

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea (Triennale) in Matematica

RAPPRESENTAZIONI DI QUIVER
E LA
TEORIA DI AUSLANDER-REITEN

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Alessandro D'Andrea

Presentato da:
Riccardo Nisidi

Anno Accademico 2024-2025

Indice

Introduzione	3
1 Nozioni preliminari	5
1.1 Rivestimenti proiettivi e involucri iniettivi	5
1.2 Moduli indecomponibili e algebre basiche	14
1.3 L'algebra di un quiver	20
1.4 Algebre ereditarie	34
1.5 Estensioni di moduli	40
2 La teoria di Auslander-Reiten	47
2.1 I funtori di traslazione	47
2.2 La formula di Auslander-Reiten	57
2.3 Morfismi irriducibili e successioni quasi-split	61
2.4 Esistenza delle successioni quasi-split	72
3 Il quiver di Auslander-Reiten	81
3.1 Morfismi irriducibili e quiver	81
3.2 Esempi e metodi costruttivi	88
3.3 Algebre di tipo finito	96
Bibliografia	105

Introduzione

È noto, nella teoria degli spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, che ogni sottospazio di uno spazio vettoriale di dimensione finita possiede un complemento. Con una terminologia più sofisticata si dice che i $\mathbb{K}$ -moduli godono di semisemplicità. Gli anelli semisemplici sono descritti dalla celebre classificazione di Wedderburn e Artin e costituiscono la parte meno ricca della teoria delle rappresentazioni, almeno dal punto di vista delle estensioni.

Nella tesi tratto inizialmente le algebre associate a grafi orientati, detti quiver, e ne studio le rappresentazioni. In seguito, a partire da una qualsiasi algebra A , costruirò un quiver Q_A e dimosterò che la classificazione delle rappresentazioni di A può essere ricondotta allo studio delle rappresentazioni dell'algebra associata a Q_A . Successivamente espongo la teoria di Auslander-Reiten che codifica gran parte delle informazioni delle rappresentazioni di un'algebra non semisemplice in un quiver detto appunto quiver di Auslander-Reiten. Calolerò poi tale grafo in alcuni esempi facili e utilizzerò la teoria sviluppata per esporre la dimostrazione di Auslander della congettura di Brauer-Thrall che lega la finitezza di un'algebra alla struttura del suo quiver di Auslander-Reiten.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

In questo capitolo introduciamo alcune nozioni fondamentali della teoria dei moduli su anelli. Si parte dalle definizioni di moduli proiettivi e iniettivi per poi passare a rivestimenti proiettivi e involuppi iniettivi, concludendo con la classificazione dei moduli semplici, proiettivi e iniettivi indecomponibili di un' algebra di dimensione finita. In seguito vedremo qualche esempio di tali moduli nel caso dell'algebra dei cammini di un quiver. Proseguiremo poi con lo studio delle algebre basiche e connesse in cui dimostreremo che, sotto opportune ipotesi, sono tutte isomorfe a quozienti di algebre di cammini di quiver. Infine discuteremo delle estensioni di moduli che saranno uno strumento fondamentale per i capitoli successivi. Tutti gli anelli (e quindi anche le algebre) saranno sempre considerati unitari e associativi.

In tutto il capitolo R sarà un anello e $R\text{-mod}$ sarà la categoria degli R -moduli sinistri finitamente generati.

1.1 Rivestimenti proiettivi e involuppi iniettivi

In questo paragrafo definiremo che cos'è un rivestimento proiettivo di un R -modulo. Mostriamo inoltre come costruire involuppi iniettivi di moduli

a partire dai rivestimenti proiettivi. I rivestimenti proiettivi saranno fondamentali in seguito per la classificazione dei moduli proiettivi indecomponibili di un'algebra di dimensione finita. L'approccio che seguiremo è essenzialmente quello di [3, Cap. 1].

Definizione 1.1.1. Un R -modulo P si dice proiettivo se $\forall M, N \in R\text{-mod}$, $\forall f: P \rightarrow N$ e $\forall g: M \rightarrow N$ suriettivo $\exists h: P \rightarrow M$ tale che $g \circ h = f$. Un R -modulo I si dice iniettivo se $\forall M, N \in R\text{-mod}$, $\forall f: M \rightarrow I$ e $\forall g: M \rightarrow N$ iniettivo $\exists h: N \rightarrow I$ tale che $g \circ h = f$.

La definizione è equivalente alla commutatività dei seguenti diagrammi:

$$\begin{array}{ccc}
 & P & \\
 \swarrow h & \downarrow f & \\
 M & \xrightarrow{g} & N
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 M & \xleftarrow{g} & N \\
 \downarrow f & \swarrow h & \\
 I & &
 \end{array}$$

(Caso proiettivo) (Caso iniettivo)

Osservazione 1.1.1. Osserviamo che $P \in R\text{-mod}$ è proiettivo se e solo se il funtore $\text{Hom}_R(P, -): R\text{-mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-mod}$ è esatto a destra e quindi esatto. Analogamente si ha che $I \in R\text{-mod}$ è iniettivo se e solo se il funtore $\text{Hom}_R(-, I): R\text{-mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-mod}$ è esatto a destra e quindi esatto. In altre parole una successione esatta $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ in cui L è iniettivo oppure N è proiettivo deve essere necessariamente split. È facile mostrare che i moduli proiettivi sono tutti e soli gli addendi diretti di moduli liberi.

Ogni insieme di generatori $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ di un R -modulo M induce un naturale morfismo suriettivo $\varphi: R^k \rightarrow M$. Poiché R^k è libero e quindi proiettivo, ha senso chiederci se esiste un modulo proiettivo che è minimale (in un modo ancora da definire) rispetto a tale proprietà.

Definizione 1.1.2. Siano $M, N \in R\text{-mod}$. Un morfismo $f: M \rightarrow N$ è detto minimale a destra se $\forall h \in \text{End}_R(M)$ tale che $f \circ h = f \Rightarrow h$ è un isomorfismo.

Analogamente si definisce un morfismo minimale a sinistra se $\forall h \in \text{End}_R(N)$ tale che $h \circ f = f \Rightarrow h$ è un isomorfismo.

Un morfismo $f: M \rightarrow N$ suriettivo è detto essenzialmente suriettivo se $\forall g: X \rightarrow M$ tale che $f \circ g$ suriettivo $\Rightarrow g$ suriettivo. Se M è proiettivo allora è detto rivestimento proiettivo di N e f è la mappa di rivestimento.

Esempio 1.1.1. Ogni applicazione lineare iniettiva $f: V \rightarrow W$ tra $\mathbb{K}$ -spazi vettoriali di dimensione finita è minimale a destra. Infatti se $h \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ tale che $f = f \circ h \Rightarrow h$ è iniettivo $\Rightarrow h$ è un isomorfismo. Analogamente si dimostra che le applicazioni lineari suriettive sono minimali a sinistra.

Osservazione 1.1.2. Per un anello arbitrario R l'esistenza di un rivestimento proiettivo per un R -modulo non è sempre garantita. Tuttavia per gli anelli artiniani (e quindi le $\mathbb{K}$ -algebre di dimensione finita) dimostreremo più avanti che questo è vero.

Il rivestimento proiettivo di un modulo M , quando esiste, è sottomodulo di ogni altro R -modulo proiettivo P tale per cui esiste un morfismo suriettivo $P \rightarrow M$. Vale infatti la seguente proposizione:

Proposizione 1.1.1. *Sia $M \in R\text{-mod}$. Supponiamo che esista $\pi: P(M) \rightarrow M$ rivestimento proiettivo e $g: P \rightarrow M$ suriettivo con $P \in R\text{-mod}$ proiettivo, allora $P(M)$ è isomorfo ad un addendo diretto di P .*

Dimostrazione. Consideriamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \swarrow h & \downarrow g & \\ P(M) & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

L'esistenza di $h: P(M) \rightarrow P$ segue dal fatto che P è proiettivo e π è suriettivo. Inoltre poiché π è un rivestimento proiettivo h deve essere suriettivo.

Otteniamo quindi la seguente successione esatta:

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(h) \xrightarrow{i} P \xrightarrow{h} P(M) \longrightarrow 0$$

ma allora tale successione è split, da cui la tesi. $\square$

Come corollario di questa proposizione otteniamo l'unicità del rivestimento proiettivo.

Corollario 1.1.1. *Sia $M \in R\text{-mod}$ e siano $\pi: P \rightarrow M$, $\pi': P' \rightarrow M$ rivestimenti proiettivi di M . Allora esiste un isomorfismo $f: P \rightarrow P'$ tale che $\pi = \pi' \circ f$.*

Da qui in avanti R sarà un anello artiniano. La dimostrazione dell'esistenza di un rivestimento proiettivo per R -modulo non è ovvia e richiederà un po' di lavoro. Cominciamo facendo alcune considerazioni sui morfismi minimali che abbiamo definito in precedenza. Se R è artiniano allora è anche noetheriano (si veda per esempio [3, Cap. 1, Prop. 3.1]). Inoltre i moduli finitamente generati su anelli artiniani e noetheriani sono artiniani e noetheriani perciò dotati di una serie di composizione (o serie di Jordan-Holder); ogni serie di composizione di un R -modulo M ha la stessa lunghezza $l(M)$, cioè è additiva nel senso che se $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ è esatta, allora $l(M) = l(N) + l(L)$ ([3, Cap. 1, Cor. 3.1]).

Introduciamo adesso la seguente relazione di equivalenza: fissato $M \in R\text{-mod}$ e dati due morfismi $f: L \rightarrow M$ e $f': L' \rightarrow M$ diciamo che $f \sim f' \iff \exists h: L \rightarrow L'$ non nullo ed $\exists k: L' \rightarrow L$ non nullo tali che $f' = f \circ k$ e $f = f' \circ h$. Una versione minimale destra di un morfismo $g: L \rightarrow M$ è un morfismo minimale a destra $f: L' \rightarrow M$ tale che $f \sim g$. La seguente proposizione ci dice che una versione minimale destra di un morfismo esiste sempre ed è unica.

Proposizione 1.1.2. *Sia $h: X \rightarrow M$ un morfismo non nullo di R -moduli. Allora esiste $f: L \rightarrow M$ versione minimale destra di h . Inoltre se $f': L' \rightarrow M$ è un'altra versione minimale destra esiste un isomorfismo $k: L \rightarrow L'$ tale che $f = f' \circ k$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F} = \{L \in R\text{-mod} \mid \exists f \in \text{Hom}_R(L, M) \ f \neq 0 \text{ tale che } f \sim h\}$. Osserviamo che $\mathcal{F} \neq \emptyset$ in quanto $X \in \mathcal{F}$. Consideriamo $L \in \mathcal{F}$ tale

che $l(L)$ è minima e $f \in \text{Hom}_R(L, M)$ $f \neq 0$ tale che $f \sim h$. Mostriamo che f è minimale a destra. Sia $g: L \rightarrow L$ tale che $f = f \circ g$. Abbiamo quindi il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow g & \nearrow f|_{g(L)} & \uparrow f \\ g(L) & \xrightarrow{\quad} & L \end{array}$$

Se $g(L) \subsetneq L$ allora in particolare $l(g(L)) < l(L)$ e $f|_{g(L)} \neq 0$ con $f|_{g(L)} \sim h$ (per ipotesi $f \neq 0$), ma allora abbiamo un assurdo in quanto L aveva lunghezza minima. Quindi $l(L) = l(g(L))$ e per l'osservazione precedente g è un isomorfismo. Abbiamo quindi dimostrato che f è minimale a destra. Sia $f': L' \rightarrow M$ un'altra versione minimale destra di h . Poichè $f \sim h$ e $f' \sim h \Rightarrow f \sim f'$ quindi esistono $k \in \text{Hom}_R(L, L')$ e $k' \in \text{Hom}_R(L', L)$ non nulli tali che $f = f' \circ k$ e $f' = f \circ k' \Rightarrow f = f \circ (k' \circ k)$ e $f' = f' \circ (k \circ k')$. Per minimalità di f e f' si ha che $k \circ k'$ e $k' \circ k$ sono isomorfismi, da cui segue che k è un isomorfismo e $f = f' \circ k$. $\square$

Teorema 1.1.1. *Siano $M, X \in R\text{-mod}$ e $g \in \text{Hom}_R(X, M)$ non nullo. Allora esiste una decomposizione di $X = X' \oplus X''$ in cui $g|_{X'}$ è minimale a destra e $g|_{X''} = 0$*

Dimostrazione. Per la Proposizione 1.1.2 sappiamo che esiste $f: L \rightarrow M$ minimale a destra con $f \sim g$, allora possiamo costruire il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow s & & \parallel \\ X & \xrightarrow{g} & M \\ \downarrow t & & \parallel \\ L & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Poichè f è minimale $t \circ s$ è un isomorfismo $\Rightarrow \text{Ker}(t) \cap \text{Im}(s) = \{0\}$. Inoltre $\forall x \in X \exists y \in L$ tale che $(t \circ s)(y) = t(x) \Rightarrow s(y) - x \in \text{Ker}(t) \Rightarrow x \in \text{Im}(s) + \text{Ker}(t) \Rightarrow X = \text{Im}(s) \oplus \text{Ker}(t)$. Chiaramente $g|_{\text{Ker}(t)} = 0$ e $g|_{\text{Im}(s)} = f \Rightarrow g|_{\text{Im}(s)}$ è minimale a destra. $\square$

Definiamo adesso un oggetto che ci servirà inizialmente per caratterizzare i rivestimenti proiettivi ma che sarà poi fondamentale successivamente.

Definizione 1.1.3. Sia $M \in R\text{-mod}$. Il radicale di M è il più piccolo sottomodulo $\text{rad}(M) \subseteq M$ a quoziente semisemplice; Lo zoccolo di M è il più grande sottomodulo semisemplice $\text{soc}(M) \subseteq M$.

Ricordiamo infine la definizione di sottomodulo piccolo di un certo R -modulo M . $X \subset M$ sottomodulo è detto piccolo in M se $\forall Y \subseteq M$ sottomodulo tale che $M = X + Y$ allora $Y = M$.

Lemma 1.1.1. Sia $M \in R\text{-mod}$ e $N \subset M$ sottomodulo. Allora N è piccolo in M se e solo se $N \subseteq \text{rad}(M)$.

Dimostrazione. Supponiamo N piccolo in M e sia $X \subset M$ sottomodulo massimale. Allora $X \subset X + N \Rightarrow X + N = M$ oppure $X + N = X$. Se $X + N = M$ allora $X = M$ che è assurdo. Quindi $X + N = X \Rightarrow N \subset X$. Per arbitrarietà di X otteniamo che $N \subseteq \text{rad}(M)$. Viceversa supponiamo $N \subseteq \text{rad}(M)$ e sia $X \subset M$ sottomodulo tale che $X + N = M$. Poichè $X \neq M$ allora $\exists Y \subset M$ sottomodulo massimale contenente X . $N + X = N + Y = M$ ma $N \subseteq Y$ quindi $N + Y = Y = M$ che è assurdo. Quindi $X = M$ e N è piccolo in M . $\square$

Lemma 1.1.2. Sia $M \in R\text{-mod}$. Allora si ha che $\text{rad}(M) = \text{rad}(R)M$ dove $\text{rad}(R)$ è il radicale di Jacobson di R .

Osservazione 1.1.3. Se consideriamo R come R -modulo sinistro allora la definizione di $\text{rad}(R)$ coincide con quella di radicale di Jacobson classica. Ricordiamo inoltre che $\text{rad}(R)$ è nilpotente [6, Cap. 4, Teo 4.3] e se $I \subset R$ è un ideale sinistro nilpotente tale che R/I è semisemplice allora $I = \text{rad}(R)$ [3, Cap. 1, Prop 3.3]. Osserviamo infine che un R -modulo M è semisemplice se e solo se $\text{rad}(R)M = \{0\}$. Infatti se M è semisemplice allora per definizione di $\text{rad}(R)$ si ha subito che $\text{rad}(R)M = \{0\}$. Viceversa se $\text{rad}(R)M = \{0\}$ allora M è in maniera naturale un $R/\text{rad}(R)$ -modulo. Poichè $R/\text{rad}(R)$ è un anello semisemplice [6, Cap. 4, Prop 4.4] allora ogni $R/\text{rad}(R)$ -modulo

è completamente riducibile $\Rightarrow M$ come R -modulo è semisemplice (Per una dimostrazione completa di tutto si veda per esempio [3, Cap. 1, Prop. 3.1]).

Dimostrazione. Mostriamo prima che $\text{rad}(R)M \subset \text{rad}(M)$. Sfruttando il Lemma 1.1.1 basta dimostrare che $\text{rad}(R)M$ è piccolo in M . Sia $X \subset M$ sottomodulo tale che $X + \text{rad}(R)M = M \Rightarrow X + \text{rad}^n(R)M = M \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Per nilpotenza di $\text{rad}(R)$ si ottiene che $X = M$, quindi $\text{rad}(R)M \subset \text{rad}(M)$. Viceversa poichè $\text{rad}(R) \cdot (M/\text{rad}(R)M) = \{0\}$ otteniamo che $M/\text{rad}(R)M$ è semisemplice come R -modulo, allora $\text{rad}(M/\text{rad}(R)M) = \text{rad}(M)/\text{rad}(R)M = \{0\} \Rightarrow \text{rad}(M) \subseteq \text{rad}(R)M$. Abbiamo quindi dimostrato che $\text{rad}(R)M = \text{rad}(M)$. $\square$

Da questi due lemmi otteniamo la seguente caratterizzazione dei morfismi essenziali.

Lemma 1.1.3. *Siano $M, N \in R\text{-mod}$ e $f: M \rightarrow N$ morfismo suriettivo. Sono equivalenti le seguenti:*

- i) f è essenzialmente suriettivo;
- ii) $\text{Ker}(f) \subseteq \text{rad}(M)$.

Dimostrazione. Supponiamo prima f essenzialmente suriettivo, allora per Lemma 1.1.1 basta mostrare che se $X \subset M$ sottomodulo $\text{Ker}(f) + X = M \Rightarrow X = M$. Se indichiamo con $i: X \rightarrow M$ l'inclusione canonica si ha che:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \uparrow i & \nearrow f \circ i & \\ X & & \end{array}$$

Osserviamo che $f \circ i$ è suriettiva: se $n \in N \Rightarrow \exists m \in M$ tale che $f(m) = n$. $M = \text{Ker}(f) + X \Rightarrow m = x + y$ con $x \in X, y \in \text{Ker}(f)$ (non unici) $\Rightarrow f(m) = f(x + y) = f(x) = n = (f \circ i)(x) \Rightarrow (f \circ i)$ è suriettiva.

Per definizione di morfismo essenzialmente suriettivo si ha che i è suriettiva $\Rightarrow X = M \Rightarrow \text{Ker}(f) \subseteq \text{rad}(M)$. Viceversa supponiamo che $\text{Ker}(f) \subseteq \text{rad}(M)$ e sia $g: X \rightarrow M$ tale che $f \circ g: X \rightarrow N$ è suriettiva allora si

ha che $M = \text{Ker}(f) + \text{Im}(g)$. Infatti se $m \in M \Rightarrow \exists x \in X$ tale che $(f \circ g)(x) = f(m) \Rightarrow g(x) - m \in \text{Ker}(f) \Rightarrow m \in \text{Ker}(f) + \text{Im}(g) \Rightarrow M = \text{Ker}(f) + \text{Im}(g)$. Poichè $\text{Ker}(f) \subseteq \text{rad}(M)$ sempre per Lemma 1.1.1 $\text{Im}(g) = M \Rightarrow g$ è suriettiva. Da questo la tesi segue. $\square$

Siamo adesso pronti per dimostrare il risultato più importante di questo paragrafo.

Teorema 1.1.2. *Siano $M, P \in R\text{-mod}$ con P proiettivo e sia $f: P \rightarrow M$ suriettivo. Allora f è un rivestimento proiettivo se e solo se f è minimale a destra.*

Dimostrazione. Supponiamo f rivestimento proiettivo. Per il Lemma 1.1.3 otteniamo che $\text{Ker}(f) \subseteq \text{rad}(P)$ e per Teorema 1.1.1 f è minimale a destra se e solo se P non ha un addendo diretto contenuto in $\text{Ker}(f)$, ma questo è ovvio perchè $\text{Ker}(f)$ è piccolo in P . Quindi f è minimale a destra. Viceversa supponiamo ora f minimale a destra e sia $g: X \rightarrow P$ tale che $f \circ g: X \rightarrow M$ è suriettivo. Otteniamo quindi il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow h & & \parallel \\ X & \xrightarrow{f \circ g} & M \\ \downarrow g & & \parallel \\ P & \xrightarrow{f} & M \end{array} \quad \begin{array}{l} h: P \rightarrow X \text{ esiste in quanto } P \text{ è proiettivo e } f \circ g \\ \text{è suriettivo. Per minimalità di } f \text{ si ha che } g \circ h \text{ è} \\ \text{un isomorfismo e quindi } g \text{ è suriettivo.} \end{array}$$

Abbiamo quindi per arbitrarietà di g che f è un rivestimento proiettivo. $\square$

Da questo teorema otteniamo finalmente l'esistenza del rivestimento proiettivo

Corollario 1.1.2 (Esistenza del rivestimento proiettivo). *Se $M \in R\text{-mod}$, allora esiste $P \in R\text{-mod}$ proiettivo $f: P \rightarrow M$ rivestimento proiettivo di M .*

Dimostrazione. Poichè M è finitamente generato avevamo già osservato che esisteva $\varphi: R^k \rightarrow M$ suriettiva. Per Teorema 1.1.1 $R^k = P \oplus P'$ tale che $\varphi|_{P'} = 0$ e $\varphi|_P$ è minimale a destra. P è un addendo diretto di un modulo libero quindi è proiettivo $\Rightarrow \varphi|_P: P \rightarrow M$ è un rivestimento proiettivo per Teorema 1.1.2. $\square$

Adesso che abbiamo dimostrato l'esistenza e l'unicità dei rivestimenti proiettivi, è naturale chiedersi se esiste un concetto duale per i moduli iniettivi. Ogni $M \in R\text{-mod}$ si può immergere in un modulo iniettivo I [6, Cap. 3, Teo 3.18]. Anche in questo caso vorremmo I in un qualche senso minimale rispetto a questa proprietà.

Definizione 1.1.4. Sia $M \in R\text{-mod}$. Diciamo che $q: M \rightarrow N$ iniettivo è essenzialmente iniettivo se $\forall g: N \rightarrow X$ tale che $g \circ q: M \rightarrow X$ è iniettivo $\Rightarrow g$ è iniettivo. Se N è iniettivo allora è detto involuppo iniettivo di M e q è detta mappa di involuppo.

Osservazione 1.1.4. Se $\mathcal{F}: R\text{-mod} \rightarrow R^{op}\text{-mod}$ funtore controvariante è un equivalenza categoriale e $M \in R\text{-mod}$ allora si ha che: $P \in R\text{-mod}$ è un rivestimento proiettivo di M se e solo se $\mathcal{F}(P)$ è un involuppo iniettivo di $\mathcal{F}(M)$.

Nel caso in cui A sia una $\mathbb{K}$ -algebra di dimensione finita allora possiamo considerare il funtore $D(-) := \text{Hom}_{\mathbb{K}}(-, \mathbb{K})$. Siano ora $M \in A\text{-mod}$, $a \in A$ e $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(M, \mathbb{K})$ e definiamo $(fa)(m) := f(am)$. È immediato dalla definizione che $(fa) \in D(M)$ e che questo fornisce a $D(M)$ una struttura di A^{op} -modulo. Consideriamo adesso $\phi: M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(M, \mathbb{K}), \mathbb{K})$ isomorfismo naturale tra M e il suo biduale. Mostriamo che questo che è un isomorfismo anche in $A\text{-mod}$. $\phi(am)(\psi) = \psi(am) = (\psi a)(m) = \phi(m)(\psi a) = (a\phi(m))(\psi) \Rightarrow \phi(am) = a\phi(m)$. Da questo è immediato che $D \circ D \cong 1_{A\text{-mod}} \Rightarrow D: A\text{-mod} \rightarrow A^{op}\text{-mod}$ è un equivalenza categoriale. A

questo punto possiamo facilmente dimostrare l'esistenza (e l'unicità) dell'involuppo iniettivo di $M \in A\text{-mod}$. Sappiamo che $\exists f: P \rightarrow D(M)$ rivestimento proiettivo allora applicando $D(-)$ otteniamo $D(f): D(D(M)) \rightarrow D(P)$ involuppo iniettivo, ma $D(D(M))$ è canonicamente isomorfo a M quindi abbiamo ottenuto l'involuppo iniettivo di M . Il funtore D è detto la dualità standard di A .

1.2 Moduli indecomponibili e algebre basiche

Fino alla fine del capitolo A denoterà una $\mathbb{K}$ -algebra di dimensione finita e $A\text{-mod}$ sarà la categoria dei moduli su A di dimensione finita. Gli obiettivi di questo paragrafo sono la classificazione dei moduli proiettivi e iniettivi indecomponibili a meno di isomorfismo di un'algebra A e la dimostrazione che la categoria $A\text{-mod}$ è equivalente a quella di $B\text{-mod}$ dove B è una $\mathbb{K}$ -algebra basica. Per la prima parte seguiremo principalmente [2, Cap. 1], mentre la parte relativa alle algebre basiche si può trovare in [3, Cap. 2].

Facciamo prima alcune considerazioni sull'algebra A che pensiamo come A -modulo sinistro in modo naturale. L' A -modulo A ammette, per il Teorema di Krull-Schmidt, una decomposizione in indecomponibili unica a meno di isomorfismo $A = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n$. L'algebra è unitaria quindi esistono $\{e_i\}_{i \in 1, \dots, n}$ tali che $e_i \in P_i$ e $1_A = e_1 + \cdots + e_n$. I vari P_i sono in somma diretta quindi si ha che $e_i \cdot e_j = e_j \cdot e_i = \delta_{ij}e_i$. L'insieme dato da $\{e_1, \dots, e_n\}$ è detto insieme completo di idempotenti ortogonali. Osserviamo inoltre che $P_i = Ae_i$. Infatti se $x \in P_i$ $x = x \cdot 1_A = x \cdot (e_1 + \cdots + e_n) = x \cdot e_1 + \cdots + x \cdot e_n \Rightarrow x = x \cdot e_i$ (per unicità della scrittura) $\Rightarrow P_i = Ae_i$. Abbiamo quindi che e_i è un idempotente primitivo (cioè non è somma di altri due idempotenti ortogonali) in quanto P_i è indecomponibile. Infine poichè A è libero come A -modulo Ae_i è proiettivo. Dimosteremo che a meno di isomorfismo non ci sono altri A -moduli proiettivi indecomponibili.

Cominciamo dalla seguente proposizione:

Proposizione 1.2.1. *Sia $P \in A\text{-mod}$ proiettivo. Allora valgono le seguenti:*

- i) $\pi: P \rightarrow P/\text{rad}(P)$ la proiezione canonica è un rivestimento proiettivo;*
- ii) P è indecomponibile se e solo se $P/\text{rad}(P)$ è semplice.*

Dimostrazione.

- i) Immediato dal Lemma 1.1.3
- ii) Supponiamo che $P = P_1 \oplus P_2$ sia una decomposizione non banale. Allora P_1 non può essere completamente contenuto in $\text{rad}(P)$ altrimenti sarebbe piccolo e si avrebbe $P = P_2$, il che è assurdo. Pertanto $P_1/\text{rad}(P)$ è un sottomodulo non banale di $P/\text{rad}(P)$ che quindi non può essere semplice. Viceversa supponiamo P indecomponibile. Sappiamo che $P/\text{rad}(P)$ è semisemplice (segue dal Lemma 1.1.2), quindi se non fosse semplice $P/\text{rad}(P) = U_1 \oplus U_2$ con U_1 e U_2 semisemplici. Consideriamo $f_i: P(U_i) \rightarrow U_i$ $i \in \{1, 2\}$ rivestimento proiettivo allora $f_1 \oplus f_2: P(U_1) \oplus P(U_2) \rightarrow U_1 \oplus U_2$ è un rivestimento proiettivo. Infatti $\text{Ker}(f_1 \oplus f_2) = \text{Ker}(f_1) \oplus \text{Ker}(f_2) \subseteq \text{rad}(P(U_1) \oplus P(U_2)) = \text{rad}(P(U_1)) \oplus \text{rad}(P(U_2))$ quindi ancora per il Lemma 1.1.3 $f_1 \oplus f_2$ è essenzialmente suriettivo e quindi un rivestimento proiettivo. Per unicità del rivestimento proiettivo $P \cong P(U_1) \oplus P(U_2)$ che è assurdo perchè P era indecomponibile $\Rightarrow P/\text{rad}(P)$ è semplice.

□

Osservazione 1.2.1. Nella dimostrazione della proposizione precedente abbiamo praticamente dimostrato che la somma diretta di rivestimenti proiettivi è ancora un rivestimento proiettivo.

Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ un insieme completo di idempotenti ortogonali primitivi per A . Il quoziente $S(i) := Ae_i/\text{rad}(Ae_i)$ è un modulo semplice per la

proposizione precedente. Sia ora M un altro A -modulo semplice tale che $M \neq \{0\} \Rightarrow \exists m \in M, m \neq 0$. Poichè $1_A = e_1 + \dots + e_n \Rightarrow m = 1_A \cdot m = e_1 \cdot m + \dots + e_n \cdot m \neq 0 \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} : e_i \cdot m \neq 0 \Rightarrow \phi: Ae_i \rightarrow M$ tale che $\phi(ae_i) = ae_i \cdot m$ è un morfismo di A -moduli non nullo. Per il lemma di Schur ϕ è suriettiva quindi $Ae_i/Ker(\phi) \cong M$. Ora $Ker(\phi) \neq Ae_i \Rightarrow Ker(\phi)$ è un sottomodulo massimale di Ae_i ma $Ae_i/rad(Ae_i)$ è semplice $\Rightarrow rad(Ae_i)$ è l'unico sottomodulo massimale di $Ae_i \Rightarrow rad(Ae_i) = Ker(\phi) \Rightarrow S(i) \cong M$. Abbiamo praticamente dimostrato la seguente proposizione:

Proposizione 1.2.2. *Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ un insieme completo di idempotenti ortogonali primitivi per A . Allora ogni altro A -modulo semplice M è isomorfo a $S(i)$ per un qualche $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Osservazione 1.2.2. Segnaliamo che in generale non è vero che $S(i) \cong S(j) \Leftrightarrow i = j$. Sarà vero per una classe di algebre che analizzeremo più avanti cioè le algebre basiche.

Dalla proposizione appena enunciata è facile ora dimostrare quanto promesso a inizio paragrafo:

Teorema 1.2.1. *Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ un insieme completo di idempotenti ortogonali primitivi per A . Ogni altro A -modulo proiettivo indecomponibile è isomorfo a $P(i) := Ae_i/rad(Ae_i)$ per un qualche $i = 1, \dots, n$.*

Dimostrazione. Sia $P \in A\text{-mod}$ indecomponibile proiettivo allora per la Proposizione 1.2.1 $P/rad(P)$ è semplice. Per la Proposizione 1.2.2 $P/rad(P) \cong S(i)$ per un qualche $i \in \{1, \dots, n\}$, ma allora per unicità del rivestimento proiettivo si ha che $P(i) \cong P$ che è la tesi. $\square$

Osservazione 1.2.3. Osserviamo che c'è un forte legame tra $P(i)$ e $S(i)$, infatti si ha che $S(i) \cong S(j) \Leftrightarrow P(i) \cong P(j)$. Se $S(i) \cong S(j)$ allora per unicità del rivestimento proiettivo si ha subito che $P(i) \cong P(j)$. Il viceversa è ovvio dalla definizione di $S(i)$ e $S(j)$.

Sfruttando la dualità D definita nella paragrafo precedente possiamo classificare anche gli A -moduli indecomponibili iniettivi. Se consideriamo A come A^{op} -modulo otteniamo con una dimostrazione completamente analoga a quella fatta sopra che ogni A^{op} -modulo proiettivo indecomponibile è isomorfo a $e_i A$ dove come sempre $\{e_1, \dots, e_n\}$ è insieme completo di idempotenti ortogonali primitivi per A . Allora sia ha che $D(e_i A)$ è iniettivo indecomponibile e ogni altro A -modulo iniettivo indecomponibile è isomorfo a uno di questi per qualche $i \in \{1, \dots, n\}$. Da qui in avanti denoteremo $I(i) := D(e_i A)$.

Da qui fino alla fine del paragrafo indicheremo con $\{e_1, \dots, e_n\}$ un insieme completo di idempotenti ortogonali primitivi per A .

Definizione 1.2.1. A è detta *algebra basica* quando $Ae_i \cong Ae_j$ se e solo se $i = j$ o, equivalentemente, se i fattori che compaiono nella decomposizione di A in indecomponibili sono a due a due non isomorfi tra loro.

Vogliamo adesso dimostrare che la categoria dei moduli di A è equivalente alla categoria dei moduli di una qualche algebra basica. Sia M un A -modulo. Indichiamo con $add(M)$ la sottocategoria piena di $A\text{-mod}$ i cui oggetti sono gli addendi diretti di una qualsiasi somma diretta di un numero finito di copie di M , cioè $N \in add(M) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \ k \geq 1: M^k = N \oplus Q$ per un altro $A\text{-mod}$ Q . Consideriamo inoltre il funtore $e_M: A\text{-mod} \rightarrow \Gamma\text{-mod}$ dove $\Gamma = End_A(M)^{op}$ $e_M(-) := Hom_A(M, -)$. Tale funtore (che è additivo ed esatto a sinistra) è detto funtore di valutazione in M ed è il funtore che per un modulo M opportuno, realizzerà l'equivalenza categorica cercata. Indichiamo infine con $proj A$ la sottocategoria piena di $A\text{-mod}$ i cui oggetti sono tutti e soli gli $A\text{-mod}$ proiettivi. La seguente proposizione elenca alcune utili proprietà del funtore e_M .

Proposizione 1.2.3. [3, Cap. 2, Prop. 2.1] Sia $M \in A\text{-mod}$ allora e_M ha le seguenti proprietà:

- i) $e_M: \text{Hom}_A(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_\Gamma(e_M(X), e_M(Y))$ è un isomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi vettoriali $\forall X \in \text{add}(M), \forall Y \in A\text{-mod}$;
- ii) Se $X \in \text{add}(M)$ allora $e_M(X) \in \text{proj}\Gamma$;
- iii) $e_{M|\text{add}(M)}: \text{add}(M) \rightarrow \text{proj}\Gamma$ è un equivalenza categoriale.

Consideriamo adesso $\{P_1, \dots, P_k\}$ un insieme completo di rappresentanti delle classi di isomorfismo degli A -moduli proiettivi indecomponibili. Per Teorema di Krull-Schmidt applicato ad A otteniamo che $A = P_1^{s_1} \oplus \dots \oplus P_k^{s_k}$. Sia ora $P = \bigoplus_{i=1}^k P_i$ e sia $\Gamma = \text{End}_A(P)^{\text{op}}$, allora si ha che $\Gamma \cong \bigoplus_{i=1}^k e_P(P_i)$. $e_P(P_i)$ è un Γ -modulo proiettivo indecomponibile per la Proposizione 1.2.3 e tali moduli sono a due a due non isomorfi $\Rightarrow \Gamma$ è un'algebra basica detta forma ridotta di A .

Definizione 1.2.2. Una presentazione proiettiva di un R -modulo M è una successione esatta $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$ in cui P_0 e P_1 sono A -moduli proiettivi. Diremo che la presentazione è minimale quando π è un rivestimento proiettivo di M e f è un rivestimento proiettivo di $\text{Ker}(\pi)$.

Osservazione 1.2.4. Per il teorema di esistenza del rivestimento proiettivo ogni A -modulo ammette una presentazione minimale proiettiva.

Vogliamo dimostrare adesso che $e_P: A\text{-mod} \rightarrow \Gamma\text{-mod}$ è un equivalenza categoriale. Per farlo dimostreremo qualcosa di più generale. Sia $Q \in A\text{-mod}$ proiettivo. Indichiamo con $Q\text{-mod}$ la sottocategoria piena di $A\text{-mod}$ i cui oggetti sono gli A -moduli X che ammettono una presentazione proiettiva in cui i moduli proiettivi che compaiono nella presentazione sono oggetti di $\text{add}(Q)$.

Teorema 1.2.2. Sia P un A -modulo proiettivo. Allora $e_P: P\text{-mod} \rightarrow \Gamma\text{-mod}$ è un equivalenza categoriale.

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che e_P è essenzialmente suriettivo. Sia $X \in \Gamma\text{-mod}$ e sia $Q_1 \xrightarrow{f} Q_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$ una presentazione

proiettiva di X allora per Proposizione 1.2.3 esistono $P_i \in \text{add}(P)$ tali che $e_P(P_i) \cong Q_i$. Inoltre $\exists g: P_1 \rightarrow P_0$ tale che:

$$\begin{array}{ccccccc} e_P(P_1) & \xrightarrow{e_P(g)} & e_P(P_0) & \longrightarrow & e_P(\text{Coker}(g)) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \\ Q_1 & \xrightarrow{f} & Q_0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La successione esatta nella prima riga del diagramma è data dal fatto che, poichè P è proiettivo, il funtore e_P è esatto. Poichè le prime due frecce sono isomorfismi allora necessariamente anche la terza dovrà esserlo. Abbiamo quindi dimostrato che $e_P(\text{Coker}(g)) \cong X$ e naturalmente $\text{Coker}(g) \in P\text{-mod}$ (in quanto $P_1 \xrightarrow{g} P_0 \longrightarrow \text{Coker}(g) \longrightarrow 0$ è una presentazione proiettiva) $\Rightarrow e_P$ è essenzialmente suriettivo. Siano ora $X, Y \in P\text{-mod}$ e sia $P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$ una presentazione proiettiva di X dove $P_i \in \text{add}(P)$. Possiamo costruire il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(X, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(P_0, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(P_1, Y) \\ & & \downarrow & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_\Gamma(e_P(X), e_P(Y)) & \longrightarrow & \text{Hom}_\Gamma(e_P(P_0), e_P(Y)) & \longrightarrow & \text{Hom}_\Gamma(e_P(P_1), e_P(Y)) \end{array}$$

Le ultime due frecce sono isomorfismi per la Proposizione 1.2.3. L'iniettività della prima freccia è ovvia, la suriettività invece segue dal fatto che:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_\Gamma(e_P(X), e_P(Y)) &= \text{Ker}(\text{Hom}_\Gamma(e_P(P_0), e_P(Y)) \rightarrow \text{Hom}_\Gamma(e_P(P_1), e_P(Y))) \\ &\cong \text{Ker}(\text{Hom}_A(P_0, Y) \rightarrow \text{Hom}_A(P_1, Y)) \\ &= \text{Hom}_A(X, Y). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che e_P è un funtore pieno e fedele $\Rightarrow e_P$ è un'equivalenza categoriale. $\square$

Dal teorema precedente otteniamo finalmente che:

Teorema 1.2.3. *Sia $\{P_1, \dots, P_k\}$ un insieme completo di rappresentanti per le classi di isomorfismo degli A -moduli proiettivi indecomponibili. Se $P = \bigoplus_{i=1}^k P_i$, $\Gamma = \text{End}_A(P)^{\text{op}}$ allora $e_P: A\text{-mod} \rightarrow \Gamma\text{-mod}$ è un'equivalenza categoriale e Γ è un'algebra basica.*

Dimostrazione. Il fatto che Γ sia un'algebra basica è già stato dimostrato. Per il teorema precedente sappiamo che $e_P: P\text{-mod} \rightarrow \Gamma\text{-mod}$ è un'equivalenza categoriale, ma $\text{add}(P) = \text{proj} A \Rightarrow P\text{-mod} = A\text{-mod}$ (ogni A -modulo ammette una presentazione proiettiva). $\square$

Osservazione 1.2.5. Osserviamo che grazie a questo risultato, possiamo limitarci a studiare la teoria delle rappresentazioni delle sole algebre basiche (in dimensione finita). Vedremo nel prossimo paragrafo come sono tutte isomorfe, sotto alcune blande ipotesi, ad una classe di algebre il cui studio è relativamente semplice.

1.3 L'algebra di un quiver

Introduciamo in questo paragrafo il concetto di quiver e dell'algebra associata ad esso. Le motivazioni per lo studio di questi oggetti sono molteplici a noi interesseranno principalmente perchè i moduli di tale algebra possono essere visualizzati graficamente permettendo di comprendere meglio i concetti astratti che abbiamo definito nei precedenti paragrafi. Inoltre dimostreremo che le algebre basiche di dimensione finita su un campo algebricamente chiuso sono tutte isomorfe a quozienti di algebre associate ad un qualche quiver. In questo paragrafo seguiremo principalmente [2, Cap. 2] e [1, Cap. 1].

Definizione 1.3.1. Un quiver Q è un grafo orientato che è descritto da una coppia $Q = (Q_0, Q_1)$ dove gli elementi di Q_0 sono detti *vertici* e gli elementi di Q_1 sono detti *lati* (o frecce). Il quiver si dice finito se sia Q_0 che Q_1 sono insiemi finiti.

Associate a ciascun quiver $Q = (Q_0, Q_1)$ abbiamo due funzioni $s: Q_1 \rightarrow Q_0$ che associa ad ogni lato la sua sorgente e $t: Q_1 \rightarrow Q_0$ che associa ad ogni lato il suo target. Quindi se per esempio $\alpha: i \longrightarrow j$ è un lato allora $s(\alpha) = i$ e $t(\alpha) = j$. Un cammino γ nel quiver sarà una sequenza ordinata di lati $\gamma = \alpha_k \dots \alpha_2 \alpha_1$ tali che $s(\alpha_{i+1}) = t(\alpha_i)$. Il numero $l(\gamma) := k$ è detto

lunghezza del cammino γ . Associato ad ogni vertice $i \in Q_0$ c'è un cammino ϵ_i detto cammino banale tale che $s(\epsilon_i) = t(\epsilon_i) = i$ e $l(\epsilon_i) = 0$.

Per un cammino non banale $\gamma = \alpha_k \dots \alpha_2 \alpha_1$ definiamo $s(\gamma) := s(\alpha_1)$ e $t(\gamma) := t(\alpha_k)$. In particolare γ è detto *ciclo orientato* se $s(\gamma) = t(\gamma)$ e $l(\gamma) \geq 1$.

Definizione 1.3.2. Sia Q un quiver e $\mathbb{K}$ un campo. L'algebra dei cammini $\mathbb{K}Q$ associata al quiver Q è lo spazio vettoriale liberamente generato da tutti i cammini di Q con il prodotto che estende bilinearmente il seguente prodotto tra cammini: se $\gamma = \alpha_k \dots \alpha_2 \alpha_1$ e $\delta = \beta_l \dots \beta_2 \beta_1$ con $s(\gamma) = t(\delta) \Rightarrow \gamma \cdot \delta = \alpha_k \dots \alpha_2 \alpha_1 \beta_l \dots \beta_2 \beta_1$ altrimenti $\gamma \cdot \delta = 0$.

Osservazione 1.3.1. Se $Q = (Q_0, Q_1)$ un quiver finito, allora l'algebra $\mathbb{K}Q$ si può esprimere anche tramite generatori e relazioni. Infatti se indichiamo con $\{\epsilon_i\}_{i \in Q_0}$ l'insieme dei cammini banali allora si ha che $\mathbb{K}Q$ è generata, come $\mathbb{K}$ -algebra da $\{\epsilon_i, \alpha\}_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ con le relazioni seguenti:

$$1_{\mathbb{K}Q} = \sum_{i \in Q_0} \epsilon_i \quad \epsilon_i \epsilon_j = \epsilon_j \epsilon_i = \begin{cases} \epsilon_i & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\epsilon_k \alpha = \begin{cases} \alpha & \text{se } k = t(\alpha), \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \alpha \epsilon_k = \begin{cases} \alpha & \text{se } k = s(\alpha), \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

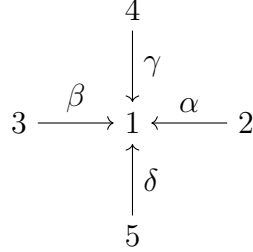
Da questo si vede facilmente che se $\varphi: Q \rightarrow A$, dove A è un'algebra, è un funzione tale che le immagini dei generatori di $\mathbb{K}Q$ tramite φ soddisfano le relazioni scritte sopra, allora φ si estende in modo unico ad omomorfismo di algebre (che chiamiamo ancora φ) $\varphi: \mathbb{K}Q \rightarrow A$.

Esempio 1.3.1. Consideriamo il quiver Q :

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

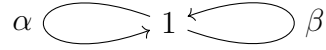
$\mathbb{K}Q = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \alpha, \beta, \beta \cdot \alpha\}$ in quanto l'unico cammino non banale, oltre ai lati, è solo $\beta \cdot \alpha$.

Esempio 1.3.2. Consideriamo il quiver Q :



$\mathbb{K}Q = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_5, \alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ visto che le composizioni dei vari lati sono tutte nulle.

Esempio 1.3.3. Consideriamo il quiver Q :



Visto che possiamo comporre i lati α e β in modo arbitrario si ha che $\mathbb{K}Q = \mathbb{K}\langle \alpha, \beta \rangle$ algebra libera con due generatori.

Le seguenti affermazioni sono di facile dimostrazione.

Proposizione 1.3.1. *Sia $Q = (Q_0, Q_1)$ un quiver finito. Valgono le seguenti:*

- i) $\mathbb{K}Q$ è un'algebra $\mathbb{N}$ -graduata dalla lunghezza dei cammini*
- ii) $\{\epsilon_i\}_{i \in Q_0}$ è un insieme di idempotenti ortogonali la cui somma è $1_{\mathbb{K}Q}$*
- iii) $\mathbb{K}Q$ ha dimensione finita se e solo se Q è aciclico (cioè non ci sono cicli orientati)*
- iv) Se Q è aciclico, allora $\text{rad}(\mathbb{K}Q) = (\mathbb{K}Q)_+ := \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\text{cammini di lunghezza} \geq 1\}$*

Definizione 1.3.3. Sia $Q = (Q_0, Q_1)$ un quiver finito. Una rappresentazione di Q è una collezione $\{V(i), \phi_\alpha\}_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ dove $V(i)$ è un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale di dimensione finita e $\phi_\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V(i), V(j))$ se α è una freccia da i a j .

Un omomorfismo di rappresentazioni di Q è una collezione di applicazioni lineari $g = \{g_i\}_{i \in Q_0} : \{V(i), \phi_\alpha\}_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1} \rightarrow \{W(i), \phi'_\alpha\}_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, dove $g_i \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V(i), W(i))$ e se α è una freccia da i a j , g_i e g_j devono soddisfare il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} V(i) & \xrightarrow{\phi_\alpha} & V(j) \\ \downarrow g_i & & \downarrow g_j \\ W(i) & \xrightarrow{\phi'_\alpha} & W(j) \end{array}$$

Indichiamo con $\text{Rep}(Q)$ la categoria che ha per oggetti le rappresentazioni di Q e per morfismi gli omomorfismi di rappresentazioni. La composizione è definita nel modo seguente: se $h = \{h_i\}_{i \in Q_0} : \{W(i), \phi'_\alpha\}_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1} \rightarrow \{Z(i), \phi''_\alpha\}_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ è un altro morfismo $h \circ g := \{h_i \circ g_i\}_{i \in Q_0}$. Un oggetto $\{W(i), \phi'_\alpha\}_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ è detto sottoggetto di $\{V(i), \phi_\alpha\}_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ se: $W(i)$ è un sottospazio di $V(i) \forall i \in Q_0$ e $\phi'_\alpha = \phi_\alpha|_{W(i)}$ se α è un lato da i a j .

Sia $Q = (Q_0, Q_1)$ un quiver finito. Definiamo $F : \text{Rep}(Q) \rightarrow \mathbb{K}Q\text{-mod}$ nella maniera seguente: $F(\{V(i), \phi_\alpha\}_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}) = \bigoplus_{i \in Q_0} V(i) = V$. Consideriamo $\pi_i : V \rightarrow V(i)$ proiezione canonica e $\xi_i : V(i) \rightarrow V$ inclusione canonica. Allora $\varphi : Q \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ definita come $\varphi(\alpha) := \xi_j \circ \phi_\alpha \circ \pi_i$ se α lato da i a j e $\varphi(\epsilon_i) := \xi_i \circ \pi_i$ si estende in maniera naturale a un morfismo $\varphi : \mathbb{K}Q \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$. La mappa φ così definita è una rappresentazione di $\mathbb{K}Q \Rightarrow V \in \mathbb{K}Q\text{-mod}$. Se $g = \{g_i\}_{i \in Q_0} : \{V(i), \phi_\alpha\}_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1} \rightarrow \{W(i), \phi'_\alpha\}_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ è un morfismo definiamo $F(g) : \bigoplus_{i \in Q_0} V(i) \rightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} W(i)$ $F(g) := \bigoplus_{i \in Q_0} g(i)$.

Viceversa definiamo $H : \mathbb{K}Q\text{-mod} \rightarrow \text{Rep}(Q)$ in questo modo: se $V \in \mathbb{K}Q \Rightarrow V = \bigoplus_{i \in Q_0} \epsilon_i V$ (segue dalla proposizione precedente sfruttando il fatto che $\{\epsilon_i\}_{i \in Q_0}$ è un insieme completo di idempotenti ortogonali). Poniamo $V(i) = \epsilon_i V$ e per α lato da i a j $\phi_\alpha : V(i) \rightarrow V(j)$ $\phi_\alpha(x) := \alpha \cdot x \Rightarrow \{V(i), \phi_\alpha\}_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1} \in \text{Rep}(Q)$. Se $g : V \rightarrow W$ è un morfismo di $\mathbb{K}Q$ -moduli poniamo $H(g) = \{g_i\}_{i \in Q_0}$ dove $g_i = g|_{V(i)}$. Grazie al seguente teorema possiamo studiare le rappresentazioni di $\mathbb{K}Q$ attraverso $\text{Rep}(Q)$:

Teorema 1.3.1. [3, Cap. 3, Teo 1.5] Se $Q = (Q_0, Q_1)$ è un quiver finito, allora F e H sono dei funtori e definiscono un'equivalenza categoriale.

Esempio 1.3.4. Consideriamo il quiver seguente:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 4 & & & & \\ & & \uparrow \beta & & & & \\ 2 & \xrightarrow{\alpha} & 1 & \xrightarrow{\gamma} & 3 & \xrightarrow{\delta} & 5 \end{array}$$

Sia $M = \mathbb{K}Q\epsilon_1$. M è un $\mathbb{K}Q$ -modulo che ha come $\mathbb{K}$ -base l'insieme dei cammini che partono da 1. $M(i) = \epsilon_i \mathbb{K}Q\epsilon_1$ è uno spazio vettoriale che ha come base l'insieme dei cammini che vanno dal vertice 1 al vertice i . In particolare:

$$\begin{aligned} M(1) &= \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\epsilon_1\} \cong \mathbb{K} \\ M(2) &= \{0\} \\ M(3) &= \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\gamma\} \cong \mathbb{K} \\ M(4) &= \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\beta\} \cong \mathbb{K} \\ M(5) &= \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\delta \cdot \gamma\} \cong \mathbb{K} \end{aligned}$$

La mappa tra $M(2)$ e $M(1)$ può essere solo quella nulla. La mappa tra $M(1)$ e $M(4)$ è data dalla moltiplicazione per β , ma $\beta \cdot \epsilon_1 = \beta$ è quindi la mappa deve essere l'identità. Un analogo ragionamento mostra che tutte le mappe sono l'identità.

Possiamo quindi rappresentare M in modo grafico ponendo $M(i)$ sul vertice i :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbb{K} & & & & \\ & & \uparrow id & & & & \\ 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{K} & \xrightarrow{id} & \mathbb{K} & \xrightarrow{id} & \mathbb{K} \end{array}$$

Cerchiamo adesso di applicare quanto mostrato nella sezione precedente per studiare le rappresentazioni semplici, proiettive e iniettive indecomponibili dell'algebra $\mathbb{K}Q$ per un quiver Q finito e aciclico. Per farlo ci servirà il seguente lemma:

Lemma 1.3.1. *Siano A una K -algebra, $e \in A$ idempotente non banale e $M \in A\text{-mod}$. Allora $\text{Hom}_A(Ae, M) \cong eM$ (come spazi vettoriali). In particolare se $M = Ae$ allora l'isomorfismo è anche come anelli.*

Dimostrazione. Sia $\phi: \text{Hom}_A(Ae, M) \rightarrow eM$ tale che $\phi(f) = f(e)$. ϕ è ben posta infatti $\phi(f) = f(e) = f(e^2) = ef(e) \in eM$. ϕ è ovviamente $\mathbb{K}$ -lineare. Mostriamo che è un isomorfismo. $\phi(f) = f(e) = 0 \Rightarrow f(ae) = af(e) = 0 \Rightarrow f = 0$. Quindi ϕ è iniettiva. Sia $em \in eM$ e sia $f: Ae \rightarrow M$ $f(ae) := aem$, allora $f \in \text{Hom}_A(Ae, M)$ e $\phi(f) = f(e) = em \Rightarrow \phi$ è suriettiva e quindi un isomorfismo. Se $M = Ae \Rightarrow \phi(f \circ g) = (f \circ g)(e) = f(g(e)) = f(e(g(e))) = f(e)g(e) \Rightarrow \phi$ è un morfismo di anelli e quindi un isomorfismo di anelli. $\square$

Da questo lemma otteniamo come corollario:

Corollario 1.3.1. *Sia $Q = (Q_0, Q_1)$ quiver finito aciclico. Allora $\mathbb{K}Q\epsilon_i$ è un modulo indecomponibile $\forall i \in Q_0$. In particolare $\{\epsilon_i\}_{i \in Q_0}$ è un insieme completo di idempotenti primitivi ortogonali per $\mathbb{K}Q$.*

Dimostrazione. Per il corollario precedente $\text{End}_{\mathbb{K}Q}(\mathbb{K}Q\epsilon_i) \cong \epsilon_i \mathbb{K}Q \epsilon_i$, ma poichè Q è aciclico si ha che $\epsilon_i \mathbb{K}Q \epsilon_i = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\epsilon_i\} \cong \mathbb{K}$. Quindi $\text{End}_{\mathbb{K}Q}(\mathbb{K}Q\epsilon_i)$ non ha idempotenti non banali $\Rightarrow \mathbb{K}Q\epsilon_i$ è indecomponibile. Poichè $\mathbb{K}Q\epsilon_i$ è indecomponibile se e solo se ϵ_i è primitivo, si ha la tesi. $\square$

Sia $Q = (Q_0, Q_1)$ $n = |Q_0|$ un quiver finito e aciclico e consideriamo $\mathbb{K}Q = \bigoplus_{i \in Q_0} \mathbb{K}Q\epsilon_i$. Per la Proposizione 1.2.2 sappiamo che ogni modulo semplice M deve essere isomorfo a $S(i) = \mathbb{K}Q\epsilon_i / \text{rad}(\mathbb{K}Q\epsilon_i)$ per un qualche $i \in Q_0$. Per il Lemma 1.1.2 $\text{rad}(\mathbb{K}Q\epsilon_i) = \text{rad}(\mathbb{K}Q)\mathbb{K}Q\epsilon_i = \text{rad}(\mathbb{K}Q)\epsilon_i = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\text{cammini di lunghezza } \geq 1 \text{ che partono da } i\}$. Da questo si deduce che $S(i) = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{[\epsilon_i]\}$. Da questo è facile dedurre che $S(i) \cong S(j) \Leftrightarrow i = j$, infatti se $\phi: S(i) \rightarrow S(j)$ è un isomorfismo e $i \neq j$ allora $\phi([\epsilon_i]) = [\lambda\epsilon_j] \Rightarrow \phi([\epsilon_i]) = \phi([\epsilon_i^2]) = \epsilon_i\phi([\epsilon_i]) = [\lambda\epsilon_i\epsilon_j] = [0]$ che è assurdo. Dall'Osservazione 1.2.3 otteniamo che $P(i) = \mathbb{K}Q\epsilon_i \cong \mathbb{K}Q\epsilon_j = P(j) \Leftrightarrow i = j$, quindi $\{P(1), \dots, P(n)\}$ è

un insieme completo di rappresentanti per le classi di isomorfismo dei moduli proiettivi indecomponibili. In particolare poichè $\mathbb{K}Q = \bigoplus_{i \in Q_0} \mathbb{K}Q\epsilon_i$ otteniamo che $\mathbb{K}Q$ è un'algebra basica. Grazie alla dualità standard D sappiamo che ogni modulo indecomponibile iniettivo è della forma $D(\epsilon_i \mathbb{K}Q)$. Inoltre per quanto appena mostrato si ha anche che $\epsilon_i \mathbb{K}Q \cong \epsilon_j \mathbb{K}Q \Leftrightarrow i = j \Rightarrow I(i) = D(\epsilon_i \mathbb{K}Q) \cong D(\epsilon_j \mathbb{K}Q) = I(j) \Leftrightarrow i = j$. Abbiamo quindi mostrato che $\{I(1), \dots, I(n)\}$ è un insieme completo di rappresentanti per le classi di isomorfismo dei moduli iniettivi indecomponibili.

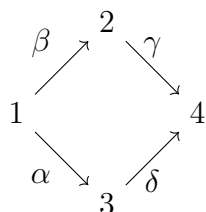
A quali oggetti corrispondono questi moduli nella categoria $\text{Rep}(Q)$? Partiamo da $S(i)$. In ogni vertice $j \neq i$ si pone lo spazio vettoriale nullo mentre nel vertice i si ha lo spazio vettoriale $\mathbb{K}$. Le mappe tra i vertici a questo punto sono solo quelle nulle.

Consideriamo adesso $P(i)$. In ogni vertice j poniamo il $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale che ha come base i cammini che partono da i e terminano in j . Osserviamo che poichè Q è aciclico nel vertice i abbiamo $\mathbb{K}$. Per ogni lato α tra i vertici j e k la mappa corrispondente è quella indotta dalla moltiplicazione per α dei cammini da i a j . Inoltre $P(i) = S(i) \Leftrightarrow i$ è un pozzo (cioè non ci sono cammini non banali che partono da i).

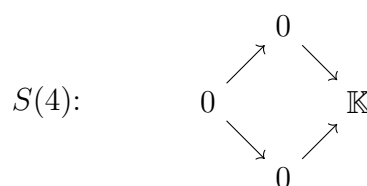
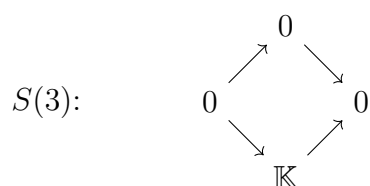
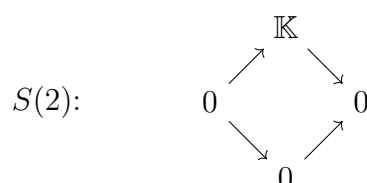
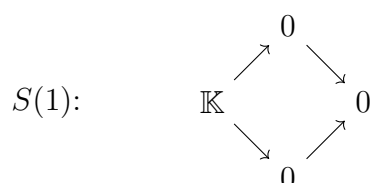
Infine abbiamo $I(i) = D(\epsilon_i \mathbb{K}Q) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\epsilon_i \mathbb{K}Q, \mathbb{K})$. In ogni vertice j dobbiamo porre il $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale che ha come base i cammini che partono da j e terminano in i . Per ogni lato α tra i vertici j e k la mappa corrispondente φ_α è definita sulla base nel modo seguente: se $\beta = \beta_s \cdots \beta_2 \beta_1$ è un cammino da j a i tale che $\beta_1 = \alpha \Rightarrow \varphi_\alpha(\beta) = \beta_s \cdots \beta_2$ altrimenti $\varphi_\alpha(\beta) = 0$. Osserviamo inoltre che $S(i) = I(i) \Leftrightarrow i$ è una sorgente (cioè non ci sono cammini non banali che terminano in i).

Esempio 1.3.5. Classifichiamo le rappresentazioni semplici, proiettive e

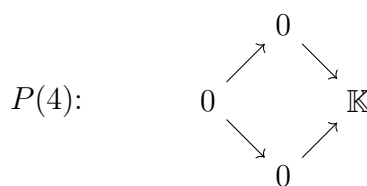
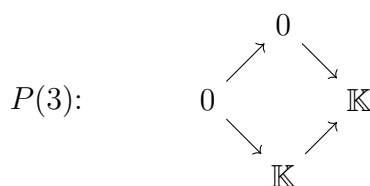
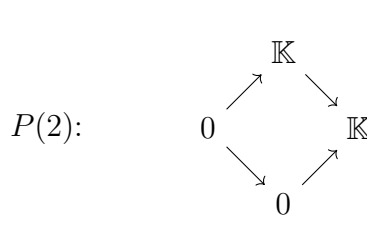
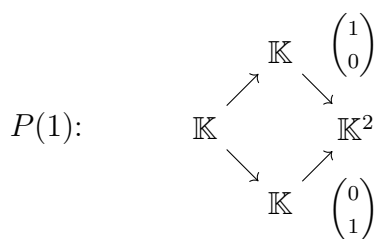
iniettive indecomponibili del seguente quiver:



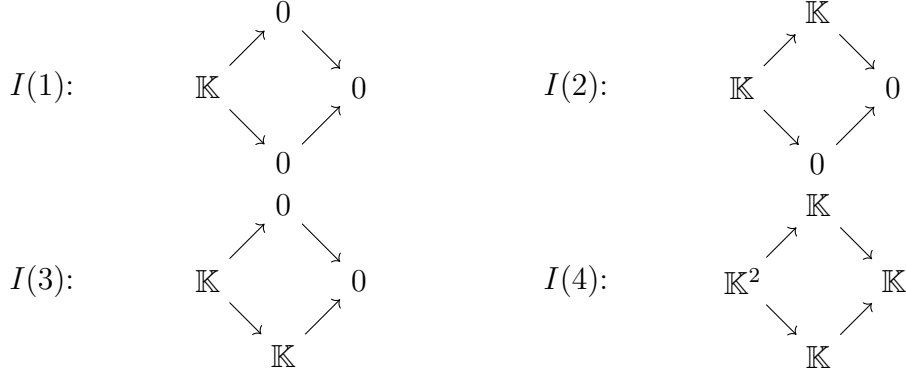
Cominciamo dalle semplici:



Passiamo alle proiettive. Poichè tra ogni vertice c'è al più una freccia i morfismi tra i vertici devono essere l'identità (se non nulli) tranne nel caso $P(1)$ in cui i morfismi dai vertici 2 e 3 a 4 sono dati da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispettivamente.



Infine le iniettive si ottengono dualizzando le proiettive del quiver Q^{op} cioè il quiver con gli stessi vertici ma le frecce nel senso opposto. Nel caso $I(4)$ le mappe tra il vertice 1 e il vertice 2 e 3 sono date dalle proiezioni canoniche.



Ora che abbiamo compreso le rappresentazioni semplici, proiettive e iniettive indecomponibili dell'algebra dei cammini di un quiver Q finito e aciclico, possiamo finalmente descrivere le algebre basiche su un campo algebricamente chiuso di dimensione finita. Da qui fino alla fine del paragrafo $\mathbb{K}$ sarà quindi un campo algebricamente chiuso e Q un quiver finito.

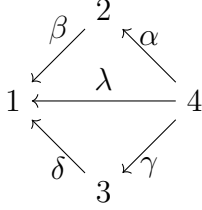
Definizione 1.3.4. Sia Q un quiver $I \subset \mathbb{K}Q$ un ideale bilatero. I è detto un *ideale ammissibile* se esiste $m \in \mathbb{N}$ $m \geq 2$ tale che $(\mathbb{K}Q)_+^m \subseteq I \subseteq (\mathbb{K}Q)_+^2$. Chiamiamo la coppia (Q, I) *bound quiver* e $\mathbb{K}Q/I$ *bound quiver algebra*.

Proposizione 1.3.2. Sia (Q, I) un *bound quiver*, allora $\mathbb{K}Q/I$ è un algebra di dimensione finita.

Dimostrazione. Per ipotesi abbiamo che $(\mathbb{K}Q)_+^m \subseteq I \subseteq (\mathbb{K}Q)_+^2$. Possiamo quindi considerare $\pi: \mathbb{K}Q/(\mathbb{K}Q)_+^m \rightarrow \mathbb{K}Q/I$ suriettiva e mostrare che $\mathbb{K}Q/(\mathbb{K}Q)_+^m$ ha dimensione finita. Poichè $\mathbb{K}Q/(\mathbb{K}Q)_+^m$ è generato dai cammini di lunghezza $\leq m$ che sono in numero finito, in quanto Q è un quiver finito, si ha che $\mathbb{K}Q/I$ ha dimensione finita. $\square$

Osservazione 1.3.2. $\forall m \in \mathbb{N}$ $m \geq 2$ $(\mathbb{K}Q)_+^m$ è un ideale ammissibile. Inoltre l'ideale nullo è ammissibile se e solo se Q è aciclico, in quanto è necessario e sufficiente che $(\mathbb{K}Q)_+^m = \{0\}$.

Esempio 1.3.6. Consideriamo il quiver:



L'ideale $I = \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$ è un ideale ammissibile, infatti poichè $l(\alpha\beta) = 2 = l(\gamma\delta) \Rightarrow I \subseteq (\mathbb{K}Q)_+^2$ e $(\mathbb{K}Q)_+^3 = 0$.

Sia $Q = (Q_0, Q_1)$ un quiver e I un ideale ammissibile. Consideriamo l'ideale $(\mathbb{K}Q)_+/I$. Tale ideale è nilpotente in quanto se $(\mathbb{K}Q)_+^m \subseteq I \subseteq (\mathbb{K}Q)_+^2 \Rightarrow ((\mathbb{K}Q)_+/I)^m = (\mathbb{K}Q)_+^m/I = \{0\}$. Inoltre abbiamo che $((\mathbb{K}Q)/I) / ((\mathbb{K}Q)_+/I) \cong (\mathbb{K}Q)/(\mathbb{K}Q)_+ \cong \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$ che è semisemplice. Poichè abbiamo dimostrato che $(\mathbb{K}Q)/I$ è un'algebra di dimensione finita otteniamo che $\text{rad}(\mathbb{K}Q/I) = (\mathbb{K}Q)_+/I$. Da questo segue che $\forall l \geq 1 \text{ rad}(\mathbb{K}Q/I)^l = (\mathbb{K}Q)_+^l/I$.

Osservazione 1.3.3. $\text{rad}(\mathbb{K}Q/I)/\text{rad}(\mathbb{K}Q/I)^2 = ((\mathbb{K}Q)_+/I)/((\mathbb{K}Q)_+^2/I) \cong (\mathbb{K}Q)_+/(\mathbb{K}Q)_+^2$ e ha quindi come base $\{[\alpha] \mid \alpha \in Q_1\}$.

Definizione 1.3.5. Sia A una $\mathbb{K}$ -algebra di dimensione finita basica e sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ un insieme completo di idempotenti ortogonali primitivi. Il quiver Q_A , associato ad A , ha n vertici e $\dim_{\mathbb{K}}(e_j(\text{rad}(A)/\text{rad}(A)^2)e_i)$ frecce che partono dal vertice i e terminano nel vertice j .

Proposizione 1.3.3. Sia A una $\mathbb{K}$ -algebra di dimensione finita basica, allora valgono le seguenti:

- i) Q_A non dipende dalla scelta degli idempotenti primitivi ortogonali.
- ii) $\forall e_i, e_j \in A$ idempotenti ortogonali primitivi $\psi: e_j \text{rad}(A)e_i / e_j \text{rad}(A)^2 e_i \rightarrow e_j(\text{rad}(A)/\text{rad}(A)^2)e_i$ definita come $\psi([e_j x e_i]) = e_j [x] e_i$ è un isomorfismo.

Dimostrazione.

- i) Per il teorema di Krull-Schmidt il numero di vertici di Q_A è univocamente determinato in quanto corrispondono al numero di moduli

indecomponibili che compaiono nella fattorizzazione in indecomponibili di A . Sempre per lo stesso teorema i fattori indecomponibili di A sono univocamente determinati a meno di isomorfismo quindi se $A = \bigoplus_{i=1}^n Ae_i = \bigoplus_{i=1}^n Ae'_i$ possiamo assumere, a meno di riordinare i termini, che $Ae_i \cong Ae'_i$. Consideriamo ora la mappa $\varphi: \text{rad}(A)e_i \rightarrow (\text{rad}(A)/\text{rad}(A)^2)e_i$ $\varphi(xe_i) = [x]e_i$. Il morfismo di A -moduli φ è suriettivo con $\text{Ker}(\varphi) = \text{rad}(A)^2e_i$, da ciò si ottiene $\text{rad}(Ae_i)/\text{rad}^2(Ae_i) = \text{rad}(A)e_i/\text{rad}(A)^2e_i \cong (\text{rad}(A)/\text{rad}(A)^2)e_i$. Abbiamo quindi che:

$$\begin{aligned} e_j(\text{rad}(A)/\text{rad}(A)^2)e_i &\cong e_j(\text{rad}(Ae_i)/\text{rad}(Ae_i)^2) \\ &\cong \text{Hom}_A(Ae_j, \text{rad}(Ae_i)/\text{rad}(Ae_i)^2) \\ &\cong \text{Hom}_A(Ae'_j, \text{rad}(Ae'_i)/\text{rad}(Ae'_i)^2) \\ &\cong e'_j(\text{rad}(Ae'_i)/\text{rad}(Ae'_i)^2) \\ &\cong e'_j(\text{rad}(A)/\text{rad}(A)^2)e'_i \end{aligned}$$

Questo dimostra che Q_A è univocamente determinato da A .

- ii) Sia $\tilde{\psi}: e_j \text{rad}(A)e_i \rightarrow e_j(\text{rad}(A)/\text{rad}(A)^2)e_i$ $\tilde{\psi}(e_j x e_i) = e_j [x] e_i \Rightarrow \tilde{\psi}$ è $\mathbb{K}$ -lineare ed è suriettiva con $\text{Ker}(\tilde{\psi}) = e_j \text{rad}(A)^2 e_i$. Da questo la tesi segue.

□

Esempio 1.3.7. Consideriamo l'algebra $A = \mathbb{T}_3(\mathbb{K})$ delle matrici 3×3 triangolari superiori a coefficienti in $\mathbb{K}$. Poniamo $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ed $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora $\{e_1, e_2, e_3\}$ è un insieme completo di idempotenti

ortogonali primitivi. L'algebra A si decompone dunque in $Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus Ae_3$.

Visto che $\dim_{\mathbb{K}}(Ae_i) = i$ per $i = 1, 2, 3 \Rightarrow Ae_i \not\cong Ae_j$ per $i \neq j \Rightarrow A$ è basica.

Proviamo a costruire il quiver Q_A . $rad(A) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K} & \mathbb{K} \\ 0 & 0 & \mathbb{K} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rad(A)^2 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbb{K} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rad(A)/rad(A)^2 \cong \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{K} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Facendo i conti si ottiene}$$

ora che: $e_2(rad(A)/rad(A)^2)e_1 = 0$ mentre $e_1(rad(A)/rad(A)^2)e_2$ ha dimensione 1. Quindi abbiamo solo una freccia da 1 a 2. Un analogo ragionamento mostra che c'è solo una freccia da 2 a 3. Il quiver Q_A è dunque il seguente:

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

Lemma 1.3.2. *Sia $((Q_0, Q_1), I)$ un bound quiver, allora $\{e_i = [\epsilon_i] \mid i \in Q_0\}$ è un insieme completo di idempotenti primitivi ortogonali di $\mathbb{K}Q/I$.*

Dimostrazione. Consideriamo $\pi: \mathbb{K}Q \rightarrow \mathbb{K}Q/I$ proiezione canonica. Poiché $\pi(\epsilon_i) = e_i \Rightarrow \{e_i \mid i \in Q_0\}$ è un insieme completo di idempotenti ortogonali. Resta da mostrare che e_i è primitivo. e_i è primitivo $\Leftrightarrow ((\mathbb{K}Q)/I)e_i$ è indecomponibile $\Leftrightarrow End_{\mathbb{K}Q/I}((\mathbb{K}Q)/I)e_i \cong e_i(\mathbb{K}Q/I)e_i$ non ha idempotenti non banali. Sia $e = [\epsilon] \in e_i(\mathbb{K}Q/I)e_i$ idempotente non banale $\Rightarrow \epsilon = \lambda\epsilon_i + \alpha + \gamma$ con $\gamma \in I$, $\alpha = \epsilon_i\alpha\epsilon_i \in (\mathbb{K}Q)_+$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. $\epsilon^2 = \epsilon \Rightarrow (\lambda\epsilon_i + \alpha + \gamma)(\lambda\epsilon_i + \alpha + \gamma) = \lambda^2\epsilon_i + 2\lambda\alpha + \alpha^2 + \gamma' = \lambda\epsilon_i + \alpha + \gamma$ con $\gamma' \in I \Rightarrow (\lambda^2 - \lambda)\epsilon_i + (2\lambda - 1)\alpha + \alpha^2 \in I \subseteq (\mathbb{K}Q)_+^2 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 1$. Se $\lambda = 0 \Rightarrow \epsilon = \alpha + \gamma \Rightarrow [\alpha]$ è idempotente, ma questo è assurdo in quanto $\exists m \in \mathbb{N} \ m \geq 2 \ (\mathbb{K}Q)_+^m \subseteq I \Rightarrow [\alpha]^{m+1} = [0] \Rightarrow [\alpha] = [0] \Rightarrow e = [\epsilon] = [0]$. Se invece $\lambda = 1 \Rightarrow \epsilon - \epsilon_i = \alpha + \gamma$ e inoltre $[\epsilon - \epsilon_i] = [\epsilon] - [\epsilon_i]$ è idempotente. Infatti per ipotesi $[\epsilon]$ e $[\epsilon_i]$ sono idempotenti e $[\epsilon][\epsilon_i] = [\epsilon_i][\epsilon] \Rightarrow [\epsilon] - [\epsilon_i]$ è idempotente. Da questo segue che $[\alpha]$ è idempotente e quindi applicando un ragionamento analogo a quanto fatto sopra si ha che $[\alpha] = [0] \Rightarrow [\epsilon] = [\epsilon_i] = 1_{e_i(\mathbb{K}Q/I)e_i}$. $\square$

Questo lemma ci permette di dimostrare che la definizione di quiver associato ad un'algebra è coerente. Vale infatti il seguente corollario:

Corollario 1.3.2. *Sia $A = \mathbb{K}Q/I$ la bound quiver algebra di un quiver Q , allora si ha che $Q_A = Q$.*

Dimostrazione. Se $Q = (Q_0, Q_1)$ allora per il lemma precedente sappiamo che $\{e_i = [\epsilon_i] \mid i \in Q_0\}$ è un insieme completo di idempotenti primitivi ortogonali di A quindi Q e Q_A hanno lo stesso numero di vertici. Inoltre $\text{rad}(A) = (\mathbb{K}Q)_+/I$ e avevamo osservato che $\text{rad}(A)/\text{rad}(A)^2 \cong (\mathbb{K}Q)_+/(\mathbb{K}Q)_+^2$ che ha come base le classi di equivalenza dei lati del quiver Q . Da questo segue che $\dim_{\mathbb{K}}(e_j(\text{rad}(A)/\text{rad}(A)^2)e_i) = \dim_{\mathbb{K}}(\epsilon_j((\mathbb{K}Q)_+/(\mathbb{K}Q)_+^2)\epsilon_i) \Rightarrow Q_A = Q$. $\square$

Il prossimo lemma sarà utile nel teorema successivo. Omettiamo la dimostrazione in quanto richiede solo noiosi conti.

Lemma 1.3.3. *[2, Cap. 2, Lemma 3.3] Siano A una $\mathbb{K}$ -algebra basica di dimensione finita, Q_A il quiver associato ad A e $\{[x_\alpha] \mid \alpha: i \rightarrow j, \alpha \in (Q_A)_1\}$ una base del $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale $e_j\text{rad}(A)e_i/e_j\text{rad}(A)^2e_i \forall i, j \in (Q_A)_0$. Allora si hanno le seguenti:*

- i) $\forall i, j \in (Q_A)_0 \forall x \in e_j\text{rad}(A)e_i$ si ha che $x = \sum \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_l} x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_l}$ dove la sommatoria è fatta su tutti i cammini $\alpha_1 \dots \alpha_l$ che partono da i e terminano in j ;
- ii) $\forall i, j \in (Q_A)_0 \forall \alpha \in (Q_A)_1 \alpha: i \rightarrow j$ si ha che x_α individua un unico morfismo $\varphi_\alpha \in \text{Hom}_A(Ae_j, Ae_i)$ con $\varphi_\alpha(e_j) = x_\alpha$, $\text{Im}(\varphi(\alpha)) \subseteq (\text{rad}A)e_i$ e $\text{Im}(\varphi(\alpha)) \subsetneq (\text{rad}A)^2e_i$.

Abbiamo adesso tutti gli strumenti per dimostrare il seguente teorema:

Teorema 1.3.2. *Sia A una $\mathbb{K}$ -algebra basica di dimensione finita e $\{e_1, \dots, e_n\}$ un insieme completo di idempotenti ortogonali primitivi. Allora esiste $\varphi: \mathbb{K}Q_A \rightarrow A$ morfismo di algebre suriettivo con $\text{Ker}(\varphi) = I$ un ideale ammissibile. In particolare $A \cong (\mathbb{K}Q_A)/I$.*

Dimostrazione. $\forall i, j \in (Q_A)_0$ consideriamo $\{[x_\alpha] \mid \alpha \in (Q_A)_1 \alpha: i \rightarrow j\}$ base di $e_j\text{rad}(A)e_i/e_j\text{rad}(A)^2e_i$. Definiamo adesso $\tilde{\varphi}: Q_A \rightarrow A$ come $\tilde{\varphi}(\epsilon_i) = e_i$ e $\tilde{\varphi}(\alpha) = x_\alpha \Rightarrow \tilde{\varphi}$ si estende ad un unico morfismo di algebre $\varphi: \mathbb{K}Q_A \rightarrow A$.

Mostriamo che φ è suriettivo. Poichè $\mathbb{K}$ è un campo algebricamente chiuso e A è un'algebra basica, $A/\text{rad}(A) \cong \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$ generato da $\{[e_i]\}_{i \in (Q_A)_0}$ mentre per il lemma precedente l'insieme $\{x_\alpha\}_{\alpha \in (Q_A)_1}$ genera $\text{rad}(A) \Rightarrow A$ è generata (come algebra) da $\{e_k, x_\alpha \mid \alpha \in (Q_A)_1, k \in (Q_A)_0\}$. Da questo si deduce che φ è suriettivo. Dimostriamo adesso che $\text{Ker}(\varphi) = I$ è un ideale ammissibile. Per costruzione $\varphi((\mathbb{K}Q_A)_+) \subseteq \text{rad}(A) \Rightarrow \varphi((\mathbb{K}Q_A)_+^l) \subseteq \text{rad}(A)^l$, quindi poichè $\text{rad}(A)$ è nilpotente deve esistere $m \in \mathbb{N}$ $m \geq 2$ tale che $(\mathbb{K}Q)_+^m \subseteq I$. Sia ora $a \in I$. Allora esiste una combinazione lineare $\sum_{k \in (Q_A)_0} \lambda_k e_k + \sum_{\alpha \in (Q_A)_1} \mu_\alpha x_\alpha$ con $\lambda_k, \mu_\alpha \in \mathbb{K}$ tale che:

$$a - \left(\sum_{k \in (Q_A)_0} \lambda_k e_k + \sum_{\alpha \in (Q_A)_1} \mu_\alpha x_\alpha \right) \in (\mathbb{K}Q)_+^2$$

Applicando adesso φ e utilizzando che $\varphi(a) = 0$ otteniamo che:

$$\sum_{k \in (Q_A)_0} \lambda_k e_k + \sum_{\alpha \in (Q_A)_1} \mu_\alpha x_\alpha \in \varphi((\mathbb{K}Q)_+^2) \subseteq \text{rad}(A)^2$$

Poichè i vari e_k sono idempotenti ortogonali si ha che $\forall k \in (Q_A)_0, \lambda_k = 0 \Rightarrow \sum_{\alpha \in (Q_A)_1} \mu_\alpha x_\alpha \in \text{rad}(A)^2$ che è assurdo in quanto $\{[x_\alpha] \mid \alpha \in (Q_A)_1\}$ sono una base di $\text{rad}(A)/\text{rad}(A)^2 \Rightarrow \forall \alpha \in (Q_A)_1, \mu_\alpha = 0 \Rightarrow a \in (\mathbb{K}Q_A)_+^2 \Rightarrow I \subseteq (\mathbb{K}Q)_+^2 \Rightarrow I$ è un ideale ammissibile. $\square$

Osservazione 1.3.4. Osserviamo che l'ipotesi che A è un'algebra basica è stata utilizzata solo per mostrare che $A/\text{rad}(A) \cong \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$. La dimostrazione è analoga nel caso in cui l'algebra A abbia semplicemente la precedente proprietà. Una tale algebra è detta elementare.

Definizione 1.3.6. Sia A è una $\mathbb{K}$ -algebra basica. Un isomorfismo $A \cong (\mathbb{K}Q_A)/I$ dove I è un ideale ammissibile di $(\mathbb{K}Q)_A$ è detto una presentazione dell'algebra A (come bound quiver algebra).

Esempio 1.3.8. Consideriamo l'algebra $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \\ e & d & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{K} \right\}$

e sia $J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid e \in \mathbb{K} \right\}$. J è un ideale bilatero di B . Poniamo $A = B/J$. Un insieme completo di idempotenti primitivi ortogonali è dato da:

$$e_1 = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ e_2 = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

Inoltre $rad(A) = rad(B)/J = \left\{ \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{K} \right\}$ e $rad(A)^2 = 0$.

Inoltre $e_2 rad(A) e_1$ e $e_1 rad(A) e_2$ hanno entrambi dimensione 1, quindi il quiver Q_A è:

$$\begin{array}{ccc} & \alpha & \\ 1 & \xrightarrow{\quad} & 2 \\ & \xleftarrow{\quad \beta} & \end{array}$$

Definiamo adesso $\varphi: \mathbb{K}Q_A \rightarrow A$ come: $\varphi(\epsilon_i) = e_i$ e

$$\varphi(\alpha) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(\beta) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$I = Ker(\varphi) = \langle \alpha\beta, \beta\alpha \rangle = (\mathbb{K}Q_A)_+^2 \Rightarrow (\mathbb{K}Q_A)/I \cong A.$$

1.4 Algebre ereditarie

In questo paragrafo continuiamo lo studio dell'algebra dei cammini di un quiver. Per fare ciò introdurremo il concetto di algebra ereditaria; e dimostreremo che l'algebra dei cammini di un quiver è un'algebra ereditaria e che sotto opportune ipotesi vale anche il viceversa. Infine faremo una piccola digressione sulle algebre connesse che ci saranno poi utili nello studio del quiver di Auslander-Reiten. Come sempre $\mathbb{K}$ indicherà un campo e le $\mathbb{K}$ -algebre

saranno sempre di dimensione finita. Seguiremo principalmente [1, Cap. 1] e [3, Cap. 2 e 3].

Definizione 1.4.1. Una $\mathbb{K}$ -algebra A si dice ereditaria se ogni sottomodulo di un A -modulo proiettivo è ancora proiettivo.

La definizione di algebra ereditaria da sola non è particolarmente utile. Cerchiamo di trovare delle sue caratterizzazioni. Sia A una $\mathbb{K}$ -algebra e sia $M \in A\text{-mod}$. Definiamo una risoluzione proiettiva di M come un complesso di omologia $P_\bullet = (P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in cui ogni $P_k \in A\text{-mod}$ è proiettivo:

$$\cdots \longrightarrow P_m \xrightarrow{d_m} P_{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

Se la successione $P_\bullet = (P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è definitivamente nulla si dice che M ha dimensione proiettiva finita. In tal caso definiamo la dimensione proiettiva $pd_A(M)$ di M come il più piccolo $n \in \mathbb{N}$ tale che M ammette una risoluzione proiettiva $P_\bullet = (P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in cui $\forall k \in \mathbb{N}$ con $k > n \Rightarrow P_k = 0$. In maniera analoga possiamo definire una risoluzione iniettiva come un complesso di omologia $I_\bullet = (I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in cui ogni $I_k \in A\text{-mod}$ è iniettivo:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} I_0 \xrightarrow{d_0} I_1 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{m-1}} I_{m-1} \xrightarrow{d_m} I_m \longrightarrow \cdots$$

In questo caso diremo che M ha dimensione iniettiva finita se ammette una risoluzione iniettiva definitivamente nulla e analogamente possiamo definire la dimensione iniettiva $id_A(M)$ di M come il più piccolo $n \in \mathbb{N}$ tale che M ammette una risoluzione iniettiva di lunghezza n .

Possiamo caratterizzare la dimensione proiettiva nel modo seguente:

Teorema 1.4.1. [6, Cap. 6, Teo. 6.18] Sia A una $\mathbb{K}$ -algebra e $M \in A\text{-mod}$. Sono equivalenti le seguenti:

$$i) \quad pd_A(M) \leq n$$

ii) Data una successione esatta:

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

in cui $\forall k < n$ P_k è proiettivo, allora anche P_n è proiettivo.

Osservazione 1.4.1. Sia $M \in A\text{-mod}$ allora M è proiettivo $\Leftrightarrow pd_A(M) = 0$. Analogamente M è iniettivo $\Leftrightarrow id_A(M) = 0$.

Sia A una $\mathbb{K}$ -algebra e M un A -modulo di dimensione proiettiva finita, allora $pd_A(M)$ indica quanto dista M dall'essere proiettivo. Ha senso dunque chiedersi se c'è un massimo alla dimensione proiettiva che può avere un A -modulo. Definiamo $gl.dim(A) := \sup\{pd_A(M) \mid M \in A\text{-mod}\}$ detta dimensione globale di A . Una proposizione che ci sarà utile è la seguente:

Proposizione 1.4.1. [3, Cap. 1, Prop. 5.1] Sia A una $\mathbb{K}$ -algebra. Allora si ha che $gl.dim(A) = pd_A(A/\text{rad}(A))$

Da questo enunciato si ottiene rapidamente il seguente:

Teorema 1.4.2. [3, Cap. 1, Cor. 5.2] Sia A una $\mathbb{K}$ -algebra. Sono equivalenti le seguenti:

- i) A è ereditaria
- ii) $\text{rad}(A)$ è un A -modulo proiettivo
- iii) $pd_A(A/\text{rad}(A)) \leq 1$
- iv) $gl.dim(A) \leq 1$

Grazie alla precedente caratterizzazione possiamo dimostrare che:

Proposizione 1.4.2. L'algebra dei cammini di un quiver finito e aciclico è un'algebra ereditaria.

Dimostrazione. Se $Q = (Q_0, Q_1)$ è un quiver finito e aciclico allora $\mathbb{K}Q$ ha dimensione finita quindi per il teorema precedente basta mostrare che $\text{rad}(\mathbb{K}Q)$ è proiettivo. $\mathbb{K}Q = \mathbb{K}Q_{\epsilon_1} \times \cdots \times \mathbb{K}Q_{\epsilon_n}$ con $n = |Q_0| \Rightarrow \text{rad}(\mathbb{K}Q) \cong \text{rad}(\mathbb{K}Q_{\epsilon_1}) \times \cdots \times \text{rad}(\mathbb{K}Q_{\epsilon_n})$. $\mathbb{K}Q_{\epsilon_i}$ ha come base i cammini che partono dal vertice i . Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_{t_i} \in Q_1$ frecce con $s(\alpha_k) = i$ e $t(\alpha_k) = j_k \Rightarrow \text{rad}(\mathbb{K}Q)_{\epsilon_i} = \bigoplus_{k=1}^{t_i} (\mathbb{K}Q_{\epsilon_{j_k}})_{\alpha_k} \cong \bigoplus_{k=1}^{t_i} (\mathbb{K}Q)_{\epsilon_{j_k}}$. Infatti $\phi: (\mathbb{K}Q)_{\epsilon_{j_k}} \rightarrow (\mathbb{K}Q_{\epsilon_{j_k}})_{\alpha_k}$ dato da $\phi(\epsilon_{j_k}) = \epsilon_{j_k} \alpha_k = \alpha_k$ è un morfismo di $\mathbb{K}Q$ -mod suriettivo, l'iniettività viene dal fatto che se $\gamma \in (\mathbb{K}Q)_{\epsilon_{j_k}}$ tale che $\phi(\gamma) = \gamma \alpha_k = 0 \Rightarrow t(\alpha_k) \neq s(\gamma)$ che è assurdo $\Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \phi$ è un isomorfismo. Da ciò otteniamo che $\text{rad}((\mathbb{K}Q)_{\epsilon_i}) = \text{rad}(\mathbb{K}Q)_{\epsilon_i}$ è proiettivo $\Rightarrow \text{rad}(\mathbb{K}Q)$ è proiettivo. $\square$

Supponiamo A $\mathbb{K}$ -algebra basica con $\mathbb{K}$ campo algebricamente chiuso. Per quanto mostrato nella sezione precedente sappiamo che $A \cong (\mathbb{K}Q)_A / I$ per I un qualche ideale ammissibile di $\mathbb{K}Q_A$. Nel caso in cui A è anche ereditaria possiamo dire qualcosa in più sul quiver Q_A . Vale il seguente lemma:

Lemma 1.4.1. *Sia A una $\mathbb{K}$ -algebra basica ereditaria. Valgono le seguenti:*

- i) *I morfismi non nulli tra A -moduli proiettivi indecomponibili sono iniettivi.*
- ii) *Il quiver Q_A associato ad A è aciclico.*

Dimostrazione.

- i) Siano $P_1, P_2 \in A$ -moduli proiettivi indecomponibili e $f: P_1 \rightarrow P_2$ morfismo non nullo. Se per assurdo $\text{Ker}(f) \neq 0$ allora la successione esatta corta $0 \longrightarrow \text{Ker}(f) \hookrightarrow P_1 \xrightarrow{f} \text{Im}(f) \longrightarrow 0$ è split che è assurdo perchè P_1 è indecomponibile $\Rightarrow f$ è iniettiva.
- ii) Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ un insieme completo di idempotenti primitivi ortogonali. Il numero di lati tra i vertici i e j è $\dim_{\mathbb{K}}(e_j \text{rad}(A) e_i / e_j \text{rad}(A)^2 e_i)$. Se questo è diverso da zero allora $e_j \text{rad}(A) e_i \neq 0$ e ogni elemento $x \in e_j \text{rad}(A) e_i$ non nullo individua un morfismo $\varphi_x \in \text{Hom}_A(Ae_j, Ae_i)$

tale che $\varphi_x(e_j) = x$. Per il punto precedente sappiamo che φ_x è iniettiva. Se per assurdo Q_A non fosse aciclico allora potremmo costruire una successione di moduli proiettivi indecomponibili distinti:

$$Ae_{i_1} \xrightarrow{f_1} Ae_{i_2} \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{k-1}} Ae_{i_{k-1}} \xrightarrow{f_k} Ae_{i_1}$$

Poichè f_r è iniettiva $\Rightarrow f_k f_{k-1} \cdots f_1: Ae_{i_1} \rightarrow Ae_{i_1}$ è iniettiva e quindi $f_k f_{k-1} \cdots f_1$ è un isomorfismo $\Rightarrow f_k$ è suriettiva $\Rightarrow f_k$ è un isomorfismo che è assurdo perchè i moduli nella successione sono distinti e l'algebra è basica. Quindi il quiver Q_A è aciclico.

□

Lemma 1.4.2. *Sia A una $\mathbb{K}$ -algebra ereditaria e sia I un ideale bilatero non nullo di A contenuto in $\text{rad}(A)^2$. Allora A/I non è un'algebra ereditaria.*

Dimostrazione. Consideriamo la successione esatta corta di A/I -moduli:

$$0 \longrightarrow I/\text{rad}(A)I \longrightarrow \text{rad}(A)/\text{rad}(A)I \xrightarrow{\pi} \text{rad}(A)/I \longrightarrow 0$$

Poichè $\text{rad}(A)$ è proiettivo come A -modulo allora $\text{rad}(A)/\text{rad}(A)I$ è un A/I -modulo proiettivo (segue dal fatto che $\text{rad}(A)/\text{rad}(A)I \cong A/I \otimes_{\mathbb{K}} \text{rad}(A)$ come A/I -moduli e dall'additività del funtore $A/I \otimes_{\mathbb{K}} -$). $I \neq 0 \Rightarrow \text{rad}(A)I \neq I$ (per il Lemma di Nakayama) $\Rightarrow \pi: \text{rad}(A)/\text{rad}(A)I \rightarrow \text{rad}(A)/I$ non è un isomorfismo. $I \subseteq \text{rad}(A)^2 \Rightarrow I/\text{rad}(A)I \subseteq \text{rad}(\text{rad}(A)/\text{rad}(A)I) = \text{rad}(A)^2/\text{rad}(A)I$ (per il Lemma 1.1.2) $\Rightarrow \pi$ è un rivestimento proiettivo (viene dal Lemma 1.1.3). Allora se A/I fosse per assurdo un'algebra ereditaria si avrebbe che $\text{rad}(A/I) = \text{rad}(A)/I$ è un A/I -mod proiettivo $\Rightarrow \text{rad}(A)/I \cong \text{rad}(A)/\text{rad}(A)I$ che è assurdo per quanto mostrato sopra.

□

Come immediata conseguenza abbiamo:

Teorema 1.4.3. [3, Cap. 3, Prop. 1.13] *Sia A una $\mathbb{K}$ -algebra basica ed ereditaria con $\mathbb{K}$ campo algebricamente chiuso. Allora $A \cong \mathbb{K}Q_A$ con Q_A quiver aciclico.*

Osservazione 1.4.2. Facciamo notare che grazie al precedente teorema se A è una $\mathbb{K}$ -algebra basica ereditaria con $\mathbb{K}$ campo algebricamente chiuso allora lo studio delle rappresentazioni indecomponibili dell'algebra si può fare attraverso lo studio del quiver Q_A . In particolare per capire se A ha un numero finito di rappresentazioni indecomponibili a meno di isomorfismo basta semplicemente costruire Q_A . Infatti per il Teorema di Gabriel ([4, Cap. 6, Teo. 6.5.2], [9, Cap. 8, Teo. 8.12]) è necessario e sufficiente che il quiver Q_A sia di tipo A, D, E.

Sia A una $\mathbb{K}$ -algebra e supponiamo che $\{e_1, \dots, e_n\} \subset Z(A)$ sia insieme completo di idempotenti ortogonali primitivi. Allora sappiamo che $A = Ae_1 \times \dots \times Ae_n$. Inoltre Ae_i è una $\mathbb{K}$ -algebra infatti $(ae_i) \cdot (be_i) = ae_i be_i = abe_i^2 = abe_i$ ($1_{Ae_i} = e_i$) ed Ae_i non si può scrivere come prodotto di algebre in quanto e_i è primitivo. Viceversa se $A = A_1 \times \dots \times A_n$ e poniamo $e_i = (0, \dots, 1_{A_i}, \dots, 0) \Rightarrow \{e_1, \dots, e_n\}$ è un insieme completo di idempotenti ortogonali. Osserviamo che non necessariamente gli e_i saranno primitivi tuttavia $e_i \in Z(A)$. Il ragionamento appena fatto suggerisce la seguente definizione:

Definizione 1.4.2. Una $\mathbb{K}$ -algebra A si dice connessa (o indecomponibile) se i suoi soli idempotenti centrali sono 0, 1.

Esempio 1.4.1. $M_n(\mathbb{K})$ è un'algebra connessa, infatti $Z(M_n(\mathbb{K}))$ è composto dai soli multipli dell'identità I_n e λI_n è idempotente se e solo se $\lambda = 0$ oppure $\lambda = 1$.

Una utile caratterizzazione della connessione di un'algebra è la seguente:

Proposizione 1.4.3. [2, Cap. 1, Lemma 1.6] Sia A una $\mathbb{K}$ -algebra e siano $\{e_1, \dots, e_n\}$ un insieme completo di idempotenti ortogonali primitivi. Allora A è connessa se e solo se non esiste una partizione non banale di $\{1, \dots, n\} = I \sqcup J$ tale che $\forall i \in I \forall j \in J \ e_i Ae_j = e_j Ae_i = 0$.

Da questo enunciato si dimostra facilmente il seguente corollario.

Corollario 1.4.1. [2, Cap. 2, Cor. 3.4] *Sia A una $\mathbb{K}$ -algebra basica e connessa. Allora si ha che Q_A è un quiver connesso (cioè esiste un cammino tra ogni coppia di vertici).*

Sia A una $\mathbb{K}$ -algebra e supponiamo che $A = Ae_1 \times \cdots \times Ae_n$ prodotto di algebre. Sia ora $M \in A\text{-mod} \Rightarrow M = e_1M \oplus \cdots \oplus e_nM$. Osserviamo che e_iM è sia un A -modulo che un Ae_i -modulo. Quindi se M fosse indecomponibile $M = e_iM$ per un qualche $i \in \{1, \dots, n\}$ ed è anche indecomponibile come Ae_i -modulo. Se $N = e_1N \oplus \cdots \oplus e_nN$ è un altro A -modulo $\Rightarrow Hom_A(M, N) \cong \bigoplus_{i,j} Hom_A(e_iM, e_jN)$. $Hom_A(e_iM, e_jN) = 0$ per $i \neq j$ in quanto se $\phi \in Hom_A(e_iM, e_jN)$ $\phi(e_im) = e_jn \Rightarrow \phi(e_jm) = \phi(e_j^2m) = e_j\phi(e_jm) = e_je_in = 0 \Rightarrow \phi = 0$. Abbiamo quindi che $Hom_A(e_iM, e_jN) = 0 \Rightarrow Hom_A(M, N) \cong \bigoplus_{i=1}^n Hom_A(e_iM, e_iN)$. Infine $Hom_A(e_iM, e_iN) = Hom_{Ae_i}(e_iM, e_iN)$ infatti se $\phi \in Hom_A(e_iM, e_iN) \Rightarrow \phi(ae_i(e_im)) = \phi(ae_im) = a\phi(e_im) = ae_i\phi(e_im) \Rightarrow \phi \in Hom_{Ae_i}(e_iM, e_iN)$. Il viceversa è analogo. Abbiamo dunque dimostrato che dal punto di vista della teoria delle rappresentazioni di A possiamo ridurci a studiare le rappresentazioni delle algebre connesse Ae_i . Inoltre anche i morfismi tra gli A -moduli sono completamente determinati dai morfismi tra gli Ae_i -moduli.

1.5 Estensioni di moduli

In questo paragrafo introduciamo alcuni concetti di algebra omologica che saranno fondamentali poi nel capitolo successivo. In particolare vedremo che cos'è un'estensione di due moduli e costruiremo il funtore $Ext_A^n(-, N)$. Una trattazione completa di quanto verrà detto si può trovare per esempio in [8, Cap. 6], [6, Cap. 6], [3, Cap. 1, Sez. 5] e [2, App.].

Definizione 1.5.1. Sia A una $\mathbb{K}$ -algebra e siano $M, N \in A\text{-mod}$. Diciamo che $E \in A\text{-mod}$ è un'estensione di M per N se esiste una successione esatta corta δ della forma: $0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$.

Se $\delta': 0 \longrightarrow N \longrightarrow E' \longrightarrow M \longrightarrow 0$ è un'altra estensione di M per N diremo che questa è equivalente a δ se esiste un isomorfismo $\phi: E \rightarrow E'$ tale che:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \phi & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Sia ora $\mathcal{F}(M, N)$ l'insieme di tutte le estensioni di M per N . Definiamo su tale insieme la relazione di equivalenza $E \sim E' \Leftrightarrow E$ è equivalente ad E' . Poniamo $\mathcal{E}xt_A^1(M, N) := \mathcal{F}(M, N) / \sim$. Adesso definiamo su $\mathcal{E}xt_A^1(M, N)$ una struttura di gruppo. Siano $[E], [E'] \in \mathcal{E}xt_A^1(M, N)$ due estensioni:

$$[E]: \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

$$[E']: \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} M \longrightarrow 0$$

Siano $X := \{(e, e') \in E \oplus E' \mid g(e) = g'(e')\}$ e $Y := \{(f(x), -f'(x)) \in E \oplus E' \mid x \in N\}$. Definiamo $E + E'$ come la successione esatta:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\varepsilon} E'' \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

In cui $E'' = X/Y$, $\varepsilon(x) = [(f(x), 0)]$ e $\pi([(e, e')]) = g(e)$. La classe di equivalenza di $[E + E']$ non dipende dalla scelta dei rappresentanti E ed E' , e definisce su $\mathcal{E}xt_A^1(M, N)$ una struttura di gruppo abeliano in cui lo zero è rappresentato dalla classe di equivalenza della successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \oplus N \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

Vogliamo adesso definire dato $\varphi: X \rightarrow M$ un possibile morfismo

$$\mathcal{E}xt_A^1(\varphi, N): \mathcal{E}xt_A^1(M, N) \rightarrow \mathcal{E}xt_A^1(X, N)$$

La seguente proposizione sarà fondamentale.

Proposizione 1.5.1. [2, App., Prop. 5.3]

Sia $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ una successione esatta corta.

Valgono le seguenti:

i) Se $\alpha: X \rightarrow N$ è un morfismo di A -moduli allora si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & X \times_N M & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (1.1)$$

in cui $X \times_N M$ è il pull-back di X e M su N indotto da g e α e la riga sopra è esatta. Inoltre se esiste un altro diagramma come quello sopra in cui al posto di $X \times_N M$ c'è un altro modulo V allora $V \cong X \times_N M$.

ii) Se $\beta: L \rightarrow X$ è un morfismo di A -moduli allora si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X \times^L M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (1.2)$$

in cui $X \times^L M$ è il push-out di X e M su L indotto da f e β e la riga sotto è esatta. Inoltre se esiste un altro diagramma come quello sopra in cui al posto di $X \times^L M$ c'è un altro modulo U allora $U \cong X \times^L M$.

Possiamo dunque definire $\mathcal{E}xt_A^1(\varphi, N)([E])$, per un'estensione $[E] \in \mathcal{E}xt_A^1(M, N)$, come la classe di equivalenza della prima riga del diagramma 1.1 indotto da φ . Per la proposizione precedente inoltre $\mathcal{E}xt_A^1(\varphi, N)([E])$ è ben posta e definisce un morfismo di gruppi. Possiamo fornire a $\mathcal{E}xt_A^1(M, N)$ una struttura di $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale: infatti se $[E] \in \mathcal{E}xt_A^1(M, N)$ e $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda \cdot [E]$ è la classe di equivalenza della seconda riga del diagramma 1.2 indotta dalla mappa $\lambda \cdot id_N$. Si vede che $\mathcal{E}xt_A^1(-, N)$ è un funtore controvariante dalla categoria $A\text{-mod}$ a $Vect_{\mathbb{K}}$.

La definizione che abbiamo utilizzato finora di estensione di due A -moduli è quella classica. Mostriamo adesso la versione moderna che permette di espandere il concetto di estensione. Sia A una $\mathbb{K}$ -algebra. Siano M, N due A -moduli e sia $P_\bullet: (P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una risoluzione proiettiva di M :

$$\cdots \longrightarrow P_m \xrightarrow{d_m} P_{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

Applichiamo il funtore $\text{Hom}_A(-, N)$ a questa risoluzione proiettiva:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M, N) &\xrightarrow{\text{Hom}_A(\epsilon, N)} \text{Hom}_A(P_0, N) \xrightarrow{\text{Hom}_A(d_1, N)} \text{Hom}_A(P_1, N) \\ &\xrightarrow{\text{Hom}_A(d_2, N)} \text{Hom}_A(P_2, N) \xrightarrow{\text{Hom}_A(d_3, N)} \cdots \end{aligned}$$

Definiamo quindi $\text{Ext}_A^n(M, N) := H_A^n(M, N)$ (n -esimo gruppo di coomologia). Si vede che $\text{Ext}_A^n(M, N)$ non dipende dalla risoluzione proiettiva scelta. Osserviamo inoltre $\text{Ext}_A^n(M, N)$ è un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale. Sia ora $f: M \rightarrow N$ un morfismo. A partire da f possiamo costruire una successione di morfismi $\alpha_k: P_k \rightarrow P'_k$ che realizzano il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_m & \xrightarrow{d_m} & P_{m-1} & \xrightarrow{d_{m-1}} & \cdots & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\epsilon} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_m & & \downarrow \alpha_{m-1} & & & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow f & & \\ \cdots & \longrightarrow & P'_m & \xrightarrow{d'_m} & P'_{m-1} & \xrightarrow{d'_{m-1}} & \cdots & \longrightarrow & P'_1 & \xrightarrow{d'_1} & P'_0 & \xrightarrow{\epsilon'} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Applichiamo adesso il funtore $\text{Hom}_A(-, L)$ con $L \in A\text{-mod}$ per ottenere il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M, L) & \xrightarrow{\text{Hom}_A(\epsilon, L)} & \text{Hom}_A(P_0, L) & \xrightarrow{\text{Hom}_A(d_1, L)} & \text{Hom}_A(P_1, L) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow \text{Hom}_A(f, L) & & \uparrow \text{Hom}_A(\alpha_0, L) & & \uparrow \text{Hom}_A(\alpha_1, L) & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(N, L) & \xrightarrow{\text{Hom}_A(\epsilon', L)} & \text{Hom}_A(P'_0, L) & \xrightarrow{\text{Hom}_A(d'_1, L)} & \text{Hom}_A(P'_1, L) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Poniamo quindi $\text{Ext}_A^n(f, L): \text{Ext}_A^n(N, L) \rightarrow \text{Ext}_A^n(M, L)$ come $\text{Ext}_A^n(f, L) := H^n(\alpha_n, L)$. Ancora una volta $\text{Ext}_A^n(f, L)$ non dipende dai morfismi $(\alpha_\bullet)$ scelti. È chiaro a questo punto che $\text{Ext}_A^n(-, L)$ definisce un funtore controvariante additivo. Vale inoltre il seguente teorema:

Teorema 1.5.1. [8, Cap.6, Cor. 6.62] Sia A una $\mathbb{K}$ -algebra e considerano la successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

Allora $\forall X \in A\text{-mod}$ esiste una successione di morfismi $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ che rendono la seguente successione esatta:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(N, X) & \xrightarrow{\text{Hom}_A(g, X)} & \text{Hom}_A(M, X) & \xrightarrow{\text{Hom}_A(f, X)} & \text{Hom}_A(L, X) \\ & & & & \delta_0 & & \\ & & \text{Ext}_A^1(N, X) & \xleftarrow{\text{Ext}_A^1(f, X)} & \text{Ext}_A^1(M, X) & \xrightarrow{\text{Ext}_A^1(g, X)} & \text{Ext}_A^1(L, X) \\ & & & & \delta_1 & & \\ & & \text{Ext}_A^2(N, X) & \xleftarrow{\text{Ext}_A^2(f, X)} & \text{Ext}_A^2(M, X) & \xrightarrow{\text{Ext}_A^2(g, X)} & \text{Ext}_A^2(L, X) \\ & & & & \delta_2 & & \\ & & \text{Ext}_A^3(N, X) & \xleftarrow{\text{Ext}_A^3(f, X)} & \text{Ext}_A^3(M, X) & \xrightarrow{\text{Ext}_A^3(g, X)} & \dots \end{array}$$

Osservazione 1.5.1. Sia $P \in A\text{-mod}$ proiettivo, allora $\forall n \in \mathbb{N} \ n \geq 1$ $\forall X \in A\text{-mod} \ \text{Ext}_A^n(P, X) = 0$. Infatti P ammette una risoluzione proiettiva della forma:

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow P \xrightarrow{id} P \longrightarrow 0$$

Applicando $\text{Hom}_A(-, X)$ e calcolando la coomologia del complesso ottenuto si ha subito che $\text{Ext}_A^n(P, X) = 0$.

Osservazione 1.5.2. Se M è un A -modulo, allora esiste una successione esatta corta: $0 \longrightarrow N \xrightarrow{\eta} P \longrightarrow M \longrightarrow 0$ con P modulo proiettivo. Applicando il teorema precedente con un arbitrario modulo X otteniamo la successione esatta:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M, X) \longrightarrow \text{Hom}_A(P, X) \xrightarrow{\eta^*} \text{Hom}_A(N, X) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(M, X) \longrightarrow 0$$

Da questo si deduce che $\text{Coker}(\eta^*) = \text{Ext}_A^1(M, X)$.

Osservazione 1.5.3. Si può costruire in maniera analoga anche il funtore $\text{Ext}_A^n(M, -)$: se $N \in A\text{-mod}$, possiamo fissare una risoluzione proiettiva di

M e applicare $\operatorname{Hom}_A(-, N)$ a tale risoluzione definendo $\operatorname{Ext}_A^n(M, N)$ come l' n -esimo gruppo di coomologia del complesso ottenuto. Anche in questo caso $\operatorname{Ext}_A^n(M, N)$ non dipende dalla scelta di una particolare risoluzione proiettiva. Si dimostra in maniera analoga al caso M proiettivo che se N è iniettivo $\operatorname{Ext}_A^n(M, N) = 0$ per ogni $M \in A\text{-mod}$. Vale inoltre un analogo del Teorema 1.5.1.

Il teorema seguente ci dice che la definizione moderna è coerente con quella classica.

Teorema 1.5.2. *[2, App., Teo. 5.9] Per ogni coppia di A -moduli M, N si ha che $\mathcal{E}xt_A^1(M, N) \cong \operatorname{Ext}_A^1(M, N)$. Inoltre questo isomorfismo è funtoriale.*

Capitolo 2

La teoria di Auslander-Reiten

In questo capitolo entriamo finalmente nel cuore della teoria di Auslander-Reiten. In particolare partiremo dalla costruzione del funtore di traslazione per arrivare a dimostrare la formula di Auslander-Reiten. La formula ci permetterà di dimostrare il risultato centrale della teoria cioè l'esistenza di particolari successioni esatte dette quasi-split, che saranno poi fondamentali per la costruzione del quiver di Auslander-Reiten. Per tutto il capitolo $\mathbb{K}$ sarà un campo e A una $\mathbb{K}$ -algebra di dimensione finita. Come sempre $A\text{-mod}$ indicherà la categoria degli A -moduli finitamente generati, cioè di dimensione finita.

2.1 I funtori di traslazione

Prima di iniziare ricordiamo che se M è un A -modulo destro allora ha una struttura naturale di A^{op} -modulo sinistro: per ogni $m \in M$ e $a \in A^{op}$ definiamo $a \cdot m := m \cdot a$. In modo analogo ogni A^{op} -modulo sinistro diventa un A -modulo destro. Tratteremo dunque gli A -moduli destri come A^{op} -moduli sinistri e viceversa. Se $M \in A\text{-mod}$, allora $\text{Hom}_A(M, A)$ ha una naturale struttura di A^{op} -modulo data da $(f \cdot a)(m) := f(m) \cdot a$ per $a \in A$ $f \in \text{Hom}_A(M, A)$. È chiaro che $\text{Hom}_A(-, A)$ definisce un funtore controvariante, additivo ed esatto a destra dalla categoria $A\text{-mod}$ alla categoria

$A^{op}\text{-mod}$. Non definisce invece un'equivalenza categoriale, al contrario del funtore $D := \text{Hom}_{\mathbb{K}}(-, \mathbb{K})$ visto in precedenza. Tuttavia vale la seguente proposizione:

Proposizione 2.1.1. [3, Cap. 2, Prop. 4.3] *Sia $\text{proj} A$ la sottocategoria piena di $A\text{-mod}$ i cui oggetti sono gli $A\text{-mod}$ proiettivi. Allora si ha che il funtore $\text{Hom}_A(-, A)|_{\text{proj} A}: \text{proj} A \rightarrow \text{proj} A^{op}$ è un'equivalenza categoriale. Inoltre $\text{Hom}_{A^{op}}(\text{Hom}_A(-, A), A^{op}) \cong \mathbb{1}_{\text{proj} A}$.*

Introduciamo adesso la seguente notazione: se $M, N \in A\text{-mod}$ e $f: M \rightarrow N$ è un morfismo di $A\text{-mod}$, allora indichiamo con M^* l' A^{op} -modulo $\text{Hom}_A(M, A)$ e con f^* il morfismo $\text{Hom}_A(f, A)$. Sia $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$ una presentazione minimale proiettiva di M .

Applicando il funtore $\text{Hom}_A(-, A)$ otteniamo la seguente successione esatta:

$$0 \longrightarrow M^* \longrightarrow P_0^* \xrightarrow{f^*} P_1^* \longrightarrow \text{Coker}(f^*) \longrightarrow 0$$

La trasposizione (di Auslander-Reiten) di M è l' A^{op} -modulo $\text{Coker}(f^*)$ e lo indicheremo con $\text{Tr}(M)$. La seguente proposizione ci dice che la definizione di trasposizione è ben posta.

Proposizione 2.1.2. *La trasposizione di un $A\text{-modulo}$ M non dipende dalla presentazione proiettiva minimale scelta.*

Dimostrazione. Sia quindi $P_1 \xrightarrow{f'} P'_0 \xrightarrow{\pi'} M \longrightarrow 0$ un'altra presentazione minimale proiettiva di M . Possiamo costruire il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{f} & P_0 & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow g_1 & & \downarrow g_0 & & \parallel & & \\ P'_1 & \xrightarrow{f'} & P'_0 & \xrightarrow{\pi'} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Poichè π e π' sono rivestimenti proiettivi di M si ha che P_0 e P'_0 sono isomorfi. Chiamiamo $g_0: P_0 \rightarrow P'_0$ tale isomorfismo. Osserviamo che $\pi' \circ g_0 = \pi \Rightarrow \pi' \circ g_0 \circ f = \pi \circ f = 0 \Rightarrow g_0(\text{Im}(f)) \subseteq \text{Ker}(\pi')$ e analogamente si ha

che $g_0^{-1}(Im(f')) \subseteq Ker(\pi) = Im(f) \Rightarrow g_0(Im(f)) = Im(f') \Rightarrow Im(f) \cong Im(f')$. Quindi f e f' sono rivestimenti proiettivi dello stesso modulo $\Rightarrow P_1$ e P'_1 sono isomorfi e $g_1: P_1 \rightarrow P'_1$ è questo isomorfismo. Se applichiamo adesso $Hom_A(-, A)$ al diagramma scritto sopra si ha che:

$$\begin{array}{ccccccc} P_0^* & \xrightarrow{f^*} & P_1^* & \xrightarrow{\varphi} & Tr(M) & \longrightarrow & 0 \\ g_0^* \uparrow & & g_1^* \uparrow & & h \uparrow & & \\ (P'_0)^* & \xrightarrow{(f')^*} & (P'_1)^* & \xrightarrow{\psi} & Coker((f')^*) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Per la Proposizione 2.1.1 g_0^* e g_1^* sono isomorfismi. Inoltre $(\varphi \circ g_1^*) \circ (f')^* = \varphi \circ (f^* \circ g_0^*) = (\varphi \circ f^*) \circ g_0^* = 0 \Rightarrow \exists h: Coker((f')^*) \rightarrow Tr(M)$ tale che $h \circ \psi = \varphi \circ g_1^*$ e h è chiaramente un isomorfismo $\Rightarrow Tr(M) \cong Coker((f')^*)$. Abbiamo quindi dimostrato che $Tr(M)$ non dipende dalla presentazione minimale proiettiva scelta. $\square$

Osservazione 2.1.1. M è proiettivo se e solo se $Tr(M) = 0$. Infatti se M è proiettivo $0 \longrightarrow M \xrightarrow{id} M \longrightarrow 0$ è una presentazione minimale proiettiva di $M \Rightarrow 0 \longrightarrow M^* \longrightarrow M^* \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$ è esatta $\Rightarrow Tr(M) = 0$. Viceversa se $Tr(M) = 0$ e $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ è una presentazione proiettiva minimale di M la successione:

$$0 \longrightarrow M^* \longrightarrow P_1^* \longrightarrow P_0^* \longrightarrow 0$$

è esatta e P_0^* è proiettivo $\Rightarrow$ la successione è split $\Rightarrow M^*$ è proiettivo $\Rightarrow M$ è proiettivo (per la Proposizione 2.1.1).

Il problema di estendere Tr ad un funtore $A\text{-mod} \rightarrow A^{op}\text{-mod}$ presenta delle difficoltà. Vediamo perchè.

Supponiamo che $P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$ e $Q_1 \xrightarrow{\beta} Q_0 \xrightarrow{\psi} N \longrightarrow 0$ siano presentazioni minimali proiettive di M e N rispettivamente. Si ha

quindi il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 P_1 & \xrightarrow{\alpha} & P_0 & \xrightarrow{\varphi} & M & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow g_1 & & \downarrow g_0 & & \downarrow f & & \\
 Q_1 & \xrightarrow{\beta} & Q_0 & \xrightarrow{\psi} & N & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Poichè ψ è suriettiva e P_0 è proiettivo $\Rightarrow \exists g_0: P_0 \rightarrow Q_0$ $\psi \circ g_0 = f \circ \varphi$. Inoltre $\psi \circ g_0 \circ \alpha = f \circ \varphi \circ \alpha = 0 \Rightarrow \exists g_1: P_1 \rightarrow Q_1$ $g_0 \circ \alpha = \beta \circ g_1$. Sfruttando $\text{Hom}_A(-, A)$ otteniamo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 P_0^* & \xrightarrow{\alpha^*} & P_1^* & \xrightarrow{\delta} & \text{Tr}(M) & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow g_0^* & & \uparrow g_1^* & & \uparrow \zeta_g & & \\
 Q_0^* & \xrightarrow{\beta^*} & Q_1^* & \xrightarrow{\varepsilon} & \text{Tr}(N) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Dato che $\delta \circ g_1^* \circ \beta^* = (\delta \circ \alpha^*) \circ g_0^* = 0$. Quindi per la proprietà universale di $\text{Tr}(N) = \text{Coker}(\beta^*)$ si ha che $\exists \zeta_g: \text{Tr}(N) \rightarrow \text{Tr}(M)$ tale che $\zeta_g \circ \varepsilon = \delta \circ g_1^*$. Se definissimo $\text{Tr}(f)$ come ζ_g allora questa definizione non sarebbe ben posta in quanto dipenderebbe dalla scelta dei morfismi (g_0, g_1) . Infatti supponiamo che (h_0, h_1) sia un'altra coppia di morfismi tali per cui:

$$\begin{array}{ccccccc}
 P_1 & \xrightarrow{\alpha} & P_0 & \xrightarrow{\varphi} & M & \longrightarrow & 0 \\
 \left(\begin{array}{c} \downarrow h_1 \\ \downarrow g_1 \end{array} \right) & & \left(\begin{array}{c} \downarrow h_0 \\ \downarrow g_0 \end{array} \right) & & \downarrow f & & \\
 Q_1 & \xrightarrow{\beta} & Q_0 & \xrightarrow{\psi} & N & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

(Note: In the original image, there is a dashed arrow σ from P_0 to Q_1 and a dashed arrow τ from P_1 to Q_0 in the second diagram.)

$\psi \circ (h_0 - g_0) = 0 \Rightarrow \exists \sigma: P_0 \rightarrow Q_1$ tale che $\beta \circ \sigma = h_0 - g_0$ (segue dalla proiettività di P_0 e dal fatto che $\text{Im}(\beta) = \text{Ker}(\psi)$). Applichiamo nuovamente $\text{Hom}_A(-, A)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 P_0^* & \xrightarrow{\alpha^*} & P_1^* & \xrightarrow{\delta} & \text{Tr}(M) & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow g_0^* & & \uparrow g_1^* & & \uparrow \zeta_g & & \\
 Q_0^* & \xrightarrow{\beta^*} & Q_1^* & \xrightarrow{\varepsilon} & \text{Tr}(N) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

(Note: In the original image, there are additional dashed arrows σ^* from Q_1^* to P_0^* and τ^* from Q_0^* to P_1^* in the third diagram.)

$(h_1^* - g_1^*) \circ \beta^* = h_1^* \circ \beta^* - g_1^* \circ \beta^* = \alpha^* \circ h_0^* - \alpha^* \circ g_0^* = \alpha^* \circ (h_0^* - g_0^*) = \alpha^* \circ \sigma^* \circ \beta^* \Rightarrow (h_1^* - g_1^* - \alpha^* \circ \sigma^*) \circ \beta^* = 0$. Per la proprietà universale di $Coker(\beta^*) = Tr(N)$ esiste $\tau: Tr(N) \rightarrow P_1^*$ tale che $\tau \circ \varepsilon = h_1^* - g_1^* - \alpha^* \circ \sigma^* \Rightarrow \delta \circ \tau \circ \varepsilon = \delta \circ (h_1^* - g_1^* - \alpha^* \circ \sigma^*) = \delta \circ (h_1^* - g_1^*) \Rightarrow \delta \circ \tau \circ \varepsilon = \delta \circ (h_1^* - g_1^*) = (\zeta_h - \zeta_g) \circ \varepsilon \Rightarrow \delta \circ \tau = \zeta_h - \zeta_g$. Abbiamo quindi ottenuto che ζ_g e ζ_h non sono uguali ma differiscono per un morfismo che si fattorizza nel prodotto di due morfismi tramite un A^{op} -modulo proiettivo. Per ovviare a questo problema introduciamo la seguente definizione:

Definizione 2.1.1. Siano $M, N \in A\text{-mod}$. Definiamo $\mathcal{P}(M, N)$ come il sottospazio di $Hom_A(M, N)$ generato dai morfismi $f \in Hom_A(M, N)$ tali che $f = g \circ h$ con $g \in Hom_A(P, N)$ e $h \in Hom_A(M, P)$ per un qualche $P \in A\text{-mod}$ proiettivo. In questo caso si dice che f fattorizza tramite un proiettivo. Analogamente possiamo definire $\mathcal{I}(M, N)$ come il sottospazio di $Hom_A(M, N)$ generato dai morfismi $f \in Hom_A(M, N)$ tali che $f = g \circ h$ con $g \in Hom_A(I, N)$ e $h \in Hom_A(M, I)$ per un qualche $I \in A\text{-mod}$ iniettivo. Diremo in questo caso che f fattorizza tramite un iniettivo.

Osservazione 2.1.2. $\mathcal{P}(M, N)$ e $\mathcal{I}(M, N)$ sono $End_A(N)$ - $End_A(M)$ bisottomoduli di $Hom_A(M, N)$ dove la struttura di $End_A(N)$ - $End_A(M)$ bimodulo su quest'ultimo è data dalla composizione a sinistra (risp. destra) per gli elementi di $End_A(N)$ (risp. $End_A(M)$).

Definizione 2.1.2. Siano $M, N \in A\text{-mod}$. Poniamo:

$$\underline{Hom}_A(M, N) := Hom_A(M, N) / \mathcal{P}(M, N)$$

$$\overline{Hom}_A(M, N) := Hom_A(M, N) / \mathcal{I}(M, N)$$

Definiamo inoltre $A\text{-}\underline{mod}$ come la categoria i cui oggetti sono gli stessi di $A\text{-mod}$, mentre i morfismi tra due oggetti $M, N \in A\text{-}\underline{mod}$ sono dati da $\underline{Hom}_A(M, N)$. La composizione è definita in modo naturale: se S è un altro A -modulo con $[f] \in \underline{Hom}_A(M, N)$ e $[g] \in \underline{Hom}_A(N, S)$ $[g] \circ [f] := [g \circ f]$. Analogamente si definisce la categoria $A\text{-}\overline{mod}$ come la categoria con gli stessi oggetti di $A\text{-mod}$, con i morfismi tra due oggetti $M, N \in A\text{-}\overline{mod}$ dati da $\overline{Hom}_A(M, N)$ e la stessa composizione di $A\text{-}\underline{mod}$.

Osservazione 2.1.3. Se $P \in A\text{-mod}$ è proiettivo e $f: M \rightarrow P$ è un morfismo, allora $f = f \circ id_P \Rightarrow \underline{Hom}_A(M, P) = 0$. Se $g: P \rightarrow N$ allora $g = id_P \circ g \Rightarrow \underline{Hom}_A(P, N) = 0$. Questo si può esprimere dicendo che P è un *oggetto nullo* della categoria additiva $A\text{-mod}$. Con un linguaggio più sofisticato un oggetto X di una categoria $\mathcal{C}$ è detto nullo se per ogni altro oggetto $Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ si ha che $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$ contengono un solo elemento. Gli oggetti nulli se esistono sono unici a meno di isomorfismo. Analogamente se $I \in A\text{-mod}$ è iniettivo, allora è un oggetto nullo di $\overline{A\text{-mod}}$.

Torniamo adesso alla trasposizione di Auslander-Reiten. Abbiamo dimostrato prima che $Tr(f)$ è ben definita a meno di morfismi che fattorizzano per un proiettivo $\Rightarrow Tr(f)$ è ben definito in $A^{op}\text{-mod}$. Si verifica facilmente che $Tr(-): A\text{-mod} \rightarrow A^{op}\text{-mod}$ è un funtore $\mathbb{K}$ -lineare. Inoltre se quozientiamo la categoria $A\text{-mod}$ per un'opportuna relazione otteniamo che $Tr(-)$ induce un'equivalenza categoriale. Sarà utile la seguente proposizione:

Proposizione 2.1.3.

- i) $Tr(-)$ è un funtore additivo, soddisfa cioè $Tr(N \oplus L) \cong Tr(N) \oplus Tr(L)$.
- ii) Se $N \in A^{op}\text{-mod}$ è indecomponibile non proiettivo allora esiste $M \in A\text{-mod}$ tale che $Tr(M) \cong N$.
- iii) Se $M \in A\text{-mod}$ è indecomponibile non proiettivo allora $Tr(M)$ è indecomponibile.

Dimostrazione.

- i) Sia $M \in A\text{-mod}$ e supponiamo $M = N \oplus L$. Consideriamo le presentazioni proiettive minimali di N e L :

$$P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

$$Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

Dato che somma diretta di rivestimenti proiettivi è un rivestimento proiettivo si ha che:

$$P_1 \oplus Q_1 \longrightarrow P_0 \oplus Q_0 \longrightarrow N \oplus L \longrightarrow 0$$

è una presentazione minimale proiettiva di $M = N \oplus L$. Applicando adesso $\text{Hom}_A(-, A)$ si ottiene il seguente diagramma:

$$P_0^* \oplus Q_0^* \longrightarrow P_1^* \oplus Q_1^* \longrightarrow \text{Tr}(N) \oplus \text{Tr}(L) \longrightarrow 0$$

($\text{Hom}_A(-, A)$ è un funtore additivo). Da questo segue che $\text{Tr}(M) \cong \text{Tr}(L) \oplus \text{Tr}(N) \Rightarrow \text{Tr}(-)$ è additivo.

- ii) Sia $N \in A^{\text{op}}\text{-mod}$ indecomponibile non proiettivo di presentazione proiettiva $Q_0 \xrightarrow{\alpha} Q_1 \longrightarrow N \longrightarrow 0$. Applicando l'equivalenza $\text{Hom}_A(-, A)$ otteniamo la presentazione proiettiva

$$Q_1^* \xrightarrow{\alpha^*} Q_0^* \xrightarrow{\pi} \text{Coker}(\alpha^*) \longrightarrow 0$$

Poniamo $M := \text{Coker}(\alpha^*)$. Grazie ai Teoremi 1.1.1 e 1.1.2 si ha una decomposizione di $Q_0^* = P_0 \oplus E_0$ con $\text{Ker}(\pi) \subseteq E_0 \Rightarrow \pi = (\beta, 0): P_0 \oplus E_0 \rightarrow M$ dove $\beta: P_0 \rightarrow M$ è un rivestimento proiettivo. $\text{Ker}(\pi) = \text{Ker}(\beta) \oplus E_0 = \text{Im}(\alpha^*)$ quindi se $\varphi: P_1 \rightarrow \text{Ker}(\beta)$ è un rivestimento proiettivo $\Rightarrow \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \text{id}_{E_0} \end{pmatrix}: P_1 \oplus E_0 \rightarrow \text{Im}(\alpha^*)$ è un rivestimento proiettivo $\Rightarrow Q_1^* = (P_1 \oplus E_0) \oplus E_1$ e $\alpha^* = \begin{pmatrix} \varphi & 0 & 0 \\ 0 & \text{id}_{E_0} & 0 \end{pmatrix}$. Ci troviamo dunque nella seguente situazione:

$$P_1 \oplus (E_0 \oplus E_1) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \varphi & 0 & 0 \\ 0 & \text{id}_{E_0} & 0 \end{pmatrix}} P_0 \oplus E_0 \xrightarrow{(\beta, 0)} M \longrightarrow 0$$

Osserviamo che $\text{Coker}(\alpha^*) \cong \text{Coker}(\varphi)$. Sfruttando la dualità data da $\text{Hom}_A(-, A)$ si ha che $\alpha: P_0^* \oplus E_0^* \rightarrow P_1^* \oplus E_0^* \oplus E_1^*$ è data dalla matrice $\begin{pmatrix} \varphi^* & 0 \\ 0 & \text{id}_{E_0^*} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Sappiamo che $N \cong \text{Coker}(\alpha) = (P_1^* \oplus E_0^* \oplus E_1^*)/\text{Im}(\alpha) = (P_1^* \oplus E_0^* \oplus E_1^*)/(\text{Im}(\varphi^*) \oplus E_0^*) \cong \text{Coker}(\varphi^*) \oplus E_1^*$ Poichè N è indecomponibile e φ^* non è suriettiva $\Rightarrow N \cong \text{Coker}(\varphi^*)$, ma allora visto che $P_1 \xrightarrow{\varphi} P_0 \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0$ è una presentazione proiettiva minimale di M si ha che $\text{Tr}(M) = \text{Coker}(\varphi) \cong N$.

iii) Supponiamo $P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ sia una presentazione minimale proiettiva di M . Applicando $\text{Hom}_A(-, A)$ otteniamo la presentazione proiettiva $P_0^* \xrightarrow{\alpha^*} P_1^* \xrightarrow{\pi} \text{Tr}(M) \longrightarrow 0$. Osserviamo che tale presentazione è necessariamente minimale. Se non lo fosse, con un ragionamento analogo a quanto fatto nel punto precedente, si avrebbe una presentazione proiettiva:

$$Q_0^* \oplus (E_1^* \oplus E_0^*) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \varphi^* & 0 & 0 \\ 0 & id_{E_1^*} & 0 \end{pmatrix}} Q_1^* \oplus E_1^* \xrightarrow{(\beta^*, 0)} \text{Tr}(M) \longrightarrow 0$$

Ma allora come nel punto precedente si avrebbe $M \cong \text{Coker}(\varphi) \oplus E_0$. Dato che M è indecomponibile si ha che $E_0 = 0 \Rightarrow E_0^* = 0$ che è assurdo. Quindi la presentazione era minimale e inoltre $\varphi = \alpha$. Dato che la presentazione $P_0^* \longrightarrow P_1^* \longrightarrow \text{Tr}(M) \longrightarrow 0$ è minimale, se utilizziamo ancora $\text{Hom}_A(-, A)$, otteniamo che $\text{Tr}(\text{Tr}(M)) \cong M$. Da questo la tesi segue facilmente.

□

Teorema 2.1.1. $\text{Tr}(-): A\text{-mod} \rightarrow A^{op}\text{-mod}$ è un equivalenza categoriale.

Dimostrazione. Mostriamo che $\text{Tr}(-): A\text{-mod} \rightarrow A^{op}\text{-mod}$ è essenzialmente suriettivo, cioè che per ogni $N \in A^{op}\text{-mod}$ esiste $M \in A\text{-mod}$ tale che $\text{Tr}(M) \cong N$. Grazie alla proposizione precedente, insieme al Teorema di Krull-Schmidt, basta mostrarlo per gli A^{op} -moduli indecomponibili. Se $N \in A^{op}\text{-mod}$ è indecomponibile proiettivo è ovvio, in quanto oggetto nullo di $A^{op}\text{-mod}$. Altrimenti se N è non proiettivo segue dalla proposizione precedente. Questo dimostra che è essenzialmente suriettivo. Mostriamo adesso che $\text{Tr}(-)$ è anche pieno e cioè che per ogni coppia di A -moduli M e N la mappa $\text{Tr}: \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{A^{op}}(\text{Tr}(N), \text{Tr}(M))$ è suriettiva. Siano $M, N \in A\text{-mod}$ e consideriamo: $P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$
 $P'_1 \xrightarrow{\beta} P'_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$ presentazioni minimali proiettive di M e N rispettivamente. Supponiamo inoltre $\zeta \in \underline{\text{Hom}}_{A^{op}}(\text{Tr}(N), \text{Tr}(M))$. Possia-

mo quindi costruire il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 P_0^* & \xrightarrow{\alpha^*} & P_1^* & \xrightarrow{\varphi} & Tr(M) & \longrightarrow & 0 \\
 \sigma_0 \uparrow & & \sigma_1 \uparrow & & \zeta \uparrow & & \\
 P_0'^* & \xrightarrow{\beta^*} & P_1'^* & \xrightarrow{\psi} & Tr(N) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Per dualità otteniamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 P_1 & \xrightarrow{\alpha} & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \delta_1 & & \downarrow \delta_0 & & \downarrow f & & \\
 Q_1 & \xrightarrow{\beta} & Q_0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

È chiaro che $Tr(f) = \zeta$. Da ciò segue che è un funtore pieno. Mostriamo ora che $Tr(-)$ è un funtore fedele cioè che per ogni coppia di A -moduli M e N la mappa $Tr: \underline{Hom}_A(M, N) \rightarrow \underline{Hom}_{A^{op}}(Tr(N), Tr(M))$ è iniettiva. Per fare ciò è necessario e sufficiente mostrare che $Tr(f) = 0 \Leftrightarrow f \in \mathcal{P}(M, N)$. Consideriamo il diagramma seguente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 P_0^* & \xrightarrow{\alpha^*} & P_1^* & \xrightarrow{\varphi} & Tr(M) & \longrightarrow & 0 \\
 \sigma_0 \uparrow & \nwarrow w & \sigma_1 \uparrow & \nwarrow \xi & \zeta \uparrow & & \\
 P_0'^* & \xrightarrow{\beta^*} & P_1'^* & \xrightarrow{\psi} & Tr(N) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Osserviamo che se esiste $w: P_1'^* \rightarrow P_0^*$ tale che $\alpha^* \circ w \circ \beta^* = \sigma_1 \circ \beta^* \Rightarrow \zeta = 0$. Infatti si ha che $(\sigma_1 - \alpha^* \circ w) \circ \beta^* = 0$. Dato che $Tr(N) = Coker(\beta^*)$ esiste $\xi: Tr(N) \rightarrow P_1^*$ tale che $\xi \circ \psi = \sigma_1 - \alpha^* \circ w \Rightarrow \varphi \circ \xi \circ \psi = \varphi \circ \sigma_1 - \varphi \circ \alpha^* \circ w = \varphi \circ \sigma_1 = \zeta \circ \psi \Rightarrow \varphi \circ \xi = \zeta \Rightarrow \zeta$ fattorizza per il proiettivo $P_1^* \Rightarrow \zeta = 0$. Inoltre vale anche il viceversa. Supponiamo $\zeta = g \circ h$ con $g: Q \rightarrow Tr(M)$ e $h: Tr(N) \rightarrow Q$ morfismi e $Q \in A^{op}\text{-mod}$ proiettivo. Si ha dunque il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 P_0^* & \xrightarrow{\alpha^*} & P_1^* & \xrightarrow{\varphi} & Tr(M) & \longrightarrow & 0 \\
 \sigma_0 \uparrow & \nwarrow w & \sigma_1 \uparrow & \nwarrow v & g \uparrow & & \\
 & & & & Q & & \\
 & & & & h \uparrow & & \\
 P_0'^* & \xrightarrow{\beta^*} & P_1'^* & \xrightarrow{\psi} & Tr(N) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Dato che φ è suriettiva esiste $v: Q \rightarrow P_1^* \Rightarrow \varphi \circ v = g \Rightarrow \varphi \circ (\sigma_1 - v \circ h \circ \psi) = \varphi \circ \sigma_1 - \varphi \circ v \circ h \circ \psi = \varphi \circ \sigma_1 - \zeta \circ \psi = 0 \Rightarrow \exists w: P_1'^* \rightarrow P_0^*$ tale che $\alpha^* \circ w = \sigma_1 - v \circ h \circ \psi \Rightarrow \alpha^* \circ w \circ \beta^* = \sigma_1 \circ \beta^*$. Un ragionamento analogo mostra che dato il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{\alpha} & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \delta_1 & \swarrow w & \downarrow \delta_0 & & \downarrow f & & \\ Q_1 & \xrightarrow{\beta} & Q_0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$f \in \mathcal{P}(M, N) \Leftrightarrow \exists w: P_0 \rightarrow Q_1$ tale che $\beta \circ w \circ \alpha = \delta_0 \circ \alpha$. Dalla caratterizzazione appena ottenuta, sfruttando l'equivalenza data da $\text{Hom}_A(-, A)$, si ha subito quanto volevamo mostrare. Dato che $\text{Tr}: A\text{-mod} \rightarrow A^{op}\text{-mod}$ è essenzialmente suriettivo, pieno e fedele si ha che $\text{Tr}(-)$ è un'equivalenza categoriale. $\square$

Consideriamo adesso la dualità standard D . Poichè D è un'equivalenza categoriale è chiaro che se $M, N \in A\text{-mod}$ allora $f \in P(M, N) \Leftrightarrow D(f) \in I(D(N), D(M))$. Da questo segue che $D: A\text{-mod} \rightarrow A^{op}\text{-mod}$ è un'equivalenza categoriale.

Definizione 2.1.3. Le traslazioni di Auslander-Reiten sono le equivalenze categoriali τ e τ^{-1} ottenute dalla composizione del funtore di trasposizione con la dualità standard, cioè $\tau := D \circ \text{Tr}: A\text{-mod} \rightarrow A\text{-mod}$ e $\tau^{-1} := \text{Tr} \circ D: A\text{-mod} \rightarrow A\text{-mod}$.

Dalla Proposizione 2.1.3 e dal Teorema 2.1.1 si ha la seguente proposizione:

Proposizione 2.1.4. Sia $M \in A\text{-mod}$. Valgono le seguenti:

- i) Se M è proiettivo allora $\tau M = 0$. Se M è indecomponibile non proiettivo τM è indecomponibile non iniettivo e $\tau^{-1}(\tau M) \cong M$.
- ii) Se M è iniettivo allora $\tau^{-1} M = 0$. Se M è indecomponibile non iniettivo $\tau^{-1} M$ è indecomponibile non iniettivo e $\tau(\tau^{-1} M) \cong M$.

2.2 La formula di Auslander-Reiten

L'obiettivo di questo paragrafo è la dimostrazione della celebre formula di Auslander e Reiten, che permette di legare il $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale delle estensioni di due A -moduli con il duale dello spazio dei morfismi in $A\text{-mod}$. Per la dimostrazione della formula seguiremo principalmente [7].

Cominciamo dal seguente paio di lemmi:

Lemma 2.2.1. *Se $V \in A^{op}\text{-mod}$ e $W \in A\text{-mod}$, allora $D(V \otimes_A W) \cong \text{Hom}_A(V, D(W))$. Tale isomorfismo è funtoriale in V e W .*

Dimostrazione. Osserviamo intanto che l'enunciato è ben posto: V è un $\mathbb{K}$ - A bimodulo e W è un A - $\mathbb{K}$ bimodulo $\Rightarrow V \otimes_A W$ è un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale. Sfruttando il fatto che il funtore $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(-, W)$ è aggiunto a sinistra al funtore $-\otimes_A W$ (si veda per esempio [8, Cap. 2, Teo 2.75]) si ha che $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes_A W, \mathbb{K}) \cong \text{Hom}_{A^{op}}(V, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, \mathbb{K}))$ e tale isomorfismo è funtoriale in V e W . $\square$

Lemma 2.2.2. [3, Cap. 2, Prop. 4.4] *Siano $V, W \in A\text{-mod}$. Valgono le seguenti:*

i) *Il morfismo $\psi: \text{Hom}_A(V, A) \otimes_A W \rightarrow \text{Hom}_A(V, W)$, definito da $\psi(f \otimes w)(v) := f(v)w$ per ogni $f \in \text{Hom}_A(V, A)$, per ogni $w \in W$ e per ogni $v \in V$, è funtoriale in V e W .*

ii) *Se V è proiettivo allora ψ è un isomorfismo per ogni A -modulo W .*

Definizione 2.2.1. Se $\delta: 0 \longrightarrow V \xrightarrow{\phi} W \xrightarrow{\psi} U \longrightarrow 0$ è una successione esatta corta di A -moduli e $X \in A\text{-mod}$, allora $\delta_*(X) := \text{Coker}(\text{Hom}_A(\phi, X))$ e $\delta^*(X) := \text{Coker}(\text{Hom}_A(X, \psi))$ sono detti difetto covariante e controvariante di X rispetto alla successione esatta δ .

Vorremmo rendere $\delta^*(-)$ e $\delta_*(-)$ dei funtori dalla categoria $A\text{-mod}$ a $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$. Dato un morfismo $f: X \rightarrow Y$ di A -moduli possiamo definire $\delta^*(f): \delta^*(X) \rightarrow$

$\delta^*(Y)$ come l'unico morfismo che rende commutativo il diagramma seguente:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(X, V) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(X, W) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(X, U) \xrightarrow{\pi_X} \delta^*(X) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{Hom}_A(f, V) & & \downarrow \text{Hom}_A(f, W) & & \downarrow \text{Hom}_A(f, U) \quad \downarrow \delta^*(f) \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(Y, V) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(Y, W) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(Y, U) \xrightarrow{\pi_Y} \delta^*(Y) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Tale morfismo esiste ed è unico per la proprietà universale di $\delta^*(X) = \text{Coker}(\text{Hom}_A(X, \psi))$. Infatti $\pi_Y \circ \text{Hom}_A(f, U) \circ \text{Hom}_A(X, \psi) = \pi_Y \circ \text{Hom}_A(Y, \psi) \circ \text{Hom}_A(f, W) = 0$ quindi, per la proprietà universale di $\text{Coker}(\text{Hom}_A(X, \psi))$, esiste un unico morfismo $\delta^*(f): \delta^*(X) \rightarrow \delta^*(Y)$ tale che $\delta^*(f) \circ \pi_X = \pi_Y \circ \text{Hom}_A(f, U)$. La definizione che abbiamo dato rende $\delta^*(-): A\text{-mod} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$ un funtore covariante. Similmente possiamo definire $\delta_*(-): \delta_*(Y) \rightarrow \delta_*(X)$ e la definizione data rende $\delta_*(-): A\text{-mod} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$ un funtore controvariante.

Teorema 2.2.1. *Siano $\delta: 0 \longrightarrow V \xrightarrow{\phi} W \xrightarrow{\psi} U \longrightarrow 0$ una successione esatta corta di A -moduli e $X \in A\text{-mod}$. Allora si ha che $D\delta^*(X) \cong \delta_*(D\text{Tr}(X))$. Inoltre tale isomorfismo è funtoriale in X .*

Dimostrazione. Sia $P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$ una presentazione minimale proiettiva di $X \Rightarrow P_0^* \longrightarrow P_1^* \longrightarrow \text{Tr}(X) \longrightarrow 0$ è una successione esatta. Applichiamo adesso a questa successione il funtore $- \otimes_A V$ da cui otteniamo la successione esatta

$$P_0^* \otimes_A V \longrightarrow P_1^* \otimes_A V \longrightarrow \text{Tr}(X) \otimes_A V \longrightarrow 0$$

(ricordiamo che $- \otimes_A V$ è un funtore esatto a destra). Dal Lemma 2.2.2 si ha il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} P_0^* \otimes_A V & \longrightarrow & P_1^* \otimes_A V & \longrightarrow & \text{Tr}(X) \otimes_A V & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & & & \\ 0 \rightarrow \text{Hom}_A(X, V) & \rightarrow & \text{Hom}_A(P_0, V) & \rightarrow & \text{Hom}_A(P_1, V) & & \end{array}$$

Dove la riga sotto è ottenuta applicando il funtore $\text{Hom}_A(-, V)$ alla presentazione proiettiva minimale di X . Per la funtorialità dell'isomorfismo dato dal Lemma 2.2.2 si costruisce la successione esatta:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(X, V) \rightarrow \text{Hom}_A(P_0, V) \rightarrow \text{Hom}_A(P_1, V) \rightarrow \text{Tr}(X) \otimes_A V \rightarrow 0$$

Possiamo ripetere lo stesso ragionamento anche con W e U per ottenere il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & Hom_A(X, V) & \rightarrow & Hom_A(P_0, V) & \rightarrow & Hom_A(P_1, V) & \rightarrow Tr(X) \otimes_A V \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 0 \rightarrow & Hom_A(X, W) & \rightarrow & Hom_A(P_0, W) & \rightarrow & Hom_A(P_1, W) & \rightarrow Tr(X) \otimes_A W \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 0 \rightarrow & Hom_A(X, U) & \rightarrow & Hom_A(P_0, U) & \rightarrow & Hom_A(P_1, U) & \rightarrow Tr(X) \otimes_A U \rightarrow 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 & & & 0 & & 0 & 0
 \end{array}$$

Per il Lemma del Serpente (si veda per esempio [8, Cap. 6, Cor. 6.12]) esiste un morfismo $\mu: Hom_A(X, U) \rightarrow Tr(X) \otimes_A V$ che rende la seguente successione esatta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Hom_A(X, V) & \longrightarrow & Hom_A(X, W) & \longrightarrow & Hom_A(X, U) \\
 & & & & & \swarrow \mu & \\
 Tr(X) \otimes_A V & \longrightarrow & Tr(X) \otimes_A W & \longrightarrow & Tr(X) \otimes_A U & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Otteniamo dunque che:

$$\begin{aligned}
 Coker(Hom_A(X, \psi)) &= Hom_A(X, U) / Im(Hom_A(X, \psi)) \\
 &= Hom_A(X, U) / Ker(\mu) \\
 &\cong Im(\mu) \\
 &= Ker(1_{Tr(X)} \otimes_A \phi)
 \end{aligned}$$

Dalla serie di isomorfismi precedente si ha che:

$$\begin{aligned}
 DCoker(Hom_A(X, \psi)) &\cong DKer(1_{Tr(X)} \otimes_A \phi) \\
 &\cong Coker(D(1_{Tr(X)} \otimes_A \phi)) \\
 &\cong Coker(Hom_A(\phi, DTr(X)))
 \end{aligned}$$

dove l'ultimo isomorfismo è dato dal Lemma 2.2.1 $\Rightarrow D\delta^*(X) \cong \delta_*(DTr(X))$.

La funtorialità di tale isomorfismo segue essenzialmente dal fatto che: la costruzione di $Tr(X)$ è funtoriale a meno di morfismi che fattorizzano per

un proiettivo, D manda proiettivi in iniettivi e δ_* si annulla sugli iniettivi. Quindi un eventuale morfismo $X \rightarrow X'$ induce una mappa ben posta $\delta_*(DTr(X)) \rightarrow \delta_*(DTr(X'))$. $\square$

Siano $\delta: 0 \longrightarrow V \xrightarrow{\phi} W \xrightarrow{\psi} U \longrightarrow 0$ una successione esatta corta di A -moduli e $X \in A\text{-mod}$. Proviamo a calcolare il difetto controvariante e covariante di X rispetto a δ , nel caso in cui W è proiettivo. Osserviamo che $Im(Hom_A(X, \psi)) = \mathcal{P}(X, U)$. Infatti se $f \in \mathcal{P}(X, U)$ allora esiste $P \in A\text{-mod}$ proiettivo ed esistono $h: X \rightarrow P$ e $g: P \rightarrow U$ tali che $f = g \circ h$. Abbiamo dunque il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{h} & P & \xrightarrow{g} & U \\ & & \downarrow \sigma & \nearrow \psi & \\ & & W & & \end{array}$$

Poichè P è proiettivo esiste $\sigma: P \rightarrow W$ tale che $\psi \circ \sigma = g \Rightarrow \psi \circ (\sigma \circ h) = f \Rightarrow f \in Im(Hom_A(X, \psi)) \Rightarrow \mathcal{P}(X, U) \subseteq Im(Hom_A(X, \psi))$.

Viceversa se $f \in Im(Hom_A(X, \psi)) \Rightarrow f = \psi \circ h$ con $h: X \rightarrow W \Rightarrow f \in \mathcal{P}(X, U)$. Per definizione:

$$\begin{aligned} \delta^*(X) &:= Coker(Hom_A(X, \psi)) = Hom_A(X, U) / Im(Hom_A(X, \psi)) \\ &= Hom_A(X, U) / \mathcal{P}(X, U) = \underline{Hom}_A(X, U) \end{aligned}$$

Passiamo ora a $\delta_*(X)$. Poichè W è proiettivo applicando il Teorema 1.5.1 otteniamo la successione esatta:

$$0 \rightarrow Hom_A(U, X) \rightarrow Hom_A(W, X) \rightarrow Hom_A(V, X) \rightarrow Ext_A^1(U, X) \rightarrow 0$$

Da questo segue che $\delta_*(X) \cong Ext_A^1(U, X)$ e tale isomorfismo è funtoriale in X . Abbiamo dunque la seguente fondamentale formula.

Corollario 2.2.1. (*Formula di Auslander-Reiten*) Siano $X, Y \in A\text{-mod}$ allora $D\underline{Hom}_A(X, Y) \cong Ext_A^1(Y, DTr(X))$ e questo isomorfismo è funtoriale in X e Y .

Dimostrazione. Sia $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ successione esatta di A -moduli con P proiettivo. Dal Teorema 2.2.1 sappiamo che $D\delta^*(X) \cong \delta_*(DTr(X)) \Rightarrow D\underline{Hom}_A(X, Y) \cong Ext_A^1(Y, DTr(X))$. $\square$

Riprendiamo la successione esatta $\delta: 0 \longrightarrow V \xrightarrow{\phi} W \xrightarrow{\psi} U \longrightarrow 0$. Si dimostra in maniera analoga a quanto fatto in precedenza per W proiettivo che se W è iniettivo otteniamo $\delta_*(X) = \overline{Hom}_A(V, X)$ e $\delta^*(X) \cong Ext_A^1(X, V)$.

Corollario 2.2.2. (*Formula di Auslander-Reiten*) Siano $X, Y \in A\text{-mod}$ allora $DExt_A^1(X, Y) \cong \overline{Hom}_A(Y, DTr(X))$ e questo isomorfismo è funtoriale in X e Y .

2.3 Morfismi irriducibili e successioni quasi-split

In questo paragrafo introdurremo la nozione di morfismo irriducibile e quasi-split nella categoria $A\text{-mod}$. Queste nozioni ci serviranno per definire che cos'è una successione quasi-split. Vedremo in seguito varie caratterizzazioni di questi concetti e dimostreremo che le successioni quasi-split sono uniche a meno di isomorfismo. Per questa sezione seguiremo [2, Cap. 4, Parag. 1].

Ricordiamo prima di iniziare che un morfismo di A -moduli è detto una sezione (risp. una retrazione) se ammette un inverso sinistro (risp. destro).

Definizione 2.3.1. Siano L, M e $N \in A\text{-mod}$.

- i) Un morfismo $f: L \rightarrow M$ è detto quasi-split a sinistra se non è una sezione e se, per ogni altro morfismo $u: L \rightarrow U$ che non è una sezione, allora esiste $u': M \rightarrow U$ tale che $u' \circ f = u$ cioè:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow u & \swarrow u' & \\ U & & \end{array}$$

- ii) Un morfismo $g: M \rightarrow N$ è detto quasi-split a destra se non è una retrazione e se, per ogni altro morfismo $v: V \rightarrow N$ che non è una retra-

zione, allora esiste $v': V \rightarrow M$ tale che $g \circ v' = v$ cioè:

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ v' \swarrow & & \downarrow v \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

La proposizione seguente ci dice che se aggiungiamo l'ipotesi di minimalità (Definizione 1.1.2) i morfismi quasi-split devono essere unici a meno di isomorfismo.

Proposizione 2.3.1. *Siano L, M e $N \in A\text{-mod}$.*

- i) Se $f: L \rightarrow M$ e $f': L \rightarrow M'$ sono morfismi minimali quasi-split a sinistra allora esiste $h: M \rightarrow M'$ isomorfismo tale che $f' = h \circ f$.*
- ii) Se $g: M \rightarrow N$ e $g': M' \rightarrow N$ sono morfismi minimale quasi-split a destra allora esiste $k: M \rightarrow M'$ isomorfismo tale che $g = g' \circ k$.*

Dimostrazione. Dimostriamo solo i) in quanto ii) è analogo. Poiché per definizione f' non è una sezione deve esistere $h: M \rightarrow M'$ tale che $f' = h \circ f$. Analogamente neanche f è una sezione quindi esiste $h': M' \rightarrow M$ tale che $f = h' \circ f' \Rightarrow f = (h' \circ h) \circ f$ e $f' = (h \circ h') \circ f'$. Dato che f e f' sono minimali a sinistra si ha che $h \circ h'$ e $h' \circ h$ sono isomorfismi $\Rightarrow h$ e h' sono isomorfismi. $\square$

Lemma 2.3.1. *Siano L, M e $N \in A\text{-mod}$.*

- i) Se $f: L \rightarrow M$ è quasi-split a sinistra allora L è indecomponibile.*
- ii) Se $g: M \rightarrow N$ è quasi-split a destra allora N è indecomponibile.*

Dimostrazione. Dimostriamo solo i) in quanto ii) è analogo. Se per assurdo $L = L_1 \oplus L_2$ e $\pi_i: L \rightarrow L_i$ per $i = 1, 2$ sono le proiezioni canoniche allora, poichè non sono sezioni, deve esistere $h_i: M \rightarrow L_i$ tali che $\pi_i = h_i \circ f \Rightarrow (h_1 \oplus h_2) \circ f = id_L$ che è assurdo in quanto f non è una sezione. $\square$

Definizione 2.3.2. Sia $f: X \rightarrow Y$ un morfismo di A -moduli. Diciamo che f è irriducibile se:

- i) f non è una sezione o una retrazione;
- ii) Se esistono $f_1: Z \rightarrow Y$ e $f_2: X \rightarrow Z$ morfismi in $A\text{-mod}$ tali che $f = f_1 \circ f_2$ allora f_1 è una retrazione o f_2 è una sezione.

Osservazione 2.3.1. Se $f: X \rightarrow Y$ è un morfismo irriducibile allora è iniettivo o suriettivo. Infatti se non fosse suriettivo, allora $i: \text{Im}(f) \rightarrow Y$ inclusione canonica non sarebbe una retrazione e $f = i \circ p$ con $p: X \rightarrow \text{Im}(f)$ $p(x) = f(x) \forall x \in X$. Quindi p deve essere una sezione e da questo segue che f deve essere iniettiva. Se f non è iniettiva il ragionamento è analogo.

La definizione di morfismo irriducibile non sarà sempre pratica da verificare. Cerchiamo quindi delle caratterizzazioni equivalenti. Per fare ciò è necessario introdurre alcuni nuovi concetti.

Definizione 2.3.3. Se $X, Y \in A\text{-mod}$, allora definiamo $\text{rad}_A(X, Y) := \{h \in \text{Hom}_A(X, Y) \mid \text{id}_X - g \circ h \text{ è invertibile } \forall g \in \text{Hom}_A(Y, X)\}$

Osservazione 2.3.2. Una serie di noiosi conti mostra che se $h \in \text{rad}_A(X, Y)$ e $f \in \text{Hom}_A(Z, X)$, allora $h \circ f \in \text{rad}_A(Z, Y)$. Analogamente se $f \in \text{Hom}_A(Y, Z)$, allora $f \circ h \in \text{rad}_A(X, Z)$.

La dimostrazione delle seguenti affermazioni è analoga a quella delle proprietà del radicale di Jacobson di un anello (si veda [6, Cap.4, Parag. 2] e [2, App., Parag. 3]).

Proposizione 2.3.2. *Siano $X, Y \in A\text{-mod}$. Valgono le seguenti:*

- i) $\text{rad}_A(X, Y)$ è un $\text{End}_A(Y)$ - $\text{End}_A(X)$ sottobimodulo di $\text{Hom}_A(X, Y)$.
- ii) Se X e Y sono indecomponibili allora $\text{rad}_A(X, Y)$ coincide con l'insieme dei morfismi in $A\text{-mod}$ $h: X \rightarrow Y$ tali che h non è un isomorfismo.
- iii) Se X è indecomponibile $\text{rad}_A(X, X) = \text{rad}(\text{End}_A(X))$.

Se $X, Y \in A\text{-mod}$, possiamo estendere la definizione di $rad_A(X, Y)$ in modo ricorsivo: $rad_A^0(X, Y) := Hom_A(X, Y)$, $rad_A^1(X, Y) := rad_A(X, Y)$ e per $n \geq 2$ $rad_A^n(X, Y) := Span_{\mathbb{K}}\{f \circ g \mid f \in rad_A(Z, Y), g \in rad_A^{n-1}(X, Z) \text{ per qualche } Z \in A\text{-mod}\}$. Facciamo notare che $rad_A^n(X, Y)$ è un $End_A(Y) \cdot End_A(X)$ sottobimodulo di $rad_A^{n-1}(X, Y)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$. Siamo pronti adesso per enunciare la caratterizzazione cercata:

Teorema 2.3.1. *Siano $X, Y \in A\text{-mod}$ indecomponibili e $f \in Hom_A(X, Y)$. Sono equivalenti le seguenti:*

- i) f è un morfismo irriducibile
- ii) $f \in rad_A(X, Y) \setminus rad_A^2(X, Y)$

Dimostrazione. Mostriamo prima che i) implica ii). Se f è irriducibile allora non può essere invertibile quindi per la proposizione precedente $f \in rad_A(X, Y)$. Se $f \in rad_A^2(X, Y) \Rightarrow f = g \circ h$ dove $g \in rad_A(Z, Y)$ e $h \in rad_A(X, Z)$ per un certo $Z \in A\text{-mod}$. Per il Teorema di Krull-Schmidt $Z = \bigoplus_{i=1}^n Z_i$ con $Z_i \in A\text{-mod}$ indecomponibili. Se f è irriducibile allora g è una retrazione oppure h è una sezione. Supponiamo che $h = (h_1, \dots, h_n): X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n Z_i$ sia una sezione (dove $h_i: X \rightarrow Z_i \Rightarrow \exists h' = (h'_1, \dots, h'_n): \bigoplus_{i=1}^n Z_i \rightarrow X$ tale che $id_X = h' \circ h = \sum_{i=1}^n h'_i \circ h_i$). Osserviamo che $h_i \in rad_A(X, Z_i)$ in quanto se $\pi_i: Z \rightarrow Z_i$ è la proiezione standard allora per l'Osservazione 2.3.2 $h_i = \pi_i \circ h$ e $h \in rad_A(X, Z) \Rightarrow h_i \in rad_A(X, Z_i) \Rightarrow h_i$ non è invertibile $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Dal fatto che h_i è non invertibile segue che $h'_i \circ h_i: X \rightarrow X$ è non invertibile ma allora poichè $End_A(X)$ è locale si ha che id_X è non invertibile che è assurdo. Analogo ragionamento nel caso g sia una retrazione. Quindi $f \notin rad_A^2(X, Y)$.

Mostriamo ora che ii) implica i). Supponiamo $f \in rad_A(X, Y) \setminus rad_A^2(X, Y)$, allora f non è invertibile e poichè X e Y sono indecomponibili f non può essere nè una retrazione nè una sezione. Infatti se f fosse una retrazione si avrebbe che la successione esatta $0 \longrightarrow Ker(f) \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$

è split che è assurdo. Un analogo ragionamento mostra che f non può essere una sezione. Supponiamo ora che $f = g \circ h$ dove $g \in \text{Hom}_A(Z, Y)$ e $h \in \text{Hom}_A(X, Z)$ con $Z \in A\text{-mod}$. Se $Z = \bigoplus_{i=1}^n Z_i$ con $Z_i \in A\text{-mod}$ indecomponibile allora come fatto nell'implicazione precedente si ha che $f = \sum_{i=1}^n g_i \circ h_i \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $g_i \circ h_i \notin \text{rad}_A^2(X, Y) \Rightarrow h_i \notin \text{rad}_A(X, Z_i)$ oppure $g_i \notin \text{rad}_A(Z_i, Y)$. Se $h_i \notin \text{rad}_A(X, Z_i)$ allora h_i è invertibile $\Rightarrow h$ è una sezione. Analogamente si ha che se $g_i \notin \text{rad}_A(Z_i, Y) \Rightarrow g$ è una retrazione. Questo dimostra che f è irriducibile. $\square$

I morfismi irriducibili iniettivi (risp. suriettivi) possono essere caratterizzati mediante il loro conucleo (risp. nucleo).

Lemma 2.3.2. [2, Cap. 4, Lemma 1.7] Sia $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ una successione esatta in $A\text{-mod}$ non split. Valgono le seguenti:

- i) f è irriducibile se e solo se per ogni morfismo $v: V \rightarrow N$ esiste $v_1: V \rightarrow M$ tale che $v = g \circ v_1$ oppure esiste $v_2: M \rightarrow V$ tale che $g = v \circ v_2$.
- ii) g è irriducibile se e solo se per ogni morfismo $u: L \rightarrow M$ esiste $u_1: M \rightarrow U$ tale che $u = u_1 \circ f$ oppure esiste $u_2: U \rightarrow L$ tale che $f = u_2 \circ u$.

Corollario 2.3.1. Siano L, M e $N \in A\text{-mod}$. Valgono le seguenti:

- i) Se $f \in \text{Hom}_A(L, M)$ è irriducibile e iniettivo allora $\text{Coker}(f)$ è indecomponibile.
- ii) Se $g \in \text{Hom}_A(M, N)$ è irriducibile e suriettivo allora $\text{Ker}(f)$ è indecomponibile.

Dimostrazione. Dimostriamo solo i) in quanto ii) è simile. Supponiamo per assurdo che $\text{Coker}(f) = N_1 \oplus N_2$ decomposizione non banale. Consideriamo la successione esatta $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{p} \text{Coker}(f) \longrightarrow 0$ e siano $\zeta_i: N_i \rightarrow \text{Coker}(f)$ $i = 1, 2$ inclusione standard. Per il lemma precedente $\exists \xi_i: N_i \rightarrow M$ $p \circ \xi_i = \zeta_i$ oppure $\exists \sigma_i: M \rightarrow N_i$ $p = \zeta_i \circ \sigma_i$. Nel secondo caso poichè p è suriettiva $\Rightarrow \zeta_i$ è suriettiva che è assurdo. Se invece $p \circ \xi_i =$

$\zeta_i \Rightarrow p \circ (\xi_1 \oplus \xi_2) = id_{Coker(f)} \Rightarrow p$ è una retrazione $\Rightarrow f$ è una sezione che è assurdo in quanto f irriducibile. Da questo segue che $Coker(f)$ è indecomponibile. $\square$

Il prossimo lemma permette una caratterizzazione, in termini del radicale, dei morfismi in $A\text{-mod}$ che sono sezioni o retrazioni. Questo lemma è utile in quanto generalmente non è facile verificare le suddette proprietà.

Lemma 2.3.3. *Siano L, M e $N \in A\text{-mod}$. Si hanno le seguenti:*

- i) Se $f \in Hom_A(L, M)$ è non nullo con L indecomponibile allora f è una sezione $\Leftrightarrow Im(Hom_A(f, L)) \not\subseteq rad(End_A(L))$.*
- ii) Se $g \in Hom_A(M, N)$ è non nullo con N indecomponibile allora g è una retrazione $\Leftrightarrow Im(Hom_A(N, g)) \not\subseteq rad(End_A(N))$.*

Dimostrazione. Dimostriamo solo i) in quanto ii) è analogo. Se f non è una sezione e $h \in Im(Hom_A(f, L)) \subseteq End_A(L) \Rightarrow$ esiste $g \in Hom_A(M, L)$ tale che $h = g \circ f$. Se h fosse invertibile esisterebbe $k \in End_A(L)$ tale che $id_L = (k \circ g) \circ f \Rightarrow f$ è una sezione che è assurdo $\Rightarrow h \in rad_A(L, L) = rad_A(End_A(L))$. Viceversa se $Im(Hom_A(f, L)) \not\subseteq rad(End_A(L))$ poichè $End_A(L)$ è locale si ha che $Hom_A(f, L)$ è suriettiva e quindi id_L appartenente a $Im(Hom_A(f, L))$, cioè f è una sezione. $\square$

Il prossimo teorema è uno dei più importanti di tutta la sezione in quanto permette di legare i morfismi irriducibili con quelli minimali quasi-split. In particolare possiamo pensare i morfismi irriducibili come componenti di morfismi minimali quasi-split.

Teorema 2.3.2. *Siano L, M e $N \in A\text{-mod}$. Valgono le seguenti:*

- i) Se $f: L \rightarrow M$ è minimale quasi-split a sinistra allora è irriducibile. Inoltre $f': L \rightarrow M'$ con $M' \neq 0$ è un morfismo irriducibile se e solo se esiste una decomposizione di $M = M' \oplus M''$ e un morfismo $f'': L \rightarrow M''$ tale che $f' \oplus f'': L \rightarrow M$ è minimale quasi-split a sinistra.*

- ii) Se $g: M \rightarrow N$ è minimale quasi-split a destra allora è irriducibile. Inoltre $g': M' \rightarrow N$ con $M' \neq 0$ è un morfismo irriducibile se e solo se esiste una decomposizione di $M = M' \oplus M''$ e un morfismo $g'': M'' \rightarrow N$ tale che $g' \oplus g'': M \rightarrow N$ è minimale quasi-split a destra.

Dimostrazione. Come al solito dimostriamo solo i). Se $f: L \rightarrow M$ è minimale quasi-split a sinistra allora per definizione non è una sezione. Inoltre per il Lemma 2.3.1 L deve essere indecomponibile, quindi f non può essere una retrazione altrimenti la successione $0 \longrightarrow \text{Ker}(f) \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$ sarebbe split il che è assurdo. Supponiamo ora che $f = f_1 \circ f_2$ con $f_1: X \rightarrow M$ e $f_2: L \rightarrow X$ morfismi in $A\text{-mod}$. Mostriamo che se f_2 non è una sezione allora f_1 è una retrazione. Poichè f è quasi-split a sinistra deve esistere $f'_2: M \rightarrow X$ tale che $f'_2 \circ f = f_2 \Rightarrow (f_1 \circ f'_2) \circ f = f_1 \circ f_2 = f$. Per minimalità di f , $f_1 \circ f'_2$ allora è un isomorfismo $\Rightarrow f_1$ è una retrazione. Abbiamo dunque dimostrato che f è irriducibile. Supponiamo ora che $f': L \rightarrow M'$ sia un morfismo irriducibile, allora $M' \neq 0$ e per definizione f' non è una sezione $\Rightarrow$ esiste $h: M \rightarrow M'$ tale che $f' = h \circ f$. Poichè f' è irriducibile e f non è una sezione $\Rightarrow h$ è una retrazione ma allora la successione esatta $0 \longrightarrow \text{Ker}(h) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{h} M' \longrightarrow 0$ è split $\Rightarrow M = M' \oplus \text{Ker}(h)$. Poniamo $M'' = \text{Ker}(h)$. Dato che la successione esatta di prima è split $i: M'' \rightarrow M$ inclusione standard deve essere una sezione $\Rightarrow \exists q: M \rightarrow M''$ tale che $q \circ i = \text{id}_{M''} \Rightarrow (h, q): M \rightarrow M' \oplus M''$ è un isomorfismo $\Rightarrow (h, q) \circ f = (h \circ f, q \circ f) = (f', q \circ f): L \rightarrow M' \oplus M''$ è minimale quasi split a sinistra. Viceversa se $f': L \rightarrow M'$ è un morfismo tale che $M = M' \oplus M''$ ed esiste $f'': L \rightarrow M''$ tale che $f' \oplus f'': L \rightarrow M' \oplus M''$ è minimale quasi-split a sinistra mostriamo che f' è irriducibile. L è indecomponibile per il Lemma 2.3.1 e f' non è un isomorfismo $\Rightarrow f'$ non è una retrazione. Se f' fosse una sezione $\Rightarrow \exists h: M' \rightarrow L$ tale che $h \circ f' = \text{id}_L \Rightarrow (h, 0) \circ (f', f'') = \text{id}_L$ che è assurdo perchè (f', f'') non è una sezione. Supponiamo ora che $f' = f_1 \circ f_2$ dove $f_1: X \rightarrow M'$ e $f_2: L \rightarrow X$, f_2 non una

sezione. Mostriamo che f_1 è una retrazione. Si ha che:

$$\begin{pmatrix} f' \\ f'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & id_{M''} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_2 \\ f'' \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & id_{M''} \end{pmatrix} : X \oplus M'' \rightarrow M' \oplus M'' \text{ e}$$

$\begin{pmatrix} f_2 \\ f'' \end{pmatrix} : L \rightarrow X \oplus M''$. Se f_2 non è una sezione allora per il lemma precedente $Im(Hom_A(f_2, L)) \subseteq rad(End_A(L))$. Inoltre se (f', f'') è irriducibile nemmeno f'' può essere una sezione $\Rightarrow Im(Hom_A(f'', L)) \subseteq rad(End_A(L)) \Rightarrow Im(Hom_A(f_2 \oplus f'', L)) \subseteq rad(End_A(L)) \Rightarrow (f_2, f'')$ non è una sezione. Per irriducibilità di (f', f'') si deve avere che $\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & id_{M''} \end{pmatrix}$ è una retrazione $\Rightarrow f_1$ è una retrazione e f' è dunque irriducibile. $\square$

Definizione 2.3.4. Una successione esatta in $A\text{-mod}$:

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

è detta quasi-split se f è minimale quasi-split a sinistra e g è minimale quasi-split a destra.

È relativamente semplice dimostrare che una successione esatta quasi-split è univocamente determinata dal suo termine iniziale o finale. Consideriamo le seguenti successioni esatte quasi-split:

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow L' \xrightarrow{f'} M' \xrightarrow{g'} N' \longrightarrow 0$$

Se $h: L \rightarrow L'$ è un isomorfismo allora $f' \circ h$ è minimale quasi-split a sinistra $\Rightarrow \exists s: M \rightarrow M'$ isomorfismo tale che $s \circ f = f' \circ h$. Ripetendo il ragionamento con $g' \circ s$ e g si ottiene un isomorfismo $t: N \rightarrow N'$. Si ha dunque il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow s & & \downarrow t & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Un analogo ragionamento dimostra che a partire da $N \cong N'$ si ottiene $M \cong M'$ e $L \cong L'$. Abbiamo dunque dimostrato la seguente proposizione:

Proposizione 2.3.3. *Una successione esatta in $A\text{-mod}$ quasi-split è univocamente determinata dal suo termine iniziale o finale a meno di isomorfismo.*

Osservazione 2.3.3. Se $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ è una successione esatta quasi-split allora L e N sono necessariamente indecomponibili, f non è una sezione e g non è una retrazione $\Rightarrow L$ non è iniettivo e N non è proiettivo. Inoltre la successione non è mai split. Nel prossimo paragrafo mostreremo il fatto non ovvio che è vero anche il contrario: ogni A -modulo L indecomponibile non proiettivo (risp. non iniettivo) è il termine finale (risp. iniziale) di una successione esatta quasi-split.

Il seguente lemma sarà utile nel prossimo teorema.

Lemma 2.3.4. *Consideriamo il seguente diagramma commutativo:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Supponiamo che le righe non siano successioni split. Valgono le seguenti:

- i) Se L è indecomponibile e w è un isomorfismo allora u (e quindi anche v) è un isomorfismo.
- ii) Se N è indecomponibile e u è un isomorfismo allora w (e quindi anche v) è un isomorfismo.

Dimostrazione. Dimostriamo solo i) in quanto ii) è analogo. Se u non è un isomorfismo allora dato che L è indecomponibile $\Rightarrow \text{End}_A(L)$ è locale $\Rightarrow u$ è nilpotente $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} m \geq 1 u^m = 0 \Rightarrow v^m \circ f = f \circ u^m = 0$. Per la proprietà universale di $\text{Coker}(f) \cong N$ deve esistere $h: N \rightarrow M$ tale che $v^m = h \circ g$. Ora $g \circ v^m = g \circ v \circ v^{m-1} = w \circ g \circ v^{m-1} = \dots = w^m \circ g \Rightarrow g \circ h \circ g = w^m \circ g \Rightarrow g \circ h = w^m \Rightarrow g$ è una retrazione che è assurdo in quanto la successione è non split. $\square$

Concludiamo questa sezione con un teorema di caratterizzazione delle successioni quasi-split che racchiude tutti i risultati ottenuti.

Teorema 2.3.3. *Sia $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ una successione esatta in $A\text{-mod}$. Sono equivalenti le seguenti:*

- i) La successione è quasi-split;*
- ii) L è indecomponibile e g è quasi-split a destra;*
- iii) N è indecomponibile e f è quasi-split a sinistra;*
- iv) f è minimale quasi-split a sinistra;*
- v) g è minimale quasi-split a destra;*
- vi) L e N sono indecomponibili con f e g irriducibili.*

Dimostrazione. Per definizione di successione quasi-split si ha subito che $i) \Rightarrow iv)$ e $i) \Rightarrow v)$. Dal Lemma 2.3.1 otteniamo che $i) \Rightarrow ii)$ e $i) \Rightarrow iii)$. Per il Teorema 2.3.2 se vale $i)$ allora f e g sono irriducibili, quindi $i) \Rightarrow vi)$. Dimostriamo adesso che $v) \Rightarrow ii)$. Per ipotesi g è minimale quasi-split a destra allora poichè $\text{Ker}(g) \cong L$, per il Corollario 2.3.1 L è indecomponibile e g è quasi-split a destra. Analogamente si dimostra che $iv) \Rightarrow iii)$.

Mostriamo adesso che $ii) \Rightarrow iii)$. Poichè $N \cong \text{Coker}(f)$ per il Lemma 2.3.1 basta mostrare che f è quasi-split a sinistra. Poichè g è quasi-split a destra non è una retrazione $\Rightarrow f$ non è una sezione. Supponiamo che esista $u: L \rightarrow U$ morfismo tale che $\forall u': M \rightarrow U$ $u' \circ f \neq u$ e dimostriamo che u è una sezione. Per la Proposizione 1.5.1 possiamo costruire il diagramma commutativo seguente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow u & & \downarrow v & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{h} & U \times^L M & \xrightarrow{k} & N \longrightarrow 0
 \end{array}$$

La successione nella riga sotto non è split $\Rightarrow k$ non è una retrazione. Poniamo $V = U \times^L M$. Poichè g è quasi-split a destra $\exists \bar{v}: V \rightarrow M$ tale che $k = g \circ \bar{v}$. Da questo si ha che:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{h} & V & \xrightarrow{k} & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{u} & & \downarrow \bar{v} & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

Poichè $g \circ \bar{v} \circ h = 0 \Rightarrow$ per proprietà universale di $\text{Ker}(g) \cong L$ esiste $\bar{u}: U \rightarrow L$. Combinando i due diagrammi otteniamo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{u}u & & \downarrow \bar{v}v & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

Per il lemma precedente $\bar{u}u$ è un isomorfismo quindi u è una sezione. Questo dimostra che $ii) \Rightarrow iii)$. Analogamente si dimostra che $iii) \Rightarrow ii)$. Inoltre assumendo $ii)$ possiamo dimostrare $iv)$, infatti sappiamo già che f è quasi-split a sinistra e se $h \in \text{End}_A(M)$ tale che $f = h \circ f \Rightarrow g \circ f = (g \circ h) \circ f = 0$. Per la proprietà universale di $\text{Coker}(f) \cong N$ (che è indecomponibile) deve esistere un morfismo $\varphi: N \rightarrow N$ che realizza il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow h & & \downarrow \varphi \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ancora dal lemma precedente si ottiene che h è un isomorfismo $\Rightarrow f$ è minimale a sinistra $\Rightarrow f$ è minimale quasi-split a sinistra. In modo analogo si dimostra che $iii) \Rightarrow v)$. Abbiamo dunque mostrato che $ii) \Leftrightarrow iii)$, $iii) \Rightarrow v) \Rightarrow ii)$ da cui segue che $v) \Rightarrow iii)$, e inoltre $ii) \Rightarrow iv) \Rightarrow iii)$ cioè $ii) \Rightarrow iv)$. Quindi $ii) \Leftrightarrow iii) \Leftrightarrow iv) \Leftrightarrow v)$. Poiché $ii) \Rightarrow iv)$ e $ii) \Rightarrow v)$ si ottiene $ii) \Rightarrow i)$. Dunque per quanto già mostrato all'inizio vale $i) \Leftrightarrow ii)$.

Resta da mostrare dunque che $i) \Leftrightarrow vi)$. All'inizio della dimostrazione abbiamo visto che $i) \Rightarrow vi)$. Per concludere mostriamo che $vi) \Rightarrow ii)$. Per ipotesi L è indecomponibile e g non è una retrazione. Sia $v: V \rightarrow N$ un morfismo che non è una retrazione. Supponiamo inizialmente v indecomponibile.

Poichè f è irriducibile per il Lemma 2.3.2 $\exists v_1: V \rightarrow M$ $v = g \circ v_1$ oppure $\exists v_2: M \rightarrow V$ $g = v \circ v_2$. Nel primo caso abbiamo finito. Nel secondo caso invece data l'irriducibilità di g si deve avere che v_2 è una sezione. Poichè V è indecomponibile v_2 è un isomorfismo e $v = g \circ v_2^{-1}$. Nel caso V non fosse indecomponibile potremmo fare lo stesso ragionamento su una delle sue componenti indecomponibili per il Teorema di Krull-Schmidt. Questo dimostra che g è quasi-split a destra. $\square$

2.4 Esistenza delle successioni quasi-split

In questo paragrafo dimostreremo l'esistenza delle successioni esatte quasi-split sfruttando la formula di Auslander-Reiten. Vedremo inoltre alcuni risultati riguardanti la costruzione effettiva di successioni esatte quasi-split con qualche esempio relativo all'algebra dei cammini di un quiver. Seguiremo principalmente [2, Cap. 4, Parag. 3].

Teorema 2.4.1. *Siano M e $N \in A\text{-mod}$ indecomponibili. Valgono le seguenti:*

- i) *Se M non è proiettivo allora esiste una successione esatta quasi-split della forma $0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$*
- ii) *Se N non è iniettivo allora esiste una successione esatta quasi-split della forma $0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow \tau^{-1}N \longrightarrow 0$*

Dimostrazione. Dimostriamo solo i) in quanto ii) è simile. Sia $L \in A\text{-mod}$ indecomponibile. Osserviamo preliminarmente che $\mathcal{P}(L, M) \subseteq \text{rad}_A(L, M)$. Per la Proposizione 2.3.2 basta mostrare che $f \in \mathcal{P}(L, M)$ non può essere un isomorfismo. Per definizione $f = g \circ h$ dove $P \in A\text{-mod}$ proiettivo, $g \in \text{Hom}_A(P, M)$ e $h \in \text{Hom}_A(L, P)$. Se f fosse un isomorfismo allora g sarebbe una retrazione $\Rightarrow M$ è proiettivo, ma questo è assurdo $\Rightarrow f \in \text{rad}_A(L, M)$. Definiamo adesso $S(L, M) := \text{Hom}_A(L, M)/\text{rad}_A(L, M)$. Visto

quanto mostrato in precedenza possiamo costruire il diagramma seguente:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_A(L, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(L, M)/\text{rad}_A(L, M) = S(L, M) \\ \downarrow & \nearrow \rho_{L,M} & \\ \text{Hom}_A(L, M)/\mathcal{P}(L, M) & & \end{array}$$

È chiaro che $\rho_{L,M}$ è suriettiva. Nel caso particolare in cui $L = M$ si ha che $\rho_{M,M}: \underline{\text{End}}_A(M) \rightarrow S(M, M)$ è un morfismo suriettivo di $\underline{\text{End}}_A(M)$ - $\underline{\text{End}}_A(M)$ bimoduli non nullo. Osserviamo inoltre che $\text{rad}(\underline{\text{End}}_A(M)) = \text{rad}_A(M, M)$ e $\underline{\text{End}}_A(M)$ è locale $\Rightarrow S(M, M)$ è semplice. Applicando ora il funtore $D(-)$ (la dualità standard di A) si ha che $D(\rho_{M,M}): DS(M, M) \rightarrow D\underline{\text{End}}_A(M)$ è iniettiva. Sia ora $\xi' \in DS(M, M)$ non nullo. Per la formula di Auslander-Reiten (Corollario 2.2.1) sappiamo che $D\underline{\text{End}}_A(M) \cong \text{Ext}_A^1(M, \tau M)$. Poniamo dunque $\xi := D(\rho_{M,M})(\xi')$. Osserviamo che $\xi \neq 0$ in quanto $D(\rho_{M,M})$ è iniettiva. Grazie agli isomorfismi considerati in precedenza ξ individua un'estensione di M e τM che chiamiamo ancora ξ :

$$0 \longrightarrow \tau M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

Vogliamo dimostrare che la suddetta successione esatta è quasi-split. Sfruttando il Teorema 2.3.3 mostriamo che τM è indecomponibile e g è quasi-split a destra. Dato che M è non proiettivo indecomponibile, τM è indecomponibile non nullo allora per la Proposizione 2.1.4. Inoltre poiché $\xi \neq 0$ la successione è non split $\Rightarrow g$ non è una retrazione.

Sia $v: V \rightarrow M$ un morfismo che non è una retrazione. A meno di restringere v ai fattori indecomponibili di V possiamo assumere che V sia indecomponibile. La mappa v induce un morfismo $\text{Hom}_A(M, v): \text{Hom}_A(M, V) \rightarrow \underline{\text{End}}_A(M)$ dove $\text{Hom}_A(M, v)(k) = v \circ k$. Poiché $\text{Hom}_A(v, M)(\text{rad}_A(M, V)) \subseteq \text{rad}_A(M, M)$ si ha il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_A(M, V) & \xrightarrow{\text{Hom}_A(M, v)} & \underline{\text{End}}_A(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S(M, V) & \xrightarrow{S(M, v)} & S(M, M) \end{array}$$

Applicando la dualità D e sfruttando l'isomorfismo funtoriale dato dalla formula di Auslander-Reiten si ha che:

$$\begin{array}{ccccc}
 DS(M, M) & \xrightarrow{D(\rho_{M,M})} & D\underline{Hom}_A(M, M) & \xrightarrow{\sim} & Ext_A^1(M, \tau M) \\
 \downarrow DS(M, v) & & \downarrow D\underline{Hom}_A(M, v) & & \downarrow Ext_A^1(v, \tau M) \\
 DS(M, V) & \xrightarrow{D(\rho_{M,V})} & D\underline{Hom}_A(M, V) & \xrightarrow{\sim} & Ext_A^1(V, \tau M)
 \end{array}$$

Poichè v non è un isomorfismo $\Rightarrow v \in rad_A(V, M) \Rightarrow DS(M, v)(\xi') = 0 \Rightarrow D\underline{Hom}_A(M, v)(\xi) = 0 \Rightarrow Ext_A^1(v, \tau M)(\xi) = 0$.

Poniamo $\eta = Ext_A^1(v, \tau M)(\xi) \in Ext_A^1(V, \tau M)$. Possiamo dunque costruire il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \eta : & 0 & \longrightarrow & \tau M & \xrightarrow{f'} & E' & \xrightarrow{g'} & V & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \parallel & & \downarrow w & & \downarrow v & & \\
 \xi : & 0 & \longrightarrow & \tau M & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

η è split dunque g' è una retrazione $\Rightarrow \exists g'' : V \rightarrow E'$ tale che $g' \circ g'' = id_V$. Definiamo $v' := w \circ g''$. Allora v' è tale che $g \circ v' = g \circ w \circ g'' = v \circ g' \circ g'' = v \Rightarrow g \circ v' = v$. Questo dimostra che g è quasi-split a destra e quindi ξ è una successione esatta quasi-split. $\square$

Osservazione 2.4.1. Nel teorema precedente abbiamo dimostrato inoltre che per ogni A -modulo M indecomponibile non proiettivo (risp. non iniettivo) esiste un morfismo minimale quasi-split a destra che termina (risp. inizia) in M .

Data l'osservazione precedente è naturale chiedersi se esistono morfismi minimali quasi-split a destra che terminano in un A -modulo proiettivo indecomponibile oppure morfismi minimali a sinistra che iniziano in un A -modulo iniettivo indecomponibile. La seguente proposizione risponde a tale domanda.

Proposizione 2.4.1.

- i) Sia $P \in A\text{-mod}$ proiettivo indecomponibile. Allora $g: M \rightarrow P$ è minimale quasi-split a destra se e solo se g è iniettivo con $\text{Im}(g) = \text{rad}(P)$.*
- ii) Sia $I \in A\text{-mod}$ iniettivo indecomponibile. Allora $f: I \rightarrow M$ è minimale quasi-split a sinistra se e solo se f è suriettivo con $\text{Ker}(f) = \text{soc}(I)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo solo *i)* in quanto *ii)* è analogo. Osserviamo che l'inclusione $i: \text{rad}(P) \rightarrow P$ è un morfismo iniettivo con immagine $\text{rad}(P)$ e mostriamo che è minimale quasi-split a destra. Se $k \in \text{End}_A(P)$ è tale che $i \circ k = i \Rightarrow k$ è iniettivo $\Rightarrow k$ è un isomorfismo $\Rightarrow i$ è minimale. Chiaramente i non è una retrazione. Se $v: V \rightarrow P$ non è una retrazione $\Rightarrow v$ non è suriettivo $\Rightarrow \text{Im}(v) \subseteq \text{rad}(P) \Rightarrow v$ fattorizza tramite $i \Rightarrow i$ è minimale quasi-split a destra. Per unicità a meno di isomorfismo dei morfismi minimali quasi-split a destra si ha la tesi. $\square$

Corollario 2.4.1. *Sia $X \in A\text{-mod}$ indecomponibile. Valgono le seguenti:*

- i) Esiste $g: M \rightarrow X$ minimale quasi-split a destra e $M = 0 \Leftrightarrow X$ è proiettivo e semplice.*
- ii) Esiste $f: X \rightarrow M$ minimale quasi-split a sinistra e $M = 0 \Leftrightarrow X$ è iniettivo e semplice.*

Dimostrazione. Dimostriamo solo *i)* in quanto *ii)* è analogo. Se X è non proiettivo la tesi segue dal Teorema 2.4.1. Se X è proiettivo per la proposizione precedente $\text{rad}(X) \hookrightarrow X$ è l'unico morfismo minimale quasi-split a destra. La tesi segue ora dal fatto che $\text{rad}(X) = 0 \Leftrightarrow X$ è semplice. $\square$

Esempio 2.4.1. Sia A l'algebra dei cammini del quiver $1 \longrightarrow 2$ e consideriamo la successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow S(2) \xrightarrow{f} P(1) \xrightarrow{g} S(1) \longrightarrow 0$$

dove f è l'inclusione standard di $\text{rad}(P)$ in P e g è la proiezione di P su $P/\text{rad}(P)$. Osserviamo che $P(1) = I(2)$ quindi, per la Proposizione 2.4.1, f

è minimale quasi split a destra e g è minimale quasi-split a sinistra. Per il Teorema 2.3.2 f e g sono irriducibili e inoltre $S(1)$ e $S(2)$ sono indecomponibili quindi per il Teorema 2.3.3 la successione esatta scritta sopra è quasi-split. Infine $S(1)$ non è proiettivo quindi, per unicità delle successioni quasi-split, $S(2) \cong \tau S(1)$.

Proposizione 2.4.2.

- i) Sia $M \in A\text{-mod}$ indecomponibile non proiettivo. Allora esiste $f: X \rightarrow M$ irriducibile se e solo se $f': \tau M \rightarrow X$ è irriducibile.*
- ii) Sia $N \in A\text{-mod}$ indecomponibile non iniettivo. Allora esiste $g: N \rightarrow Y$ irriducibile se e solo se $g': Y \rightarrow \tau^{-1}N$ è irriducibile.*

Dimostrazione. Come solito dimostriamo solo i). Supponiamo $f: X \rightarrow M$ irriducibile allora per il Teorema 2.3.2 esiste $h: Y \rightarrow M$ tale che $f \oplus h: X \oplus Y \rightarrow M$ è minimale quasi-split a destra. Per unicità dei morfismi minimali quasi-split a destra, dato che M è non proiettivo, $f \oplus h$ deve essere suriettivo. Poniamo $L = \text{Ker}(f \oplus h)$ e consideriamo la successione esatta:

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f' \oplus h'} X \oplus Y \xrightarrow{f \oplus h} M \longrightarrow 0$$

$f \oplus h$ è irriducibile e suriettivo $\Rightarrow L$ è indecomponibile $\Rightarrow$ la successione è quasi-split per il Teorema 2.3.3. Da questo segue che $f' \oplus h'$ è minimale quasi-split a sinistra ed esiste $g: \tau M \rightarrow L$ isomorfismo tale che $f' \circ g: \tau M \rightarrow L$ è irriducibile. Per il viceversa si procede in maniera analoga. $\square$

Corollario 2.4.2.

- i) Sia $S \in A\text{-mod}$ semplice proiettivo non iniettivo allora se $f: S \rightarrow M$ è irriducibile, M è proiettivo.*
- ii) Sia $S \in A\text{-mod}$ semplice iniettivo non proiettivo allora se $g: M \rightarrow S$ è irriducibile, M è iniettivo.*

Dimostrazione. Dimostriamo solo *i)* dato che *ii)* è simile. Se M non fosse proiettivo per la proposizione precedente esisterebbe $f': \tau M \rightarrow S$ irriducibile (possiamo assumere M indecomponibile) ma allora per il Teorema 2.3.2 e la Proposizione 2.4.1 τM deve essere un addendo diretto di $\text{rad}(S) = 0 \Rightarrow \tau M = 0$ che è assurdo. $\square$

Il corollario precedente permette di costruire esempi di successioni esatte quasi-split. Sia S un A -modulo semplice, proiettivo e non iniettivo e sia $f: S \rightarrow P$ un morfismo minimale quasi-split a sinistra. Dal corollario precedente sappiamo che P è proiettivo. Per ogni addendo diretto indecomponibile P' di P , la componente corrispondente $f': S \rightarrow P'$ di f è irriducibile e iniettiva (S è semplice). Da ciò segue che S deve essere un addendo diretto di $\text{rad}(P')$. Se per ogni $P' \in A\text{-mod}$ proiettivo e indecomponibile, tale che S è un addendo diretto di $\text{rad}(P')$, risulta un addendo diretto di P , allora la successione $0 \longrightarrow S \xrightarrow{f} P \longrightarrow \text{Coker}(f) \longrightarrow 0$ è esatta quasi-split.

Esempio 2.4.2. Sia A l'algebra dei cammini del quiver:

$$1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \longleftarrow 4$$

$S(3)$ è un A -mod semplice proiettivo e non iniettivo (in quanto 3 è un pozzo). Un rapido calcolo mostra che $S(3)$ è un addendo diretto di $\text{rad}(P(2))$ ed è uguale a $\text{rad}(P(4))$. Quindi la seguente successione esatta è quasi-split:

$$0 \longrightarrow S(3) \longrightarrow P(2) \oplus P(4) \longrightarrow (P(2) \oplus P(4))/S(3) \longrightarrow 0$$

Nelle proposizioni e corollari precedenti abbiamo visto come devono essere composte le successioni esatte quasi-split i cui termini centrali hanno un addendo diretto indecomponibile proiettivo (o iniettivo). Nel caso in cui uno di tali addendi sia contemporaneamente proiettivo e iniettivo vale la seguente

proposizione che mostra come la successione quasi-split sia univocamente determinata.

Proposizione 2.4.3. [1, Cap. 3, Prop. 3.2] Sia $M = \bigoplus_{i=1}^t M_i$ la decomposizione di $M \in A\text{-mod}$ in indecomponibili e $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ una successione esatta quasi-split. Allora:

- i) Se M_i è proiettivo e M_j è iniettivo allora $i = j$. In particolare M_i è dunque proiettivo e iniettivo.
- ii) Al più un addendo diretto indecomponibile di M è sia proiettivo che iniettivo.
- iii) Se M ammette un addendo diretto indecomponibile P proiettivo e iniettivo (non semplice) allora la successione esatta scritta sopra è isomorfa alla successione esatta quasi-split:

$$0 \longrightarrow \text{rad}(P) \longrightarrow P \oplus (\text{rad}(P)/\text{soc}(P)) \longrightarrow P/\text{soc}(P) \longrightarrow 0.$$

Dimostrazione.

- i) Consideriamo $f = (f_1, \dots, f_t): L \rightarrow \bigoplus_{i=1}^t M_i$ minimale quasi-split a sinistra. Per il Teorema 2.3.2 $f_i: L \rightarrow M_i$ è irriducibile $\Rightarrow f_i$ è iniettivo o suriettivo. Poichè M_i è proiettivo e L è indecomponibile $\Rightarrow f_i$ deve essere iniettivo e non può essere un isomorfismo $\Rightarrow l(L) < l(M_i)$. Analogamente $g = (g_1, \dots, g_t): \bigoplus_{i=1}^t M_i \rightarrow N$ è minimale quasi-split a destra con $g_j: M_j \rightarrow N$ irriducibile. Dato che g_j non può essere iniettivo e non è un isomorfismo $\Rightarrow g_j$ è suriettivo $\Rightarrow l(N) > l(M_j)$. Poichè $l(L) + l(N) < l(M_i) + l(M_j) \leq \sum_{k=1}^t l(M_k) = l(L) + l(N)$ che è assurdo quindi necessariamente $i = j$.
- ii) È immediato dal punto precedente.
- iii) Sia P l'unico addendo diretto indecomponibile proiettivo-iniettivo di $M \Rightarrow M = P \oplus M'$. La proiezione $q: P \rightarrow P/\text{soc}(P)$ è un morfismo suriettivo e irriducibile (per la Proposizione 2.4.1 è minimale

quasi-split a sinistra) $\Rightarrow \text{Ker}(q) = \text{soc}(P)$ è indecomponibile e semi-semplce $\Rightarrow \text{soc}(P)$ è semplice. Poichè P è proiettivo indecomponibile $\text{rad}(P)$ è l'unico sottomodulo massimale di $P \Rightarrow \text{soc}(P) \subseteq \text{rad}(P) \Rightarrow \text{soc}(\text{rad}(P)) = \text{soc}(P) \Rightarrow \text{rad}(P)$ è indecomponibile.

Le componenti di $f = (f', f''): L \rightarrow P \oplus M'$ sono irriducibili $\Rightarrow f': L \rightarrow P$ è irriducibile $\Rightarrow L$ deve essere un addendo diretto di $\text{rad}(P)$ che però è indecomponibile $\Rightarrow L \cong \text{rad}(P)$ e a meno di isomorfismo possiamo sostituire f' con l'inclusione $u: \text{rad}(P) \rightarrow P$.

Osserviamo che $P/\text{soc}(P)$ è indecomponibile. Infatti $\text{rad}(P/\text{soc}(P)) = \text{rad}(P)/\text{soc}(P) \Rightarrow (P/\text{soc}(P))/(\text{rad}(P)/\text{soc}(P)) \cong P/\text{rad}(P)$ che è semplice $\Rightarrow \text{rad}(P)/\text{soc}(P)$ è massimale (quindi è l'unico massimale) e piccolo $\Rightarrow P/\text{soc}(P)$ è indecomponibile. Con un ragionamento analogo a quanto fatto per L si ha che $g = (g', g''): P \oplus M' \rightarrow N$ con g' irriducibile, ma allora per indecomponibilità di $P/\text{soc}(P) \Rightarrow P/\text{soc}(P) \cong N$ e a meno di isomorfismo possiamo sostituire g' con q .

Facciamo notare che

$$\begin{aligned} l(M') &= l(L) + l(N) - l(P) \\ &= l(\text{rad}(P)) + l(P/\text{soc}(P)) - l(P) \\ &= l(P) - 1 + l(P) - 1 - l(P) = l(P) - 2 \end{aligned}$$

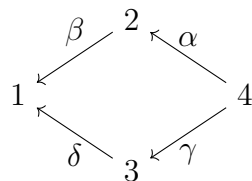
in quanto $l(\text{rad}(P)) = l(P) - 1 = l(P/\text{soc}(P))$. Da questo segue che $l(M') = l(\text{rad}(P)) - 1 = l(P/\text{soc}(P)) - 1$. Dato che $f'': \text{rad}(P) \rightarrow M'$ è irriducibile deve essere suriettivo visto che $l(\text{rad}(P)) > l(M')$ e analogamente $g'': M' \rightarrow P/\text{soc}(P)$ è irriducibile iniettivo $\Rightarrow g''(M') \subseteq \text{rad}(P)/\text{soc}(P)$ ma $l(M') = l(\text{rad}(P)/\text{soc}(P)) \Rightarrow g''$ è suriettiva $\Rightarrow M' \cong \text{rad}(P)/\text{soc}(P)$ e a meno di isomorfismo possiamo sostituire g'' con $v: \text{rad}(P)/\text{soc}(P) \rightarrow P/\text{rad}(P)$ inclusione. Analogamente possiamo sostituire f'' con la proiezione $p: \text{rad}(P) \rightarrow \text{rad}(P)/\text{soc}(P)$ a meno di isomorfismo. Abbiamo dunque dimostrato che la successione iniziale è isomorfa a:

$$0 \longrightarrow \text{rad}(P) \xrightarrow{u \oplus p} P \oplus \text{rad}(P)/\text{soc}(P) \xrightarrow{q \oplus v} P/\text{soc}(P) \longrightarrow 0$$

che è dunque esatta quasi-split.

□

Esempio 2.4.3. Se A è algebra che si ottiene quozientando l'algebra dei cammini del quiver:



per l'ideale $I = (\beta\alpha - \delta\gamma)$ allora $P(4) = I(1)$. Un rapido calcolo mostra che $rad(P(4))/soc(P(4)) = S(2) \oplus S(3)$, e quindi, per la proposizione precedente, la successione seguente è esatta quasi-split:

$$0 \longrightarrow rad(P(4)) \longrightarrow P(4) \oplus S(2) \oplus S(3) \longrightarrow P(4)/soc(P(4)) \longrightarrow 0$$

Capitolo 3

Il quiver di Auslander-Reiten

In questo capitolo partiremo inizialmente da alcuni risultati sui morfismi irriducibili per poi definire il quiver di Auslander-Reiten, uno strumento fondamentale per lo studio della categoria dei moduli su un'algebra di dimensione finita. Partiremo inizialmente da alcuni risultati sui morfismi irriducibili per poi definire il quiver di Auslander-Reiten. Calcoleremo il quiver di Auslander-Reiten in alcuni esempi e ne sfrutteremo la struttura per dedurre proprietà sull'algebra considerata. Per mostrare la potenza di tale costruzione, la utilizzeremo per dimostrare la prima congettura di Brauer-Thrall. In tutto il capitolo $\mathbb{K}$ sarà un campo algebricamente chiuso.

3.1 Morfismi irriducibili e quiver

In questo primo paragrafo introduciamo lo spazio dei morfismi irriducibili tra due A -moduli indecomponibili e ne studiamo la struttura. Conclusa questa parte seguirà la costruzione vera e propria del quiver di Auslander-Reiten di A . Seguiremo principalmente [2, Cap. 4, Parag. 4].

Nel capitolo precedente abbiamo dato una caratterizzazione dei morfismi irriducibili in termini di radicale (Teorema 2.3.1). È naturale dunque la seguente definizione.

Definizione 3.1.1. Siano M e N A -moduli indecomponibili. Indichiamo con $\text{Irr}_A(M, N)$ lo spazio vettoriale $\text{rad}_A(M, N)/\text{rad}_A^2(M, N)$. Tale spazio è detto spazio dei morfismi irriducibili da M a N .

Osservazione 3.1.1. $\text{Irr}_A(M, N)$ è un $\text{End}_A(N)$ - $\text{End}_A(M)$ bimodulo in modo naturale. Osserviamo inoltre che il radicale annichilisce $\text{Irr}_A(M, N)$ cioè $\text{rad}_A(N, N)\text{Irr}_A(M, N) = \text{Irr}_A(M, N)\text{rad}_A(M, M) = 0$

Il prossimo teorema mostra che c'è una relazione profonda tra i morfismi minimali quasi-split e lo spazio dei morfismi irriducibili. Questa relazione è ciò che ci permetterà di costruire il quiver.

Teorema 3.1.1. *Sia $M = \bigoplus_{i=1}^t M_i^{n_i}$ la decomposizione in indecomponibili di $M \in A\text{-mod}$ in cui i vari M_i sono a due a due non isomorfi. Valgono le seguenti:*

- i) Sia $f: L \rightarrow M$ morfismo con $L \in A\text{-mod}$ indecomponibile, con $f = (f_1, \dots, f_t)$ dove $f_i = (f_{i1}, \dots, f_{in_i}): L \rightarrow M_i^{n_i}$. Allora si ha che f è minimale quasi-split a sinistra se e solo se $f_{ij} \in \text{rad}_A(L, M_i)$, $\{[f_{i1}], \dots, [f_{in_i}]\}$ è una base di $\text{Irr}_A(L, M_i)$ per ogni $i \in \{1, \dots, t\}$ e se M' è un altro A -modulo indecomponibile tale che $\text{Irr}_A(L, M') \neq 0 \Rightarrow M' \cong M_i$ per un qualche $i \in \{1, \dots, t\}$.*
- ii) Sia $g: M \rightarrow N$ morfismo con $N \in A\text{-mod}$ indecomponibile, con $g = (g_1, \dots, g_t)$ dove $g_i = (g_{i1}, \dots, g_{in_i}): M_i^{n_i} \rightarrow N$. Allora si ha che g è minimale quasi-split a destra se e solo se $g_{ij} \in \text{rad}_A(M_i, N)$, $\{[g_{i1}], \dots, [g_{in_i}]\}$ è una base di $\text{Irr}_A(M_i, N)$ per ogni $i \in \{1, \dots, t\}$ e se M' è un altro A -modulo indecomponibile tale che $\text{Irr}_A(M', N) \neq 0 \Rightarrow M' \cong M_i$ per un qualche $i \in \{1, \dots, t\}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo solo i) in quanto ii) è analogo. Supponiamo che f sia minimale quasi-split a sinistra. Osserviamo preliminarmente che se $p: M \rightarrow M'$ è una retrazione allora $p \circ f: L \rightarrow M'$ è irriducibile. Infatti $M = M' \oplus \text{Ker}(p)$ e a meno di isomorfismo possiamo assumere che p sia

la proiezione standard su M' . Se $q: M \rightarrow \text{Ker}(p)$ è la proiezione standard su $\text{Ker}(p)$ allora chiaramente $f = (p \circ f, q \circ f) \Rightarrow p \circ f$ è irriducibile per il Teorema 2.3.2.

Da questa osservazione segue che f_{ij} è irriducibile e quindi per il Teorema 2.3.1 $f_{ij} \in \text{rad}_A(L, M_i) \setminus \text{rad}_A^2(L, M_i)$. Inoltre se $M' \in A\text{-mod}$ è indecomponibile tale che $\text{Irr}_A(L, M') \neq 0 \Rightarrow$ esiste un morfismo irriducibile $h: L \rightarrow M'$ non nullo. Sempre per il Teorema 2.3.2 M' deve essere un addendo diretto di $M \Rightarrow M' \cong M_i$ per un qualche $i \in \{1, \dots, t\}$.

Resta da mostrare adesso che $\{[f_{i1}], \dots, [f_{in_i}]\}$ è una base di $\text{Irr}_A(L, M_i)$. Sia $[h] \in \text{Irr}_A(L, M_i)$, allora $h \in \text{rad}_A(L, M_i)$. Dato che L e M_i sono indecomponibili h non è un isomorfismo e non è una sezione. Poichè f è quasi-split a sinistra esiste un morfismo $u = (u_1, \dots, u_t): \bigoplus_{i=1}^t M_i^{n_i} \rightarrow M_i$ con $u_k = (u_{k1}, \dots, u_{kn_i}): M_i^{n_i} \rightarrow M_i$ tale che $h = u \circ f = \sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^{n_k} u_{kj} \circ f_{kj}$. Se $k \neq i \Rightarrow u_{kj} \in \text{rad}_A(M_k, M_i) \Rightarrow u_{kj} \circ f_{kj} \in \text{rad}_A^2(L, M_i) \Rightarrow [h] = \sum_{j=1}^{n_i} [u_{ij}] \cdot [f_{ij}]$. $\text{End}_A(M_i)$ è un'algebra locale e $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso $\Rightarrow \text{End}_A(M_i)/\text{rad}(\text{End}_A(M_i)) \cong \mathbb{K} \Rightarrow u_{ij} = \lambda_{ij} \text{id}_{M_i} + u'_{ij}$ dove $u'_{ij} \in \text{rad}_A(M_i, M_i) \Rightarrow [u_{ij}] \cdot [f_{ij}] = [\lambda_{ij} f_{ij} + u'_{ij} \circ f_{ij}] = [\lambda_{ij} f_{ij}] = \lambda_{ij} [f_{ij}] \Rightarrow [h] = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} [f_{ij}] \Rightarrow \{[f_{ij}]\}_{j=1, \dots, n_i}$ è un insieme di generatori per $\text{Irr}_A(L, M_i)$. Supponiamo adesso che esistano $\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{in_i} \in \mathbb{K}$ tali che $\sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} [f_{ij}] = 0 \Rightarrow v := \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} f_{ij} \in \text{rad}_A^2(L, M_i)$. Se esiste $\lambda_{ij} \neq 0$ allora $l := (\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{ij}, \dots, \lambda_{in_i}): M_i^{n_i} \rightarrow M_i$ è una retrazione $\Rightarrow v = l \circ f_i$ è irriducibile che è assurdo $\Rightarrow \{[f_{ij}]\}_{j=1, \dots, n_i}$ è una base di $\text{Irr}_A(L, M_i)$.

Mostriamo adesso il viceversa. Per il Corollario 2.4.1 esiste $f': L \rightarrow U$ minimale quasi-split a sinistra. Supponiamo $U = \bigoplus_{k=1}^s U_k^{m_k}$ decomposizione in A -moduli indecomponibile a due a due non isomorfi. Per quanto mostrato sopra dato che $\text{Irr}_A(L, M_j) \neq 0 \Rightarrow M_j \cong U_k$ per un qualche $k \in \{1, \dots, s\}$. Inoltre per ipotesi $\text{Irr}_A(L, U_k) \neq 0 \Rightarrow U_k \cong M_j$ per qualche $j \in \{1, \dots, n\}$. Dato che $n_j = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(L, M_j)) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(L, U_k)) = m_k$ si ha che a meno di isomorfismo $M = U$. Per ipotesi $\{[f_{ij}]\}_{j=1, \dots, n_i}$ è una base di $\text{Irr}_A(L, M_i) \Rightarrow f_{ij}$ è irriducibile $\Rightarrow f$ è irriducibile. In particolare f non è una sezione $\Rightarrow \exists h: M \rightarrow M$ $f = h \circ f'$. Dato che f' non è una sezione $\Rightarrow h$

è una retrazione $\Rightarrow h$ è un isomorfismo e dunque f è minimale quasi-split a sinistra. $\square$

Come corollario del teorema precedente otteniamo un'altra caratterizzazione delle successioni esatte quasi-split:

Corollario 3.1.1. *Sia $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^t M_i^{n_i} \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ una successione esatta in $A\text{-mod}$ con L, N indecomponibili e gli M_i indecomponibili a due a due non isomorfi. Nelle notazioni del teorema precedente, sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- i) *La successione è esatta quasi-split;*
- ii) *$f_{ij} \in \text{rad}_A(L, M_i)$, $\{[f_{i1}], \dots, [f_{in_i}]\}$ è una base di $\text{Irr}_A(L, M_i)$ e se esiste $M' \in A\text{-mod}$ indecomponibile tale che $\text{Irr}_A(L, M') \neq 0 \Rightarrow M' \cong M_i$ per un certo $i \in \{1, \dots, n\}$;*
- iii) *$g_{ij} \in \text{rad}_A(M_i, N)$, $\{[g_{i1}], \dots, [g_{in_i}]\}$ è una base di $\text{Irr}_A(M_i, N)$ e se esiste $M' \in A\text{-mod}$ indecomponibile tale che $\text{Irr}_A(M', N) \neq 0 \Rightarrow M' \cong M_i$ per un certo $i \in \{1, \dots, n\}$.*

In particolare si ha che $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(L, M_i)) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(M_i, N))$.

Dimostrazione. Segue dal teorema precedente e dal Teorema 2.3.3. $\square$

Corollario 3.1.2. *Siano $X, Y \in A\text{-mod}$ indecomponibili. Valgono le seguenti:*

- i) *Se τX e τY sono non nulli allora $\text{Irr}_A(\tau X, \tau Y) \cong \text{Irr}_A(X, Y)$*
- ii) *Se $\tau^{-1}X$ e $\tau^{-1}Y$ sono non nulli allora $\text{Irr}_A(\tau^{-1}X, \tau^{-1}Y) \cong \text{Irr}_A(X, Y)$*

Dimostrazione. Dimostriamo solo i) in quanto ii) è analogo. Se τX e τY sono non nulli allora non sono proiettivi quindi per il Teorema 2.4.1 esistono due successioni esatte quasi-split $0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow U \xrightarrow{u} X \longrightarrow 0$ e $0 \longrightarrow \tau Y \longrightarrow V \xrightarrow{v} Y \longrightarrow 0$. Se $\text{Irr}_A(X, Y) \neq 0$, poichè v è minimale quasi-split a destra, per il teorema precedente (relativo ai morfismi

quasi-split a destra) X è isomorfo ad un addendo diretto indecomponibile di V . Inoltre per la Proposizione 2.4.2 sappiamo che $f \in \text{Irr}_A(X, Y)$ non nullo $\Leftrightarrow \exists f': \tau Y \rightarrow X$ irriducibile. Questo implica che $\text{Irr}_A(\tau Y, X) \neq 0$. Dal corollario precedente si ha che $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(X, Y)) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(\tau Y, X)) \Rightarrow \text{Irr}_A(X, Y) \cong \text{Irr}_A(\tau Y, X)$. Poichè $\text{Irr}_A(\tau Y, X) \neq 0$ e u è minimale quasi-split a destra si ha che τY è isomorfo ad un addendo diretto di U , quindi sempre per il corollario precedente $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(\tau Y, X)) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(\tau X, \tau Y)) \Rightarrow \text{Irr}_A(X, Y) \cong \text{Irr}_A(\tau X, \tau Y)$. Analogo ragionamento se $\text{Irr}_A(\tau X, \tau Y) \neq 0$. $\square$

Osservazione 3.1.2. Osserviamo che nella dimostrazione del corollario abbiamo mostrato che:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(X, Y)) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(\tau Y, X)) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(\tau X, \tau Y))$$

Siamo adesso pronti per definire il quiver di Auslander-Reiten:

Definizione 3.1.2. Il quiver di Auslander-Reiten $Q(A\text{-mod})$ ha come vertici le classi di isomorfismo degli A -moduli indecomponibili. Il numero di frecce dal vertice $[M]$ al vertice $[N]$ è dato da $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(M, N))$.

Facciamo alcune considerazioni sulla definizione appena data. Indichiamo con $Q_0(A\text{-mod})$ l'insieme dei vertici di $Q(A\text{-mod})$. Se $[M]$ è un vertice di $Q(A\text{-mod})$ poniamo $[M]^- := \{[L] \in Q_0(A\text{-mod}) \mid \text{Irr}_A(L, M) \neq 0\}$. Tale insieme è detto insieme dei predecessori di $[M]$. Analogamente poniamo $[M]^+ := \{[N] \in Q_0(A\text{-mod}) \mid \text{Irr}_A(M, N) \neq 0\}$ e questo è detto insieme dei successori di $[M]$. Nel caso in cui $M \in A\text{-mod}$ sia proiettivo, per la Proposizione 2.4.1 e il Teorema 2.3.2, $[L] \in Q_0(A\text{-mod})$ appartiene a $[M]^-$ se e solo se L è isomorfo ad un addendo diretto indecomponibile di $\text{rad}(M)$. Altrimenti, se M non è proiettivo, per il Corollario 3.1.1 $[L]$ appartiene a $[M]^-$ se e solo se L è isomorfo ad un addendo diretto indecomponibile di E , termine centrale della successione esatta quasi-split

$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$. Analogamente se M è iniettivo vale che $[N]$ appartiene a $[M]^+$ se e solo se N è un addendo diretto indecomponibile di $M/\text{soc}(M)$. Altrimenti, se M non è iniettivo, N deve essere un addendo diretto indecomponibile di E' , termine centrale della successione esatta quasi-split $0 \longrightarrow M \longrightarrow E' \longrightarrow \tau^{-1}M \longrightarrow 0$. In particolare poichè tali componenti indecomponibili sono fissate a meno di isomorfismo e finite si ha che $[M]^-$ e $[M]^+$ sono insiemi finiti. Il quiver $Q(A\text{-mod})$ è dunque un quiver localmente finito, cioè un quiver con un numero finito di predecessori e successori per ogni vertice.

Sia $Q = (Q_0, Q_1)$ un quiver. Un sottoquiver $Q' = (Q'_0, Q'_1)$ di Q è un quiver tale che $Q'_i \subseteq Q_i$ per $i = 0, 1$. Diremo che Q' è una componente connessa di Q se, oltre a essere un sottoquiver, soddisfa la seguente proprietà: per ogni $i \in Q'_0$, tale che esiste un cammino che lo congiunge con un qualsiasi vertice di Q' , risulta $i \in Q'_0$.

Osservazione 3.1.3. Una proprietà interessante dei quiver localmente finiti è il fatto che le componenti connesse di tale quiver hanno un numero al più numerabile di vertici. Da questo segue che le componenti connesse del quiver di Auslander-Reiten hanno una quantità al più numerabile di classi di isomorfismo di A -moduli indecomponibili. Inoltre il quiver di Auslander-Reiten non può avere cicli di lunghezza 1 (detti anche loop).

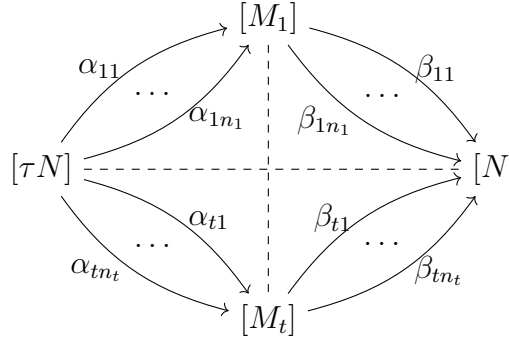
Definizione 3.1.3. Una $\mathbb{K}$ -algebra A si dice di tipo finito se ha un numero finito di classi di isomorfismo di A -moduli indecomponibili o, equivalentemente, $Q(A\text{-mod})$ è un quiver finito. Se A non soddisfa una tale proprietà si dice di tipo infinito.

Indichiamo ora con Q'_0 e Q''_0 i due sottoinsiemi di $Q_0(A\text{-mod})$ i cui elementi sono i vertici che corrispondono alle classi di isomorfismo di A -mod proiettivi e iniettivi rispettivamente. Allora per la Proposizione 2.1.4 la traslazione di Auslander-Reiten definisce una corrispondenza biunivoca che chiamiamo ancora $\tau: Q_0(A\text{-mod}) \setminus Q'_0 \rightarrow Q_0(A\text{-mod}) \setminus Q''_0$ che ad un verti-

ce $[N] \in Q_0(A\text{-mod}) \setminus Q'_0$ associa $[\tau N]$. In particolare dato che N non è proiettivo esiste una successione esatta quasi-split della forma

$$0 \longrightarrow \tau N \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^t M_i^{n_i} \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

dove i vari M_i sono A -moduli indecomponibili a due a due non isomorfi. Per il Corollario 3.1.2 $n_i = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(\tau N, M_i)) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(M_i, N))$. L'informazione della successione esatta quasi-split scritta sopra si traduce nel quiver $Q_0(A\text{-mod})$ nel diagramma seguente (che è detto "mesh"):



In particolare si ha che $[\tau N]^+ = [N]^-$ e il numero di frecce tra $[\tau N]$ e $[M_i]$ è uguale al numero di frecce tra $[M_i]$ e $[N]$.

Definizione 3.1.4. Sia $Q = (Q_0, Q_1)$ un quiver localmente finito senza loop e τ una biezione tra due sottoinsiemi di Q_0 . (Q, τ) è detto *quiver di traslazione* se $\forall x \in Q_0$ per cui sia definita τx si ha che: $(\tau x)^+ = x^-$ e $\forall y \in x^-$ il numero di frecce da y a x è uguale al numero di frecce da τx a y (x^- ed x^+ indicano rispettivamente l'insieme dei predecessori e dei successori di x).

Abbiamo dunque dimostrato la seguente proposizione:

Proposizione 3.1.1. *Il quiver di Auslander-Reiten $Q(A\text{-mod})$ è un quiver di traslazione dove la traslazione τ è definita sui vertici $[M]$ non proiettivi come $\tau[M] := [\tau M]$.*

La particolare struttura combinatoria del quiver di Auslander-Reiten permette di esprimere alcuni risultati su tale quiver, la cui forma altrimenti risulterebbe

rebbe molto tecnica, in maniera grafica e quindi più immediata. Una trattazione completa della struttura combinatoria del quiver di Auslander-Reiten si può trovare per esempio in [3, Cap. 7, Parag. 4].

3.2 Esempi e metodi costruttivi

In questa sezione vedremo come costruire effettivamente il quiver di Auslander e Reiten. In particolare mostreremo come l'algoritmo di knitting (o cucitura) permette di realizzare completamente il quiver in alcuni semplici casi. Fatto ciò vedremo come possiamo sfruttare il quiver di Auslander-Reiten per dedurre informazioni sulla categoria $A\text{-mod}$. Seguiremo fondamentalmente [1, Cap. 4, Parag. 1].

In generale costruire il quiver di Auslander-Reiten di A non è un compito facile in quanto teoricamente bisognerebbe conoscere tutti gli A -moduli indecomponibili e tutte le successioni esatte quasi-split che li riguardano. Ci sono tuttavia alcune tecniche e algoritmi che permettono di costruire il quiver di Auslander-Reiten in modo ricorsivo o senza necessariamente conoscere tutte le successioni esatte quasi-split. L'algoritmo che stiamo per mostrare è detto algoritmo di knitting e permetterà di costruire alcune componenti connesse del quiver. L'algoritmo di knitting consiste nei seguenti passaggi:

- (1) Determinare tutti gli A -moduli proiettivi semplici. Questi per il Corollario 2.4.1 saranno le sorgenti del quiver.
- (2) Determinare gli altri A -moduli proiettivi indecomponibili, in quanto per il Corollario 2.4.2 le frecce che partiranno dai moduli proiettivi semplici del punto precedente devono terminare in un A -modulo proiettivo indecomponibile.
- (3) Determinare il radicale degli A -moduli proiettivi indecomponibili del punto precedente, dato che le frecce entranti in un A -modulo proiet-

tivo indecomponibile devono avere come sorgente un addendo diretto indecomponibile del radicale di tale modulo per la Proposizione 2.4.1.

- (4) Se $L \in A\text{-mod}$ indecomponibile non iniettivo e si conosce un morfismo minimale quasi-split a sinistra $f: L \rightarrow M$ allora $\tau^{-1}L \cong \text{Coker}(f)$ e per ogni A -modulo indecomponibile X ci sono n frecce da L a X se e solo se ce ne sono n da X a $\tau^{-1}L$.

Osserviamo inoltre che se $0 \longrightarrow L \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^t M_i^{n_i} \longrightarrow \tau^{-1}L \longrightarrow 0$ è una successione esatta quasi-split con $L \in A\text{-mod}$ indecomponibile non iniettivo allora $\dim_{\mathbb{K}}(L) + \dim_{\mathbb{K}}(\tau^{-1}L) = \sum_{i=1}^t n_i \cdot \dim_{\mathbb{K}}(M_i)$. Partiamo adesso con qualche esempio:

Esempio 3.2.1. Sia A l'algebra dei cammini del quiver:

$$1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \longleftarrow 4$$

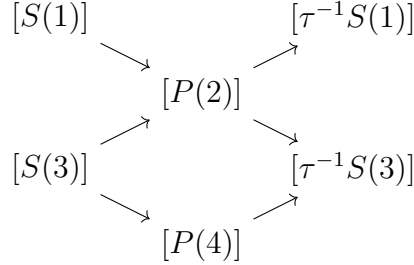
Gli A -moduli proiettivi semplici sono $S(1)$ e $S(3)$ in quanto i vertici 1 e 3 sono pozzi. Dato che l'algebra A è ereditaria $\text{rad}(P(2))$ e $\text{rad}(P(4))$ sono A -moduli proiettivi $\Rightarrow \text{rad}(P(4)) = P(3)$ e $\text{rad}(P(2)) = P(1) \oplus P(3)$. Dunque abbiamo che il quiver $Q(A\text{-mod})$ inizia con:

$$\begin{array}{ccc} [S(1)] & & \\ & \searrow & \\ & [P(2)] & \\ & \nearrow & \\ [S(3)] & & \\ & \searrow & \\ & [P(4)] & \end{array}$$

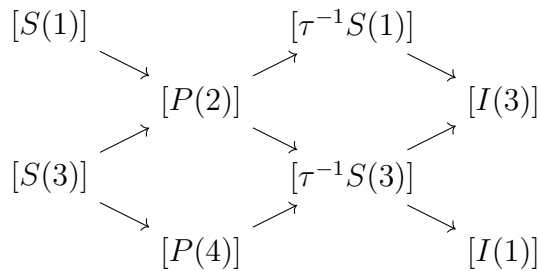
Visto che abbiamo già tutti i proiettivi possiamo applicare il punto (4) dell'algoritmo di knitting a ripetizione finchè non troviamo un iniettivo. Dato che $S(1)$ non è iniettivo (dovrebbe essere una sorgente) $\Rightarrow S(1) \hookrightarrow P(2)$ è minimale quasi-split a sinistra $\Rightarrow 0 \longrightarrow S(1) \hookrightarrow P(2) \longrightarrow \text{Coker}(i) \longrightarrow 0$ è esatta quasi-split. Analogamente con $S(3)$ si ottiene la successione esatta quasi-split:

$$0 \longrightarrow S(3) \longrightarrow P(2) \oplus P(4) \longrightarrow \tau^{-1}S(3) \longrightarrow 0.$$

Adesso il quiver è diventato:

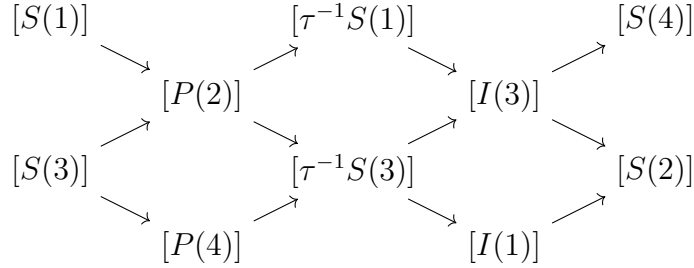


Osserviamo ora che se $f: P(2) \rightarrow M$ è un morfismo irriducibile con $M \in A\text{-mod}$ indecomponibile, allora o M è proiettivo, e quindi $P(2)$ è un addendo diretto di $\text{rad}(M)$, oppure esiste un morfismo $\tau M \rightarrow P(2)$ irriducibile. Dato che i proiettivi indecomponibili sono già noti ci troviamo nel secondo caso. Quindi τM deve essere un addendo diretto di $\text{rad}(P(2)) = S(1) \oplus S(3) \Rightarrow \tau M = S(1)$ oppure $\tau M = S(3) \Rightarrow M \cong \tau^{-1}S(1)$ oppure $M \cong \tau^{-1}S(3)$. Questo dimostra che il morfismo $P(2) \rightarrow \tau^{-1}S(1) \oplus \tau^{-1}S(3)$ è minimale quasi-split a sinistra $\Rightarrow \tau^{-1}P(2) = I(3)$. Analogamente si dimostra che il morfismo $P(4) \rightarrow \tau^{-1}S(3)$ è minimale quasi-split a sinistra e quindi $\tau^{-1}P(4) = I(1)$. Aggiungendo anche queste ultime considerazioni si ha il quiver:



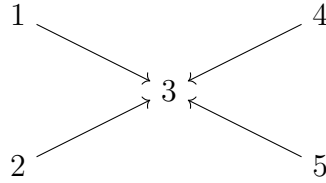
Adesso che abbiamo raggiunto degli A -moduli iniettivi indecomponibili, non possiamo più applicare l'algoritmo. Tuttavia sappiamo che l'unico morfismo minimale quasi-split a sinistra che parte da un A -modulo indecomponibile iniettivo I è $I \rightarrow I/\text{soc}(I)$. $\text{soc}(I(1)) = S(1) \Rightarrow I(1)/S(1) \cong S(2)$ e

$\text{soc}(I(3)) = S(3) \Rightarrow I(3)/S(3) \cong S(2) \oplus S(4)$. Abbiamo dunque ottenuto:



Ancora non lo sappiamo ma dimostreremo che questo è effettivamente tutto il quiver di Auslander-Reiten di A (eventualmente si può notare che abbiamo ottenuto tutti i vettori dimensione corrispondenti alle radici positive del quiver di partenza).

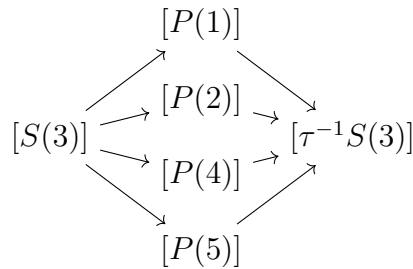
Esempio 3.2.2. Vediamo cosa succede nel caso di un quiver non di tipo A, D, E. Sia A l'algebra dei cammini del quiver:



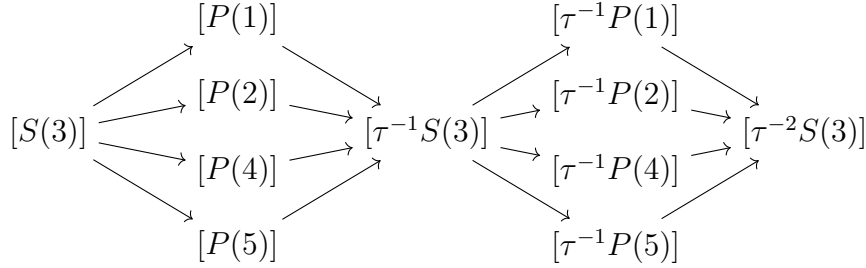
Proviamo ad applicare l'algoritmo di knitting. $S(3)$ è l'unico A -modulo proiettivo semplice $\Rightarrow \text{rad}(P(i)) = S(3)$ per $i \neq 3$ quindi la successione:

$$0 \longrightarrow S(3) \longrightarrow P(1) \oplus P(2) \oplus P(4) \oplus P(5) \longrightarrow \tau^{-1}S(3) \longrightarrow 0$$

è esatta quasi-split. Il quiver $Q(A\text{-mod})$ ha dunque una componente connessa che inizia con:

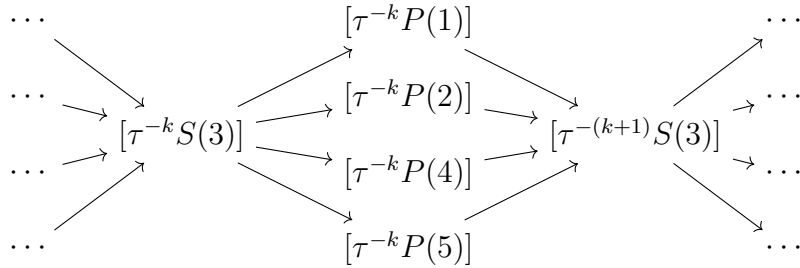


Dato che $\dim_{\mathbb{K}}(\tau^{-1}S(3)) = \sum_{i=1, i \neq 3}^5 \dim_{\mathbb{K}}(P(i)) - \dim_{\mathbb{K}}(S(3)) \Rightarrow \tau^{-1}S(3)$ non è iniettivo. Se $f: \tau^{-1}S(3) \rightarrow M$ è un morfismo irriducibile allora M non può essere proiettivo $\Rightarrow$ esiste un morfismo irriducibile $f': \tau M \rightarrow \tau^{-1}S(3) \Rightarrow \tau M \cong P(i) \Rightarrow M \cong \tau^{-1}P(i)$. Inoltre $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(S(3), P(i))) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(\tau^{-1}S(3), \tau^{-1}P(i))) = 1$. Il quiver diventa dunque:



La successione $0 \longrightarrow P(i) \longrightarrow \tau^{-1}S(3) \longrightarrow \tau^{-1}P(i) \longrightarrow 0$ è esatta quasi-split quindi possiamo ricavare $\dim_{\mathbb{K}}(\tau^{-1}P(i))$.

Dato che $\dim_{\mathbb{K}}(\tau^{-2}S(3)) = \sum_{i=1, i \neq 3}^5 \dim_{\mathbb{K}}(\tau^{-1}P(i)) - \dim_{\mathbb{K}}(\tau^{-1}S(3))$ e quindi $\tau^{-2}S(3)$ non è iniettivo. Possiamo applicare di nuovo lo stesso ragionamento anche su $\tau^{-2}S(3)$. Otteniamo dunque che il quiver di Auslander-Reiten di A ha una componente connessa infinita della forma:



Si può applicare un ragionamento simile all'algoritmo di knitting per calcolare un'altra componente connessa di $Q(A\text{-mod})$ a partire dagli A -moduli iniettivi semplici, ottenendo che tale componente ha la stessa forma di quella appena calcolata.

Osservazione 3.2.1. Possiamo notare come nei due esempi precedenti i predecessori degli A -moduli proiettivi indecomponibili fossero ancora proiettivi.

Questo è dovuto al fatto che le algebre che stavamo considerando erano ereditarie. Infatti sappiamo che se A è ereditaria e $P \in A\text{-mod}$ è proiettivo $\Rightarrow \text{rad}(P)$ è proiettivo quindi i suoi addendi diretti saranno proiettivi. Questo dimostra che per ogni $[P] \in Q_0(A\text{-mod})$ vertice proiettivo $[P]^-$ contiene solo altri vertici proiettivi. Il fatto interessante è che vale anche il viceversa, cioè se per un'algebra A i predecessori dei vertici proiettivi di $Q(A\text{-mod})$ sono ancora proiettivi, allora A è ereditaria. Infatti se $P \in A\text{-mod}$ è proiettivo e indecomponibile per ipotesi $\text{rad}(P)$ ha solo addendi diretti proiettivi $\Rightarrow \text{rad}(P)$ è proiettivo. Quindi se $A = \bigoplus_{i=1}^t P_i$ decomposizione di A in fattori indecomponibili $\Rightarrow \text{rad}(A) = \bigoplus_{i=1}^t \text{rad}(P_i) \Rightarrow \text{rad}(A)$ è proiettivo $\Rightarrow A$ è ereditaria.

Esempio 3.2.3. Sia A l'algebra dei cammini del quiver:

$$\begin{array}{ccccc} & & 4 & & \\ & & \downarrow \beta & & \\ 1 & \xleftarrow{\delta} & 2 & \xleftarrow{\gamma} & 3 & \xleftarrow{\alpha} & 5 \end{array}$$

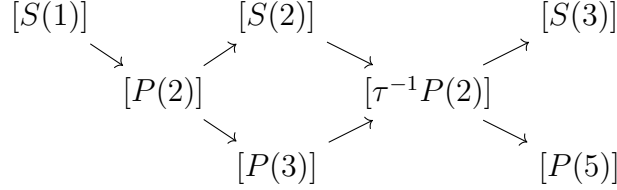
quozientata per l'ideale $I = (\gamma\beta, \delta\gamma\alpha)$. L'unico A -modulo semplice proiettivo è $S(1)$. Un rapido calcolo mostra che $\text{rad}(P(2)) = S(1) \Rightarrow$ la successione $0 \longrightarrow S(1) \longrightarrow P(2) \longrightarrow \tau^{-1}S(1) \longrightarrow 0$ è quasi-split. Inoltre per questioni di dimensione $\tau^{-1}S(1) = S(2)$. $\text{rad}(P(3)) = P(2)$ e osserviamo che $P(3) = I(1)$. Allora si ha che la successione esatta:

$$0 \longrightarrow P(2) \longrightarrow P(3) \oplus \text{rad}(P(3))/\text{soc}(P(3)) \longrightarrow P(3)/\text{soc}(P(3)) \longrightarrow 0$$

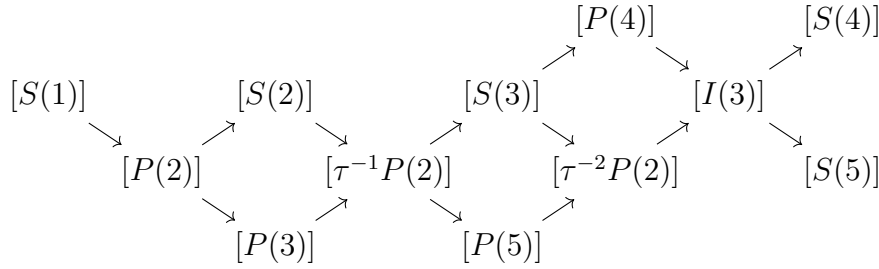
è quasi-split. Visto che $\text{soc}(P(3)) = S(1) \Rightarrow \text{rad}(P(3))/\text{soc}(P(3)) = S(2)$ e $P(3)/\text{soc}(P(3)) = \tau^{-1}P(2)$. Il quiver $Q(A\text{-mod})$ ha una componente connessa che inizia da:

$$\begin{array}{ccccc} [S(1)] & & & & [S(2)] \\ & \searrow & & \nearrow & \searrow \\ & [P(2)] & & & [\tau^{-1}P(2)] \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & [P(3)] & & \end{array}$$

$rad(P(5)) = \tau^{-1}P(2)$ e se esiste un morfismo irriducibile $f: \tau^{-1}P(2) \rightarrow M$ con M non proiettivo allora esiste un morfismo $f': \tau M \rightarrow \tau^{-1}P(2) \Rightarrow \tau M \cong S(2)$ oppure $\tau M \cong P(3)$. Il secondo caso è assurdo perchè $P(3)$ è iniettivo $\Rightarrow M \cong \tau^{-1}S(2) = S(3)$. La componente connessa diventa dunque:

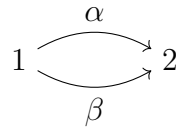


$rad(P(4)) = S(3)$ e continuando ad applicare l'algoritmo di knitting si ottiene che $Q(A\text{-mod})$ è:



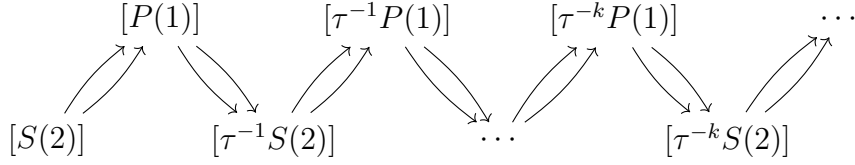
Concludiamo questo paragrafo con un ultimo esempio relativo al quiver 2-Kronecker.

Esempio 3.2.4. Sia A l'algebra dei cammini del quiver:



L'unico A -modulo proiettivo semplice è $S(2)$ e $rad(P(1)) = S(2)^2$ quindi la suocessione $0 \longrightarrow S(2) \longrightarrow P(1)^2 \longrightarrow \tau^{-1}S(2) \longrightarrow 0$ è esatta quasi-split. Per questioni di dimensione $\tau^{-1}S(2)$ non è iniettivo. È chiaro a questo punto che possiamo applicare l'algoritmo di knitting all'infinito in quanto $dim_{\mathbb{K}}(\tau^{-(k+1)}S(1)) > dim_{\mathbb{K}}(\tau^{-k}S(1))$. Otteniamo dunque che

$Q(A\text{-mod})$ ha una componente connessa infinita:



Nell'esempio precedente il fatto che una componente connessa di $Q(A\text{-mod})$ sia infinita è sufficiente per dimostrare che A è di tipo infinito. Tuttavia se l'obiettivo fosse stato determinare se l'algebra dei cammini del 2-Kronecker fosse di tipo finito o meno, allora avremmo potuto fermarci al calcolo della prima successione esatta quasi-split. Vale infatti la seguente proposizione:

Proposizione 3.2.1. *Se A è un'algebra di tipo finito allora per ogni coppia di A -moduli indecomponibili M e N si ha che $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(M, N)) \leq 1$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo il contrario cioè $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(M, N)) \geq 2$. In particolare $\text{Irr}_A(M, N) \neq 0$. Poichè ogni morfismo irriducibile è iniettivo o suriettivo ma non un isomorfismo si ha che $\dim_{\mathbb{K}}(M) \neq \dim_{\mathbb{K}}(N)$. Senza perdere di generalità possiamo assumere che $\dim_{\mathbb{K}}(M) > \dim_{\mathbb{K}}(N)$. Osserviamo che N non può essere proiettivo altrimenti M dovrebbe essere un addendo diretto indecomponibile di $\text{rad}(N)$ che è assurdo. Per il Teorema 2.4.1 esiste una successione esatta quasi-split

$$0 \longrightarrow \tau N \longrightarrow M^2 \oplus E \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(\tau N) = 2\dim_{\mathbb{K}}(M) + \dim_{\mathbb{K}}(E) - \dim_{\mathbb{K}}(N) > \dim_{\mathbb{K}}(M) > \dim_{\mathbb{K}}(N)$. Dato che $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(N, M)) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(\tau N, M)) \Rightarrow \text{Irr}_A(\tau N, M) \neq 0 \Rightarrow M$ non può essere proiettivo. Quindi analogamente a quanto fatto con N si ha che $\dim_{\mathbb{K}}(\tau M) > \dim_{\mathbb{K}}(\tau N)$ e $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Irr}_A(\tau M, \tau N)) \geq 2$. Possiamo dunque ripetere il ragionamento ottenendo una successione di A -moduli indecomponibili $\tau^i N$ tali che la successione $(\dim_{\mathbb{K}}(\tau^i N))_{i \in \mathbb{N}}$ è strettamente crescente $\Rightarrow A$ è di tipo infinito che è assurdo. $\square$

3.3 Algebre di tipo finito

In questa sezione mostreremo come la teoria che abbiamo sviluppato permette di determinare quando un'algebra è di tipo finito. Partiremo da un approfondimento sul radicale per poi ottenere varie caratterizzazioni sulla finitezza di un'algebra. Grazie a queste caratterizzazioni saremo poi in grado di dimostrare la prima congettura di Brauer-Thrall. Seguiremo essenzialmente [1, Cap. 4, Parag. 5], [3, Cap. 5, Parag. 7] e [1][Cap. 6, Parag. 1].

Definizione 3.3.1. Siano $M, N \in A\text{-mod}$ indecomponibili. Il radicale infinito di M e N su A è $\text{rad}_A^\infty(M, N) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{rad}_A^n(M, N)$.

Dato che $\text{Hom}_A(M, N)$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita otteniamo subito il seguente risultato:

Lemma 3.3.1. Siano $M, N \in A\text{-mod}$ indecomponibili. Allora esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $\text{rad}_A^\infty(M, N) = \text{rad}_A^k(M, N)$.

Il prossimo teorema ci permette di caratterizzare i morfismi in $\text{rad}_A^n(M, N)$ in termini di morfismi irriducibili a meno di un errore.

Teorema 3.3.1. Siano $M, N \in A\text{-mod}$ indecomponibili e $f \in \text{rad}_A^n(M, N)$ $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$. Valgono le seguenti:

- i) Esistono un numero naturale $s \geq 1$, $N_1, \dots, N_s$ A -moduli indecomponibili e $f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_s$ morfismi tali che $f_i \in \text{rad}_A(M, N_i)$ e $g_i: N_i \rightarrow N$ è una somma di composizioni di $n-1$ morfismi irriducibili tra moduli indecomponibili. Inoltre $f = \sum_{i=1}^s g_i \circ f_i$.
- ii) Se $f \in \text{rad}_A^n(M, N) \setminus \text{rad}_A^{n+1}(M, N)$ allora, nelle notazioni del punto precedente, esiste $i \in \{1, \dots, s\}$ tale che f_i è irriducibile e $f = u + v$ dove u è somma di composizioni di n morfismi irriducibili tra moduli indecomponibili e $v \in \text{rad}_A^{n+1}(M, N)$.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n . Supponiamo $n = 2$ e sia $g: L \rightarrow N$ è minimale quasi-split a destra (g esiste per il Corollario 2.4.1). Supponiamo inoltre che $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_s$ sia la decomposizione in indecomponibili di L e dunque $g = (g_1, \dots, g_s)$ dove $g_i: L_i \rightarrow N$. Dato che $f \in \text{rad}_A^2(M, N)$ f non è una retrazione esiste $f': M \rightarrow L$ tale che $f = g \circ f'$ e $f' = (f_1, \dots, f_s): M \rightarrow \bigoplus_{i=1}^s L_i \Rightarrow f = \sum_{i=1}^s g_i \circ f_i$. Poiché g è minimale quasi-split a destra g_i è irriducibile $\Rightarrow g_i \in \text{rad}_A(L_i, N) \setminus \text{rad}_A^2(L_i, N)$ e $f \in \text{rad}_A^2(M, N) \Rightarrow f_i \in \text{rad}_A(M, L_i)$. Infine se $f \notin \text{rad}_A^3(M, N) \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, s\} f_i \notin \text{rad}_A^2(M, L_i) \Rightarrow f_i$ è irriducibile.

Questo dimostra il caso $n = 2$. Assumiamo adesso l'ipotesi induttiva. Poichè $f \in \text{rad}_A^n(M, N) \Rightarrow f = h \circ g$ dove $X = \bigoplus_{i=1}^t X_i$ $X_i \in A\text{-mod}$ indecomponibili, $h = (h_1, \dots, h_t): \bigoplus_{i=1}^t X_i \rightarrow N$ $h \in \text{rad}_A^{n-1}(X, N)$ e $g = (g_1, \dots, g_t): M \rightarrow \bigoplus_{i=1}^t X_i$ $g \in \text{rad}_A(M, X) \Rightarrow f = \sum_{i=1}^t h_i \circ g_i$. Dato che $\forall i \in \{1, \dots, t\}$ $h_i \in \text{rad}_A^{n-1}(X_i, N)$ per ipotesi induttiva esistono $s_i \in \mathbb{N}$ $s_i \geq 1$, $\{C_{ij}\}_{j=1, \dots, s_i}$ A -moduli indecomponibili, $h_{ij} \in \text{rad}_A(X_i, C_{ij})$ e $h'_{ij}: C_{ij} \rightarrow N$ tali che $h_i = \sum_{j=1}^{s_i} h'_{ij} \circ h_{ij}$ dove h'_{ij} è somma di composizioni di $n - 2$ morfismi irriducibili. Consideriamo $h_{ij} \circ g_i: M \rightarrow C_{ij}$. $h_{ij} \circ g_i \in \text{rad}_A^2(M, C_{ij}) \Rightarrow h_{ij} \circ g_i = \sum_{p=1}^{q_{ij}} u'_{ijp} \circ u_{ijp}$ con $u_{ijp} \in \text{rad}_A(M, E_{ijp})$, $u'_{ijp}: E_{ijp} \rightarrow C_{ij}$ irriducibile e $E_{ijp} \in A\text{-mod}$ indecomponibile (abbiamo utilizzato il caso $n = 2$). Da questo otteniamo che $f = \sum_{i=1}^t h_i \circ g_i = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{s_i} h'_{ij} \circ (h_{ij} \circ g_i) = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{s_i} \sum_{p=1}^{q_{ij}} (h'_{ij} \circ u'_{ijp}) \circ u_{ijp}$. $h'_{ij} \circ u'_{ijp}$ è composizione di $n - 1$ morfismi irriducibili e $u_{ijp} \in \text{rad}_A(M, E_{ijp})$. Questo dimostra i). D'altra parte se $f \notin \text{rad}_A^{n+1}(M, N)$ allora non tutti i vari $u_{ijp} \in \text{rad}_A^2(M, E_{ijp})$, quindi almeno uno deve essere irriducibile. Raccogliendo tutti i vari u_{ijp} nella sommatoria che sono irriducibili si ottiene la tesi. $\square$

Analogamente si dimostra che:

Teorema 3.3.2. *Siano $M, N \in A\text{-mod}$ indecomponibili e $f \in \text{rad}_A^n(M, N)$ $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$. Valgono le seguenti:*

- i) Esistono un numero naturale $t \geq 1$, $M_1, \dots, M_t$ A -moduli indecomponibili e morfismi $g_1, \dots, g_s, f_1, \dots, f_s$ tali che $g_i \in \text{rad}_A(M_i, N)$ e $f_i: M \rightarrow M_i$ è una somma di composizioni di $n-1$ morfismi irriducibili tra moduli indecomponibili. Inoltre $f = \sum_{i=1}^t g_i \circ f_i$.
- ii) Se $f \in \text{rad}_A^n(M, N) \setminus \text{rad}_A^{n+1}(M, N)$ allora, nelle notazioni del punto precedente, esiste $i \in \{1, \dots, t\}$ tale che g_i è irriducibile e $f = u + v$ dove u è somma di composizioni di n morfismi irriducibili tra moduli indecomponibili e $v \in \text{rad}_A^{n+1}(M, N)$.

Corollario 3.3.1. Siano $M, N \in A\text{-mod}$ indecomponibili. Allora ogni $f \in \text{rad}_A(M, N)$ si può scrivere come somma di due morfismi u e v , dove u è una somma di composizioni di morfismi irriducibili tra moduli indecomponibili e $v \in \text{rad}_A^\infty(M, N)$. In particolare, se $\text{rad}_A^\infty(M, N) = 0$, f è una somma di composizioni di morfismi irriducibili tra moduli indecomponibili.

Dimostrazione. Se $f \in \text{rad}_A^\infty(M, N)$ non c'è nulla da mostrare. Supponiamo dunque $f \notin \text{rad}_A^\infty(M, N) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ n \geq 1 \ f \in \text{rad}_A^n(M, N) \setminus \text{rad}_A^{n+1}(M, N)$. Quindi per Teorema 3.3.1 $f = u_0 + v_0$ dove u_0 è somme di composizioni di morfismi irriducibili e $v_0 \in \text{rad}_A^{n+1}(M, N)$. Ripetendo lo stesso ragionamento con $v_0 = u_1 + v_1$ e $f = (u_0 + u_1) + v_1$ $v_1 \in \text{rad}_A^{n+2}(M, N)$. Necessariamente questo processo termina per il Lemma 3.3.1. $\square$

Osservazione 3.3.1. Nel corollario precedente in particolare abbiamo dimostrato che se $f \in \text{rad}_A^n(M, N) \setminus \text{rad}_A^{n+1}(M, N)$ non nullo allora esiste una composizione di morfismi irriducibili tra moduli indecomponibili non nulla tra M e N . Questo equivale ad un cammino tra $[M]$ e $[N]$ nel quiver di Auslander-Reiten. In particolare se $\text{rad}_A^\infty(M, N) = 0$ e $M \not\cong N$ si ha che $\text{Hom}_A(M, N) \neq 0 \Leftrightarrow$ esiste un cammino tra $[M]$ e $[N]$ nel quiver di Auslander-Reiten di A . Inoltre dato che per il Lemma 3.3.1 $\text{rad}_A^\infty(M, N) = \text{rad}_A^k(M, N) = 0$ per un certo $k \geq 1$ si ha che la lunghezza di tale cammino è minore o uguale a k .

Dall'osservazione che abbiamo appena fatto nasce naturale la domanda seguente: sotto quali condizioni $\text{rad}_A^\infty(M, N) = 0$ per ogni $M, N \in A\text{-mod}$ indecomponibili? Se questa condizione è verificata diremo che $\text{rad}_A^\infty = 0$. Il seguente lemma sarà la chiave di volta per la risposta.

Lemma 3.3.2. (*Harada, Sai [5]*) Fissiamo un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$ e sia

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{2^n-2}} M_{2^n-1} \xrightarrow{f_{2^n-1}} M_{2^n}$$

una catena di A -moduli indecomponibili con $l(M_i) \leq n$ e $f_i \in \text{rad}_A(M_i, M_{i+1})$. Allora si ha che $f_{2^n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 = 0$.

Dal Teorema 3.3.1 e dal lemma precedente otteniamo subito questo interessante risultato:

Corollario 3.3.2. Se A è un'algebra di tipo finito allora $\text{rad}_A^\infty = 0$.

Abbiamo dunque che se l'algebra A è tipo finito, allora $\text{rad}_A^\infty = 0$. Il fatto sorprendente è che vale anche il viceversa cioè se A è un'algebra tale che $\text{rad}_A^\infty = 0$, allora A è di tipo finito. Cominciamo dal seguente lemma:

Lemma 3.3.3. Supponiamo che $\text{rad}_A^\infty = 0$ e sia $M \in A\text{-mod}$ indecomponibile. Allora valgono le seguenti:

- i) Esiste $k_M > 0$ tale che $\text{rad}_A^{k_M}(M, N) = 0$ per ogni $N \in A\text{-mod}$ indecomponibile.
- ii) Esiste $l_M > 0$ tale che $\text{rad}_A^{l_M}(N, M) = 0$ per ogni $N \in A\text{-mod}$ indecomponibile.

Dimostrazione. Mostriamo solo i) in quanto ii) è analogo. Per il Lemma 3.3.1 esiste un numero naturale positivo k tale che $\text{rad}_A^k(M, D(A)) = \text{rad}_A^\infty(M, D(A)) = 0$. Consideriamo ora $f \in \text{rad}_A^k(M, N)$. Dato che esiste un morfismo suriettivo $A^t \rightarrow D(N)$, applicando ancora la dualità D otteniamo $j: N \rightarrow D(A)^t$ iniettivo $\Rightarrow j \circ f \in \text{rad}_A^k(M, D(A)^t)$. Tuttavia poichè $\text{rad}_A^k(M, D(A)) = 0$ si ha che $\text{rad}_A^k(M, D(A)^t) = 0 \Rightarrow j \circ f = 0$, ma allora visto che j era iniettivo $\Rightarrow f = 0$. Questo dimostra che $\text{rad}_A^k(M, N) = 0$. $\square$

Teorema 3.3.3. *A è un'algebra di tipo finito se e solo se $\text{rad}_A^\infty = 0$.*

Dimostrazione. Il fatto che A algebra di tipo finito $\Rightarrow \text{rad}_A^\infty = 0$ è il contenuto del Corollario 3.3.2. Mostriamo il viceversa. Per il lemma precedente sappiamo che per ogni $P \in A\text{-mod}$ indecomponibile proiettivo esiste $m_P > 0$ tale che $\text{rad}_A^{m_P}(P, -) = 0$. Visto che A ha un numero finito di classi di isomorfismo di A -moduli proiettivi indecomponibili, esiste il massimo m di tali m_P . Sia $M \in A\text{-mod}$ indecomponibile $\Rightarrow \exists P \in A\text{-mod}$ indecomponibile tale che $\text{Hom}_A(P, M) \neq 0$ e ovviamente $\text{rad}_A^m(P, M) = 0$. Per l'Osservazione 3.3.1 esiste un cammino nel quiver $Q(A\text{-mod})$ da $[P]$ a $[M]$ di lunghezza al più $m - 1$. Dato che il quiver $Q(A\text{-mod})$ è localmente finito per ogni vertice $[L]$ c'è un numero finito di vertici che possono essere raggiunti da un cammino di lunghezza al più un fissato l . La tesi ora segue dal fatto che esiste un numero finito di A -moduli proiettivi indecomponibili a meno di isomorfismo. Quindi il quiver $Q(A\text{-mod})$ è finito $\Rightarrow A$ è di tipo finito. $\square$

Dal teorema precedente sappiamo che un'algebra A è di tipo finito $\Leftrightarrow \text{rad}_A^\infty = 0$ e in particolare i cammini nel quiver $Q(A\text{-mod})$ devono avere lunghezza minore di $2^b - 1$ dove b è il massimo della lunghezza degli A -moduli indecomponibili. Cosa possiamo dire invece dei cammini tra due vertici distinti $[M]$ e $[N]$ se $\text{rad}_A^\infty(M, N) \neq 0$? La seguente proposizione ci dice che possiamo costruire cammini che partono da $[M]$ (o finiscono in $[N]$) di lunghezza arbitraria:

Proposizione 3.3.1. *Siano M e N due A -moduli indecomponibili tali che $\text{rad}_A^\infty(M, N) \neq 0$. Allora per ogni $i \geq 1$ esistono:*

i) Una successione di morfismi irriducibili tra A -moduli indecomponibili

$$M = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i$$

e un morfismo $g_i \in \text{rad}_A^\infty(M, N)$ tale che $g_i \circ f_i \circ \cdots \circ f_1 \neq 0$.

ii) Una successione di morfismi irriducibili tra A -moduli indecomponibili

$$N_i \xrightarrow{g_i} N_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} \cdots \longrightarrow N_1 \xrightarrow{g_1} N_0 = N$$

e un morfismo $f_i \in \text{rad}_A^\infty(M, N)$ tale che $g_1 \circ \cdots \circ g_i \circ f_i \neq 0$.

Dimostrazione. Mostriamo solo i) dato che ii) si ottiene in modo analogo. Sia $h = (h_1, \dots, h_t): M \rightarrow \bigoplus_{i=1}^t E_i$ morfismo minimale quasi-split a sinistra con $E_j \in A\text{-mod}$ indecomponibile. Per ogni $j \in \{1, \dots, t\}$ esiste m_j tale che $\text{rad}_A^{m_j}(E_j, N) = \text{rad}_A^\infty(E_j, N)$. Poniamo $m = \max\{m_j \mid j \in \{1, \dots, t\}\} \Rightarrow \text{rad}_A^m(E_j, M) = \text{rad}_A^\infty(E_j, M)$ per ogni $j \in \{1, \dots, t\}$. Sia ora $f \in \text{rad}_A^\infty(M, N)$ non nullo. In particolare $f \in \text{rad}_A^{m+1}(M, N)$. Per il Teorema 3.3.1 si ha che $f = \sum_{i=1}^s g_i \circ f_i$ con $g_i \in \text{rad}_A^m(X_i, N)$, $f_i \in \text{rad}_A(M, X_i)$ e i vari $X_i \in A\text{-mod}$ indecomponibili. Senza perdere di generalità possiamo assumere che $g_i \circ f_i \neq 0$ per ogni $i \in \{1, \dots, s\}$. Dato che f_1 non è un isomorfismo e non è una sezione si deve fattorizzare tramite h cioè esiste $l = (l_1, \dots, l_t): \bigoplus_{i=1}^t E_i \rightarrow X_1$ tale che $f = l \circ h = \sum_{i=1}^t l_j \circ h_j$. Poichè $g_1 \circ f_1 \neq 0 \Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, s\} g_1 \circ l_j \circ h_j \neq 0$, Adesso $h_j: M \rightarrow E_j$ è irriducibile e $g_1 \circ l_j \in \text{rad}_A^m(E_j, N) = \text{rad}_A^\infty(E_j, N)$. Possiamo dunque rifare lo stesso ragionamento fatto per f con $g_1 \circ l_j$ e da una facile induzione segue la tesi. $\square$

La caratterizzazione per determinare se un'algebra è di tipo finito tramite il radicale che abbiamo trovato è potente ma non molto pratica da verificare. Sappiamo tuttavia che sicuramente se A è un'algebra di tipo finito allora c'è un massimo alla lunghezza degli A -moduli indecomponibili. La prima congettura di Brauer-Thrall chiede se vale anche il viceversa. La risposta è affermativa e per dimostrare questo risultato sfrutteremo le proprietà del quiver di Auslander-Reiten. Il seguente teorema sarà fondamentale.

Teorema 3.3.4. *Sia A una $\mathbb{K}$ -algebra connessa di dimensione finita. Se $Q(A\text{-mod})$ ammette una componente connessa Q' i cui vertici hanno lunghezza limitata allora si ha che Q' è finito e $Q(A\text{-mod}) = Q'$. In particolare A è di tipo finito.*

Dimostrazione. Supponiamo che per ogni $[M] \in Q'_0$ $l(M) \leq b$ per un certo $b \in \mathbb{N}$. Siano ora $[M] \in Q'_0$ e $[N] \in Q_0(A\text{-mod})$ vertici distinti tali che $\text{Hom}_A(M, N) \neq 0$. Allora esiste un cammino nel quiver $Q(A\text{-mod})$ che collega $[M]$ e $[N]$ di lunghezza minore di $2^b - 1$. Infatti se $\text{rad}_A^\infty(M, N) = 0$ allora tale cammino esiste e per il Lemma 3.3.2 deve avere lunghezza minore di $2^b - 1$. Se invece $\text{rad}_A^\infty(M, N) \neq 0$, per la Proposizione 3.3.1 deve esistere una successione di morfismi irriducibili tra A -moduli indecomponibili

$$M = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \longrightarrow M_{2^b-2} \xrightarrow{f_{2^b-1}} M_{2^b-1}$$

e un morfismo $g_{2^b-1} \in \text{rad}_A^\infty(M, N)$ tale che $g_{2^b-1} \circ f_{2^b-1} \circ \cdots \circ f_1 \neq 0$ che è assurdo ancora una volta per il Lemma 3.3.2. Quindi tale cammino deve esistere e $[N] \in Q'_0$. Analogamente si dimostra che se $[N] \in Q'_0$ e $\text{Hom}_A(M, N) \neq 0 \Rightarrow M \in Q'_0$. Sia ora $[M] \in Q'_0$ arbitrario. Allora esiste $P \in A\text{-mod}$ indecomponibile proiettivo tale che $\text{Hom}_A(P, M) \neq 0 \Rightarrow [P] \in Q'_0$. Dato che l'algebra è connessa, per la Proposizione 1.4.3, per ogni altro $A\text{-mod}$ proiettivo indecomponibile Q deve esistere una successione di $A\text{-mod}$ indecomponibili proiettivi $P = P_1, P_2, \dots, P_n = Q$ con $\text{Hom}_A(P_i, P_{i+1}) \neq 0$ oppure $\text{Hom}_A(P_{i+1}, P_i) \neq 0 \Rightarrow [Q] \in Q'_0$. Da ciò segue che $Q(A\text{-mod}) = Q'$. Mostriamo adesso che Q' è finito. Sappiamo che per ogni vertice $[M] \in Q_0(A\text{-mod})$ esiste un cammino di lunghezza minore di $2^b - 1$ che lo collega ad un vertice $[P] \in Q_0(A\text{-mod})$ proiettivo. Dato che $Q(A\text{-mod})$ è localmente finito e esiste un numero finito di classi di isomorfismo di A -moduli proiettivi $Q(A\text{-mod})$ è finito $\Rightarrow A$ è di tipo finito. $\square$

Come corollario del teorema precedente si ha che:

Corollario 3.3.3. (*Brauer-Thrall*) A è un'algebra di tipo finito se e solo se la lunghezza degli A -moduli indecomponibili è limitata.

Dimostrazione. Un'implicazione è ovvia. L'altra segue dal teorema precedente e dal fatto che se A non è connessa allora è prodotto di algebre connesse. $\square$

Ringraziamenti

Chi mi conosce sa che non sono esattamente uno da ringraziamenti (e non sono molto bravo con le parole). Tuttavia in queste occasioni penso sia importante spendere qualche parola non solo per chi mi ha aiutato per la realizzazione di questa tesi, ma anche per chi mi ha sostenuto durante tutto il percorso di studi. Comincio ringraziando il mio relatore, il Prof. D'Andrea, per avermi fatto scoprire la teoria di Auslander-Reiten e per avermi insegnato ad apprezzare anche le cose più semplici.

Ringrazio enormemente la mia famiglia: mia madre, mia sorella e Carlo. Grazie per avermi sopportato incondizionatamente durante tutto il percorso riuscendo a reggermi sia nei momenti bassi che alti. Vorrei ringraziare specialmente mia madre. Non saprei dire a parole esattamente per cosa. Semplicemente per tutto. Anche se non te lo dico spesso ti voglio bene.

Ringrazio i miei amici di sempre: per le risate e per i bei momenti passati insieme. Quasi dieci anni che ci conosciamo e non avrei potuto chiedere amici migliori. Siete i veri testimoni della fatica che ho fatto in questi anni.

Vorrei ringraziare gli amici conosciuti qui in università per avermi accompagnato in questo viaggio. La vostra compagnia mi ha aiutato molto più di quanto possiate immaginare. Ci tengo a ringraziare particolarmente due persone: Serafino e Nicolò. Grazie per tutte le centinaia (forse migliaia?) di ore passate con me a parlare di matematica. Senza di voi non so se l'amerei come oggi.

Per ultimo, ma non per importanza, voglio ringraziare chi non c'è più. So che avrebbero voluto tanto esserci.

Bibliografia

- [1] Ibrahim Assem e Flávio U. Coelho. *Basic Representation Theory of Algebras*. Springer Cham, 2020.
- [2] Ibrahim Assem, Andrzej Skowronski e Daniel Simson. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras Vol 1*. Cambridge University Press, 2006.
- [3] Maurice Auslander, Idun Reiten e Sverre O. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge University Press, 1997.
- [4] Pavel Etingof. *Introduction to Representation Theory*. American Mathematical Society, 2011.
- [5] M. Harada e Y. Sai. «On categories of indecomposable modules I». In: *Osaka J. Math.* 8 (1971).
- [6] Nathan Jacobson. *Basic Algebra II*. 2nd. Dover Publication, 2009.
- [7] Henning Krause. «A short proof for Auslander’s defect formula». In: *Linear Algebra and its Applications* 365 (2003).
- [8] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. 2nd. Springer New York, NY, 2009.
- [9] Ralf Schiffler. *Quiver Representations*. Springer Cham, 2014.