



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Scienze Matematiche

Corso di Laurea in Matematica

Gruppi di omotopia e teorie (co)omologiche

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Giovanni Mongardi

Presentata da:
Xhemal Gremshi

Anno Accademico 2024/2025

Introduzione

La topologia si propone l'obiettivo di studiare le proprietà degli spazi che rimangono invariate dopo aver effettuato delle trasformazioni continue, in particolare un problema centrale consiste nello stabilire quando due spazi possono essere deformati in maniera continua l'uno nell'altro, cioè se sono omeomorfi o meno. Come succede spesso in matematica, per affrontare questo problema si introducono degli invarianti, cioè degli oggetti o delle proprietà che non cambiano dopo aver effettuato una trasformazione continua. L'idea della topologia algebrica è quella di costruire invarianti algebrici e associarli a ogni spazio; spesso questi sono gruppi, di cui abbiamo già a disposizione una ricca teoria che ci può aiutare a calcolarli. Un linguaggio particolarmente adatto in questo caso è quello categorico, con cui possiamo dire che la topologia algebrica si occupa di studiare dei funtori fra la categoria degli spazi topologici e quella dei gruppi (o anche anelli e moduli).

Forse gli invarianti algebrici più significativi sono i gruppi di omotopia e i gruppi di omologia singolare. Questi vengono costruiti in modi diversi:

- Si considerano i lacci centrati in un punto $x_0 \in X$ e diciamo che due lacci sono omotopi se possono essere deformati l'uno nell'altro rimanendo in X . Due lacci possono non essere omotopi se, per esempio, all'interno di uno dei due lacci la superficie di X è "bucata", mentre all'interno dell'altro laccio no; oppure, sul toro abbiamo il laccio che gira intorno al "foro interno" del toro, mentre un altro che gira sul "tubo" che forma il toro, e questi non possono essere deformati l'uno nell'altro senza essere strappati. Possiamo vedere un laccio come una funzione continua con dominio S^1 , per cui possiamo generalizzare in dimensione generica prendendo l'insieme di tutte le funzioni continue da S^n a X e quozientando per la relazione di omotopia, quindi identificando le funzioni omotope. Gli insiemi così definiti ammettono una struttura di gruppo e vengono chiamati gruppi di omotopia $\pi_n(X, x_0)$. In un certo senso questi gruppi ci danno informazioni su uno spazio misurando la presenza di qualcosa che ostacoli la deformazione continua di una sfera all'interno dello spazio stesso.
- Chiamiamo n-simplesso singolare una qualsiasi funzione continua dal n-simplesso a uno spazio X . Si associa ad X un complesso di catene, composto dai gruppi abeliani generati dagli n-simplessi singolari C_n e un morfismo $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ con la proprietà che $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Si definisce l'n-esimo gruppo di omologia singolare $H_n(X)$ come il quoziente fra $\text{Ker}(\partial_n)$ e $\text{Im}(\partial_{n+1})$. Se chiamiamo la cavità interna ad S^n un "buco n-dimensionale", in un certo senso

l'omologia singolare misura la presenza di buchi n -dimensionali in X . Quest'interpretazione nasce dal calcolo, che può essere effettuato dopo aver sviluppato un po' di teoria, di $H_n(S^m) = \mathbb{Z}$ per $m=n$, mentre è il gruppo banale altrimenti.

Si nota subito che nel primo caso si ha una forte intuizione che giustifica la costruzione, mentre nel secondo si ha una costruzione molto tecnica e barocca, frutto di generalizzazioni e raffinamenti avvenuti nel corso degli anni, nonostante le idee di base fossero già presenti nel testo del 1895 "Analysis situs" di Henri Poincaré, fino a giungere alla definizione moderna fornita da Eilenberg nel 1944. Il vantaggio dell'omologia singolare è dato dal fatto che i gruppi sono più facili da calcolare rispetto all'omotopia; la definizione è così tecnica proprio per far sì che abbia delle proprietà che ne semplifichino il calcolo. L'omotopia invece, con la sua definizione più naturale e intuitiva, presenta notevoli difficoltà computazionali, al punto che ad oggi non sono ancora noti tutti i gruppi di omotopia delle sfere, nonostante la vasta gamma di strumenti sviluppati nel tempo. Provando a individuare le proprietà che facilitano il calcolo per l'omologia, si ottiene una descrizione assiomatica generale; questi sono noti come assiomi di Eilenberg-Steenrod. Questa descrizione non è esclusiva per l'omologia singolare, infatti chiamiamo teoria omologica un qualsiasi funtore fra **Top** e una qualche categoria algebrica che rispetti questi assiomi. Una teoria omologica gode delle proprietà principali dell'omologia singolare che facilitano l'aspetto computazionale, dato che queste seguono direttamente dagli assiomi.

Uno dei risultati fondamentali nella teoria dell'omotopia è il teorema di Freudenthal, che permette di trovare una successione di gruppi di omotopia che si stabilizza facendo uso della sospensione. Questo è il punto di partenza per la teoria dell'omotopia stabile, e degli oggetti che vengono definiti naturalmente in questo contesto sono gli spettri: successioni di spazi con delle mappe di struttura dalla sospensione di ogni spazio al successivo. Questi oggetti vengono definiti proprio in modo che si comportino bene rispetto alla sospensione. Si estendono i gruppi di omotopia, oltre che agli spazi topologici, anche agli spettri, di cui ci interessa il comportamento solo al limite: infatti, vengono definiti come il limite diretto dei gruppi di omotopia dei singoli spazi che compongono lo spettro. Queste definizioni li rendono candidati perfetti per indagare fenomeni in omotopia stabile, e infatti nel corso degli anni sono diventati il linguaggio preferito in questo contesto. Una proprietà notevole degli spettri è che c'è una corrispondenza uno a uno fra le teorie omologiche, a meno di isomorfismo, e gli spettri, a meno di equivalenza stabile, che è una relazione d'equivalenza fra spettri. Questa corrispondenza è possibile grazie ai gruppi di omotopia degli spettri, nel senso che la teoria omologica è rappresentata dai gruppi di omotopia di un certo spettro. Ciò fornisce un legame inaspettato fra gruppi di omotopia e teorie omologiche, oltre al più classico teorema di Hurewicz.

Abbiamo legato l'omotopia degli spettri e le teorie omologiche, e grazie a ciò possiamo trovare un legame più diretto fra gruppi di omotopia (di spazi topologici) e omologia. La teoria omologica associata a uno degli spettri più naturali da definire, lo spettro di sospensione, è data dai gruppi di omotopia stabili. Abbiamo dunque ottenuto una teoria omologica data da una

variante dei gruppi di omotopia di spazi. Inoltre, l'omologia singolare è associata allo spettro di Eilenberg-MacLane, composto da spazi la cui classe di equivalenza omotopica è determinata dai gruppi di omotopia; questi invarianti trovano un punto d'incontro in questo modo del tutto inaspettato, nonostante le differenze che abbiamo visto nella costruzione di omologia singolare e gruppi di omotopia.

Lo scopo di questa tesi è approfondire i gruppi di omotopia superiori e alcuni dei legami che hanno con l'omologia. Nel primo capitolo verranno definiti i gruppi di omotopia, la loro versione relativa, e si studieranno le loro proprietà principali. Nel secondo capitolo si vedranno alcuni dei teoremi fondamentali e degli strumenti utili per calcolare alcuni gruppi di omotopia, e alla fine del capitolo effettueremo alcune computazioni. Nel terzo e ultimo capitolo introdurremo gli spettri, parleremo delle loro proprietà essenziali, mostreremo come rappresentano teorie (co)omologiche e nell'ultima sezione vedremo alcuni esempi espliciti.

Indice

0	Preliminari	5
1	Teoria dell'omotopia	12
1.1	Gruppi di omotopia	12
1.2	Gruppi di omotopia relativi	16
1.3	Connessione omotopica	19
2	Risultati fondamentali e tecniche di computazione	22
2.1	Approssimazione cellulare	22
2.2	Teorema di Whitehead	23
2.3	Fibrati	25
2.4	Escissione	29
2.5	Alcuni calcoli	31
3	Omotopia e (co)omologia	33
3.1	Teorie (co)omologiche	33
3.2	Spettri	34
3.3	Gruppi di omotopia stabili e (co)omologia singolare	38
A	Lemmi per l'escissione in omotopia	41

Capitolo 0

Preliminari

Notazioni

- Si indica con $I^n := [0, 1]^n$ il prodotto cartesiano dell'intervallo unitario con sè stesso n volte, ovvero l' n -cubo dotato della topologia euclidea.
- Tutte le funzioni fra spazi topologici sono da intendersi continue. I termini funzione e mappa sono interscambiabili.
- Si indica con (X, A) una coppia di spazi topologici con $A \subseteq X$. Quando X è un CW-complesso allora A è da intendersi un sottocomplesso, cioè è composto da celle di X
- Si indica con $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ una funzione tale che $f(A) \subseteq B$
- I funtori verranno indicati con la stessa notazione di una funzione, dove si specifica dove vanno oggetti e subito sotto i morfismi, in questo modo

$$\begin{array}{ccccc} F : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C}' \\ & X & \longmapsto & X' \\ (f : X \rightarrow Y) & \longmapsto & (f' : X' \rightarrow Y') \end{array}$$

- Indicheremo rispettivamente con **Top**, **Top**_{*} e **Top**² la categoria degli spazi topologici, gli spazi topologici puntati, e le coppie di spazi topologici. I morfismi sono dati rispettivamente dalle funzioni, le funzioni che preservano il punto base e quelle di coppie (tutte continue).

Omotopie

Definizione 0.1. Presi due spazi topologici X, Y , due funzioni continue $f, g : X \rightarrow Y$ si dicono *omotope* se $\exists h_t : X \rightarrow Y \ \forall t \in [0, 1]$ famiglia di funzioni continue tale che

$$\forall x \in X \quad \begin{cases} h_0(x) = f(x) \\ h_1(x) = g(x) \end{cases} \quad e \quad \begin{array}{ccc} [0, 1] & \rightarrow & C(X, Y) \\ t & \longmapsto & h_t \end{array} \quad \text{continua}$$

e si indica con $f \sim g$.

Si chiama *omotopia* fra f e g tale famiglia di funzioni, o equivalentemente la funzione

$h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ con $h_t(x) = h(x, t)$

Si dice *omotopia rel A* con $A \subseteq X$ un'omotopia h_t tale che $h_t|_A$ non dipende da t , quindi fissa A .

Cioè due funzioni si dicono omotope se possono essere deformate l'una nell'altra con continuità.

Osservazione 0.2. Essere omotope è una relazione d'equivalenza:

- riflessiva poichè basta prendere $h_t(x) = f(x) \forall t \in I, \forall x \in X$
- simmetrica poichè se h_t è un'omotopia da f a g allora $m_t(x) = h_{1-t}(x)$ è un'omotopia da g a f
- transitiva poichè se h_t e m_t sono omotopie da f a g e da g a q rispettivamente, allora
$$r_t(x) = \begin{cases} h_{2t}(x) & \forall t \in [0, \frac{1}{2}] \\ m_{2t-1}(x) & \forall t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad \text{è un'omotopia da } f \text{ a } q.$$

Definizione 0.3. $f : X \rightarrow Y$ si dice *equivalenza omotopica* se ammette un inverso omotopico, ovvero esiste $g : Y \rightarrow X$ tale che $f \circ g \sim id_Y$ e $g \circ f \sim id_X$.

Se tale f esiste si dice che X e Y sono *omotopicamente equivalenti* oppure che *hanno lo stesso tipo di omotopia*

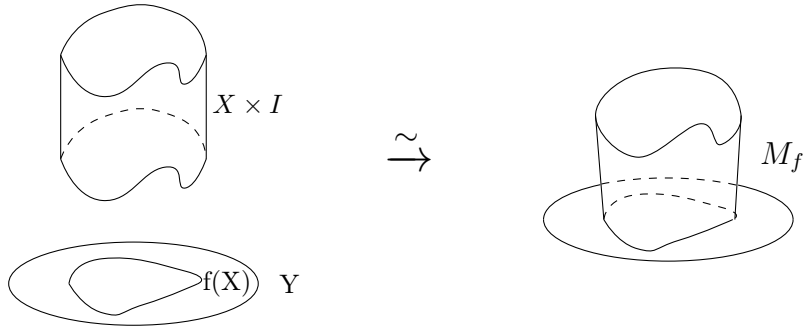
Ricordiamo che una retrazione di X in Y , un suo sottospazio, è una funzione $r : X \rightarrow X$ tale che $r(X) = Y$ e $r|_Y = id_Y$

Definizione 0.4. Dati $Y \subseteq X$, una *retrazione per deformazione* è un'omotopia fra l'identità di X e una sua retrazione in Y . Se tale omotopia esiste, Y si dice un *retrato per deformazione* di X

Euristicamente una retrazione per deformazione è una retrazione che dipende dal tempo con continuità. Uno spazio X e un suo retratto per deformazione sono omotopicamente equivalenti, segue facilmente dalla definizione.

Mapping cylinder

Definizione 0.5. Data $f : X \rightarrow Y$ chiamiamo M_f il cilindro ottenuto incollando Y a una faccia di $X \times I$, cioè $M_f = (X \times I) \sqcup Y / \sim$ con $f(x) \sim (x, 0)$



Osservazione 0.6. M_f può essere retracts per deformazione in Y , infatti preso un qualsiasi punto $(x, t) \in M_f$ basta trascinarlo lungo il segmento che lo porta in $(x, 1) \sim f(x) \in Y$, dove Y è $M_f \times \{0\}$. Esplicitamente abbiamo $H_s : M_f \rightarrow M_f$ con $H_s([x, t]) = [x, (1 - t)s + t]$, infatti $H_0([x, t]) = [x, t]$ e $H_1([x, t]) = [x, 1] = [f(x)]$, cioè H omotopia fra id e una retrazione di M_f in Y .

Osservazione 0.7. f è un'equivalenza omotopica fra X e Y se e solo se X è un retracts di deformazione di M_f

CW-complexi

Definizione 0.8. Un CW-complesso è uno spazio topologico costruito induttivamente in questo modo:

- 1) X^0 un insieme discreto di punti
- 2) Chiamiamo D_α^k una k -cella e sia $\varphi_\alpha : S^{k-1} \rightarrow X^{k-1}$ la sua funzione di attaccamento, specifica come incollare il bordo della cella a X^{k-1}
- 3) $X^k = X^{k-1} \sqcup_\alpha D_\alpha^k / \sim := X^{k-1} \cup e_\alpha^n$ dove $x \sim \varphi_\alpha(x)$ per ogni $x \in S^{k-1}$ e per ogni α , mentre e_α^n indica semplicemente l'interno della k -cella $D_\alpha^k - \partial D_\alpha^k$ dopo il quoziente, quindi già "attaccata". X^k si chiama k -scheletro.
- 4) $X = \bigcup_n X^n$ si dota X della topologia debole, caratterizzata da: U aperto in $X \Leftrightarrow U \cap X^k$ è aperto $\forall k$. Se X ha dimensione finita (cioè esiste n per cui non ci sono celle di dimensione maggiore di n) la topologia debole coincide con la topologia quoziente.

Ogni cella D_α^k possiede una funzione caratteristica ϕ_α ottenuta componendo $D_\alpha^k \hookrightarrow X^{k-1} \sqcup D_\alpha^k \rightarrow X^k \hookrightarrow X$, e vale $\phi_\alpha|_{S^{k-1}} = \varphi_\alpha$. Si noti che la topologia debole è la meno fine che rende le mappe di attaccamento continue.

Osservazione 0.9. Un insieme compatto C in un CW-complesso X interseca al più un numero finito di celle. Si assuma per assurdo il contrario e chiamiamo $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ un insieme di punti di C , in modo che ogni x_i stia in una cella diversa dagli altri punti, allora S è chiuso in X . Per induzione assumiamo che $S \cap X^{n-1}$ sia chiuso, (il passo base è banale poiché X^0 è

discreto per definizione, quindi ogni singoletto è chiuso), per ogni cella e_α^n si ha che $\phi_\alpha^{-1}(S)$ è chiuso perché ha al più un punto aggiuntivo rispetto a $\varphi_\alpha^{-1}(S)$ che è chiuso per ipotesi induttiva, i singoletti sono chiusi in D^n e l'unione di due chiusi lo è. Lo stesso ragionamento vale per ogni sottoinsieme di S , cioè S ha la topologia discreta, ma se S è chiuso nel compatto C è anch'esso compatto. Quindi S è compatto e discreto, cioè deve essere finito.

Osservazione 0.10. Presa $f_0 : X \rightarrow Y$, consideriamo $f_t : A \times I \rightarrow Y$ un'omotopia che parte dalla restrizione $f|_A$ con $A \subseteq X$, quando è possibile estendere l'omotopia ad f si dice che (X, A) possiede la proprietà di estensione dell'omotopia, la HEP, oppure come vedremo in 2.3 si dice anche che $i : A \hookrightarrow X$ è una cofibrazione.

Si può mostrare che questo è equivalente a richiedere che $X \times 0 \cup A \times I$ sia un retratto di deformazione di $X \times I$ e si può mostrare anche che se (X, A) è una coppia di CW-complessi, allora questo è vero. Maggiori dettagli si possono trovare nell'ultima sezione di [Hat02, Chapter 0].

Osservazione 0.11. Il prodotto di CW-complessi X e Y può sempre essere dotato di una naturale struttura di CW-complesso in cui le celle sono date dal prodotto cartesiano delle celle dei singoli spazi X e Y . Il discorso sulla topologia da usare è più delicato, dato che la topologia prodotto può essere meno fine della topologia debole, (potrebbe succedere quando né X né Y sono localmente compatti o hanno un'infinità non numerabile di celle) in questo modo $X \times Y$ non sarebbe un CW-complesso. Si potrebbe ogni volta imporre la topologia debole su $X \times Y$ ma nella pratica diventa complicato, quindi solitamente si passa alla categoria degli spazi compattamente generati in cui la topologia sul prodotto coincide con quella debole. I dettagli di questa discussione sono tecnici e superflui per gli scopi di questa tesi, ma possono essere trovati in [Hat02, Theorem A.6].

Numero di Lebesgue

Definizione 0.12. Sia $D \subseteq Y$ sottoinsieme di uno spazio metrico. Chiamiamo diametro di D $diam(D) := \sup_{x, y \in D} d(x, y)$ la massima distanza che posso ottenere prendendo due punti qualsiasi su D .

Teorema 0.13 (Numero di Lebesgue). Sia Y uno spazio metrico compatto e $V = \{V_\alpha\}$ un ricoprimento aperto. Allora $\exists \lambda > 0$ tale che ogni $D \subseteq Y$ con $diam(D) < \lambda$ è contenuto in un aperto di V . Chiamiamo λ il numero di Lebesgue del ricoprimento aperto V .

Dimostrazione. Per assurdo, se l'enunciato fosse falso potrei costruire due successioni x_n e y_n tali che $d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n} \forall n$ e nessun V_α che li contiene entrambi. Per sequenziale compattezza, a meno di sottosuccessioni estratte, $\exists \bar{x}$ limite di entrambe le successioni, ma $\exists \alpha : \bar{x} \in V_\alpha$, ed essendo aperto anche una palla $B_r(\bar{x}) \subset V_\alpha$ che conterrà punti arbitrariamente vicini ad \bar{x} di entrambe le successioni, quindi $\exists N : x_N, y_N \in V_\alpha$. \square

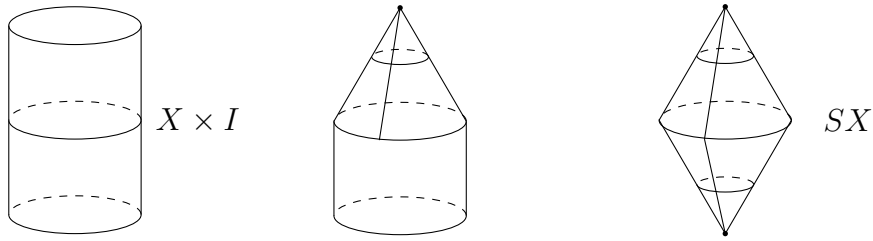
Smash product

Definizione 0.14. Dati due spazi topologici X, Y , si chiama *smash product* fra essi $X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y$

Posso considerare $\{x_0\} \times Y$ e $X \times \{y_0\}$ come sottospazi di $X \times Y$, e questi si intersecano in un solo punto, dunque posso pensare che questo sia il wedge di X e Y $X \vee Y$ e che sia un sottospazio del prodotto anch'esso. Dunque il quoziente è ben definito.

Sospensione e spazio dei cammini

Definizione 0.15. La *sospensione* SX di uno spazio topologico X è uno spazio ottenuto quozientando prima la faccia superiore $X \times \{1\}$ del cilindro $X \times I$ a un punto, successivamente anche la faccia inferiore $X \times \{0\}$.



Quindi la sospensione SX può essere pensata come l'unione di due coni $CX := X \times I / X \times \{1\}$ attaccati per la base, oppure come $SX = CX / X$. Anche una funzione $f : X \rightarrow Y$ passa a una funzione $Sf : SX \rightarrow SY$, si costruisce in questo modo:

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{f \times id} & Y \times I \\ \downarrow p_X & \searrow g & \downarrow p_Y \\ CX & \xrightarrow{Cf} & CY \end{array} \quad \begin{array}{ccc} CX & \xrightarrow{Cf} & CY \\ \downarrow p_{CX} & \searrow & \downarrow p_{CY} \\ SX & \xrightarrow{Sf} & SY \end{array}$$

le proiezioni p_Y e p_X sono le proiezioni al quoziente, la mappa obliqua è la composizione $g = (f \times id) \circ p_Y$, mentre Cf è definita a partire dalla proprietà universale delle identificazioni nel triangolo del diagramma inferiore (che può essere usata dato che g è costante su $X \times \{1\}$, infatti $X \times \{0\} \xrightarrow{f \times id} f(X) \times \{0\} \xrightarrow{p_Y} [(y, 1)]$). Ora si fa la stessa cosa ma su Cf per ottenere Sf .

Ciò ci dice che si può vedere la sospensione come un funtore che chiameremo S

$$\begin{array}{ccccc} S : & \mathbf{Top} & \longrightarrow & \mathbf{Top} \\ & X & \longmapsto & SX \\ & (f : X \rightarrow Y) & \longmapsto & (Sf : SX \rightarrow SY) \end{array}$$

Un esempio particolarmente importante è $SS^n \simeq S^{n+1}$

Definizione 0.16. La *sospensione ridotta* di uno spazio X è $\Sigma X = SX /_{x_0} \cup I$ dove $x_0 \in X$ e il segmento viene collassato tutto in x_0 .

Osservazione 0.17. Si può mostrare che fare la sospensione ridotta di uno spazio è come fare lo smash product con S^1 , cioè $\Sigma X \simeq X \wedge S^1$

Chiamiamo ΩX l'insieme dei lacci di X basati in x_0 . Nonostante non sia presente nella notazione, con lo scopo di alleggerirla, la scelta del punto base è necessaria per entrambi ΣX e ΩX .

Osservazione 0.18. In generale, dati due funtori $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ questi si dicono aggiunti se per ogni oggetto $X \in Ob(\mathcal{C})$ e $Y \in Ob(\mathcal{D})$ si ha che $Mor_{\mathcal{C}}(X, GY) \simeq Mor_{\mathcal{D}}(FX, Y)$ sono in biezione.

Anche Σ e Ω sono funtori dalla categoria degli spazi topologici puntati \mathbf{Top}_* in sé. Sui morfismi Σf è costruita come SX ma fissa il punto base x_0 , mentre $\Omega f(\gamma) = \gamma \circ f$. In particolare, Σ e Ω sono aggiunti, dunque due funzioni come queste sono intercambiabili: $f : \Sigma X \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow \Omega Y$

Limiti diretti

Un diagramma \mathcal{D} in una categoria \mathcal{C} può essere pensato come una sottocategoria, ossia una scelta di oggetti e morfismi fra essi. Preso X un oggetto di \mathcal{C} , diremo che un morfismo $\Psi : \mathcal{D} \rightarrow X$ è una collezione di morfismi $\{\psi_B\}_{B \in Ob(\mathcal{D})}$ con $\psi_B : B \rightarrow X$ in modo che per ogni $\varphi : B \rightarrow B'$ morfismo fra oggetti del diagramma, valga $\psi_B \circ \varphi = \psi_{B'}$, cioè commuti il seguente:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varphi} & B' \\ & \searrow \psi_B & \swarrow \psi_{B'} \\ & X & \end{array}$$

Definizione 0.19. Preso un diagramma \mathcal{D} in una categoria \mathcal{C} , il *colimite* del diagramma $\varinjlim \mathcal{D}$ è un oggetto X che ammette un morfismo $\Psi : \mathcal{D} \rightarrow X$ per cui valga la seguente proprietà universale: per ogni altro oggetto X' che ammette un morfismo $\Psi' : \mathcal{D} \rightarrow X'$ esiste un morfismo $\gamma : X \rightarrow X'$ per cui il seguente diagramma commuti per ogni $B \in \mathcal{D}$

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ \psi_B \swarrow & & \searrow \psi_{B'} \\ X & \xrightarrow{\gamma} & X' \end{array}$$

La proprietà universale fa sì che il colimite, in caso esista, sia unico a meno di isomorfismo.

Chiamiamo un insieme diretto un insieme dotato di una relazione binaria \geq riflessiva e transitiva tale che $\forall a, b \in I, \exists c \in I$ tale che $c \geq a$ e $c \geq b$.

Definizione 0.20. Preso un insieme diretto I un *sistema diretto di gruppi* è una collezione di gruppi indicizzati da I $\{A_i\}_{i \in I}$ e (omo)morfismi $f_{ij} : A_i \rightarrow A_j$ in modo che $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ per ogni $i \leq j \leq k$ e $f_{ii} = id$

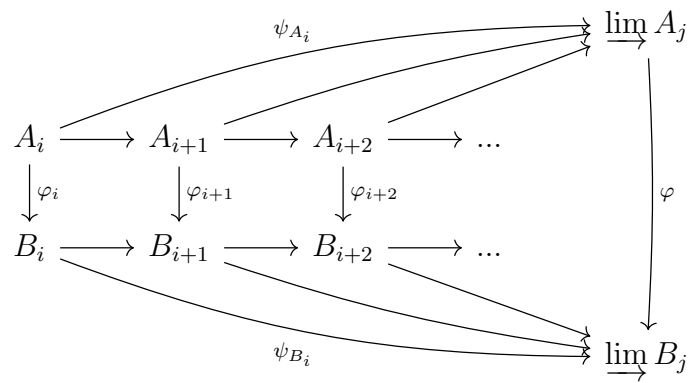
Osservazione 0.21. Il colimite di un sistema diretto si chiama *limite diretto*, e ha la seguente utile caratterizzazione

$$\varinjlim A_i = \bigsqcup_{i \in I} A_i / \sim$$

dove presi $x_i \in A_i$ e $x_j \in A_j$ si ha $x_i \sim x_j$ se $\exists k \in I : f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)$

Noi ci concentriamo sui gruppi perché useremo solo quelli, ma in generale vale per categorie "algebriche", come anelli, moduli, spazi vettoriali, etc.

Osservazione 0.22. Una collezione di mappe fra due sistemi diretti $\varphi_i : A_i \rightarrow B_i$ che fa commutare i quadrati nel diagramma sotto, induce un morfismo $\varphi : \varinjlim A_j \rightarrow \varinjlim B_j$. Basta notare $\psi_{B_i} \circ \varphi_i : A_i \rightarrow \varinjlim B_j$ per ogni i , per cui per la proprietà universale di $\varinjlim A_j$ mi dice che esiste il morfismo in questione, cioè φ .



Capitolo 1

Teoria dell'omotopia

In questo capitolo introduciamo i gruppi di omotopia di uno spazio, sia la versione assoluta che relativa, come una generalizzazione delle idee che portano alla definizione di gruppo fondamentale.

1.1 Gruppi di omotopia

Definizione 1.1. Preso X uno spazio topologico e $x_0 \in X$ fissato, si denota con $\pi_n(X, x_0)$ l' n -esimo gruppo di omotopia di X basato in x_0 , che è l'insieme delle classi di omotopia delle funzioni $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$, dove si richiede che per l'omotopia valga $h_t|_{\partial I^n}(x) = x_0 \forall x \in X$

Una definizione alternativa più intuitiva di $\pi_n(X, x_0)$ è la seguente: l'insieme delle classi di omotopia di funzioni $f : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$. Infatti collassando ∂I^n e passando al quoziente si ha che $I^n/\partial I^n \simeq S^n$ e $\partial I^n/\partial I^n \simeq s_0 \in S^n$, da cui l'equivalenza fra le due definizioni è data dalla proprietà universale delle identificazioni.

Osservazione 1.2. Per $\pi_1(X, x_0)$ è noto che l'operazione data da

$$f + g := \begin{cases} f(2t) & \forall t_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1) & \forall t_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

fornisce la struttura di gruppo.

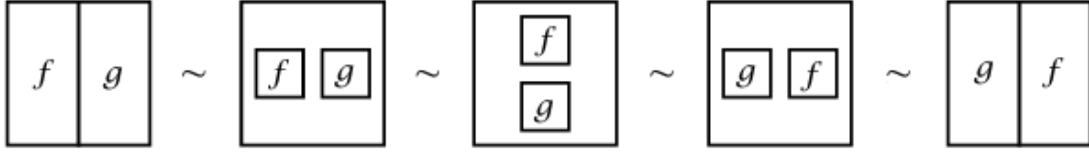
Analogamente, per $f, g \in \pi_n(X, x_0)$

$$f + g := \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \forall t_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \forall t_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

è un'operazione che fornisce la struttura di gruppo; infatti, essendo coinvolta una sola coordinata, il ragionamento è uguale.

L'idea è che $f+g$ è una nuova funzione ottenuta percorrendo f lungo un singolo lato di I^n a velocità doppia, e per g la stessa cosa, dove il lato in questione è quello della prima coordinata t_1

Osservazione 1.3. Generalmente $\pi_n(X, x_0)$ può essere non abeliano per $n=1$, ad esempio per $\pi_1(S^1 \vee S^1) \simeq Z * Z$. Invece per $n \geq 2$ $\pi_n(X, x_0)$ è sempre abeliano, infatti si costruisce un'omotopia fra $f+g$ e $g+f$ nel seguente modo:



Le varie figure sono funzioni, rappresentano il dominio I^n e specificano quale funzione viene applicata in ogni punto, dove non c'è niente viene applicata la funzione costante in x_0 . La prima figura è semplicemente $f+g$, nella seconda si restringe il dominio di entrambe f e g ed è possibile farlo con continuità dato che ogni funzione in $\pi_n(X, x_0)$, dunque anche $f+g$, manda ∂I^n in x_0 . Una volta ristrette a tal punto da avere abbastanza spazio per scambiarle di posto rimanendo in I^n , le scambio e gonfio il dominio alla loro grandezza originale, ed ottengo un'omotopia fra $f+g$ e $g+f$. La figura mostra il caso per $n=2$ ma posso fare la stessa cosa per $n \geq 2$ poiché a differenza del caso $n=1$ ho "abbastanza spazio" per scambiare f e g .

Osservazione 1.4. Per uno spazio connesso per archi sappiamo che una scelta differente del punto base produce gruppi fondamentali isomorfi, vediamo che succede la stessa cosa anche per π_n .

Sia quindi X connesso per archi e consideriamo $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un cammino da x_1 a x_0 , cioè $\gamma(0) = x_1$ e $\gamma(1) = x_0$. Definiamo

$$\begin{aligned} \beta_\gamma : \pi_n(X, x_0) &\rightarrow \pi_n(X, x_1) \\ [f] &\mapsto [\gamma f] \end{aligned}$$

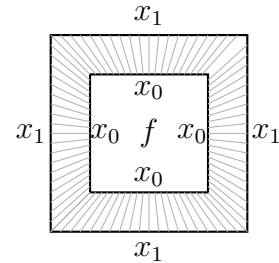


Figura 1.1

dove presa $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ la funzione $\gamma f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_1)$ è ottenuta come viene specificato in figura 1, cioè restringendo il dominio di f e inserendo il cammino γ in maniera radiale in modo da connettere i bordi esterni dei due cubi. Si noti che nel caso $n=1$ il cubo è un'intervallo e γf si riduce a

$$\begin{array}{ccccc} & \gamma & f & \gamma^{-1} & \\ x_1 & x_0 & & x_0 & x_1 \end{array}$$

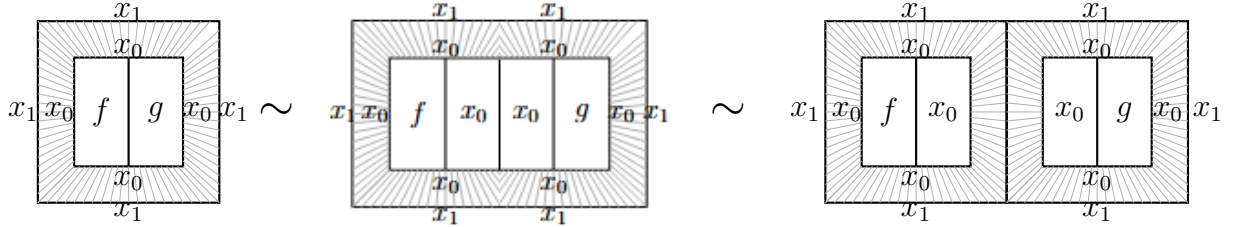
che è proprio come si tratta il caso per il gruppo fondamentale.

Concentriamoci sul caso $n \geq 2$, innanzitutto β_γ è ben definita poiché se cambio rappresentante di $[f]$, cioè prendo una funzione $g \sim f$ tramite un'omotopia che fissa ∂I^n , questa induce un'omotopia di γf con γg (si visualizza tramite la figura 1, applico l'omotopia da f a g nel blocco

ristretto e lascio "la cornice" invariata).

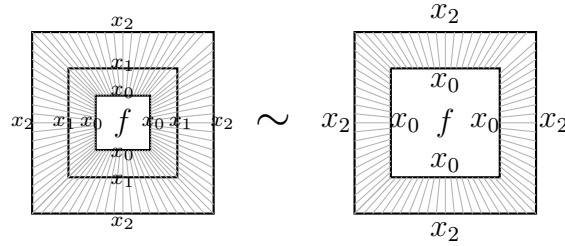
Siano ora $f, g \in \pi_n(X, x_0)$, γ cammino da x_0 a x_1 ed η cammino da x_1 a x_2 , valgono le seguenti:

$$1) \gamma(f + g) \sim \gamma f + \gamma g, \quad \text{cioè } \beta_\gamma(f + g) = \beta_\gamma(f) + \beta_\gamma(g)$$



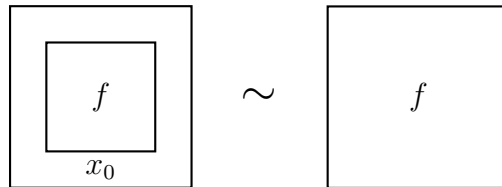
Il primo quadrato rappresenta $\gamma(f + g)$, dato che sia f che g fissano ∂I^n in x_0 allora anche la linea che separa i due quadrati di f e g finisce in x_0 , dunque posso estendere con continuità quella linea espandendola a un blocco in x_0 . A questo punto estendo mettendo tanti γ come nell'ultimo passo. si conclude "schiacciando" i due rettangoli costanti in x_0 al bordo e "gonfiando" f e g, così da ottenere $\gamma f + \gamma g$.

$$2) \eta(\gamma f) \sim (\gamma\eta)f, \quad \text{cioè } \beta_\eta(\beta_\gamma(f)) = \beta_{\gamma\eta}(f) \quad (\gamma \text{ e } \eta \text{ si scambiano per come è definita la composizione di cammini})$$



È immediato, basta notare che nel primo quadrato fare γ e poi η per arrivare al bordo più esterno è come fare $\gamma\eta$, cioè la nota composizione di cammini come nella secondo quadrato.

$$3) 1f \sim f, \quad \text{cioè } \beta_1 = id_{\pi_n(X, x_0)}$$



In questo caso tutti i cammini radiali che connettono i due bordi sono costanti in x_0 , basta espandere f a tutto il quadrato per concludere.

La proprietà 1) ci dice che β_γ è un omomorfismo di gruppi, le proprietà 2) e 3) dicono che è un isomorfismo dato che $\beta_{\bar{\gamma}}$ è l'inversa di β_γ , infatti $\beta_\gamma\beta_{\bar{\gamma}} = \beta_{\bar{\gamma}\gamma} = \beta_1 = id$, quindi per spazi CPA, a meno di isomorfismo, possiamo scrivere solamente $\pi_n(X)$ omettendo il punto base.

Nuovamente i disegni sono in dimensione 2 per ovvie ragioni, ma lo stesso ragionamento si estende in dimensione maggiore di 2.

È interessante notare che se consideriamo solo il caso in cui γ sia un cammino chiuso allora $[\gamma] \mapsto \beta_\gamma$ è un'azione di $\pi_1(X, x_0)$ su $\pi_n(X, x_0)$

Osservazione 1.5. Possiamo vedere π_n come un funtore definito così:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Top}^* & \longrightarrow & \mathbf{Grp} \\ (X, x_0) & \longmapsto & \pi_n(X, x_0) \end{array} \quad \text{dove } \psi_* \text{ manda } [f] \mapsto [\psi \circ f]$$

$$\psi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) \mapsto \psi_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$$

Chiameremo ψ_* funzione sospinta. I morfismi nelle due categorie sono rispettivamente funzioni continue che fissano il punto base e omomorfismi di gruppi. Le seguenti verifiche mostrano che π_n è un funtore ben definito

- ψ_* è ben definito, infatti se $g \sim f$ allora $\psi \circ f \sim \psi \circ g$
- ψ_* è un omomorfismo, infatti $\psi_*(f + g) = \psi \circ (f + g) = \psi \circ f + \psi \circ g = \psi_*(f) + \psi_*(g)$
- $(\phi \circ \psi)_* = \phi_* \circ \psi_*$, infatti $(\phi \circ \psi)_*(f) = (\phi \circ \psi) \circ f = \phi \circ (\psi \circ f) = \phi_*(\psi_*(f))$
- $(id_{(X, x_0)})_* = id_{\pi_n(X, x_0)}$, infatti $(id_{(X, x_0)})_*(f) = id \circ f = f$

Proposizione 1.6. Valgono le seguenti affermazioni:

- 1) $\psi \sim \phi$ tramite h_t , con $h_t(x_0) = x_0 \forall t \in I \Rightarrow \psi_* = \phi_*$
- 2) $(X, x_0) \sim (Y, y_0) \Rightarrow \pi_n(X, x_0) \simeq \pi_n(Y, y_0) \forall n$

Dimostrazione. 1) se $\psi \sim \phi$ ho $\psi \circ f \sim \phi \circ f \forall f \in \pi_n(X, x_0)$, cioè $\psi_*(f) = \phi_*(f) \forall f \in \pi_n(X, x_0)$.

- 2) Equivalenza omotopica vuol dire che $\exists \theta, \rho : \theta \circ \rho \sim id_{(Y, y_0)}$ e $\rho \circ \theta = id_{(X, x_0)}$, e usando proprietà mostrate nell'osservazione precedente vediamo che $\psi_* \circ \phi_* = (\psi \circ \phi)_* = id_* = id$ e analogamente per $\phi_* \circ \psi_*$, cioè la funzione sospinta θ_* è un isomorfismo

□

I gruppi di omotopia si comportano bene rispetto a prodotti.

Proposizione 1.7. Per una collezione arbitraria X_α di spazi CPA vale $\pi_n(\prod_\alpha X_\alpha) \simeq \prod_\alpha \pi_n(X_\alpha)$

Dimostrazione. Una mappa $f : S^n \rightarrow \prod_\alpha X_\alpha$ è la stessa cosa di una collezione di mappe $f_\alpha : S^n \rightarrow X_\alpha$, e similmente per un'omotopia f_t da cui l'isomorfismo. □

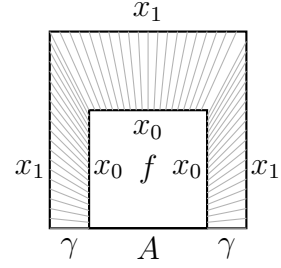
1.2 Gruppi di omotopia relativi

Esiste un'utile generalizzazione dei gruppi d'omotopia, per definirla fissiamo qualche notazione. Le facce di I^n sono delle copie in I^{n-1} , in particolare chiamo I^{n-1} la faccia che ha come punti quelli con ultima coordinata uguale a 0, e chiamo $J^{n-1} = \overline{\partial I^n - I^{n-1}}$ la chiusura del complementare. Indico con (X, A, x_0) la tripla dove $x_0 \in A \subseteq X$ sottospazio. Si indica con $\pi_n(X, A, x_0)$ per $n \geq 1$ l'*n-esimo gruppo di omotopia relativo della coppia (X, A) con punto base x_0* , che è l'insieme delle classi d'omotopia di mappe della forma $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$, dove si richiede che anche l'omotopia abbia la stessa forma.

Osservazione 1.8. 1) Notiamo che $\pi_n(X, x_0, x_0) = \pi_n(X, x_0)$ così che il caso assoluto è un caso particolare di quello relativo

- 2) Non c'è un modo soddisfacente per estendere la definizione al caso $n=0$
- 3) La stessa operazione del caso assoluto può essere usata anche nel caso relativo con la differenza che l'ultima coordinata ha già un ruolo privilegiato nella definizione per cui non può essere usato per la somma. Quindi usiamo lo stesso ragionamento con una coordinata in meno e concludiamo che $\pi_n(X, A, x_0)$ è un gruppo per $n \geq 2$ ed è abeliano per $n \geq 3$.
- 5) Per $n=1$ non si ha una struttura naturale di gruppo. $\pi_1(X, A, x_0)$ è l'insieme delle classi di omotopia delle funzioni $f : ([0, 1], \{0\}, \{1\}) \rightarrow (X, A, x_0)$, cioè le classi di omotopia di cammini che finiscono in x_0 ma iniziano da un qualsiasi punto di A . Usando la solita operazione potrebbe non aver senso concatenare due di questi cammini poichè il punto finale di uno potrebbe non coincidere col punto iniziale dell'altro.
Se A fosse CPA si potrebbe pensare di portare tramite un'omotopia il punto iniziale in x_0 e poi usare l'operazione del gruppo fondamentale; questo non funziona, ad esempio nel toro spostando il punto iniziale posso ottenere un cammino omotopo ad entrambi i lacci che generano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, per cui la concatenazione non è ancora ben definita dato che dipende dalla scelta dell'omotopia.
- 4) Analogamente al caso assoluto una mappa $\psi : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$ passa a un omomorfismo (per $n \geq 2$) $\psi_* : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$, e valgono $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$, $(id_{(X, A, x_0)})_* = id_{\pi_n(X, A, x_0)}$, e $\phi \sim \psi \Rightarrow \phi_* = \psi_*$. Le dimostrazioni del caso assoluto funzionano anche in questo caso notando che la condizione $f(A) \subseteq B$ e analoghe sono rispettate.
- 6) Possiamo eliminare la dipendenza dal punto base se A è CPA a meno di isomorfismo, infatti sia γ cammino da x_1 a x_0 e definiamo β_γ e γf così:

$$\begin{aligned}\beta_\gamma : \pi_n(X, A, x_0) &\rightarrow \pi_n(X, A, x_1) \\ [f] &\longmapsto [\gamma f]\end{aligned}$$



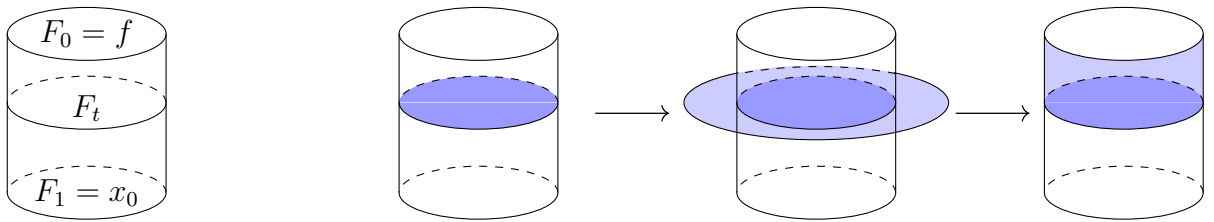
β_γ è un isomorfismo, le dimostrazioni del caso assoluto si possono estendere a questo facendo queste modifiche in ognuna delle figure: si "eliminano" le copie di γ che collegano i lati inferiori del quadrato intero ed esterno, poi il quadrato interno si sposta in modo da fargli toccare il lato inferiore, che va in A . Il ragionamento continua a funzionare. (in dimensione generica si fa la stessa cosa con la faccia con ultima coordinata 0, in dimensione 2 è il lato inferiore, come in figura)

- 7) Possiamo vedere $\pi_n(X, A, x_0)$ anche come l'insieme delle classi di omotopia di funzioni $(D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$, si collassa J^{n-1} e dato che $I^n/J^{n-1} \simeq D^n$, $\partial I^n/J^{n-1} \simeq S^{n-1}$, $J^{n-1}/J^{n-1} \simeq s_0$ si può concludere grazie alla proprietà universale delle identificazioni.

Un modo molto utile per caratterizzare le funzioni che stanno nella classe dell'elemento neutro del gruppo di omotopia relativo è il seguente

Proposizione 1.9. (Criterio di compressione) Sia $f \in \pi_n(X, A, x_0)$, allora $[f] = [0] \Leftrightarrow$ è omotopa rel S^{n-1} a una mappa con immagine in A

Dimostrazione. \Rightarrow) Ho $F : D^n \times I \rightarrow X$ omotopia fra f e la funzione costante in x_0 nella prima figura, costruisco un'altra omotopia componendo $H : D^n \times I \xrightarrow{G} D^n \times I \xrightarrow{F} X$ dove G manda ogni $(D^n \times \{t\})$ omeomorficamente in $(D^n \times \{t\}) \cup (S^{n-1} \times [0, t])$ come nella seconda figura.



In questo modo G porta ogni circonferenza nella circonferenza che fa da base al cilindro, cioè $H(S^{n-1} \times \{t\}) = F(G(S^{n-1} \times \{t\})) = F(S^{n-1} \times \{0\}) = f(S^{n-1})$, quindi H è un'omotopia rel S^{n-1} . Inoltre $H(D^n \times \{1\}) = F(G(D^n \times \{1\})) = F((D^n \times \{1\}) \cup (S^{n-1} \times [0, 1])) = x_0 \cup F(S^{n-1} \times [0, 1]) \in A$, che è quello che volevamo.

\Leftarrow) Sia g la funzione con immagine in A a cui è omotopa f , mostriamo che $[g] = [0]$. Sia R una retrazione per deformazione di D^n in s_0 , allora ho che per $g \circ R : D^n \times I \rightarrow A$

vale $(g \circ R)(x, 0) = g(x)$ e $(g \circ R)(x, 1) = g(s_0) = x_0$ (dato che l'omotopia fissa S^{n-1} ho $g(s_0) = f(s_0) = x_0$) cioè è un'omotopia fra g e la funzione costante in x_0

□

Se volessimo usare l'interpretazione di π_n coi cubi al posto dei dischi, il ruolo di S^{n-1} verrebbe preso da ∂I^{n-1} , oltre a ciò enunciato e dimostrazione rimangono uguali.

Consideriamo una tripla con punto base (X, A, B, x_0) dove $x_0 \in B \subseteq A \subseteq X$ e le inclusioni $i : (A, B, x_0) \rightarrow (X, B, x_0)$, $j : (X, B, x_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ e la funzione $\partial : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, B, x_0)$ che manda $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ nella sua restrizione a I^{n-1} , la faccia con ultima coordinata 0, ∂ ha come immagine $\pi_{n-1}(A, B, x_0)$ poiché $\partial I^{n-1} \subset J^{n-1}$ che finisce in $x_0 \in B$

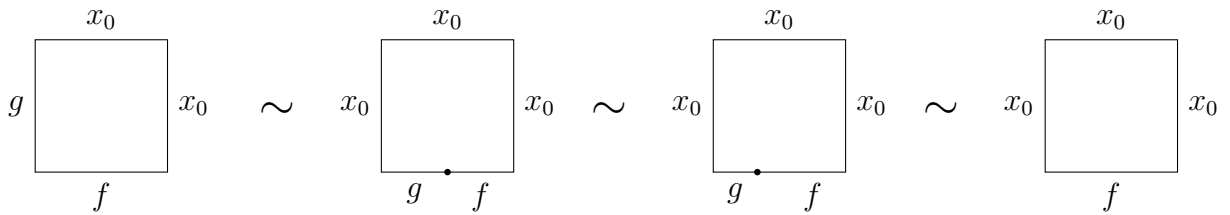
Teorema 1.10. La seguente sequenza è esatta

$$\dots \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(X, A, x_0)$$

Dimostrazione. Mostro l'uguaglianza fra immagine di una funzione e nucleo della successiva per i tre oggetti che si ripetono al diminuire di n , in questo modo ho l'esattezza di tutta la successione

- Esattezza per $\pi_n(A, B, x_0)$: Per vedere che $\text{Im}(\partial_*) \subseteq \ker(i_*)$ si nota che $i_* \circ \partial = 0$. Questo è vero perchè se prendo una funzione $f : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \rightarrow (X, A, x_0)$, chiamo g la restrizione a I^n e posso vedere f come un'omotopia che all'istante 0 mi dà g per definizione di g , mentre all'istante 1 mi dà la funzione costante in x_0 , infatti un punto di I^{n+1} con ultima coordinata 1 sta su una faccia diversa da I^n , cioè sta in J^n che per definizione di f va in x_0 . Il ragionamento funziona in $\pi_n(X, B, x_0)$ dato che l'omotopia è f e finisce in X , per questo funziona solo se compongo con i_* . Dunque $\text{Im}(\partial) \subseteq \ker(i_*)$.

Viceversa sia $f \in \ker(i_*)$, cioè $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (A, B, x_0)$ omotopa alla funzione costante in x_0 tramite funzioni della forma $F_t : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$, cioè F ha come dominio $I^n \times I$



Chiamo g la restrizione a $I^{n-1} \times I$ di F , rappresentata nella prima figura. Riparametrizzo come nella seconda figura ed ho un elemento nell'immagine di ∂ , a questo punto l'omotopia illustrata mi dice dall'ultima immagine che $f \in \text{Im}(\partial)$, da cui $\text{Im}(\partial) \supseteq \ker(i_*)$.

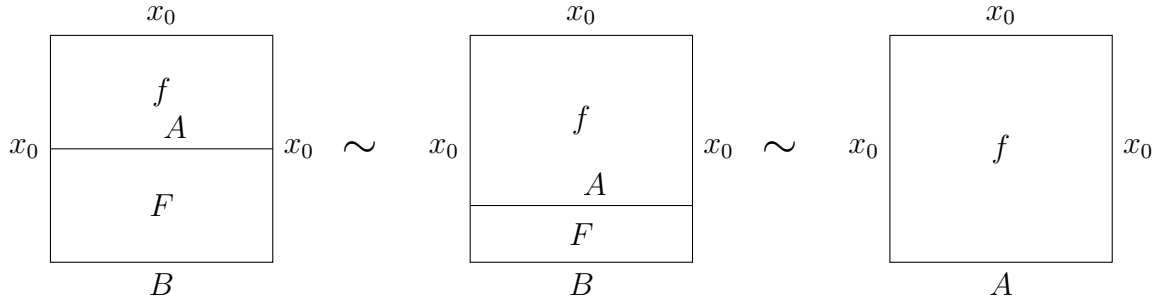
- Esattezza per $\pi_n(X, B, x_0)$: $j_* \circ i_* = 0$ direttamente dalla proposizione precedente, quindi $\text{Im}(i_*) \subseteq \ker(j_*)$.

Viceversa sia $f \in \ker(j_*)$, sempre per la proposizione precedente è omotopa a una funzione

con immagine contenuta in A, ma questo vuol dire che appartiene all'immagine di i_* , quindi $\text{Im}(i_*) \supseteq \ker(j_*)$.

- Esattezza per $\pi_n(X, A, x_0)$: $\partial \circ j_* = 0$, infatti presa la restrizione di una funzione $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$ a I^{n-1} ho che finisce in B, dunque per la proposizione precedente è nullo. Quindi $\text{Im}(j_*) \subseteq \ker(\partial)$.

Viceversa sia $f \in \ker(\partial)$, cioè una funzione $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ la cui restrizione a I^{n-1} è l'elemento neutro di $\pi_{n-1}(A, B, x_0)$, cioè omotopa a una funzione con immagine contenuta in B tramite un'omotopia F che fissa ∂I^{n-1} (in B).



Se "unisco" $F : I^{n-1} \times I \rightarrow A$ a f ottengo una funzione di $\pi_n(X, B, x_0)$, come nella prima figura, a questo punto si nota che se da questa funzione si schiaccia il blocco di F si ottiene un'omotopia con f , come nell'immagine. Questo dice che $f \in \text{Im}(j_*)$, da cui $\text{Im}(j_*) \supseteq \ker(\partial)$.

□

Nel caso $B = x_0$ la successione esatta fornisce una relazione fra i gruppi assoluti e relativi di (X, A)

$$\dots \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \dots$$

1.3 Connessione omotopica

In topologia esistono vari concetti legati all'idea di connessione, infatti uno spazio può essere convesso, stellato, connesso per archi, connesso, semplicemente connesso. Esiste un'ulteriore generalizzazione che può essere definita grazie ai gruppi di omotopia. Uno spazio X si dice n -connesso se $\pi_i(X, x_0) = 0 \forall i \leq n$. La 0-connessione corrisponde ad essere CPA (dato che π_0 conta le componenti CPA), la 1-connessione invece alla semplice connessione. Nonostante nella definizione ci sia il punto base x_0 , dato che la n -connessione implica la 0-connessione i gruppi di omotopia non dipendono dal punto base a meno di isomorfismo, per questo la n -connessione non dipende dal punto base. Un modo di riformulare questa proprietà evidenziando l'indipendenza dal punto base è il seguente

Proposizione 1.11. Sono equivalenti le seguenti proprietà:

- 1) X è n -connesso

2) Ogni mappa $S^i \rightarrow X$ è omotopa a una funzione costante $\forall i \leq n$

3) Ogni mappa $S^i \rightarrow X$ si estende a una mappa $D^{i+1} \rightarrow X \forall i \leq n$

Dimostrazione. 1) \Leftrightarrow 2) è la definizione

2) \Rightarrow 3) Sia $H : S^i \times I \rightarrow X$ l'omotopia fra f e una funzione costante in x_0 , cioè $H(x, 1) = x_0$, cioè H è costante su $S^i \times \{1\}$, quindi posso collassarla e passare al quoziente $S^i \times I / S^i \times \{1\} = CS^i \simeq D^{i+1}$

$$\begin{array}{ccc} S^i \times I & \xrightarrow{H} & X \\ \downarrow p & \nearrow F & \\ D^{i+1} & & \end{array}$$

La funzione ottenuta passando al quoziente è la funzione cercata dato che $f = H|_{S^i \times \{0\}} = (p \circ F)|_{S^i \times \{0\}} = F|_{S^i}$ (dato che p collassa $S^i \times \{1\}$ e su tutto il resto si comporta come l'identità)

3) \Rightarrow 2) Fisso $f : S^i \rightarrow X$ e $F : D^{i+1} \rightarrow X$ tale che $F|_{S^i} = f$. Si definisce $H : S^i \times I \rightarrow X$ con $H(x, t) = F((1-t)x)$, in questo modo ho $H(x, 0) = F(x) = f(x)$ dato che $x \in S^i$, e $H(x, 1) = F(0)$ cioè una funzione costante.

□

Si estende il concetto anche alle coppie (X, A) grazie ai gruppi di omotopia relativi. Una coppia (X, A) si dice n -connessa se $\pi_i(X, A, x_0) = 0 \forall i \leq n$ con $i > 0$.

Proposizione 1.12. Sono equivalenti le seguenti proprietà:

- 1) (X, A) è n -connesso
- 2) Ogni funzione $(D^i, S^{i-1}) \rightarrow (X, A)$ è omotopa rel S^{i-1} a una funzione con immagine in $A \forall i \leq n$
- 3) Ogni funzione $(D^i, S^{i-1}) \rightarrow (X, A)$ è omotopa tramite mappe della stessa forma a una funzione con immagine in $A \forall i \leq n$
- 4) Ogni mappa $(D^i, S^{i-1}) \rightarrow (X, A)$ è omotopa a una funzione costante $\forall i \leq n$

Dimostrazione. 1) \Leftrightarrow 2) \Leftrightarrow 4) è immediato dal criterio di compressione e dalla definizione di π_n , 2) \Rightarrow 3) è immediata poiché un'omotopia rel S^{i-1} è anche della forma $(D^i, S^{i-1}) \rightarrow (X, A)$, dato che f lo è.

Per 3) \Rightarrow 2) si può usare la stessa idea della figura nella dimostrazione del criterio di compressione 1.9, cioè costruire una nuova omotopia che fissi il bordo. □

Nonostante $\pi_0(X, A, x_0)$ non sia definito si può estendere la nozione anche per $i=0$ grazie alle proprietà 2), 3) e 4). Dato che D^0 è un punto e il suo bordo è nullo $D^0 \times I \simeq I$, un'omotopia diventa un cammino, quindi le 3 condizioni per $i=0$ equivalgono a dire che esiste un cammino da un punto di X a uno di A , cioè che in ogni componente CPA di X ci sono punti di A . Questa è dunque l'interpretazione di (X, A) 0-connesso.

Definizione 1.13. Una mappa $f : X \rightarrow Y$ si dice *n-connessa* se $f_* : \pi_i(X, x_0) \rightarrow \pi_i(Y, y_0)$ è un isomorfismo per $i < n$ e suriettiva per $i = n$

Richiedere che un'inclusione $X \hookrightarrow Y$ sia n-connessa è equivalente a richiedere che la coppia (X, Y) sia n-connessa, segue direttamente dalla successione esatta lunga di (X, Y) . Il concetto si estende anche per la ∞ -connessione, cioè una mappa che induce isomorfismi su tutti i gruppi di omotopia.

In tutta questa sezione potremmo nuovamente usare l'interpretazione di π_n coi cubi al posto dei dischi, basterebbe sostituire D^k con I^k e S^k con ∂I^k

Capitolo 2

Risultati fondamentali e tecniche di computazione

In questo capitolo verranno viste alcune delle proprietà fondamentali e verranno introdotti degli importanti strumenti che permetteranno di calcolare alcuni gruppi di omotopia, anche non banali. Molti risultati vengono enunciati solo per CW-complessi, un fatto che euristicamente può essere motivato ricordando che i CW-complessi sono composti da celle omeomorfe a dischi, e dunque i gruppi di omotopia, essendo composti da funzioni con dominio S^n , contengono molte informazioni su di essi.

2.1 Approssimazione cellulare

Una funzione fra CW-complessi $f : X \rightarrow Y$ si dice *cellulare* se $f(X^n) \subseteq Y^n \quad \forall n$. Una funzione del genere ha delle proprietà desiderabili, e sarebbe naturale adottarle ogni qualvolta fosse possibile. In questo senso è sorprendente che, a meno di omotopia, ciò è sempre possibile, come afferma il seguente

Teorema 2.1. Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione fra CW-complessi, allora f è omotopa a una funzione cellulare. Se f è già cellulare su un sottocomplesso A , l'omotopia può essere presa in modo che fissi A .

Dimostrazione. Per induzione sul n -scheletro. Per $n=0$ è vero perché posso sempre trovare un'omotopia di f che sia cellulare su X^0 , infatti le 0-celle di X finiscono in delle celle di Y , che sono attaccate a delle celle di dimensione minore; dunque esiste sempre un cammino da un punto di Y a una 0-cella, che fornisce l'omotopia di f cercata.

Assumiamo che f sia omotopa a una funzione che sia cellulare su $X^{n-1} \cup A$. Sia e_α^n una n -cella di $X-A$, notiamo che la sua chiusura è compatta in X dato che è $\phi_\alpha(D_\alpha^n)$, quindi $f(e_\alpha^n)$ è compatto in Y e dunque interseca un numero finito di celle in Y . Sia e_β^r la cella di dimensione massima che interseca $f(e_\alpha^n)$ e supponiamo che $r > n$, altrimenti f sarebbe già cellulare su $X^{n-1} \cup e_\alpha^n$.

Diamo per buono un risultato, lemma 4.10 di Hatcher, che ci permette di dire che $f|_{X^{n-1} \cup e_\alpha^n}$

può essere deformata tramite omotopia rel X^{n-1} a una funzione g tale che $g(e_\alpha^n)$ non contenga un punto $p \in e_\beta^r$. Dato che e_β^r può essere retratto in p , posso ulteriormente deformare g componendo con la retrazione di $Y - \{p\}$ in $Y - e_\beta^r$ e ottengo f_1 , la cui immagine non interseca e_α^n . Ripetendo il procedimento un numero finito di volte ottengo una funzione la cui immagine, se ristretta a e_α^n , non tocca nessuna delle celle in Y che intersecavano $f(e_\alpha^n)$ inizialmente (che come abbiamo detto sono in numero finito). Se faccio la stessa cosa per ogni n -cella di $X-A$ e lascio invariato il comportamento sulle celle di A^n (dove f è già cellulare) ottengo un'omotopia di $f|_{X^n}$ rel $X^{n-1} \cup A^n$.

Dato che (X, X^n) è una coppia di CW-complessi posso usare la proprietà di estensione dell'omotopia e dunque f è omotopa su tutto X ad una funzione cellulare su X^n . Questo non basta a concludere perché potrebbero esserci celle di dimensione maggiore di n su cui f non è cellulare. Se X ha dimensione finita posso dividere l'intervallo $[0, 1]$ in tanti pezzi quante le applicazioni del passo induttivo in modo da creare un'omotopia unica che in ogni intervallino è una di quelle ottenute a un passo induttivo. Se X ha dimensione infinita allora si applica la stessa idea ma con questa suddivisione: $[1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^{k+1}}]$, composta da $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}]$, ... \square

Osservazione 2.2. L'approssimazione cellulare può essere facilmente estesa a coppie di CW-complessi $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, infatti basta usare l'approssimazione cellulare ad $f|_A$ ed estendere l'omotopia ad X usando la proprietà di estensione dell'omotopia 0.10. A questo punto uso l'approssimazione cellulare della funzione su x con un'omotopia rel A .

2.2 Teorema di Whitehead

Abbiamo visto che spazi omotopicamente equivalenti hanno gruppi di omotopia isomorfi, il viceversa è quasi vero per CW-complessi, ed è quello che afferma il teorema di Whitehead.

Lemma 2.3 (di compressione). Sia (X, A) una coppia di CW-complessi e (Y, B) una coppia qualsiasi di spazi topologici con $B \neq \emptyset$, tale che per ogni n per cui $X - A$ ha una cella di dimensione n vale $\pi_n(Y, B, y_0) = 0 \forall y_0 \in B$. Allora ogni funzione $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ è omotopa rel A a una funzione con immagine in B .

Per $n=0$ l'ipotesi è da intendere come (Y, B) 0-connesso. Questo è un risultato tecnico che verrà utilizzato per la dimostrazione del teorema principale.

Dimostrazione. Mostriamo l'enunciato per X^k il k -scheletro, per induzione su k . Si noti che se $X-A$ non ha celle di dimensione k , allora $X^k \subseteq A$ dunque $f|_{X^k}$ ha già immagine contenuta in B , quindi analizziamo solo il caso in cui $X-A$ ha celle di dimensione k , cioè in cui $\pi_n(Y, B, y_0) = 0$. Per $k=0$ abbiamo che (Y, B) è 0-connesso, cioè ogni componente CPA di Y contiene punti di B , ma X^0 è un insieme discreto di punti dunque posso vedere $f|_{X^0}$ come tante funzioni costanti. Ma allora considero i cammini che vanno dai punti nell'immagine di $f|_{X^0}$, cioè in Y , ai punti di

B che sono presenti nella stessa componente CPA, e questi mi danno un'omotopia di $f|_{X^0}$ a una funzione con immagine in B.

Ora si assuma che per f esista un'omotopia ad una funzione che manda X^{k-1} in B. Sia ora D_α^k k-cella di X-A e $\phi_\alpha : D_\alpha^k \rightarrow X$ la sua funzione caratteristica, $f|_{X^k} \circ \phi_\alpha : (D_\alpha^k, S^{k-1}) \rightarrow (Y, B)$ ammette un'omotopia rel S^{k-1} a una funzione con immagine in B dato che $\pi_k(Y, B, y_0) = 0$. Unisco le due funzioni $(f|_{X^{k-1}}, f|_{X^k} \circ \phi_\alpha)$ sull'unione disgiunta $X^{k-1} \sqcup D_\alpha^k$ e l'omotopia appena definita me ne fornisce una per questa funzione fissando X^{k-1} , H che nell'istante finale mi dà una funzione con immagine in B (dato che $f|_{X^{k-1}}$ lo fa già per ipotesi induttiva).

$$\begin{array}{ccc} (D_\alpha^k \sqcup X^{k-1}) \times I & \xrightarrow{H} & Y \\ \downarrow p & \nearrow \tilde{H} & \\ (D_\alpha^k \sqcup X^{k-1} / \sim_{\varphi_\alpha}) \times I & & \end{array}$$

Passando al quoziente ho f ristretta su $D_\alpha^k \sqcup X^{k-1} / \sim_{\varphi_\alpha}$, ma posso passare al quoziente anche con l'omotopia H come nel diagramma. Quindi ottengo un'omotopia per f ristretta ad X^{k-1} con l'aggiunta di una k-cella che fissa X^{k-1} , posso fare lo stesso per tutte le k-celle, e posso aggiungere anche A (che potrebbe avere celle di dimensione maggiore di k) fissandolo. Quindi ho un'omotopia di $f|_{X^{k \cup A}}$ in una funzione che finisce in B rel A.

A questo punto si usa la proprietà di estensione dell'omotopia e si conclude come nella dimostrazione dell'approssimazione cellulare. \square

Teorema 2.4 (di Whitehead). Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione fra CW-complessi tale che $f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(y_0))$ sia un isomorfismo $\forall n$, allora X e Y hanno lo stesso tipo di omotopia. Inoltre, se f è l'inclusione di un sottocomplesso, allora X è un retratto di deformazione di Y.

Dimostrazione. Vediamo prima l'ultima affermazione. Si consideri la successione esatta della coppia (Y,X) che, dato che per ipotesi l'inclusione di X in Y induce isomorfismi sui gruppi di omotopia, assume questa forma: $\dots 0 \rightarrow \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y) \rightarrow 0 \dots$, cioè $\forall n$ vale $\pi_n(Y, X) = 0$, siamo dunque nelle ipotesi del lemma precedente. Applicandolo all'identità $id : (Y, X) \rightarrow (Y, X)$ la deformiamo in una funzione $r : Y \rightarrow X$, cioè una retrazione, cioè abbiamo che X è un retratto di deformazione di Y.

Per il caso generale ci riconduciamo a quello appena trattato usando il mapping cylinder, in particolare f si può vedere come la composizione di $X \xrightarrow{i} M_f \xrightarrow{r} Y$ dove l'ultima funzione è un'equivalenza omotopica per l'osservazione 0.6, dunque anche i induce isomorfismi i_* poiché $i_* = r_*^{-1} \circ f_*$. Vorremmo mostrare che se f_* è un isomorfismo per ogni n allora M_f si retrae per deformazione su X, da cui si conclude ricordando l'osservazione 0.7. Se f è cellulare allora M_f è un CW-complesso, (vedi sotto) e se non lo è usiamo il teorema di approssimazione cellulare 2.1, da cui (M_f, X) è una coppia di CW-complessi. A questo punto abbiamo i che è un'inclusione che induce isomorfismi tramite il funtore π_n , per cui possiamo applicare la prima parte ad i e concludere che X è un retratto per deformazione di M_f .

Per finire vediamo perché f cellulare implica che M_f è un CW-complesso: considero $X \times I$ (che è un CW-complesso per l'osservazione 0.11) e $A := X \times \{0\}$ la faccia a cui verrà incollato Y . A è una copia di X quindi posso vedere f come una funzione da $A \rightarrow Y$. Per la struttura di CW su M_f basta considerare le celle di $(X \times I) - A$ (è composto da celle essendo A un sottocomplesso) e Y , dato che A si identifica con Y . La richiesta che f sia cellulare serve a far sì che il bordo di n -celle finisca in $(n-1)$ -celle, infatti le celle di $(X \times I) - A$ che hanno bordo in X^{n-1} vanno bene, quelle che hanno bordo in A vengono mandate in Y^{n-1} grazie al fatto che f è cellulare. \square

Il teorema non richiede che i gruppi di due spazi siano isomorfi, ma che esista una funzione la cui sospinta sia un'isomorfismo per ogni n , ovvero che f sia ∞ -connessa, che è una richiesta più forte. Esistono infatti controesempi di spazi con gruppi di omotopia isomorfi e non omotopicamente equivalenti.

2.3 Fibrati

In dimensione 1 abbiamo i rivestimenti che possiamo vedere come una realizzazione geometrica del gruppo fondamentale. Una proprietà vitale di questi oggetti è il fatto che le omotopie si possano sollevare ad essi. A partire da ciò sviluppiamo una generalizzazione di questo concetto: le fibrazioni. L'esempio di fibrazione che ci tornerà più utile sono i fibrati, oggetti che localmente si comportano come un prodotto cartesiano.

Fibrazioni

Definizione 2.5. Una funzione $p : E \rightarrow B$ ha la *proprietà di sollevamento dell'omotopia per lo spazio* Y , che chiameremo anche HLP (homotopy lifting property), se ogni omotopia $f_t : Y \rightarrow B$ che ammette un sollevamento \tilde{f}_0 per la funzione f_0 , cioè tale che $f_0 = p \circ \tilde{f}_0$, ammette un sollevamento \tilde{f}_t a sua volta, che parte da \tilde{f}_0 .

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \tilde{f}_t \nearrow & \downarrow p & \\ X & \xrightarrow{f_t} & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & X & \\ & \uparrow i & \\ Y & \xleftarrow{f_t} & A \end{array}$$

È interessante notare che se si dualizza la nozione di sollevamento dell'omotopia si ottiene quella dell'estensione dell'omotopia 0.10, che abbiamo già usato.

Definizione 2.6. Una mappa $p : E \rightarrow B$ si dice *fibrazione* se ha la proprietà di sollevamento dell'omotopia per ogni spazio topologico X .

Sempre dualizzando la definizione si ottiene una cofibrazione $i : A \rightarrow X$, cioè una mappa per cui la proprietà di estensione dell'omotopia vale per ogni spazio Y .

Nel seguito ci concentreremo solo sulle fibrazioni, su alcuni tipi in particolare.

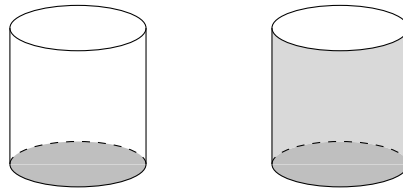
Definizione 2.7. Una mappa $p : E \rightarrow B$ per cui vale la proprietà di sollevamento delle omotopie per ogni disco D^k si dice *fibrato di Serre*

Essendo $D^k \simeq I^k$, avere la HLP per dischi o cubi è equivalente.

Osservazione 2.8. Abbiamo definito i gruppi di omotopia richiedendo che le omotopie fossero della stessa forma delle funzioni che consideriamo, quindi può essere utile considerare il sollevamento di omotopie di coppie: si dice che una funzione $p : E \rightarrow B$ ha la proprietà di sollevamento dell'omotopia per la coppia (X, A) se ogni omotopia $f_t : X \rightarrow B$, per cui esiste già un sollevamento $\tilde{f}_t : A \rightarrow E$, si solleva a un'omotopia $\tilde{f}_t : X \rightarrow E$ che parte dal sollevamento \tilde{f}_0 di f_0 che estende l'omotopia data su A .

L'unica richiesta aggiuntiva è che il sollevamento sia l'estensione di un'omotopia già data su A , dunque la proprietà equivale a poter estendere un sollevamento di una mappa definita su $(X \times I, X \times \{0\} \cup A \times I)$.

Osservazione 2.9. Per sollevare un'omotopia da D^k o $(D^k, \partial D^k)$ devo sollevarla da $(D^k, D^k \times \{0\})$ (per fissare f_0) o $(D^k, D^k \times \{0\} \cup \partial D^k \times I)$ (per quanto detto sopra) rispettivamente, come in figura, ma essendo questi ultimi due spazi omeomorfi, a meno di comporre per l'omeomorfismo o il suo inverso, la HLP per D^k e per la coppia $(D^k, \partial D^k)$ sono equivalenti.



In particolare possiamo sollevare le omotopie a partire da una coppia di CW-complessi (X, A) solo richiedendo la proprietà per i dischi, infatti per induzione sul n-scheletro basta costruire il sollevamento \tilde{f}_t su ogni singola cella di $X-A$, sollevando $D_\alpha^k \xrightarrow{\phi_\alpha} X \xrightarrow{f} B$ e posso attaccare le omotopie costruite nelle varie celle grazie all'ipotesi induttiva, perché posso fissare nel tempo il comportamento sul bordo ∂D_α^k .

Concludendo, le fibrazioni di Serre ammettono la HLP per ogni CW-complesso.

Proposizione 2.10. Sia $p : E \rightarrow B$ una fibrazione di Serre, $b_0 \in B$, $F := p^{-1}(b_0)$ e $x_0 \in F$. Allora $p_* : \pi_n(E, F, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$ è un isomorfismo per $n > 0$.

Dimostrazione. Mostriamo prima che p_* è suriettiva e poi che è iniettiva. (ricordando che un cubo I^n è un CW-complesso, quindi posso usare la HLP)

- Sia $f \in \pi_n(B, b_0)$, dunque della forma $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$. Si nota che la funzione costante in x_0 è un sollevamento di $f|_{J^{n-1}}$, infatti $f(J^{n-1}) = b_0 = p(x_0)$. Dato che $\partial I^{n-1} \subset J^{n-1}$ posso applicare HLP per la coppia $(I^{n-1}, \partial I^{n-1})$ e ottenere $\tilde{f} : I^{n-1} \times I \rightarrow E$ che solleva f , e vale $f(\partial I^n) = b_0 = p(\tilde{f}(\partial I^n))$ dunque $\tilde{f}(\partial I^n) \subseteq F$, cioè $\tilde{f} \in \pi_n(E, F, x_0)$ e $p_*(\tilde{f}) = f$. Quindi p_* è suriettiva

- Siano $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 \in \pi_n(E, F, x_0)$ tali che $p_*(\tilde{f}_0) = p_*(\tilde{f}_1)$. Sia $H : I^{n+1} \rightarrow B$ un'omotopia fra $p \circ \tilde{f}_0$ e $p \circ \tilde{f}_1$, abbiamo già un sollevamento parziale sul bordo del cilindro $I^n \times I$ meno una faccia, dato da

$$\tilde{H}_t(x) = \begin{cases} f_t(x) & (x, t) \in I^n \times \{t\}, \quad t \in \{0, 1\} \\ x_0 & (x, t) \in J^{n-1} \times I \end{cases}$$

In $I^n \times I$ l'ultima coordinata è il tempo, e \tilde{H}_t è definita su $I^n \times \partial I \cup J^{n-1} \times I$. Se scambio le ultime due coordinate di questo insieme ho che l'ultima coordinata non è mai nulla, in particolare diventa J^n . Usando HLP per la coppia (I^{n+1}, J^n) ottengo un'omotopia su tutto I^{n+1} che solleva H, e questa è un'omotopia fra $p \circ \tilde{f}_0$ e $p \circ \tilde{f}_1$.

□

Si prende la successione esatta lunga della coppia (E,F) e si sostituisce usando l'isomorfismo della proposizione p_*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \pi_n(F, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(E, x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(E, F, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(F, x_0) \\ & & & \searrow & \downarrow p_* & \nearrow & \\ & & & & \pi_n(B, b_0) & & \end{array}$$

Le due mappe oblique sono $p_* \circ j_*$ e $\partial \circ p_*^{-1}$, che chiamo, in maniera più sintetica, rispettivamente p_* e ∂ , ottenendo così la successione esatta associata a una fibrazione di Serre

$$\dots \pi_n(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, x_0) \dots$$

Fibrati

Definizione 2.11. Un *fibrato* è una struttura (E, F, p, B) dove $p : E \rightarrow B$ è una mappa per cui $\forall b \in B, \exists U$ intorno di B tale che $p^{-1}(U)$ è omeomorfo a $U \times F$ tramite φ_U e in modo che il diagramma commuti.

$$\begin{array}{ccc} & & p^{-1}(U) \\ & \nearrow \varphi_U & \downarrow p \\ U \times F & \longrightarrow & U \end{array}$$

Chiamiamo E lo spazio totale, B lo spazio base e F la fibra. Diremo direttamente che $p : E \rightarrow B$ è un fibrato con fibra F , e useremo anche $F \rightarrow B \rightarrow E$ per indicare più comodamente qual è la fibra.

Proposizione 2.12. Un fibrato è una fibrazione di Serre

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che la mappa $p : E \rightarrow B$ con fibra F ammette la HLP per ogni disco I^n . Sia $h : I^n \times I \rightarrow B$, con $h(x, t) = h_t(x)$, l'omotopia che vogliamo sollevare avendo già \tilde{h}_0 sollevamento di h_0 . Sia $U = \{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto di B , $\{h^{-1}(U_\alpha)\}$ è naturalmente un ricoprimento di $I^n \times I$, e dato che è compatto esiste il numero di Lebesgue λ del ricoprimento, grazie al teorema 0.13, per cui prendendo cubi C e intervalli $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ abbastanza piccoli (di diametro inferiore a λ) $C \times I_j$ finiscono in un U_α . Assumendo per induzione su n che g_t sia già stata sollevata su ∂C , che sono cubi di dimensione $n-1$. Inoltre possiamo sollevare g_t sull'interno di C costruendo separatamente ogni pezzo in ogni I_j , in questo modo ci siamo ricondotti a dover sollevare in ogni singolo $C \times I_j$ per poi attaccare tutti i pezzi. Essendo $C \times I_j$ una riparametrizzazione di $I^n \times I$ ci concentriamo su quest'ultimo e nel caso in cui h lo mandi tutto in un U_α .

$$\begin{array}{ccccc} & & p^{-1}(U_\alpha) & & \\ & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p & \nwarrow \varphi_\alpha & \\ I^n \times I & \xrightarrow{h} & U_\alpha & \xleftarrow{\quad} & U_\alpha \times F \end{array}$$

Considerando la commutatività del diagramma, fare \tilde{h} è come comporre h con l'inversa della proiezione al primo fattore, con φ_α . Per induzione e per ipotesi ho già $\tilde{h}(I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I) \subseteq p^{-1}(U_\alpha) \simeq U_\alpha \times F$, per cui la prima componente di \tilde{h} è semplicemente h , che è data, abbiamo quindi $\tilde{h}(x, t) = (h(x, t), \phi(x, t))$. Possiamo ottenere ϕ come composizione di $I^n \times I \rightarrow I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I \rightarrow F$ dove la prima è una retrazione e la seconda è la funzione che avevamo già. \square

Esempio 2.13. Se prendiamo una fibra F discreta abbiamo che il fibrato $p : E \rightarrow B$ è un rivestimento a $|F|$ fogli. Dato che in questo caso F ha tutti i gruppi di omotopia nulli per $n \geq 1$ la successione esatta lunga ci dice che $\pi_n(E) \simeq \pi_n(B) \quad \forall n \geq 2$, per $n=1$ abbiamo

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \pi_1(E, x_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0) \rightarrow \mathbb{Z}^{|F|-1} \rightarrow \pi_0(E, x_0) \rightarrow \pi_0(B, b_0)$$

che ci dice che la mappa $p_* : \pi_1(E, x_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$ è iniettiva, come già noto dalla teoria dei rivestimenti.

Esempio 2.14. Si ha un fibrato dato da $S^1 \rightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{C}$ dove $\mathbb{P}^n \mathbb{C} = S^{2n+1} / S^1$ quozientando per l'azione di S^1 data dal prodotto per elementi di norma 1 di \mathbb{C} . La mappa del fibrato $p : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{C}$ è la proiezione al quoziente, per cui è evidente che la fibra sia S^1 . Prendiamo il ricoprimento dato dalle carte affini $U_i = \{[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{P}^n \mathbb{C} \mid z_i \neq 0\}$, ho che $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times S^1$ data da $\varphi_i(z_0, \dots, z_n) = ([z_0, \dots, z_n], \frac{z_i}{|z_i|})$ è un'omeomorfismo, dato che $([z_0, \dots, z_n], \lambda) \mapsto \frac{\lambda |z_i|}{z_i} (z_0, \dots, z_n)$ è la sua inversa (basta comporre e vedere che esce l'identità) e sono entrambe continue. Quindi è un fibrato.

Esempio 2.15. Senza entrare nei dettagli, l'idea del caso precedente può essere usata usando anche i numeri reali \mathbb{R} , quaternioni \mathbb{H} e ottonioni \mathbb{O} al posto dei complessi, si ottengono così i seguenti fibrati: $S^0 \rightarrow S^n \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{R}$, $S^3 \rightarrow S^{4n+3} \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{H}$ e $S^7 \rightarrow S^{8n+7} \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{O}$.

In tutti e 3 i casi l'idea è la stessa, infatti lo spazio base è ottenuto come quoziente dello spazio

totale per l'azione data dalla moltiplicazione per gli elementi della fibra. Tralasciando il caso reale, per $n=1$ forniscono i cosiddetti fibrati di Hopf (gli unici):

$$S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2 \qquad S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4 \qquad S^7 \rightarrow S^{15} \rightarrow S^8$$

2.4 Escissione

Da quello che abbiamo visto finora, i gruppi di omotopia sembrano un buon candidato per essere una teoria omologica; purtroppo però l'escissione fallisce. Si può recuperare questa proprietà restringendoci in un certo intervallo dimensionale per spazi che soddisfano certe ipotesi di connettività.

Proposizione 2.16 (escissione omotopica). Sia $X = A \cup B$ uno spazio topologico, A e B due aperti tali che $C = A \cap B$ sia CPA e non vuoto. Se (A, C) è p -connesso e (B, C) è q -connesso, allora $j_* : \pi_i(A, C) \rightarrow \pi_i(X, B)$, la sospinta dell'inclusione, è un isomorfismo per $i < p+q$ ed è suriettiva per $i = p+q$.

L'escissione omologica assume questa forma: siano $Z \subseteq A \subseteq X$ in modo che $\bar{Z} \subseteq \overset{\circ}{A}$, allora l'inclusione induce isomorfismi $H_n(X - Z, A - Z) \rightarrow H_n(X, A)$.

Notiamo che se siamo nelle ipotesi della proposizione allora $\overline{B - A} \subseteq \overset{\circ}{B}$, e dato che $X - (B - A) = A$ e $B - (B - A) = C$ applicando l'escissione omologica ho $\pi_n(A, C) = \pi_n(X - (B - A), B - (B - A)) \simeq \pi_n(X, B)$. Per questo chiamiamo "escissione" anche la proprietà della proposizione, che però vale sotto delle ipotesi più stringenti rispetto a una qualsiasi teoria omologica, per le quali l'escissione è uno degli assiomi. Vediamo prima delle conseguenze

Teorema 2.17 (di Freudenthal). Sia X uno spazio $(n-1)$ -connesso, allora la mappa S data dal funtore di sospensione $\pi_i(X) \rightarrow \pi_{i+1}(SX)$ è un isomorfismo per $i < 2n-1$ ed è suriettiva per $i = 2n-1$.

Dimostrazione. Per $n=0$ l'enunciato non ha senso, quindi si ha $n > 0$, per cui X è sempre almeno CPA.

Chiamiamo $\pi : X \times I \rightarrow SX$ la proiezione al quoziente, e consideriamo i coni $A = \pi(X \times [0, \frac{2}{3}])$ e $B = \pi(X \times [\frac{1}{3}, 1])$ è facile vedere che questi sono aperti in SX (sono la proiezione al quoziente di aperti saturi, dove $[0, \frac{2}{3}[$ è aperto nella topologia di sottospazio di I). Si ha che $A \cap B = X \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Ora siano C_1X e C_2X i due coni attaccati alla base X che formano SX , questi non sono necessariamente aperti, quindi non potrei usare l'escissione a priori, ma retraindo per deformazione si ha $A \sim C_1X$, $B \sim C_2X$ e $A \cap B \sim X = C_1X \cap C_2X$, dunque hanno gli stessi gruppi di omotopia. Per questo motivo, a meno di isomorfismo, continuo il ragionamento usando solo C_1X , C_2X e $C_1X \cap C_2X = X$.

Dato che CX è contraibile ha tutti i gruppi di omotopia nulli; in particolare le successioni esatte delle coppie (C_1X, X) e (SX, C_2X) sono rispettivamente

$$\dots 0 \rightarrow \pi_{n+1}(C_1X, X) \rightarrow \pi_n(X) \rightarrow 0 \dots \qquad \dots 0 \rightarrow \pi_n(SX) \rightarrow \pi_n(SX, C_2X) \rightarrow 0 \dots$$

che mi danno gli isomorfismi fra gli elementi non nulli che ci sono; usando ciò posso vedere la mappa di sospensione come la composizione $\pi_n(X) \simeq \pi_{n+1}(C_1X, X) \xrightarrow{i_*} \pi_n(SX, C_2X) \simeq \pi_{n+1}(SX)$ dove la mappa centrale è la sospinta dell'inclusione.

Ricordando che $SX = C_1X \cup C_2X$ e $C_1X \cap C_2X = X$ con X CPA, mancano solo le ipotesi di connettività per poter applicare l'escissione: essendo X (n-1)-connesso, i suoi primi n-1 gruppi di omotopia sono nulli, la successione esatta lunga delle coppie (C_1X, X) e (C_2X, X) mi dice che entrambe le coppie sono n-connesse.

Applico l'escissione che mi dice che i_* è un isomorfismo. \square

Dimostrazione dell'escissione

D'ora in poi A e B saranno aperti di X con $X = A \cup B$ e $C = A \cap B$ non vuota e CPA. Sia $\Omega(X; A, B) := \{w : I \rightarrow X \mid w(0) \in A, w(1) \in B\}$ l'insieme dei cammini in X che partono in A e finiscono in B . Si nota che $\Omega(A; A, C) \subset \Omega(X; A, B)$. Questi sono spazi topologici se dotati della topologia compatta aperta, quindi posso considerarne i gruppi di omotopia.

Useremo i seguenti risultati, le loro dimostrazioni sono nell'appendice A.

Teorema 2.18. Siano (A, C) e (B, C) rispettivamente p-connesso e q-connesso. Allora l'inclusione $\alpha : \Omega(A; A, C) \hookrightarrow \Omega(X; A, B)$ è (p+q-1)-connessa.

Proposizione 2.19. Sia $(p_1, p_2) : (E_1, E_2) \rightarrow B$ in modo che p_1 sia una fibrazione di Serre e anche la restrizione, che chiamiamo p_2 , lo sia a sua volta. Allora (E_1, E_2) è n-connessa \Leftrightarrow la coppia di fibre $(p_1^{-1}(b), p_2^{-1}(b))$ è n-connessa per ogni $b \in B$.

Proposizione 2.20. La mappa $p_1 : \Omega(X; A, B) \rightarrow X$ definita da $p(\gamma) = \gamma(0)$ è una fibrazione di Serre. Lo stesso vale per $p_2 : \Omega(A; A, C) \rightarrow A$.

Ora dimostriamo l'escissione.

Dimostrazione. Prendiamo le fibrazioni della proposizione precedente 2.20, le fibre di un punto $b \in B$ e $c \in C$ sono rispettivamente $\Omega(X; b, B)$ e $\Omega(A; c, C)$. Abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \Omega(X; b, B) & \hookrightarrow & \Omega(X; A, B) & \xrightarrow{p_1} & X \\ \beta \uparrow & & \alpha \uparrow & & \uparrow \\ \Omega(A; c, C) & \hookrightarrow & \Omega(A; A, C) & \xrightarrow{p_2} & A \end{array}$$

Il teorema 2.18 dice che α è (p+q-1)-connessa, mentre la proposizione 2.19 dice che β ha la stessa connettività, dunque anche β è (p+q-1)-connessa

Si ha $\pi_n(\Omega(X; b, B)) \simeq \pi_{n+1}(X, B, b)$, infatti preso un rappresentante della classe d'omotopia $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (\Omega(X; b, B), \gamma_b)$ con γ_b il cammino costante in b . Ho che $f(x)$ è un cammino per ogni x , posso passare in maniera naturale a una mappa $g : I^n \times I \rightarrow X$ con $g(x, t) = f(x)(t)$. Questa mappa g possiede le seguenti proprietà: finisce in X ; $\partial I^n \times I \cup I^n \times \{0\}$ viene mandato in b , ed è omeomorfo ad J^{n-1} ; $\partial I^n \times \{1\}$ finisce in B . Questo ci dice che, a meno di riparametrizzare,

g è il rappresentante di una classe $\pi_n(X, B, b)$. Si può considerare anche la costruzione inversa e ottenere l'isomorfismo. Si fa la stessa cosa per $\pi_n(\Omega(A; c, C))$ e si ottiene il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\Omega(X; b, B), \gamma_b) & \xrightarrow{\simeq} & \pi_{n+1}(X, B, b) \\ \beta_* \uparrow & & j_* \uparrow \\ \pi_n(\Omega(A; c, C), \gamma_c) & \xrightarrow{\simeq} & \pi_{n+1}(A, C, c) \end{array}$$

Dato che β è $(p+q-1)$ -connessa e il diagramma commuta, la sospinta dell'inclusione j_* è un isomorfismo per $n+1 < p+q-1$, cioè per $n < p+q$ ed è suriettiva per $n = p+q$ \square

2.5 Alcuni calcoli

In questa sezione raccogliamo i frutti di tutti i risultati esposti finora e vediamo come possiamo calcolare diversi gruppi di omotopia.

- 1) Come conseguenza dell'isomorfismo fra gruppi di omotopia di un rivestimento e lo spazio rivestito, (esempio 2.13) abbiamo che uno spazio X che ammette rivestimento universale contraibile ha $\pi_n(X, x_0) = 0 \ \forall n \geq 2$. Ad esempio S^1 ha rivestimento universale \mathbb{R} , $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ ha rivestimento universale \mathbb{R}^n , e quelle superfici di Riemann di genere $g > 1$ che hanno come rivestimento universale il disco di Poincaré.

Per lo stesso motivo, dato che S^i riveste $\mathbb{P}^i \mathbb{R}$, si ha $\pi_n(\mathbb{P}^i \mathbb{R}) \simeq \pi_n(S^i)$ per $n \neq 1$

- 2) $\pi_n(S^m) = 0 \ \forall n < m$, quindi S^n è $(n-1)$ -connesso. Si considera la struttura di CW-complesso su S^n data da un punto e una n -cella col bordo collassato sulla 0-cellula. Per una qualsiasi funzione $(S^n, s_0) \rightarrow (S^m, s_1)$ si considera l'omotopia data dall'approssimazione cellulare 2.1, che finisce in una funzione costante dato che l' n -scheletro di S^m è la singola 0-cellula.

- 3) Se (X, A) è una coppia di CW-complessi tale che $X^n = A^n$, applicando l'approssimazione cellulare per funzioni fra coppie (osservazione 2.2) a $(D^i, \partial D^i) \rightarrow (X, A)$ con $i \leq n$ ho che queste sono nulle per il criterio di compressione 1.9.

Questo dice che se $X-A$ ha solo celle di dimensione maggiore di n allora (X, A) è n -connesso. In particolare (X, X^n) è n -connesso, e la successione esatta lunga ci dice che $\pi_n(X) \simeq \pi_i(X^n) \ \forall i \leq n$. Dunque gli n -scheletri di un CW-complesso sono un'approssimazione dello spazio sempre migliore con gruppi di omotopia fino ad n uguali.

Ad esempio $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ e $\mathbb{P}^m \mathbb{R}$ avranno gruppi di omotopia isomorfi fino all'indice $\min\{n, m\}$

- 4) Le successioni esatte associate ai fibrati di Hopf (esempio 2.15) ci danno alcune informazioni interessanti.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \pi_2(S^1) & \rightarrow & \pi_2(S^3) & \rightarrow & \pi_2(S^2) & \rightarrow & \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^3) \rightarrow \pi_1(S^2) \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel & \parallel \\ 0 & & 0 & & & & 0 & 0 \end{array}$$

dunque $\pi_1(S^1) \simeq \pi_2(S^2)$. Inoltre, come visto in 1), $\pi_n(S^1) = 0$ per $n \neq 1$, perciò il resto della successione dice che $\pi_n(S^2) \simeq \pi_n(S^3)$ per $n > 2$.

- 5) $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$. Come mostrato in 2) S^n è $(n-1)$ -connesso, dunque il teorema 2.17 di Freudenthal mi dice che $\pi_n(S^n) \simeq \pi_{n+1}(S^{n+1})$, l'unico caso degenero è $n=1$ per cui Freudenthal mi dice solo che la mappa è suriettiva, ma come visto in 4) $\pi_1(S^1) \simeq \pi_2(S^2)$, e sapendo che $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ si conclude.
- 6) Per gli altri fibrati di Hopf non tutta la successione ci dà informazioni che riusciamo ad utilizzare come nel primo caso, perchè non abbiamo un'informazione analoga a $\pi_n(S^1) = 0$ per $n \neq 1$. Possiamo sfruttare il range di indici in cui i gruppi di omotopia della sfera di dimensione maggiore che compare nel fibrato si annullano, mentre i gruppi delle altre sfere no:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z} & & & & 0 & & & & & & & & & \\
 & & & & \parallel & & & & \parallel & & & & & & & & & \\
 \dots \pi_7(S^3) & \longrightarrow & \pi_7(S^7) & \longrightarrow & \pi_7(S^4) & \longrightarrow & \pi_6(S^3) & \longrightarrow & \pi_6(S^7) & \longrightarrow & \pi_6(S^4) & \longrightarrow & \pi_5(S^3) & \longrightarrow & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 \longrightarrow \pi_5(S^7) & \longrightarrow & \pi_5(S^4) & \longrightarrow & \pi_4(S^3) & \longrightarrow & \pi_4(S^7) & \longrightarrow & \pi_4(S^4) & \longrightarrow & \pi_3(S^3) & \longrightarrow & \pi_3(S^7) & \dots & & & & \\
 & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & & \\
 & & 0 & & & & 0 & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & 0 & & & & &
 \end{array}$$

Ne deduciamo che $\pi_n(S^4) \simeq \pi_{n-1}(S^3)$ per $4 \leq n \leq 6$ e che $\pi_6(S^3)$ è un quoziente di $\pi_7(S^4)$ per il primo teorema di isomorfismo.

Lo stesso ragionamento con l'ultimo fibrato di Hopf dice $\pi_n(S^8) \simeq \pi_{n-1}(S^7)$ per $8 \leq n \leq 14$ e che $\pi_{14}(S^7)$ è un quoziente di $\pi_{15}(S^8)$

- 7) I punti 4) e 5) ci dicono più esplicitamente che $\pi_3(S^2) \simeq \pi_3(S^3) \simeq \mathbb{Z} \simeq \pi_2(S^2)$

Usando questi calcoli possiamo fornire un esempio che mostra che l'escissione non funziona in ogni dimensione. Se l'escissione funzionasse avremmo $\pi_n(X, A) \simeq \pi_n(X/A)$, come in omologia. La successione esatta della coppia (D^2, S^1) dice che $\pi_n(D^2, S^1) \simeq \pi_{n+1}(S^1) = 0$ per $n \neq 0$ (dato che D^2 è contraibile) mentre $D^2/S^1 \simeq S^2$ per cui $\mathbb{Z} \simeq \pi_2(D^2/S^1) \not\simeq \pi_2(D^2, S^1) = 0$, similmente per π_3

Capitolo 3

Omotopia e (co)omologia

Abbiamo visto che i gruppi di omotopia non formano una teoria omologica, ma ci sono comunque delle relazioni fra omotopia e omologia. In questo capitolo approfondiremo gli spettri, degli oggetti che in un certo senso rappresentano le teorie (co)omologiche, e vedremo anche grazie a questi dei legami fra omotopia e omologia difficilmente intuibili dalle definizioni. Ci concentriamo sui CW-complessi.

3.1 Teorie (co)omologiche

Definizione 3.1. Una *teoria omologica straordinaria* è una successione di funtori $h_n : \mathbf{CW}^2 \rightarrow \mathbf{AbGrp}$ e trasformazioni naturali $\partial_n : h_n \rightarrow h_{n-1}$ in modo che valgano le seguenti proprietà, note come assiomi di Eilenberg-Steenrod:

- 1) *Invarianza omotopica:* $f \sim g \Rightarrow h_n(f) = h_n(g) \quad \forall n$
- 2) *Escissione:* per ogni coppia (X, A) , sia $U \subseteq A$ tale che $\overline{U} \subseteq \overset{\circ}{A}$, allora $i_* : h_n(X - U, A - U) \rightarrow h_n(X, A)$ è un isomorfismo.
- 3) *Successione esatta:* ponendo $h_n(A) := h_n(A, \emptyset)$, ogni coppia (X, A) induce la seguente successione esatta lunga

$$\dots h_n(A) \rightarrow h_n(X) \rightarrow h_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} h_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

- 4) *Additività:* se $X = \bigsqcup X_\alpha$ allora $\bigoplus i_{*\alpha} : \bigoplus h_n(X_\alpha) \rightarrow h_n(X)$ è un isomorfismo

Una *teoria coomologica straordinaria* si ottiene con gli stessi assiomi ma su $(\mathbf{CW}^2)^{op}$, quindi i funtori h^n sono contravarianti; inoltre, nel terzo assioma si considera il prodotto e non la somma diretta dei gruppi.

Osservazione 3.2. Chiameremo $h_n(X) := h_n(X, \emptyset)$ la versione assoluta, $h_n(X, A)$ quella relativa e $h_n(X, pt) = \tilde{h}_n(X)$ la versione ridotta; queste sono legate da $h_n(X) = h_n(pt) \oplus \tilde{h}_n(X)$.

Fornire una teoria relativa o la sua versione ridotta è equivalente, infatti possono essere facilmente costruite l'una conoscendo l'altra. Per la versione ridotta si possono riformulare gli assiomi togliendo l'escissione, mettendo nella successione esatta $\tilde{h}_n(X/A)$ al posto di $h_n(X, A)$ e usando il wedge al posto dell'unione disgiunta, dato che stiamo specificando un punto base per ogni spazio.

Si dice che la teoria soddisfa l'"assioma della dimensione" se $h_n(pt) = 0$ per ogni $n \neq 0$. Se questa proprietà è soddisfatta, la teoria si dice ordinaria, e non straordinaria. I gruppi $h_n(pt)$ si chiamano coefficienti della teoria. Analogamente per h^n .

Osservazione 3.3. Nella definizione stiamo usando un abuso di notazione, abbiamo detto che ∂_n è una trasformazione naturale, cioè il seguente diagramma commuta per ogni coppia (X, A)

$$\begin{array}{ccc} h_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_n} & h_{n-1}(X, A) \\ \downarrow h_n(f) & & \downarrow h_{n-1}(f) \\ h_n(X', A') & \xrightarrow{\partial_n} & h_{n-1}(X', A') \end{array}$$

Quello che facciamo per ottenere una mappa $h_n(X, A) \rightarrow h_{n-1}(A)$ è considerare il diagramma con $(X', A') = (A, \emptyset)$, e comporre $h_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} h_{n-1}(X, A) \xrightarrow{h_{n-1}(i)} h_{n-1}(A)$ (oppure $\partial_{n-1} \circ h_n(i)$ per commutatività).

Questi assiomi colgono le proprietà essenziali dell'omologia e coomologia singolare che le rendono più facili da computare rispetto all'omotopia; come abbiamo visto, nonostante i risultati teorici del secondo capitolo, conosciamo ancora pochi gruppi di omotopia espliciti, anche per le sole sfere. In particolare abbiamo visto che l'escissione fallisce, dunque i gruppi di omotopia non formano una teoria omologica poiché non vale il secondo assioma.

Definizione 3.4. Due teorie omologiche h_n e k_n si dicono isomorfe se esistono trasformazioni naturali $\tau : h_n \rightarrow k_n$ tali che per ogni oggetto X , $\tau : h_n(X) \rightarrow k_n(X)$ sia un isomorfismo per ogni n .

3.2 Spettri

Definizione 3.5. Uno *spettro* E è una successione di CW-complessi E_n e mappe di strutture $\epsilon_n : \Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}$ per ogni n .

Un Ω -*spettro* è uno spettro per cui le mappe di struttura $E_n \rightarrow \Omega E_{n+1}$ sono ∞ -connesse, cioè inducono isomorfismi fra tutti i gruppi di omotopia di ΣE_n e E_{n+1} per ogni n .

Ricordando che Σ e Ω sono aggiunti (osservazione 0.18), le mappe di struttura possono essere prese equivalentemente come $\Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}$ o $E_n \rightarrow \Omega E_{n+1}$; nonostante ciò, in generale se una mappa $\Sigma X \rightarrow Y$ è ∞ -connessa allora la mappa associata $X \rightarrow \Omega Y$ può non esserlo, e viceversa.

Per gli Ω -spettri si richiede proprio che la mappa $E_n \rightarrow \Omega E_{n+1}$ sia ∞ -connessa.

Esiste un teorema di Milnor che afferma che se X è un CW-complesso allora ΩX è omotopicamente equivalente a un CW-complesso. Per un Ω -spettro si potrebbe richiedere direttamente che le mappe di struttura siano equivalenze omotopiche, grazie al teorema di Whitehead 2.4. Questa modifica non semplificherebbe la trattazione, e in generale si lavora non solo coi CW-complessi, quindi lasceremo la richiesta più debole per le mappe di struttura.

Definizione 3.6. Una funzione fra spettri (X_*, ϵ_*) e (Y_*, γ_*) è un insieme di mappe $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ in modo che il seguente diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc} \Sigma X_n & \xrightarrow{\epsilon_n} & X_{n+1} \\ \downarrow \Sigma f & & \downarrow f_{n+1} \\ \Sigma Y_n & \xrightarrow{\gamma_n} & Y_{n+1} \end{array}$$

Definizione 3.7. Il k -esimo gruppo d'omotopia dello spettro E è dato dal limite diretto

$$\pi_k(E) := \varinjlim \pi_{k+n}(E_n)$$

Dove le mappe del sistema su cui calcolare il limite sono date da

$$\pi_k(E_k) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{k+1}(\Sigma E_k) \xrightarrow{(\epsilon_n)_*} \pi_{k+1}(E_{k+1})$$

Osservazione 3.8. Abbiamo definito il gruppo d'omotopia di uno spettro tenendo conto dei gruppi di omotopia dei singoli spazi che lo compongono e delle mappe di struttura. Un modo di visualizzare quello che sta succedendo è il seguente:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \pi_2(E_0) & \longrightarrow & \pi_3(E_1) & \longrightarrow & \pi_4(E_2) & \longrightarrow & \dots & \pi_2(E) \\ & & & & & & & \downarrow \\ \pi_1(E_0) & \longrightarrow & \pi_2(E_1) & \longrightarrow & \pi_3(E_2) & \longrightarrow & \dots & \pi_1(E) \\ & & & & & & & \downarrow \\ \pi_0(E_0) & \longrightarrow & \pi_1(E_1) & \longrightarrow & \pi_2(E_2) & \longrightarrow & \dots & \pi_0(E) \\ & & & & & & & \downarrow \\ & & & & \pi_0(E_1) & \longrightarrow & \pi_1(E_2) & \longrightarrow \dots & \pi_{-1}(E) \\ & & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \pi_0(E_2) & \longrightarrow \dots & \pi_{-2}(E) \\ & & & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & & & \\ E_0 & & E_1 & & E_2 & & \dots & & E \end{array}$$

Sulle colonne abbiamo i gruppi di omotopia dei singoli spazi, e ogni colonna aggiunta viene traslata verso il basso: questo permette di avere sulle righe il sistema su cui calcolare il colimite per i gruppi di omotopia dello spettro E , che mettiamo come ultima colonna. La definizione, come risulta ancora più evidente dallo schema appena illustrato, permette di parlare anche dei gruppi di omotopia dello spettro in grado negativo, quindi sono definiti per ogni $k \in \mathbb{Z}$

Definizione 3.9. Un'*equivalenza stabile* fra spettri E e F è una funzione che induce isomorfismi fra $f_* : \pi_k(E) \rightarrow \pi_k(F)$ per ogni k .

Un'*equivalenza grado per grado* fra spettri E e F è una funzione fra spettri tale che ogni k $f_k : X_k \rightarrow Y_k$ è ∞ -connessa.

Osservazione 3.10. L'equivalenza grado per grado implica quella stabile. Infatti essendo le mappe $(f_k)_*$ che collegano i gruppi di E_n e F_n isomorfismi, posso fare il ragionamento dell'osservazione 0.22 sia con $(f_k)_*$ che con le loro inverse, e ottenere mappe fra i limiti diretti, ovvero $\pi_k(E)$ e $\pi_k(F)$, che possiamo verificare essere inverse.

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_k(X_{k+n}) & \longrightarrow & \pi_{k+1}(\Sigma X_{k+n}) & \longrightarrow & \pi_{k+1}(X_{k+n+1}) & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\ \pi_k(F_{k+n}) & \longrightarrow & \pi_{k+1}(\Sigma F_{k+n}) & \longrightarrow & \pi_{k+1}(F_{k+n+1}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Si può anche mostrare che il viceversa è vero per Ω -spettri.

Osservazione 3.11. Si può verificare che, prendendo gli spettri come oggetti e le funzioni fra essi come morfismi, si ottiene una categoria. Considerando che una funzione fra spettri passa naturalmente a una fra i gruppi di omotopia (ogni f_n passa a una funzione $(f_n)_*$ fra i gruppi di omotopia degli spazi che formano lo spettro, poi si usa l'osservazione 0.22), con qualche verifica in più, si può dire che π_k è un funtore dalla categoria degli spettri appena citata ai gruppi abeliani per ogni k .

Ci sono diversi modelli di spettri che vengono esaminati e varie definizioni di funzioni fra essi; ciò è legato al tentativo di definire una categoria che abbia delle proprietà desiderabili. Una definizione soddisfacente si può ottenere in diversi modi e viene chiamata categoria stabile. Per maggiori dettagli si consultino [Ada74] e [Mal23, Chapter 3].

Esempio 3.12. Preso X CW-complesso con punto base, lo spettro *di sospensione* di X , che si indica con $\Sigma^\infty X$, è definito da

$$(\Sigma^\infty X)_n = \Sigma^n X := \underbrace{\Sigma \dots \Sigma}_n X \qquad \Sigma^{n+1} X = \Sigma X_n \xrightarrow{id} X_{n+1} = \Sigma^{n+1} X$$

Lo spettro che si ottiene ponendo $X = S^0$, cioè $\Sigma^\infty S^0$, si chiama spettro di sfere.

Esempio 3.13. Indichiamo con $K(G, n)$, dove G è un gruppo, uno spazio di Eilenberg-MacLane, cioè uno spazio che ha come n -esimo gruppo di omotopia G e tutti gli altri nulli. Un CW-complesso con questa proprietà può essere sempre costruito; in generale $K(G, n)$ è univocamente determinato, a meno di equivalenza omotopica, da n e G ([Hat02, Thm 4.30]). Dalla relazione di aggiunzione dell'osservazione 0.18 si ottiene che $\pi_k(X) \simeq \pi_{k-1}(\Omega X)$, e per $X = K(G, n)$ si ottiene che $\pi_k(K(G, n)) \simeq \pi_{k-1}(\Omega K(G, n))$, che ci dice che $\Omega K(G, n) = K(G, n-1)$ (dato che è caratterizzato univocamente dai gruppi di omotopia con le informazioni di G e n).

Possiamo costruire lo spettro di Eilenberg-MacLane, che indichiamo con HG , in questo modo:

$$(HG)_n = K(G, n) \quad K(G, n) \rightarrow \Omega K(G, n+1)$$

le mappe di struttura sono le equivalenze omotopiche, che rendono lo spettro HG un Ω -spettro. Vale $\pi_0(HG) = G$ e $\pi_n(HG) = 0$ per $n \neq 0$, quindi lo spettro HG si comporta in modo simile allo spazio $K(G, n)$.

Preso uno spettro E e un CW-complesso X possiamo definire un altro spettro, che chiamiamo $X \wedge E$, in questo modo:

$$(X \wedge E)_n = X \wedge E_n \quad \Sigma(X \wedge E_n) = X \wedge E_n \wedge S^1 = X \wedge (\Sigma E_n) \xrightarrow{(id, \epsilon_n)} X \wedge E_{n+1}$$

dove le prime due uguaglianze per definire le mappe di struttura sono date, ricordando l'osservazione 0.17, dal fatto che $\Sigma X = X \wedge S^1$. Presi due spazi X, Y , indichiamo con $[X, Y]$ le classi di omotopia delle mappe fra X e Y ; per esempio si ha $\pi_n(X) = [S^n, X]$

Questo ci permette di enunciare il seguente teorema:

Teorema 3.14. Sia E uno spettro e F un Ω -spettro. Allora

- 1) $E_k(X, A) := \pi_k((X/A) \wedge E)$ è una teoria omologica straordinaria, i cui gruppi dei coefficienti sono $\pi_*(E)$
- 2) $F^k(X, A) := [(X/A), F_k]$ è una teoria coomologica straordinaria, i cui gruppi dei coefficienti sono $\pi_{-*}(F)$

Idea della dimostrazione. Dato che teorie omologiche ridotte e non ridotte sono equivalenti, ci concentriamo su quelle ridotte, che in questo caso sono $\tilde{E}_k(X) = E_k(X, pt) = \pi_k(X \wedge E)$ e $\tilde{F}^k(X) = [X, F_k]_*$ (l'escissione sarebbe immediata dato che nella formula compare il quoziente, preso $Z \subset A$ si ha $X/A \simeq (X/Z)/(A/Z)$)

- 1) L'invarianza omotopica segue dal fatto che se $f \sim g$ allora $f \wedge id \sim g \wedge id$ e per la funtorialità di π_* sulla categoria degli spettri si conclude.

Per la successione esatta lunga si considera che dato che siamo in CW-complessi $A \hookrightarrow X$ ha la HEP (osservazione 0.10), che passa a una cofibrazione $A \hookrightarrow X \rightarrow X/A$. Facendo lo smash product si ottiene una cofibrazione di spettri $A \wedge E \hookrightarrow X \wedge E \rightarrow X/A \wedge E$ a cui è sempre associata una successione esatta lunga dei gruppi di omotopia.

Per l'additività si usa il fatto che ogni mappa $S^k \rightarrow \bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha$ fattorizza a una $S^k \rightarrow \bigvee_{\alpha \in B} X_\alpha$ dove $B \subseteq A$ con B finito (si usa il fatto che S^k è compatto e interseca un numero finito di celle, come nell'osservazione 0.9). Sfruttando l'identità $(\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha) \wedge E = \bigvee_{\alpha \in A} (X_\alpha \wedge E)$ e la proprietà appena enunciata per passare alla somma diretta, si ottiene:

$$\begin{aligned} \pi_k((\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha) \wedge E) &= \pi_k(\bigvee_{\alpha \in A} (X_\alpha \wedge E)) = \varinjlim [S^{k+n}, (\bigvee_{\alpha \in A} (X_\alpha \wedge E))_n] \simeq \\ &\simeq \varinjlim \bigoplus_a [S^n, (X_\alpha \wedge E)_n] \simeq \bigoplus_a \varinjlim [S^n, (X_\alpha \wedge E)_n] = \bigoplus_a \pi_k(X_a \wedge E) \end{aligned}$$

Dove si usano delle proprietà categoriche per scambiare la somma diretta con il limite diretto.

Per tutti i dettagli si consulti [Mal23, Prop 2.5.7] oppure [Hat02, Section 4.F].

- 2) La struttura di Ω -spettro permette di averne una di gruppo su $[X, F_k]$, infatti se considero $X \rightarrow F_k \xrightarrow{\sim} \Omega F_{k+1}$ l'operazione di gruppo è data usando la concatenazione di cammini, a meno di omotopia.

Per l'invarianza di omotopia si considera che $f : X \rightarrow Y$ passa a $f^* : [X, F_k] \rightarrow [Y, F_k]$ data dalla composizione con f , e mappe omotope inducono la stessa mappa dato che lavoriamo all'interno di classi di omotopia di mappe.

Per l'additività basta notare che una mappa $\bigvee_{\alpha} X_{\alpha} \rightarrow F_k$ è una collezione di mappe $X_{\alpha} \rightarrow F_k$, per cui si ha $[\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}, F_k] \simeq \prod_{\alpha} [X_{\alpha}, F_k]$

La successione esatta lunga si ottiene facilmente usando uno strumento noto come successione di Puppe, tutti i dettagli possono essere trovati in [Hat02, Thm 4.58].

□

Per le teorie coomologiche abbiamo una richiesta più restrittiva sullo spettro, ma questo ci permette anche di avere più informazioni sulla teoria coomologica, dato che il teorema fornisce una descrizione che usa ogni grado dello spettro.

Un fatto sorprendente è che anche il viceversa è vero: presa una teoria (co)omologica straordinaria $h_n(h^n)$, esiste un (Ω) -spettro, unico a meno di equivalenza stabile, tale che la formula data dal teorema è isomorfa a $h_n(h^n)$. Questo è il contenuto del teorema di rappresentabilità di Whitehead, per l'omologia, e di Brown, per la coomologia. (Le dimostrazioni si possono trovare rispettivamente in [Mal23, Thm 4.2.23] e [Hat02, Thm 4E.1])

3.3 Gruppi di omotopia stabili e (co)omologia singolare

Abbiamo visto che un qualsiasi spettro (o Ω -spettro) rappresenta una teoria omologica (o coomologica) sfruttando la formula della proposizione. Sfruttiamo questo fatto prendendo dei par-

ticolari (Ω -)spettri e vediamo quali teorie (co)omologiche otteniamo, non dovendo verificare a mano gli assiomi di Eilenberg-Steenrod.

Gruppi di omotopia stabili

Il teorema di Freudenthal può essere enunciato anche con la sospensione ridotta: ci dice che, preso X uno spazio n -connesso, si ha $\pi_i(X) \simeq \pi_{i+1}(\Sigma X)$ per $i < 2n+1$. In particolare vale per $i \leq n$, quindi se prendo un qualsiasi spazio X n -connesso questo avrà i primi n gruppi nulli, dunque ΣX avrà i primi $n+1$ gruppi nulli (anche π_0 , se X è CPA anche ΣX lo è).

Questa discussione ci dice che anche se prendo uno spazio X senza nessuna ipotesi (possiamo prenderlo CPA, altrimenti potremmo restringerci sulle componenti CPA), da un certo punto in poi nella seguente successione saranno tutti isomorfismi, partendo da un qualsiasi i

$$\pi_i(X) \rightarrow \pi_{i+1}(\Sigma X) \rightarrow \pi_{i+2}(\Sigma^2 X) \rightarrow \dots$$

Chiamiamo l' i -esimo gruppo di omotopia stabile $\pi_i^s(X)$ un rappresentante della classe di isomorfismo che si ottiene nella successione dopo un numero adeguato di sospensioni.

Un modo equivalente di definire questi gruppi stabili è $\pi_i^s(X) = \varinjlim \pi_{i+n}(\Sigma^n X)$: ricordando la caratterizzazione data nell'osservazione 0.21, otteniamo che se le mappe di un sistema diretto da un certo punto in poi sono tutti isomorfismi, allora il limite diretto coincide con un rappresentante di questa classe di isomorfismo.

Da questa caratterizzazione risulta evidente che i gruppi di omotopia stabili sono i gruppi di omotopia dello spettro di sospensione visto nell'esempio 3.12, cioè $\pi_n^s(X) = \pi_n(\Sigma^\infty X)$. Inoltre, ricordando l'osservazione 0.17, si ha che $X \wedge S^n = \Sigma^n X$, per cui si ottiene che

$$\pi_n((X/A) \wedge \Sigma^\infty S^0) = \pi_n(\Sigma^\infty(X/A)) = \pi_n^s(X/A) = \pi_n^s(X, A)$$

cioè la teoria omologica associata allo spettro di sfere $\Sigma^\infty S^0$ è proprio quella data dai gruppi di omotopia stabili. Questo ci permette di dire, senza doverlo verificare a mano, che questi gruppi entrano in una successione esatta lunga e l'additività (assiomi 3) e 4)), a differenza dei gruppi di omotopia.

(Co)omologia singolare

Sia Δ^n l' n -simpleso, e indichiamo con $\delta_i : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ l'inclusione dell' i -esima faccia. Indichiamo con $C_n(X; G)$ l'insieme delle combinazioni lineari formali di semplici singolari, ovvero le funzioni $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$, a coefficienti in G . Si definisce il complesso di catene singolari nel seguente modo:

$$\dots \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \rightarrow \dots \quad \partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ \delta_i$$

Si verifica che $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, per cui sono ben definiti i gruppi di omologia singolare di X , definiti da $H_n(X; G) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$; si dice anche che è l'omologia associata al complesso di catene.

Preso $A \subset X$ si verifica che $C(X, A; G) = C_*(X; G)/C_*(A; G)$ è anch'esso un complesso di catene singolari, l'omologia associata a questo complesso si indica con $H_*(X, A; G)$ e forma una teoria omologica ordinaria, mentre quella vista prima è la sua versione assoluta.

Per costruire la coomologia singolare si considera $C_n^*(X; G) = \text{Hom}(C_n, G)$ e si forma il complesso di cocatene singolari, dato da $\partial^n : C_n^* \rightarrow C_{n+1}^*$. L'omologia associata a questo complesso è la coomologia singolare $H^n(X; G)$, e anche per questa si può definire la versione per coppie. Quest'ultima forma una teoria coomologica ordinaria, la cui versione assoluta è data dalla versione definita poco sopra.

Per una larga classe di spazi, ovvero la categoria degli spazi omotopicamente equivalenti a CW-complessi, una teoria (co)omologica ordinaria è determinata dal suo gruppo dei coefficienti, cioè presa una teoria ordinaria h_n con $h_0(pt) = G$ si ha $h_n \simeq H_n(\cdot; G)$ (la dimostrazione si può trovare in [Hat02, Thm 4.59]), dunque vale anche per CW-complessi. La teoria omologica associata allo spettro di Eilenberg-MacLane dell'esempio 3.13, cioè $\pi_n(X/A \wedge HG)$, ha gruppi dei coefficienti

$$\pi_*(HG) = \dots \quad 0 \quad 0 \quad \begin{array}{c} G \\ \uparrow \\ 0 \end{array} \quad 0 \quad 0 \quad \dots$$

Dunque per il teorema appena citato questa è isomorfa proprio all'omologia singolare: $H_n(X, A; G) \simeq \pi_n(X/A \wedge HG)$. Lo stesso ragionamento può essere effettuato per la coomologia singolare, da cui si ottiene $H^n(X, A; G) \simeq [X/A, K(G, n)]$.

Le costruzioni dell'omologia e coomologia singolare a priori non hanno nessuna relazione con l'omotopia, eppure entrambe possono essere caratterizzate tramite l'omotopia. Il solo fatto che per descrivere una generica teoria si possano usare i gruppi di omotopia di uno spettro, per l'omologia, e le classi di omotopia di certe funzioni, per la coomologia lega omologia e omotopia; in particolare il caso della (co)omologia singolare mi dà un legame molto più forte, infatti per rappresentarla si usano gli spazi di Eilenberg-MacLane, spazi che sono determinati dai loro gruppi di omotopia.

Appendice A

Lemmi per l'escissione in omotopia

La dimostrazione seguirà le idee contenute in [Die08, Section 6.9]. Fissiamo un po' di notazione.

$$W(a, \delta, L) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq a_i + \delta \text{ per } i \in L, a_i = x_i \text{ per } i \notin L\}$$

è un cubo, dove $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ e $L \subseteq \{1, \dots, n\}$. Possiamo vedere a come uno spigolo, δ la lunghezza del lato e L come la dimensione del cubo W immerso in \mathbb{R}^n , infatti poniamo $\dim W = |L|$. Una faccia di W è

$$W'(L_0, L_1) = \{x \in W \mid x_i = a_i \text{ per } i \in L_0, x_j = a_j + \delta \text{ per } j \in L_1\}$$

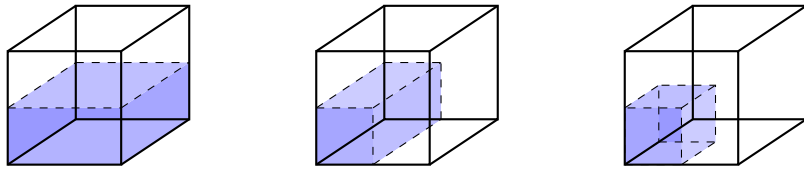
dove $L_0, L_1 \subset L$. Diciamo che se i sta in L_0 ci mettiamo nella faccia di una dimensione inferiore perpendicolare all'asse i che contiene a_0 , se invece sta in L_1 nella faccia opposta. Quindi alla fine $W'(L_0, L_1)$ identifica una faccia di dimensione $|L| - (|L_0| + |L_1|)$

Nel seguito useremo anche i seguenti insiemi:

$$K_p = \{x \in W \mid x_i < a_i + \frac{\delta}{2} \text{ per almeno } p \text{ coordinate di } L\}$$

$$G_p = \{x \in W \mid x_i > a_i + \frac{\delta}{2} \text{ per almeno } p \text{ coordinate di } L\}$$

Se $p > \dim W$ poniamo questi insiemi vuoti. Per un'intuizione geometrica sono illustrati alcuni esempi di $K_1(I^3)$, $K_2(I^3)$ e $K_3(I^3)$.



Lemma A.1. Prendiamo $W = W(a, \delta, L)$, $f : W \rightarrow Y$ e $A \subset Y$ per cui, fissato $p \leq \dim W$, vale

$$f^{-1}(A) \cap W' \subset K_p(W') \quad \text{per ogni } W' \subseteq \partial W$$

Allora esiste una mappa g omotopa rel ∂W ad f tale che $g^{-1}(A) \subset K_p(W)$ (Analogamente con G_p al posto di K_p)

Dimostrazione. Definiamo una funzione $h : W \rightarrow W$ in questo modo: sia $x = (a_1 + \frac{\delta}{4}, \dots, a_n + \frac{\delta}{4})$, consideriamo una semiretta r che parte da x . Chiamiamo $P(r) = r \cap \partial W(a, \frac{\delta}{2}, L)$ l'intersezione fra la semiretta e il cubo di lato dimezzato che parte da a , mentre $Q(r) = r \cap \partial W$. Considerando tutte le possibili semirette r definiamo h in modo che mandi il segmento fra x e $P(r)$ nel segmento da $P(r)$ a $Q(r)$, mentre quest'ultimo segmento viene collassato direttamente in $Q(r)$. Per come è definita vale $(h(z))_i = (a_i + \frac{\delta}{4}) + t(z_i - (a_i + \frac{\delta}{4}))$ per i punti che stanno fra x e $P(r)$ per t . $H(z, t) = (1 - t)z + th(z)$ è un'omotopia rel ∂W (poiché $h|_{\partial W} = id_{\partial W}$) fra h e l'identità. Poniamo $g = f \circ h$, che dunque è già omotopa a f per quanto appena detto, ci manca di verificare che $g^{-1}(A) \subset K_p(W)$. Siano $z \in W$ e $g(z) \in A$, vogliamo mostrare che in realtà $z \in K_p(W)$. Se $z_i < a_i + \frac{\delta}{2}$ per ogni i allora ho già concluso, altrimenti esiste almeno una coordinata i per cui $z_i > a_i + \frac{\delta}{2}$, che quindi è situata in $W - W(a, \frac{\delta}{2}, L)$, per cui $h(z) \in \partial W$, cioè sta in una faccia W' di dimensione $|L| - 1$. Dato che $f(h(z)) = g(z) \in A$ si ha $h(z) \in f^{-1}(A)$ dunque per ipotesi $h(z) \in K_p(W')$, cioè $(h(z))_i < a_i + \frac{\delta}{2}$ per almeno p coordinate, e dalla descrizione esplicita di h scritta sopra possiamo dedurre la stessa cosa per z_i . \square

D'ora in poi A e B saranno aperti di X con $X = A \cup B$ e $C = A \cap B$ non vuota

Proposizione A.2. Sia $f : I^n \rightarrow X$, W un qualsiasi cubo di una scomposizione di I^n e siano (A, C) e (B, C) rispettivamente p -connesso e q -connesso. Allora esiste un'omotopia f_t di f con le seguenti proprietà:

- 1) $f(W) \subset A \Rightarrow f_t(W) \subset A$ (o con B al posto di A)
- 2) $f(W) \subset C \Rightarrow f_t$ è costante su W
- 3) $f(W) \subset A \Rightarrow f_1^{-1}(A - C) \cap W \subset K_{p+1}(W)$
- 4) $f(W) \subset B \Rightarrow f_1^{-1}(B - C) \cap W \subset G_{q+1}(W)$

Dimostrazione. A e B formano un ricoprimento aperto di X , quindi $\{f^{-1}(A), f^{-1}(B)\}$ è un ricoprimento aperto di I^n , dunque esiste il numero di Lebesgue 0.13 e una scomposizione di I^n in cubi W tali che f li manda in A o in B . Sia C^k l'unione dei cubi di dimensione minore di k , costruiamo l'omotopia di f su $C^k \times I$ per induzione su k .

Per il passo base $k=0$, sia W di dimensione 0, cioè un punto. Se $f(W) \in C$ allora possiamo considerare l'omotopia costante e abbiamo il punto 2). Se $f(W) \in A$ considero un cammino da $f(W)$ a un punto di C (che esiste poiché (A, C) è in particolare 0-connesso). Prendiamo questa come omotopia di f che rispetta le condizione 1) e 3) (quest'ultima diventa banale in questo caso dato che $f_1^{-1}(A - C) = \emptyset$). Lo stesso ragionamento con $f(W) \in B$ fornisce la condizione 4).

Assumiamo per induzione che l'omotopia sia definita su C^{k-1} . Dato che un cubo è in particolare un CW-complesso e le sue facce lo sono a loro volta, $(W, \partial W)$ è una coppia di CW-complessi, dunque possiamo usare la HEP 0.10 per definire f_t su W di dimensione k e preservare le proprietà 1) e 2). Sia ora $f(W) \subset A$, se $\dim W \leq p$ esiste un'omotopia rel ∂W tale che $f_1(W) \subset C$, dato

che (A, C) è p-connesso (si ricordi la caratterizzazione della p-connessione 1.12); in questo caso la condizione 3) è soddisfatta. Se $\dim W \geq p$ allora si usa il lemma precedente che fornisce un'omotopia per cui f_1 soddisfa la condizione 3). Si fa la stessa cosa per la condizione 4) con $f(W) \subset B$. \square

Sia $\Omega(X; A, B) := \{w : I \rightarrow X \mid w(0) \in A, w(1) \in B\}$ l'insieme dei cammini in X da A a B . Si nota che $\Omega(A; A, C) \subset \Omega(X; A, B)$. Questi sono spazi topologici se dotati della topologia compatta aperta, quindi ne posso considerare i gruppi di omotopia.

Teorema A.3. Siano (A, C) e (B, C) rispettivamente p-connesso e q-connesso. Allora l'inclusione $\Omega(A; A, C) \hookrightarrow \Omega(X; A, B)$ è (p+q-1)-connessa.

Dimostrazione. Considerando la successione esatta associata alla coppia $(\Omega(X; A, B), \Omega(A; A, C))$ basta mostrare che $\pi_i((\Omega(X; A, B), \Omega(A; A, C))) = 0$ per $i \leq p + q - 1$, quindi vogliamo mostrare che presa $\varphi : (I^i, \partial I^i) \rightarrow (\Omega(X; A, B), \Omega(A; A, C))$ è omotopa a una funzione che finisce in $\Omega(A; A, C)$ (si ricordi il criterio di compressione 1.9).

Per ogni $x \in I^i$ ho un cammino $\varphi(x) : I \rightarrow X$, in particolare la funzione φ passa a una funzione $\Phi : I^i \times I \rightarrow X$ definita da $\Phi(x, t) = \varphi(x)(t)$ che è continua dato che è la composizione di funzioni continue $(x, t) \xrightarrow{(\varphi, id)} (\varphi(x), t) \xrightarrow{ev} \varphi(x)(t)$ (ev è continua grazie alla topologia compatto-aperta). In particolare il fatto che φ fosse una mappa fra coppie si riflette su Φ facendo sì che abbia queste proprietà:

- $\Phi(x, 0) \subset A$ per ogni $x \in I^i$
- $\Phi(x, 1) \subset B$ per ogni $x \in I^i$
- $\Phi(x, t) \subset A$ per ogni $(x, t) \in (\partial I^i, I)$

Chiamiamo una mappa che rispetta queste proprietà *ammissibile*, vogliamo deformare ϕ , tramite mappe ammissibili, in una mappa che finisce in A . Consideriamo una scomposizione di $I^i \times I$ in cubi W che vadano in A o in B tramite Φ (possibile grazie al numero di Lebesgue 0.13), e deformiamo Φ in Ψ tramite un'omotopia come nel lemma precedente su ogni cubo W . Le condizioni 1) e 2) del lemma precedente ci danno una condizione di compatibilità, una volta definita l'omotopia su tutti i cubi possiamo "incollare" i vari pezzi su tutto $I^i \times I$.

Ora sia $P : I^i \times I \rightarrow I^i$ la proiezione, notiamo che $P(\Psi^{-1}(X - A)) \cap P(\Psi^{-1}(X - B)) = \emptyset$, infatti sia $y \in \Psi^{-1}(X - A) \subset K_{p+1}(W)$ (l'inclusione è data dal punto 3) del lemma), quindi $P(y)$ ha almeno p coordinate minori di $\frac{\delta}{2}$; analogamente, se y fosse anche in $\Psi^{-1}(X - B)$ avrebbe q coordinate maggiori di $\frac{\delta}{2}$, ma stiamo lavorando in $i < p + q$, dunque abbiamo un assurdo. Inoltre, dato che Φ manda $(\partial I^i, I)$ in A , usando la proprietà 1) del lemma anche Ψ lo manda in A , per cui $P(\Psi^{-1}(X - A)) \cap \partial I^i = \emptyset$. Ricordando che $\Psi(x, \cdot)$ è un cammino, questo ci dice che le x per cui il cammino associato $\Psi(x, \cdot)$ ammette dei tempi t in cui (x, t) sta in $X - A$ o in $X - B$ sono disgiunti, e non dipendono dal tempo (poiché consideriamo la proiezione P). Quindi i cammini $\Psi(x, \cdot)$ se ammettono un tratto in $X - A$ non hanno nessun tratto in $X - B$ e viceversa.

Queste considerazioni ci permettono di definire $\tau : I^i \rightarrow I$ continua tale che $\tau(P(\Psi^{-1}(X - A))) = 0$ e $\tau(\partial I^i \cup P(\Psi^{-1}(X - B))) = 1$, in questo modo τ assume valori compresi fra 0 e 1 solo se tutto $\Psi(x, \cdot)$ sta in C . A questo punto definiamo

$$\begin{aligned} G_s : I^i \times I &\rightarrow X \\ (x, t) &\mapsto \Psi(x, (1 - s)t + s\tau(x)) \end{aligned}$$

G_s è una mappa ammissibile per ogni s , infatti

- $G_s(x, 0) = \Psi(x, 0) \subset A$ per ogni $x \in I^i$
- $G_s(x, 1) = \Psi(x, (1 - s)1 + s\tau(x))$ e per come è definita τ , $\tau(x) \neq 1$ solo se $\Psi(x, \cdot)$ sta tutto in $X - A \subset B$, quindi l'unico caso di cui ci dobbiamo occupare è $\tau(x) = 1$. Ma in questo caso si ha $G_s(x, t) = \Psi(x, 1) \subset B$ dato che Ψ è ammissibile.
- Sia $x \in \partial I^i$, allora $G_s(x, t) = \Psi(x, ((1 - s)t + s\tau(x))) \subset A$ poiché Ψ è ammissibile.

inoltre $G_0 = \Psi$ e G_1 è una mappa che finisce in A , poiché $G_1(x, t) = \Psi(x, t\tau(x)) \subset A$, infatti se $\tau(x) \neq 0$ segue direttamente da come è definita τ e se $x \in \partial I^i$ per quanto detto poco sopra; se $\tau(x) = 0$ si ha $G_1(x, t) = \Psi(x, 0)$ per ammissibilità.

Quindi G_s è l'omotopia cercata. \square

Proposizione A.4. Sia $(p_1, p_2) : (E_1, E_2) \rightarrow B$ in modo che p_1 sia una fibrazione di Serre e anche la sua restrizione a E_2 , che chiamiamo p_2 , lo sia a sua volta. Allora (E_1, E_2) è n -connessa se e solo se, per ogni $b \in B$, la coppia di fibre $(F_b^1, F_b^2) := (p_1^{-1}(b), p_2^{-1}(b))$ è n -connessa.

La dimostrazione è in [Die08, Thm 6.3.8]

Proposizione A.5. La mappa $p_1 : \Omega(X; A, B) \rightarrow X$ definita da $p_1(\gamma) = \gamma(0)$ è una fibrazione di Serre. Lo stesso vale per $p_2 : \Omega(A; A, C) \rightarrow A$.

Dimostrazione.

$$\begin{array}{ccc} & \Omega(X; A, B) & \\ \tilde{G}_t \nearrow & \downarrow p & \\ I^n & \xrightarrow{G_t} & X \end{array}$$

Abbiamo \tilde{G}_0 che solleva G_0 , cioè $\tilde{G}_0(x)$ è un cammino che parte da $G_0(x)$ e termina in B . Per costruire il resto del sollevamento posso definire $\tilde{G}_t(x)$ come un cammino da $G_t(x)$ a $G_0(x)$ (che esiste sempre poiché essendo (A, C) e (B, C) 0-connessi e C CPA posso sempre spostarmi nella componente CPA di $G_0(x)$ per ogni x) per poi comporlo con $\tilde{G}_0(x)$. Per $\Omega(A; A, C)$ si fa la stessa cosa. \square

Bibliografia

- [Ada74] J. F. Adams, *Stable Homotopy and Generalized Homology*, University of Chicago, 1974
- [Die08] Tammo tom Dieck, *Algebraic Topology*, European mathematical society, 2008
- [Hat02] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002
- [Mal23] Cary Malkiewich, *Spectra and stable homotopy theory*, draft version, 2023
- [May99] J. P. May, *A Concise Course in Algebraic Topology*, University of Chicago, 1999
- [Rot98] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Algebraic Topology*, Springer, 1998