $12 - x$.
L’equazione risolvente sarà la seguente:

$$x^2 + (12 - x)^2 = x(12 - x) + 48$$

69. *“ Faccisi di 40 due parti tali che a ciascuna giontoli un medesimo numero quadrato le somme loro siano dui numeri quadrati.”*

Si scelgono arbitrariamente due numeri quadrati minori di 40, come 2 e 4; a ciascuno di essi si aggiunge x, quindi ottteniamo $x + 2$ e $x + 4$. Elevandoli al quadrato si otterrà rispettivamente $x^2 + 4x + 4$ e $x^2 + 8x + 16$. Perciò i due numeri che chiedeva il problema sono $4x^2 + 4$ e $8x + 16$ e il numero quadrato da aggiungerci sarà x^2. Rimane da provare che la somma dei due numeri sia uguale a 40.
L’equazione risolvente sarà la seguente:

$$(4x^2 + 4) + (8x + 16) = 40$$

70. *“ Faccisi di 40 due parti che ciascuna di loro cavata di un medesimo numero quadrato, li restanti siano due numeri quadrati.”*

Supponiamo che la radice del numero quadrato sia $x + 5$ (5 scelto arbitrariamente purché il suo qradato sia minore di 40), il suo quadrato quindi sarà $x^2 + 10x + 25$. I due numeri saranno allora $10x + 25$ e $(2x + 9)$. Quest'ultimo è stato trovato prendendo un numero quadrato (che abbia radice inferiore ad $x + 5$) per poi sottrarre il suo quadrato a $x^2 + 10x + 25$, ovvero $(x^2 + 10x + 25) - (x + 4) = 2x + 9$. Rimane da provare che la somma dei due numeri sia uguale a 40.
L'equazione risolvente sarà la seguente:

$$(10x + 25) + (2x + 9) = 40$$

Bibliografia

[1] E. Bortolotti, *L'Algebra nella scuola matematica Bolognese del secolo XVI*, Periodico di matematica 5 (S. IV), 147-192, 1925

[2] E. Giusti, *Algebra and geometry in Bombelli and Viète*, Bollino di storia delle scienze matematiche, 1992

[3] M. Giaquinta, *La forma delle cose*, Edizione di Storia e Letteratura, Roma, 2010

[4] P. Freguglia, *SBombelli, Viète e Descartes: tre momenti dello sviluppo dell'algebra tra cinquecento e seicento*, a cura di P. Casini, Alle origini della rivoluzione scientifica pp. 199-218 ISBN: 16449-1, Roma: Istituto della Enciclopedia italiana (Italy), 1991

[5] P. Freguglia, *Sur la thèorie des èquation algébriques entre le XVI et le XVII siècle*, Bollettino di storia delle scienze matematiche, vol XIV, pp. 259-298 ISSN: 0392-4432, 1994

[6] P. Freguglia, *La geometria fra Tradizione e innovazione*, Bollati Boringhieri, Torino, 1999

[7] P. Freguglia, *Verso una nuova matematica. Algebra e geometria nel cinquecento; i problemi di Diofanto: Bombelli, Stevin, Viète e Fermat*, Storia della scienza, vol IV, Roma: Istituto della Enciclopedia italiana (Italy), 2001

[8] R. Bombelli, *L'algebra*, Manoscritto B1569 - Biblioteca Archiginnasio, 1550c.

[9] R. Bombelli, *L'algebra*, Giovanni Rossi, 1572

[10] R. Bombelli, *L'algebra*, Giovanni Rossi, 1579

[11] R.Bombelli, *L'algebra* (prima edizione integrale), a cura di U.Forti e di E.Bortolotti, Feltrinelli, Roma, 1966

[12] http://mathematica.sns.it/autori/1325/