

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

FUNZIONI KLS E FUNZIONI DI CHOW  
PER INSIEMI  
PARZIALMENTE ORDINATI

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
FABRIZIO CASELLI

Presentata da:  
SILVIA BARDINI

IV Sessione  
Anno Accademico 2024/2025

*Crosin crosat, merdadegat.*



# Introduzione

Nel 1979 David Kazhdan e George Lusztig pubblicarono *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, dove introdussero per la prima volta dei polinomi, successivamente chiamati polinomi di Kazhdan–Lusztig. Nati per definire delle particolari rappresentazioni delle Algebre di Hecke di un Gruppo di Coxeter, trovarono presto applicazioni in altri ambiti. Per esempio, sono utilizzati nella teoria delle rappresentazioni dei gruppi algebrici semisemplici, nello studio dei moduli di Verma e nella geometria algebrica e la topologia delle varietà di Schubert. Le proprietà dei polinomi di Kazhdan–Lusztig sono state molto studiate negli anni, per esempio è stata dimostrata la non negatività nel 2014 in [EW14]. L’invarianza combinatoria, invece, rimane aperta nel caso generale, ma è stata provata in casi specifici, come intervalli di lunghezza minore o uguale a 4 (una dimostrazione si può trovare in [Bre03]) oppure intervalli  $[e, v]$  dove  $e$  è l’identità del gruppo ([BCM06]).

Nel 1992, Richard P. Stanley in [Sta92] generalizzò queste funzioni polinomiali a tutti gli insiemi parzialmente ordinati, mentre Brenti successivamente le generalizzò ulteriormente agli insiemi debolmente graduati, in [Bre99], dove coniò anche il nome *funzioni di Kazhdan–Lusztig–Stanley*. Questa teoria unisce ambiti differenti della matematica, come l’enumerazione di punti, linee, etc. in matroidi, l’enumerazione delle facce di politopi convessi, la combinatoria e la teoria delle rappresentazioni dei gruppi di Coxeter.

Il primo capitolo fornisce i concetti fondamentali su cui si basano le teorie trattate. Una prima parte riguarda i polinomi, in particolare le proprietà di unimodalità, simmetria e non negatività. La seconda e la terza sezione, inve-

ce, introducono gli insiemi parzialmente ordinati e le loro algebre di incidenza, nate a metà degli anni '60 per risolvere alcuni problemi di combinatoria, ma considerate utili anche in altri ambiti come la teoria degli anelli.

Il secondo capitolo si concentra su una particolare categoria di insiemi parzialmente ordinati, i poset euleriani. Questi sono caratterizzati da una certa regolarità e comprendono classi importanti di poset, come i reticoli booleani, i politopi e i gruppi di Coxeter con ordinamento di Bruhat. Su questi ultimi verranno esposti alcuni risultati di base, utili all'introduzione degli  $R$ -polinomi e dei polinomi di Kazhdan–Lusztig, che non saranno tuttavia trattati in dettaglio, ma come motivazione della teoria.

Il terzo capitolo è dedicato in modo approfondito alle funzioni di Kazhdan–Lusztig–Stanley. Dopo l'introduzione del concetto di nuclei per gli insiemi parzialmente ordinati, viene enunciato e dimostrato il risultato principale di questo capitolo ossia l'esistenza delle funzioni KLS per ogni nucleo. In particolare ogni nucleo può essere scritto come prodotto di inversione e riflessione dello stesso polinomio, dove con riflessione si intende l'inversione dei coefficienti di un polinomio rispetto a un centro di simmetria. Inoltre, imponendo una condizione sul grado, questa scrittura è unica.

Nell'ultimo capitolo viene trattata, invece, una nuova famiglia di funzioni: le funzioni di Chow, introdotte per la prima volta nel 2024 in [FMV24]. Dopo la definizione, saranno messi in luce i legami con le funzioni di Kazhdan–Lusztig–Stanley. Sarà mostrato, in particolare, che le funzioni di Chow sono simmetriche e verrà enunciato un risultato di unimodalità. Infine verranno introdotte le funzioni di Chow aumentate, e discusse le loro caratteristiche principali. Nell'articolo citato vengono dimostrate ulteriori proprietà delle funzioni di Chow per poset euleriani, che non verranno approfondite in questa tesi, tra cui un teorema per cui la funzione di Chow associata al nucleo  $\varepsilon_{st}(x) = (x - 1)^{\rho_{st}}$  in un poset euleriano  $P$  equivale all' $h$ -polinomio del complesso d'ordine  $\Delta(P)$ .

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Concetti Preliminari</b>	<b>1</b>
1.1 Polinomi . . . . .	1
1.2 Insiemi parzialmente ordinati . . . . .	4
1.3 Algebra di incidenza . . . . .	7
<b>2 Poset Euleriani</b>	<b>11</b>
2.1 Gruppi di Coxeter . . . . .	13
2.2 Ordinamento di Bruhat . . . . .	18
<b>3 Funzioni di Kazhdan–Lusztig–Stanley</b>	<b>23</b>
3.1 P-Nuclei . . . . .	23
3.2 Funzioni KLS . . . . .	26
<b>4 Funzioni di Chow</b>	<b>35</b>
4.1 Relazione tra funzioni di Chow e funzioni KLS . . . . .	42
4.2 Unimodalità e non negatività delle funzioni di Chow . . . . .	44
4.3 Funzioni di Chow aumentate . . . . .	48
<b>Bibliografia</b>	<b>53</b>



# Capitolo 1

## Concetti Preliminari

In questo capitolo saranno presentate alcune definizioni e risultati preliminari, su cui si poggeranno i contenuti dei capitoli successivi. In particolare saranno introdotti concetti relativi ai polinomi, gli insiemi parzialmente ordinati e le basi dell'algebra di incidenza, integrati da alcuni esempi sia elementari, che più significativi.

### 1.1 Polinomi

Cominciamo con l'introdurre alcuni concetti fondamentali riguardanti i polinomi.

**Definizione 1.1.** Sia  $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m \in \mathbb{Z}[x]$  un polinomio a coefficienti non negativi. Allora il polinomio  $p(x)$  è **unimodale** se esiste un indice  $j$  tale che

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{j-1} \leq a_j \geq a_{j+1} \geq \cdots \geq a_m.$$

Diciamo che  $p(x)$  è **simmetrico** se esiste un indice  $d$  tale che  $a_i = a_{d-i}$  per ogni  $i$  (con la convenzione che  $a_i = 0$  se  $i < 0$ ). In questo caso diciamo che  $p(x)$  ha centro di simmetria  $d/2$ .

Osserviamo che la definizione di simmetria può essere espressa in modo equivalente attraverso la formula  $p(x) = x^d p(x^{-1})$ .



Il seguente lemma fornisce una caratterizzazione dei polinomi a coefficienti non negativi, simmetrici e unimodali. Per comodità, dato un polinomio  $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ , diciamo che esso è **non negativo** se è a coefficienti non negativi.

**Lemma 1.2.** *Sia  $p(x)$  un polinomio non negativo. Le seguenti sono equivalenti:*

1.  $p(x)$  è unimodale e simmetrico con centro di simmetria  $d/2$ .
2. Esistono dei numeri non negativi  $c_0, c_1, \dots, c_{\lfloor d/2 \rfloor}$  tali che

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} c_i x^i (1 + x + \dots + x^{d-2i}).$$

*Dimostrazione.* Sia  $p(x)$  come nel punto 2, con  $c_i \geq 0$ , allora

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} c_i x^i (1 + x + \dots + x^{d-2i}) = \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} c_i (x^i + \dots + x^{d-i}).$$

Osserviamo che se  $k \leq \lfloor d/2 \rfloor$  allora il coefficiente di grado  $k$  è dato da  $c_0 + \dots + c_k$ , se invece  $k > \lfloor d/2 \rfloor$  il suo coefficiente è  $c_0 + \dots + c_{d-k}$ . Da questo segue la simmetria poiché risulta  $[x^k]p(x) = [x^{d-k}]p(x)$ . L'unimodalità dei coefficienti deriva dalla non negatività dei  $c_i$ .

Viceversa sia  $p(x)$  un polinomio a coefficienti positivi, unimodale e simmetrico

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d.$$

Allora possiamo trovare i  $c_i$  risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_0 + c_1 = a_1 \\ \vdots \\ c_0 + \dots + c_{\lfloor d/2 \rfloor} = a_{\lfloor d/2 \rfloor} \end{cases}$$

Essi esistono perché è un sistema lineare associato alla matrice triangolare inferiore con tutte le entrate uguali a 1, quindi invertibile. L'unimodalità di  $p(x)$  garantisce che i  $c_i$  siano non negativi.  $\square$

Si vede facilmente che se  $p(x)$  e  $q(x)$  sono polinomi non negativi, unimodali e simmetrici ed entrambi hanno centro di simmetria  $d$ , allora  $p(x) + q(x)$  è non negativo, unimodale e simmetrico con centro di simmetria  $d$ . È meno ovvio che anche il prodotto conservi queste proprietà.

**Lemma 1.3.** *Siano  $p(x)$  e  $q(x)$  polinomi non negativi, simmetrici e unimodali. Allora  $p(x)q(x)$  è non negativo, simmetrico e unimodale. Inoltre se  $p(x)$  e  $q(x)$  hanno rispettivamente centro di simmetria  $c$  e  $d$ , allora il centro di simmetria di  $p(x)q(x)$  è  $c + d$ .*

*Dimostrazione.* Definiamo

$$p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, \quad q(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j.$$

Essi hanno centro di simmetria rispettivamente  $m/2$  e  $n/2$ . Siano  $r := \lfloor m/2 \rfloor$ ,  $s := \lfloor n/2 \rfloor$ . Per convenzione consideriamo  $a_i = 0$  se  $i \neq 0, \dots, m$  e  $b_j = 0$  se  $j \neq 0, \dots, n$ . I polinomi  $p(x)$  e  $q(x)$  sono tali che

- $a_i, b_j \geq 0$  per ogni  $i, j$ ;
- $a_i = a_{m-i}$ ,  $b_j = b_{n-j}$ ;
- $a_0 \leq \dots \leq a_r \geq \dots \geq a_m$ ,  $b_0 \leq \dots \leq b_s \geq \dots \geq b_n$ .

Allora si ha

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^r (a_i - a_{i-1})(x^i + \dots + x^{m-i}) &= a_0(1 + \dots + x^m) - a_0(x + \dots + x^{m-1}) \\ &\quad + a_1(x + \dots + x^{m-1}) - a_1(x^2 + \dots + x^{m-2}) + \dots = p(x). \end{aligned}$$

Analogamente  $q(x) = \sum_{j=0}^s (b_j - b_{j-1})(x^j + \dots + x^{n-j})$ . Quindi

$$p(x)q(x) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n (a_i - a_{i-1})(b_j - b_{j-1})(x^i + \dots + x^{m-i})(x^j + \dots + x^{n-j}).$$

Il polinomio  $(x^i + \dots + x^{m-i})(x^j + \dots + x^{n-j})$  è banalmente a coefficienti non negativi, simmetrico e unimodale con centro di simmetria  $(m+n)/2$  per

ogni  $i, j$ . Inoltre  $(a_i - a_{i-1})(b_j - b_{j-1}) \geq 0$ ,  $\forall i \in \{0, \dots, r\}, j \in \{0, \dots, s\}$ . Quindi si ha che  $p(x)q(x)$  è dato da somma di polinomi a coefficienti non negativi, unimodali e simmetrici con centro di simmetria  $(m+n)/2$ , quindi anche  $p(x)q(x)$  stesso lo è.  $\square$

## 1.2 Insiemi parzialmente ordinati

**Definizione 1.4.** Un **insieme parzialmente ordinato** (detto anche **poset**) è una coppia  $(P, \leq)$  dove  $P$  è un insieme non vuoto e  $\leq$  è una relazione d'ordine.

Due elementi  $x, y \in P$  sono **confrontabili** se risulta  $x \leq y$  o  $y \leq x$ .

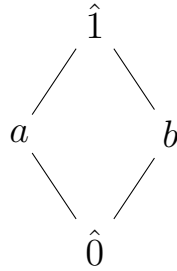
**Definizione 1.5.** Siano  $P, Q$  due insiemi parzialmente ordinati e sia  $f : P \rightarrow Q$ . Diciamo che  $f$  è un **morfismo** di insiemi parzialmente ordinati se per ogni  $x \leq y$  in  $P$ , si ha  $f(x) \leq f(y)$ . Se  $f$  è anche una biezione, diciamo che è un **isomorfismo** di insiemi parzialmente ordinati. I poset  $P$  e  $Q$  sono **isomorfi** se esiste un isomorfismo  $f : P \rightarrow Q$ .

**Definizione 1.6.** Sia  $P$  un poset. Chiamiamo  $Int(P) = \{[s, t] : s, t \in P, s \leq t\}$  l'insieme degli intervalli chiusi di  $P$ , dove  $[s, t] = \{w \in P : s \leq w \leq t\}$ .

**Definizione 1.7.** Sia  $P$  un poset. Diciamo che  $P$  è **limitato** se esistono  $\hat{0}, \hat{1} \in P$  tali che  $\hat{0} \leq x \leq \hat{1} \forall x \in P$ .

**Definizione 1.8.** Un poset  $P$  si dice **finito** se ha un numero finito di elementi. Si dice **localmente finito** se per ogni coppia di elementi  $s \leq t$  in  $P$  l'intervallo chiuso  $[s, t]$  ha un numero finito di elementi.

**Esempio 1.9.** Il seguente grafico mostra un esempio di poset limitato e finito, dove le frecce indicano la relazione d'ordine che, convenzionalmente, va dal basso all'alto. Questa rappresentazione degli insiemi parzialmente ordinati è detta **diagramma di Hasse**.



**Esempio 1.10.** Un insieme parzialmente ordinato può essere infinito, ma localmente finito, per esempio consideriamo  $\mathbb{Z}$  ordinato in modo standard. È infinito, ma ogni intervallo  $[m, n] \subseteq \mathbb{Z}$  contiene un numero finito di elementi, più precisamente  $m - n + 1$ .

**Definizione 1.11.** Sia  $P$  un poset limitato.  $P$  si dice **graduato** se, presi due qualunque cammini massimali della forma

$$\hat{0} < w_1 < \cdots < w_{r-1} < \hat{1},$$

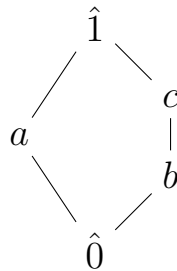
essi hanno la stessa lunghezza  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Possiamo dunque definire la **funzione rango**

$$\rho : P \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \rho(s) = r,$$

dove  $r$  è la lunghezza di una qualunque catena massimale da  $\hat{0}$  a  $s$ . Definiamo anche una funzione più generale:

$$\rho : \text{Int}(P) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \rho_{st} := \rho([s, t]) = \rho(t) - \rho(s).$$

**Esempio 1.12.** Il poset nell'Esempio 1.9 è graduato perché tutti i cammini massimali tra gli elementi hanno la stessa lunghezza. Consideriamo ora il seguente poset:



Questo non è graduato perché esistono due cammini massimali da  $\hat{0}$  a  $\hat{1}$ , che sono  $\hat{0} < b < c < \hat{1}$  e  $\hat{0} < a < \hat{1}$ , che hanno lunghezze diverse.

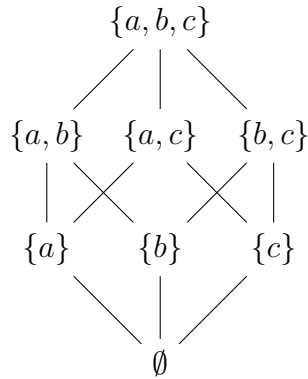
Dati un poset  $P$  e  $s, t \in P$ , un maggiorante di  $s$  e  $t$  è un elemento  $u \in P$  che soddisfa  $u \geq s$  e  $u \geq t$ . Un estremo superiore (sup) di  $s$  e  $t$  è un maggiorante  $u$  di  $s$  e  $t$  tale che per ogni altro maggiorante  $v$  vale  $u \leq v$ . Analogamente si definiscono minoranti e estremi inferiori (inf).

**Definizione 1.13.** Un poset  $P$  è un **reticolo** se ogni coppia di elementi ha un estremo inferiore e un estremo superiore.

**Esempio 1.14.** I poset  $P_1$  e  $P_2$  in figura sono entrambi graduati e localmente finiti, ma  $P_1$  è un reticolo, mentre  $P_2$  non lo è perché i maggioranti di  $a$  e  $b$  sono  $\{c, d, \hat{1}\}$ , ma  $c \not\leq d$ ,  $d \not\leq c$ .



**Esempio 1.15.** Un esempio di reticolo graduato è il reticolo Booleano  $B_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ossia l'insieme delle parti di un insieme di  $n$  elementi ordinato per inclusione. Per esempio se  $n = 3$ , si ottiene  $B_3$ .



D'ora in poi  $P$  indicherà un insieme parzialmente ordinato localmente finito e graduato e  $\rho$  la funzione rango.

## 1.3 Algebra di incidenza

**Definizione 1.16.** Sia  $P$  un poset e  $A$  un anello unitario. Definiamo l'**algebra di incidenza**  $I(P)$  di  $Int(P)$  su  $A$  come l' $A$ -modulo libero sull'insieme  $Int(P)$ .

Possiamo vederla come l'insieme delle funzioni  $Int(P) \rightarrow A$ :

$$I(P) = \{f : Int(P) \rightarrow A\}.$$

Per convenzione se  $f \in I(P)$  e  $s, t \in P$ ,  $s \leq t$  indichiamo  $f([s, t]) =: f_{st}$ .

Il prodotto in  $I(P)$  è definito come convoluzione: se  $a, b \in I(P)$ , il loro prodotto è dato da:

$$(ab)_{st} = \sum_{s \leq w \leq t} a_{sw} b_{wt}.$$

L'anello che useremo di più è l'anello dei polinomi a coefficienti interi  $\mathbb{Z}[x]$ , quindi gli elementi di  $I(P)$  saranno indicati con  $f_{st}$  oppure con  $f_{st}(x)$  a seconda del contesto.

*Osservazione 1.17.* Il prodotto è ben definito perché  $P$  è localmente finito e dunque  $[s, t]$  ha cardinalità finita per ogni  $s \leq t$  in  $P$ . Osserviamo anche che il prodotto è associativo, ma non commutativo. Inoltre esiste un elemento neutro, il **delta di Kronecker**, definito come

$$\delta_{st} = \begin{cases} 1 & \text{se } s = t, \\ 0 & \text{se } s \neq t. \end{cases}$$

Infatti, sia  $a \in I(P)$ . Allora

$$(a\delta)_{st} = \sum_{s \leq w \leq t} a_{sw} \delta_{wt} = a_{st}$$

perché  $\delta_{wt} \neq 0$  se e solo se  $w = t$ . La dimostrazione di  $(\delta a)_{st} = a_{st}$  è analoga.

**Lemma 1.18.** *Sia  $P$  un poset e  $A$  un anello unitario. Un elemento  $a \in I(P)$  è invertibile  $\iff a_{ss}$  è invertibile in  $A$  per ogni  $s \in P$ .*

*Dimostrazione.*  $(\Rightarrow)$  Sia  $a \in I(P)$  invertibile e sia  $a^{-1}$  il suo inverso. Allora, per ogni  $s \in P$  si ha  $1 = \delta_{ss} = (aa^{-1})_{ss} = a_{ss}a_{ss}^{-1}$  quindi  $a_{ss}$  è invertibile.

$(\Leftarrow)$  Sia  $a \in I(P)$  tale che  $\forall s \in P$ ,  $a_{ss}$  sia invertibile in  $A$ . Vogliamo definire per induzione su  $\rho_{st}$  un elemento  $b \in I(P)$  che sia l'inverso di  $a$ . Sia  $s \in P$  e  $b_{ss} = (a_{ss})^{-1}$ , si ha  $(ab)_{ss} = a_{ss}b_{ss} = 1$ . Sia ora  $s < t$ , definiamo:

$$b_{st} = -(a_{ss})^{-1} \left( \sum_{s < w \leq t} a_{sw}b_{wt} \right).$$

Questo è effettivamente l'inverso cercato, infatti:

$$(ab)_{st} = a_{ss}b_{st} + \sum_{s < w \leq t} a_{sw}b_{wt} = 0.$$

Quindi  $a$  è invertibile da destra con inverso  $b$ . Prendendo poi  $c \in I(P)$  definito come

$$c_{st} = \begin{cases} 1 & \text{se } s = t, \\ (a_{ss})^{-1} \left( \sum_{s \leq w < t} c_{sw}a_{wt} \right) & \text{se } s \neq t, \end{cases}$$

si mostra in modo analogo che  $a$  è invertibile da sinistra con inverso  $c$ . Dunque per associatività del prodotto in  $I(P)$  si ha:

$$b = \delta b = (ca)b = c(ab) = c\delta = c.$$

Quindi  $a$  è invertibile in  $I(P)$  con inverso  $c = b$ . □

Un esempio notevole di elemento dell'algebra di incidenza è dato dalla funzione  $\zeta$  definita come

$$\zeta_{st} = 1 \quad \forall s \leq t \in P.$$

Il suo inverso si chiama **funzione di Möbius**:  $\mu = \zeta^{-1}$ . Possiamo dare una definizione ricorsiva della funzione di Möbius, facilmente calcolabile:

$$\mu_{st} = \begin{cases} 1 & \text{se } s = t, \\ - \sum_{s \leq w < t} \mu_{sw} & \text{se } s \neq t. \end{cases}$$

O, equivalentemente, per unicità dell'inverso:

$$\mu_{st} = \begin{cases} 1 & \text{se } s = t, \\ -\sum_{s < w \leq t} \mu_{wt} & \text{se } s \neq t. \end{cases}$$

**Esempio 1.19.** Consideriamo  $\mathbb{Z}_{>0}$  ordinato per divisibilità, ossia se  $n, m \in \mathbb{Z}$  si ha  $n \leq m$  se e solo se  $m$  è divisibile per  $n$ . Osserviamo che l'intervallo  $[m, n]$  è isomorfo a  $[1, \frac{m}{n}]$ . Allora basta calcolare la funzione di Möbius per ogni intervallo della forma  $[1, n]$  con  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Se  $n = 1$ , si ha  $\mu_{1,1} = 1$ . Sia  $n > 1$  e supponiamo che  $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$  sia la sua scomposizione in fattori primi, allora si può dimostrare che vale la seguente formula per la funzione di Möbius.

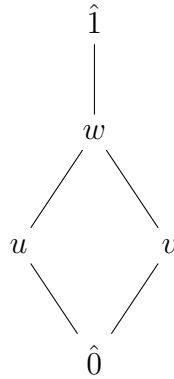
$$\mu_{1,n} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ (-1)^k & \text{se } e_i = 1 \ \forall i \in \{1, \dots, k\}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

**Definizione 1.20.** Sia  $A = \mathbb{Z}[x]$  e sia  $f \in I(P)$ ,  $f_{st}(x) = x^{\rho_{st}}$ . La **funzione caratteristica**  $\chi \in I(P)$  è definita come:

$$\chi_{st}(x) = (\mu f)_{st}(x) = \sum_{s \leq w \leq t} \mu_{sw} x^{\rho_{wt}}$$

Se  $P$  è limitato, chiamiamo  $\chi_P := \chi_{\hat{0}\hat{1}}(x)$  il **polinomio caratteristico** di  $P$ .

**Esempio 1.21.** Sia  $P =$





Calcoliamo innanzitutto la funzione di Möbius:

$$\mu_{st} = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho_{st} = 0 \text{ o } [s, t] = [\hat{0}, w], \\ -1 & \text{se } \rho_{st} = 1, \\ 0 & \text{se } s \in \{u, v\}, t = \hat{1} \text{ o } \rho_{st} = 3. \end{cases}$$

La funzione caratteristica è dunque

$$\chi_{st}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } s = t, \\ x - 1 & \text{se } \rho_{st} = 1, \\ x^2 - 2x + 1 & \text{se } [s, t] = [\hat{0}, w], \\ x^2 - x & \text{se } s \in \{u, v\}, t = 1, \\ x^3 - 2x^2 + x & \text{se } \rho_{st} = 3. \end{cases}$$

In particolare il polinomio caratteristico è  $\chi_P = x^3 - 2x^2 + x$ .

# Capitolo 2

## Poset Euleriani

Questo capitolo tratta dei poset euleriani, una classe di insiemi parzialmente ordinati che risulta particolarmente rilevante in vari ambiti della matematica. Iniziamo con un introduzione generale, successivamente vedremo alcuni esempi, con particolare attenzione ai poset dati dai gruppi di Coxeter dotati di ordinamento di Bruhat.

**Definizione 2.1.** Un poset  $P$  si dice **euleriano** se  $\forall s \leq t \in P$  vale  $\mu_{st} = (-1)^{\rho_{st}}$ , dove  $\mu$  è la funzione di Möbius.

**Esempio 2.2.** Un politopo convesso di dimensione  $d$  è l'involuppo convesso di un insieme finito di punti in  $\mathbb{R}^d$ ; in particolare, per  $d = 2$  si ottiene un poligono convesso, mentre per  $d = 3$  un poliedro convesso. Una faccia di un politopo convesso  $P$  è l'intersezione di  $P$  con un iperpiano di supporto, cioè con un iperpiano che contiene  $P$  in un semispazio chiuso. Le facce comprendono il politopo stesso e l'insieme vuoto.

I politopi sono stati studiati in modo approfondito, per esempio in [Zie95], ma non verranno trattati nello specifico in questa tesi. Ne vediamo solo una proprietà, che li rende di rilevanza per gli argomenti trattati.

È possibile dimostrare che il reticolo delle facce di un politopo convesso, ordinato per inclusione, costituisce un poset graduato euleriano. Possiamo vederne un esempio nella Figura 2.1.

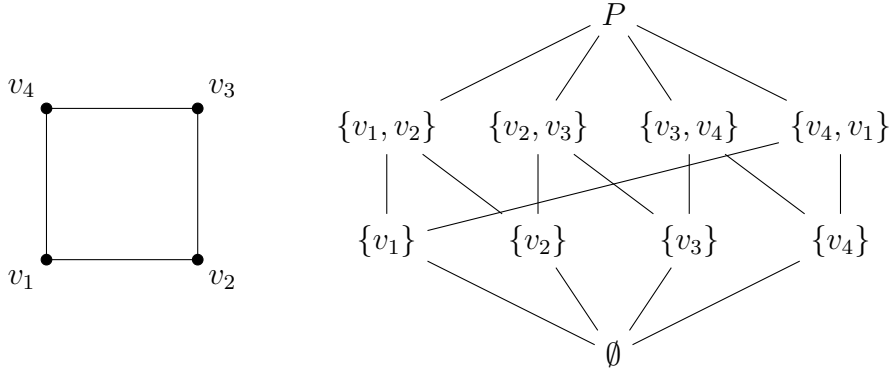


Figura 2.1: Un quadrato e il suo reticolo delle facce

**Proposizione 2.3** (Caratterizzazione dei poset euleriani). *Un poset  $P$  è euleriano se e solo se in ogni intervallo  $[s, t] \subseteq P$  sono presenti lo stesso numero di elementi di rango pari e di rango dispari.*

(Nota: con rango di  $w \in [s, t]$  si intende il rango in  $[s, t]$  come poset, ossia  $\rho_{sw}$ ).

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) Riprendiamo la definizione ricorsiva della funzione di Möbius. Siano  $s < t \in P$ ,

$$\mu_{st} = - \sum_{s \leq w < t} \mu_{sw}.$$

Si ha dunque

$$(-1)^{\rho_{st}} = - \sum_{s \leq w < t} (-1)^{\rho_{sw}} \iff \sum_{s \leq w \leq t} (-1)^{\rho_{sw}} = 0,$$

che è equivalente al fatto che l'intervallo  $[s, t]$  abbia lo stesso numero di elementi di rango pari e dispari.

( $\Leftarrow$ ) Per ipotesi  $\forall [s, t] \subseteq P$  vale  $\sum_{s \leq w \leq t} (-1)^{\rho_{sw}} = 0$ . Dimostriamo che  $P$  è euleriano per induzione su  $\rho_{st}$ . Se  $\rho_{st} = 1$ ,  $t$  copre  $s$  e  $\mu_{st} = -\mu_{ss} = -1$  quindi la tesi. Sia  $\rho_{st} > 1$ , allora

$$\sum_{s \leq w \leq t} (-1)^{\rho_{sw}} = 0 = \mu_{st} + \sum_{s \leq w < t} \mu_{sw} = \mu_{st} + \sum_{s \leq w < t} (-1)^{\rho_{sw}}.$$

E quindi  $\mu_{st} = (-1)^{\rho_{st}}$ .

□

**Esempio 2.4.** I reticoli Booleani  $B_n$ , visti nell'Esempio 1.15, sono euleriani.

*Dimostrazione.* Si osservi che ogni intervallo  $[s, t] \subseteq B_n$  è isomorfo a  $B_m$  con  $m = \rho_{st}$ . Dunque basta dimostrare che in  $B_n$  ci sono lo stesso numero di elementi di rango pari e dispari. In generale il numero di elementi di  $B_n$  di rango  $k$  è  $\binom{n}{k}$ , quindi

$$\# \text{ elementi di rango pari} - \# \text{ elementi di rango dispari}$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1 - 1)^n = 0.$$

□

**Esempio 2.5.** L'Esempio 1.9 rappresenta un poset euleriano. Per quanto riguarda l'Esempio 1.14,  $P_1$  non è euleriano in quanto se si considera  $[\hat{0}, c]$  sono presenti due elementi di ordine pari,  $\hat{0}$ ,  $c$ , ma uno solo di rango dispari,  $a$ . Invece  $P_2$  è euleriano, perché gli intervalli  $[\hat{0}, c]$ ,  $[\hat{0}, d]$ ,  $[a, \hat{1}]$ ,  $[b, \hat{1}]$  sono isomorfi all'Esempio 1.12.

Un importante esempio di insiemi parzialmente ordinati euleriani è dato dai gruppi di Coxeter dotati dell'ordinamento di Bruhat, che verranno introdotti nelle prossime sezioni.

## 2.1 Gruppi di Coxeter

Cominciamo con l'introdurre una serie di definizioni di base.

**Definizione 2.6.** Una **matrice di Coxeter** di rango  $n$  è una matrice simmetrica  $n \times n$  a coefficienti interi, in cui le entrate della diagonale hanno tutte valore 1 e le altre hanno valore maggiore o uguale a 2. Un **sistema di Coxeter** associato ad una matrice di Coxeter  $M = (m_{i,j})$  è una coppia

$(W, S)$ , dove  $W$  è un gruppo e  $S := \{s_1, \dots, s_n\}$  è un sottoinsieme di  $W$  tale che  $S$  genera  $W$  e valgono solamente le seguenti relazioni

$$s_i^2 = e \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad (s_i s_j)^{m_{i,j}} = e \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad i \neq j,$$

dove  $e$  è l'elemento neutro del gruppo.

**Definizione 2.7.** Un gruppo  $W$  viene detto **gruppo di Coxeter** se esiste un suo sottoinsieme  $S$  tale che  $(W, S)$  è un sistema di Coxeter. L'insieme  $S$  è detto **insieme dei generatori di Coxeter** per il gruppo  $W$  e  $|S|$  è il **rango** del sistema di Coxeter  $(W, S)$ .

Questo equivale a definire il gruppo di Coxeter  $W$  come un quoziente  $F/N$  dove  $F$  è il gruppo libero sull'insieme  $S$  e  $N$  è il sottogruppo normale generato dagli elementi  $(s_i s_j)^{m_{i,j}}$  per ogni  $i, j$ .

**Esempio 2.8.** I gruppi di Weyl di sistemi di radici sono dei gruppi di Coxeter. In particolare quasi tutti i gruppi di Coxeter finiti sono gruppi di Weyl. Esempi elementari di gruppi di Weyl sono i gruppi simmetrici  $S_n$ , infatti essi sono generati dalle riflessioni semplici  $s_1, \dots, s_{n-1}$ ,  $s_i = (i, i+1)$ . Le relazioni sono date da

$$m_{i,j} = 2 \text{ se } |i - j| > 1, \quad m_{i,j} = 3 \text{ altrimenti.}$$

Dunque, se  $S = \{s_1 \dots s_n\}$ ,  $(S_n, S)$  è un sistema di Coxeter di rango  $n - 1$ . Consideriamo per esempio  $n = 3$ ,  $S_3$  è generato da  $\{s_1, s_2\}$  e la matrice di Coxeter è

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se  $n = 4$ , invece, si ha la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Osservazione 2.9.* La matrice di Coxeter è simmetrica perché  $s_i s_j$  e  $s_j s_i$  hanno lo stesso ordine. Infatti:

$$\begin{aligned} (s_i s_j)^{m_{i,j}} = e &\iff \underbrace{s_i s_j s_i s_j \cdots s_i s_j}_{m_{i,j} \text{ volte}} = e \iff s_j s_i s_j \cdots s_i = s_j s_i \\ &\iff e = \underbrace{s_j s_i s_j s_i \cdots s_j s_i}_{m_{i,j} \text{ volte}} \iff (s_j s_i)^{m_{i,j}} = e. \end{aligned}$$

Quindi  $(s_i s_j)^{m_{i,j}} = e$  implica anche  $(s_j s_i)^{m_{i,j}} = e$ . Inoltre si può dimostrare che  $s_i$  e  $s_j$  commutano se e solo se  $m_{i,j} = 2$ .

Osserviamo anche che, per definizione, ogni elemento di  $S$  è un'involuzione.

Un **diagramma di Coxeter** di un sistema di Coxeter  $(W, S)$  è un grafo non orientato il cui insieme dei nodi è  $S$  ed esiste un arco che collega  $s_i$  a  $s_j$  se e solo se  $m_{i,j} \geq 3$ . Inoltre se  $m_{i,j} \geq 4$ , il lato viene etichettato con  $m_{i,j}$ .

**Esempio 2.10.** Consideriamo ancora  $S_3$ . Il suo diagramma di Coxeter è

$$s_1 \text{ ————— } s_2$$

Il diagramma di Coxeter di  $S_4$  è invece

$$s_1 \text{ ————— } s_2 \text{ ————— } s_3$$

In generale osserviamo che per il gruppo simmetrico  $S_n$ , il diagramma di Coxeter associato è dato dal diagramma di Dynkin di tipo  $A_{n-1}$ .

**Esempio 2.11.** Possiamo partire da un diagramma di Dynkin di tipo  $A_3$ , come abbiamo visto per  $S_3$ , ma etichettare in modo differente, per esempio

$$s_1 \text{ — } \overset{4}{\text{—}} \text{— } s_2 \text{ ————— } s_3$$

Questo grafo è chiamato  $B_3$  e possiamo costruire un gruppo di Coxeter che abbia  $B_3$  come diagramma. Si ha dunque il sistema di Coxeter  $(G, S)$ , associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

dove  $S = \{s_1, s_2, s_3\}$  e vale

$$(s_1 s_2)^4 = e, (s_1 s_3)^2 = 2, (s_2 s_3)^3 = e, s_i^2 = e \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Se  $W$  è un gruppo di Coxeter,  $w \in W$  si può scrivere come  $w = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_n}$ . Chiamiamo la parola  $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_n}$  nell'alfabeto  $S$  un **espressione** per  $w$ . La **lunghezza** di un elemento  $w$ , indicata con  $l(w)$ , è il minimo intero  $k$  tale che  $w$  può essere scritto come prodotto di  $k$  generatori. Se  $w = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k}$ , con  $k = l(w)$ , allora la parola  $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k}$  è chiamata un **espressione ridotta** di  $w$ .

Sui gruppi di Coxeter è possibile stabilire un ordinamento parziale tra gli elementi, detto ordine di Bruhat. Saranno ora presentate alcune proprietà dei gruppi di Coxeter che servono alla buona definizione di tale ordinamento, le dimostrazioni si possono trovare in [BB05].

Avremo bisogno della seguente definizione:

**Definizione 2.12.** Una **riflessione**  $t$  in un gruppo di Coxeter  $W$  è il coniugato, tramite un qualche  $w \in W$ , di un elemento dell'insieme dei generatori  $s \in S$ :  $t = w s w^{-1}$ . Chiamiamo  $T$  l'insieme delle riflessioni:

$$T = \{w s w^{-1} : s \in S, w \in W\}.$$

**Teorema 2.13** (Proprietà di scambio forte). *Supponiamo  $w = s_1 s_2 \dots s_k$ ,  $s_i \in S$ ,  $\forall i$  e sia  $t \in T$ . Se  $l(tw) < l(w)$ , allora  $tw = s_1 s_2 \dots \hat{s}_i \dots s_k$  per qualche  $i \in \{1, \dots, k\}$ .*

La scrittura  $\hat{s}_i$  indica che  $s_i$  è stato rimosso, equivale a scrivere  $tw = s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_k$ .

**Definizione 2.14.** Sia  $(W, S)$  un sistema di Coxeter e sia  $w \in W$ . Allora

$$D_L(w) := \{s \in S : l(sw) < l(w)\}$$

$$D_R(w) := \{s \in S : l(ws) < l(w)\}$$

sono detti rispettivamente **insieme delle discese sinistre** e **insieme delle discese destre**.

**Corollario 2.15.** *Per ogni  $s \in S$  e per ogni  $w \in W$ , valgono le seguenti:*

1.  $s \in D_L(w)$  se e solo se qualche espressione ridotta per  $w$  inizia con la lettera  $s$ .
2.  $s \in D_R(w)$  se e solo se qualche espressione ridotta per  $w$  finisce con la lettera  $s$ .

**Teorema 2.16** (Proprietà di cancellazione). *Se  $w = s_1 s_2 \dots s_k$  e  $l(w) < k$ , allora  $w = s_1 \dots \hat{s}_i \dots \hat{s}_j \dots s_k$ , per qualche  $1 \leq i < j \leq k$ .*

Si può dimostrare che le proprietà di cancellazione e di scambio forte sono equivalenti ed entrambe caratterizzano i gruppi di Coxeter. Infatti vale la seguente caratterizzazione dei gruppi di Coxeter: sia  $W$  un gruppo e  $S$  un suo gruppo di generatori, tale che ogni elemento di  $S$  sia di ordine 2. Sono equivalenti le seguenti:

- $(W, S)$  è un sistema di Coxeter;
- $(W, S)$  gode della Proprietà di Scambio;
- $(W, S)$  gode della Proprietà di Cancellazione.

Sia  $(W, S)$  un sistema di Coxeter. Definiamo una **sottoparola** di  $s_1 s_2 \dots s_k$ ,  $s_i \in S$  come

$$s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_q}, \text{ con } 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_q \leq k.$$

**Corollario 2.17.** *Sia  $(W, S)$  un sistema di Coxeter,  $w \in W$ . Valgono le seguenti*

1. *Qualsiasi espressione  $w = s_1 \dots s_k$  contiene un'espressione ridotta per  $w$  come sottoparola.*
2. *Supponiamo che  $w = s_1 \dots s_k = s'_1 \dots s'_k$  siano due espressioni ridotte per  $w$ . Allora l'insieme di lettere che appaiono nella parola  $s_1 \dots s_k$  è uguale all'insieme delle lettere che compaiono nella parola  $s'_1 \dots s'_k$ .*
3.  *$S$  è un insieme minimale di generatori per  $W$ , ovvero nessun generatore di Coxeter può essere espresso in termini di altri generatori.*



## 2.2 Ordinamento di Bruhat

In questa sezione useremo  $(W, S)$  per indicare un sistema di Coxeter. Diamo innanzitutto alcune definizioni.

**Definizione 2.18.** Il **grafo di Bruhat** di  $W$  è il grafo orientato il cui insieme dei vertici è  $W$  e dati  $u, v \in W$  si ha un arco  $u \rightarrow v$  se e solo se  $v = ut$  per qualche riflessione  $t \in T$  e  $l(u) < l(v)$ .

Adesso possiamo definire l'ordinamento di Bruhat.

**Definizione 2.19.** L'**ordinamento di Bruhat** di  $W$  è la relazione di ordine parziale definita da  $\rightarrow$  ed estesa per transitività. Quindi dati  $u, v \in W$  vale  $u \leq v$  se e solo se esiste una catena

$$u = u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow \cdots \rightarrow u_k = v.$$

Possiamo caratterizzare l'ordinamento di Bruhat utilizzando il concetto di sottoparola, definito nella sezione precedente.

**Teorema 2.20** (Proprietà della Sottoparola). *Siano  $u, w \in W$ . Sia  $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$  un'espressione ridotta per  $w$ . Allora  $u \leq w$  se e solo se esiste un'espressione ridotta di  $u$  come sottoparola di  $s_{i_1} \dots s_{i_k}$ .*

*Dimostrazione.* La dimostrazione si trova su [BB05]. □

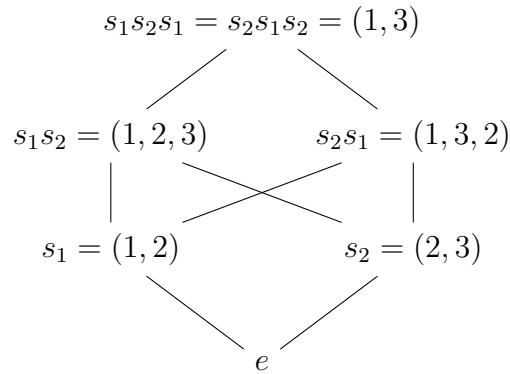
Esiste una proposizione che caratterizza l'ordinamento dell'inverso degli elementi di un gruppo di Coxeter.

**Proposizione 2.21.** *Siano  $u, v \in W$ . Le seguenti sono equivalenti:*

1.  $u \leq v$ ;
2.  $u^{-1} \leq v^{-1}$ .

*Dimostrazione.* Per il Teorema 2.20 esiste un'espressione di  $v$  ridotta tale che  $u$  sia una sua sottoparola. Sia questa  $v = s_1 \dots s_n$  e sia  $u = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ . Allora un'espressione ridotta di  $v^{-1}$  è  $s_n \dots s_1$  e  $u^{-1} = s_{i_k} \dots s_{i_1}$  dunque si ha  $u^{-1} \leq v^{-1}$ . Il viceversa è analogo. □

**Esempio 2.22.** Riprendiamo l'Esempio 2.10. L'insieme parzialmente ordinato dato dall'ordinamento di Bruhat di  $S_3$  è:



**Esempio 2.23.** Consideriamo ora il gruppo di Coxeter avente come diagramma associato  $B_2$ :

$$s_1 \xrightarrow{4} s_2$$

Le relazioni sono

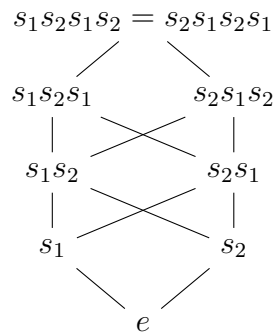
(i)  $s_1^2 = s_2^2 = e$

(ii)  $(s_1s_2)^4 = (s_2s_1)^4 = e$

Dalla condizione (ii) otteniamo

$$s_1s_2s_1s_2 = s_2s_1s_2s_1$$

Dunque il poset associato sarà:



**Esempio 2.24.** Torniamo ad  $S_n$ , per trovare l'ordinamento per  $n$  grande, computare ogni prodotto è più complicato. C'è un modo per calcolare la lunghezza di un elemento di  $S_n$ , attraverso il concetto di inversione. Sia  $w \in S_n$  chiamiamo **inversione** di  $w$  una coppia  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ ,  $i < j$ , tale che  $w_i > w_j$ , dove  $w_k = w(k) \forall k \in \{1, \dots, n\}$ . Indichiamo con  $inv(w)$  il numero di inversioni di  $w$ . Si può dimostrare che

$$inv(w) = l(w).$$

Scriviamo  $w = [w_1 \dots w_n]$ , allora si ha che  $w \leq u$  e  $l(u) = l(w) + 1$  se e solo se  $u = [u_1 \dots u_n]$  si ottiene da  $w$  scambiando  $w_i$  e  $w_j$  per qualche  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  in modo tale da avere

$$inv(u) = inv(w) + 1.$$

In questo modo è possibile costruire il diagramma di Hasse per esempio di  $S_4$ , Figura 2.2.

Osserviamo che i poset ottenuti negli esempi sono euleriani. Possiamo generalizzare questo risultato.

**Teorema 2.25.** *L'insieme parzialmente ordinato ottenuto da un gruppo di Coxeter  $W$  con l'ordinamento di Bruhat è euleriano.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione di questo teorema si trova in [Ver71].  $\square$

Sui gruppi di Coxeter con ordine di Bruhat, Kazhdan e Lusztig hanno inizialmente sviluppato il concetto di nucleo, che vedremo nel capitolo successivo. In particolare hanno definito dei polinomi, chiamati **R-polinomi** ed hanno dimostrato alcune proprietà di questi, oltre che la buona definizione. Siano  $x, w \in W$ , e sia  $s \in D_L(w)$  il polinomio  $R_{x,w}(q)$  è definito in maniera ricorsiva come segue

$$R_{x,w}(q) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \not\leq w, \\ 1 & \text{se } x = w, \\ R_{sx,sw} & \text{se } s \in D_L(x), \\ (q-1)R_{x,sw}(q) + qR_{sx,sw} & \text{se } s \notin D_L(x). \end{cases}$$

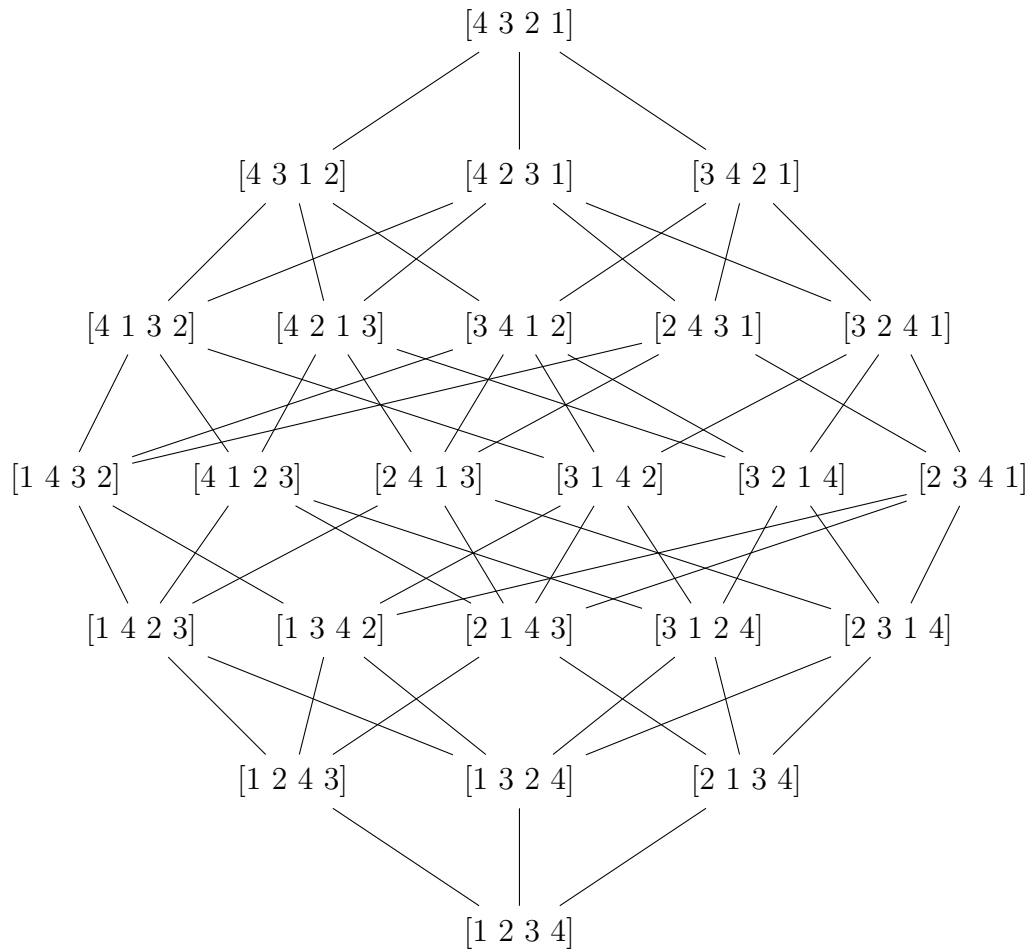


Figura 2.2: Diagramma di Hasse dell'ordinamento di Bruhat di  $S_4$ .

A partire dagli  $R$ -polinomi si possono costruire i polinomi di Kazhdan–Lusztig in modo ricorsivo. Per ogni  $x \leq w$  in  $W$

$$q^{l(w)-l(x)} P_{x,w}(q^{-1}) = \sum_{a \in [x,w]} R_{x,a} P_{a,w}.$$

Sin dagli inizi (ossia la pubblicazione di [KL79] nel 1979) si congetturava che i polinomi di Kazhdan–Lusztig avessero coefficienti non negativi per ogni gruppo di Coxeter. Per i gruppi di Weyl, grazie all’interpretazione geometrica dei coefficienti dei polinomi come dimensioni di certi gruppi di coomologia, era nota la non negatività. La dimostrazione del caso generale arrivò solo nel 2014 con il lavoro di Elias e Williamson, [EW14].

Stanley in [Sta92] ha generalizzato la teoria a tutti gli insiemi parzialmente ordinati, introducendo delle funzioni che furono poi chiamate funzioni di Kazhdan–Lusztig–Stanley, che saranno trattate nel prossimo capitolo.

# Capitolo 3

## Funzioni di Kazhdan–Lusztig–Stanley

In questo capitolo riprenderemo molte definizioni presentate nei concetti preliminari, in particolare l'algebra di incidenza di un insieme parzialmente ordinato. D'ora in poi l'anello unitario su cui è definita l'algebra di incidenza sarà sempre considerato come  $\mathbb{Z}[x]$ .

### 3.1 P-Nuclei

Sia  $P$  un Poset e  $\rho$  una funzione rango. Definiamo  $I_\rho(P) \subseteq I(P)$  come

$$I_\rho(P) = \{a \in I(P) : \deg(a_{st}) \leq \rho_{st}\}.$$

Questo insieme costituisce un sottoanello dell'algebra di incidenza  $I(P)$ .

Infatti: siano  $a, b \in I_\rho(P)$ , allora:

- $\delta \in I_\rho(P)$ ;
- $\deg[(a + b)_{st}] = \deg(a_{st} + b_{st}) \leq \max\{\deg a_{st}, \deg b_{st}\} \leq \rho_{st}$  quindi  $a + b \in I_\rho(P)$ ;
- $\deg[(ab)_{st}] = \deg\left(\sum_{s \leq w \leq t} a_{sw}b_{wt}\right) \leq \max_{s \leq w \leq t} \{\deg a_{sw} + \deg b_{wt}\} \leq \max_{s \leq w \leq t} \{\rho_{sw} + \rho_{wt}\} = \rho_{st}$  quindi  $ab \in I_\rho(P)$ .

**Definizione 3.1.** In  $I_\rho(P)$  è definita un'involuzione:

$$\begin{aligned} {}^{rev} : I_\rho(P) &\rightarrow I_\rho(P) \\ a &\mapsto a^{rev}, \end{aligned}$$

dove  $(a^{rev})_{st} := a_{st}(x^{-1}) \cdot x^{\rho_{st}}$ . Si dice che  $a$  è **simmetrica** se risulta  $a^{rev} = a$ .

**Lemma 3.2.** Siano  $f, g \in I_\rho(P)$ . Allora valgono le seguenti:

1.  $(fg)^{rev} = f^{rev} g^{rev}$ .
2. Se  $f$  invertibile,  $(f^{-1})^{rev} = (f^{rev})^{-1}$ .

*Dimostrazione.* 1.

$$\begin{aligned} [(fg)^{rev}]_{st}(x) &= (fg)_{st}(x^{-1}) x^{\rho_{st}} = \sum_{s \leq w \leq t} f_{sw}(x^{-1}) g_{wt}(x^{-1}) x^{\rho_{sw} + \rho_{wt}} \\ &= \sum_{s \leq w \leq t} (f^{rev})_{sw}(x) (g^{rev})_{wt}(x) = (f^{rev} g^{rev})_{st}(x). \end{aligned}$$

2.

$$(f^{-1})^{rev} f^{rev} = (f^{-1} f)^{rev} = \delta^{rev} = \delta,$$

dove si è usato il punto 1 e il fatto che  $\delta^{rev} = \delta$  poiché è un polinomio di grado 0, quindi invariante rispetto a  ${}^{rev}$ .

Analogamente si dimostra  $f^{rev} (f^{-1})^{rev} = \delta$  e dunque la tesi. □

**Definizione 3.3.** Sia  $k \in I_\rho(P)$  tale che  $k_{ss} = 1 \ \forall s \in P$ . Diciamo che  $k$  è un **nucleo** (o **P-nucleo**) se

$$k^{rev} = k^{-1}.$$

**Lemma 3.4.** Sia  $a \in I_\rho(P)$  invertibile. Allora

$$k = a^{-1} a^{rev} \quad e \quad h = a^{rev} a^{-1}$$

sono dei nuclei.

*Dimostrazione.* Dimostriamolo per  $k$ , per  $h$  la dimostrazione è analoga.

$$k^{rev} = (a^{-1}a^{rev})^{rev} = (a^{-1})^{rev}(a^{rev})^{rev} = (a^{rev})^{-1}a = (a^{-1}a^{rev})^{-1} = k^{-1}.$$

□

**Esempio 3.5.** La funzione caratteristica è un nucleo per ogni poset  $P$ . Infatti siano  $P$  un poset e  $s, t \in P$ ,  $s \leq t$ , per il lemma si ha che  $\zeta^{-1}\zeta^{rev}$  è un nucleo.

$$(\zeta^{rev})_{st}(x) = \zeta_{st}(x^{-1}) \cdot x^{\rho_{st}} = x^{\rho_{st}}$$

Quindi

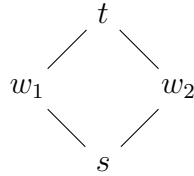
$$(\zeta^{-1}\zeta^{rev})_{st}(x) = (\mu\zeta^{rev})_{st}(x) = \sum_{s \leq w \leq t} (\mu_{sw}(x) \cdot x^{\rho_{wt}}) = \chi_{st}(x)$$

**Esempio 3.6.** Consideriamo il poset euleriano associato a  $S_3$  con ordinamento di Bruhat, visto nell'Esempio 2.22 e la funzione  $\varepsilon_{st}(x) = (x - 1)^{\rho_{st}}$ . Mostriamo che  $\varepsilon$  è un nucleo in tale poset.

$$\varepsilon_{st}^{rev} = (1 - x)^{\rho_{st}}.$$

Verifichiamo  $\varepsilon^{rev}\varepsilon = \delta$  :

- $\rho_{st} = 0$ ,  $s = t$ , allora  $(\varepsilon^{rev}\varepsilon)_{ss}(x) = 1$ .
- $\rho_{st} = 1$ ,  $(\varepsilon^{rev}\varepsilon)_{st}(x) = x - 1 + 1 - x = 0$ .
- $\rho_{st} = 2$ , ogni intervallo di rango 2 ha struttura:



$$\text{quindi } (\varepsilon^{rev}\varepsilon)_{st}(x) = (x - 1)^2 - 2(x - 1)^2 + (x - 1)^2 = 0.$$

- $\rho_{st} = 3$ , quindi  $s = e$ ,  $t = s_1s_2s_3$ . Si ha  $(\varepsilon^{rev}\varepsilon)_{st} = (x - 1)^3 - 2(x - 1)^3 + 2(x - 1)^3 + (1 - x)^3 = 0$ .



Possiamo generalizzare questo risultato a tutti i poset euleriani, più precisamente esso ne fornisce una caratterizzazione.

**Teorema 3.7.** *Un poset  $P$  è euleriano se e solo se l'elemento  $\varepsilon \in I_\rho(P)$ ,*

$$\varepsilon_{st}(x) = (x - 1)^{\rho_{st}} \quad \forall s \leq t \in P$$

*è un nucleo.*

*Dimostrazione.* Osserviamo che  $\varepsilon_{st}^{rev}(x) = (1 - x)^{\rho_{st}}$ . Inoltre  $\varepsilon_{ss} = 1 \quad \forall s \in P$  quindi è invertibile.

$$(\varepsilon^{rev} \varepsilon)_{st} = \sum_{s \leq w \leq t} (1 - x)^{\rho_{ws}} (x - 1)^{\rho_{wt}} = (x - 1)^{\rho_{st}} \sum_{s \leq w \leq t} (-1)^{\rho_{sw}}.$$

Poichè deve valere  $\forall x$  questo è uguale a  $\delta_{st}$  se e solo se  $\sum_{s \leq w \leq t} (-1)^{\rho_{sw}} = 0$  ossia  $P$  è euleriano.  $\square$

## 3.2 Funzioni KLS

Un teorema di Stanley garantisce che ogni nucleo ha la forma vista nel Lemma 3.4, sebbene lui consideri solamente la funzione indicata con  $k$  nel lemma (e non  $h$ ); il risultato rimane comunque valido. Questo enunciato costituisce il teorema centrale di questa sezione. Stanley, infatti, definisce un  $P$ -nucleo come una funzione  $f$  invertibile che soddisfa  $f^{rev} = fk$ . Se  $f$  soddisfa solo quest'ultima condizione, si dice che è  $k$ -totalmente accettabile. Inoltre, aggiungendo una condizione sul grado, abbiamo l'unicità delle funzioni  $k$ -totalmente accettabili.

Per dimostrarlo è necessario il seguente lemma:

**Lemma 3.8.** *Sia  $k \in I_\rho(P)$  un nucleo e siano  $s, t \in P$ . Suppongo che  $f \in I_\rho(P)$  soddisfi  $\forall w \in P, s < w \leq t$*

$$(kf)_{wt} = \sum_{w \leq u \leq t} k_{wu} f_{ut} = (f^{rev})_{wt}.$$

Allora il polinomio

$$Q_{st}(x) = \sum_{s < w \leq t} k_{sw}(x) f_{wt}(x)$$

è antisimmetrico, cioè  $Q^{rev} = -Q$ .

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} Q_{st}^{rev} &= \sum_{s < w \leq t} k_{sw}^{rev} f_{wt}^{rev} \\ &= \sum_{s < w \leq t} k_{sw}^{rev} (kf)_{wt} \\ &= \sum_{s < w \leq t} k_{sw}^{rev} \sum_{w \leq u \leq t} k_{wu} f_{ut} \\ &= \sum_{s < w \leq u \leq t} k_{sw}^{rev} k_{wu} f_{ut} \\ &= \sum_{s < u \leq t} f_{ut} \sum_{s < w \leq u} k_{sw}^{rev} k_{wu} \\ &= \sum_{s < u \leq t} f_{ut} ((k^{rev}k)_{su} - k_{su}) \\ &= - \sum_{s < u \leq t} k_{su} f_{ut} = -Q_{st} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato  $(k^{rev}k)_{su} = \delta_{su} = 0$ . □

Ai fini del teorema, definiamo

$$I_{1/2}(P) = \{a \in I(P) : a_{ss} = 1 \ \forall s \in P \text{ e } \deg(a_{st}) < \rho_{st}/2 \ \forall s, t \in P, \ s < t\}.$$

*Osservazione 3.9.* Questo insieme non costituisce una sottoalgebra di  $I(P)$ , perché se  $a, b \in I_{1/2}(P)$ , allora  $a + b \notin I_{1/2}(P)$ , perché  $(a + b)_{ss} = a_{ss} + b_{ss} = 2$  per ogni  $s \in P$ . Costituisce invece un gruppo moltiplicativo, infatti siano  $a, b \in I_{1/2}(P)$ , allora per ogni  $s \in P$ ,  $(ab)_{ss} = a_{ss}b_{ss} = 1$ . Siano ora  $s < t$  in  $P$  si ha

$$\begin{aligned} \deg[(ab)_{st}] &= \deg\left(\sum_{s \leq w \leq t} a_{sw}b_{wt}\right) \\ &\leq \max_{s \leq w \leq t} \{\deg a_{sw} + \deg b_{wt}\} < \max_{s \leq w \leq t} \left\{\frac{1}{2}\rho_{sw} + \frac{1}{2}\rho_{wt}\right\} = \frac{1}{2}\rho_{st}. \end{aligned}$$

Quindi  $ab \in I_{1/2}(P)$ .

**Teorema 3.10.** *Se  $k \in I_\rho(P)$  è un nucleo, allora esistono e sono uniche  $f, g \in I_{1/2}(P)$  tali che  $f^{rev} = kf$  e  $g^{rev} = gk$ .*

*Dimostrazione.* Dimostriamo il teorema per  $f$ , per  $g$  è analogo.

Procediamo per induzione su  $\rho_{st}$ . Per il passo base, se  $s \in P$  basta prendere  $f_{ss} = 1$  e si ha

$$f_{ss}^{rev} = 1 = k_{ss}f_{ss}.$$

Siano ora  $s, t \in P$ ,  $s < t$  fissati e supponiamo che  $f_{wt}(x)$  sia definito  $\forall w \in P$ , tale che  $s < w \leq t$  in modo tale che valga

$$f_{wt}^{rev} = (kf)_{wt}.$$

Definiamo

$$Q_{st} := \sum_{s < w \leq t} k_{sw}f_{wt}.$$

Allora  $f^{rev} = kf$  in  $[s, t]$  diventa

$$(f^{rev})_{st} = (kf)_{st} = Q_{st} + k_{ss}f_{st}.$$

Usando  $k_{ss} = 1$  dunque si ottiene

$$f_{st}^{rev} - f_{st} = Q_{st}. \quad (3.1)$$

Per il lemma  $Q_{st}$  è antisimmetrico. Dunque esiste una sola scelta per  $f_{st}$  tale che  $\deg(f_{st}) < \rho_{st}/2$  perché sia soddisfatta (3.1).  $\square$

Ora, dunque, è ben posta la seguente definizione.

**Definizione 3.11.** Sia  $k \in I_\rho(P)$  un nucleo. Chiamiamo **funzioni di Kazhdan–Lusztig–Stanley** (o funzioni **KLS**) **destra e sinistra** associate a  $k$  rispettivamente le funzioni  $f, g \in I_{1/2}(P)$  tali che

$$k = f^{rev}f^{-1} = g^{-1}g^{rev}.$$

Vediamo un risultato che dà informazioni sui coefficienti di  $f$  e  $g$  che sarà utile più avanti.

**Lemma 3.12.** *Sia  $k$  un  $P$ -nucleo e siano  $f$  e  $g$  le funzioni KLS associate a  $k$ . Valgono le seguenti uguaglianze per i coefficienti:*

$$[x^0]f_{st}(x) = [x^{\rho_{st}}]f_{st}^{rev}(x) = [x^{\rho_{st}}]k_{st}(x),$$

$$[x^0]g_{st}(x) = [x^{\rho_{st}}]g_{st}^{rev}(x) = [x^{\rho_{st}}]k_{st}(x).$$

*Dimostrazione.* Proviamo il lemma per  $g$ , la dimostrazione per  $f$  è analoga. Per ogni  $s \leq t$  vale

$$g_{st}^{rev}(x) = (gk)_{st}(x) = \sum_{s \leq w \leq t} g_{sw}(x)k_{wt}(x).$$

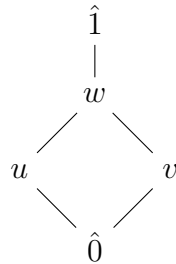
Separando dalla sommatoria i termini con  $w = s$  e  $w = t$  otteniamo

$$g_{st}^{rev}(x) - g_{st}(x) = k_{st}(x) + \sum_{s < w < t} g_{sw}(x)k_{wt}(x).$$

Poichè  $\deg g_{st} < \rho_{st}/2$  e ogni termine della sommatoria ha al più grado  $\frac{\rho_{sw}}{2} + \rho_{wt} < \rho_{st}$ , quindi solo  $k_{st}$  e  $g_{st}^{rev}$  hanno un coefficiente di grado  $\rho_{st}$ , che dunque deve essere uguale.  $\square$

In generale, le funzioni KLS destra e sinistra associate a un nucleo possono avere comportamenti molto diversi tra loro. Di seguito alcuni esempi che lo mostrano chiaramente.

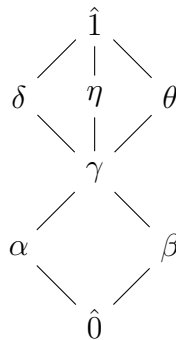
**Esempio 3.13.** La funzione KLS sinistra associata alla funzione caratteristica  $\chi$  è  $g = \zeta$ , come visto nell'Esempio 3.5. La funzione destra, invece, ha una struttura decisamente più complessa e non verrà trattata in dettaglio. Tuttavia, nel caso di un poset semplice, è possibile seguire la dimostrazione del teorema e costruirla tramite un calcolo diretto. Si osservi che, poichè  $\deg(f_{st}) < \rho_{st}/2$ , si ha che  $f_{st}$  è uno scalare per  $\rho_{st} < 3$ . Dunque, per avere esempi non banali, serve avere un poset di rango almeno 3 ( $\rho_{0\hat{1}} = 3$ ). Per esempio considerando l'Esempio 1.21  $P =$



si ottiene

$$f_{st}(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } [s, t] = [\hat{0}, \hat{1}], \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Aumentando il rango dell'insieme parzialmente ordinato si ottengono risultati più complessi, come per esempio  $Q =$



La funzione KLS destra associata alla funzione caratteristica  $\chi$  in  $Q$  è

$$f_{st}(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } [s, t] = [\hat{0}, \hat{1}], \\ 1 - x & \text{se } s = \hat{0}, t \in \{\delta, \eta, \theta\}, \\ 2x + 1 & \text{se } s \in \{\alpha, \beta\}, t = \hat{1}, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quindi è sostanzialmente differente dalla funzione sinistra che è costantemente uguale a 1.

**Esempio 3.14.** Sia  $B_3$  il reticolo Booleano con tre atomi, Esempio 1.15. Sia  $m \in \mathbb{Z}$ , definiamo  $k \in I_\rho(B_3)$  come segue:

$$k_{st}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho_{st} = 0, \\ x - 1 & \text{se } \rho_{st} = 1, \\ x^2 - 2x + 1 & \text{se } \rho_{st} = 2, \\ x^3 + mx^2 - mx - 1 & \text{se } \rho_{st} = 3. \end{cases}$$

Verifichiamo innanzitutto che  $k$  sia un nucleo calcolando esplicitamente  $k^{rev}$ , determinando per ogni  $\rho_{st}$  il prodotto  $(k^{rev}k)_{st}$  e verificando che equivalga a  $\delta_{st}$ .

$$k_{st}^{rev}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho_{st} = 0, \\ 1 - x & \text{se } \rho_{st} = 1, \\ 1 - 2x + x^2 & \text{se } \rho_{st} = 2, \\ 1 + mx - mx^2 - x^3 & \text{se } \rho_{st} = 4. \end{cases}$$

Osserviamo che per  $\rho_{st} = 2$  si ha  $k_{st}(x) = (x - 1)^2$ .

- $\rho_{st} = 0$ , banalmente  $(k^{rev}k)(x)_{ss} = k_{ss}^{rev}k_{ss}(x) = 1 = \delta_{ss}$ .
- $\rho_{st} = 1$ ,  $(k^{rev}k)_{st}(x) = x - 1 + 1 - x = 0 = \delta_{st}$ .
- $\rho_{st} = 2$ ,  $(k^{rev}k)_{st}(x) = (x - 1)^2 - (x - 1)^2 + (x - 1)^2 - (x - 1)^2 = 0 = \delta_{st}$ .
- $\rho_{st} = 3$ ,  $(k^{rev}k)_{st}(x) = x^3 + mx^2 - mx + 1 + 3(1 - x)(1 - 2x + x^2) + 3(x - 1)(1 - 2x + x^2) + 1 + mx - mx^2 - mx^3 = 0$ .

Quindi abbiamo dimostrato che  $k$  è effettivamente un  $B_3$ -nucleo, quindi per il Teorema 3.10 sappiamo che esistono e sono uniche le funzioni di Kazhdan–Luztig–Stanley. Questo esempio è particolare perché le funzioni destra e sinistra coincidono,

$$f_{st}(x) = g_{st}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho_{st} = 0, 1, 2, \\ 1 + (m + 3)x & \text{se } \rho_{st} = 3. \end{cases}$$

**Esempio 3.15.** Concentriamoci, come ultimo esempio, su un altro insieme parzialmente ordinato euleriano: quello ottenuto imponendo l'ordinamento di Bruhat sul gruppo di Coxeter associato al diagramma di tipo  $B_2$  (Esempio 2.23). Nel Teorema 3.7 abbiamo dimostrato che la funzione  $\varepsilon_{st}(x) = (x-1)^{\rho_{st}}$  è un nucleo in tale poset. Quindi possiamo calcolare le funzioni di Kazhdan–Lusztig–Stanley, che, analogamente all'esempio precedente, coincidono:

$$f_{st}(x) = g_{st}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho_{st} \leq 2, \\ 1 - x & \text{se } \rho_{st} = 3, \\ 1 - 2x & \text{se } \rho_{st} = 4. \end{cases}$$

Introduciamo ora una funzione che risulta di particolare interesse, la funzione  $Z$ , costruita a partire dai concetti di funzione KLS destra e sinistra.

**Definizione 3.16.** Sia  $k$  un nucleo e siano  $f, g$  rispettivamente le funzioni KLS destra e sinistra associate a  $k$ . La **funzione  $Z$**  associata a  $k$  è definita come

$$Z = gkf.$$

**Proposizione 3.17.** Si ha  $Z = g^{rev}f = gf^{rev}$ . In particolare  $Z$  è simmetrica.

*Dimostrazione.*  $g^{rev} = gk$ , quindi si ha  $Z = gkf = g^{rev}f$ . Analogamente, poiché  $f^{rev} = kf$  risulta  $Z = gkf = gf^{rev}$ .  $\square$

Vale anche l'implicazione inversa, la quale fornisce un criterio utile per verificare che due funzioni  $f$  e  $g$  siano rispettivamente KLS destra e sinistra.

**Proposizione 3.18.** Siano  $f, g \in I_{1/2}(P)$ . Allora  $f$  e  $g$  sono le funzioni KLS destra e sinistra associate a un nucleo  $k$  se e solo se  $g^{rev}f$  è simmetrica.

*Dimostrazione.* Siano  $k_f := f^{rev}f^{-1}$  e  $k_g := g^{-1}g^{rev}$ . Quindi si ha  $g^{rev}f = gk_gf$  e  $gf^{rev} = gk_f f$ , dunque otteniamo:

$$g^{rev}f = (g^{rev}f)^{rev} = gf^{rev} \iff gk_gf = gk_ff \iff k_g = k_f.$$

$\square$

**Esempio 3.19.** Consideriamo il poset  $P$  dell'Esempio 3.13 e come nucleo la funzione caratteristica  $\chi$ . Allora la funzione  $Z$  è data da

$$Z_{st}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho_{st} = 0, \\ 1 + x & \text{se } \rho_{st} = 1, \\ 1 + 2x + x^2 & \text{se } [s, t] = [\hat{0}, w], \\ 1 + x + x^2 & \text{se } s \in \{u, v\}, t = \hat{1}, \\ 1 + x + x^2 + x^3 & \text{se } \rho_{st} = 3. \end{cases}$$

Osserviamo che, come dimostrato nella Proposizione 3.17 la funzione  $Z$  è simmetrica.

**Esempio 3.20.** Riprendiamo ora l'Esempio 3.14. La funzione  $Z$  associata al nucleo  $k$  è data da

$$Z_{st}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho_{st} = 0, \\ 1 + x & \text{se } \rho_{st} = 1, \\ 1 + 2x + x^2 & \text{se } \rho_{st} = 2, \\ 1 + (m+6)x + (m+6)x^2 + x^3 & \text{se } \rho_{st} = 3. \end{cases}$$

Concludiamo il capitolo con un risultato sull'insieme dei  $P$ -nuclei, per il quale saranno utili le seguenti definizioni:

- $\tilde{I}(P) = \{h \in I_\rho(P) : h_{ss} = 1 \ \forall s \in P\}$ . Questo è un gruppo moltiplicativo perché se  $h, l \in \tilde{I}(P)$ , allora  $(hl)_{ss} = h_{ss}l_{ss} = 1$ .
- $\tilde{S}(P) = \{h \in \tilde{I}(P) : h = h^{rev}\}$  sottogruppo di  $\tilde{I}(P)$ . Costituisce un sottogruppo per il Lemma 3.2.
- $\mathcal{K}(P)$  è l'insieme di tutti i  $P$ -nuclei.

Inoltre, consideriamo  $I_{1/2}(P)$  come un gruppo moltiplicativo, proprietà dimostrata nell'Osservazione 3.9.



**Proposizione 3.21.** *Sia  $\tilde{I}(P)/\tilde{S}(P)$  l'insieme delle classi laterali destre  $\tilde{S}(P) \cdot h$ , con  $h \in \tilde{I}(P)$ . Allora le mappe*

$$\varphi_1 : \tilde{I}(P)/\tilde{S}(P) \rightarrow \mathcal{K}(P), \quad \varphi_2 : I_{1/2}(P) \rightarrow \mathcal{K}(P)$$

$$\varphi_1(\tilde{S}(P) \cdot h) = h^{-1}h^{rev}, \quad \varphi_2(h) = h^{-1}h^{rev}$$

*sono delle biezioni. Infatti  $I_{1/2}(P)$  costituisce un insieme di rappresentanti delle classi laterali destre di  $\tilde{S}(P)$  in  $\tilde{I}(P)$  e  $\varphi_2^{-1}(k) = g$  dove  $g$  è la funzione KLS sinistra associata a  $k$ .*

*Dimostrazione.*  $\varphi_1$  è ben definita perché se  $\tilde{S}(P) \cdot h = \tilde{S}(P) \cdot l$  allora  $h = pl$  per qualche  $l = l^{rev}$  quindi  $h^{-1}h^{rev} = (pl)^{-1}(pl)^{rev} = l^{-1}p^{-1}pl^{rev} = l^{-1}l^{rev}$ . Inoltre ogni nucleo può essere scritto come  $h^{-1}h^{rev}$  quindi  $\varphi_1$  è suriettiva. Si vede facilmente che  $\varphi_1$  è iniettiva, per l'unicità delle funzioni  $k$ -accettabili, Teorema 3.10. La biettività di  $\varphi_2$  segue dall'unicità della funzione KLS sinistra dimostrata nel Teorema 3.10.  $\square$

## Capitolo 4

# Funzioni di Chow

In questo capitolo studieremo una nuova classe di funzioni, le funzioni di Chow, la loro relazione con le funzioni di Kazhdan–Lusztig–Stanley, e ne vedremo alcuni esempi.

Per prima cosa introduciamo il concetto di nuclei ridotti, che servirà per la definizione delle funzioni di Chow. Per farlo abbiamo bisogno del seguente lemma.

**Lemma 4.1.** *Sia  $k$  un  $P$ -nucleo. Allora per ogni  $s < t$  in  $P$*

$$k_{st}(1) = 0.$$

*Dimostrazione.* Si procede per induzione su  $\rho_{st}$ . Il passo base è dato dal caso in cui  $t$  copre  $s$  ( $\rho_{st} = 1$ ). Per definizione di nucleo, vale  $kk^{rev} = \delta$ , che diventa:

$$0 = k_{ss}(x)k_{st}^{rev}(x) + k_{st}(x)k_{tt}^{rev}(x) = k_{st}^{rev}(x) + k_{st}(x).$$

Dunque  $k_{st}(x) = -k_{st}^{rev}(x) = -x^{\rho_{st}}k_{st}(x^{-1})$ , che, calcolato in  $x = 1$  dà  $k_{st}(1) = -k_{st}(1)$  e quindi  $k_{st}(1) = 0$ . Per il passo induttivo, osserviamo che

$$0 = \sum_{s \leq w \leq t} k_{sw}^{rev}(x)k_{wt}(x) \iff k_{st}^{rev}(x) + k_{st}(x) = - \sum_{s < w < t} k_{sw}(x)k_{wt}^{rev}(x).$$

I polinomi  $k_{sw}(x)$  e  $k_{wt}^{rev}(x)$  per  $s < w < t$  sono associati a intervalli più piccoli di  $[s, t]$ , dunque per ipotesi induttiva

$$0 = - \sum_{s < w < t} k_{sw}(1)k_{wt}^{rev}(1) = k_{st}^{rev}(1) + k_{st}(1),$$

da cui deriva la tesi.  $\square$

Alla luce del lemma appena dimostrato, la seguente definizione è ben posta.

**Definizione 4.2.** Sia  $k$  un  $P$ -nucleo. Il  **$P$ -nucleo ridotto** associato a  $k$  è l'elemento  $\bar{k} \in I_\rho(P)$  dato da:

$$\bar{k}_{st}(x) = \begin{cases} \frac{k_{st}(x)}{x-1} & \text{se } s < t, \\ -1 & \text{se } s = t. \end{cases}$$

Osserviamo che per il Lemma 1.18 i nuclei ridotti sono invertibili.

Siamo ora in grado di definire l'oggetto centrale di questo capitolo, la funzione di Chow.

**Definizione 4.3.** Sia  $k$  un  $P$ -nucleo. La **funzione di Chow** associata a  $k$  è l'elemento  $H \in I_\rho(P)$  definito da

$$H_{st} = -(\bar{k})^{-1}.$$

È conveniente introdurre anche una definizione ricorsiva, che risulta utile per il calcolo esplicito della funzione. Le seguenti formulazioni sono equivalenti e derivano direttamente dalla definizione.

$$H_{st}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } s = t, \\ \sum_{s < w \leq t} \bar{k}_{sw}(x)H_{wt}(x) & \text{se } s < t. \end{cases} \quad (4.1)$$

$$H_{st}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } s = t, \\ \sum_{s \leq w < t} H_{sw}(x)\bar{k}_{wt}(x) & \text{se } s < t. \end{cases} \quad (4.2)$$

Osserviamo che  $H_{ss} = 1 \ \forall s \in P$  per come abbiamo definito  $k_{ss}$ .

Ora sarà enunciata una proposizione che fornisce informazioni sui coefficienti della funzione di Chow come polinomio. In particolare risulta importante la simmetria, con centro di simmetria  $(\rho_{st} - 1)/2$ .

**Proposizione 4.4.** *Siano  $k, H \in I_\rho(P)$  un  $P$ -nucleo e la sua funzione di Chow associata. Valgono le seguenti proprietà.*

1. *Per ogni  $s < t$ , vale*

$$[x^{\rho_{st}-1}]H_{st}(x) = [x^{\rho_{st}}]k_{st}.$$

*In particolare, se  $\deg(k_{st}) = \rho_{st}$  allora  $\deg(H_{st}) = \rho_{st} - 1 \ \forall s < t$ .*

2.  *$H$  è simmetrica, cioè*

$$H_{st}(x) = x^{\rho_{st}-1}H_{st}(x^{-1}).$$

*Dimostrazione.* Dalla definizione ricorsiva di  $H$ , equazione (4.1), si ottiene

$$H_{st}(x) = \bar{k}_{st}(x) + \sum_{s < w < t} \bar{k}_{sw}(x)H_{wt}(x). \quad (4.3)$$

Dimostriamo entrambi i punti per induzione su  $\rho_{st}$ . Per il passo base consideriamo  $s$  coperto da  $t$ , allora (4.3) diventa  $H_{st}(x) = \bar{k}_{st}(x)$  e in particolare

$$[x^{\rho_{st}-1}]H_{st}(x) = [x^{\rho_{st}-1}]\bar{k}_{st}(x) = [x^{\rho_{st}}]k_{st}(x).$$

Per dimostrare la simmetria consideriamo  $x \neq 1$ , perché l'equazione  $H_{st}(x) = x^{\rho_{st}-1}H_{st}(x^{-1})$  è banalmente sempre verificata in  $x = 1$ . Procedendo come nella dimostrazione del Lemma 4.1, da  $kk^{rev} = \delta$  deriva

$$0 = k_{st}^{rev}(x) + k_{st}(x) = x^{\rho_{st}}k_{st}(x^{-1}) + k_{st}(x) = x^{\rho_{st}}(x^{-1}-1)\bar{k}_{st}(x^{-1}) + (x-1)\bar{k}_{st}(x)$$

e usando  $H_{st}(x) = \bar{k}_{st}(x)$  otteniamo

$$x^{\rho_{st}-1}(1-x)H_{st}(x^{-1}) + (x-1)H_{st}(x) = 0,$$

che, poiché  $x \neq 1$ , semplificando  $x - 1$  dà la tesi. Ora, se  $s$  e  $t$  non sono adiacenti, nella sommatoria nell'equazione (4.3), per ipotesi induttiva, ogni termine ha grado minore o uguale a  $\rho_{sw} - 1 + \rho_{wt} - 1 = \rho_{st} - 2$ . Quindi la sommatoria non porta contributi ai termini di grado  $\rho_{st} - 1$  e dunque, analogamente al passo base, si ha

$$[x^{\rho_{st}-1}]H_{st}(x) = [x^{\rho_{st}-1}]\bar{k}_{st}(x) = [x^{\rho_{st}}]k_{st}(x).$$

Ora, per dimostrare la seconda proprietà, moltiplichiamo la formula dell'equazione (4.3) per  $x - 1$  e sottraiamo il polinomio  $k_{st}(x)$  da entrambi i lati:

$$(x - 1)H_{st}(x) - k_{st}(x) = \tag{4.4}$$

$$= \sum_{s < w < t} k_{sw}(x)H_{wt}(x) \tag{4.5}$$

$$= \sum_{s < w < t} k_{sw}(x)x^{\rho_{wt}-1}H_{wt}(x^{-1}) \tag{4.6}$$

$$= \sum_{s < w < t} \left( - \sum_{s \leq u < w} k_{su}(x)x^{\rho_{uw}}k_{uw}(x^{-1}) \right) x^{\rho_{wt}-1}H_{wt}(x^{-1}) \tag{4.7}$$

$$= - \sum_{s \leq u < t} k_{su}(x)x^{\rho_{ut}-1} \left( \sum_{u < w < t} k_{uw}(x^{-1})H_{wt}(x^{-1}) \right) \tag{4.8}$$

$$= - \sum_{s \leq u < t} k_{su}(x)x^{\rho_{ut}-1} \left( (x^{-1} - 1)H_{ut}(x^{-1}) - k_{ut}(x^{-1}) \right) \tag{4.9}$$

$$= x^{-1} \sum_{s \leq u < t} k_{su}(x)x^{\rho_{ut}}k_{ut}(x^{-1}) - \frac{1-x}{x} \sum_{s \leq u < t} k_{su}(x)x^{\rho_{ut}-1}H_{ut}(x^{-1}) = -\frac{1}{x}k_{st}(x) + \frac{x-1}{x} \sum_{s \leq u < t} k_{su}(x)x^{\rho_{ut}-1}H_{ut}(x^{-1}), \tag{4.10}$$

dove in (4.6) abbiamo usato l'ipotesi induttiva poiché  $[w, t]$  è un intervallo strettamente più piccolo di  $[s, t]$ , in (4.7) abbiamo usato che  $k$  è un  $P$ -nucleo, in (4.8) abbiamo usato di nuovo l'equazione (4.5) ma cambiando la variabile  $x$  con  $x^{-1}$  e  $w$  con  $u$ , mentre in (4.10) abbiamo usato di nuovo che  $k$  è un

$P$ -nucleo. Ora, semplificando l'espressione a sinistra dell'uguale in (4.5) con (4.10) si ottiene:

$$\begin{aligned} xH_{st}(x) &= k_{st}(x) + \sum_{s \leq u < t} k_{su}(x)x^{\rho_{ut}-1}H_{ut}(x^{-1}) \\ &= k_{st}(x) + x^{\rho_{st}-1}H_{st}(x^{-1}) + \sum_{s < u < t} k_{su}(x)H_{ut}(x). \end{aligned}$$

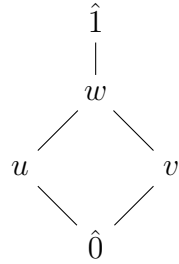
Dove abbiamo sostituito  $x^{\rho_{ut}-1}H_{ut}(x^{-1}) = H_{ut}(x)$  usando l'ipotesi induttiva su  $[u, t]$ , con  $s < u$ . Dunque (4.5) diventa, dopo aver aggiunto  $H_{st}(x)$  da entrambi i lati

$$x^{\rho_{st}-1}H_{st}(x^{-1}) = H_{st}(x).$$

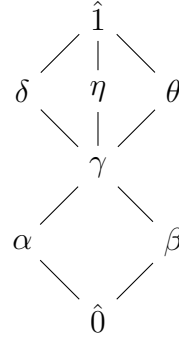
□

**Esempio 4.5.** Riprendiamo l'Esempio 3.13, dove abbiamo calcolato le funzioni KLS destra associata alla funzione caratteristica per i poset  $P$  e  $Q$ .

$P =$



$Q =$



La funzione caratteristica di  $P$  è stata trovata nell'Esempio 1.21. Possiamo allora calcolare la funzione di Chow associata alla funzione caratteristica in  $P$ .

$$H_{st}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho_{st} = 0, 1, \\ x + 1 & \text{se } \rho_{st} = 2, \\ x^2 + 2x + 1 & \text{se } \rho_{st} = 3. \end{cases}$$

Per quanto riguarda  $Q$ , invece, scrivere la funzione caratteristica risulta molto complicato, ma possiamo calcolare la funzione di Chow.

$$H_{st} = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho_{st} = 0, 1, \\ x + 1 & \text{se } \rho_{st} = 2, \\ x^2 + 2x + 1 & \text{se } s = \hat{0}, t \in \{\delta, \eta, \theta\}, \\ x^2 + 4x + 1 & \text{se } s \in \{\alpha, \beta\}, t = \hat{1}, \\ x^3 + 5x^2 + 5x + 1 & \text{se } \rho_{st} = 4. \end{cases}$$

**Esempio 4.6.** Torniamo ora all'Esempio 3.14. La funzione di Chow associata al nucleo  $k$  è

$$H_{st} = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho_{st} = 0, 1, \\ x + 1 & \text{se } \rho_{st} = 2, \\ x^2 + (m + 7)x + 1 & \text{se } \rho_{st} = 3. \end{cases}$$

**Esempio 4.7.** Infine procediamo con l'Esempio 3.15. Possiamo calcolare il nucleo ridotto:

$$\bar{\varepsilon}_{st}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } s = t, \\ (x - 1)^{\rho_{st}-1} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La funzione di Chow ha una forma esplicita molto semplice:

$$H_{st}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } s = t, \\ (x + 1)^{\rho_{st}-1} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il seguente teorema mostra come nel Teorema 3.10 sia fondamentale la condizione sul rango. Infatti la funzione di Chow soddisfa  $k = H^{-1}H^{rev} = H^{rev}H^{-1}$ , ossia è  $k$ -totalmente accettabile, ma ha grado  $\rho_{st} - 1$ .

**Teorema 4.8.** *Sia  $k$  un  $P$ -nucleo. La funzione di Chow  $H$  è l'unico elemento in  $I_\rho(P)$  tale che*

$$1. H_{ss}(x) = 1 \quad \forall s \in P.$$

2. Per ogni  $s < t$  in  $P$  il polinomio  $H_{st}(x)$  è simmetrico, con centro di simmetria  $\frac{1}{2}(\rho_{st} - 1)$ .
3.  $kH = H^{rev}$ .
4.  $Hk = H^{rev}$ .

*Dimostrazione.* Abbiamo dimostrato nella Proposizione 4.4 che se  $H$  è la funzione di Chow associata a un nucleo  $k$ , i primi due punti sono validi; quindi dimostriamo gli ultimi due e l'unicità. Consideriamo la definizione ricorsiva (4.1) della funzione di Chow. Allora moltiplicando entrambi i lati per  $x - 1$  otteniamo

$$(x - 1)H_{st}(x) = \sum_{s < w \leq t} k_{sw}(x)H_{wt}(x)$$

e aggiungendo  $H_{st}(x)$  ad entrambi i lati diventa

$$xH_{st}(x) = \sum_{s \leq w \leq t} k_{sw}(x)H_{wt}(x) = (kH)_{st}(x).$$

Ora applichiamo la simmetria di  $H$  dimostrata nel punto 2 della Proposizione 4.4

$$H_{st}^{rev}(x) = x^{\rho_{st}} H_{st}(x^{-1}) = x \cdot x^{\rho_{st}-1} H_{st}(x^{-1}) = xH_{st}(x) = (kH)_{st}(x).$$

Quindi abbiamo ottenuto il terzo punto,  $H^{rev} = kH$ . Allo stesso modo a partire dall'equazione (4.2) otteniamo  $H^{rev} = Hk$ .

Ora consideriamo un qualunque elemento  $h \in I_\rho(P)$  che soddisfi i tre punti dell'enunciato. Per ogni  $s < t$

$$xh_{st}(x) = h_{st}^{rev}(x) = \sum_{s \leq w \leq t} k_{sw}(x)h_{wt}(x).$$

Spostiamo a destra dell'uguale il termine con  $w = s$  e dividiamo per  $x - 1$  e rimane

$$h_{st}(x) = \sum_{s < w \leq t} \bar{k}_{sw}(x)h_{wt}(x),$$

che equivale a  $\bar{k}h = \delta$ , dunque per definizione di funzione di Chow e unicità dell'inverso si ha  $h = H$ .  $\square$



**Proposizione 4.9.** *Sia  $H \in I_\rho(P)$ , tale che  $H_{ss}(x) = 1 \forall x \in P$  e tale che per ogni  $s < t$  in  $P$  il polinomio  $H_{st}(x)$  sia simmetrico e con centro di simmetria  $\frac{1}{2}(\rho_{st} - 1)$ . Allora esiste un unico  $P$ -nucleo  $k$  tale che  $H$  sia la sua funzione di Chow associata.*

*Dimostrazione.* Definiamo il  $P$ -nucleo come

$$k = H^{rev} H^{-1}.$$

Questo è un nucleo per il Lemma 3.4 e vale  $kH = H^{rev}$  quindi sono verificati tutti i punti del Teorema 4.8 perciò  $H$  è la funzione di Chow associata a  $k$ . Supponiamo che esista  $\tilde{k}$  la cui funzione di Chow associata sia sempre  $H$ . Dimostriamo che  $\tilde{k} = k$  per induzione sulla dimensione degli intervalli su cui valutiamo la funzione. Se  $s \in P$  vale  $k_{ss}(x) = 1 = \tilde{k}_{ss}(x)$ . Ora, se  $s < t$  abbiamo

$$\sum_{s \leq w \leq t} \tilde{k}_{sw}(x) H_{wt}(x) = H_{st}^{rev}(x) = \sum_{s \leq w \leq t} k_{sw}(x) H_{wt}(x)$$

e quindi

$$\tilde{k}_{st}(x) + \sum_{s < w \leq t} \tilde{k}_{sw}(x) H_{wt}(x) = k_{st}(x) + \sum_{s < w \leq t} k_{sw}(x) H_{wt}(x).$$

Per l'ipotesi induttiva per ogni  $s < w \leq t$  si ha  $\tilde{k}_{sw} = k_{sw}$ , quindi le sommatorie a destra e sinistra dell'uguale sono uguali, perciò rimane  $\tilde{k}_{st} = k_{st}$ .  $\square$

## 4.1 Relazione tra funzioni di Chow e funzioni KLS

In questa sezione verranno enunciati e dimostrati alcuni risultati piuttosto tecnici. Per semplicità verrà indicato sempre con  $k$  un  $P$ -nucleo, con  $H$  la funzione di Chow associata a  $k$ , e con  $f, g$  le funzioni KLS rispettivamente destra e sinistra associate a  $k$ .

**Lemma 4.10.** *Per ogni  $s \leq t$  in  $P$ , il prodotto in  $I_\rho(P)$  tra le funzioni KLS associate a un nucleo e il nucleo stesso ridotto è dato da:*

$$(\bar{k}f)_{st}(x) = \begin{cases} \frac{f_{st}^{rev}(x) - xf_{st}(x)}{x-1} & \text{se } s < t, \\ -1 & \text{se } s = t. \end{cases} \quad (4.11)$$

$$(g\bar{k})_{st}(x) = \begin{cases} \frac{g_{st}^{rev}(x) - xg_{st}(x)}{x-1} & \text{se } s < t, \\ -1 & \text{se } s = t. \end{cases} \quad (4.12)$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo la tesi solo per  $g$ , in quanto la dimostrazione per  $f$  è analoga. Se  $s = t$ ,  $(g\bar{k})_{ss} = g_{ss}\bar{k}_{ss} = -1$ . Sia  $s < t$ . Per il Teorema 3.10 abbiamo che per ogni  $s < t$

$$g_{st}^{rev}(x) = \sum_{s \leq w < t} g_{sw}(x)k_{wt}.$$

Sottraendo da entrambi i lati il termine corrispondente a  $w = t$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} g_{st}^{rev}(x) - g_{st}(x) &= \sum_{s \leq w < t} g_{sw}(x)k_{wt}(x) \\ &= (x-1) \sum_{s \leq w < t} g_{sw}(x)\bar{k}_{wt}(x) \\ &= (x-1)[(\hat{gk})_{st}(x) + g_{st}(x)], \end{aligned}$$

da cui deriva la tesi. □

Segue un teorema che fornisce una formula per calcolare la funzione di Chow a partire da quelle di KLS.

**Teorema 4.11.** *Valgono le seguenti:*

$$H_{st}(x) = \frac{f_{st}^{rev}(x) - f_{st}(x)}{x-1} + \sum_{s < w < t} H_{sw}(x) \frac{f_{wt}(x) - xf_{wt}(x)}{x-1}, \quad (4.13)$$

$$H_{st}(x) = \frac{g_{st}^{rev}(x) - g_{st}(x)}{x-1} + \sum_{s < w < t} \frac{g_{sw}^{rev}(x) - xg_{sw}(x)}{x-1} H_{wt}(x). \quad (4.14)$$

*Dimostrazione.* Mostriamo di nuovo solo il risultato per  $g$  poichè la dimostrazione è analoga per  $f$ . Innanzitutto possiamo scrivere  $g$  come  $g = g\delta = g(-\bar{k})H = -(g\bar{k})H$ . Possiamo usare dunque il Lemma 4.10 e ottenere

$$g_{st}(x) = -\left(-H_{st}(x) + \sum_{s < w \leq t} \frac{g_{sw}^{rev}(x) - xg_{sw}(x)}{x-1} H_{wt}(x)\right).$$

Riarrangiando i termini si ha la tesi:

$$\begin{aligned} H_{st}(x) &= g_{st}(x) + \sum_{s < w \leq t} \frac{g_{sw}^{rev}(x) - xg_{sw}(x)}{x-1} H_{wt}(x) \\ &= \frac{g_{st}^{rev}(x) - g_{st}(x)}{x-1} + \sum_{s < w < t} \frac{g_{sw}^{rev}(x) - xg_{sw}(x)}{x-1} H_{wt}(x). \end{aligned} \quad (4.15)$$

□

## 4.2 Unimodalità e non negatività delle funzioni di Chow

Poiché le funzioni KLS e le funzioni di Chow sono dei polinomi, è naturale chiedersi quali proprietà esse possano avere come tali. Abbiamo dimostrato la simmetria delle funzioni di Chow; nel seguito valuteremo altre proprietà caratteristiche, ci concentreremo in particolare sull'unimodalità e la non negatività.

Innanzitutto osserviamo che le funzioni KLS non godono della proprietà di non negatività, infatti nell'Esempio 3.13 la funzione KLS destra  $f$  associata alla funzione caratteristica  $\chi$  presenta coefficienti negativi per entrambi i poset considerati. Anche nell'Esempio 3.14 per  $m < 3$  sia  $f$  che  $g$  presentano coefficienti negativi.

Per quanto riguarda le funzioni di Chow, nell'Esempio 4.6 per  $m < 7$  si ottengono dei coefficienti negativi. Inoltre se consideriamo ad esempio  $m = 7$ , notiamo anche che il polinomio non è unimodale.

Nel seguente teorema, che costituisce un risultato centrale di questo capitolo, mostreremo tuttavia che esiste una profonda connessione tra la non

negatività delle funzioni KLS e la non negatività e unimodalità della funzione di Chow.

**Teorema 4.12.** *Sia  $k$  un  $P$ -nucleo. Se almeno una tra la funzione KLS destra  $f$  e la sinistra  $g$  è non negativa, allora la funzione di Chow  $H$  è non negativa e unimodale.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $g$  sia non negativa, la dimostrazione è simile per  $f$ . Procediamo per induzione su  $\rho_{st}$ . Per il passo base  $\rho_{st} = 0$  implica  $s = t$ , si ha  $H_{ss}(x) = 1 \forall s \in P$  che è banalmente unimodale e non negativo. Sia  $\rho_{st} > 0$ , per il passo induttivo assumiamo che  $H_{st}(x)$  sia unimodale e non negativo per ogni  $s \leq t$  tali che  $\rho_{st} \leq l$  e consideriamo tutti gli intervalli  $[s, t]$  tali che  $\rho_{st} = l + 1$ . Sappiamo che  $\deg g < \frac{\rho_{st}}{2}$  e quindi  $\deg g_{st} \leq \lfloor \frac{\rho_{st}-1}{2} \rfloor =: d$ , dunque possiamo scrivere  $g$  in forma polinomiale per comodità nei calcoli:

$$g_{st}(x) = \sum_{i=0}^d g_i x^i,$$

dove  $g_i \geq 0 \forall i$ . Consideriamo l'equazione (4.14), dimostriamo che tutti i termini della somma sono non negativi, unimodali e hanno centro di simmetria  $\frac{1}{2}(\rho_{st} - 1)$ . Si ha

$$g_{st}^{rev}(x) - g_{st}(x) = g_0 x^{\rho_{st}} + g_1 x^{\rho_{st}-1} + \cdots + g_d x^{\rho_{st}-d} - g_d x^d - \cdots - g_1 x - g_0.$$

Poiché  $2d > \rho_{st}$ , vale  $\rho_{st} - d > d$  e quindi tutti i monomi hanno esponente diverso. Quindi possiamo raccogliere i termini:

$$\begin{aligned} g_{st}^{rev}(x) - g_{st}(x) &= \sum_{i=0}^d g_i (x^{\rho_{st}-i} - x^i) \\ &= (x-1) \sum_{i=0}^d g_i x^i (1 + x + \cdots + x^{\rho_{st}-2i-1}), \end{aligned}$$

da cui deriva

$$\frac{g_{st}^{rev}(x) - g_{st}(x)}{x-1} = \sum_{i=0}^d g_i x^i (1 + x + \cdots + x^{\rho_{st}-2i-1}),$$

che, poiché  $g_i \geq 0$  per ogni  $i$ , è non negativo, unimodale e simmetrico con centro di simmetria  $\rho_{st}/2$  per il Lemma 1.2. Sia ora  $w \in P$ ,  $s < w < t$ , scriviamo  $g_{sw}(x) = g_0 + g_1x + \dots + g_dx^d$ , dove  $d = \lfloor \frac{\rho_{sw}-1}{2} \rfloor$ . Si ha

$$g_{sw}^{rev}(x) - xg_{sw}(x) = g_0x^{\rho_{sw}} + g_1x^{\rho_{sw}-1} + \dots + g_dx^{\rho_{sw}-d} - g_dx^{d+1} - \dots - g_1x^2 - g_0x.$$

Se  $\rho_{sw}$  è dispari c'è una cancellazione del termine di grado  $\rho_{sw} - d = d + 1$ , ma in ogni caso vale

$$\begin{aligned} g_{sw}^{rev}(x) - xg_{sw}(x) &= x \sum_{i=0}^d g_i (x^{\rho_{sw}-i-1} - x^i) \\ &= x(x-1) \sum_{i=0}^d g_i x^i (1 + x + \dots + x^{\rho_{sw}-2i}). \end{aligned}$$

Possiamo dedurre in modo analogo al caso precedente che  $\frac{g_{sw}^{rev}(x) - xg_{sw}(x)}{x-1}$  è non negativo, unimodale e simmetrico con centro di simmetria  $\rho_{sw}/2$ .

Per ipotesi induttiva  $H_{wt}(x)$  è non negativo e unimodale per  $s < w < t$ . Inoltre per la Proposizione 4.4 il centro di simmetria è  $\frac{\rho_{wt}-1}{2}$ . Quindi per il Lemma 1.3 il prodotto

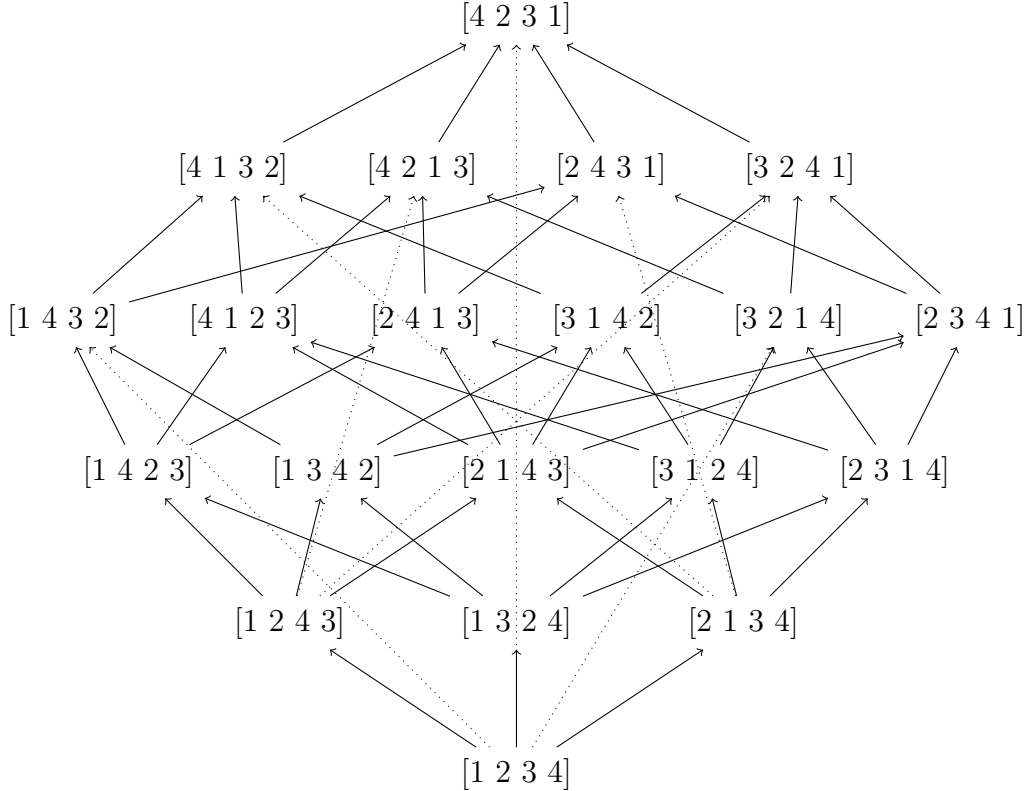
$$\frac{g_{sw}^{rev}(x) - xg_{sw}(x)}{x-1} H_{wt}(x)$$

è non negativo, unimodale e simmetrico, con centro di simmetria  $\frac{\rho_{sw}}{2} + \frac{\rho_{wt}-1}{2} = \frac{\rho_{st}-1}{2}$ . Quindi  $H_{st}(x)$  è somma di polinomi non negativi e unimodali, perciò soddisfa le stesse proprietà.  $\square$

Questo teorema garantisce che la funzione di Chow associata agli R-polinomi sia unimodale e non negativa. Per vederne una formula esplicita, riprendiamo i grafi di Bruhat, Definizione 2.18. Siano  $W$  un gruppo di Coxeter, e  $u, v \in W$ , indichiamo con  $B(u, v)$  il grafo di Bruhat associato all'intervallo  $[u, v] \subset W$  e scriviamo  $\Delta \in B(u, v)$  se  $\Delta$  è un cammino da  $u$  a  $v$  nel grafo di Bruhat.

**Esempio 4.13.** Possiamo rappresentare l'intervallo  $B(u, v)$  con  $u = e$ ,  $v = [4 \ 2 \ 3 \ 1]$ , del grafo di Bruhat di  $S_4$ , di cui abbiamo costruito l'ordinamento

nell'Esempio 2.24. Le linee tratteggiate rappresentano i lati che vengono aggiunti nel grafo di Bruhat rispetto al diagramma di Hasse dell'ordinamento. Consideriamo  $\Delta \in B(u, v)$ , allora  $\Delta$  può avere lunghezza 5, 3 oppure 1.



Esistono ordinamenti totali sulle riflessioni, detti ordinamenti di riflessione, che soddisfano determinate proprietà di convessità, che non richiamiamo in questa tesi.

**Definizione 4.14.** Siano  $W$  un gruppo di Coxeter,  $u, v \in W$ ,  $T$  l'insieme delle riflessioni e  $<$  un ordinamento di riflessione. Sia  $\Delta \in B(u, v)$  un cammino da  $u$  a  $v$ :

$$u = u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow \cdots \rightarrow u_k = v,$$

dove  $u_{i-1}^{-1}u_i = t_i$ ,  $t_i \in T$  per  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Diciamo che  $i$  è un'**ascesa** di  $\Delta$  se  $t_{i-1} < t_i$ . Analogamente diciamo che  $i$  è una **discesa** di  $\Delta$  se  $t_{i-1} > t_i$ .

Indichiamo con  $\text{asc}(\Delta)$  il numero di ascese di  $\Delta$  e con  $\text{des}(\Delta)$  il numero di discese.

Osserviamo che vale  $\text{asc}(\Delta) = l(\Delta) - \text{des}(\Delta) - 1$ .

Sia  $W$  un gruppo di Coxeter e  $u, v \in W$ ,  $u \leq v$ , allora la funzione di Chow associata all' $R$ -polinomio è data da:

$$H_{uv}(x) = \sum_{\Delta \in B(u,v)} x^{\frac{\rho_{uv}-l(\Delta)}{2} + \text{asc}(\Delta)} = \sum_{\Delta \in B(u,v)} x^{\frac{\rho_{uv}-l(\Delta)}{2} + \text{des}(\Delta)}.$$

La dimostrazione di questa formula si trova su [FMV24].

### 4.3 Funzioni di Chow aumentate

Introduciamo ora un nuovo concetto, le funzioni di Chow aumentate, costruite a partire dalla funzione di Chow e di Kazhdan–Lusztig–Stanley associate ad un nucleo. Ne vedremo le proprietà fondamentali, tra cui un risultato sulla loro unimodalità e non negatività, e alcuni esempi. In questa sezione tornerà utile la funzione  $Z$  introdotta nella Definizione 3.16.

**Definizione 4.15.** Sia  $k$  un  $P$ -nucleo,  $H$  la funzione di Chow,  $f, g$  le funzioni di Kazhdan–Lusztig–Stanley associate a  $k$ . Chiamiamo rispettivamente **funzione di Chow aumentata destra** e **funzione di Chow aumentata sinistra** associate a  $k$  le seguenti funzioni:

$$F = H f^{\text{rev}}, \quad G = g^{\text{rev}} H.$$

Osserviamo che, poiché  $f, g, H \in I_\rho(P)$ , si ha anche  $F, G \in I_\rho(P)$ .

Esistono dei risultati per le funzioni di Chow aumentate, analoghi alla Proposizione 4.4 e al Teorema 4.11.

**Proposizione 4.16.** *Siano  $F, G \in I_\rho(P)$  le funzioni di Chow aumentate associate a un nucleo  $k$ . Valgono le seguenti proprietà:*

1. Per ogni  $s \leq t$ , si ha

$$[x^{\rho_{st}}]F_{st}(x) = [x^{\rho_{st}}]G_{st}(x) = [x^{\rho_{st}}]k_{st}(x).$$

*In particolare se  $\deg k_{st} = \rho_{st}$ , anche  $\deg F_{st} = \deg G_{st} = \rho_{st}$ .*

2. Le funzioni di Chow aumentate sono simmetriche:

$$F^{rev} = F, \quad G^{rev} = G.$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo entrambi i punti per  $G$ , per  $F$  la dimostrazione è analoga. Dalla definizione di  $G$  si ha che per ogni  $s \leq t$ :

$$G_{st}(x) = \sum_{s \leq w \leq t} g_{sw}^{rev}(x) H_{wt}(x) = g_{st}^{rev}(x) + \sum_{s \leq w < t} g_{sw}^{rev}(x) H_{wt}(x).$$

Nella sommatoria ogni termine ha grado al massimo  $\rho_{sw} + \rho_{wt} - 1 = \rho_{st} - 1$ , quindi non influisce sul termine di grado  $\rho_{st}$ , pertanto, per il Lemma 3.12 vale

$$[x^{\rho_{st}}]F_{st}(x) = [x^{\rho_{st}}]G_{st}(x) = [x^{\rho_{st}}]k_{st}(x).$$

Dimostriamo ora la simmetria:

$$G = g^{rev} H = (gk)H = g(kH) = gH^{rev} = (g^{rev} H)^{rev} = G,$$

dove abbiamo usato  $kH = H^{rev}$ , visto nel Teorema 4.8.  $\square$

**Teorema 4.17.** *Sia  $k$  un  $P$ -nucleo, consideriamo la funzione  $Z$  associata a  $k$ . Allora possiamo calcolare le funzioni aumentate di Chow destra e sinistra come segue:*

$$F_{st}(x) = Z_{st}(x) + \sum_{s < w \leq t} \frac{g_{sw}^{rev}(x) - x g_{sw}(x)}{x - 1} F_{wt}(x), \quad (4.16)$$

$$G_{st}(x) = Z_{st}(x) + \sum_{s \leq w < t} G_{sw}(x) \frac{f_{wt}^{rev}(x) - x f_{wt}(x)}{x - 1}. \quad (4.17)$$

*Dimostrazione.* Come di consueto dimostriamo la formula per  $G$ , per  $F$  la dimostrazione è analoga. Innanzitutto osserviamo che si può riscrivere la funzione  $Z$ :

$$Z = g^{rev} f = -g^{rev}(H\bar{k})f = -G(\bar{k}f).$$

Combinando questo risultato con l'uguaglianza (4.11) dimostrata nel Lemma 4.10 si ha:

$$Z_{st}(x) = - \left( G_{st}(x) + \sum_{s \leq w < t} G_{sw}(x) \frac{f_{wt}^{rev}(x) - x f_{wt}(x)}{x - 1} \right),$$

da cui otteniamo la tesi.  $\square$



Come per le funzioni KLS, c'è distinzione tra destra e sinistra, le quali possono avere comportamenti differenti. Vediamo degli esempi espliciti delle funzioni di Chow aumentate.

**Esempio 4.18.** Proseguiamo con l'Esempio 4.5, in cui il nucleo è la funzione caratteristica, e consideriamo il poset  $Q$ . Le funzioni di Chow aumentate destra e sinistra, se  $\rho_{st} \leq 2$  sono uguali,

$$F_{st}(x) = G_{st}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho_{st} = 0, \\ x + 1 & \text{se } \rho_{st} = 1, \\ x^2 + 3x + 1 & \text{se } [s, t] = [\hat{0}, \gamma], \\ x^2 + 2x + 1 & \text{se } s \in \{\alpha, \beta\}, t \in \{\delta, \eta, \theta\}, \\ x^2 + 4x + 1 & \text{se } [s, t] = [\gamma, \hat{1}]. \end{cases}$$

Per  $\rho_{st} \geq 3$ , invece, presentano delle differenze:

$$F_{st}(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 & \text{se } s = \hat{0}, t \in \{\delta, \eta, \theta\}, \\ x^3 + 7x^2 + 7x + 1 & \text{se } s \in \{\alpha, \beta\}, t = \hat{1}, \\ x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 & \text{se } \rho_{st} = 4. \end{cases}$$

$$G_{st}(x) = \begin{cases} x^3 + 4x^2 + 4x + 1 & \text{se } s = \hat{0}, t \in \{\delta, \eta, \theta\}, \\ x^3 + 5x^2 + 5x + 1 & \text{se } s \in \{\alpha, \beta\}, t = \hat{1}, \\ x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 7x + 1 & \text{se } \rho_{st} = 4. \end{cases}$$

Osserviamo che le funzioni trovate sono simmetriche.

**Esempio 4.19.** Tornando nuovamente all'Esempio 4.6, ancora una volta le funzioni destra e sinistra coincidono:

$$F_{st}(x) = G_{st}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho_{st} = 0, \\ x + 1 & \text{se } \rho_{st} = 1, \\ x^2 + 3x + 1 & \text{se } \rho_{st} = 2, \\ x^3 + (m + 10)x^2 + (m + 10)x + 1 & \text{se } \rho_{st} = 3. \end{cases}$$

**Esempio 4.20.** Calcoliamo ora le funzioni di Chow aumentate per l'insieme parzialmente ordinato ottenuto a partire dal gruppo di Coxeter associato al diagramma  $B_2$  e munito di ordinamento di Bruhat. Nell'Esempio 3.15 abbiamo visto le funzioni KLS associate a  $\varepsilon_{st}(x) = (x-1)^{\rho_{st}}$  in questo poset, mentre nell'Esempio 4.7 abbiamo esplicitato la funzione di Chow. Dunque possiamo calcolare le funzioni di Chow aumentate:

$$F_{st}(x) = G_{st}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho_{st} = 0, \\ x + 1 & \text{se } \rho_{st} = 1, \\ x^2 + 3x + 1 & \text{se } \rho_{st} = 2, \\ x^3 + 4x^2 + 4x + 1 & \text{se } \rho_{st} = 3, \\ x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 5x + 1 & \text{se } \rho_{st} = 4. \end{cases}$$

Infine abbiamo un risultato di non negatività e unimodalità anche per le funzioni di Chow aumentate, strettamente legato alle stesse proprietà per le funzioni KLS e per la funzione  $Z$ .

**Teorema 4.21.** *Sia  $k$  un  $P$ -nucleo e  $F$  e  $G$  rispettivamente le funzioni di Chow aumentate destra e sinistra. Valgono le seguenti:*

1. *Se  $f$  (rispettivamente  $g$ ) è non negativa, anche  $F$  (rispettivamente  $G$ ) lo è.*
2. *Se  $Z$  è non negativa e unimodale e  $g$  è non negativa (rispettivamente  $f$ ) allora  $F$  (rispettivamente  $G$ ) è unimodale.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo il teorema per  $F$ , in quanto la dimostrazione per  $G$  è identica. Per il Teorema 4.12 se  $f$  è non negativa, anche  $H$  lo è, quindi  $F = Hf^{rev}$  è non negativa perchè somma di monomi non negativi.

Mostriamo ora la seconda proprietà, supponiamo che  $g$  sia non negativa, nella dimostrazione del Teorema 4.12 abbiamo visto che

$$\frac{g_{sw}^{rev}(x) - xg_{sw}(x)}{x-1}$$

è non negativo, simmetrico e unimodale e ha centro di simmetria  $\frac{1}{2}\rho_{sw}$ . Anche  $F_{wt}(x)$  è simmetrica e ha centro di simmetria  $\frac{1}{2}\rho_{wt}$ . Procediamo per induzione su  $\rho_{st}$  per dimostrare l'unimodalità di  $F$ . Il caso di  $\rho_{st} = 0$  è banalmente vero. Sia ora  $\rho_{st} > 1$  e consideriamo (4.16), si ha che

$$\sum_{s < w \leq t} \frac{g_{sw}^{rev}(x) - xg_{sw}(x)}{x - 1} F_{wt}(x)$$

è somma di polinomi aventi lo stesso centro di simmetria,  $\frac{1}{2}\rho_{sw} + \frac{1}{2}\rho_{wt} = \frac{1}{2}\rho_{st}$ . Abbiamo dimostrato nella Proposizione 3.17 che  $Z$  è simmetrica con centro di simmetria  $\frac{1}{2}\rho_{st}$ . Quindi anche  $F_{st}(x)$  è unimodale per (4.16).  $\square$

# Bibliografia

- [BB05] Anders Björner and Francesco Brenti, *Combinatorics of coxeter groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 231, Springer, New York, 2005.
- [BCM06] Francesco Brenti, Fabrizio Caselli, and Mario Marietti, *Special matchings and Kazhdan–Lusztig polynomials*, Advances in Mathematics **202** (2006), no. 2, 555–601.
- [Bre99] Francesco Brenti, *Twisted incidence algebras and kazhdan–lusztig–stanley functions*, Adv. Math. **148** (1999), no. 1, 44–74.
- [Bre03] ———, *Kazhdan–lusztig polynomials: History, problems, and combinatorial invariance*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire **49** (2003), 613–627.
- [EW14] Ben Elias and Geordie Williamson, *The hodge theory of soergel bimodules*, Ann. of Math. **180** (2014), no. 3, 1089–1136.
- [FMV24] Luis Ferroni, Jacob P. Materne, and Lorenzo Vecchi, *Chow functions for partially ordered sets*, arXiv:2411.04070v2 (2024).
- [Inc03] Federico Incitti, *Bruhat order on the involutions of classical weyl groups*, Ph.D. thesis, Università di Roma “La Sapienza”, 2003.
- [KL79] David Kazhdan and George Lusztig, *Representations of coxeter groups and hecke algebras*, Invent. Math. **53** (1979), no. 2, 165–184.

- 
- [Pro18] Nicholas Proudfoot, *The algebraic geometry of kazhdan–lusztig–stanley polynomials*, EMS Surv. Math. Sci. **5** (2018), no. 1-2, 99–127.
- [Sta89] Richard P. Stanley, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry*, Graph Theory and its Applications: East and West (Jinan, 1986), Ann. New York Acad. Sci., vol. 576, New York Acad. Sci., New York, 1989, pp. 500–535.
- [Sta92] ———, *Subdivisions and local  $h$ -vectors*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), no. 4, 805–851.
- [Sta94] ———, *A survey of eulerian posets*, Polytopes: Abstract, Convex and Computational, Springer Dordrecht, 1994, pp. 301–333.
- [Sub23] R. Subbarayan, *On pleasant eulerian posets*, Discussiones Mathematicae: General Algebra and Applications **43** (2023), no. 1, 161.
- [Ver71] Daya–Nand Verma, *Möbius inversion for the bruhat ordering on a weyl group*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 143–146.
- [Zie95] Günter M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 152, Springer New York, NY, 1995.