

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

IL PROBLEMA DI LÜROTH:  
L'ESEMPIO DI  
ARTIN E MUMFORD

Tesi di Laurea in Geometria Algebrica

Relatore:  
ANDREA PETRACCI

Presentata da:  
SIMONE DE ANGELIS

Anno Accademico 2024-2025



# Indice

|                                                  |           |
|--------------------------------------------------|-----------|
| Introduzione                                     | 1         |
| <b>1 Prerequisiti</b>                            | <b>5</b>  |
| 1.1 Fasci e spazi anellati . . . . .             | 5         |
| 1.2 Varietà algebriche . . . . .                 | 10        |
| 1.3 Ulteriori definizioni e proprietà . . . . .  | 13        |
| <b>2 Varietà complesse e topologia euclidea</b>  | <b>21</b> |
| 2.1 Funtore di analitificazione . . . . .        | 21        |
| 2.2 Preliminari di topologia algebrica . . . . . | 24        |
| <b>3 Rivestimenti ciclici</b>                    | <b>29</b> |
| <b>4 L'esempio di Artin e Mumford</b>            | <b>37</b> |
| 4.1 Quadriche in $\mathbb{P}^3$ . . . . .        | 37        |
| 4.2 Costruzione . . . . .                        | 43        |
| <b>Bibliografia</b>                              | <b>54</b> |



# Introduzione

Uno tra i più importanti problemi affrontati in matematica è quello della classificazione. Nel caso della geometria algebrica, questo significherebbe, idealmente, classificare tutte le varietà algebriche a meno di isomorfismo. Un primo passo per avvicinarci all'obiettivo sarebbe poter classificare le varietà algebriche a meno di *birazionalità*, cioè a meno di sottovarietà "trascurabili" di dimensione inferiore.

È naturale iniziare questo studio partendo dalle varietà più semplici, gli spazi proiettivi, e dai loro parenti più prossimi, le varietà *razionali*, cioè quelle birazionalmente equivalenti a uno spazio proiettivo. Come vedremo, la birazionalità è definita geometricamente tramite l'esistenza di mappe razionali invertibili, ma, sfruttando gli omomorfismi indotti sui campi delle funzioni razionali, possiamo anche dare la seguente formulazione algebrica: una varietà è razionale se il suo campo delle funzioni razionali è isomorfo al campo delle funzioni razionali di  $\mathbb{P}^n(k)$ , cioè a  $k(x_1, \dots, x_n)$ .

Un'altra classe di varietà da prendere in considerazione sono le varietà *unirazionali*, cioè quelle "ricoperte" da una varietà razionale. Ossia, richiediamo che esista una mappa razionale dominante da uno spazio proiettivo (o in generale da una varietà razionale) alla varietà in questione. Sfruttando ancora gli omomorfismi indotti, possiamo riformulare il problema affermando che una varietà è unirazionale se il suo campo delle funzioni razionali è un sottocampo di  $k(x_1, \dots, x_n)$ , per qualche  $n$ .

È evidente che una varietà razionale sia anche unirazionale. Sorge però spontaneo chiedersi se anche il viceversa sia vero. Equivalentemente, se un sottocampo non banale del campo delle funzioni razionali in  $n$  variabili  $k(x_1, \dots, x_n)$  sia sempre isomorfo a tutto  $k(x_1, \dots, x_n)$ .

Il primo a porre questa domanda fu Lüroth nel 1861, da cui il nome *Problema di Lüroth*. La risposta dipende innanzitutto dalla dimensione:

- In dimensione 1, unirazionale e razionale sono equivalenti, su ogni campo  $k$ ;

- 
- In dimensione 2, sono equivalenti se  $k$  è algebricamente chiuso e di caratteristica 0;
  - In dimensione  $\geq 3$ , in generale l'equivalenza è falso.

Nel 1875, Lüroth dimostra in [L75] che una curva algebrica complessa unirazionale è anche razionale. Questo risultato è stato poi generalizzato in quello che ora prende il nome di *Teorema di Lüroth*.

**Teorema 0.1** (Lüroth). Sia  $k \subsetneq L \subseteq k(t)$  un'estensione di campi, con  $k(t)$  il campo delle funzioni razionali in una variabile  $t$ , allora  $L$  è isomorfo a  $k(t)$ .

Il problema in dimensione 1 era quindi risolto. Ci vollero circa venti anni per arrivare al risultato in dimensione 2. Nel 1893, Castelnuovo introduce una caratterizzazione delle superfici razionali definite su un campo  $k$  algebricamente chiuso e dimostra che, se  $k$  ha caratteristica 0, allora una superficie unirazionale è anche razionale (si veda ad esempio [CE96]). Questa generalizzazione del Teorema di Lüroth però non vale in caratteristica diversa da 0 o se  $k$  non è algebricamente chiuso. Alcuni controesempi in caratteristica positiva si possono trovare in [Zar58] e [Kat88], mentre un altro controesempio noto è la superficie cubica  $S_3$  definita da

$$3x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$$

su  $\mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$ . Come mostrato da Kollár, vale la seguente caratterizzazione:

**Teorema 0.2.** [Kol02] Sia  $X$  un'ipersuperficie cubica definita su un campo  $k$  di caratteristica 0, allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1.  $X$  è unirazionale su  $k$ ;
2.  $X$  ha un punto definito su  $k$ ;
3.  $X$  ha un punto liscio definito su  $k$ .

Di conseguenza  $S_3$  è unirazionale. La dimostrazione della non razionalità di  $S_3$ , seppur migliorata da Kollár, era già nota da tempo ed era stata mostrata da Segre in [Seg42]. Abbiamo quindi trovato un primo controesempio al problema di Lüroth.

Arrivare a una risposta definitiva in dimensione 3 (e superiore) ha richiesto invece molto più tempo. Degni di nota sono ad esempio i lavori di Fano, come

---

[Fan08] e [Fan47], che contribuirono alla ricerca dei controesempi in dimensione 3 ma che mancavano di dimostrazioni sufficientemente rigorose. Nel 1971-72 vennero finalmente pubblicati tre controesempi:

1. [IM71]: Iskovskih e Manin dimostrano che ogni 3-varietà quartica liscia  $V_4 \subseteq \mathbb{P}^4$  non è razionale, mentre alcune quartiche unirazionali erano già state costruite da Segre in [Seg60];
2. [CG72]: Clemens e Griffiths dimostrano che una certa 3-varietà cubica liscia  $V_3 \subseteq \mathbb{P}^4$  è unirazionale ma non razionale;
3. [AM72]: Artin e Mumford dimostrano che un rivestimento doppio  $V$  di  $\mathbb{P}^3$ , ramificato su una superficie quartica, è unirazionale ma non razionale.

Per essere precisi, Artin e Mumford dimostrano che il rivestimento  $V$  non è *stabilmente razionale*, una condizione più debole della razionalità ma più forte dell'unirazionalità. Ci si potrebbe ora chiedere se la razionalità stabile sia equivalente alla razionalità. La risposta è ancora una volta no, ed è riassunta nel seguente teorema.

**Teorema 0.3.** [BCTSSD85] Sia  $P(x, t) = x^3 + p(t)x + q(t)$  un polinomio irriducibile in  $\mathbb{C}[x, t]$ , con discriminante  $\delta(t) := 4p(t)^3 + 27q(t)^2$  di grado  $\geq 5$ . Allora l'ipersuperficie affine  $X \subseteq \mathbb{C}^4$  definita da  $y^2 - \delta(t)z^2 = P(x, t)$  è stabilmente razionale ma non razionale.

Tutti questi articoli mostrarono come, anche su  $\mathbb{C}$  (e in generale su un campo algebricamente chiuso di caratteristica 0), il problema di Lüroth in dimensione 3 avesse in generale risposta negativa.

Questo comunque non significava che il problema fosse risolto. Esistono infatti dei casi particolari per i quali unirazionale implica ancora razionale, anche in dimensione più alta. Vale ad esempio il seguente teorema:

**Teorema 0.4.** Sia  $X$  un'ipersuperficie di grado 2 in  $\mathbb{P}^n(k)$ , allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1.  $X$  è razionale su  $k$ ;
2.  $X$  è unirazionale su  $k$ ;
3.  $X$  ha un punto liscio definito su  $k$ .

---

Dove l'idea è di considerare una proiezione stereografica di centro  $o$ , con  $o$  punto liscio di  $X$ , per costruire una mappa birazionale da  $\mathbb{P}^{n-1}(k)$  a  $X$ .

Concludiamo segnalando l'esistenza di numerosi problemi tuttora aperti, ad esempio sulla razionalità delle 4-varietà cubiche, che però non affronteremo in questo testo. I problemi di razionalità sono un tema molto ampio e studiato, soprattutto nello scorso secolo, con una vasta letteratura. Per una trattazione più dettagliata si rimanda quindi a [Bea16].

In questa tesi ci concentreremo sullo studio del controesempio di Artin e Mumford, seguendo in particolare l'approccio presentato in [Mus17]. Inizieremo introducendo i concetti fondamentali di geometria algebrica, tra cui le nozioni di razionalità e unirazionalità. Successivamente, presenteremo alcuni strumenti di topologia algebrica utili per lo studio delle varietà complesse. Discuteremo quindi i rivestimenti ciclici di varietà algebriche e, infine, costruiremo esplicitamente il controesempio.

# Capitolo 1

## Prerequisiti

### 1.1 Fasci e spazi anellati

Iniziamo con l'introdurre una serie di concetti preliminari che ci permetteranno di definire e studiare correttamente le varietà algebriche.

**Definizione 1.1** (Prefascio). Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $\mathcal{T}_X$  la categoria che ha come oggetti gli aperti di  $X$  e come morfismi le inclusioni tra loro. Un *prefascio* di gruppi abeliani su  $X$  è un funtore

$$\mathcal{F}: \mathcal{T}_X^{\text{op}} \rightarrow Ab,$$

dove  $Ab$  è la categoria dei gruppi abeliani. Il funtore  $\mathcal{F}$  mappa un'inclusione  $U \subseteq V$  in un omomorfismo di gruppi abeliani,  $\rho_{VU}: \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ , detto *mappa di restrizione*.

Diciamo che  $s$  è una *sezione* di  $\mathcal{F}$  su  $U$  se  $s \in \mathcal{F}(U)$  e chiamiamo *restrizione* di  $s$  a  $V$  l'elemento  $s|_V := \rho_{VU}(s) \in \mathcal{F}(V)$ .

**Osservazione 1.2.** In modo analogo a quanto fatto per i gruppi abeliani, possiamo definire un prefascio su  $X$  con valori in una qualsiasi categoria  $\mathcal{C}$  fissata.

**Definizione 1.3.** Un prefascio  $\mathcal{F}$  sullo spazio topologico  $X$  si dice *fascio* se, per ogni  $U$  aperto di  $X$  e per ogni  $\{U_i\}_{i \in I}$  ricoprimento aperto di  $U$ , sono soddisfatte le seguenti proprietà:

1. Se  $s \in \mathcal{F}(U)$  e  $s|_{U_i} = 0$  per ogni  $i$ , allora  $s = 0$ ;

## 1. Prerequisiti

---

2. Se  $\{s_i\}_{i \in I}$  è tale che  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  e  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ , per ogni  $i$  e  $j$ , allora esiste  $s \in \mathcal{F}(U)$  tale che  $s|_{U_i} = s_i$ .

**Osservazione 1.4.** Nel punto 2 della definizione precedente, la sezione  $s$  è unica per 1. Infatti, se avessimo due sezioni  $s$  e  $s'$ , la loro differenza sarebbe 0 su tutti gli aperti del ricoprimento e quindi lo sarebbe su tutto  $U$ .

**Esempio 1.5.** Sia  $X$  uno spazio topologico. Per ogni aperto  $U$  di  $X$ , consideriamo l'insieme  $C^0(U, \mathbb{R})$  delle funzioni continue da  $U$  a  $\mathbb{R}$ . Allora  $C^0(-, \mathbb{R})$  è un fascio, dove le mappe di restrizione sono le usuali restrizioni di funzioni.

Notiamo invece che le funzioni continue e limitate  $BC^0(-, \mathbb{R})$  non formano un fascio. Infatti, consideriamo  $X = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ , con il ricoprimento aperto  $\left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right)\right\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ , e la funzione

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Notiamo che le restrizioni  $f_n$  sugli aperti del ricoprimento coincidono sempre sulle intersezioni, tuttavia non esiste nessuna funzione globale che soddisfi la proprietà 2 poiché  $f$  è illimitata.

**Esempio 1.6.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $G$  un gruppo abeliano non banale. Consideriamo il prefascio  $\mathcal{F}$  che associa a ogni aperto  $U \subseteq X$  il gruppo  $G$  e che mappa tutte le inclusioni non banali nell'identità di  $G$ , allora  $\mathcal{F}$  potrebbe non essere un fascio. Prendiamo ad esempio uno spazio topologico  $X$  che è unione disgiunta di due aperti e scegliamo una sezione  $s_i$  (cioè un elemento di  $G$ ) per ognuno di essi. Poiché gli aperti hanno intersezione vuota, le sezioni coincidono su di essa, tuttavia, se  $s_1 \neq s_2$ , non può esistere una sezione globale  $s \in G$  che soddisfi 2 perché le mappe di restrizione sono tutte l'identità.

**Esempio 1.7** (Fascio costante). Cerchiamo ora di costruire un vero fascio sul modello dell'Esempio 1.6. Sia quindi  $X$  uno spazio topologico e  $G$  un gruppo abeliano dotato della topologia discreta. Definiamo il fascio  $\mathcal{F}$  in modo che  $\mathcal{F}(U)$  sia il gruppo di tutte le funzioni continue da  $U$  a  $G$ , con le usuali mappe di restrizione. Osserviamo che per ogni aperto connesso  $U$ ,  $\mathcal{F}(U) \cong G$ . Infatti, poiché  $G$  è discreto, una funzione continua  $f \in \mathcal{F}(U)$  deve essere localmente costante, ma essendo  $U$  connesso, segue che  $f$  è costante. Di conseguenza gli elementi di  $G$  caratterizzano gli elementi di  $\mathcal{F}(U)$ . Se ora  $U$  è un aperto le cui componenti connesse sono aperte (se  $X$  è localmente connesso questo fatto è sempre

vero), allora una funzione  $f$  è costante sulle componenti connesse e quindi  $\mathcal{F}(U)$  è isomorfo al prodotto diretto di copie  $G$ , una per ogni componente connessa di  $U$ .

**Proposizione 1.8.** [Liu02, Osservazione 2.2.6] Sia  $X$  uno spazio topologico. Per definire un fascio  $\mathcal{F}$  su  $X$  è sufficiente definirlo su una base di  $\mathcal{T}_X$ . Ossia, data una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathcal{T}_X$ , definiamo un  $\mathcal{B}$ -fascio  $\mathcal{F}_0$ , ricalcando la definizione di fascio ma sostituendo le parole " $U$  aperto di  $X$ " con " $U$  aperto in  $\mathcal{B}$ ". Esiste allora un unico fascio  $\mathcal{F}$  su  $X$  che estende  $\mathcal{F}_0$ .

**Definizione 1.9.** Siano  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  (pre)fasci su  $X$ . Un *omomorfismo* di (pre)fasci  $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  è una trasformazione naturale tra i corrispondenti funtori. Inoltre,  $\varphi$  si dice *isomorfismo* se esiste un morfismo inverso  $\psi$  tale che

$$\varphi \circ \psi = \text{id}_{\mathcal{G}} \quad \text{e} \quad \psi \circ \varphi = \text{id}_{\mathcal{F}},$$

dove  $\text{id}_{\mathcal{G}}$  e  $\text{id}_{\mathcal{F}}$  sono le trasformazioni naturali identità.

**Definizione 1.10.** Sia  $f: X \rightarrow Y$  una funzione continua tra spazi topologici e  $\mathcal{F}$  un fascio su  $X$ . Definiamo il *fascio immagine*  $f_*\mathcal{F}$  su  $Y$  come  $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ , per ogni aperto  $V \subseteq Y$ .

**Osservazione 1.11.**  $f_*$  è un funtore dalla categoria dei fasci su  $X$  alla categoria dei fasci su  $Y$ .

**Definizione 1.12** (Spiga). Sia  $\mathcal{F}$  un prefascio sullo spazio topologico  $X$  e sia  $x \in X$ . Definiamo la *spiga*  $\mathcal{F}_x$  di  $\mathcal{F}$  in  $x$  come l'insieme delle classi di equivalenza delle coppie  $(U, s)$ , con  $U$  intorno aperto di  $x$  in  $X$  e  $s \in \mathcal{F}(U)$ . Due coppie  $(U, s)$  e  $(V, t)$  sono identificate se esiste un intorno aperto  $W$  di  $x$ , con  $W \subseteq U \cap V$ , tale che  $s|_W = t|_W$ . Chiamiamo *germi* gli elementi di  $\mathcal{F}_x$  e li indichiamo con  $[U, s]$ .

**Osservazione 1.13.** Le spighe di  $\mathcal{F}$  ereditano una struttura di gruppo abeliano. Definiamo infatti

$$[U, s] + [U', s'] = [W, s|_W + s'|_W],$$

per qualche aperto  $W \subseteq U \cap U'$  (nel caso di anelli, la moltiplicazione si definisce in modo analogo). Un omomorfismo  $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  induce un omomorfismo di spighe, cioè un omomorfismo di gruppi abeliani,  $\varphi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ , con  $[U, s] \mapsto [U, \varphi_U(s)]$ , dove  $\varphi_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  è l'omomorfismo di gruppi su  $U$  dato dalla trasformazione naturale.

## 1. Prerequisiti

---

A differenza dei prefasci, i fasci sono di natura locale. Vale infatti la seguente proprietà:

**Proposizione 1.14.** [Har77, Proposizione 2.1.1] Sia  $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  un omomorfismo di fasci sullo spazio topologico  $X$ . Allora  $\varphi$  è un isomorfismo se e solo se, per ogni  $x \in X$ , la mappa indotta sulla spiga  $\varphi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$  è un isomorfismo.

Vediamo infine che è possibile estendere un prefascio a un fascio.

**Definizione 1.15.** Sia  $\mathcal{F}$  un prefascio sullo spazio topologico  $X$ . Definiamo il *fascio associato* a  $\mathcal{F}$  come un fascio  $\mathcal{F}^+$  su  $X$  dotato di un omomorfismo di prefasci  $\theta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$  che verifica la seguente proprietà universale: per ogni omomorfismo  $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ , con  $\mathcal{G}$  fascio, esiste un unico omomorfismo di fasci  $\tilde{\alpha}: \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$  tale che  $\alpha = \tilde{\alpha} \circ \theta$ .

**Proposizione 1.16.** [Liu02, Proposizione 2.2.15] Sia  $\mathcal{F}$  un prefascio su  $X$ , allora il fascio  $\mathcal{F}^+$  associato a  $\mathcal{F}$  esiste ed è unico a meno di isomorfismo. Inoltre,  $\theta_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^+$  è un isomorfismo per ogni  $x \in X$ .

Applichiamo ora le definizioni che abbiamo visto nel contesto dei fasci di anelli, in particolare degli anelli delle funzioni regolari.

**Nota.** Prima di proseguire, specifichiamo che tutti gli anelli saranno per noi commutativi e unitari e che gli omomorfismi di anelli mandano l'identità nell'identità.

**Definizione 1.17** (Spazio anellato). Uno *spazio anellato* è una coppia  $(X, \mathcal{O}_X)$ , dove  $X$  è uno spazio topologico e  $\mathcal{O}_X$  è un fascio di anelli su  $X$ . Un morfismo di spazi anellati è una coppia  $(f, f^\#): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ , con  $f: X \rightarrow Y$  una funzione continua e  $f^\#: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$  un morfismo di fasci di anelli su  $Y$ .

**Osservazione 1.18.** Studiamo la composizione di morfismi di spazi anellati. Consideriamo

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(f, f^\#)} (Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{(g, g^\#)} (Z, \mathcal{O}_Z),$$

con  $h = g \circ f$  e  $h^\#: \mathcal{O}_Z \rightarrow h_* \mathcal{O}_X$ . Allora, se  $W$  è un aperto di  $Z$ , avremo

$$h_W^\#: \mathcal{O}_Z(W) \rightarrow (h_* \mathcal{O}_X)(W) = \mathcal{O}_X(h^{-1}(W)).$$

Poiché  $\mathcal{O}_X(h^{-1}(W)) = \mathcal{O}_X(f^{-1} \circ g^{-1}(W)) = (f_* \mathcal{O}_X)(g^{-1}(W))$ , concludiamo che  $h_W^\# = f_{g^{-1}(W)}^\# \circ g_W^\#$ .

**Osservazione 1.19.** Partendo da un morfismo  $f^\#$  e fissato  $x \in X$ , possiamo costruire una mappa  $f_x^\#: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  sulle spighe. Tale mappa sarà data dalla composizione

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{Y,f(x)} &\xrightarrow{f_{f(x)}^\#} (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} \xrightarrow{\nu_x} \mathcal{O}_{X,x} \\ [U, s] &\longmapsto [U, f_U^\#(s)] \longmapsto [f^{-1}(U), f_U^\#(s)], \end{aligned}$$

dove la mappa  $\nu_x$  "interpreta" la sezione  $f_U^\#(s)$  come elemento della spiga  $\mathcal{O}_{X,x}$ . Questo è possibile perché, per definizione,  $f_U^\#(s) \in (f_*\mathcal{O}_X)(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ . In quanto composizione di omomorfismi di anelli,  $f_x^\#$  è ancora un omomorfismo di anelli.

Nel caso in cui  $\mathcal{O}_X$  e  $\mathcal{O}_Y$  siano dei fasci di funzioni regolari su due varietà algebriche, allora si può porre  $f_U^\#(s) = s \circ f$ . Tuttavia è importante notare che questa sezione rappresenta una funzione solo in  $\mathcal{O}_{X,x}$ , in quanto è definita su  $f^{-1}(U)$ , mentre il passaggio intermedio  $[U, f_U^\#(s)]$  è solo uno strumento formale per definire  $f_x^\#$ . Equivalentemente, possiamo osservare che il fascio  $f_*\mathcal{O}_X$  non è un fascio di funzioni regolari su  $Y$ , ma è, in un certo senso, un fascio di funzioni su  $X$ , parametrizzate dagli aperti di  $Y$ .

**Definizione 1.20.** Siano  $(A, \mathfrak{m})$  e  $(B, \mathfrak{p})$  due anelli locali. Un *omomorfismo locale* di anelli locali è un omomorfismo di anelli  $\varphi: A \rightarrow B$  tale che  $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}$ , o equivalentemente  $\varphi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{p}$ .

**Definizione 1.21** (Spazio localmente anellato). Uno spazio anellato  $(X, \mathcal{O}_X)$  si dice *spazio localmente anellato* se per ogni punto  $x \in X$ , la spiga  $\mathcal{O}_{X,x}$  è un anello locale. Un morfismo di spazi localmente anellati è un morfismo di spazi anellati  $(f, f^\#)$  tale che, per ogni  $x \in X$ , la mappa indotta  $f_x^\#: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  è un omomorfismo locale di anelli locali.

**Osservazione 1.22.** La categoria degli spazi localmente anellati forma una sottocategoria della categoria degli spazi anellati. Tuttavia la sottocategoria non è piena, infatti, dati due spazi localmente anellati, è possibile che un morfismo di spazi anellati induca un omomorfismo di anelli locali  $f_x^\#: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  che però non è locale [Har77, Esempio 2.2.3.2].

**Definizione 1.23** (Immersione). Un morfismo di spazi localmente anellati  $(f, f^\#): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  è detto *immersione aperta* (rispettivamente *immersione chiusa*)

## 1. Prerequisiti

---

sa) se  $f$  è un'immersione topologica aperta (chiusa) e se, per ogni  $x \in X$ ,  $f_x^\#$  è un isomorfismo (omomorfismo suriettivo).

## 1.2 Varietà algebriche

Applichiamo ora i concetti che abbiamo visto per definire le varietà algebriche. Cominciamo intanto col ricordare alcune definizioni.

**Nota.** Salvo quando specificato, assumiamo sempre che i campi su cui lavoriamo siano algebricamente chiusi.

**Definizione 1.24.** Sia  $k$  un campo, una  $k$ -algebra è una coppia  $(A, \varphi)$  dove  $A$  è un anello e  $\varphi: k \rightarrow A$  un omomorfismo di anelli. L'algebra si dice *ridotta* se  $A$  non contiene elementi nilpotenti non nulli. L'algebra si dice *finitamente generata* se esistono  $a_1, \dots, a_m \in A$  tali che ogni elemento di  $A$  è combinazione algebrica di elementi di  $k$  e degli  $a_i$ .

Un omomorfismo di  $k$ -algebre  $\psi: (A, \varphi_A) \rightarrow (B, \varphi_B)$  è un omomorfismo di anelli  $\psi: A \rightarrow B$  tale che il seguente diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & B \\ \varphi_A \swarrow & & \nearrow \varphi_B \\ & k & \end{array} .$$

**Osservazione 1.25.** Una  $k$ -algebra è finitamente generata se e solo se è isomorfa a un quoziente di  $k[x_1, \dots, x_m]$ .

Introduciamo quindi il concetto di spazio localmente  $k$ -anellato, che affina la definizione di spazio anellato vista in precedenza e ci permetterà di definire le varietà algebriche in modo generale.

**Definizione 1.26.** Uno *spazio localmente  $k$ -anellato* è una coppia  $(X, \mathcal{O}_X)$ , con  $X$  spazio topologico e  $\mathcal{O}_X$  fascio di  $k$ -algebre su  $X$ , tale che, per ogni  $x \in X$ , la spiga  $\mathcal{O}_{X,x}$  sia una  $k$ -algebra locale. Un morfismo di spazi localmente  $k$ -anellati è un morfismo di spazi localmente anellati  $(f, f^\#)$  tale che  $f^\#$  sia un morfismo di fasci di  $k$ -algebre.

Richiamiamo ora la definizione di varietà algebrica affine.

**Definizione 1.27.** Una *varietà algebrica affine* è uno spazio localmente  $k$ -anellato isomorfo a  $(W, \mathcal{O}_W)$ , dove  $W \subseteq \mathbb{A}^n$  è un chiuso di Zariski e  $\mathcal{O}_W$  è il fascio delle funzioni regolari da  $W$  a  $k$ .

**Osservazione 1.28.** Se  $W \subseteq \mathbb{A}^n$  è un chiuso affine, l'anello  $\mathcal{O}_W(W)$  viene detto anello coordinato di  $W$  e indicato con  $k[W]$ . Se  $I(W)$  è l'ideale dei polinomi che si annullano su  $W$ , vale inoltre

$$k[W] \cong \frac{k[x_1, \dots, x_n]}{I(W)}.$$

Poiché l'ideale  $I(W)$  è radicale, la  $k$ -algebra  $k[W]$  è ridotta.

Vale un'importante equivalenza categorica tra le varietà affini su  $k$  e le  $k$ -algebre finitamente generate e ridotte:

$$AffVar_k^{\text{op}} \xrightleftharpoons[\text{Specm}(-)]{k[-]} Alg_k^{\text{fg,red}},$$

dove  $\text{Specm}(-)$  è il funtore che associa a una  $k$ -algebra l'insieme dei suoi ideali massimali, che corrisponderanno ai punti di una varietà affine.

Siamo ora pronti per dare la seguente definizione.

**Definizione 1.29** (Varietà algebrica). Una *varietà algebrica* è uno spazio localmente  $k$ -anellato  $(X, \mathcal{O}_X)$  tale che esista un ricoprimento finito di aperti  $\{U_i\}_{i=1, \dots, n}$  di  $X$  tale che, per ogni  $i$ , la coppia  $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$  è una varietà algebrica affine.

**Proposizione 1.30.** [Vak25, Esercizio 2.5.E] Sia  $X$  uno spazio topologico,  $\{U_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento di aperti di  $X$  e  $\{\mathcal{F}_i \mid \mathcal{F}_i \in Sh_{\mathcal{C}}(U_i)\}$  un insieme di fasci, dove  $Sh_{\mathcal{C}}(U_i)$  è l'insieme dei fasci su  $U_i$  con valori nella categoria  $\mathcal{C}$ . Allora è possibile definire su  $X$  un fascio  $\mathcal{F}$  tale che  $\mathcal{F}|_{U_i} = \mathcal{F}_i$  se e solo se sono soddisfatte le seguenti proprietà:

1. I fasci coincidono sulle intersezioni semplici, cioè  $\mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \xrightarrow[\varphi_{ij}]{\sim} \mathcal{F}_j|_{U_{ij}}$ ;
2. I fasci sono compatibili sulle intersezioni triple, cioè il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_i|_{U_{ijk}} & \xrightarrow[\varphi_{ij}|_{U_{ijk}}]{\sim} & \mathcal{F}_j|_{U_{ijk}} \\ & \searrow \sim \quad \swarrow \sim & \\ \varphi_{ik}|_{U_{ijk}} & \mathcal{F}_k|_{U_{ijk}} & \varphi_{jk}|_{U_{ijk}} \end{array}.$$

## 1. Prerequisiti

---

In tal caso, preso  $V \subseteq X$  aperto, definiamo il prefascio

$$\mathcal{F}_0(V) = \left\{ (s_i)_{i \in I} \mid s_i \in \mathcal{F}_i(U_i \cap V) \text{ e } \varphi_{ij} \left( s_i|_{U_{ij} \cap V} \right) = s_j|_{U_{ij} \cap V} \right\}.$$

Il fascio  $\mathcal{F} := \mathcal{F}_0^+$  associato a  $\mathcal{F}_0$  è il fascio cercato.

**Osservazione 1.31.** Nel caso delle varietà algebriche, se abbiamo una famiglia finita  $\{(U_i, \mathcal{O}_{U_i})_i\}$  di varietà affini che si incollano sulle intersezioni e tali che i fasci siano compatibili come nella Proposizione 1.30, allora possiamo dare a  $X := \bigcup U_i$  una struttura di varietà algebrica.

Elenchiamo adesso una serie di definizioni e proprietà utili sulle varietà algebriche. Daremo in particolare le definizioni di varietà algebrica *razionale* e *unirazionale*.

**Definizione 1.32** (Varietà quasi-proiettiva). Sia  $\mathbb{P}^n$  lo spazio proiettivo di dimensione  $n$  su  $k$ . Una varietà algebrica  $X$  si dice *quasi-proiettiva* se è isomorfa a un aperto di una varietà proiettiva (cioè a un chiuso di Zariski in  $\mathbb{P}^n$ ). In particolare,  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  è una varietà quasi-proiettiva se è l'intersezione tra un aperto e un chiuso di Zariski in  $\mathbb{P}^n$ .

**Osservazione 1.33.** Valgono le seguenti inclusioni categoriche tra la categoria delle varietà quasi-proiettive, la categoria delle varietà algebriche, la categoria degli spazi localmente  $k$ -anellati e la categoria degli spazi  $k$ -anellati.

$$QPVar_k \xrightarrow{i_1} Var_k \xrightarrow{i_2} LocRingSp_k \xrightarrow{i_3} RingSp_k,$$

dove i funtori inclusione sono tutti fedeli, ma solo  $i_1$  e  $i_2$  sono pieni (si veda l'Osservazione 1.22).

**Definizione 1.34** (Mappa razionale). Siano  $X, Y$  varietà algebriche irriducibili. Una *mappa razionale*  $\varphi: X \dashrightarrow Y$  è una classe di equivalenza di coppie  $(U, \varphi_U)$ , con  $U \subseteq X$  aperto non vuoto e  $\varphi_U$  morfismo da  $U$  a  $Y$ , dove  $(U, \varphi_U) \sim (V, \varphi_V)$  se esiste un aperto non vuoto  $W \subseteq U \cap V$  tale che  $\varphi_U|_W = \varphi_V|_W$ .

Una mappa razionale si dice *dominante* se ha immagine densa in  $Y$ .

**Definizione 1.35** (Varietà birazionali). Siano  $X, Y$  varietà algebriche irriducibili.  $X$  e  $Y$  sono *birazionali* se esistono  $\varphi: X \dashrightarrow Y$  e  $\psi: Y \dashrightarrow X$  mappe razionali tali che  $\varphi \circ \psi = \text{id}_Y$  e  $\psi \circ \varphi = \text{id}_X$ , dove le identità sono viste come mappe razionali su  $X$  e su  $Y$ .

**Osservazione 1.36.** [Har77, Corollario 1.4.5] Due varietà sono birazionali se e solo se esistono  $U \subseteq X$  e  $V \subseteq Y$  aperti densi e isomorfi come varietà algebriche. Equivalentemente, se e solo se i campi delle funzioni razionali su  $X$  e su  $Y$  sono isomorfi, cioè  $k(X) \cong k(Y)$ , dove l'isomorfismo è dato dagli omomorfismi indotti  $\varphi^*$  e  $\psi^*$  sui campi delle funzioni razionali.

**Definizione 1.37** (Varietà razionale). Sia  $X$  una varietà algebrica irriducibile.  $X$  è *razionale* se è birazionale a  $\mathbb{P}^n$  per un certo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definizione 1.38** (Varietà unirazionale). Sia  $X$  una varietà algebrica irriducibile.  $X$  è *unirazionale* se esiste una mappa razionale dominante  $\varphi: \mathbb{P}^n \dashrightarrow X$  per un certo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Osservazione 1.39.**  $X$  è unirazionale se e solo se  $k(X) \subseteq k(x_1, \dots, x_n)$ . Inoltre, è razionale se e solo se  $k(X) \cong k(x_1, \dots, x_n)$ .

**Definizione 1.40** (Varietà stabilmente birazionali). Siano  $X, Y$  varietà algebriche irriducibili.  $X$  e  $Y$  sono *stabilmente birazionali* se esistono  $m, n \in \mathbb{N}$  tali che  $X \times \mathbb{P}^m$  e  $Y \times \mathbb{P}^n$  sono birazionali.

Una varietà si dice *stabilmente razionale* se è stabilmente birazionale a un punto.

**Teorema 1.41** (Fattorizzazione debole). [AKMWo02] Sia  $f: X \dashrightarrow Y$  una mappa birazionale tra varietà proiettive e lisce su un campo di caratteristica zero, sia inoltre  $U \subseteq X$  un aperto su cui  $f$  è un isomorfismo. Allora  $f$  si fattorizza come

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} X_n = Y,$$

dove ogni  $X_i$  è una varietà proiettiva e liscia e  $f_i$  è un blow-up o un blow-down di una sottovarietà liscia, irriducibile e disgiunta da  $U$ , tale che  $f_i$  sia ancora un isomorfismo su  $U$ .

## 1.3 Ulteriori definizioni e proprietà

Abbiamo quindi enunciato tutte le principali definizioni che ci servono per parlare di varietà algebriche. In questa sezione, analizzeremo ulteriori proprietà che ci permetteranno di studiarle più approfonditamente. Inoltre, costruiremo esplicitamente degli esempi di varietà astratte.

## 1. Prerequisiti

---

**Definizione 1.42.** Sia  $X$  una varietà algebrica e sia  $\mathcal{P}$  una proprietà. Diciamo che un punto *generale* di  $X$  soddisfa la proprietà  $\mathcal{P}$  se esiste un aperto denso  $U \subseteq X$  tale che  $\mathcal{P}$  è vera per ogni punto di  $U$ .

**Osservazione 1.43.** L'aggettivo *generale* può essere usato per riferirsi a sottoinsiemi di  $X$  diversi dai singoli punti. In questo caso, possiamo ancora utilizzare la Definizione 1.42 considerando una varietà "più grande". Ad esempio, nel caso di *sottospazi generali*, andremo a considerare aperti densi di varietà Grassmanniane, nel caso di *coppie generali* di punti, aperti densi nella varietà prodotto, ecc..

**Definizione 1.44** (Grado di una varietà). Sia  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  una varietà proiettiva irriducibile di dimensione  $r$ . Il *grado* di  $X$  è il numero di punti di intersezione di  $X$  con un sottospazio proiettivo generale  $Z \subseteq \mathbb{P}^n$  di dimensione  $n - r$ , cioè

$$\deg(X) = |X \cap Z|.$$

**Definizione 1.45** (Grado di un morfismo). Sia  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo dominante di varietà algebriche irriducibili e consideriamo l'omomorfismo indotto  $f^*: k(Y) \hookrightarrow k(X)$  sui campi delle funzioni razionali. Il *grado* di  $f$  è il grado dell'estensione di campi  $f^*(k(Y)) \subseteq k(X)$ , cioè

$$\deg(f) = [k(X) : f^*(k(Y))].$$

Equivalentemente, il grado di un morfismo dominante corrisponde al numero di preimmagini di un punto generale  $y \in Y$ , cioè  $\deg(f) = |f^{-1}(y)|$ .

**Definizione 1.46** (Sezione di un morfismo). Sia  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo di varietà algebriche. Una *sezione* di  $f$  è un morfismo  $s: Y \rightarrow X$  tale che  $f \circ s = \text{id}_Y$ .

**Definizione 1.47.** Sia  $A$  un anello e  $B$  un  $A$ -modulo.  $B$  si dice *piatto* (su  $A$ ) se per ogni omomorfismo iniettivo di  $A$ -moduli  $N \rightarrow N'$ , l'omomorfismo  $N \otimes_A B \rightarrow N' \otimes_A B$  è iniettivo. In particolare, se  $\varphi: A \rightarrow B$  è un omomorfismo di anelli e  $B$  è piatto come  $A$ -modulo,  $\varphi$  si dice *piatto*.

**Definizione 1.48.** Sia  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo di varietà algebriche. Diciamo che  $f$  è *piatto* in  $x \in X$  se l'omomorfismo  $f_x^\#: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  è piatto. Diremo in particolare che  $f$  è *piatto* se è piatto in ogni punto di  $X$ .

Poiché le due definizioni precedenti sono poco pratiche da usare, enunciamo ora alcuni risultati utili per lo studio dei morfismi piatti.

**Proposizione 1.49.** [Liu02, Proposizione 4.3.3]

1. Se  $A$  è un anello, allora ogni  $A$ -modulo libero è piatto;
2. Se  $B$  è una  $A$ -algebra piatta, allora ogni  $B$ -modulo piatto su  $B$  è anche piatto su  $A$ ;
3. Se  $A \rightarrow B$  è un omomorfismo di  $k$ -algebre ridotte e finitamente generate, allora  $\text{Specm } B \rightarrow \text{Specm } A$  è piatto se e solo se  $A \rightarrow B$  è piatto.

**Proposizione 1.50.** [Liu02, Lemma 4.3.7] Sia  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo piatto di varietà algebriche con  $Y$  irriducibile. Allora ogni aperto non vuoto  $U \subseteq X$  domina  $Y$  (cioè  $f(U)$  è denso in  $Y$ ). Inoltre se  $X$  ha un numero finito di componenti irriducibili, allora ognuna di esse domina  $Y$ .

**Definizione 1.51** (Semicontinuità). Sia  $X$  uno spazio topologico e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione.  $f$  si dice *superiormente semicontinua* se  $f^{-1}((-\infty, y))$  è aperto in  $X$ , per ogni  $y \in \mathbb{R}$ . Analogamente,  $f$  si dice *inferiormente semicontinua* se  $f^{-1}((y, +\infty))$  è aperto in  $X$ , per ogni  $y \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 1.52.** [Vak25, Teorema 12.4.3][Har77, Esercizio 2.3.22] Sia  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo di varietà proiettive irriducibili, allora la funzione  $y \mapsto \dim(f^{-1}(y))$  è superiormente semicontinua. In particolare, se  $f$  è dominante, esiste un aperto non vuoto  $U \subseteq Y$  tale che  $\dim(f^{-1}(y)) = \dim(X) - \dim(Y)$ , per ogni  $y \in U$ .

**Teorema 1.53.** [Har77, Esercizio 3.10.9] Sia  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo di varietà lisce. Se esiste un aperto denso  $U \subseteq Y$  tale che le fibre di  $f$  su  $U$  abbiano dimensione costante, allora  $f$  è piatto su  $U$ .

**Definizione 1.54.** Sia  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo di varietà algebriche.  $f$  si dice *finito* se esiste un ricoprimento di aperti affini  $\{Y_i\}$  di  $Y$  tale che, per ogni  $i$ ,  $f^{-1}(Y_i)$  è affine e  $\mathcal{O}_X(f^{-1}(Y_i))$  è un  $\mathcal{O}_Y(Y_i)$ -modulo finitamente generato.

**Proposizione 1.55.** [Liu02, Esercizio 3.3.17] Se  $f: X \rightarrow Y$  è un morfismo finito di varietà algebriche, allora  $f$  è chiuso (cioè l'immagine di chiusi è chiusa).

**Lemma 1.56** (Artin-Tate). [AM16, Proposizione 7.8] Siano  $A \subseteq B \subseteq C$  anelli. Supponiamo che  $A$  sia Noetheriano e che  $C$  sia una  $A$ -algebra finitamente generata. Se  $C$  è finitamente generato come  $B$ -modulo o è intero su  $B$ , cioè ogni elemento di  $C$  è zero di un polinomio monico in  $B[t]$ , allora  $B$  è finitamente generata come  $A$ -algebra.

## 1. Prerequisiti

---

**Teorema 1.57.** Sia  $A$  una  $k$ -algebra finitamente generata e  $G$  un gruppo finito che agisce su  $A$  tramite omomorfismi di  $k$ -algebre, allora  $A^G = \{a \in A \mid \forall g \in G, g(a) = a\}$  è ancora una  $k$ -algebra finitamente generata.

*Dimostrazione.* Supponiamo  $A \neq 0$ , allora abbiamo omomorfismi di anelli

$$k \hookrightarrow A^G \hookrightarrow A.$$

$A^G \hookrightarrow A$  è un'estensione intera, infatti, preso  $a \in A$ , definiamo il polinomio monico

$$\prod_{g \in G} (t - g(a)) \in A^G[t],$$

che ha  $a$  come radice (per  $g = \text{id}$ ). Allora, applicando il Lemma 1.56, otteniamo la tesi.  $\square$

**Osservazione 1.58.** [Sha13, Esempio 1.21] Se  $A$  una  $k$ -algebra ridotta finitamente generata, che corrisponde alla varietà affine  $\text{Specm } A$ , allora abbiamo un omeomorfismo

$$\text{Specm } A^G \cong (\text{Specm } A) /_G.$$

Inoltre  $\text{Specm } A^G$  è il quoziente nella categoria delle varietà algebriche affini.

**Esempio 1.59.** Definiamo ora gli *spazi proiettivi pesati* come varietà algebriche astratte. Sia  $k$  un campo di caratteristica 0 e siano  $d_0, \dots, d_n \in \mathbb{N}^+$ . Vogliamo costruire lo spazio proiettivo pesato  $\mathbb{P}(d_0, \dots, d_n)$  a partire dalle sue carte affini. Sia quindi  $U_0 = \frac{1}{d_0}(d_1, \dots, d_n)$ , cioè il quoziente di  $\mathbb{A}^n$  rispetto all'azione di  $\mathbb{Z}/d_0\mathbb{Z}$  data da

$$[m] \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\xi^{md_1} \cdot x_1, \dots, \xi^{md_n} \cdot x_n),$$

dove  $\xi$  è una radice primitiva  $d_0$ -esima dell'unità. Essendo  $\mathbb{Z}/d_0\mathbb{Z}$  finito,  $U_0$  è ancora una varietà affine per l'Osservazione 1.58. Inoltre  $\mathcal{O}(U_0) = k[U_0] = k[x_0, \dots, x_n, x_0^{-1}]_0$ , dove  $\deg(x_i) = d_i$ . Le altre carte si costruiscono in maniera analoga ponendo

$$U_i = \frac{1}{d_i}(d_0, \dots, d_{i-1}, d_{i+1}, \dots, d_n).$$

Gli spazi proiettivi pesati sono delle varietà proiettive. Infatti, sia  $m = \text{mcm}(d_0, \dots, d_n)$  e consideriamo, per un qualche  $N \in \mathbb{N}^+$ , l'immersione chiusa

$$\iota: \mathbb{P}(d_0, \dots, d_n) \hookrightarrow \mathbb{P}^N,$$

dove un punto  $[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}(d_0, \dots, d_n)$  viene mandato nel punto  $y \in \mathbb{P}^N$  che ha come coordinate tutti i monomi di grado  $m$  in  $x_0, \dots, x_n$ . L'immagine di questa immersione sarà definita da equazioni polinomiali, in modo simile all'immagine dell'immersione di Veronese, che implica che  $\mathbb{P}(d_0, \dots, d_n)$  è proiettiva. In particolare, se tutti i  $d_i$  sono 1, lo spazio proiettivo pesato  $\mathbb{P}(1, \dots, 1)$  è esattamente  $\mathbb{P}^n$ .

Costruiamo ora come esempio lo spazio  $\mathbb{P}(1, 1, 2)$  con coordinate  $x_0, x_1, y$ . In questo caso abbiamo tre carte affini con

$$\mathcal{O}(U_0) = k[x_0^\pm, x_1, y]_0 = k\left[\frac{x_1}{x_0}, \frac{y}{x_0^2}\right] \cong k[u_1, u_2],$$

$$\mathcal{O}(U_1) = k[x_0, x_1^\pm, y]_0 = k\left[\frac{x_0}{x_1}, \frac{y}{x_1^2}\right] \cong k[v_1, v_2],$$

$$\mathcal{O}(U_2) = k[x_0, x_1, y^\pm]_0 = k\left[\frac{x_0^2}{y}, \frac{x_1^2}{y}, \frac{x_0 x_1}{y}\right] \cong \frac{k[w_1, w_2, w_3]}{(w_1 w_2 - w_3^2)}.$$

Di conseguenza  $U_0 \cong U_1 \cong \mathbb{A}^2$  mentre  $U_3$  è un cono in  $\mathbb{A}^3$ . Sulle intersezioni invece abbiamo

$$\mathcal{O}(U_{01}) = k[x_0^\pm, x_1^\pm, y]_0 = k\left[\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_0}{x_1}, \frac{y}{x_0^2}\right] \cong \frac{k[u_1, v_1, u_2]}{(u_1 v_1 - 1)},$$

$$\mathcal{O}(U_{02}) = k[x_0^\pm, x_1, y^\pm]_0 = k\left[\frac{x_1}{x_0}, \frac{y}{x_0^2}, \frac{x_0^2}{y}\right] \cong \frac{k[u_1, u_2, w_1]}{(u_2 w_1 - 1)},$$

$$\mathcal{O}(U_{12}) = k[x_0, x_1^\pm, y^\pm]_0 = k\left[\frac{x_0}{x_1}, \frac{y}{x_1^2}, \frac{x_1^2}{y}\right] \cong \frac{k[v_1, v_2, w_2]}{(v_2 w_2 - 1)}.$$

Allora tutte e tre le intersezioni sono isomorfe tra loro e a  $(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{A}^1$ . Notiamo inoltre che i fasci sono compatibili considerando gli isomorfismi che mandano i generatori di una  $k$ -algebra nei generatori delle altre.

Infine, osserviamo che sull'intersezione tripla  $U_{012}$  abbiamo

$$\mathcal{O}(U_{012}) = k[x_0^\pm, x_1^\pm, y^\pm]_0 = k\left[\frac{x_1}{x_0}, \frac{y}{x_1^2}, \frac{x_0^2}{y}\right] \cong \frac{k[u_1, v_2, w_1]}{(u_1^2 v_2 w_1 - 1)}.$$

Quindi  $U_{012}$  è isomorfo a  $(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})$  tramite l'isomorfismo  $(x, y) \mapsto \left(x, y, \frac{1}{x^2 y}\right)$ .

## 1. Prerequisiti

---

**Osservazione 1.60.** Gli spazi proiettivi pesati possono anche essere definiti come quozienti di  $k^{n+1} \setminus \{0\}$  per l'azione di  $k^*$  nel seguente modo:

Siano  $k$  e  $d_0, \dots, d_n$  come sopra, poniamo

$$\mathbb{P}(d_0, \dots, d_n) := (k^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim,$$

$$\text{dove } (x_0, \dots, x_n) \sim (\lambda^{d_0} x_0, \dots, \lambda^{d_n} x_n) \text{ per } \lambda \in k^*.$$

Mostriamo ora che le due definizioni sono equivalenti. Supponiamo di avere  $x_0 \neq 0$ , allora

$$x'_i = \frac{x_i}{x_0^{d_i/d_0}} \in k, \quad \text{per } i = 1, \dots, n.$$

Quindi ogni punto di  $U_0$  sarà della forma  $(1, x'_1, \dots, x'_n)$ . Tuttavia, se scegliamo una radice  $d_0$ -esima dell'unità  $\xi$ , allora

$$(1, x'_1, \dots, x'_n) \sim (\xi^{d_0}, \xi^{d_1} x'_1, \dots, \xi^{d_n} x'_n) = (1, \xi^{d_1} x'_1, \dots, \xi^{d_n} x'_n).$$

Di conseguenza, i punti  $(x'_1, \dots, x'_n)$  e  $(\xi^{d_1} x'_1, \dots, \xi^{d_n} x'_n)$  sono identificati in  $U_0$ , cioè esattamente l'azione di gruppo descritta nell'Esempio 1.59. Ragionando in modo analogo sulle altre carte si ritrova quindi la definizione precedente.

**Definizione 1.61** (Gruppo algebrico). Un *gruppo algebrico* è una coppia  $(Y, \mu)$ , dove  $Y$  è una varietà algebrica e  $\mu: Y \times Y \rightarrow Y$  è un morfismo tale che l'insieme  $Y$  sia un gruppo rispetto a  $\mu$  e tale che la funzione  $y \mapsto y^{-1}$  sia un morfismo.

**Esempio 1.62.** Alcuni esempi di gruppi algebrici sono i seguenti:

1. Il *gruppo additivo*  $\mathbb{G}_a$  è la varietà  $\mathbb{A}^1$  con il morfismo  $\mu: \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^1$  dato da  $\mu(a, b) = a + b$ ;
2. Il *gruppo moltiplicativo*  $\mathbb{G}_m$  è la varietà  $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$  con il morfismo  $\mu(a, b) = ab$ ;
3. Il gruppo lineare  $GL_n = \{A \in \mathbb{A}^{n^2} \mid \det(A) \neq 0\}$  è una varietà algebrica affine, infatti è un aperto affine isomorfo al chiuso  $V_{\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^{n^2}}(t \cdot \det(A) - 1)$ , ed è un gruppo algebrico con la moltiplicazione tra matrici;
4. I gruppi speciale lineare  $SL_n$  e proiettivo lineare  $PGL_n$  in modo simile sono dei gruppi algebrici;
5. Una curva ellittica  $(E, O)$  con l'usuale legge di gruppo è un gruppo algebrico.

**Definizione 1.63** (Prodotto fibrato). Siano  $X, Y, Z$  varietà algebriche con morfismi  $f: Y \rightarrow X$  e  $g: Z \rightarrow X$ . Definiamo il *prodotto fibrato* di  $Y$  e  $Z$  su  $X$  come il dato di una varietà  $Y \times_X Z$  e di due morfismi  $p_1: Y \times_X Z \rightarrow Y$  e  $p_2: Y \times_X Z \rightarrow Z$  tali che il seguente diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc} & Y \times_X Z & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ Y & & Z \\ f \searrow & & \swarrow g \\ & X & \end{array}$$

e che, per ogni altra varietà algebrica  $W$  con morfismi  $h: W \rightarrow Y$  e  $l: W \rightarrow Z$  che fanno commutare le composizioni con  $f$  e  $g$ , cioè  $f \circ h = g \circ l$ , esista un unico morfismo  $\theta: W \rightarrow Y \times_X Z$  che fattorizza  $h$  e  $l$ .

**Osservazione 1.64.** Per definizione, il diagramma del prodotto fibrato è cartesiano. Viceversa, se abbiamo un diagramma cartesiano

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f'} & Z \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{f} & X, \end{array}$$

allora  $V$  è esattamente il prodotto fibrato  $Y \times_X Z$ .

**Proposizione 1.65.** [Liu02, Proposizione 3.1.2] Dati  $X, Y, Z, f, g$  come sopra, allora il prodotto fibrato  $Y \times_X Z$  esiste ed è unico (a meno di isomorfismo). Inoltre se  $X, Y, Z$  sono affini, il prodotto fibrato può essere studiato sulle algebre delle funzioni regolari. In particolare vale

$$Y \times_X Z = \operatorname{Specm} \left( \mathcal{O}_Y(Y) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_Z(Z) \right)^{\operatorname{red}},$$

dove le proiezioni sono indotte dagli omomorfismi canonici

$$\mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \left( \mathcal{O}_Y(Y) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_Z(Z) \right)^{\operatorname{red}} \quad \text{e} \quad \mathcal{O}_Z(Z) \rightarrow \left( \mathcal{O}_Y(Y) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_Z(Z) \right)^{\operatorname{red}}.$$

**Osservazione 1.66.** Concretamente, il prodotto fibrato  $Y \times_X Z$  è l'insieme

$$\{(y, z) \in Y \times Z \mid f(y) = g(z)\},$$

## 1. Prerequisiti

---

dove le mappe  $p_1$  e  $p_2$  sono date dalle proiezioni sulle due componenti. Osserviamo che questo sottoinsieme soddisfa la proprietà universale, infatti, il diagramma commuta e, presa  $W$  varietà con morfismi  $h$  e  $l$  come sopra, possiamo definire  $\theta(w) = (h(w), l(w))$ . Questo morfismo è unico perché, essendo  $p_1$  e  $p_2$  proiezioni, preso  $\theta': W \rightarrow Y \times_X Z$  dovremmo avere  $h(w) = p_1(\theta'(w))$  e  $l(w) = p_2(\theta'(w))$ , cioè la prima componente di  $\theta'(w)$  è  $h(w)$ , mentre la seconda è  $l(w)$ , cioè  $\theta = \theta'$ .

**Osservazione 1.67.** Nel caso particolare  $Z \subseteq X$  con  $g$  inclusione, il prodotto fibrato  $Y \times_X Z$  è uguale a  $f^{-1}(Z)$ . Infatti,

$$Y \times_X Z = \{(y, z) \in Y \times Z \mid f(y) = i(z)\} = \{(y, z) \in Y \times Z \mid f(y) = z\}.$$

Stiamo quindi lavorando con l'insieme  $\{(y, f(y)) \in Y \times Z\}$ , cioè la parte di grafico di  $f$  che sta in  $Z$ , che è canonicamente isomorfo a  $f^{-1}(Z) \subseteq Y$  tramite la proiezione sulla prima componente.

**Teorema 1.68** (Kleiman). [Har77, Teorema 3.10.8] Siano  $X, Y, Z$  varietà lisce con morfismi  $f: Y \rightarrow X$  e  $g: Z \rightarrow X$  e  $G$  un gruppo algebrico che agisce transitivamente su  $X$ . Per ogni  $\sigma \in G$ , chiamiamo  $Y^\sigma$  la varietà  $Y$  dotata del morfismo  $\sigma \circ f$ , allora esiste un aperto non vuoto  $V \subseteq G$  tale che, per ogni  $\sigma \in V$ ,  $Y^\sigma \times_X Z$  è vuoto oppure liscio e con dimensione  $\dim(Y) + \dim(Z) - \dim(X)$ .

# Capitolo 2

## Varietà complesse e topologia euclidea

**Nota.** Da ora in poi, tutte le varietà saranno definite su  $\mathbb{C}$ .

### 2.1 Funtore di analitificazione

Affrontiamo ora lo studio delle varietà algebriche complesse e delle loro proprietà analitiche. Sappiamo che la topologia di una varietà algebrica complessa sarà normalmente quella di Zariski, tuttavia, se la varietà può, anche localmente, immergersi in  $\mathbb{C}^n$ , viene spontaneo chiedersi se si possa prendere in considerazione anche la topologia euclidea. Vedremo ora che la risposta a questa domanda è affermativa e studieremo le proprietà di questa costruzione, detta *analitificazione*.

**Definizione 2.1** (Insieme analitico). Un sottoinsieme chiuso  $X \subseteq \mathbb{C}^n$  si dice *insieme analitico* se, per ogni  $x \in X$ , esiste un intorno aperto  $U \subseteq \mathbb{C}^n$  di  $x$  e funzioni olomorfe  $f_1, \dots, f_k$  su  $U$  tali che

$$X \cap U = \{y \in U \mid f_i(y) = 0, \text{ per } 1 \leq i \leq k\}.$$

**Osservazione 2.2.** Poiché i polinomi sono funzioni olomorfe, è evidente che un chiuso algebrico affine sia un insieme analitico. Al contrario, un insieme analitico non è in generale anche algebrico. Un esempio è  $X = \{x \in \mathbb{C}^1 \mid \sin(x) = 0\} = \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ , che non è algebrico perché è infinito in  $\mathbb{A}^1$ .

Come fatto per le varietà algebriche, possiamo considerare su un insieme analitico  $X$  il fascio di  $k$ -algebre delle funzioni olomorfe  $\mathcal{O}_X$  su  $X$ , dando quindi a  $X$

## 2. Varietà complesse e topologia euclidea

---

una struttura di spazio localmente  $k$ -anellato. Per generalizzare gli insiemi analitici, possiamo ancora una volta incollare ricoprimenti di insiemi analitici. Si veda [GR09] per maggiori dettagli su questa costruzione.

**Definizione 2.3** (Varietà analitica). Una *varietà analitica* è uno spazio localmente  $k$ -anellato  $(X, \mathcal{O}_X)$  tale che esista un ricoprimento finito di aperti tale che, per ogni  $i$ , la coppia  $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$  è isomorfa, come spazio localmente  $k$ -anellato, a un insieme analitico dotato del fascio delle funzioni olomorfe.

Siamo ora pronti per collegare i concetti di varietà algebrica e analitica.

**Definizione 2.4.** Sia  $(X, \mathcal{O}_X)$  una varietà algebrica affine e  $\iota: X \hookrightarrow \mathbb{C}^n$  un'immersione chiusa nello spazio affine. Definiamo allora l'*analitificazione* di  $X$  come la coppia  $(X^{\text{an}}, \mathcal{O}_{X^{\text{an}}})$ , dove  $X^{\text{an}}$  è lo spazio topologico dato dall'insieme  $X$  con la topologia di sottospazio di  $(\mathbb{C}^n, \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ , cioè la topologia euclidea su  $\mathbb{C}^n$ , mentre  $\mathcal{O}_{X^{\text{an}}}$  è il fascio delle funzioni olomorfe da  $X^{\text{an}}$  a  $\mathbb{C}$ .

**Osservazione 2.5.** [Nee07, Lemma 4.5.3] La topologia su  $X^{\text{an}}$  non dipende dall'immersione  $\iota$ .

**Osservazione 2.6.** Se  $X$  non è affine, definiamo l'analitificazione  $X^{\text{an}}$  incollando le topologie che troviamo su un ricoprimento di aperti affini di  $X$ .

**Proposizione 2.7.** [Nee07, Lemma 8.9.27] Sia  $X$  una varietà algebrica, valgono allora le seguenti affermazioni:

1. Se  $X$  è proiettiva, allora  $X^{\text{an}}$  è compatta;
2. Se  $X$  è quasi-proiettiva, allora  $X^{\text{an}}$  è di Hausdorff;
3. Se  $X$  è connessa (per esempio, se  $X$  è irriducibile), allora  $X^{\text{an}}$  è connessa;
4.  $X$  è liscia in  $x_0 \in X$  se e solo se  $X^{\text{an}}$  è liscia in  $x_0$ ;
5. Se  $X$  è liscia e quasi-proiettiva, con tutte le componenti irriducibili di dimensione  $n$ , allora  $X^{\text{an}}$  è una varietà olomorfa di dimensione  $n$  (ed è quindi anche una varietà reale  $C^\infty$  di dimensione  $2n$ ).

**Osservazione 2.8.** L'analitificazione definisce un funtore

$$(-)^{\text{an}}: \text{Var}_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{AnVar}_{\mathbb{C}}$$

dalla categoria delle varietà algebriche a quella delle varietà analitiche. Come abbiamo visto nell'Osservazione 2.2, tale funtore in generale non è un'equivalenza di categorie, possiamo però imporre delle ipotesi aggiuntive affinché lo diventi.

**Teorema 2.9.** [Nee07, Teorema 1.1.3] Il funtore di analitificazione

$$(-)^{\text{an}} : \text{ProjVar}_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{AnVar}_{\mathbb{C}}$$

dalla categoria delle varietà proiettive a quella degli spazi analitici è pienamente fedele. Di conseguenza induce un'equivalenza di categorie tra  $\text{ProjVar}_{\mathbb{C}}$  e la sua immagine essenziale.

Esiste una versione più generale del teorema precedente, dimostrata da Serre nell'articolo [Ser56] e chiamata GAGA (sigla di *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, il titolo dell'articolo). Poiché le varietà che prenderemo in considerazione saranno sempre proiettive, possiamo accontentarci della formulazione del Teorema 2.9.

Serre mostra anche che, dato un fascio  $\mathcal{F}$  su una varietà algebrica  $X$ , è possibile definire dei gruppi di coomologia  $H^i(X, \mathcal{F})$  e  $H^i(X^{\text{an}}, \mathcal{F}^{\text{an}})$ . In particolare, questi gruppi sono isomorfi se  $X$  è proiettiva e  $\mathcal{F}$  è un fascio coerente su  $X$  (come ad esempio avviene per il fascio delle funzioni regolari  $\mathcal{O}_X$ ).

Inoltre, se  $\mathcal{F} = \underline{G}$ , cioè il fascio costante a valori in  $G$ , vale l'isomorfismo  $H^i(X^{\text{an}}, \underline{G}) \cong H^i(X^{\text{an}}, G)$ , dove  $H^i(X^{\text{an}}, G)$  è l' $i$ -esimo gruppo di coomologia singolare di  $X$ .

**Definizione 2.10** (Successione esponenziale). Sia  $X$  una varietà algebrica. Definiamo la *successione esponenziale* su  $X^{\text{an}}$  come la seguente successione esatta corta:

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O}_{X^{\text{an}}} \xrightarrow{\exp(-)} \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}^* \rightarrow 0.$$

Se consideriamo ora la successione esatta lunga in coomologia per la successione esponenziale, otteniamo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X^{\text{an}}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^0(X^{\text{an}}, \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}) & \longrightarrow & H^0(X^{\text{an}}, \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}^*) \\ & & & & & \nearrow & \\ H^1(X^{\text{an}}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(X^{\text{an}}, \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}) & \longrightarrow & H^1(X^{\text{an}}, \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}^*) & , & \\ & & & & \nearrow c^1 & & \\ H^2(X^{\text{an}}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \dots & & & & \end{array}$$

## 2. Varietà complesse e topologia euclidea

---

dove  $c^1$  è chiamata *mappa della prima classe di Chern*. Si può inoltre dimostrare che  $H^1(X^{\text{an}}, \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}^*) \cong \text{Pic}(X^{\text{an}})$ , dove  $\text{Pic}(X^{\text{an}})$  è il *gruppo di Picard* di  $X^{\text{an}}$ , cioè il gruppo delle classi di isomorfismo dei fibrati in rette su  $X^{\text{an}}$ , con l'operazione di prodotto tensore [Voi02, Teorema 4.49].

Concludiamo con un utile risultato sulla coomologia dei fasci per varietà unirazionali.

**Teorema 2.11.** [Har77, Teorema 2.8.19] Sia  $X$  una varietà liscia, proiettiva e unirazionale, allora

$$H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0, \quad \text{per ogni } i \geq 1.$$

## 2.2 Preliminari di topologia algebrica

Vediamo ora delle nozioni di topologia algebrica che ci aiuteranno nello studio delle varietà razionali. Grazie all'analitificazione, possiamo studiare i gruppi di coomologia singolare di varietà algebriche trattandole come spazi euclidei. Mostriamo in particolare come la torsione nel terzo gruppo di coomologia sia un invariante per birazionalità stabile.

**Nota.** Solo per questa Sezione, tutte le varietà algebriche saranno considerate con la topologia analitica, secondo quanto visto nella Sezione 2.1. Per alleggerire la notazione, ometteremo quindi l'apice  $^{\text{an}}$ .

Diamo intanto una definizione preliminare.

**Definizione 2.12.** Siano  $G$  e  $H$  gruppi abeliani. Definiamo  $\text{Ext}^1(H, G)$  come l'insieme delle classi di equivalenza delle successioni esatte corte

$$0 \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow 0,$$

con  $E$  gruppo abeliano. Due successioni

$$0 \rightarrow G \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} H \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow G \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{p'} H \rightarrow 0$$

sono equivalenti se esiste un isomorfismo di gruppi  $\varphi: E \rightarrow E'$  tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & E & & & \\ & & i \nearrow & \downarrow \varphi & \nwarrow p & & \\ 0 & \rightarrow & G & & & H & \rightarrow 0 \\ & & i' \searrow & \downarrow & \nearrow p' & & \\ & & & E' & & & \end{array}$$

**Proposizione 2.13.** [Mun84, Teorema 52.3] Siano  $H, H', G$  gruppi abeliani. Valgono allora le seguenti proprietà di  $\text{Ext}^1$ :

1.  $\text{Ext}^1(H, G)$  è un gruppo abeliano con la *somma di Baer*, definita nel seguente modo: date

$$0 \rightarrow G \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{p_1} H \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow G \xrightarrow{i_2} E_2 \xrightarrow{p_2} H \rightarrow 0$$

successioni esatte corte, definiamo la loro somma come il quoziente

$$E = E_1 + E_2 := \frac{\{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 \mid p_1(e_1) = p_2(e_2)\}}{(i_1(b), 0) \sim (0, i_2(b))};$$

2.  $\text{Ext}^1(H \oplus H', G) \cong \text{Ext}^1(H, G) \oplus \text{Ext}^1(H', G)$ ;
3.  $\text{Ext}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \cong G/nG$ ;
4. Se  $H$  è libero, allora  $\text{Ext}^1(H, G) = 0$ ;
5. Se  $H$  è finitamente generato, allora  $\text{Ext}^1(H, \mathbb{Z}) \cong H_{\text{tors}}$ .

Enunciamo ora una serie di risultati utili che ci aiuteranno a studiare i gruppi di coomologia:

**Teorema 2.14** (Teorema dei coefficienti universali). [Hat02, Teorema 3.2] Sia  $X$  uno spazio topologico e  $G$  un gruppo abeliano finitamente generato. Allora per ogni  $p \geq 0$  esiste una successione esatta corta

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(H_{p-1}(X, \mathbb{Z}), G) \rightarrow H^p(X, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_p(X, \mathbb{Z}), G) \rightarrow 0,$$

con la convenzione che  $H_{-1}(X, \mathbb{Z}) = 0$ .

## 2. Varietà complesse e topologia euclidea

---

**Osservazione 2.15.** Si può dimostrare che, per ogni spazio topologico  $X$ ,  $H_0(X, \mathbb{Z})$  è un gruppo libero [Hat02, Proposizione 2.7]. Allora, dal Teorema 2.14, segue che

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}),$$

cioè che  $H^1(X, \mathbb{Z})$  non ha torsione.

**Teorema 2.16** (Formula di Künneth). [Hat02, Teorema 3.15] Siano  $X, Y$  spazi topologici con una struttura di  $CW$ -complesso e con  $H^p(Y, \mathbb{Z})$  gruppo abeliano libero e finitamente generato per ogni  $p$ , allora c'è un isomorfismo di gruppi abeliani graduati  $H^*(X \times Y, \mathbb{Z}) \cong H^*(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^*(Y, \mathbb{Z})$ . In particolare vale

$$H^p(X \times Y, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{i+j=p} H^i(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^j(Y, \mathbb{Z}).$$

**Osservazione 2.17.** Sappiamo già che  $\mathbb{P}^n$  ha una struttura di  $CW$ -complesso. Più in generale, per [Mil63, Teorema 7.2], ogni varietà proiettiva e liscia ammette una struttura di questo tipo. Di conseguenza potremo sempre applicare il teorema nei casi trattati in seguito.

**Proposizione 2.18.** [Hat02, Teorema 3.19] Per ogni  $n \geq 0$ , c'è un isomorfismo di anelli graduati

$$H^*(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1}) \quad \text{con} \quad \deg(x) = 2.$$

In particolare abbiamo che  $H^p(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  se  $0 \leq p \leq 2n$  e  $p$  è pari, altrimenti  $H^p(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \cong 0$ .

**Proposizione 2.19.** [RYYY23] Sia  $X$  una varietà liscia e  $Y$  una sottovarietà liscia di codimensione  $r$ . Sia inoltre  $f: \tilde{X} \rightarrow X$  il blow-up di  $X$  lungo  $Y$ . Allora per ogni  $p \geq 0$ , abbiamo un isomorfismo

$$H^p(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \cong H^p(X, \mathbb{Z}) \oplus \bigoplus_{q=1}^{r-1} H^{p-2q}(Y, \mathbb{Z}),$$

con la convenzione che  $H^{p-2q}(Y, \mathbb{Z}) = 0$  per  $p - 2q < 0$ .

**Teorema 2.20.** [Hat02, Corollario 4D.9] Sia  $X$  una varietà proiettiva e  $Y$  una sottovarietà liscia di codimensione reale  $r$ , allora esiste la seguente successione esatta lunga per la coppia  $(X, Y)$ :

$$\cdots \rightarrow H^{p-r}(X \setminus Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^p(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^p(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{p-r+1}(X \setminus Y, \mathbb{Z}) \rightarrow \cdots$$

Mostriamo ora il risultato fondamentale di questo capitolo:

**Teorema 2.21.** Siano  $X, Y$  varietà proiettive, lisce e stabilmente birazionali, allora esiste un isomorfismo di gruppi abeliani

$$H^3(X, \mathbb{Z})_{\text{tors}} \cong H^3(Y, \mathbb{Z})_{\text{tors}}.$$

*Dimostrazione.* Per provare questo fatto, mostriamo intanto le seguenti affermazioni:

1. Se  $X$  è una varietà algebrica e  $n \in \mathbb{N}$ , allora

$$H^3(X, \mathbb{Z})_{\text{tors}} \cong H^3(X \times \mathbb{P}^n, \mathbb{Z})_{\text{tors}};$$

2. Se  $X$  e  $Y$  sono varietà proiettive, lisce e birazionali, allora

$$H^3(X, \mathbb{Z})_{\text{tors}} \cong H^3(Y, \mathbb{Z})_{\text{tors}}.$$

Innanzitutto, dalla Proposizione 2.18 sappiamo che tutti i gruppi di coomologia  $H^i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$  sono liberi e finitamente generati. Possiamo quindi applicare il Teorema 2.16 per ottenere che

$$H^3(X \times \mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{i+j=3} H^i(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^j(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \cong H^3(X, \mathbb{Z}) \oplus H^1(X, \mathbb{Z}),$$

dove abbiamo usato il fatto che  $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong G$ , per ogni gruppo abeliano  $G$ . Poiché abbiamo visto che  $H^1(X, \mathbb{Z})_{\text{tors}} = 0$  dall'Osservazione 2.15, segue allora il punto 1.

Per la seconda affermazione invece, poiché  $X$  e  $Y$  sono birazionali, possiamo sfruttare il Teorema 1.41 e studiare, senza perdita di generalità, il caso in cui  $Y$  sia il blow-up di  $X$  rispetto a una sottovarietà liscia  $W$ . In questo caso, dalla Proposizione 2.19 abbiamo quindi che

$$H^3(Y, \mathbb{Z}) \cong H^3(X, \mathbb{Z}) \oplus H^1(W, \mathbb{Z}).$$

Usando ancora il fatto che  $H^1(W, \mathbb{Z})_{\text{tors}} = 0$ , segue il punto 2. □

**Corollario 2.22.** Se  $X$  è una varietà proiettiva liscia che è stabilmente razionale, allora  $H^3(X, \mathbb{Z})_{\text{tors}} = 0$ .

## 2. Varietà complesse e topologia euclidea

---

**Osservazione 2.23.** Usando lo stesso metodo del teorema precedente, si può dimostrare che se  $X$  e  $Y$  sono varietà proiettive lisce e stabilmente birazionali, allora

$$H^2(X, \mathbb{Z})_{\text{tors}} \cong H^2(Y, \mathbb{Z})_{\text{tors}}.$$

Come vedremo adesso però, questo invariante non è utile per studiare la razionalità di varietà.

Diamo intanto la seguente definizione.

**Definizione 2.24.** Sia  $X$  una varietà proiettiva liscia.  $X$  si dice *razionalmente connessa* se, presa una coppia generale di punti  $(x, y)$ , esiste un morfismo  $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  tale che  $x$  e  $y$  siano nell'immagine di  $f$ .

**Osservazione 2.25.** Una varietà unirazionale è razionalmente connessa. Infatti, sia  $X$  unirazionale, con  $f: \mathbb{P}^n \dashrightarrow X$  mappa razionale e  $\text{Im}(f) \subseteq X$  densa in  $X$ , allora  $\text{Im}(f)$  contiene un aperto denso  $U$  [Har77, Esercizio 2.3.19]. Se prendiamo ora una coppia  $x, y \in U$  e consideriamo due punti nelle controimmagini  $f^{-1}(x)$  e  $f^{-1}(y)$ , la retta che li congiunge sarà isomorfa a  $\mathbb{P}^1$  e la sua immagine soddisferà la condizione richiesta.

Possiamo quindi restringere il nostro studio della razionalità alle varietà razionalmente connesse. Tuttavia una varietà razionalmente connessa è anche semplicemente connessa [Deb01, Corollario 4.18]. Poiché in questo caso  $H_1(X, \mathbb{Z})$  è isomorfo all'abelianizzazione di  $\pi_1(X)$  [Hat02, Teorema 2A.1], concludiamo che se  $X$  è proiettiva, liscia e razionalmente connessa, allora  $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$ , da cui segue che  $H^2(X, \mathbb{Z})_{\text{tors}} = 0$  per il Teorema 2.14.

# Capitolo 3

## Rivestimenti ciclici

Per la nostra trattazione sull'esempio di Artin-Mumford, abbiamo bisogno di introdurre il concetto di rivestimento ciclico ramificato. Definiremo prima questa costruzione sulle varietà affini, per poi generalizzarla.

**Definizione 3.1.** Sia  $X$  una varietà affine e sia  $a \in \mathcal{O}_X(X)$ . Il *rivestimento  $m$ -ciclico* di  $X$  ramificato sopra il chiuso  $V_X(a)$  è la varietà affine  $Y$  avente come  $k$ -algebra delle funzioni regolari

$$\mathcal{O}_Y(Y) := \frac{\mathcal{O}_X(X)[t]}{(t^m - a)}.$$

**Osservazione 3.2.** L'omomorfismo iniettivo  $\mathcal{O}_X(X) \hookrightarrow \frac{\mathcal{O}_X(X)[t]}{(t^m - a)}$  induce il morfismo suriettivo  $\pi: Y \rightarrow X$ , con  $\pi(x_1, \dots, x_n, t) = (x_1, \dots, x_n)$ . Osserviamo anche che, preso  $x \in X$ , le sue preimmagini dovranno soddisfare la condizione  $t^m - a(x) = 0$  e saranno quindi  $m$  punti distinti se  $x \notin V_X(a)$ , oppure un solo punto con molteplicità  $m$  se  $x \in V_X(a)$ , in questo caso ovviamente avremo  $t = 0$ . Se inoltre  $a \in k^*$ ,  $V_X(a) = \emptyset$  e  $Y$  è unione disgiunta di  $m$  copie di  $X$ .

**Osservazione 3.3.** In generale  $\pi$  non è un rivestimento topologico, come non lo è la sua restrizione  $\pi|_{\pi^{-1}(X \setminus V_X(a))}: \pi^{-1}(X \setminus V_X(a)) \rightarrow X \setminus V_X(a)$ . Infatti, nella topologia di Zariski gli aperti sono "grandi" ed è possibile che  $\pi$  non sia localmente un omeomorfismo. Un esempio è il rivestimento ramificato

$$\pi: \operatorname{Specm} \frac{k[x, t]}{(t^2 - x)} \rightarrow \operatorname{Specm} k[x] = \mathbb{A}^1,$$

per il quale la restrizione

$$\pi|_{V_{\mathbb{A}^2}(t^2 - x) \setminus \{(0,0)\}}: V_{\mathbb{A}^2}(t^2 - x) \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$$

### 3. Rivestimenti ciclici

non è localmente iniettiva. Infatti, poiché  $\text{Specm} \frac{k[x,t]}{(t^2-x)} \cong \mathbb{A}^1$ , la sua topologia è la cofinita, quindi ogni aperto conterrà infinite coppie di punti della forma  $(\bar{x}, \sqrt{\bar{x}}), (\bar{x}, -\sqrt{\bar{x}})$ , che vengono entrambe proiettate su  $\bar{x}$ .

Tuttavia, possiamo mostrare che l'analitificazione

$$\pi^{\text{an}}|_{\pi^{-1}(X \setminus V_X(a))^{\text{an}}} : \pi^{-1}(X \setminus V_X(a))^{\text{an}} \rightarrow X \setminus V_X(a)^{\text{an}}$$

è effettivamente un rivestimento topologico. Per vedere questo fatto, costruiamo il seguente diagramma cartesiano:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{a'} & \mathbb{C}^* \\ \pi' \downarrow & & \downarrow t \mapsto t^m \\ X \setminus V_X(a)^{\text{an}} & \xrightarrow{x \mapsto a(x)} & \mathbb{C}^*, \end{array}$$

dove  $t \mapsto t^m$  è il rivestimento a  $m$  fogli di  $\mathbb{C}^*$ . Allora, in modo analogo a quanto fatto in 1.66, avremo  $Z = \{(x, t) \in (X \setminus V_X(a))^{\text{an}} \times \mathbb{C}^* \mid t^m = a(x)\}$ , che è esattamente la varietà analitica associata a  $\pi^{-1}(X \setminus V_X(a))$ . Inoltre  $\pi'(x, t) = x$ , cioè  $\pi' = \pi^{\text{an}}|_{\pi^{-1}(X \setminus V_X(a))^{\text{an}}}$ . Consideriamo ora un punto  $x_0 \in X \setminus V_X(a)^{\text{an}}$ . Poiché  $a$  non si annulla mai su  $X \setminus V_X(a)^{\text{an}}$ , esiste un intorno  $U$  di  $x_0$  su cui possiamo definire una funzione olomorfa  $s: U \rightarrow \mathbb{C}^*$  tale che  $s^m(x) = a(x)$ , per ogni  $x \in U$  (questo è un teorema classico di analisi complessa che deriva dall'esistenza locale del logaritmo complesso). Se ora  $\zeta$  è una radice primitiva  $m$ -esima dell'unità, allora le funzioni  $s(x), \zeta s(x), \dots, \zeta^{m-1}s(x)$  soddisfano tutte la condizione richiesta. Allora esistono  $m$  sezioni disgiunte di  $\pi'$  della forma  $\sigma_i(x) = (x, \zeta^i s(x)) \in Z$ , ciascuna con immagine omeomorfa (e anche biolomorfa) a  $U$ . Di conseguenza  $\pi'$  è un rivestimento a  $m$  fogli di  $X \setminus V_X(a)^{\text{an}}$ .

Possiamo allora dare la seguente definizione.

**Definizione 3.4.** Sia  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo di varietà algebriche. Diciamo che  $f$  è *étale* se la sua analitificazione è un biolomorfismo locale.

**Osservazione 3.5.** L'anello  $\mathcal{O}_Y(Y)$  è un modulo libero e finitamente generato su  $\mathcal{O}_X(X)$ , con base  $\{1, t, \dots, t^{m-1}\}$ . Allora, per la Proposizione 1.49,  $\mathcal{O}_Y(Y)$  e  $\pi$  sono piatti. Inoltre, per la Proposizione 1.55,  $\pi$  è anche chiuso.

Vediamo ora come costruire rivestimenti ciclici di varietà non affini. Costruiremo prima i rivestimenti degli aperti affini e poi li uniremo sulle intersezioni.

**Esempio 3.6.** Costruiamo un rivestimento  $m$ -ciclico di  $\mathbb{P}^n$  ramificato sul luogo degli zeri di  $F \in k[x_0, \dots, x_n]_{m \cdot r}$ .

Consideriamo la carta affine  $U_0 \cong \mathbb{A}^n$  con coordinate  $y_1, \dots, y_n$ , dove  $y_i = \frac{x_i}{x_0}$ . Abbiamo che  $f_0 = F(1, y_1, \dots, y_n) = \frac{F}{x_0^{m \cdot r}}$  è regolare su  $U_0$  e abbiamo un rivestimento ramificato

$$Y_0 = \text{Specm} \frac{k[y_1, \dots, y_n, t_0]}{(t_0^m - f_0)} \rightarrow U_0.$$

Consideriamo ora  $U_1$  con coordinate  $z_0, z_2, \dots, z_n$ . In modo analogo avremo

$$f_1 = F(z_0, 1, z_2, \dots, z_n) \quad \text{e} \quad Y_1 = \text{Specm} \frac{k[z_0, z_2, \dots, z_n, t_1]}{(t_1^m - f_1)}.$$

Osserviamo ora che questi rivestimenti ramificati sono compatibili sull'intersezione  $U_{01} := U_0 \cap U_1$ . Abbiamo infatti che  $f_1 = (\frac{x_0}{x_1})^{m \cdot r} f_0$  e che il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccccccc} Y_0 & \hookleftarrow & \pi_0^{-1}(U_{01}) & \xleftarrow{\cong} & \pi_1^{-1}(U_{01}) & \hookrightarrow & Y_1 \\ \pi_0 \downarrow & & \searrow & & \swarrow & & \downarrow \pi_1 \\ U_0 & \hookleftarrow & U_0 \cap U_1 & \hookrightarrow & U_1, & & \end{array}$$

o equivalentemente

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{k[y_1, \dots, y_n, t_0]}{(t_0^m - f_0)} & \xrightarrow{\quad} & \frac{k[y_1^\pm, y_2, \dots, y_n, t_0]}{(t_0^m - f_0)} & \xleftarrow{\cong} & \frac{k[z_0^\pm, z_2, \dots, z_n, t_1]}{(t_1^m - f_1)} & \xleftarrow{\quad} & \frac{k[z_0, z_2, \dots, z_n, t_1]}{(t_1^m - f_1)} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ k[y_1, \dots, y_n] & \hookrightarrow & k[y_1^\pm, y_2, \dots, y_n] & \cong & k[z_0^\pm, z_2, \dots, z_n] & \hookleftarrow & k[z_0, z_2, \dots, z_n], \end{array}$$

dove l'isomorfismo di  $k$ -algebre in alto è dato da  $t_1 = (\frac{x_0}{x_1})^r t_0$ .

Osserviamo anche che  $t_2 = (\frac{x_1}{x_2})^r t_1 = (\frac{x_1}{x_2})^r ((\frac{x_0}{x_1})^r t_0) = (\frac{x_0}{x_2})^r t_0$ , quindi gli isomorfismi sono compatibili sulle intersezioni triple. Di conseguenza questi rivestimenti delle carte affini formano un ricoprimento di aperti di una varietà algebrica che diremo essere il rivestimento di  $\mathbb{P}^n$  ramificato su  $F$ .

**Esempio 3.7.** Costruiamo nuovamente un rivestimento  $m$ -ciclico di  $\mathbb{P}^n$  usando gli spazi proiettivi pesati.

Consideriamo  $F \in k[x_0, \dots, x_n]_{m \cdot r}$  e  $\mathbb{P}(1, \dots, 1, r)$  con coordinate  $x_0, \dots, x_n, y$ . Consideriamo inoltre il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V(y^m - F) & \xhookrightarrow{i} & \mathbb{P}(1, \dots, 1, r) \setminus \{[0, \dots, 0, 1]\} \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{P}^n \end{array}$$

### 3. Rivestimenti ciclici

---

con  $\pi([x_0, \dots, x_n, y]) = [x_0, \dots, x_n]$  e  $f = \pi \circ i$ . Osserviamo che  $i$  è ben definita perché  $[0, \dots, 0, 1] \notin V(y^m - F)$ , infatti  $F(0, \dots, 0) = 0$  e  $1^m = 1$ , e che  $\pi$  è ben definita perché gli  $x_i$  non sono mai tutti nulli.

Vogliamo mostrare che  $f$  è il rivestimento  $m$ -ciclico di  $\mathbb{P}^n$  ramificato su  $F$ . Consideriamo le carte affini  $U_0$  su  $\mathbb{P}^n$  e  $U'_0$  su  $\mathbb{P}(1, \dots, 1, r)$ , dove abbiamo

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U_0) = k[x_0, \dots, x_n, x_0^{-1}]_0 = k\left[\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right],$$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, \dots, 1, r)}(U'_0) = k[x_0, \dots, x_n, y, x_0^{-1}]_0 = k\left[\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}, \frac{y}{x_0^r}\right].$$

Se consideriamo ora l'intersezione  $V(y^m - F) \cap U'_0$ , l'inclusione  $i$  induce un morfismo suriettivo di  $k$ -algebre

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, \dots, 1, r)}(U'_0) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, \dots, 1, r)}(V(y^m - F) \cap U'_0) \cong \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, \dots, 1, r)}(U'_0)}{(y^m - F)}.$$

Allora la varietà affine  $V(y^m - F) \cap U'_0$  ha come algebra delle funzioni regolari

$$\frac{k\left[\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}, \frac{y}{x_0^r}\right]}{(y^m - F)} = \frac{k\left[\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}, t_0\right]}{((t_0 \cdot x_0^r)^m - F)} = \frac{k\left[\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}, t_0\right]}{(x_0^{m \cdot r}(t_0^m - f_0))} = \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U_0)[t_0]}{(t_0^m - f_0)}.$$

Notiamo quindi che  $V(y^m - F) \cap U'_0 = Y_0$  dell'esempio precedente. Analogamente avremo  $V(y^m - F) \cap U'_i = Y_i$ , per  $1 \leq i \leq n$ . Ci siamo allora ricondotti esattamente all'esempio precedente e quindi  $f: V(y^m - F) \rightarrow \mathbb{P}^n$  è il rivestimento cercato.

Studiamo ora le proprietà principali dei rivestimenti ciclici.

**Proposizione 3.8.** Sia  $f: Y \rightarrow X$  il rivestimento  $m$ -ciclico di una varietà affine  $X$  ramificato sopra  $a \in \mathcal{O}_X(X)$ . Valgono allora le seguenti affermazioni:

1. Il morfismo  $f$  è étale di grado  $m$  su  $X \setminus D$ , con  $D = V_X(a)$ ;
2.  $f$  induce un isomorfismo tra  $D$  e  $E := f^{-1}(D)$ ;
3. Se  $X$  e  $D$  sono lisci, allora  $Y$  è liscio;
4. Se  $X$  è liscio e irriducibile e  $D \neq \emptyset$ , allora  $Y$  è irriducibile.

---

*Dimostrazione.* Per la definizione 3.4, il punto 1 segue quindi dalle Osservazioni 3.2, 3.3 e dalla Definizione 1.45.

Per il punto 2 possiamo mostrare che gli anelli coordinati sono isomorfi. Sappiamo intanto che  $k[D] = \mathcal{O}_X(X)/(a)$ , mentre  $k[E] = \mathcal{O}_Y(Y)/(t)$ , infatti dall'Osservazione 3.2 segue che  $t = 0$  definisce  $E$ . Osserviamo ora che

$$k[E] = \frac{\mathcal{O}_Y(Y)}{(t)} = \frac{\mathcal{O}_X(X)[t]}{(t^m - a, t)} = \frac{\mathcal{O}_X(X)[t]}{(a, t)} = \frac{\mathcal{O}_X(X)}{(a)} = k[D].$$

Equivalentemente si poteva osservare che  $f$  si restringe all'identità sulle coordinate di  $y \in E$  e costruire il morfismo inverso imponendo  $t = 0$ .

Continuiamo osservando che se  $D$  è liscio, allora anche  $E \cong D$  è liscio. Mostriamo ora che  $Y$  è liscio in un intorno di  $E$ . Considerando la topologia analitica su  $Y$  e su  $X$ . Sia  $p \in D^{\text{an}}$  un punto, poiché  $X$  è liscio, per la Proposizione 2.7 lo è anche  $X^{\text{an}}$ . Esiste quindi un intorno  $U^{\text{an}}$  di  $p$  in  $X^{\text{an}}$  nel quale  $D^{\text{an}} \cap U^{\text{an}}$  è definito localmente da  $g = 0$ , con  $g \in \mathcal{O}_{X^{\text{an}}, p}$ . Possiamo ora completare  $g$  a un sistema di coordinate locali di  $U^{\text{an}}$

$$x_1 = g, x_2, \dots, x_r \in \mathcal{O}_{X^{\text{an}}, p}.$$

Allora il rivestimento di  $U^{\text{an}}$  avrà

$$\mathcal{O}(f^{-1}(U^{\text{an}})) = \frac{k[x_1, \dots, x_r, t]}{(t^m - x_1)}$$

come algebra delle funzioni regolari e sarà quindi definito come  $V_{\mathbb{A}^{r+1}}(t^m - x_1)^{\text{an}}$ . Costruiamo ora la matrice Jacobiana di questa equazione,  $J = (-1, 0, \dots, 0, mt^{m-1})$ . Poiché  $J$  è sempre diversa da 0, e quindi ha sempre rango massimo,  $f^{-1}(U^{\text{an}})$  è liscio in  $Y^{\text{an}}$ . Ripetendo il ragionamento per ogni punto di  $D^{\text{an}}$  si ottiene un ricoprimento di aperti lisci di  $E^{\text{an}}$ . Inoltre, poiché  $f$  è étale su  $X \setminus D$ , concludiamo che  $Y \setminus E$  è un aperto liscio, quindi lo è anche  $Y^{\text{an}} \setminus E^{\text{an}}$ . Allora esiste un ricoprimento di aperti lisci di  $Y^{\text{an}}$ , che è quindi liscio. Questo dimostra la liscezza di  $Y$ .

Assumiamo ora che  $X$  sia liscio e irriducibile, supponiamo per assurdo che  $Y$  sia riducibile con componenti irriducibili  $Y_1$  e  $Y_2$ . Dato che  $f$  è piatto per l'Osservazione 3.5, dalla Proposizione 1.50 sappiamo che sia  $Y_1$  sia  $Y_2$  dominano  $X$ , inoltre, poiché  $f$  è anche chiuso,  $Y_1$  e  $Y_2$  suriettano su  $X$ . In particolare le fibre di  $D$  intersecano  $Y_1$  e  $Y_2$ . Ricaviamo quindi dal punto 2 che  $E \cong f^{-1}(D) \subseteq Y_1 \cap Y_2$  e quindi l'intersezione è non vuota. Ricaviamo ora da 3 che  $Y$  è liscio sopra  $X \setminus D_{\text{sing}}$ . Ma allora  $Y$  dovrebbe essere liscio su  $f^{-1}(D \setminus D_{\text{sing}}) \subseteq Y_1 \cap Y_2$ , che è assurdo perché

### 3. Rivestimenti ciclici

le intersezioni di componenti irriducibili non sono lisce. Osserviamo che  $D \setminus D_{\text{sing}}$  è non vuota perché l'insieme dei punti regolari su una varietà algebrica è un aperto denso, in particolare non vuoto [Liu02, Proposizione 4.2.24].  $\square$

**Osservazione 3.9.** Il Teorema 3.8 vale anche nel caso di varietà non affini. Infatti, i punti 1 e 3 sono proprietà locali, che quindi possono essere verificate direttamente sugli aperti affini. Per il punto 2, sappiamo che su ogni carta abbiamo un isomorfismo  $E_i \xrightarrow{f_i|_{E_i}} D_i$ . Poiché gli  $f_i|_{E_i}$  coincidono sulle intersezioni, possiamo costruire un morfismo inverso di  $f|_E$ , definendolo localmente sugli aperti affini come  $f_i|_{E_i}^{-1}$ , da cui segue che  $f|_E$  è un isomorfismo. Per il punto 4 infine, supponiamo per assurdo che  $Y$  sia riducibile, allora esistono chiusi propri tali che  $Y = Z_1 \cup Z_2$ . Poiché  $Y$  è coperto da aperti affini, avremo che  $Y_i = (Y_i \cap Z_1) \cup (Y_i \cap Z_2)$ , ma questi sono irriducibili per il teorema, quindi  $Y_i \subseteq Z_1$  o  $Y_i \subseteq Z_2$ . Se tutti gli  $Y_i$  sono contenuti nello stesso chiuso, allora anche  $Y$  lo è. Se invece due aperti sono contenuti in chiusi diversi, la loro intersezione dovrebbe essere allo stesso tempo contenuta in  $Z_1 \cap Z_2$  e aperta e densa sia in  $Z_1$  sia in  $Z_2$ , che è assurdo poiché l'intersezione è un chiuso strettamente contenuto in  $Z_1$  e in  $Z_2$ . In tutti i casi quindi  $Y$  è irriducibile.

**Osservazione 3.10.** La costruzione dei rivestimenti ciclici è funtoriale. Precisamente, sia  $\varphi: X' \rightarrow X$  un morfismo di varietà algebriche e  $f: Y \rightarrow X$  un rivestimento  $m$ -ciclico ramificato su  $V_X(a)$ , se  $f': Y' \rightarrow X'$  è il rivestimento ramificato su  $V_{X'}(\varphi^*(a)) = \varphi^{-1}(V_X(a))$ , allora abbiamo un diagramma cartesiano

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{\varphi'} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{\varphi} & X. \end{array}$$

Per 1.64, questo è vero se  $Y'$  è il prodotto fibrato  $X' \times_X Y$ . Calcoliamo allora

$$\mathcal{O}_{X'}(X') \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_Y(Y) = \mathcal{O}_{X'}(X') \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \frac{\mathcal{O}_X(X)[t]}{(t^m - a)}.$$

Poiché il prodotto tensore passa ai quozienti [Liu02, Corollario 1.1.13], questo prodotto vale

$$\frac{\mathcal{O}_{X'}(X')[t]}{(t^m - \varphi^*(a))} = \mathcal{O}_{Y'}(Y').$$

Quindi  $Y'$  è proprio il prodotto fibrato cercato.

**Osservazione 3.11.** Supponiamo ora che  $X$  e  $X'$  siano varietà affini,  $f: Y \rightarrow X$  un rivestimento ramificato sul chiuso  $D = V_X(a) \subseteq X$  e  $\varphi: X' \rightarrow X$  un morfismo dominante tale che  $\varphi^*(a) = a'^m$ , per qualche  $a' \in \mathcal{O}_{X'}(X')$ , allora esiste un morfismo  $g: X' \rightarrow Y$  tale che  $f \circ g = \varphi$ . Infatti, per l'Osservazione 3.10 il quadrato

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{\varphi'} & Y \\ f' \downarrow & \nearrow g & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{\varphi} & X. \end{array}$$

commuta, se quindi scegliamo una sezione  $s: X' \rightarrow Y'$  di  $f'$ , allora  $g = \varphi' \circ s$  soddisfa la condizione richiesta. Notiamo in particolare che  $f'$  ammette sempre esattamente  $m$  sezione. Infatti se andiamo a costruire il rivestimento ramificato su  $X'$  abbiamo

$$\mathcal{O}_{Y'}(Y') = \frac{\mathcal{O}_{X'}(X')[t]}{(t^m - a^m)} = \frac{\mathcal{O}_{X'}(X')[t]}{(t - a)(t - \zeta a) \cdots (t - \zeta^{m-1}a)} \cong \frac{\mathcal{O}_{X'}(X')[t]}{(t - a)} \times \cdots \times \frac{\mathcal{O}_{X'}(X')[t]}{(t - \zeta^{m-1}a)},$$

dove  $\zeta$  è una radice primitiva dell'unità [AM16, Proposizione 1.10]. Poiché

$$\frac{B[t]}{(t - b)} \cong B, \quad \text{per ogni } b \in B,$$

allora  $\mathcal{O}_{Y'}(Y') \cong \mathcal{O}_{X'}(X')^{\oplus m}$ . Questo significa che  $Y'$  è unione disgiunta di  $m$  copie di  $X'$ , quindi  $f'$  ha  $m$  sezioni, che corrispondono all'identità su una delle copie.

Inoltre, poiché  $f$  è finito e chiuso per l'Osservazione 3.5,  $g$  è dominante. Infatti, ragionando per assurdo, se  $\overline{g(X')} \subsetneq Y$ , e quindi ha codimensione almeno 1 in  $Y$ , allora  $f(\overline{g(X')})$  sarebbe un chiuso proprio di  $X$  che contiene  $f(g(X')) = \varphi(X')$ , che è assurdo perché  $\varphi$  è dominante.

**Osservazione 3.12.** Sia  $\mu_m \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  il gruppo delle radici  $m$ -esime dell'unità e  $f: T \rightarrow X$  un rivestimento ramificato. Allora  $\mu_m$  agisce su  $Y$  nel seguente modo: preso  $\zeta \in \mu_m$ , l'azione è data da

$$(x_1, \dots, x_n, t) \xrightarrow{\zeta} (x_1, \dots, x_n, \zeta t).$$

Equivalentemente, possiamo definire l'azione di  $\mu_m$  su  $\mathcal{O}_Y(Y)$  con

$$\zeta \cdot x_i = x_i, \quad \text{per } 1 \leq i \leq n,$$

### 3. Rivestimenti ciclici

---

$$\zeta \cdot t = \zeta^{-1}t.$$

Per l'Osservazione 1.58, il quoziente  $Y/\mu_m$  ha come algebra delle funzioni regolari  $\mathcal{O}_Y(Y)^{\mu_m}$ . Quozientando per questa azione allora si ha

$$Y/\mu_m = \operatorname{Specm}(\mathcal{O}_Y(Y)^{\mu_m}) = \operatorname{Specm}(\mathcal{O}_X(X)),$$

cioè  $Y/\mu_m \cong X$ .

# Capitolo 4

## L'esempio di Artin e Mumford

### 4.1 Quadriche in $\mathbb{P}^3$

Prima di iniziare lo studio dell'esempio di Artin e Mumford, definiamo alcune varietà algebriche sulle quali si basa il controesempio.

Sia  $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}^9$  lo spazio proiettivo che parametrizza le ipersuperfici quadriche in  $\mathbb{P}^3$ , sia  $G := G(2, 4)$  la Grassmanniana che parametrizza le rette in  $\mathbb{P}^3$  (e quindi i piani in  $\mathbb{A}^4$ ) e  $I := \{(S, l) \in \mathbb{P} \times G \mid l \subseteq S\}$  la relazione di incidenza in  $\mathbb{P}$ .

**Osservazione 4.1.**  $G$  è una 4-varietà proiettiva, liscia e razionale. Infatti ha dimensione  $(r+1)(n-r)$  con  $n=3$  e  $r=1$  ed è definita dall'equazione  $p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$  tramite l'*immersione di Plücker* in  $\mathbb{P}^5$ .  $G$  è quindi un'ipersuperficie quadrica liscia in  $\mathbb{P}^5$ . In generale, tutte le ipersuperfici quadriche lisce in  $\mathbb{P}^n$  sono razionali tramite una proiezione stereografica (come già citato nel Teorema 0.4), in questo caso però, possiamo dare una dimostrazione più costruttiva:

Consideriamo la base canonica  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  di  $\mathbb{C}^4$  e sia  $W_0 = \text{Span}\{e_3, e_4\}$ . Consideriamo ora i piani  $V$  trasversi a  $W_0$ , cioè quelli per cui si ha  $V \cap W_0 = \{0\}$  (e  $V \oplus W_0 = \mathbb{C}^4$ ). Se allora consideriamo la proiezione  $\pi: \mathbb{C}^4 \rightarrow W_0$  di nucleo  $\text{Span}\{e_1, e_2\}$ , restringendoci a  $V$  abbiamo un isomorfismo. Ogni piano  $V$  è generato dalle righe di

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{bmatrix},$$

consideriamo quindi la funzione  $\mathbb{A}^4 \ni (a, b, c, d) \mapsto \text{Span}\{(1, 0, a, b), (0, 1, c, d)\}$ , che è iniettiva e dominante. Infatti ogni scelta di parametri produce un piano diverso e l'immagine è l'aperto denso di  $G$  dato dalla carta affine  $U_{12}$ , cioè il complementare

#### 4. L'esempio di Artin e Mumford

---

dell'iperpiano definito da  $p_{12} = 0$ . Segue quindi che questa mappa è birazionale e che  $G$  è razionale.

Consideriamo adesso  $p: I \rightarrow \mathbb{P}$  e  $q: I \rightarrow G$  le mappe indotte dalle proiezioni sulla prima e seconda componente. Vale allora la seguente proposizione.

**Proposizione 4.2.** L'inclusione  $I \hookrightarrow \mathbb{P} \times G$  rende  $q: I \rightarrow G$  un fibrato proiettivo su  $G$  con fibre isomorfe a  $\mathbb{P}^6$ . In particolare  $I$  è una varietà liscia e irriducibile, di codimensione 3 in  $\mathbb{P} \times G$  e  $\dim(I) = 10$ .

**Osservazione 4.3.** In generale vale che, se  $\mathbb{P}$  parametrizza le ipersuperfici di grado  $d$  in  $\mathbb{P}^n$  e  $G$  i sottospazi di dimensione  $r$  in  $\mathbb{P}^n$ , allora  $\dim(\mathbb{P}) = \binom{n+d}{d} - 1$  e  $I$  ha codimensione  $\binom{r+d}{d}$  in  $\mathbb{P} \times G$ , cioè

$$\dim(I) = \dim(G) + \dim(\mathbb{P}) - \binom{r+d}{d}.$$

*Dimostrazione.* Mostriamo la proposizione nel caso generale, mostriamo cioè che  $I$  ha codimensione  $\binom{r+d}{d}$  in  $\mathbb{P} \times G$ .

Studiamo questo fatto sulle carte affini di  $G$  e consideriamo quindi un aperto  $V \cong \mathbb{A}^{(r+1)(n-r)}$  in  $G$ . Un sottospazio  $\Lambda \in V$  è generato dalle righe della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{0,r+1} & \cdots & a_{0,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1,n} \\ & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{r,r+1} & \cdots & a_{r,n} \end{pmatrix},$$

mentre un'ipersuperficie  $c = (c_\alpha)$ , con  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  e  $\sum_i \alpha_i = d$ , è definita dal polinomio

$$f_c = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}.$$

L'ipersuperficie contiene il sottospazio definito dalla matrice se e solo se

$$f_c \left( x_0, \dots, x_r, \sum_{0 \leq i \leq r} a_{i,r+1} x_i, \dots, \sum_{0 \leq i \leq r} a_{i,n} x_i \right) \equiv 0.$$

Notiamo che ora  $f_c$  è un polinomio in  $k[x_0, \dots, x_r]$ , dove vediamo  $(x_0, \dots, x_r)$  come i coefficienti di un vettore in  $\Lambda$ . Possiamo quindi riscrivere

$$f_c \left( x_0, \dots, x_r, \sum_{0 \leq i \leq r} a_{i,r+1} x_i, \dots, \sum_{0 \leq i \leq r} a_{i,n} x_i \right) = \sum_{\beta} F_{\beta} x^{\beta},$$

con  $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_r)$  e  $\sum_i \beta_i = d$ .

Con queste notazioni,  $I \cap (\mathbb{P} \times V)$  è definito in  $\mathbb{P} \times V$  dalle equazioni  $(F_\beta)_\beta$ , che sono lineari nelle coordinate su  $\mathbb{P}$  (cioè lineari in  $c_\alpha$ ) e sono esattamente  $\binom{r+d}{d}$ . Le equazioni sulle altre carte di  $G$  sono analoghe (a meno di riordinare le coordinate su  $\mathbb{P}^n$ ).

Osserviamo adesso che, per ogni  $\Lambda \in V$ , il sottoinsieme in  $\mathbb{P} \times \{\Lambda\}$  definito da queste equazioni è un sottospazio lineare di codimensione  $\binom{r+d}{d}$ . Infatti, senza perdita di generalità, assumiamo che  $\Lambda$  sia definito da  $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$  e  $f$  definisca l'ipersuperficie  $X$ , allora  $\Lambda \subseteq X$  se e solo se tutti i coefficienti dei monomi in  $x_0, \dots, x_r$  sono nulli. Questa condizione caratterizza proprio un sottospazio lineare (quindi liscio e irriducibile) di codimensione  $\binom{r+d}{d}$ , da cui la tesi.  $\square$

Siano ora  $x_0, \dots, x_3$  le coordinate su  $\mathbb{P}^3$ , allora ogni forma quadratica  $f \neq 0$  si può scrivere in modo unico come

$$f = \sum_{i,j=0}^3 a_{ij} x_i x_j, \quad \text{con} \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Il *rango* di  $f$  (e della quadrica corrispondente) sarà il rango della matrice simmetrica  $(a_{ij})$ , che è indipendente dalla scelta delle coordinate.

**Osservazione 4.4.** Sappiamo che se  $\text{rank}(f) = d$ , allora esistono coordinate su  $\mathbb{P}^3$  tali che  $f = \sum_{i=0}^{d-1} x_i^2$ . Notiamo che una quadrica è liscia se e solo se ha rango 4.

Per  $1 \leq i \leq 4$ , sia  $W_i \subseteq \mathbb{P}$  l'insieme delle quadriche di rango minore o uguale di  $i$ .

**Osservazione 4.5.** Ovviamente  $W_4 = \mathbb{P}$ , inoltre ogni  $W_i$  è chiuso in  $\mathbb{P}$  perché è definito dalle equazioni dei minori  $(i+1) \times (i+1)$  nella matrice  $(a_{ij})$ . Ricordiamo che le coordinate su  $\mathbb{P}$  sono proprio i coefficienti della matrice simmetrica  $(a_{ij})$  (a meno di una costante).

**Proposizione 4.6.** Con le notazioni precedenti, valgono le seguenti affermazioni:

1.  $W_1$  è irriducibile e liscia, con  $\dim(W_1) = 3$  e  $\deg(W_1) = 8$ ;
2.  $W_2$  è irriducibile con  $\dim(W_2) = 6$  e  $\deg(W_2) = 10$ ;

#### 4. L'esempio di Artin e Mumford

---

3.  $W_3$  è un'ipersuperficie irriducibile di  $\dim(W_3) = 8$  e  $\deg(W_3) = 4$ , liscia nei punti di  $W_3 \setminus W_2$ ;
4. Per ogni punto  $Q \in W_2 \setminus W_1$ , il cono tangente a  $W_3$  in  $Q$  è isomorfo all'ipersuperficie  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$  in  $\mathbb{A}^9$ .

*Dimostrazione.* Sia  $V$  lo spazio vettoriale dei polinomi lineari omogenei in quattro variabili. Una quadrica di rango 1 è un piano doppio, esiste quindi un isomorfismo  $\mathbb{P}(V) \rightarrow W_1$ , da cui abbiamo che  $W_1$  è irriducibile, liscia e  $\dim(W_1) = 3$ . Per calcolare il suo grado, consideriamo l'immersione di Veronese di grado 2,

$$\nu_2: \mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^9, \quad [a_0, \dots, a_3] \mapsto [a_i a_j]_{0 \leq i \leq j \leq 3}.$$

Notiamo che la sua immagine, a meno di un isomorfismo proiettivo che riscalda i coefficienti dei doppi prodotti, è esattamente la sottovarietà  $W_1$ . Poiché il grado dell'immagine dell'immersione di Veronese  $\nu_{n,d}$  è  $d^n$  [Har92, Esempio 18.13], abbiamo che il grado di  $W_1$  è  $2^3 = 8$ .

In modo analogo, una quadrica di rango  $\leq 2$  è unione di due piani in  $\mathbb{P}^3$ , quindi avremo una mappa suriettiva  $\varphi: \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V) \rightarrow W_2$ , con  $|\varphi^{-1}(Q)| = 2$  per  $Q$  generale in  $W_2$ , da cui segue che  $\dim(W_2) = \dim(\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V)) = 6$ .  $W_2$  è irriducibile perché immagine di una varietà irriducibile. Per calcolare il grado, consideriamo stavolta l'immersione di Segre

$$\sigma: \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^{15}, \quad ([a_0, \dots, a_3], [b_0, \dots, b_3]) \mapsto [a_i b_j]_{0 \leq i, j \leq 3},$$

che rappresenta lo sviluppo

$$\left( \sum_{i=0}^3 a_i x_i \right) \left( \sum_{j=0}^3 b_j x_j \right) = \sum_{i=0}^3 a_i b_i x_i^2 + \sum_{0 \leq i < j \leq 3} (a_i b_j + a_j b_i) x_i x_j,$$

e la proiezione lineare

$$\pi: \mathbb{P}^{15} \dashrightarrow \mathbb{P}^9, \quad [z_{ij}]_{0 \leq i, j \leq 3} \mapsto \left[ z_{ii} \quad 0 \leq i \leq 3, \quad \frac{z_{ij} + z_{ji}}{2} \quad 0 \leq i < j \leq 3 \right].$$

Abbiamo allora il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}^{15} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \pi \\ W_2 & \xhookrightarrow{i} & \mathbb{P} \end{array}$$

dove  $i$  è l'inclusione di  $W_2$  in  $\mathbb{P}$ . Il grado di  $W_2 \subseteq \mathbb{P}$  può essere ricavato usando la formula  $\deg(X) = \deg(f) \cdot \deg(Y)$ , valida per morfismi finiti e suriettivi di varietà proiettive irriducibili [Ful84, 1.4]. Nel nostro caso, il grado di  $\varphi$  è 2, mentre quello dell'immagine di  $\sigma$  è  $\binom{3+3}{3} = 20$  [Har92, Esempio 18.15], possiamo quindi concludere che  $\deg(W_2) = \frac{20}{2} = 10$ .

Osserviamo infine che  $W_3$  ha le proprietà richieste perché è il luogo di zeri dell'equazione di quarto grado  $\det(a_{ij}) = 0$ , che è un polinomio irriducibile.

Sia ora  $P$  un punto in  $W_3 \setminus W_2$ , possiamo scegliere un sistema di coordinate su  $\mathbb{P}^3$  tale che  $P$  sia definito dal polinomio  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ . Consideriamo la carta affine con  $a_{00} = 1$  e la traslazione

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11} = a_{11} - 1 \\ \tilde{a}_{22} = a_{22} - 1 \end{cases},$$

allora  $(a_{ij})$  diventa la matrice simmetrica

$$(\tilde{a}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ & 1 + \tilde{a}_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & & 1 + \tilde{a}_{22} & a_{23} \\ & & & a_{33} \end{pmatrix},$$

e  $P$  è definito dall'ideale  $\mathfrak{m}_P = (\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{22}, a_{12}, \dots, a_{33})$ .  $W_3$  è quindi generato da  $\det(\tilde{a}_{ij}) \in a_{33} + \mathfrak{m}_P^2$ . Questo implica che  $W_3$  è liscia in  $P$ , poiché la sua equazione ha un termine lineare.

Consideriamo infine  $Q \in W_2 \setminus W_1$  e scegliamo le coordinate di  $\mathbb{P}^3$  in modo che  $Q$  sia definito da  $x_0^2 + x_1^2$ . In modo analogo al punto precedente, poniamoci nella carta affine con  $a_{00} = 1$  e trasliamo con  $\tilde{a}_{11} = a_{11} - 1$ . A questo punto l'equazione di  $W_3$  sarà il determinante della nuova matrice simmetrica e apparterrà a  $(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + \mathfrak{m}_Q^3$ . Il cono tangente sarà quindi definito da  $a_{22}a_{33} - a_{23}^2 = 0$  in  $\mathbb{A}^9$ , che è isomorfo all'ipersuperficie definita da  $a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{23}^2 = 0$  con un cambio lineare di coordinate.  $\square$

**Osservazione 4.7.** Per trovare le dimensioni di  $W_i$ , è sufficiente considerare il numero di minori  $(i+1) \times (i+1)$  indipendenti, cioè la codimensione di  $W_i$  in  $\mathbb{P}$ . Per  $W_4$  è 0, per  $W_3$  è 1, per  $W_2$  è 3 e per  $W_1$  è 6. Per la simmetria della matrice infatti, è sufficiente considerare solo i minori che coinvolgono elementi adiacenti nella parte superiore.

#### 4. L'esempio di Artin e Mumford

---

Consideriamo ora la mappa  $p: I \rightarrow \mathbb{P}$ . Osserviamo che per ogni quadrica liscia  $H \subseteq \mathbb{P}^3$  esistono due famiglie di rette contenute in  $H$ , ognuna parametrizzata da un  $\mathbb{P}^1$ .

Per fare questo, fissiamo le coordinate di  $\mathbb{P}^3$  in modo  $H$  sia l'immagine dell'immersione di Segre

$$\iota: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3, \quad ([a_0, a_1], [b_0, b_1]) \mapsto [a_0b_0, a_0b_1, a_1b_0, a_1b_1],$$

allora abbiamo una famiglia di rette i cui elementi sono del tipo

$$L'_{[a_0, a_1]} = \iota(\{[a_0, a_1]\} \times \mathbb{P}^1), \quad \text{con equazioni} \quad \begin{aligned} a_1x_0 &= a_0x_2 \\ a_1x_1 &= a_0x_3 \end{aligned},$$

e una seconda famiglia con elementi del tipo

$$L''_{[b_0, b_1]} = \iota(\mathbb{P}^1 \times \{[b_0, b_1]\}), \quad \text{con equazioni} \quad \begin{aligned} b_1x_0 &= b_0x_1 \\ b_1x_2 &= b_0x_3 \end{aligned}.$$

Notiamo anche che, prese  $L'_{[a_0, a_1]}$  e  $L''_{[b_0, b_1]}$  rispettivamente nella prima e nella seconda famiglia, la loro intersezione è non vuota e vale

$$L'_{[a_0, a_1]} \cap L''_{[b_0, b_1]} = \{[a_0b_0, a_0b_1, a_1b_0, a_1b_1]\}.$$

Di conseguenza, abbiamo visto che le fibre di  $p$  sopra i punti di  $W_4 \setminus W_3$  sono composte da due curve irriducibili e isomorfe a  $\mathbb{P}^1$ . Queste curve sono disgiunte perché, se non lo fossero, un loro punto di intersezione sarebbe una retta appartenente a entrambe le famiglie. Ma questo è assurdo perché l'intersezione tra una qualsiasi retta della prima famiglia e una qualsiasi retta della seconda famiglia è un punto.

Studiamo ora le fibre di  $p$  su  $W_3 \setminus W_2$ . Sappiamo che una quadrica di rango 3,  $H \subseteq \mathbb{P}^3$ , è un cono proiettivo su una conica liscia  $C \subseteq \mathbb{P}^2$ . Poiché  $C \cong \mathbb{P}^1$ , segue chiaramente che  $p^{-1}(H) \cong \mathbb{P}^1$ .

**Osservazione 4.8.** Possiamo applicare l'Osservazione 3.11 al morfismo  $p$ . Notiamo infatti che  $p^*(\det(a_{ij}))$ , cioè il pullback dell'equazione che definisce  $W_3$ , ha molteplicità due. Questa molteplicità corrisponde al fatto che le due famiglie di rette giacenti sulle quadriche lisce si vanno a sovrapporre sulle quadriche di rango 3. Abbiamo allora che, se  $f: Y \rightarrow \mathbb{P}$  è il rivestimento doppio (cioè 2-ciclico) ramificato su  $W_3$ , esiste un morfismo  $g: I \rightarrow Y$  tale che  $f \circ g = p$ . Notiamo inoltre che per ogni  $y \in Y$ , con  $f(y) \notin W_2$ , la fibra  $g^{-1}(y)$  è isomorfa a  $\mathbb{P}^1$ . Infatti sappiamo che,

se  $f(y) \in W_4 \setminus W_3$ , allora  $f^{-1}(f(y))$  è composto da due punti, mentre  $p^{-1}(f(y))$  è unione disgiunta di due  $\mathbb{P}^1$ . La controimmagine  $g^{-1}(y)$  è in questo caso una delle due famiglie di rette. Intuitivamente, il rivestimento doppio  $Y$  distingue le due famiglie di rette su  $f(y)$ . D'altra parte,  $f$  è un isomorfismo su  $W_3$ , quindi si avrà  $g^{-1}(y) = p^{-1}(y) \cong \mathbb{P}^1$  per ogni  $y \in W_3 \setminus W_2$ .

## 4.2 Costruzione

Diamo intanto le seguenti definizioni preliminari:

**Definizione 4.9.** Fissiamo  $n, d \in \mathbb{N}$ , un *sistema lineare* in  $\mathbb{P}^n$  è un sottospazio proiettivo dello spazio che parametrizza le ipersuperfici di grado  $d$ , cioè un sottospazio del proiettivizzato di  $k[x_0, \dots, x_n]_d$ .

**Definizione 4.10.** Sia  $\Sigma$  un sistema lineare in  $\mathbb{P}^n$ .  $\Sigma$  si dice *spazio senza punti base* se

$$\bigcap_{H \in \Sigma} H = \emptyset,$$

cioè se l'insieme dei punti comuni a tutte le ipersuperfici parametrizzate da  $\Sigma$  è vuoto.

**Teorema 4.11** (Bertini). [Har77, Teorema 2.8.18] Sia  $X$  una varietà proiettiva irriducibile (o liscia) e  $\Sigma$  un sistema lineare di ipersuperfici in  $\mathbb{P}^n$  senza punti base con  $\dim(\Sigma) \geq 1$ , allora per un'ipersuperficie generale  $H \in \Sigma$ ,  $X \cap H$  è irriducibile (o liscia).

**Proposizione 4.12.** Consideriamo un sistema lineare generale  $\Pi \subseteq \mathbb{P}$  di dimensione 3. Valgono le seguenti affermazioni:

1.  $\Pi$  è un sistema lineare senza punti base;
2. L'intersezione  $S = \Pi \cap W_3$  è una superficie quartica irriducibile;
3. L'intersezione  $\Gamma = \Pi \cap W_2$  contiene 10 punti, mentre  $\Pi \cap W_1 = \emptyset$ ;
4.  $\Gamma$  è il luogo singolare di  $S$ , inoltre ogni punto  $P \in \Gamma$  è un nodo per  $S$  (cioè il cono tangente a  $S$  in  $P$  è un cono su una conica liscia in  $\mathbb{P}^2$ );
5. La controimmagine  $I' := p^{-1}(\Pi)$  è liscia, connessa e di dimensione 4, infine il morfismo  $\varphi: I' \rightarrow G$  indotto da  $q$  è birazionale.

#### 4. L'esempio di Artin e Mumford

---

*Dimostrazione.* Poiché il sistema lineare  $\mathbb{P}$  delle quadriche in  $\mathbb{P}^3$  è senza punti base, 4 quadriche generali hanno intersezione vuota. Infatti, una quadrica è una sottovarietà di dimensione 2 e intersecandola con altre tre quadriche generali si avrà un'intersezione di dimensione  $-1$ , cioè vuota. Segue quindi che  $\Pi$  è senza punti base, poiché è generato da 4 quadriche generali.

Dato che  $\Pi$  è generale di dimensione 3 e  $\dim(W_1) = 3$ , dovremmo avere che  $\dim(\Pi \cap W_1) = \dim(\Pi) + \dim(W_1) - \dim(\mathbb{P}) = -3 < 0$ , che significa che  $\Pi \cap W_1 = \emptyset$ . [Har77, Teorema 1.7.2]

Dal Teorema 4.11, segue che  $(\Pi \cap W_2)_{\text{sing}} \subseteq (W_2)_{\text{sing}}$  e  $(\Pi \cap W_3)_{\text{sing}} \subseteq (W_3)_{\text{sing}}$ . Essendo  $W_2$  generalmente liscio e di dimensione 6, per la definizione di grado segue che  $\Gamma := \Pi \cap W_2$  è un insieme di punti di cardinalità  $\deg(W_2) = 10$ . Poiché invece  $W_3$  è un'ipersuperficie quartica, liscia fuori da  $W_2$ , abbiamo che  $S := \Pi \cap W_3$  è una superficie quartica in  $\Pi \cong \mathbb{P}^3$ , irriducibile (sempre per 4.11) e con  $S_{\text{sing}} \subseteq \Gamma$ .

Proviamo ora la quarta affermazione. Consideriamo  $G' := G(4, 10)$  la Grassmanniana che parametrizza i sottospazi tridimensionali in  $\mathbb{P}$ , con  $\dim(G') = 4 \cdot 6 = 24$ . Sia ora  $Z \subseteq W_2 \times G'$  contenente i punti  $(P, \Sigma)$  tali che  $P \in \Sigma$  e con il cono tangente in  $P$   $TC_P(W_3 \cap \Sigma)$  non sia un cono su una conica liscia. Questo significa che  $TC_P(W_3 \cap \Sigma)$  è una quadrica di rango  $\leq 2$  in  $\mathbb{P}^3$ . Studiamo adesso la dimensione delle fibre della proiezione  $Z \rightarrow W_2$ .

Osserviamo che la fibra di un punto  $P \in W_2$  parametrizza i sottospazi vettoriali tridimensionali  $W$  di  $\mathbb{C}^9$  con la proprietà che, date tre forme lineari linearmente indipendenti su  $\mathbb{C}^9$ , le loro restrizioni a  $W$  siano linearmente dipendenti. Infatti, i sottospazi  $W$  rappresentano gli spazi tangenti  $T_P(\Sigma)$ , mentre le tre forme lineari rappresentano le restrizioni del differenziale dell'equazione che definisce  $W_3$  ai vettori che generano  $T_P(\Sigma)$ . Il fatto che le restrizioni a  $T_P(\Sigma)$  siano linearmente dipendenti implica che la matrice che definisce il cono tangente ha rango  $\leq 2$ .

Equivalentemente, osserviamo che  $W$  è un sottospazio di dimensione 3 contenuto nell'iperpiano generato da una combinazione lineare delle tre forme. Infatti, se  $l_1|_W, l_2|_W, l_3|_W$  sono linearmente dipendenti, esiste una combinazione lineare  $\lambda = a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3$  tale che  $\lambda|_W = 0$ . Ma allora  $W \subseteq \ker(\lambda)$ , cioè  $W$  appartiene ad un iperpiano  $H = \ker(\lambda)$ . Per trovare un elemento della fibra, sarà quindi necessario scegliere tre forme lineari che andranno a determinare l'iperpiano  $H$  (a meno di un multiplo scalare) e poi un suo sottospazio di dimensione 3, cioè un elemento di  $G(3, 8)$ . Di conseguenza la fibra avrà dimensione  $\leq 2 + \dim(G(3, 8)) = 2 + 15 = 17$  (abbiamo una disuguaglianza perché non sap-

priamo esattamente se tutti gli elementi di  $G(3, 8)$  danno il risultato voluto). Di conseguenza  $\dim(Z) \leq 17 + \dim(W_2) = 23$ . Poiché  $\dim(W_2 \times G') = 30$ , un elemento generale di  $G'$  non apparterrà a  $Z$ , provando così l'affermazione.

Osserviamo ora che, dal Teorema 1.68 nel caso  $\sigma = id$ , segue che, per  $\Pi$  generale, la controimmagine  $I' := p^{-1}(\Pi)$  è liscia e di dimensione  $\dim(I) + \dim(\Pi) - \dim(\mathbb{P}) = 4$ . Per mostrare che  $I'$  è connessa invece, riprendiamo la fattorizzazione  $I \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} \mathbb{P}$  vista in 4.8, dove  $f$  è il rivestimento a due fogli di  $\mathbb{P}$  ramificato su  $W_3$ . Poiché le fibre di  $g$  sono connesse, basta mostrare che  $Y' := f^{-1}(\Pi)$  è connessa. D'altra parte però, sfruttando l'osservazione 3.10, sappiamo che  $Y'$  è il rivestimento di  $\Pi$  rispetto a  $S$ . Poiché  $S$  è una varietà irriducibile, segue dal teorema 3.8 che  $Y'$  è irriducibile e quindi connessa.

Mostriamo ora la birazionalità. Sia  $L \in G$  una retta in  $\mathbb{P}^3$ , allora per 4.2 la fibra  $q^{-1}(L) \subseteq \mathbb{P} \times G$  è un sottospazio proiettivo lineare (e quindi di grado 1) di dimensione 6. Di conseguenza, per  $\Pi$  generale, la fibra di  $\varphi$  su  $L$ , ossia  $\Pi \cap q^{-1}(L)$ , è composta da un punto. In particolare  $\varphi$  è dominante, allora, per il Teorema 1.52, sappiamo che esiste un aperto denso  $U \subseteq G$  sul quale  $\varphi$  ha fibra finita. Poiché sia  $G$  sia  $I'$  sono lisci, si ha per 1.53 che  $\varphi$  è piatto su  $U$ . Allora il grado di  $\varphi$ , e quindi la cardinalità delle sue fibre, è costante su  $U$  [Har77, Corollario 3.9.10]. Poiché la fibra  $\varphi^{-1}(L)$  è composta da un solo punto, il grado di  $\varphi$  sarà 1. Applicando quindi l'Osservazione 1.36 possiamo concludere che  $\varphi$  è birazionale (ricordiamo che, se  $K \subseteq L$  è un'estensione di campi con  $[L : K] = 1$ , cioè  $L$  è uno spazio vettoriale di dimensione 1 su  $K$ , allora  $L = K$ ).  $\square$

**Osservazione 4.13.** La superficie  $S \subseteq \Pi$  è un *simmetroide quartico*, cioè esistono forme lineari  $l_{i,j}$  su  $\Pi$ , con  $1 \leq i, j \leq 4$  e  $l_{i,j} = l_{j,i}$ , tali che  $S$  è definito dal determinante della matrice  $(l_{i,j})$ . Infatti, siano  $h_1, \dots, h_4$  generatori del sistema lineare  $\Pi$ , allora poniamo delle coordinate  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$  su  $\Pi$  tali che la quadrica corrispondente al punto  $(\lambda_1, \dots, \lambda_4)$  sia definita da  $\sum_i \lambda_i h_i$ . Allora, se scriviamo  $h_k = \sum_{i,j} a_{i,j}^{(k)} x_i x_j$ , possiamo costruire  $l_{i,j} = \sum_{k=1}^4 \lambda_k a_{i,j}^{(k)}$ . La costruzione è corretta perché il punto  $(\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \Pi$ , corrisponde in  $\mathbb{P}$  a

$$h = \sum_{k=1}^4 \lambda_k \sum_{i,j} a_{i,j}^{(k)} x_i x_j = \sum_{i,j} \left( \sum_{k=1}^4 \lambda_k a_{i,j}^{(k)} \right) x_i x_j = \sum_{i,j} l_{i,j} x_i x_j$$

Se quindi  $h \in W_3$ , allora  $\det(l_{i,j}) = 0$ , come richiesto.

Consideriamo ancora la fattorizzazione  $I \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} \mathbb{P}$  di  $p$  e i morfismi indotti  $f': Y' \rightarrow \Pi$  e  $g': I' \rightarrow Y'$ , con  $Y' = f^{-1}(\Pi)$ . Abbiamo già osservato che  $f'$  è

#### 4. L'esempio di Artin e Mumford

---

il rivestimento a due fogli di  $\Pi$  ramificato sulla quartica  $S$  e che  $S$  e  $Y'$  sono irriducibili. Inoltre poiché  $S \setminus \Gamma$  è liscia, abbiamo che anche  $Y' \setminus f'^{-1}(\Gamma)$  lo è.

**Lemma 4.14.** Con le notazioni precedenti, ogni  $P \in f'^{-1}(\Gamma)$  è un nodo di  $Y'$ , cioè il cono tangente a  $Y'$  in  $P$  è un cono su una quadrica liscia in  $\mathbb{P}^3$ .

*Dimostrazione.* Segue dalla definizione di rivestimento ramificato che possiamo considerare un intorno aperto affine  $U \cong \mathbb{A}^3$  di  $Q = f'(P)$ . Avremo poi  $u \in \mathcal{O}_\Pi(U)$  che definisce  $S$  su  $U$  e  $\mathcal{O}(f^{-1}(U)) \cong \mathcal{O}_\Pi(U)[y]/(y^2 - u)$ . Dalla Proposizione 4.12 sappiamo che  $Q$  è un nodo di  $S$ , avremo cioè  $\text{mult}_Q(S) = 2$  e il cono tangente a  $S$  in  $Q$  sarà definito da  $h \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^3)$ , dove assumiamo  $Q = (0, 0, 0)$  e  $h$  parte quadratica di  $u$ . Abbiamo allora che

$$f^{-1}(U) = \text{Specm} \frac{\mathcal{O}_\Pi(U)[y]}{(y^2 - u)} \cong \text{Specm} \frac{\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, y]}{(y^2 - u)} = V_{\mathbb{A}^4}(y^2 - u(x_1, x_2, x_3)).$$

Concludiamo che il cono tangente a  $Y'$  in  $P$  sarà dato da  $y^2 - h \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^3)$ . Poiché  $y^2 - h$  è omogeneo,  $V_{\mathbb{A}^4}(y^2 - h)$  è un cono che, se proiettivizzato, da una quadrica non degenera in  $\mathbb{P}^3$ . Infatti  $h$  è non degenera e quindi il rango della matrice associata a  $y^2 - h$  è massimo. Segue allora che  $P$  è un nodo di  $Y'$ .  $\square$

Possiamo quindi concludere che  $Y'$  ha esattamente 10 punti singolari e sono tutti nodi. Consideriamo quindi  $V \rightarrow Y'$  il blow-up dei 10 nodi. Per costruzione, avremo un isomorfismo su  $Y'_0$ , l'insieme dei punti lisci di  $Y'$ . Sia quindi  $E$  il divisore eccezionale in  $V$ . Esso sarà unione disgiunta di 10 componenti, ciascuna isomorfa al proiettivizzato del cono tangente del corrispondente punto in  $Y'$ , cioè una quadrica liscia in  $\mathbb{P}^3$ , e quindi isomorfa a  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Mostriamo ora che i punti di  $E$  sono lisci in  $Y'$ . Per fare ciò, possiamo costruire esplicitamente il blow-up di un nodo  $P \in Y'$ . Lavoriamo in una carta affine  $U \cong \mathbb{A}^4$  di  $Y'$ , con coordinate tali che  $P = (0, 0, 0, 0)$  e  $Y'$  sia localmente definito dal cono tangente  $T = V_{\mathbb{A}^4}(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$ . Ricordiamo che il blow-up di  $\mathbb{A}^4$  è

$$\tilde{\mathbb{A}}^4 = \{(x, [t]) \in \mathbb{A}^4 \times \mathbb{P}^3 \mid x \in [t]\},$$

mentre  $\tilde{T} = \overline{\pi^{-1}(T \setminus \{P\})}$ , dove  $\pi: \tilde{\mathbb{A}}^4 \rightarrow \mathbb{A}^4$  è la mappa del blow-up. Siano  $t_1, \dots, t_4$  le coordinate su  $\mathbb{P}^3$  e consideriamo una carta affine di  $\tilde{\mathbb{A}}^4$ . Senza perdita di generalità usiamo  $U_4$  e assumiamo  $t_4 = 1$ , abbiamo allora  $x_i = \frac{t_i}{1}x_4$  e possiamo riscrivere l'equazione di  $T$  come

$$(t_1x_4)^2 + (t_2x_4)^2 + (t_3x_4)^2 + x_4^2 = x_4^2(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + 1) = 0.$$

In  $\pi^{-1}(T \setminus \{P\})$  avremo anche  $x_4 \neq 0$  e quindi l'equazione diventa  $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + 1 = 0$ . Prendendone la chiusura, l'equazione resta invariata, ma aggiungiamo i punti con  $x_4 = 0$ , quindi

$$\tilde{T} \cong \{(t_1, t_2, t_3, x_4) \mid t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + 1 = 0\},$$

che è liscia. Ripetendo per ogni nodo si ottiene il risultato. Poiché  $V \setminus E$  è liscio, in quanto isomorfo a  $Y'_0$ , allora tutti i punti di  $V$  sono lisci.

La varietà proiettiva tridimensionale liscia  $V$  è la *varietà di Artin-Mumford*.

**Teorema 4.15.** Con le notazioni precedenti, la varietà  $V$  è unirazionale.

*Dimostrazione.* Poiché  $V$  e  $Y'$  sono birazionali, è sufficiente mostrare che  $Y'$  è unirazionale. Abbiamo già mostrato nel Teorema 4.12 che  $I'$  e  $G$  sono birazionali, poiché  $G$  è razionale per l'Osservazione 4.1, segue che anche  $I'$  lo è. Osservando infine che il morfismo  $g': I' \rightarrow Y'$  è dominante per l'Osservazione 3.11, abbiamo l'unirazionalità di  $Y'$ .  $\square$

Enunciamo ora un ultimo lemma prima di dimostrare il risultato principale di questa tesi.

**Lemma 4.16.** [Bea16, Lemma 4] Sia  $\Sigma$  un sistema lineare di ipersuperfici di grado  $d \geq 2$  in  $\mathbb{P}^n$  senza punti base. Se  $\mathcal{H} \subseteq \Sigma \times \mathbb{P}^n$  è l'ipersuperficie universale in  $\Sigma$ , cioè l'insieme

$$\mathcal{H} = \{(s, x) \in \Sigma \times \mathbb{P}^n \mid x \in s\},$$

allora la mappa  $p: \mathcal{H} \rightarrow \Sigma$  indotta dalla proiezione sulla prima componente non ha sezioni razionali.

**Teorema 4.17.** La varietà  $V$  non è stabilmente razionale.

*Dimostrazione. Parte 1.* Consideriamo il morfismo  $\psi: g'^{-1}(Y'_0) \rightarrow Y'_0$  indotto da  $g'$ . Abbiamo visto nell'Osservazione 4.8 che le fibre di  $\psi$  sono isomorfe a  $\mathbb{P}^1$ . Mostriamo ora che  $\psi$  non ha sezioni razionali. Ricordiamo intanto che, per l'Osservazione 3.12, abbiamo un'azione di  $\mu_2$  su  $Y'$  con  $Y'/\mu_2 \cong \Pi$ . Sia  $\sigma: Y' \rightarrow Y'$  l'automorfismo dato dall'azione di  $-1$ , cioè  $\sigma$  scambia le fibre di  $f'$  sopra  $\Pi \setminus S$ .

Supponiamo per assurdo che  $\psi$  abbia una sezione razionale  $\varphi$  definita su un aperto  $U \subseteq Y'_0$ . A meno di restringerci a un aperto più piccolo possiamo assumere che  $f'(U) \subseteq \Pi \setminus S$  e che  $\sigma(U) \subseteq U$ . Per ogni  $y \in U$ , possiamo scrivere  $\varphi(y) = (f'(y), L_y)$ , dove  $L_y$  è una retta contenuta nella quadrica  $f'(y)$ . Osserviamo che

#### 4. L'esempio di Artin e Mumford

---

$L_{\sigma(y)}$  è ancora contenuta nella quadrica  $f'(y)$  ma appartiene alla seconda famiglia di rette. Di conseguenza  $L_y \cap L_{\sigma(y)} \neq \emptyset$  ed è composta da un solo punto. Abbiamo quindi che la mappa

$$\gamma: U \rightarrow \mathbb{P}^3, \quad y \mapsto L_y \cap L_{\sigma(y)}$$

è un morfismo tale che  $\gamma(y) = \gamma(\sigma(y))$ . Poiché  $\Pi \cong Y'/\mu_2$ , possiamo allora costruire una mappa razionale  $\Pi \dashrightarrow \mathbb{P}^3$  che manda  $Q = f'(y)$  in  $L_y \cap L_{\sigma(y)}$ , cioè un punto che giace sulla quadrica  $Q$ . Ma questo è assurdo per il Lemma 4.16, quindi  $\psi$  non può avere sezioni razionali.

*Parte 2.* Vogliamo ora mostrare che  $H^3(V_0^{\text{an}}, \mathbb{Z})_{\text{tors}} \neq 0$ . La dimostrazione di questo passaggio usa strumenti molto avanzati, avremo quindi bisogno di saltare qualche passaggio. Per un riferimento più preciso, si veda [Bea16, Teorema 6].

Consideriamo il gruppo di Brauer  $\text{Br}(Y'_0)$ , che corrisponde all'insieme delle varietà di Brauer-Severi su  $Y'_0$  (che possiamo pensare come l'insieme delle fibrazioni proiettive su  $Y'_0$  a meno di isomorfismo). Un elemento  $\alpha \in \text{Br}(Y'_0)$  è non nullo se e solo se la fibrazione corrispondente non ammette sezioni razionali. Segue allora che  $\psi$  del punto precedente è un elemento non nullo in  $\text{Br}(Y'_0)$ . Vogliamo ora mostrare che la mappa della prima classe di Chern  $\text{Pic}(Y_0^{\text{an}}) \xrightarrow{c_0^1} H^2(Y_0^{\text{an}}, \mathbb{Z})$  è suriettiva. In questo caso, poiché  $Y'_0$  è liscio, esiste un teorema che garantisce un isomorfismo  $\text{Br}(Y'_0) \cong H^3(Y_0^{\text{an}}, \mathbb{Z})_{\text{tors}}$ . Avremo quindi  $H^3(Y_0^{\text{an}}, \mathbb{Z})_{\text{tors}} \neq 0$ .

Ricordiamo intanto che  $Y'_0$  è isomorfo all'aperto  $V_0 = V \setminus E$ . Consideriamo le successioni esatte lunghe indotte dalle successioni esponenziali per  $V$  e  $V_0$ .

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(V^{\text{an}}, \mathcal{O}_{V^{\text{an}}}) & \longrightarrow & H^1(V^{\text{an}}, \mathcal{O}_{V^{\text{an}}}^*) & \xrightarrow{c^1} & H^2(V^{\text{an}}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(V^{\text{an}}, \mathcal{O}_{V^{\text{an}}}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^1(V_0^{\text{an}}, \mathcal{O}_{V_0^{\text{an}}}) & \longrightarrow & H^1(V_0^{\text{an}}, \mathcal{O}_{V_0^{\text{an}}}^*) & \xrightarrow{c_0^1} & H^2(V_0^{\text{an}}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(V_0^{\text{an}}, \mathcal{O}_{V_0^{\text{an}}}), \end{array}$$

dove le mappe verticali sono indotte dall'inclusione  $V_0 \hookrightarrow V$ . Per il Teorema 2.11,  $H^1(V^{\text{an}}, \mathcal{O}_{V^{\text{an}}}) = 0 = H^2(V^{\text{an}}, \mathcal{O}_{V^{\text{an}}})$ , che implica che  $c^1$  è un isomorfismo. Poiché  $H^1(V^{\text{an}}, \mathcal{O}_{V^{\text{an}}}^*) \cong \text{Pic}(V^{\text{an}})$ , possiamo equivalentemente considerare il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} \text{Pic}(V) & \xrightarrow{\sim_a} & \text{Pic}(V^{\text{an}}) & \xrightarrow{\sim_{c^1}} & H^2(V^{\text{an}}, \mathbb{Z}) \\ b \downarrow & & \downarrow & & \downarrow e \\ \text{Pic}(V_0) & \longrightarrow & \text{Pic}(V_0^{\text{an}}) & \xrightarrow{c_0^1} & H^2(V_0^{\text{an}}, \mathbb{Z}), \end{array}$$

dove  $a$  è un isomorfismo per GAGA e  $b$  è suriettiva perché  $V_0$  è un aperto denso della varietà liscia e irriducibile  $V$  [Liu02, Lemma 10.4.16]. Per mostrare che  $c_0^1$  è suriettiva, è quindi sufficiente che  $e$  lo sia.

Consideriamo allora la successione esatta lunga in coomologia per la coppia  $(V^{\text{an}}, V_0^{\text{an}})$ , secondo il Teorema 2.20:

$$H^2(V^{\text{an}}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{e} H^2(V_0^{\text{an}}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(E^{\text{an}}, \mathbb{Z}).$$

Sappiamo che  $E$  è unione disgiunta di varietà isomorfe a  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Poiché  $H^1(\mathbb{P}^{1^{\text{an}}}, \mathbb{Z}) = 0$ , usando la formula di Künneth (Teorema 2.16) si ha che  $H^1(E^{\text{an}}, \mathbb{Z}) = 0$ . Di conseguenza la mappa  $e$  è suriettiva.

*Parte 3.* Mostriamo infine che  $H^3(V^{\text{an}}, \mathbb{Z})_{\text{tors}} \neq 0$ . Potremo quindi applicare il Corollario 2.22 per concludere che  $V$  non è stabilmente razionale.

Abbiamo appena visto che  $H^3(V_0^{\text{an}}, \mathbb{Z})_{\text{tors}} \neq 0$ . Consideriamo ancora la successione esatta lunga in coomologia per la coppia  $(V^{\text{an}}, V_0^{\text{an}})$ ,

$$H^1(E^{\text{an}}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(V^{\text{an}}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i} H^3(V_0^{\text{an}}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{j} H^2(E^{\text{an}}, \mathbb{Z}).$$

Ricordando che  $H^1(E^{\text{an}}, \mathbb{Z}) = 0$  e che  $E$  è formato da 10 componenti isomorfe a  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , abbiamo che

$$H^2(E^{\text{an}}, \mathbb{Z}) \cong H^2(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)^{\oplus 10} \cong \mathbb{Z}^{20},$$

dove abbiamo usato ancora la formula di Künneth nell'ultimo passaggio. In particolare, vale  $H^2(E^{\text{an}}, \mathbb{Z})_{\text{tors}} = 0$  e quindi  $H^3(V_0^{\text{an}}, \mathbb{Z})_{\text{tors}} \subseteq \ker(j)$ . Poiché  $i$  è iniettiva, allora

$$H^3(V^{\text{an}}, \mathbb{Z})_{\text{tors}} \cong H^3(V_0^{\text{an}}, \mathbb{Z})_{\text{tors}} \neq 0.$$

Questo conclude la dimostrazione. □



# Bibliografia

- [AKMWo02] Dan Abramovich, Kalle Karu, Kenji Matsuki, and Jarosław Włodarczyk. Torification and factorization of birational maps. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(3):531–572, 2002.
- [AM72] M. Artin and D. Mumford. Some elementary examples of unirational varieties which are not rational. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 25:75–95, 1972.
- [AM16] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Series in Mathematics. Westview Press, Boulder, CO, economy edition, 2016.
- [BCTSSD85] Arnaud Beauville, Jean-Louis Colliot-Thélène, Jean-Jacques Sansuc, and Peter Swinnerton-Dyer. Variétés stablement rationnelles non rationnelles. *Ann. of Math. (2)*, 121(2):283–318, 1985.
- [Bea16] Arnaud Beauville. The Lüroth problem. In *Rationality problems in algebraic geometry*, volume 2172 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–27. Springer, Cham, 2016.
- [CE96] G. Castelnuovo and F. Enriques. Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques. *Math. Ann.*, 48(3):241–316, 1896.
- [CG72] C. Herbert Clemens and Phillip A. Griffiths. The intermediate Jacobian of the cubic threefold. *Ann. of Math. (2)*, 95:281–356, 1972.
- [Deb01] Olivier Debarre. *Higher-dimensional algebraic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

## BIBLIOGRAFIA

---

- [Fan08] G. Fano. Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli. *Torino Atti*, 43:973–984, 1908.
- [Fan47] Gino Fano. Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche. *Pont. Acad. Sci. Comment.*, 11:635–720, 1947.
- [Ful84] William Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [GR09] Robert C. Gunning and Hugo Rossi. *Analytic functions of several complex variables*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2009. Reprint of the 1965 original.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume No. 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [Har92] Joe Harris. *Algebraic geometry*, volume 133 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1992. A first course.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [IM71] V. A. Iskovskih and Ju.Ĭ. Manin. Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem. *Mat. Sb. (N.S.)*, 86(128):140–166, 1971.
- [Kat88] Toshiyuki Katsura. Theorem of Lüroth and related topics. In *Algebraic Geometry Seminar (Singapore, 1987)*, pages 41–52. World Sci. Publishing, Singapore, 1988.
- [Kol02] János Kollár. Unirationality of cubic hypersurfaces. *J. Inst. Math. Jussieu*, 1(3):467–476, 2002.
- [L75] J. Lüroth. Beweis eines Satzes über rationale Curven. *Math. Ann.*, 9(2):163–165, 1875.
- [Liu02] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press,

- Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Ern , Oxford Science Publications.
- [Mil63] J. Milnor. *Morse theory*, volume No. 51 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells.
- [Mun84] James R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.
- [Mus17] Mircea Musta . Math 732. Rationality of algebraic varieties, 2017. Unpublished lecture notes, [https://websites.umich.edu/~mmustata/lectures\\_rationality.html](https://websites.umich.edu/~mmustata/lectures_rationality.html).
- [Nee07] Amnon Neeman. *Algebraic and analytic geometry*, volume 345 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [RYYY23] Sheng Rao, Song Yang, Xiangdong Yang, and Xun Yu. Hodge cohomology on blow-ups along subvarieties. *Math. Nachr.*, 296(7):3003–3025, 2023.
- [Seg42] B. Segre. *The Non-singular Cubic Surfaces*. Oxford University Press, Oxford, 1942.
- [Seg60] Beniamino Segre. Variazione continua ed omotopia in geometria algebrica. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 50:149–186, 1960.
- [Ser56] Jean-Pierre Serre. Géométrie alg brique et géométrie analytique. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 6:1–42, 1955/56.
- [Sha13] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 1*. Springer, Heidelberg, third edition, 2013. Varieties in projective space.
- [Vak25] Ravi Vakil. *The rising sea—foundations of algebraic geometry*. Princeton University Press, Princeton, NJ, [2025]  2025.
- [Voi02] Claire Voisin. *Th orie de Hodge et géométrie alg brique complexe*, volume 10 of *Cours Sp cialis s [Specialized Courses]*. Société Math matique de France, Paris, 2002.

## BIBLIOGRAFIA

---

- [Zar58]      Oscar Zariski. On Castelnuovo's criterion of rationality  $p_a = P_2 = 0$  of an algebraic surface. *Illinois J. Math.*, 2:303–315, 1958.