

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”  
Corso di Laurea in Fisica

# Transizione alla sincronizzazione di sistemi dinamici in un network

**Relatore:**  
Prof. Marco Lenci

**Presentata da:**  
Lorenzo Redighieri

Anno Accademico 2024/2025



*Ai miei nonni*



## **Abstract**

La presente tesi tratta il fenomeno della sincronizzazione nel contesto dei sistemi dinamici su reti, ambito di ricerca di grande importanza a causa delle sue applicazioni in diversi campi, tra cui la fisica, la biologia e le neuroscienze. Dopo aver sottolineato la rilevanza scientifica dello studio della sincronizzazione, viene introdotto il modello di Kuramoto, che ha avuto un ruolo fondamentale per la ricerca sul fenomeno della sincronizzazione. Successivamente, viene presentato un modello più generale tratto dall'articolo "The transition to synchronization of networked dynamical systems" [1], con uno spettro di applicazioni più ampio rispetto al modello di Kuramoto. Seguendo la linea dell'articolo, si cerca dunque di descrivere la sequenza di eventi che caratterizzano la sincronizzazione, analizzando la loro successione all'aumentare della forza di accoppiamento tra i nodi del network. Nell'esposizione viene prestata particolare attenzione ai metodi matematici utilizzati dagli autori della pubblicazione. Infine, vengono presentate delle simulazioni numeriche volte a verificare i risultati teorici. I risultati ottenuti sono in accordo con le previsioni del modello. Viene inoltre esaminata la sequenza temporale del processo di sincronizzazione mediante ulteriori simulazioni, le quali suggeriscono spunti interessanti per ricerche future.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Rilevanza scientifica dello studio della sincronizzazione . . . . .	1
1.2	Modello di Kuramoto . . . . .	2
1.2.1	Equazioni di Kuramoto . . . . .	2
1.2.2	Stato stazionario . . . . .	6
1.2.3	Autoconsistenza . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Il modello</b>	<b>13</b>
2.1	Soluzione sincrona globale . . . . .	14
2.2	Stabilità della soluzione sincrona globale . . . . .	15
2.3	Sincronizzazione parziale . . . . .	18
2.4	Transizione alla sincronizzazione . . . . .	22
2.5	Soluzione sincrona dei cluster . . . . .	27
2.6	Stabilità della soluzione sincrona dei cluster . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Simulazioni numeriche</b>	<b>31</b>
3.1	Simulazioni dell'articolo . . . . .	31
3.2	Ulteriori simulazioni . . . . .	33
3.2.1	Analisi temporale . . . . .	33
3.2.2	Analisi del termine di interazione . . . . .	35
	<b>Appendici</b>	<b>39</b>
<b>A</b>	<b>Elementi di teoria dei grafi</b>	<b>41</b>
<b>B</b>	<b>Proprietà del prodotto di Kronecker</b>	<b>45</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Rilevanza scientifica dello studio della sincronizzazione

Lo studio dei sistemi dinamici e delle loro interazioni ha trovato diverse applicazioni, dalla fisica [2] alla biologia [3]. In particolare, risulta utile comprendere in quali condizioni tali sistemi possano mostrare comportamenti collettivi emergenti. Un esempio di fenomeno collettivo è la sincronizzazione, che si verifica quando i singoli sistemi dinamici che formano una rete percorrono traiettorie simili nello spazio delle fasi. In base alla natura dei sistemi che si stanno studiando, la sincronizzazione può essere associata a diversi eventi rilevanti. Un esempio semplice tratto dalla fisica sono le transizioni di fase. Nel passaggio dallo stato liquido allo stato solido si può infatti osservare una transizione da uno stato dissincronizzato, in cui alle molecole della sostanza in questione è permesso seguire traiettorie differenti tra loro, a uno stato sincronizzato, in cui le molecole sono costrette a seguire la medesima traiettoria trovandosi nel reticolo cristallino di un solido. È importante distinguere tra sincronizzazione “reale” e sincronizzazione “apparente”. La sincronizzazione “reale” si verifica quando i sistemi dinamici che compongono la rete sono in grado di influenzarsi a vicenda, mentre la sincronizzazione “apparente” si verifica quando i sistemi dinamici non interagiscono tra loro ma sono soggetti a una forza esterna comune. Ad esempio, battendo le mani davanti ad un gruppo di piccioni si provocherà la medesima reazione in tutti gli uccelli, anche se non vi è interazione diretta tra loro. Si tratta dunque di sincronizzazione “apparente”. Invece l'esempio delle transizioni di fase è un esempio di sincronizzazione “reale”, in quanto le molecole interagiscono tra loro mediante forze di natura elettromagnetica. Un'altra caratteristica che distingue le due tipologie di sincronizzazione è la persistenza nel tempo. La sincronizzazione “reale” tende a persistere nel tempo, mentre la sincronizzazione “apparente” ha spesso vita breve. Infatti i piccioni, dopo essersi alzati in volo tutti insieme, inizieranno a seguire traiettorie differenti tra loro, perdendo rapidamente la sincronizzazione iniziale. Di contro, una volta formatosi lo stato solido a partire da quello liquido, le molecole continueranno a muoversi insieme finché qualche evento esterno non interromperà la configurazione di stato solido (ad esempio un aumento della temperatura). La sincronizzazione che è interessante studiare è quella “reale”, in quanto è legata a fenomeni fisici fondamentali e non a pure coincidenze. Da adesso in poi, ogni volta che parleremo di sincronizzazione, ci riferiremo alla sincronizzazione “reale”.

In generale, quando si vuole studiare la sincronizzazione di un insieme di sistemi dinamici interagenti, si individua un parametro di controllo che può influenzare l'intensità delle interazioni tra i sistemi e si studia il livello di sincronizzazione in funzione di tale parametro. Nell'esempio delle transizioni di fase un buon parametro di controllo può

essere la temperatura. Infatti, aumentando la temperatura, aumenta l'energia cinetica media delle singole molecole, rendendo di conseguenza meno intense le interazioni tra di esse. Dunque, maggiore è la temperatura, minore è l'intensità delle interazioni tra le molecole.

Lo studio della sincronizzazione si presenta come un campo di ricerca altamente interdisciplinare, in grado di mettere in contatto scienze in apparenza scorrelate come, ad esempio, la fisica e le neuroscienze. È infatti possibile studiare il comportamento collettivo dei neuroni trattandoli come oscillatori accoppiati [4]. Risulta allora doveroso chiedersi se il grado di sincronizzazione dei neuroni possa riflettersi in qualche modo nel funzionamento globale del cervello e della mente umana. In altre parole, è interessante capire se il grado di sincronizzazione sia rilevante per le funzioni cerebrali. Diverse ricerche suggeriscono che la risposta alla domanda sia affermativa [5]. Più nello specifico, è stato osservato che un livello anomalo di sincronizzazione nel cervello può implicare disfunzioni cognitive e comportamentali. Per esempio, è stato messo in evidenza che malattie come la schizofrenia, l'epilessia, l'autismo, l'Alzheimer e il Parkinson possono essere collegate a stati anomali di sincronizzazione neuronale [6]. Dalle osservazioni sembra che gli stati di malattia del cervello siano associati a livelli di sincronizzazione o troppo elevati o troppo bassi, dunque lo stato di salute si colloca a metà tra l'ordine e il disordine.

Dinnanzi ai risultati appena esposti è impossibile negare l'importanza dello studio dei sistemi dinamici su reti e in particolare della loro sincronizzazione.

## 1.2 Modello di Kuramoto

### 1.2.1 Equazioni di Kuramoto

Il primo studio matematico rilevante sul problema della sincronizzazione come fenomeno collettivo riguardante un numero elevato di sistemi è stato condotto dal fisico Yoshiki Kuramoto nel 1975 [7]. In questo capitolo riportiamo il ragionamento di Kuramoto e i risultati da lui ottenuti. Per una trattazione più esauriente si rimanda a Strogatz [2, 8] e Kuramoto [9].

Nel modello di Kuramoto vengono considerati  $N$  oscillatori aventi frequenze caratteristiche  $\Omega_i$ , con  $i = 1, \dots, N$ . Lo stato di un oscillatore è descritto dalla sua fase  $\Theta_i$ . Le equazioni proposte da Kuramoto sono le seguenti:

$$\dot{\Theta}_i = \Omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\Theta_j - \Theta_i) \quad (1.1)$$

dove  $K \in \mathbb{R}$  è un parametro reale detto costante di accoppiamento.

Le frequenze naturali  $\Omega_i$  si vengono estratte da una distribuzione  $G(\Omega)$  che si assume essere simmetrica rispetto ad una frequenza  $\mu$  e unimodale, quindi presenta un unico picco in  $\mu$ . Si assume inoltre che  $G(\Omega)$  abbia code infinite, ossia che  $G(\Omega) \rightarrow 0$  per  $|\Omega| \rightarrow \infty$ . Si può mostrare che se  $K$  è positivo allora l'accoppiamento è attrattivo, mentre se  $K$  è negativo l'accoppiamento è repulsivo. Di conseguenza, ai fini dello studio della sincronizzazione, si assume  $K \geq 0$ . Inoltre, se  $K = 0$  gli oscillatori risultano disaccoppiati, infatti l'equazione (1.1) diventa:

$$\dot{\Theta}_i = \Omega_i$$

Dunque in tal caso ogni oscillatore continua a muoversi alla propria frequenza naturale senza essere influenzato dagli altri oscillatori.

Un'altra osservazione rilevante è che il modello di Kuramoto descrive un'interazione *all-to-all*, ossia un ensemble di sistemi dove ciascun sistema interagisce con tutti gli altri.

Gli oscillatori possono essere rappresentati in maniera molto conveniente come numeri complessi aventi modulo unitario e argomento pari alla fase dell'oscillatore. In questo modo, essi possono essere visualizzati come punti che si muovono sulla circonferenza unitaria centrata nell'origine del piano complesso.

Per quantificare il grado di sincronizzazione dei sistemi si introduce il parametro d'ordine complesso, definito come segue:

$$re^{i\Psi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\Theta_j} \quad (1.2)$$

Dal parametro d'ordine complesso possono essere estratte informazioni utili sul sistema:

- Il modulo  $r$ , detto parametro d'ordine, è compreso tra 0 e 1 e quantifica la coerenza del sistema. Se gli oscillatori non sono sincronizzati ci saranno contributi provenienti da tutte le regioni della circonferenza per il calcolo del parametro d'ordine complesso, quindi  $re^{i\Psi}$  sarà vicino all'origine e dunque  $r$  tenderà ad annullarsi. Viceversa, se gli oscillatori sono sincronizzati, i contributi al calcolo di  $re^{i\Psi}$  proverranno prevalentemente da una regione particolare della circonferenza, quindi  $re^{i\Psi}$  sarà più lontano dall'origine e di conseguenza  $r$  sarà più vicino a 1.
- L'argomento  $\Psi$  indica semplicemente la fase media degli oscillatori.

Geometricamente, si può interpretare il parametro d'ordine come il “centro di massa” del sistema rappresentato nel piano complesso, sostituendo ad ogni oscillatore un punto di massa unitaria (Figura 1.1).

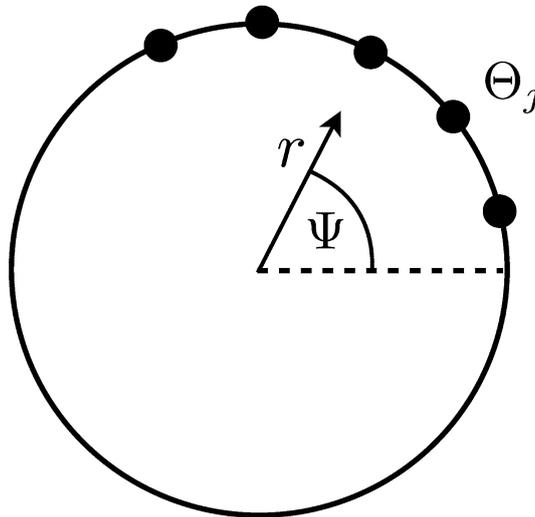


Figura 1.1: Rappresentazione geometrica del parametro d'ordine come centro di massa nel piano complesso. L'immagine è stata presa da [2].

Fissata la forma della distribuzione  $G(\Omega)$ , definiamo la quantità:

$$r_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} r(t)$$

È possibile mostrare che il limite esiste sempre se si assumono la non negatività di  $K$  e la simmetria e l'unimodalità di  $G(\Omega)$ , quindi  $r_\infty$  è ben definito. Risulta interessante

studiare la dipendenza di  $r_\infty$  da  $K$ . Tale dipendenza è rappresentata nel grafico in Figura 1.2.

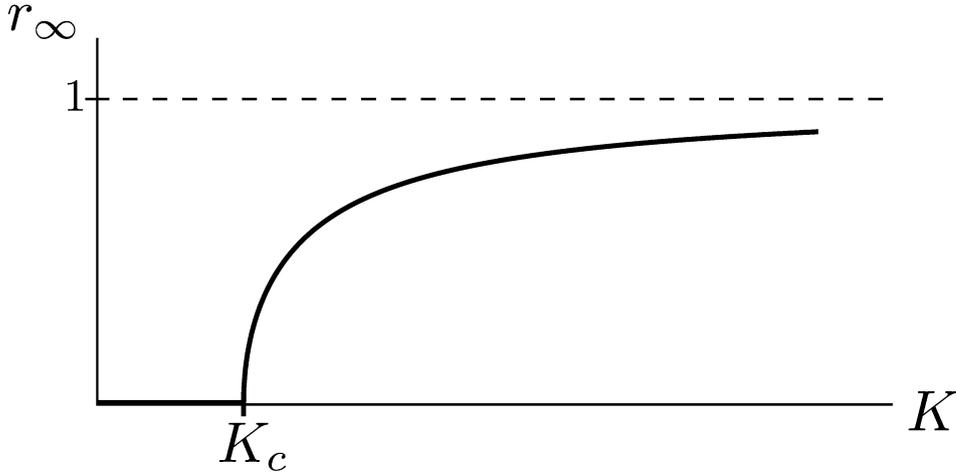


Figura 1.2: Dipendenza di  $r_\infty$  da  $K$ . L'immagine è stata presa da [2].

Si nota dal grafico che esiste un valore critico  $K_c$  tale che:

- Per  $K < K_c$  si ha  $r_\infty = 0$ , quindi il grado di sincronizzazione del sistema è minimo.
- Per  $K > K_c$  si ha che  $r_\infty$  cresce in maniera monotona rispetto a  $K$ , quindi il grado di sincronizzazione del sistema inizia ad aumentare una volta superato  $K_c$  fino a raggiungere la completa sincronizzazione per  $K \rightarrow \infty$ .

Si osserva quindi una transizione di fase nel sistema in corrispondenza del valore critico  $K_c$ .

Adesso utilizziamo il parametro d'ordine complesso per riscrivere le equazioni (1.1). Moltiplicando a destra e a sinistra per  $e^{-i\Theta_i}$  l'equazione (1.2) otteniamo

$$r e^{i(\Psi - \Theta_i)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i(\Theta_j - \Theta_i)}$$

ed eguagliando le parti immaginarie dei due membri si ricava

$$r \sin(\Psi - \Theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\Theta_j - \Theta_i)$$

Infine, moltiplicando per  $K$  ambo i membri compare il termine di accoppiamento nel membro di destra. Ciò ci permette di riscrivere le equazioni (1.1) come segue:

$$\dot{\Theta}_i = \Omega_i + K r \sin(\Psi - \Theta_i) \quad (1.3)$$

L'equazione (1.3) offre una nuova prospettiva per vedere la maniera in cui gli oscillatori interagiscono tra loro. Infatti adesso il termine di accoppiamento, che rappresenta l'interazione tra gli oscillatori, non viene più espresso mediante tutte le fasi  $\Theta_j$ , ma solo attraverso il parametro d'ordine complesso  $r e^{i\Psi}$ , che è una grandezza media del sistema. Dunque secondo questa prospettiva gli oscillatori interagiscono tra loro attraverso un campo medio, descritto dal parametro d'ordine complesso.

Si noti che il sistema di equazioni (1.3) è un sistema di equazioni differenziali accoppiate. Infatti, anche se non è riportata esplicitamente, persiste una dipendenza del

parametro d'ordine complesso dalle fasi di tutti gli oscillatori nel sistema. Dunque sarebbe un errore considerare gli oscillatori disaccoppiati solo perché la dipendenza dalle altre fasi non è esplicita nell'equazione (1.3).

È possibile semplificare ulteriormente le equazioni che governano il sistema. Per capire come, analizziamo come cambiano le equazioni in seguito ad un cambiamento di sistema di riferimento. Descriviamo dunque il sistema visto da un sistema di riferimento che ruota con velocità angolare costante  $u$ . Le nuove fasi  $\theta_i$  degli oscillatori sono date da

$$\theta_i = \Theta_i - ut$$

Possiamo allora esprimere le fasi del sistema di riferimento fisso in funzione delle fasi del sistema di riferimento rotante come segue:

$$\Theta_i = \theta_i + ut$$

Infine, derivando rispetto al tempo otteniamo

$$\dot{\Theta}_i = \dot{\theta}_i + u$$

Sostituendo l'equazione (1.1) otteniamo

$$\dot{\theta}_i + u = \Omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j + \mu t - (\Theta_i + \mu t))$$

che diventa

$$\dot{\theta}_i = \Omega_i - u + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i)$$

Siamo dunque giunti ad un altro modello di Kuramoto, in cui però le frequenze caratteristiche sono traslate di una quantità  $-u$ . È allora evidente che anche il valor medio delle frequenze naturali degli oscillatori subisce la medesima traslazione nel sistema di riferimento rotante, diventando  $\mu - u$ .

Convienne allora descrivere il sistema in un sistema di riferimento rotante che ruota con velocità angolare pari al valor medio delle frequenze naturali degli oscillatori, ossia  $u = \mu$ . Definiamo allora le nuove frequenze naturali  $\omega_i$  come segue:

$$\omega_i \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_i - \mu$$

Dato che nel nuovo sistema di riferimento la media delle frequenze naturali degli oscillatori è zero, le frequenze  $\omega_i$  rappresentano le deviazioni delle frequenze  $\Omega_i$  rispetto alla media  $\mu$ . Convienne definire una nuova distribuzione  $g(\omega)$  delle frequenze naturali degli oscillatori, associata alle frequenze  $\omega_i$ . Tale distribuzione è data da

$$g(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} G(\mu + \omega)$$

Si noti che  $g$  è una funzione pari, infatti

$$g(-\omega) = G(\mu - \omega) = G(\mu + \omega) = g(\omega)$$

dove nella seconda uguaglianza si è utilizzata la simmetria di  $G(\Omega)$  rispetto a  $\mu$ .

Dunque, nel nuovo sistema di riferimento, le equazioni che governano il sistema diventano:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (1.4)$$

### 1.2.2 Stato stazionario

Indaghiamo il comportamento del sistema assumendo una soluzione stazionaria, ossia una soluzione in cui il parametro d'ordine complesso evolve nel tempo come segue:

$$r(t) = r_\infty, \quad \Psi(t) = \mu t$$

Vista nel sistema di riferimento rotante l'evoluzione del parametro d'ordine complesso è ancora più semplice:

$$r(t) = r_\infty, \quad \psi(t) = 0$$

Sostituendo nell'equazione (1.4) otteniamo

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr_\infty \sin(\theta_i) \quad (1.5)$$

Si osservi come l'assunzione di stato stazionario rende le equazioni del sistema indipendenti tra loro, quindi gli oscillatori risultano adesso disaccoppiati.

Resta ora da determinare la dipendenza di  $r_\infty$  da  $K$ . A tal fine dividiamo gli oscillatori in due categorie: gli oscillatori *locked*, ossia gli oscillatori aventi  $|\omega_i| < Kr_\infty$ , e gli oscillatori *drifting*, ossia gli oscillatori aventi  $|\omega_i| > Kr_\infty$ .

Analizziamo il comportamento degli oscillatori *locked*. Assumiamo per semplicità  $\omega_i > 0$ . Dato che  $\omega_i < Kr_\infty$ , la quantità  $\omega_i - Kr_\infty \sin(\theta_i)$  può assumere valori sia positivi che negativi, a seconda del valore di  $\theta_i \in [0, 2\pi]$ . In particolare, l'equazione (1.5) ammette due punti fissi, ossia due valori di  $\theta_i$  tali che  $\dot{\theta}_i = 0$ . Solo uno di questi due punti risulta essere stabile (si veda il grafico in Figura 1.3), e lo denoteremo con  $\theta_i^*$ . Allora, a patto che le condizioni iniziali non coincidano con il punto fisso instabile, le fasi degli oscillatori *locked* convergeranno verso il punto fisso stabile  $\theta_i^*$  per  $t \rightarrow \infty$ . Un risultato analogo si ottiene se si assume  $\omega_i < 0$ , ossia se si considera un oscillatore avente frequenza naturale inferiore alla media  $\mu$ . Dato che le fasi  $\theta_i$  di questi oscillatori, ossia le fasi viste nel sistema di riferimento rotante, tendono a essere costanti nel tempo, nel sistema di riferimento fisso gli oscillatori *locked* formano un blocco di fasi che si muovono con una velocità angolare  $\mu$ . È per questo motivo che tali oscillatori sono detti *locked*, ossia bloccati, in quanto le loro fasi vengono bloccate a muoversi a velocità angolare costante  $\mu$ . Si noti infine che i possibili  $\theta_i^*$  stabili si trovano necessariamente nell'intervallo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

Passiamo ora all'analisi degli oscillatori *drifting*. Assumiamo anche in questo caso  $\omega_i > 0$  per semplicità. Dato che  $\omega_i > Kr_\infty$ , la quantità  $\omega_i - Kr_\infty \sin(\theta_i)$  è sempre positiva, dunque la velocità angolare  $\dot{\theta}_i$  è sempre positiva. Ne consegue che le fasi  $\theta_i$  sono funzioni strettamente crescenti nel tempo. Assumendo  $\omega_i < 0$  si ricava che  $\dot{\theta}_i$  è sempre negativa, quindi le fasi  $\theta_i$  sono funzioni strettamente decrescenti nel tempo. In entrambi i casi non è possibile osservare una sincronizzazione dei *drifters* con i *locked*, dato che le fasi dei *drifters* non possono convergere verso un valore fisso. È allora impossibile che gli oscillatori *drifting* si sincronizzino con gli oscillatori *locked*.

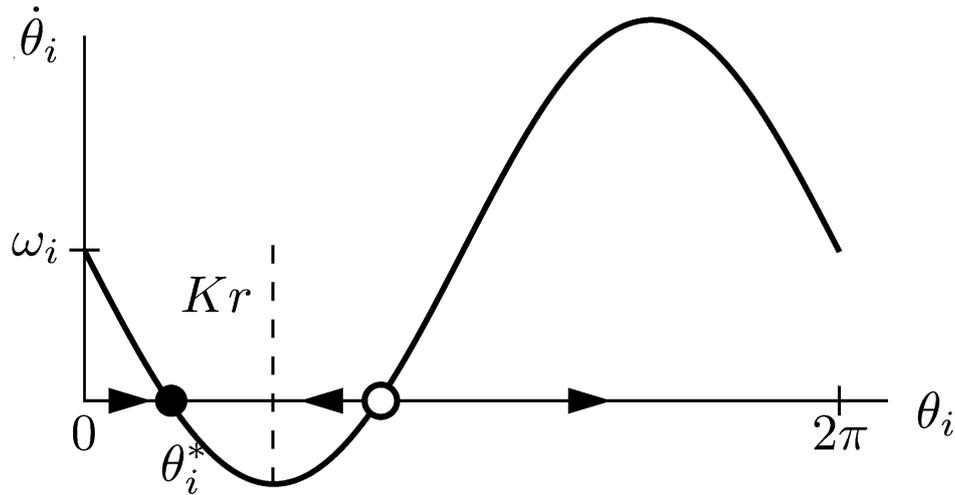


Figura 1.3: Nella figura è riportato il grafico del membro di destra dell'equazione (1.5) in funzione di  $\theta_i$ , assumendo  $\omega_i > 0$ . Si può notare che l'equazione ammette due punti fissi, uno stabile e uno instabile. L'immagine è stata presa da [2].

Rappresentando la situazione nel piano complesso nel sistema di riferimento rotante, il quadro che emerge è il seguente:

- Gli oscillatori *locked* sono punti sulla circonferenza unitaria fermi alle varie fasi  $\theta_i^*$ .
- Gli oscillatori *drifting* con  $\omega_i > 0$  sono punti che si muovono in senso antiorario lungo la circonferenza unitaria.
- Gli oscillatori *drifting* con  $\omega_i < 0$  sono punti che si muovono in senso orario lungo la circonferenza unitaria.

Nel sistema di riferimento fisso, invece, la situazione è la seguente:

- Gli oscillatori *locked* formano un blocco di punti sulla circonferenza unitaria che si muovono con velocità angolare  $\mu$ .
- Gli oscillatori *drifting* con  $\omega_i > 0$  sono punti che si muovono in senso antiorario lungo la circonferenza unitaria e doppiano ripetutamente gli oscillatori *locked*.
- Gli oscillatori *drifting* con  $\omega_i < 0$  sono punti che si muovono in senso antiorario lungo la circonferenza unitaria e vengono doppiati ripetutamente dagli oscillatori *locked*.

Si noti che i *drifters* non si muovono a velocità angolare costante, ma la loro velocità angolare è sinusoidale in funzione della fase nel sistema di riferimento rotante  $\theta_i$ . Dunque, la loro velocità angolare oscilla periodicamente tra due valori estremi.

Sorge adesso un problema: come è possibile mantenere il parametro d'ordine complesso nelle condizioni di stazionarietà con oscillatori *drifting*? Per risolvere il problema Kuramoto assunse che i *drifters* seguissero una distribuzione  $\rho(\theta, \omega)$  inversamente proporzionale alla loro velocità angolare:

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{c}{|\dot{\theta}|} = \frac{1}{|\omega - Kr \sin(\theta)|}$$

dove  $c$  è una costante reale.

È possibile calcolare il valore di  $c$  imponendo la condizione di normalizzazione:

$$1 = \int_0^{2\pi} \rho(\theta, \omega) d\theta = c \int_0^{2\pi} \frac{1}{|\omega - Kr \sin(\theta)|} d\theta$$

L'ultimo integrale si può calcolare tramite metodi di integrazione complessa oppure mediante il cambiamento di variabile  $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , ottenendo

$$1 = \frac{2\pi c}{\sqrt{\omega^2 - K^2 r^2}}$$

da cui si può ricavare il valore di  $c$ :

$$c = \frac{\sqrt{\omega^2 - K^2 r^2}}{2\pi}$$

Dunque la distribuzione dei *drifters* è data da

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{\sqrt{\omega^2 - K^2 r^2}}{2\pi |\omega - Kr \sin(\theta)|}$$

Tale distribuzione gode delle seguenti simmetrie:

$$\begin{cases} \rho(\pi - \theta, \omega) = \rho(\theta, \omega) \\ \rho(-\theta, -\omega) = \rho(\theta, \omega) \end{cases}$$

che unite danno la proprietà

$$\rho(\pi + \theta, -\omega) = \rho(\theta, \omega) \quad (1.6)$$

### 1.2.3 Autoconsistenza

Adesso, per calcolare la dipendenza di  $r_\infty$  da  $K$ , dobbiamo imporre l'autoconsistenza del parametro d'ordine complesso nell'ipotesi di soluzione stazionaria. In altre parole, bisogna garantire che il parametro d'ordine complesso calcolato secondo l'equazione (1.2) e tenendo conto delle assunzioni che abbiamo fatto coincida col parametro d'ordine complesso stazionario. Si noti che stiamo assumendo che il numero  $N$  di oscillatori sia idealmente infinito, pertanto la media discreta dell'equazione (1.2) diventa una media continua, che denotiamo con  $\langle e^{i\theta} \rangle$ . Denotando con  $\Phi_{lock}$  e  $\Phi_{drift}$  rispettivamente i contributi degli oscillatori *locked* e *drifting* alla distribuzione  $\Phi$  degli oscillatori rispetto alle fasi  $\theta$ , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \langle e^{i\theta} \rangle &= \int_0^{2\pi} e^{i\theta} \Phi(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} (\Phi_{lock}(\theta) + \Phi_{drift}(\theta)) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} e^{i\theta} \Phi_{lock}(\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} e^{i\theta} \Phi_{drift}(\theta) d\theta = \langle e^{i\theta} \rangle_{lock} + \langle e^{i\theta} \rangle_{drift} \end{aligned}$$

Il problema può essere quindi scomposto in due parti. Per calcolare  $\langle e^{i\theta} \rangle_{lock}$  e  $\langle e^{i\theta} \rangle_{drift}$  dobbiamo però essere a conoscenza delle distribuzioni  $\Phi_{lock}$  e  $\Phi_{drift}$ .

Iniziamo calcolando  $\Phi_{lock}$  e quindi  $\langle e^{i\theta} \rangle_{lock}$ . Sappiamo che ogni oscillatore *locked* ha una fase  $\theta$  costante, quindi  $\dot{\theta} = 0$ . Sostituendo nell'equazione (1.5) otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \omega - Kr \sin(\theta) \\ \omega &= Kr \sin(\theta) \end{aligned}$$

Abbiamo dunque una relazione che ad ogni valore di  $\theta$  fa corrispondere un valore di  $\omega$  per gli oscillatori *locked*. Considerando un  $\theta$  e un  $\omega$  legati dalla relazione precedente, avremo che il numero di oscillatori che hanno frequenze naturali nell'intervallo  $[\omega, \omega + d\omega]$  coincide col numero di oscillatori aventi fasi nell'intervallo  $[\theta, \theta + d\theta]$ . Forti di questa osservazione e conoscendo la distribuzione degli oscillatori rispetto alle frequenze naturali, possiamo calcolare la distribuzione  $\Phi_{lock}$  degli oscillatori *locked* rispetto alle fasi:

$$\begin{aligned}\Phi_{lock}(\theta) d\theta &= g(\omega) d\omega \\ \Phi_{lock}(\theta) d\theta &= g(Kr \sin(\theta)) Kr \cos(\theta) d\theta \\ \Phi_{lock}(\theta) &= Kr \cos(\theta) g(Kr \sin(\theta))\end{aligned}$$

Si ricordi che le fasi degli oscillatori *locked* sono nell'intervallo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , dunque al di fuori di tale intervallo  $\Phi_{lock}$  deve essere nulla. L'espressione finale di  $\Phi_{lock}$  è quindi

$$\Phi_{lock}(\theta) = \begin{cases} Kr \cos(\theta) g(Kr \sin(\theta)) & \text{se } \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Siamo pronti per calcolare  $\langle e^{i\theta} \rangle_{lock}$ :

$$\begin{aligned}\langle e^{i\theta} \rangle_{lock} &= \int_0^{2\pi} e^{i\theta} \Phi_{lock}(\theta) d\theta = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) Kr \cos(\theta) g(Kr \sin(\theta)) d\theta = \\ &= Kr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) g(Kr \sin(\theta)) d\theta + i Kr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) \cos(\theta) g(Kr \sin(\theta)) d\theta\end{aligned}$$

Si noti che il secondo integrale è nullo dato che ha integranda dispari, dunque abbiamo

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{lock} = Kr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) g(Kr \sin(\theta)) d\theta$$

Passiamo ora agli oscillatori *drifting*. In questo caso, ad un valore fissato di  $\theta$  corrispondono molteplici oscillatori con  $\omega$  differenti. Nella distribuzione  $\Phi_{drift}$  bisogna tenere conto di tutti questi oscillatori, quindi abbiamo

$$\Phi_{drift}(\theta) = \int_{|\omega| > Kr} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega$$

Possiamo scomporre il calcolo di  $\langle e^{i\theta} \rangle_{drift}$  nel calcolo della media delle sue componenti:

$$\begin{aligned}\langle e^{i\theta} \rangle_{drift} &= \int_0^{2\pi} e^{i\theta} \Phi_{drift}(\theta) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \Phi_{drift}(\theta) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \Phi_{drift}(\theta) d\theta + i \int_0^{2\pi} \sin(\theta) \Phi_{drift}(\theta) d\theta = \\ &= \langle \cos(\theta) \rangle_{drift} + i \langle \sin(\theta) \rangle_{drift}\end{aligned}$$

Procediamo ora al calcolo di tali medie:

$$\begin{aligned}\langle \cos(\theta) \rangle_{drift} &= \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \Phi_{drift}(\theta) d\theta = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta) \Phi_{drift}(\theta) d\theta = 0\end{aligned}$$

perché la funzione  $\cos(\theta)$  è pari e  $\Phi_{drift}(\theta)$  è dispari, dunque l'integranda è dispari e viene integrata su un dominio simmetrico rispetto all'origine.

$$\begin{aligned} \langle \sin(\theta) \rangle_{drift} &= \int_0^{2\pi} \sin(\theta) \Phi_{drift}(\theta) d\theta = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\theta) \int_{|\omega| > Kr} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta = \\ &= \int_{|\omega| > Kr} g(\omega) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\theta) \rho(\theta, \omega) d\theta d\omega = \\ &= \int_{|\omega| > Kr} g(\omega) f(\omega) d\omega \end{aligned}$$

dove si è potuto scambiare l'ordine di integrazione in virtù del teorema di Fubini-Tonelli e si è definita la funzione

$$f(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\theta) \rho(\theta, \omega) d\theta$$

Si può notare che la funzione  $f(\omega)$  è dispari rispetto a  $\omega$ , poiché

$$\begin{aligned} f(-\omega) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\theta) \rho(\theta, -\omega) d\theta = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\theta) \rho(\pi + \theta, \omega) d\theta = \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\pi + \theta) \rho(\pi + \theta, \omega) d\theta = \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t) \rho(t, \omega) dt = -f(\omega) \end{aligned}$$

dove si è sfruttata la proprietà 1.6 e si è operato il cambiamento di variabile  $t = \pi + \theta$ . A questo punto, essendo  $g(\omega)$  una funzione pari e  $f(\omega)$  una funzione dispari, possiamo concludere che

$$\langle \sin(\theta) \rangle_{drift} = \int_{|\omega| > Kr} g(\omega) f(\omega) d\omega = 0$$

E di conseguenza

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{drift} = 0$$

Dunque, unendo i due risultati ottenuti per gli oscillatori *locked* e *drifting*, possiamo concludere che

$$\langle e^{i\theta} \rangle = \langle e^{i\theta} \rangle_{locked} + \langle e^{i\theta} \rangle_{drift} = Kr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) g(Kr \sin(\theta)) d\theta$$

Siamo pronti per imporre l'autoconsistenza del parametro d'ordine complesso:

$$r e^{i\psi} = Kr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) g(Kr \sin(\theta)) d\theta \quad (1.7)$$

Le soluzioni autoconsistenti devono rispettare tale relazione. Essendo il membro di destra sempre un numero reale, l'argomento del membro di sinistra deve essere nullo, ossia  $\psi = 0$ . Dunque l'unico valore autoconsistente di  $r$  è Si noti che l'integrale nel membro

di destra dà un risultato reale, dunque l'assunzione  $\psi(t) = 0 \quad \forall t$  è autoconsistente. L'equazione (1.7) si riduce allora alla seguente forma:

$$r = Kr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) g(Kr \sin(\theta)) d\theta$$

È immediato osservare l'esistenza della soluzione banale  $r = 0$ . In tal caso tutti gli oscillatori risultano essere *drifting* e la loro distribuzione  $\rho$  diventa uniforme:

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{1}{2\pi}$$

Questo stato prende il nome di stato incoerente ed è caratterizzato dal fatto che ogni oscillatore si muove alla propria frequenza naturale. Si noti che lo stato incoerente può presentarsi per qualsiasi valore di  $K$ , tuttavia non si può dire nulla sulla sua stabilità.

Passiamo ora all'analisi delle soluzioni non banali, ossia quelle per cui  $r \neq 0$ . Possiamo dunque semplificare  $r$  nell'equazione di autoconsistenza, ottenendo

$$1 = K \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) g(Kr \sin(\theta)) d\theta$$

Tale equazione definisce una relazione implicita tra  $r$  e  $K$ , che può essere esplicitata calcolando l'integrale di sinistra ed esprimendo  $r$  in funzione di  $K$ . In questo modo si può ricavare la forma del ramo coerente di soluzioni con  $r = r_\infty(K) > 0$  per  $K > K_c$ . Si noti che anche in questo caso non è stata analizzata la stabilità della soluzione. Questo problema esula da questa trattazione, che termina qui, ma esiste della letteratura che si occupa di tale argomento, come ad esempio [8] e [10].



# Capitolo 2

## Il modello

Il modello di Kuramoto descrive l'interazione *all-to-all* di una collezione di oscillatori leggermente diversi tra loro (le frequenze naturali non sono tutte uguali). È significativo il fatto che la formulazione matematica di tale modello sia molto fertile, in quanto consente di trattare rigorosamente fenomeni complessi come la sincronizzazione. Tuttavia, esistono molti sistemi reali che non possono essere modellati con un accoppiamento *all-to-all*, ma richiedono una struttura di interazioni più complessa. Ad esempio, il cervello non può essere modellato tramite interazioni *all-to-all*, ma richiede una topologia di rete più complessa dato che non è garantita l'esistenza di una sinapsi tra ogni coppia di neuroni. Un altro limite del modello di Kuramoto è che esso tratta solo sistemi composti da oscillatori, mentre nella realtà è possibile incontrare leggi dinamiche diverse da quelle degli oscillatori.

È allora naturale chiedersi se si possa generalizzare il modello di Kuramoto in modo tale da superare questi due limiti. A tale scopo, si può rappresentare il sistema con un grafo: i nodi rappresentano i singoli sistemi dinamici e gli archi rappresentano le loro interazioni. La dinamica dei singoli sistemi sarà allora influenzata dalla loro natura come sistemi isolati e dalle interazioni con gli altri sistemi. Per evitare di avere un modello troppo complicato a livello matematico, si assume che tutti i sistemi siano identici tra loro. Nell'equazione che descrive la dinamica dei singoli sistemi ci sarà pertanto un termine uguale per tutti i sistemi e un termine dipendente dalla struttura del grafo, che cambia da sistema a sistema in base alla topologia del grafo. Il termine di accoppiamento sarà moltiplicato da una costante reale, detta forza di accoppiamento, che sarà il nostro parametro di controllo per studiare la sincronizzazione del sistema. Vedremo che con alcune approssimazioni è possibile descrivere la transizione alla sincronizzazione utilizzando solo le informazioni topologiche del grafo.

È importante sottolineare che il focus del nostro lavoro è la descrizione della transizione alla sincronizzazione di un insieme di sistemi dinamici in una rete. Sono pertanto degni di interesse tutti gli stadi che caratterizzano la transizione alla sincronizzazione, anche quelli intermedi che presentano solamente sincronizzazione parziale. Nel seguito indagheremo quali siano le condizioni necessarie affinché si verifichi la sincronizzazione globale, e anche quali siano le condizioni necessarie per avere sincronizzazione parziale.

Una trattazione interessante dell'interazione di una collezione di sistemi dinamici identici disposti in un grafo si trova nell'articolo "The transition to synchronization of networked dynamical systems" [1]. In questo capitolo esporremo il modello proposto nell'articolo, con particolare attenzione alla formalizzazione dei metodi matematici utilizzati dagli autori.

## 2.1 Soluzione sincrona globale

Il modello che si vuole studiare è composto da  $N$  sistemi dinamici identici  $m$ -dimensionali, ognuno dei quali è descritto (se isolato) dall'equazione differenziale:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \quad i = 1, \dots, N \quad (2.1)$$

dove  $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^m$  rappresenta la traiettoria dell' $i$ -esimo sistema al tempo  $t$ , e  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  è una funzione che rappresenta la dinamica del sistema. Si noti che la funzione  $\mathbf{f}$  è la stessa per tutti i sistemi, essendo identici.

L'interazione tra i sistemi è descritta mediante un grafo non orientato  $G = (V, E)$  i cui vertici  $V$  rappresentano i sistemi e gli archi  $E$  rappresentano le loro connessioni.

L'equazione differenziale che descrive la dinamica dei sistemi tenendo conto dell'accoppiamento è:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - d \sum_{j=1}^N L_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_j) \quad i = 1, \dots, N \quad (2.2)$$

dove  $d \in \mathbb{R}$  è un parametro chiamato forza di accoppiamento,  $L_{ij}$  è l' $(i, j)$ -esimo elemento della matrice laplaciana  $L$  del grafo  $G$ , e  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  è una funzione che rappresenta l'interazione tra i sistemi.

La matrice laplaciana  $L$  ha somma nulla lungo ogni riga. Questa proprietà garantisce l'esistenza della cosiddetta soluzione sincrona, in cui tutti i sistemi seguono la medesima traiettoria.

**Proposizione 2.1.** Il sistema di equazioni differenziali (2.2) ammette l'esistenza della soluzione sincrona globale, cioè una soluzione  $\mathbf{x}_s$  in cui tutti i sistemi si muovono all'unisono e tale da soddisfare l'equazione dinamica di un sistema isolato.

In simboli si ha  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_s$  per ogni  $i = 1, \dots, N$  e  $\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{f}(\mathbf{x}_s)$ .

*Dimostrazione.* Mostriamo che una soluzione come quella descritta nell'enunciato della proposizione soddisfa l'equazione differenziale (2.2).

Consideriamo quindi una soluzione  $\mathbf{x}_s$  di un sistema isolato tale che  $\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{f}(\mathbf{x}_s)$  e poniamoci nella situazione in cui  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_s$  per ogni  $i = 1, \dots, N$ .

Sostituendo questa soluzione nell'equazione (2.2) otteniamo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - d \sum_{j=1}^N L_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_j) \\ \dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_s) - d \sum_{j=1}^N L_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_s) \\ \dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_s) - d \mathbf{g}(\mathbf{x}_s) \sum_{j=1}^N L_{ij} \\ \dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_s) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che la somma lungo qualsiasi riga della matrice laplaciana  $L$  è nulla.

Sapendo per ipotesi che  $\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{f}(\mathbf{x}_s)$ , si perviene dunque ad un'identità, e ciò conclude la dimostrazione. ■

## 2.2 Stabilità della soluzione sincrona globale

Appurata l'esistenza della soluzione sincrona, è naturale chiedersi se tale soluzione sia stabile.

Consideriamo una soluzione “vicina” alla soluzione sincrona, in cui ogni sistema devia dalla soluzione sincrona di una quantità  $\delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_s$ . A questo punto, linearizzando l'equazione (2.2) intorno alla soluzione sincrona, si ottiene:

$$\dot{\delta \mathbf{x}}_i = \mathbf{J}_f(\mathbf{x}_s) \delta \mathbf{x}_i - d \sum_{j=1}^N L_{ij} \mathbf{J}_g(\mathbf{x}_s) \delta \mathbf{x}_j \quad i = 1, \dots, N \quad (2.3)$$

dove  $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_s), \mathbf{J}_g(\mathbf{x}_s) \in M_m(\mathbb{R})$  e sono le matrici jacobiane rispettivamente delle funzioni  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  calcolate in  $\mathbf{x}_s$ . Si noti che queste matrici dipendono dal tempo, dato che  $\mathbf{x}_s$  è una funzione del tempo.

Per alleggerire la notazione, definiamo il vettore  $\delta \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{Nm}$  come:

$$\delta \mathbf{X} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \delta \mathbf{x}_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{Nm} \quad (2.4)$$

Possiamo ora racchiudere le equazioni (2.3) in un'unica equazione che coinvolge il vettore  $\delta \mathbf{X}$ .

$$\dot{\delta \mathbf{X}} = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{J}_f(\mathbf{x}_s) - dL \otimes \mathbf{J}_g(\mathbf{x}_s)) \delta \mathbf{X} \quad (2.5)$$

dove  $\mathbf{I}_N \in M_N(\mathbb{R})$  è la matrice identità di dimensione  $N$  e  $\otimes$  è il prodotto di Kronecker.

$G$  è un grafo non orientato, quindi la matrice laplaciana  $L$  è simmetrica e semidefinita positiva (per la dimostrazione di questo fatto si veda la proposizione A.2 nell'appendice A). Di conseguenza,  $L$  è diagonalizzabile mediante una base ortonormale di  $\mathbb{R}^N$  e i suoi autovalori sono numeri reali non negativi. Denotiamo con  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  gli autovalori di  $L$  ordinati in maniera tale da avere  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ , e denotiamo con  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$  i corrispondenti autovettori ortonormali. Poiché la somma lungo ogni riga di  $L$  è nulla, abbiamo  $\lambda_1 = 0$  e  $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{1}_N$ , dove  $\mathbf{1}_N \in \mathbb{R}^N$  è il vettore colonna di dimensione  $N$  i cui elementi sono tutti uguali a 1:

$$\mathbf{1}_N \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

L'insieme  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}$  costituisce una base ortonormale di autovettori di  $L$ . Di conseguenza, per la proposizione B.1 mostrata nell'appendice B, sappiamo che esiste un unico insieme di vettori  $\{\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_N\} \subset \mathbb{R}^m$  tali che

$$\delta \mathbf{X} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \otimes \boldsymbol{\eta}_i \quad (2.6)$$

Sostituendo l'espressione di  $\delta \mathbf{X}$  dell'equazione (2.6) nell'equazione differenziale (2.5) si ottiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \otimes \dot{\boldsymbol{\eta}}_i &= (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{J}_f(\mathbf{x}_s) - dL \otimes \mathbf{J}_g(\mathbf{x}_s)) \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \otimes \boldsymbol{\eta}_i \\
\sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \otimes \dot{\boldsymbol{\eta}}_i &= \sum_{i=1}^N ((\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{J}_f(\mathbf{x}_s)) (\mathbf{v}_i \otimes \boldsymbol{\eta}_i) - (dL \otimes \mathbf{J}_g(\mathbf{x}_s)) (\mathbf{v}_i \otimes \boldsymbol{\eta}_i)) \\
\sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \otimes \dot{\boldsymbol{\eta}}_i &= \sum_{i=1}^N ((\mathbf{I}_N \mathbf{v}_i) \otimes (\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_s) \boldsymbol{\eta}_i) - (dL \mathbf{v}_i) \otimes (\mathbf{J}_g(\mathbf{x}_s) \boldsymbol{\eta}_i)) \\
\sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \otimes \dot{\boldsymbol{\eta}}_i &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{v}_i \otimes (\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_s) \boldsymbol{\eta}_i) - (d\lambda_i \mathbf{v}_i) \otimes (\mathbf{J}_g(\mathbf{x}_s) \boldsymbol{\eta}_i)) \\
\sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \otimes \dot{\boldsymbol{\eta}}_i &= \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \otimes (\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_s) \boldsymbol{\eta}_i - d\lambda_i \mathbf{J}_g(\mathbf{x}_s) \boldsymbol{\eta}_i)
\end{aligned}$$

Per passare dalla seconda alla terza equazione è stata utilizzata la proposizione B.2 dimostrata nell'appendice B. Adesso portiamo tutto nel membro di sinistra:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \otimes \dot{\boldsymbol{\eta}}_i - \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \otimes (\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_s) \boldsymbol{\eta}_i - d\lambda_i \mathbf{J}_g(\mathbf{x}_s) \boldsymbol{\eta}_i) &= 0 \\
\sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \otimes (\dot{\boldsymbol{\eta}}_i - (\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_s) \boldsymbol{\eta}_i - d\lambda_i \mathbf{J}_g(\mathbf{x}_s) \boldsymbol{\eta}_i)) &= 0
\end{aligned}$$

I vettori  $\mathbf{v}_i$  sono linearmente indipendenti, quindi l'ultima uguaglianza è equivalente al seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_i = (\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_s) - d\lambda_i \mathbf{J}_g(\mathbf{x}_s)) \boldsymbol{\eta}_i \quad i = 1, \dots, N \quad (2.7)$$

Tali equazioni differenziali differiscono l'una dall'altra solo per il valore dell'autovalore  $\lambda_i \in \text{spec}(L)$ . Convienne dunque studiare l'equazione differenziale per un generico  $\lambda \in \text{spec}(L)$ . Inoltre, è possibile separare i contributi dovuti alla struttura del grafo e alla dinamica del sistema, introducendo il parametro  $\nu \stackrel{\text{def}}{=} d\lambda$ :

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = (\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_s) - \nu \mathbf{J}_g(\mathbf{x}_s)) \boldsymbol{\eta} \quad (2.8)$$

La struttura del grafo contribuisce mediante il valore di  $\nu$ , mentre il contributo della dinamica dei sistemi è racchiuso in  $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_s)$  e  $\mathbf{J}_g(\mathbf{x}_s)$ . L'equazione può essere scritta in una forma ancora più compatta definendo il kernel di evoluzione  $K(\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{J}_f(\mathbf{x}_s) - \nu \mathbf{J}_g(\mathbf{x}_s)$ :

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = K(\nu) \boldsymbol{\eta} \quad (2.9)$$

All'equazione (2.9) sono associati  $m$  esponenti di Lyapunov, dipendenti dal valore di  $\nu$ . Si definisce la Master Stability Function (MSF) valutata nel punto  $\bar{\nu}$  come il massimo esponente di Lyapunov associato all'equazione (2.9) con  $\nu = \bar{\nu}$ . Chiameremo tale funzione  $\Lambda(\bar{\nu})$ . Per una trattazione più esauriente della MSF si rimanda a [11, 12, 13]. Si noti che la forma di  $\Lambda$  dipende unicamente dalla dinamica dei sistemi (cioè dalle funzioni  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$ ) e non dalla struttura del grafo. Affinché la soluzione sincrona sia stabile, è necessario che tutti gli esponenti di Lyapunov siano negativi, il che equivale a richiedere che la MSF sia negativa.

In base all'andamento di  $\Lambda(\nu)$  rispetto a  $\nu$ , è possibile dividere i sistemi in tre categorie:

- **Sistemi di classe I**

Per i sistemi di classe I la MSF è positiva per ogni valore di  $\nu$ . Dunque, questi sistemi sono caotici a prescindere dal valore della forza di accoppiamento  $d$ . Di conseguenza, per sistemi appartenenti a questa classe non è possibile raggiungere la sincronizzazione.

- **Sistemi di classe II**

I sistemi appartenenti alla classe II sono caratterizzati da una MSF che è inizialmente positiva, poi per  $\nu > \nu^*$  diventa negativa e non torna più positiva. Questi sistemi possono raggiungere la sincronizzazione a patto che si abbia un accoppiamento sufficientemente forte, cioè  $d > \frac{\nu^*}{\lambda_2}$ . Si noti che  $\lambda_2$  è il più piccolo autovalore positivo della matrice laplaciana  $L$ , dato che  $\lambda_1 = 0$ .

- **Sistemi di classe III**

I sistemi di classe III sono caratterizzati da una MSF che è inizialmente positiva, poi per  $\nu > \nu_1^*$  diventa negativa e torna ad essere positiva per  $\nu > \nu_2^*$ . Per avere tutti gli esponenti di Lyapunov negativi è necessario avere  $d > \frac{\nu_1^*}{\lambda_2}$  e  $d < \frac{\nu_2^*}{\lambda_N}$ . In questo caso, non è detto che esistano valori di  $d$  tali da garantire la sincronizzazione globale.

In generale, la MSF può intersecare l'asse  $\nu$  un numero arbitrario di volte, noi però consideriamo solo i tre casi appena elencati perché siamo interessati a descrivere la transizione alla *prima* sincronizzazione. Nella Figura 2.1 vengono mostrati gli andamenti della MSF nei tre casi rilevanti.

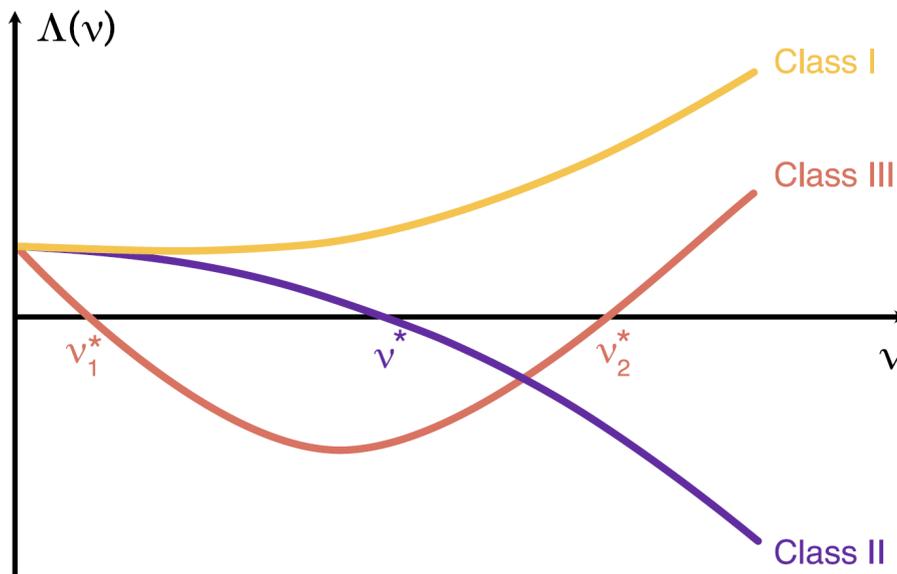


Figura 2.1: Nella figura sono riportati i grafici della MSF per i tre casi rilevanti per il nostro studio. L'immagine è stata presa da [1].

Tenendo conto delle osservazioni precedenti possiamo concludere che per sistemi di classe II la soluzione sincrona globale è stabile se e solo se  $d > \frac{\nu^*}{\lambda_2}$  e per sistemi di classe III la soluzione sincrona globale è stabile se e solo se  $\frac{\nu_1^*}{\lambda_2} < d < \frac{\nu_2^*}{\lambda_N}$ . Per i sistemi di classe I, invece, la soluzione sincrona globale non è mai stabile.

## 2.3 Sincronizzazione parziale

Siamo interessati a questo punto ad analizzare i casi in cui non tutti i  $\nu_i \stackrel{\text{def}}{=} d\lambda_i$  si trovano nella regione dell'asse  $\nu$  per cui la MSF è negativa. A tal fine, dobbiamo definire rigorosamente il concetto di cluster sincronizzabile.

Anche in questa sezione, consideriamo un grafo non orientato  $G = (V, E)$  avente matrice di adiacenza  $A \in M_N(\mathbb{R})$  e matrice laplaciana  $L \in M_N(\mathbb{R})$ . Indichiamo lo spettro di  $L$  con  $\text{spec}(L) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ , dove gli autovalori sono ordinati in ordine crescente:  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N$ . Chiamiamo  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}$  la base ortonormale di  $\mathbb{R}^N$  formata da autovettori di  $L$  in modo tale che  $L\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i \quad \forall i = 1, \dots, N$ . Di conseguenza, si ha  $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{1}_N$  e  $\lambda_1 = 0$ .

**Definizione 2.1.** Sia  $\mathcal{S} \subseteq \{\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N\}$  tale che  $|\mathcal{S}| = k - 1$ . Diciamo che  $\mathcal{S}$  è un blocco spettrale localizzato ai nodi  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$  se rispetta entrambe le seguenti condizioni:

1. Ogni vettore in  $\mathcal{S}$  ha le componenti corrispondenti agli indici  $i_1, \dots, i_k$  nulle.
2. Ogni vettore in  $\mathcal{B}$  che non appartiene a  $\mathcal{S}$  ha le componenti corrispondenti agli indici  $i_1, \dots, i_k$  tutte uguali tra loro.

Osservando attentamente la definizione di blocco spettrale, ci si rende conto che in realtà la prima condizione è ridondante, come si dimostra nella seguente proposizione.

**Proposizione 2.2.** La condizione 2 della definizione di blocco spettrale implica la condizione 1.

*Dimostrazione.* Siano  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \setminus \{\mathbf{v}_1\}$  e  $I \subseteq \{1, \dots, N\}$  rispettivamente un insieme di vettori e un insieme di indici che soddisfano la condizione 2. Sia inoltre  $\mathbf{v} \in \mathcal{S}$ . Dato che  $\mathcal{B}$  è una base ortonormale di  $\mathbb{R}^N$ , si ha:

$$\forall \mathbf{w} \in \mathcal{B} \setminus \{\mathbf{v}\}, \quad \sum_{j=1}^N v_j w_j = 0 \quad (2.10)$$

In particolare, ciò vale per tutti i vettori  $\mathbf{w}$  appartenenti a  $\mathcal{B} \setminus \mathcal{S}$ , i quali hanno tutte le componenti corrispondenti agli indici in  $I$  uguali tra loro. Etichettiamo tali vettori con l'indice  $r$  che va da 1 a  $N - k$ :  $\mathcal{B} \setminus (\mathcal{S} \cup \{\mathbf{v}_1\}) = \{\mathbf{w}^{(1)}, \dots, \mathbf{w}^{(N-k)}\}$ . Imponendo la condizione (2.10) per ogni  $\mathbf{w}^{(r)}$  con  $r = 1, \dots, N - k$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N v_j w_j^{(r)} &= 0 \\ \sum_{j \in I} v_j w_j^{(r)} + \sum_{j \notin I} v_j w_j^{(r)} &= 0 \\ w_I^{(r)} \sum_{j \in I} v_j + \sum_{j \notin I} v_j w_j^{(r)} &= 0 \end{aligned}$$

dove  $w_I^{(r)}$  indica il valore comune di tutte le componenti del vettore  $\mathbf{w}^{(r)}$  corrispondenti agli indici in  $I$ .

Dunque abbiamo  $N - k$  equazioni della forma:

$$w_I^{(r)} \sum_{j \in I} v_j + \sum_{j \notin I} v_j w_j^{(r)} = 0, \quad r = 1, \dots, N - k \quad (2.11)$$

Inoltre si sa anche che  $\mathbf{v}$  è ortogonale a  $\mathbf{v}_1$ , quindi:

$$\sum_{j=1}^N v_j = 0 \quad (2.12)$$

Sottraendo l'equazione (2.12) moltiplicata per  $w_I^{(r)}$  da ogni equazione (2.11), si ottiene:

$$\begin{aligned} w_I^{(r)} \sum_{j \in I} v_j + \sum_{j \notin I} v_j w_j^{(r)} - w_I^{(r)} \sum_{j=1}^N v_j &= 0 \\ w_I^{(r)} \sum_{j \in I} v_j + \sum_{j \notin I} v_j w_j^{(r)} - w_I^{(r)} \sum_{j \in I} v_j - w_I^{(r)} \sum_{j \notin I} v_j &= 0 \\ \sum_{j \notin I} \left( w_j^{(r)} - w_I^{(r)} \right) v_j &= 0 \end{aligned}$$

con  $r = 1, \dots, N - k$ . Abbiamo dunque ottenuto il seguente sistema lineare di  $N - k$  equazioni:

$$\begin{cases} \sum_{j \notin I} \left( w_j^{(1)} - w_I^{(1)} \right) v_j = 0 \\ \sum_{j \notin I} \left( w_j^{(2)} - w_I^{(2)} \right) v_j = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j \notin I} \left( w_j^{(N-k)} - w_I^{(N-k)} \right) v_j = 0 \end{cases}$$

Il sistema è omogeneo, pertanto ammette la soluzione banale  $v_j = 0 \quad \forall j \notin I$ . Adesso dimostriamo che questa è l'unica soluzione possibile.

Assumiamo per assurdo che il sistema ammetta una soluzione non banale. Di conseguenza, per il teorema di Rouché-Capelli [14], il rango della matrice dei coefficienti deve essere minore del numero di incognite. Sia  $\{1, \dots, N\} \setminus I = \{j_1, \dots, j_{N-k}\}$ . La matrice dei coefficienti del sistema è:

$$\begin{pmatrix} w_{j_1}^{(1)} - w_I^{(1)} & w_{j_2}^{(1)} - w_I^{(1)} & \dots & w_{j_{N-k}}^{(1)} - w_I^{(1)} \\ w_{j_1}^{(2)} - w_I^{(2)} & w_{j_2}^{(2)} - w_I^{(2)} & \dots & w_{j_{N-k}}^{(2)} - w_I^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{j_1}^{(N-k)} - w_I^{(N-k)} & w_{j_2}^{(N-k)} - w_I^{(N-k)} & \dots & w_{j_{N-k}}^{(N-k)} - w_I^{(N-k)} \end{pmatrix}$$

Tale matrice ha  $N - k$  righe e  $N - k$  colonne, quindi il suo rango può essere al massimo  $N - k$ . Sappiamo inoltre che il suo rango non è massimo, altrimenti esisterebbe solo la soluzione banale. Di conseguenza, le righe della matrice dei coefficienti sono linearmente dipendenti, dunque esiste un insieme di coefficienti  $c^{(1)}, \dots, c^{(N-k)} \in \mathbb{R}$  non tutti nulli tali che:

$$\sum_{r=1}^{N-k} c^{(r)} \left( w_j^{(r)} - w_I^{(r)} \right) = 0 \quad \forall j \notin I$$

Adesso osserviamo che questo insieme di equazioni è scrivibile in forma compatta utilizzando i vettori in  $\mathcal{B}$ . Infatti, la  $i$ -esima componente del vettore  $\mathbf{w}^{(r)} - w_I^{(r)} \mathbf{v}_1$  è:

$$\begin{cases} w_i^{(r)} - w_I^{(r)} & \text{se } i \notin I \\ 0 & \text{se } i \in I \end{cases}$$

Risulta dunque evidente che l'equazione (2.3) può essere riscritta come:

$$\sum_{r=1}^{N-k} c^{(r)} \left( \mathbf{w}^{(r)} - w_I^{(r)} \mathbf{v}_1 \right) = 0$$

che può essere riordinata per ottenere:

$$\sum_{r=1}^{N-k} c^{(r)} \mathbf{w}^{(r)} - \sum_{r=1}^{N-k} c^{(r)} w_I^{(r)} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$$

Da cui si deduce che i vettori  $\mathbf{w}^{(1)}, \dots, \mathbf{w}^{(N-k)}$  e  $\mathbf{v}_1$  sono linearmente dipendenti. Tuttavia tale conclusione produce un assurdo, perché tali vettori appartengono alla stessa base  $\mathcal{B}$ , pertanto devono essere linearmente indipendenti.

Dunque, l'unica soluzione possibile del sistema è la soluzione banale, cioè  $v_j = 0 \quad \forall j \notin I$ . Tale conclusione coincide con la condizione 1 della definizione di blocco spettrale, quindi la condizione 2 implica la condizione 1.  $\blacksquare$

Mostriamo ora che blocchi spettrali sono insiemi di vertici per cui è possibile osservare una sincronizzazione parziale.

**Proposizione 2.3.** Sia  $\mathcal{S}$  un blocco spettrale localizzato ai nodi con indici in  $I$ , con  $|I| = k$ . Si assuma inoltre  $d\lambda_n > \nu^*$  e che la traiettoria media del cluster individuato dagli indici in  $I$  sia esattamente la traiettoria  $\mathbf{x}_s$  di un nodo nella soluzione sincrona globale. Allora si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| = 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{I}$$

*Dimostrazione.* La traiettoria media del cluster individuato dagli indici in  $I$  coincide con la traiettoria di un nodo nella soluzione sincrona globale, quindi possiamo scrivere:

$$\mathbf{x}_s = \frac{1}{k} \sum_{i \in I} \mathbf{x}_i$$

Definiamo i vettori  $\delta \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^m$  come le deviazioni dei nodi rispetto alla traiettoria media del cluster:

$$\delta \mathbf{x}_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_s \quad i = 1, \dots, N$$

Definiamo il vettore  $\delta \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{Nm}$  come:

$$\delta \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \delta \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \delta \mathbf{x}_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{Nm}$$

Dato che  $\mathcal{B}$  è una base di  $\mathbb{R}^N$  possiamo scrivere

$$\delta \mathbf{X} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \otimes \boldsymbol{\eta}_i$$

A questo punto, consideriamo due indici  $i, j \in \mathcal{I}$  e i corrispondenti nodi  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{x}_j$ . Secondo quanto appena detto, è possibile esprimere  $\delta \mathbf{x}_i$  e  $\delta \mathbf{x}_j$  come segue:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{x}_i &= \sum_{h=1}^N v_{hi} \boldsymbol{\eta}_h = \sum_{h \in \mathcal{I}} v_{hi} \boldsymbol{\eta}_h + \sum_{h \notin \mathcal{I}} v_{hi} \boldsymbol{\eta}_h \\ \delta \mathbf{x}_j &= \sum_{h=1}^N v_{hj} \boldsymbol{\eta}_h = \sum_{h \in \mathcal{I}} v_{hj} \boldsymbol{\eta}_h + \sum_{h \notin \mathcal{I}} v_{hj} \boldsymbol{\eta}_h\end{aligned}$$

Dunque, la differenza tra i due nodi è:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j &= (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_c) - (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_c) = \delta \mathbf{x}_i - \delta \mathbf{x}_j = \\ &= \sum_{h \in \mathcal{I}} (v_{hi} - v_{hj}) \boldsymbol{\eta}_h + \sum_{h \notin \mathcal{I}} (v_{hi} - v_{hj}) \boldsymbol{\eta}_h\end{aligned}$$

Adesso ragioniamo separatamente sulle due sommatorie. Nella prima abbiamo  $h, i, j \in \mathcal{I}$ , quindi, per la definizione di blocco spettrale, sia  $v_{hi}$  sia  $v_{hj}$  sono non nulli. Nella seconda sommatoria, invece, abbiamo  $h \notin \mathcal{I}$ , mentre  $i, j \in \mathcal{I}$ , quindi  $v_{hi} = v_{hj}$ , essendo componenti del vettore  $\mathbf{v}_h$  non appartenente a  $\mathcal{S}$  associate a indici appartenenti a  $\mathcal{I}$ . Di conseguenza, la seconda sommatoria si annulla e possiamo scrivere:

$$\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j = \sum_{h \in \mathcal{I}} (v_{hi} - v_{hj}) \boldsymbol{\eta}_h$$

Grazie alle ipotesi sulla costante di accoppiamento  $d$ , sappiamo che i  $\nu_i \stackrel{\text{def}}{=} d\lambda_i$  corrispondenti agli autovettori  $\mathbf{v}_i$  in  $\mathcal{S}$  si trovano nella regione dell'asse  $\nu$  in cui la MSF è negativa. Ciò implica che i massimi esponenti di Lyapunov associati ai vettori  $\boldsymbol{\eta}_h$  con  $h \in \mathcal{I}$  sono negativi, quindi la differenza  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$  decade esponenzialmente a zero per tempi sufficientemente lunghi. In altre parole, i nodi appartenenti al cluster tendono ad avvicinarsi col passare del tempo. È facile vedere che anche le deviazioni  $\delta \mathbf{x}_i$  con  $i \in \mathcal{I}$  tendono ad annullarsi, quindi i nodi appartenenti al cluster nel tempo si avvicinano alla traiettoria media del cluster  $\mathbf{x}_s$ , che risulta pertanto essere stabile, ossia vale il limite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| = 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{I}$$

■

**Osservazione.** Si noti che la soluzione sincrona di un cluster generalmente non coincide con la restrizione della soluzione sincrona globale al cluster stesso. Di conseguenza le ipotesi della proposizione precedente non sono soddisfatte in generale. Tuttavia, la proposizione ci permette di affermare che se la traiettoria media di un cluster è vicina alla soluzione sincrona globale, allora il cluster tende a sincronizzarsi.

È possibile dare una caratterizzazione intuitiva del concetto di blocco spettrale, come vediamo nel teorema che segue.

**Teorema 2.4.** Sia  $G$  un grafo non orientato e connesso con  $N$  nodi e matrice laplaciana  $L \in M_N(\mathbb{R})$ . Siano inoltre  $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, N\}$ . Le due seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. Tutti i  $k$  nodi appartenenti al cluster definito dagli indici  $\{i_1, \dots, i_k\}$  hanno le medesime connessioni con gli stessi pesi con tutti i nodi non appartenenti al cluster.
2. Esiste un blocco spettrale localizzato ai nodi  $\{i_1, \dots, i_k\}$ .

Per la dimostrazione di questo teorema, rimandiamo il lettore a [1].

## 2.4 Transizione alla sincronizzazione

Ci accingiamo adesso a descrivere la sequenza di eventi che caratterizza il passaggio dallo stato non sincronizzato allo stato sincronizzato. A tal fine, introduciamo alcune definizioni chiave.

**Definizione 2.2.** Si definisce la matrice  $V \in M_N(\mathbb{R})$  come la matrice le cui colonne sono formate dai vettori in  $\mathcal{B}$ :

$$V \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_N) = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \dots & v_{N1} \\ v_{12} & v_{22} & \dots & v_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1N} & v_{2N} & \dots & v_{NN} \end{pmatrix} \in M_N(\mathbb{R})$$

**Osservazione.** Si noti che  $V$  è una matrice ortogonale, in quanto le sue colonne sono una base ortonormale di  $\mathbb{R}^N$ . Di conseguenza, anche le righe di  $V$  formano una base ortonormale di  $\mathbb{R}^N$ .

**Definizione 2.3.** Per ogni autovettore  $\mathbf{v}_i \in \mathcal{B}$  si definisce la matrice  $E_{\lambda_i} \in M_N(\mathbb{R})$  come segue:

$$E_{\lambda_i} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} (v_{i1} - v_{i1})^2 & (v_{i2} - v_{i1})^2 & \dots & (v_{iN} - v_{i1})^2 \\ (v_{i1} - v_{i2})^2 & (v_{i2} - v_{i2})^2 & \dots & (v_{iN} - v_{i2})^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_{i1} - v_{iN})^2 & (v_{i2} - v_{iN})^2 & \dots & (v_{iN} - v_{iN})^2 \end{pmatrix} \in M_N(\mathbb{R})$$

**Definizione 2.4.** Si definiscono le matrici  $S_n \in M_N(\mathbb{R})$ , con  $n = 1, \dots, N$  mediante la seguente relazione ricorsiva:

$$\begin{aligned} S_N &= E_{\lambda_N} \\ S_{N-1} &= S_N + E_{\lambda_{N-1}} \\ &\vdots \\ S_2 &= S_3 + E_{\lambda_2} \\ S_1 &= S_2 + E_{\lambda_1} \end{aligned}$$

**Lemma 2.5.** Valgono le seguenti affermazioni:

1.  $S_1 = S_2$  e tali matrici hanno tutti gli elementi non diagonali uguali a 2.
2. Tutti gli elementi di  $S_n$  sono compresi tra 0 e 2.

*Dimostrazione.* Iniziamo dimostrando il punto 1. Dato che  $\mathbf{v}_1$  ha tutte le componenti uguali tra loro, è immediato vedere che  $E_{\lambda_1}$  ha tutti gli elementi uguali a 0, quindi  $S_1 = S_2$ . Inoltre, analizzando la definizione ricorsiva delle matrici  $S_n$  elemento per elemento è immediato notare che l'elemento  $(S_n)_{i,j}$  è dato da

$$(S_n)_{i,j} = \sum_{h=n}^N (v_{hi} - v_{hj})^2$$

Di conseguenza, fissati  $i, j \in \{1, \dots, N\}$  con  $i \neq j$ , si ha

$$(S_n)_{i,j} = \sum_{h=n}^N (v_{hi} - v_{hj})^2 = \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|^2 = 2$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che i vettori  $\mathbf{v}_i$  e  $\mathbf{v}_j$  sono due vettori distinti appartenenti alla medesima base ortonormale  $\mathcal{B}$ , di conseguenza la norma della loro differenza è pari a  $\sqrt{2}$ .

Passiamo al punto 2. Dato che  $(S_n)_{i,j}$  è una somma di quadrati si ha  $(S_n)_{i,j} \geq 0$  per ogni  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ . Inoltre,  $(S_n)_{i,j}$  cresce al diminuire di  $n$ , quindi il suo valore massimo è  $(S_1)_{i,j} = 2$  per ogni  $i, j \in \{1, \dots, N\}$  con  $i \neq j$ . Ciò conclude la dimostrazione. ■

**Teorema 2.6.** Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. Esiste un blocco spettrale  $\mathcal{S}$  localizzato ai nodi aventi indici in  $\mathcal{I}$ , con  $|\mathcal{I}| = k$ .
2. A partire da un certo  $n$ , gli elementi  $(p, q)$  della matrice  $S_n$  eguagliano 2 per ogni  $p, q \in \mathcal{I}$  con  $p \neq q$ .

*Dimostrazione.* Iniziamo mostrando  $1 \Rightarrow 2$ . Supponiamo che esista un blocco spettrale  $\mathcal{S}$  localizzato ai nodi aventi indici in  $\mathcal{I}$ , con  $|\mathcal{I}| = k$ . L'elemento  $(i, j)$  della matrice  $S_n$  è dato da

$$(S_n)_{i,j} = \sum_{h=n}^N (v_{hi} - v_{hj})^2 \quad (2.13)$$

dove  $v_{hi}$  denota l' $i$ -esima componente del vettore  $\mathbf{v}_h$ . Il caso a cui siamo interessati è quello in cui  $i, j \in \mathcal{I}$  e  $i \neq j$ . Ragioniamo sui singoli addendi della sommatoria nell'equazione (2.13) per capire l'andamento di  $(S_n)_{i,j}$  al variare di  $n$ . Se  $(v_h) \notin \mathcal{S}$ , allora per la definizione di blocco spettrale si ha che  $v_{hi} = v_{hj}$ , dato che  $i, j \in \mathcal{I}$ . Allora possiamo dedurre che  $(S_n)_{i,j}$  può essere diverso da  $(S_{n+1})_{i,j}$  solo se  $(v_n) \in \mathcal{S}$ . Siano  $\lambda_{max}$  e  $\lambda_{min}$  rispettivamente il massimo e il minimo degli autovalori associati agli autovettori in  $\mathcal{S}$ . Possiamo distinguere i due casi seguenti:

- Caso 1:  $\lambda_n > \lambda_{max}$ .  
In questo caso  $(S_n)_{i,j} = 0$  dato che gli addendi della sommatoria sono non negativi ed essendo  $\lambda_n > \lambda_{max}$  nella sommatoria non è ancora stato contato nessun vettore in  $\mathcal{S}$ .
- Caso 2:  $\lambda_n \leq \lambda_{min}$ .  
In questo caso  $(S_n)_{i,j} = 2$  dato che gli addendi della sommatoria sono non negativi ed essendo  $\lambda_n < \lambda_{min}$  nella sommatoria sono stati contati tutti i vettori in  $\mathcal{S}$ , quindi i restanti vettori  $\mathbf{v}_{n-1} \dots \mathbf{v}_1$  non contribuiscono alla sommatoria non essendo in  $\mathcal{S}$ . Di conseguenza la sommatoria deve aver già raggiunto il suo massimo valore, che è pari a 2 per il Lemma 2.5.

Dunque si evince che  $(S_n)_{i,j}$  eguaglia 2 per ogni  $n$  tale che  $\lambda_n \leq \lambda_{min}$ , e questo dimostra la prima implicazione.

Adesso mostriamo  $2 \Rightarrow 1$ . Supponiamo che a partire da un certo  $n$  gli elementi  $(i, j)$  della matrice  $S_n$  eguagliano 2 per ogni  $i, j \in \mathcal{I}$  con  $i \neq j$ . Siano  $\mathcal{I} \subseteq \{1, \dots, N\}$  e  $k \stackrel{\text{def}}{=} |\mathcal{I}|$ . Cerchiamo di costruire un blocco spettrale localizzato ai nodi aventi indici in  $\mathcal{I}$ . Consideriamo  $i, j \in \mathcal{I}$ . Sappiamo che

$$(S_n)_{i,j} = \sum_{h=n}^N (v_{hi} - v_{hj})^2 = 2$$

Di conseguenza abbiamo  $v_{hi} - v_{hj} = 0$  per ogni  $h < n$ . Questa proprietà rende i vettori  $\mathbf{v}_h$  con  $h \geq n$  degli ottimi candidati per formare il blocco spettrale che vogliamo costruire. Dobbiamo solo mostrare che questi vettori sono esattamente  $k-1$ . A tal fine, ragioniamo sulla dimensione dello spazio vettoriale generato dai vettori  $\mathbf{v}_h$  con  $h < n$ . Dato che i vettori  $\mathbf{v}_h$  sono  $n-1$  vettori linearmente indipendenti si ha

$$\dim(\text{span}\{\mathbf{v}_h \mid h < n\}) = n - 1 \quad (2.14)$$

D'altro canto, la condizione  $(S_n)_{i,j} = 2$  implica che ogni vettore  $\mathbf{v}_h$  con  $h < n$  abbia le componenti relative agli indici in  $\mathcal{I}$  uguali tra loro. Essendo vettori  $N$ -dimensionali, possiamo dedurre che la dimensione dello spazio da essi generato sia

$$\dim(\text{span}\{\mathbf{v}_h \mid h < n\}) = N - |\mathcal{I}| + 1 = N - k + 1 \quad (2.15)$$

Eguagliando le due espressioni ottenute per la dimensione dello spazio generato dai vettori  $\mathbf{v}_h$  con  $h < n$ , si ottiene

$$n - 1 = N - k + 1$$

che può essere riscritta come

$$N - n + 1 = k - 1$$

Ma questo è esattamente ciò che volevamo dimostrare! Infatti i vettori  $\mathbf{v}_h$  con  $h \geq n$  sono esattamente  $N - n + 1$ . Abbiamo dunque dimostrato che l'insieme  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_h \mid h \geq n\}$  e l'insieme di indici  $\mathcal{I}$  rispettano la condizione 2 della definizione di blocco spettrale. Allora per la Proposizione 2.2 si ha che  $\mathcal{S}$  è un blocco spettrale localizzato ai nodi aventi indici in  $\mathcal{I}$ . ■

A questo punto disponiamo di tutti gli strumenti necessari per descrivere la sequenza di eventi che portano alla sincronizzazione.

1. Si calcolano le  $N$  matrici  $S_n$ , con  $n = 1, \dots, N$ .
2. Si esaminano le matrici  $S_n$  nello stesso ordine in cui i  $\nu_i = d\lambda_i$  superano il valore critico  $\nu^*$  (quindi partendo da  $n = N$  e scendendo fino a  $n = 1$ ).
3. Se per un certo  $p \in \{1, \dots, N\}$  si ha che uno o più elementi di  $S_p$  eguagliano 2 per la prima volta, allora i nodi corrispondenti agli indici di tali elementi si sincronizzeranno per  $d \geq \frac{\nu^*}{\lambda_i}$ .
4. Si continua a scendere lungo la sequenza di matrici  $S_n$  fino a  $S_1$ , che ha tutti gli elementi uguali a 2.

Seguendo i passaggi sopra elencati, si ottiene la successione di eventi che portano alla sincronizzazione globale. Si noti che questa successione è da intendersi lungo l'asse  $\nu$  e non lungo l'asse temporale.

Esponiamo ora l'applicazione concreta dell'algoritmo appena esposto ad un *toy model* composto da 10 nodi per comprenderne meglio il funzionamento. Il modello che consideriamo contiene nodi tridimensionali, dei quali denotiamo le componenti con  $x$ ,  $y$  e  $z$ . La rete del *toy model* è descritta dal grafo non orientato e connesso in Figura 2.2.

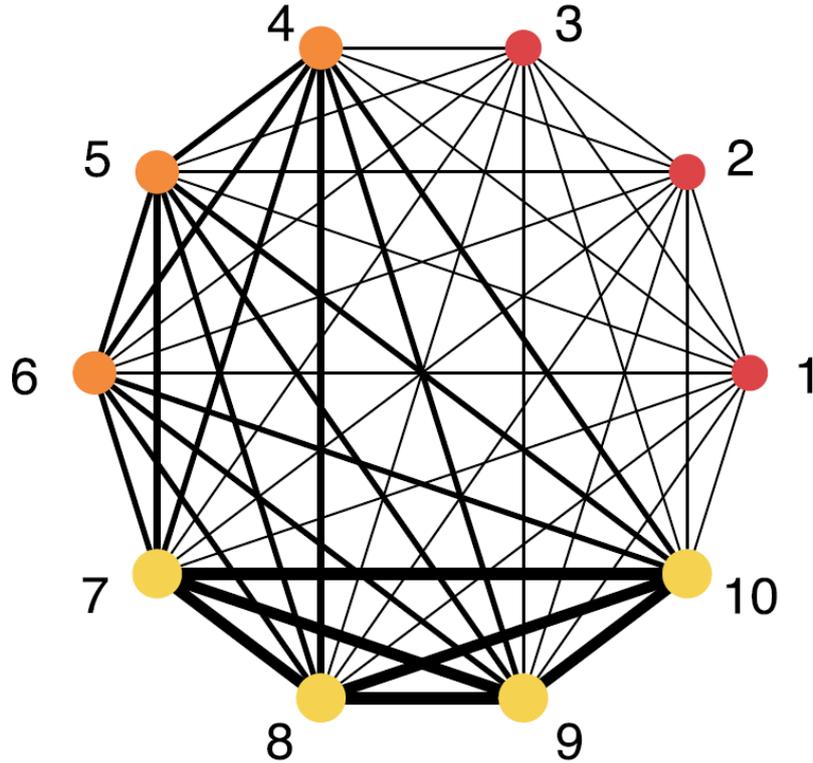


Figura 2.2: Nella figura è rappresentato il grafo del *toy model*. Lo spessore degli archi è proporzionale al peso degli archi stessi. L'immagine è stata presa da [1].

La laplaciana  $L$  di tale grafo è

$$\begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.9 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.9 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & -0.1 & 3.474 & -0.529 & -0.529 & -0.529 & -0.529 & -0.529 & -0.529 \\ -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.529 & 3.474 & -0.529 & -0.529 & -0.529 & -0.529 & -0.529 \\ -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.529 & -0.529 & 3.474 & -0.529 & -0.529 & -0.529 & -0.529 \\ -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.529 & -0.529 & -0.529 & 4.974 & -1.029 & -1.029 & -1.029 \\ -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.529 & -0.529 & -0.529 & -1.029 & 4.974 & -1.029 & -1.029 \\ -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.529 & -0.529 & -0.529 & -1.029 & -1.029 & 4.974 & -1.029 \\ -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.529 & -0.529 & -0.529 & -1.029 & -1.029 & -1.029 & 4.974 \end{pmatrix}$$

La funzione  $\mathbf{f}$  è definita in modo da ottenere le equazioni di Lorenz per  $d = 0$ :

$$\mathbf{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(y - z) \\ x(\rho - z) - y \\ xy - \beta z \end{pmatrix}$$

con  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  e  $\beta = 2$ .

La funzione  $\mathbf{g}$  è la proiezione sulla componente  $x$ :

$$\mathbf{g} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

È possibile mostrare che questo sistema è della classe II e ha  $\nu^* \approx 7.322$ .

Gli autovalori di  $L$  sono  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ ,  $\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 4$ ,  $\lambda_8 = \lambda_9 = \lambda_{10} = 6$ .

Passiamo ora ad esaminare la sequenza di matrici  $S_n$  (nel seguito per questioni di leggibilità riporteremo solo una cifra decimale per gli elementi delle matrici). Abbiamo che  $S_{10} = E_{\lambda_{10}}$  è data da:

$$S_{10} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.2 & 0.1 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 1.9 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.5 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

Nessun elemento di  $S_{10}$  eguaglia 2. Anche gli elementi di  $S_9 = S_{10} + E_{\lambda_9}$  sono tutti diversi da 2. La situazione cambia per  $S_8 = S_9 + E_{\lambda_8}$ :

$$S_8 \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.7 & 0.8 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.8 & 0.7 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.7 & 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.7 & 0.8 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0.8 & 0.8 & 0.7 & 0.8 & 0.8 & 0.7 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.7 & 0.8 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli elementi non diagonali relativi agli indici 7, 8, 9 e 10 eguagliano 2, di conseguenza possiamo prevedere che per  $d \geq \frac{\nu^*}{\lambda_8} \approx 1.22$  il cluster  $C_3$  formato dai nodi 7, 8, 9 e 10 si sincronizzerà. Andando avanti nella sequenza dell  $S_n$  vediamo che la successiva matrice per cui uno o più elementi eguagliano 2 è  $S_5$ , che ha la seguente forma:

$$S_5 \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

In  $S_5$  sono diventati uguali a 2 anche gli elementi non diagonali relativi agli indici 4, 5 e 6. Allora possiamo fare un'altra previsione: per  $\lambda \geq \frac{\nu^*}{\lambda_5} \approx 1.831$  il cluster  $C_2$  formato dai nodi 4, 5 e 6 si sincronizzerà col cluster  $C_1$ . La successiva matrice per cui qualche

elemento eguaglia 2 è  $S_2$ , che, come  $S_1$ , ha tutti gli elementi non diagonali pari a 2:

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

È allora possibile fare una terza previsione: per  $\lambda \geq \frac{\nu^*}{\lambda_2} \approx 7.322$  il cluster  $C_1$  formato dai nodi 1, 2 e 3 si sincronizzerà coi cluster  $C_3$  e  $C_2$ . Quest'ultimo scenario coincide con la sincronizzazione globale.

Dunque, esaminando la sequenza delle matrici  $S_n$  in ordine decrescente per  $n$  siamo riusciti a prevedere gli eventi che caratterizzano la transizione alla sincronizzazione del *toy model*. Lo stesso algoritmo può ovviamente essere applicato a reti molto più grandi.

## 2.5 Soluzione sincrona dei cluster

I risultati ottenuti fino ad ora sono formalmente validi per la soluzione sincrona globale. Adesso chiediamoci cosa succede per soluzioni sincrone parziali, ossia soluzioni in cui un certo cluster di nodi è sincronizzato, mentre i nodi esterni a tale cluster seguono traiettorie arbitrarie. Si noti che, a differenza della soluzione sincrona globale, non c'è alcuna garanzia che la soluzione sincrona di un cluster esista. Inoltre, un'altra considerazione importante da tenere a mente è che le traiettorie dei nodi interni ad un cluster sincronizzato in generale saranno differenti dalla traiettoria della soluzione sincrona globale.

Sia  $C \subseteq V$  un cluster, e sia  $\mathcal{C}$  l'insieme degli indici dei nodi appartenenti a  $C$ . Sia  $i \in \mathcal{C}$  l'indice di un nodo appartenente a  $C$ . Analizziamo l'equazione che descrive la dinamica del nodo  $\mathbf{x}_i$ .

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - d \sum_{j=1}^N L_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_j) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - d \sum_{j \in \mathcal{C}} L_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_c) - d \sum_{j \notin \mathcal{C}} L_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_j) = \\ &\stackrel{1}{=} \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - d \sum_{j \in \mathcal{C}} L_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_c) + d \sum_{j \notin \mathcal{C}} A_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_j) = \\ &\stackrel{2}{=} \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - d \sum_{j \notin \mathcal{C}} A_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_c) + d \sum_{j \notin \mathcal{C}} A_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_j) = \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + d \sum_{j \notin \mathcal{C}} A_{ij} (\mathbf{g}(\mathbf{x}_j) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_c)) \end{aligned}$$

L'uguaglianza  $\stackrel{1}{=}$  vale perché la seconda sommatoria è effettuata sugli indici dei nodi esterni al cluster  $C$ , dunque tutti gli elementi di  $L$  coinvolti nella sommatoria non sono sulla diagonale. Dalla definizione di matrice laplaciana, si ha che  $L_{ij} = -A_{ij}$  per ogni  $i \neq j$ , da cui segue il passaggio in questione.

L'uguaglianza  $\stackrel{2}{=}$  si spiega invece tramite la seguente catena di uguaglianze:

$$\sum_{j \in \mathcal{C}} L_{ij} = \sum_{j=1}^N L_{ij} - \sum_{j \notin \mathcal{C}} L_{ij} = 0 - \left( - \sum_{j \notin \mathcal{C}} A_{ij} \right) = \sum_{j \notin \mathcal{C}} A_{ij}$$

dove si è sfruttato il fatto che la somma lungo ogni riga della matrice laplaciana è nulla.

Se il cluster  $C$  è sincronizzato, la traiettoria di ogni nodo appartenente a  $C$  coincide con la traiettoria della soluzione sincrona del cluster:  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_c \quad \forall i \in \mathcal{C}$ . Di conseguenza, la traiettoria seguita dai nodi sincronizzati obbedisce all'equazione:

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{f}(\mathbf{x}_c) + d \sum_{j \notin \mathcal{C}} A_{ij} (\mathbf{g}(\mathbf{x}_j) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_c)) \quad i \in \mathcal{C} \quad (2.16)$$

## 2.6 Stabilità della soluzione sincrona dei cluster

Adesso vediamo in quali situazioni la soluzione sincrona di un cluster è stabile. Per fare ciò, consideriamo un generico cluster  $C \subseteq V$  dato da un blocco spettrale  $\mathcal{S}$  e denotiamo con  $\mathcal{C}$  l'insieme degli indici dei nodi appartenenti a  $C$ . Sia  $l \stackrel{\text{def}}{=} |C|$  la cardinalità del cluster  $C$ . Assumiamo che esista una soluzione sincrona per il cluster  $C$  (fatto non garantito!) e denotiamo con  $\mathbf{x}_c$  la traiettoria che deve seguire ogni nodo appartenente a  $C$  nella soluzione sincrona. Analogamente a quanto fatto per analizzare la stabilità della soluzione sincrona globale, consideriamo una soluzione “vicina” alla soluzione sincrona del cluster, e definiamo la deviazione di ogni nodo rispetto a tale soluzione:

$$\delta \mathbf{x}_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_c \quad i \in \mathcal{C}$$

Definiamo dunque il vettore  $\delta \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{lm}$  come:

$$\delta \mathbf{X} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \delta \mathbf{x}_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{lm} \quad (2.17)$$

Come abbiamo mostrato nella sezione 2.5, l'equazione che descrive la dinamica del nodo  $\mathbf{x}_i$  è:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - d \sum_{j \in \mathcal{C}} L_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_c) + d \sum_{j \notin \mathcal{C}} A_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_j) \quad (2.18)$$

Si noti che il secondo termine di accoppiamento è in realtà indipendente dall'indice  $i$ , dato che il teorema 2.4 garantisce che ogni nodo interno a  $C$  abbia gli stessi collegamenti con i nodi esterni a  $C$ . In altre parole, il secondo termine di accoppiamento è lo stesso per ogni nodo appartenente a  $C$ , pertanto non dipende dalle traiettorie dei nodi nel cluster. Di conseguenza, il terzo addendo del membro di destra dell'equazione (2.18) non dà alcun contributo alla linearizzazione dell'equazione. L'equazione linearizzata intorno a  $\mathbf{x}_c$  è dunque:

$$\dot{\delta \mathbf{x}}_i = \mathbf{J}_f(\mathbf{x}_c) \delta \mathbf{x}_i - d \sum_{j \in \mathcal{C}} L_{ij} \mathbf{J}_g(\mathbf{x}_c) \delta \mathbf{x}_j \quad (2.19)$$

L'equazione può essere scritta in forma compatta utilizzando il vettore  $\delta \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{lm}$  definito in precedenza:

$$\delta\dot{\mathbf{X}} = (\mathbf{I}_l \otimes \mathbf{J}_f(\mathbf{x}_c) - dL^C \otimes \mathbf{J}_g(\mathbf{x}_c)) \delta\mathbf{X} \quad (2.20)$$

dove  $L^C \in M_l(\mathbb{R})$  è la matrice laplaciana del grafo indotto dal cluster  $C$ , ossia il grafo che si ottiene eliminando da  $G$  i nodi esterni al cluster  $C$ .

L'equazione (2.20) è formalmente identica all'equazione (2.5), pertanto si possono ricavare per la soluzione sincrona del cluster risultati analoghi a quelli trovati nella sezione 2.2 sulla stabilità della soluzione sincrona globale. L'unica differenza significativa è che adesso la linearizzazione è centrata sulla traiettoria della soluzione sincrona del cluster  $\mathbf{x}_c$  e non sulla traiettoria della soluzione sincrona globale  $\mathbf{x}_s$ . Come si può notare osservando l'equazione (2.16), la traiettoria della soluzione sincrona del cluster  $\mathbf{x}_c$  è diversa dalla traiettoria della soluzione sincrona globale  $\mathbf{x}_s$  a causa della presenza del termine  $K(t) \stackrel{\text{def}}{=} d \sum_{j \notin C} A_{ij} (\mathbf{g}(\mathbf{x}_j) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_c))$ . Ciò porta a due conseguenze importanti:

- Dato che  $K(t)$  dipende da  $d$ , per ogni valore di  $d$  la soluzione sincrona del cluster è diversa. Di conseguenza, la forma funzionale della MSF cambia se si fa variare  $d$ . In una situazione simile, il formalismo della MSF perde di significato, poiché gli esponenti di Lyapunov vengono calcolati ogni volta su una traiettoria diversa.
- A causa della presenza del termine  $K(t)$ , la traiettoria della soluzione sincrona del cluster in generale differisce dalla traiettoria di un sistema isolato, quindi il calcolo degli esponenti di Lyapunov usando la traiettoria di un sistema isolato è solo un'approssimazione dei reali esponenti di Lyapunov. Di conseguenza, anche il calcolo dei valori critici di  $\nu$  per cui si ha la sincronizzazione del cluster è solo un'approssimazione.

Noi assumiamo che la soluzione sincrona di un cluster sia sempre molto vicina alla soluzione sincrona globale, dunque il formalismo della MSF offre un'ottima approssimazione per calcolare gli esponenti di Lyapunov e dunque i valori critici di  $\nu$ .



# Capitolo 3

## Simulazioni numeriche

Per mettere alla prova la teoria esposta finora, sono state effettuate delle simulazioni numeriche servendosi del linguaggio di programmazione Julia.

### 3.1 Simulazioni dell'articolo

Riportiamo in questa sezione le simulazioni effettuate dagli autori dell'articolo [1]. Per quantificare il grado di sincronizzazione tra i nodi in un cluster, si definisce l'errore medio di sincronizzazione come segue:

**Definizione 3.1.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo e sia  $C \subseteq V$  un cluster di tale grafo ai cui nodi sono associati gli indici in  $\mathcal{C}$ . L'errore medio di sincronizzazione  $E_C$  è definito da

$$E_C \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum_{i \in \mathcal{C}} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_C|^2 \right\rangle_{\Delta T}$$

dove  $\langle \cdot \rangle_{\Delta T}$  indica la media temporale su un intervallo di tempo  $\Delta T$  e  $\mathbf{x}_C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum_{i \in \mathcal{C}} \mathbf{x}_i$  è il valore medio delle posizioni dei nodi in  $C$ .

Viene effettuata la media temporale per minimizzare l'influenza delle fluttuazioni statistiche. Le simulazioni sono descritte dalla seguente sequenza di passi:

1. Si definisce un grafo  $G$  tramite la sua matrice laplaciana  $L$ .
2. Si definiscono le funzioni  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$ .
3. Si sceglie il valore massimo di  $d$  (che chiamiamo  $d_{max}$ ) e il numero  $N_d$  di valori di  $d$  da esaminare. Inizialmente si fissa  $d = 0$ .
4. Si risolve numericamente il sistema di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - d \sum_{j=1}^N L_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_j) \quad i = 1, \dots, N$$

assegnando al sistema condizioni iniziali estratte da una distribuzione uniforme. La soluzione viene calcolata per l'intervallo temporale  $[0, 5000]$  con un passo di integrazione di 0.25.

5. Utilizzando la soluzione computata al punto precedente, si registrano gli errori medi di sincronizzazione dei cluster previsti dalla teoria, utilizzando come  $\Delta T$  l'intervallo  $[4900, 5000]$ .
6. Se  $d < d_{max}$  si incrementa il valore di  $d$  di una quantità pari a  $\frac{d_{max}}{N_d}$  e si torna al passo 4. In caso contrario si passa al punto 7.
7. Gli errori medi di sincronizzazione registrati vengono normalizzati in maniera tale che il valore massimo degli errori per ogni cluster sia pari a 1.
8. Si riportano i risultati ottenuti in un grafico, dove l'asse  $x$  rappresenta il valore di  $d$  e l'asse  $y$  rappresenta gli errori medi di sincronizzazione normalizzati.

Adesso esemplifichiamo la procedura descritta applicandola al *toy model* utilizzato nella sezione 2.4 del capitolo 2. Abbiamo già osservato che per il network associato a  $L$  sono previsti tre cluster dati dagli insiemi di indici  $\mathcal{C}_1 = \{1, 2, 3\}$ ,  $\mathcal{C}_2 = \{4, 5, 6\}$  e  $\mathcal{C}_3 = \{7, 8, 9, 10\}$ . La successione di eventi prevista calcolando le matrici  $S_n$  è la seguente:

1. Per  $0 \leq d < \frac{\nu^*}{\lambda_8} \approx 1.22$  non si osserva alcun fenomeno di sincronizzazione.
2. Per  $1.22 \approx \frac{\nu^*}{\lambda_8} \leq d < \frac{\nu^*}{\lambda_5} \approx 1.831$  si sincronizza il cluster  $\mathcal{C}_3$ .
3. Per  $1.831 \approx \frac{\nu^*}{\lambda_5} \leq d < \frac{\nu^*}{\lambda_2} \approx 7.322$  si sincronizzano i cluster  $\mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$ .
4. Per  $d \geq \frac{\nu^*}{\lambda_2} \approx 7.322$  si sincronizzano tutti i cluster, quindi si osserva una sincronizzazione globale.

I risultati delle simulazioni sono riportati nella figura 3.1. Si nota chiaramente che l'esito delle simulazioni è in accordo con le previsioni teoriche, infatti gli errori medi di sincronizzazione dei vari cluster tendono ad annullarsi una volta superati i valori di  $d$  previsti dalla teoria.

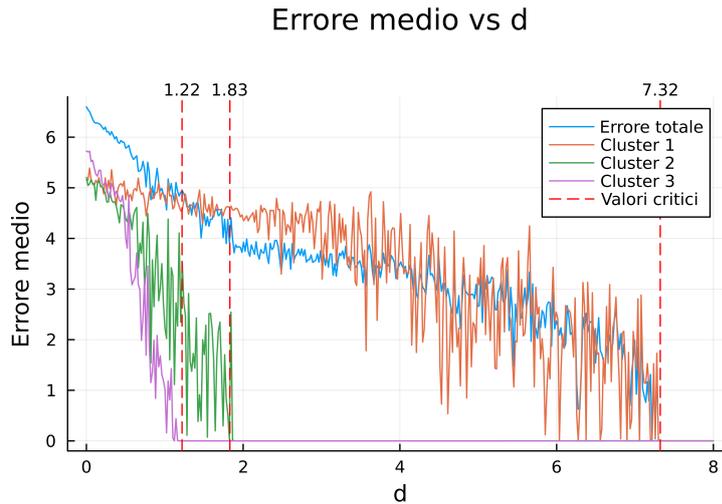


Figura 3.1: Risultati delle simulazioni per il toy model analizzato in questa sezione. Nell'asse  $x$  sono riportati i valori di  $d$  e nell'asse  $y$  gli errori medi di sincronizzazione. Sono stati rappresentati gli andamenti degli errori medi di sincronizzazione dei tre cluster  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$ ,  $\mathcal{C}_3$  e l'errore medio di sincronizzazione totale considerando tutti i punti del grafo.

## 3.2 Ulteriori simulazioni

### 3.2.1 Analisi temporale

L'analisi teorica è stata svolta interessandosi unicamente della sequenza di eventi che portano alla sincronizzazione totale sull'asse  $d$ , tralasciando l'analisi della sequenza temporale di eventi che caratterizza la sincronizzazione. Nonostante ciò, sono state effettuate alcune simulazioni per indagare anche questo aspetto. A tal fine bisogna modificare leggermente la simulazione della sezione 3.1. Per analizzare i gli eventi sull'asse temporale, serve avere una quantità in grado di descrivere puntualmente quanto sono sincronizzati i nodi in un cluster rispetto alla media delle loro posizioni. Bisogna quindi apportare una modifica alla definizione 3.1.

**Definizione 3.2.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo e sia  $C \subseteq V$  un cluster di tale grafo ai cui nodi sono associati gli indici in  $\mathcal{C} \subseteq V$ . L'errore istantaneo di sincronizzazione  $\mathcal{E}_C(t)$  nell'istante  $t$  è definito da

$$\mathcal{E}_C(t) = \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum_{i \in \mathcal{C}} |\mathbf{x}_i(t) - \bar{\mathbf{x}}_C(t)|$$

dove  $\bar{\mathbf{x}}_C(t) = \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum_{i \in \mathcal{C}} \mathbf{x}_i(t)$  è la posizione media dei nodi nel cluster  $C$  nell'istante  $t$ .

La definizione 3.2 offre un buon quantificatore della sincronizzazione istantanea di un cluster. A questo punto, disponiamo di tutti gli ingredienti per costruire la simulazione cercata. Essa si articola nei seguenti passi:

1. Si definisce un grafo  $G$  tramite la sua matrice laplaciana  $L$ .
2. Si definiscono le funzioni  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  e si definisce il valore della costante di accoppiamento  $d$ .
3. Si stabilisce un tempo massimo  $t_{max}$  raggiunto il quale la simulazione termina.
4. Si risolve numericamente il sistema di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - d \sum_{j=1}^N L_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_j) \quad i = 1, \dots, N$$

assegnando al sistema condizioni iniziali estratte da una distribuzione uniforme. La soluzione viene calcolata per l'intervallo temporale  $[0, t_{max}]$  con un passo di integrazione di  $0.0002 \cdot t_{max}$ .

5. Utilizzando la soluzione computata al punto precedente, si registrano gli errori istantanei di sincronizzazione dei cluster previsti dalla teoria.
6. Si riportano i risultati ottenuti in un grafico, dove l'asse  $x$  rappresenta il valore di  $d$  e l'asse  $y$  rappresenta gli errori istantanei di sincronizzazione normalizzati.

Nella Figura 3.2 sono riportati i risultati della simulazione per  $d = 2$  e  $t_{max} = 200$ . In questa situazione non si ha sincronizzazione globale, ma è prevista la sincronizzazione dei cluster  $C_3$  e  $C_2$ . Si osserva che il primo cluster a stabilizzarsi è il cluster  $C_3$ , seguito dal cluster  $C_2$ .

Nella Figura 3.3 sono riportati i risultati della simulazione per  $d = 8$  e  $t_{max} = 100$ . Con  $d = 8$  è prevista la sincronizzazione globale. Nella simulazione può notare che

i cluster  $C_3$  e  $C_2$  sembrano sincronizzarsi insieme all'inizio della simulazione, mentre il cluster  $C_1$  impiega più tempo per sincronizzarsi. Per studiare la sincronizzazione dei cluster  $C_3$  e  $C_2$ , è stata ripetuta la simulazione mantenendo  $d = 8$  e impostando  $t_{max} = 10$ , in modo da vedere più nel dettaglio cosa succede negli istanti iniziali. I risultati sono riportati nella Figura 3.4. Anche in questo caso i cluster  $C_3$  e  $C_2$  si stabilizzano contemporaneamente.

Le osservazioni appena elencate portano a pensare che le successioni degli eventi che portano alla sincronizzazione sull'asse  $t$  e sull'asse  $d$  abbiano lo stesso ordine. Il problema non è stato affrontato a livello teorico, dunque l'ultima osservazione rimane una congettura.

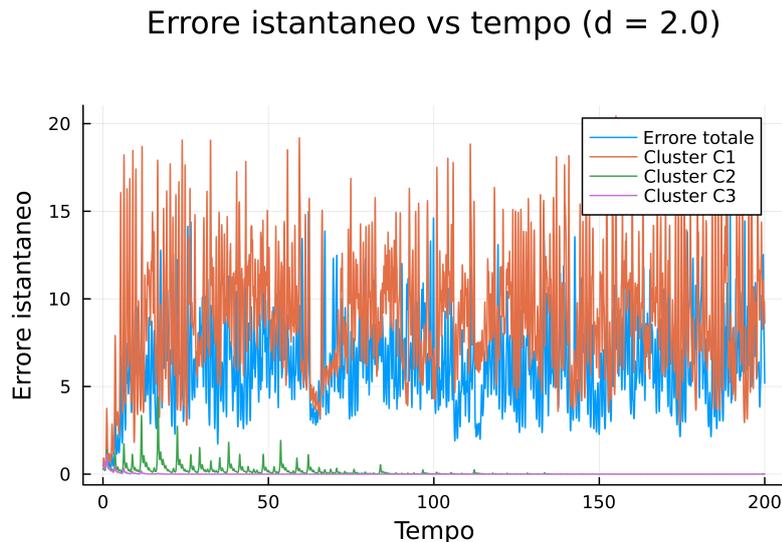


Figura 3.2: Risultati della simulazione per  $d = 2$  e  $t_{max} = 200$ . Si osserva prima la sincronizzazione del cluster  $C_3$  e poi quella del cluster  $C_2$ . Il cluster  $C_1$  non si sincronizza.

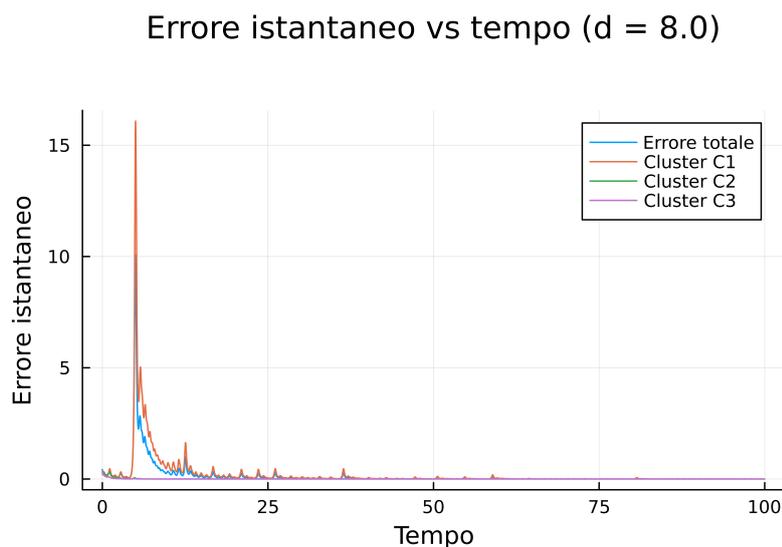


Figura 3.3: Risultati della simulazione per  $d = 8$  e  $t_{max} = 100$ . Si osserva prima la sincronizzazione dei cluster  $C_3$  e  $C_2$  e poi quella del cluster  $C_1$ .

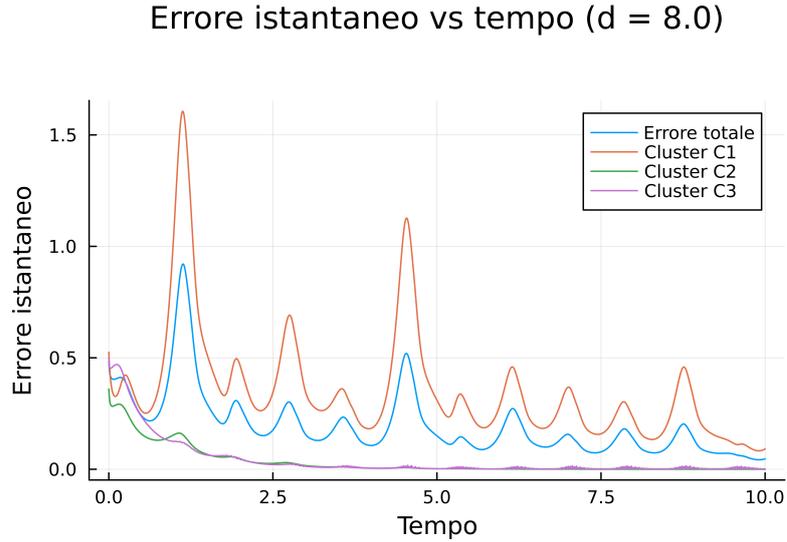


Figura 3.4: Risultati della simulazione per  $d = 8$  e  $t_{max} = 10$ . Si osserva che i cluster  $C_3$  e  $C_2$  si sincronizzano contemporaneamente. La simulazione non è sufficientemente lunga per osservare la sincronizzazione del cluster  $C_1$ .

### 3.2.2 Analisi del termine di interazione

Consideriamo il *toy model* utilizzato nella sezione 3.1 e poniamoci nelle condizioni in cui si ha solo sincronizzazione parziale e non globale. Ad esempio prendendo  $d = 1.8$  si osserva solo la sincronizzazione del cluster  $C_3$  a cui sono associati gli indici  $\mathcal{C}_3 = \{7, 8, 9, 10\}$ . È interessante studiare i contributi dei nodi sincronizzati e di quelli non sincronizzati al termine di interazione. Possiamo scomporre il termine di interazione del nodo  $\mathbf{x}_i$  come segue:

$$d \sum_{j=1}^N L_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_j) = d \sum_{j \in \mathcal{C}_3} L_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_j) + d \sum_{j \notin \mathcal{C}_3} L_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_j) \quad (3.1)$$

Introduciamo la seguente notazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} S \stackrel{\text{def}}{=} \left\| d \sum_{j=1}^N L_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_j) \right\| \\ S_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\| d \sum_{j \in \mathcal{C}_3} L_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_j) \right\| \\ S_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left\| d \sum_{j \notin \mathcal{C}_3} L_{ij} \mathbf{g}(\mathbf{x}_j) \right\| \end{array} \right.$$

Dunque ora l'equazione (3.1) diventa semplicemente

$$S = S_1 + S_2$$

È stata effettuata una simulazione per analizzare l'entità di  $S_1$  e  $S_2$  e per compararla con il termine di Lorenz definito come segue:

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)\|$$

Fissato un valore di  $d$  e un nodo da analizzare, è stata effettuata una simulazione pressoché identica a quella descritta nella sottosezione 3.2.1, con l'unica differenza che nel punto 5 al posto degli errori istantanei di sincronizzazione sono stati registrati i valori di  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  e  $\mathcal{L}$  per ogni istante di tempo e nel punto 6 sono stati rappresentati i risultati ottenuti in un grafico. Gli esiti di due simulazioni sono riportati nelle figure 3.5 e 3.6. Si possono compiere le seguenti osservazioni:

- In entrambi i casi il termine dominante è quello di Lorenz.
- Per il nodo sincronizzato (nodo 10) il contributo dei nodi sincronizzati presenta notevoli oscillazioni ed è significativamente maggiore rispetto a quello dei nodi non sincronizzati.
- Per il nodo non sincronizzato (nodo 1) il contributo dei nodi non sincronizzati è comparabile a quello dei nodi sincronizzati.

### Contributi per il nodo 1

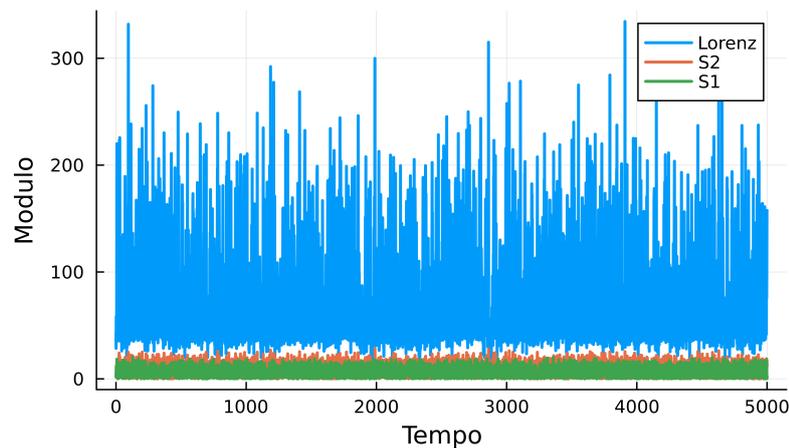


Figura 3.5: Confronto tra i termini di interazione e il termine di Lorenz per il nodo 1, il quale non è nel cluster sincronizzato. Sono stati usati  $d = 1.8$  e  $t_{max} = 5000$ .

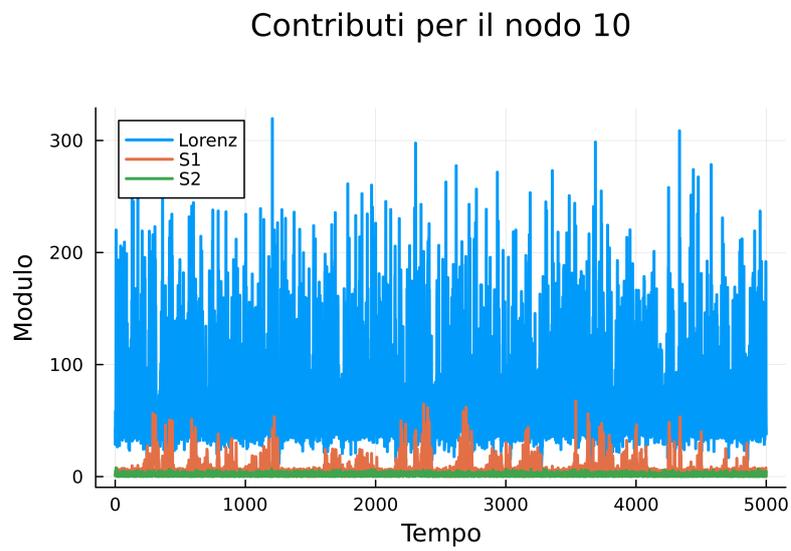


Figura 3.6: Confronto tra i termini di interazione e il termine di Lorenz per il nodo 10, il quale è nel cluster sincronizzato. Sono stati usati  $d = 1.8$  e  $t_{max} = 5000$ .



# Appendici



# Appendice A

## Elementi di teoria dei grafi

In questa appendice vengono presentate nozioni base di teoria dei grafi e risultati utili per la comprensione della presente tesi.

**Definizione A.1.** Un grafo non orientato è il dato di un insieme  $V$ , detto insieme dei vertici o nodi, e di un insieme  $E \subseteq V \times V$ , detto insieme degli archi.

Geometricamente, un grafo può essere rappresentato come un insieme di punti dati dagli elementi di  $V$  (i vertici) con linee (gli archi) che collegano le coppie di punti presenti in  $E$ .

**Definizione A.2.** Si  $G = (V, E)$  un grafo non orientato. Si definisce la matrice di adiacenza  $A$  del grafo  $G$  come segue:

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dato che il grafo non è orientato, la matrice di adiacenza risulta essere simmetrica.

È dunque possibile rappresentare i grafi tramite le loro matrici di adiacenza. In realtà si può fare di più: grazie alla rappresentazione tramite le matrici di adiacenza, è possibile definire l'intensità degli archi. Più precisamente, si può associare a ciascun arco  $(i, j) \in E$  un peso  $w_{ij}$ , che rappresenta l'intensità dell'arco. La matrice di adiacenza pesata  $A$  è definita come segue:

$$(A)_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & \text{se } (i, j) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**Definizione A.3.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo non orientato, e sia  $v \in V$  un vertice di  $G$ . Si definisce il grado del vertice  $v$  come la somma dei pesi associati agli archi incidenti su  $v$ , e si indica con  $\deg(v)$ .

**Definizione A.4.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo non orientato. Si definisce la matrice di grado  $D$  del grafo  $G$  come la matrice diagonale i cui elementi diagonali sono i gradi dei vertici di  $G$ :

$$(D)_{ij} = \begin{cases} \deg(i) & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**Definizione A.5.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo non orientato. Si definisce la matrice laplaciana  $L$  del grafo  $G$  come

$$L = D - A$$

Una spiegazione suggestiva del perché tale matrice si chiami laplaciana si può trovare in Newman (2010) [15].

**Lemma A.1.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo non orientato e sia  $L$  la sua matrice laplaciana. Allora la somma di ogni riga di  $L$  è uguale a zero:

$$\sum_j (L)_{ij} = 0$$

*Dimostrazione.* Analizziamo la somma della  $i$ -esima riga di  $L$ :

$$\sum_j (L)_{ij} = \sum_j (D)_{ij} - \sum_j (A)_{ij} = \deg(i) - \sum_j (A)_{ij} = \deg(i) - \deg(i) = 0$$

Dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che la somma degli elementi della riga  $i$  della matrice di adiacenza è uguale al grado del vertice  $i$ . ■

**Proposizione A.2.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo non orientato e sia  $L$  la sua matrice laplaciana. Allora  $L$  è semidefinita positiva, ossia tutti i suoi autovalori sono non negativi. Inoltre  $L$  ha almeno un autovalore nullo.

*Dimostrazione.* Chiamiamo  $n$  il numero di vertici di  $G$  e  $m$  il numero di archi di  $G$ . Per ogni arco, distinguiamo (arbitrariamente) l'estremità 1 e l'estremità 2. Definiamo la matrice  $B$  come segue:

$$(B)_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se l'estremità 1 dell'arco } i \text{ è connessa al vertice } j \\ -1 & \text{se l'estremità 2 dell'arco } i \text{ è connessa al vertice } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si ha dunque  $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ . Dato che ogni estremità di ogni arco è connessa a un solo vertice, ogni riga di  $B$  ha esattamente un elemento uguale a  $+1$  e un elemento uguale a  $-1$ , mentre tutti gli altri elementi sono nulli. Calcoliamo adesso gli elementi della matrice  ${}^T B B$ . L'elemento  $(i, j)$  di tale matrice è dato da

$$({}^T B B)_{ij} = \sum_{k=1}^m B_{ki} B_{kj}$$

Distinguiamo due casi:

- $i \neq j$   
Si ha

$$B_{ki} B_{kj} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B_{ki} \neq 0 \\ B_{kj} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{l'arco } k \text{ connette i vertici } i \text{ e } j$$

In tal caso si ha  $B_{ki} B_{kj} = -1$ , poiché l'arco  $k$  connette  $i$  e  $j$ , dunque una delle due estremità è connessa a  $i$  e l'altra a  $j$ . Di conseguenza abbiamo

$$\sum_{k=1}^m B_{ki} B_{kj} = \begin{cases} -1 & \text{se i vertici } i \text{ e } j \text{ sono connessi} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ovvero

$$\sum_{k=1}^m B_{ki} B_{kj} = -A_{ij} = L_{ij}$$

- $i = j$

In questo caso abbiamo

$$\sum_{k=1}^m B_{ki}B_{kj} = \sum_{k=1}^m B_{ki}^2 = \deg(v_i) = L_{ij}$$

dove  $v_i$  è il vertice  $i$ -esimo.

Abbiamo dunque mostrato che  ${}^TBB = L$ . Sia ora  $\text{spec}(L) = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  lo spettro di  $L$ , e assumiamo che gli autovettori siano normalizzati. Allora abbiamo

$${}^T\mathbf{v}_i{}^TBB\mathbf{v}_i = {}^T\mathbf{v}_i{}^TL\mathbf{v}_i = \lambda_i{}^T\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i = \lambda_i$$

Di conseguenza possiamo esprimere  $\lambda_i$  come

$$\lambda_i = {}^T\mathbf{v}_i{}^TBB\mathbf{v}_i = {}^T(B\mathbf{v}_i)(B\mathbf{v}_i) = \|B\mathbf{v}_i\|^2 \geq 0$$

Dunque  $L$  è semidefinita positiva. Dimostriamo ora che almeno uno degli autovalori di  $L$  è nullo. Sia  $\mathbf{1}$  il vettore colonna i cui elementi sono tutti uguali a 1. Calcoliamo gli elementi del vettore  $L\mathbf{1}$ . L' $i$ -esima componente di tale vettore è

$$\sum_{j=1}^n L_{ij}1_j = \sum_{j=1}^n L_{ij} = 0$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il lemma A.1. Di conseguenza abbiamo

$$L\mathbf{1} = \mathbf{0}$$

Dunque  $\mathbf{1}$  è un autovettore di  $L$  associato all'autovalore nullo, pertanto si ha

$$0 \in \text{spec}(L)$$

■



# Appendice B

## Proprietà del prodotto di Kronecker

In questa appendice vengono mostrate alcune proprietà del prodotto di Kronecker utili per la comprensione della presente tesi.

**Definizione B.1.** Siano  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  e  $B \in M_{p \times q}(\mathbb{R})$ . Il prodotto di Kronecker  $A \otimes B$  della matrice  $A$  con la matrice  $B$  è definito come matrice a blocchi dalla seguente espressione:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in M_{mp \times nq}(\mathbb{R})$$

dove  $a_{ij}$  è l'elemento  $(i, j)$  della matrice  $A$ .

**Proposizione B.1.** Siano  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{Nm}$  e  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}$  una base di  $\mathbb{R}^N$ . Allora esiste un unico insieme di vettori  $\{\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_N\} \subset \mathbb{R}^m$  tali che:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \otimes \boldsymbol{\eta}_i$$

*Dimostrazione.*  $\mathbf{X}$  è un generico vettore di  $\mathbb{R}^{Nm}$ .

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{Nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{Nm}$$

Definiamo i vettori  $\mathbf{X}_k \in \mathbb{R}^N$  con  $k = 1, \dots, m$  come i vettori colonna contenenti le componenti di  $\mathbf{X}$  aventi indice congruo  $k$  modulo  $m$ :

$$\mathbf{X}_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} X_k \\ X_{m+k} \\ \vdots \\ X_{(N-1)m+k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad k = 1, \dots, m$$

Dato che  $\mathbf{X}_k \in \mathbb{R}^N$  per ogni  $k = 1, \dots, m$  e  $\mathcal{B}$  è una base di  $\mathbb{R}^N$ , esiste un unico insieme di coefficienti  $\eta_{i,k} \in \mathbb{R}$  con  $i = 1, \dots, N$  tale che:

$$\mathbf{X}_k = \sum_{i=1}^N \eta_{i,k} \mathbf{v}_i$$

Da ciò segue che il vettore  $\mathbf{X}$  può essere scritto come:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} v_{i,1}\eta_{i,1} \\ \vdots \\ v_{i,1}\eta_{i,m} \\ v_{i,2}\eta_{i,1} \\ \vdots \\ v_{i,N-1}\eta_{i,m} \\ v_{i,N}\eta_{i,1} \\ \vdots \\ v_{i,N}\eta_{i,m} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} v_{i,1}\boldsymbol{\eta}_i \\ \vdots \\ v_{i,N}\boldsymbol{\eta}_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \otimes \boldsymbol{\eta}_i$$

dove  $v_{i,j}$  è la  $j$ -esima componente del vettore  $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^N$  e  $\eta_{i,j}$  è la  $j$ -esima componente del vettore  $\boldsymbol{\eta}_i \in \mathbb{R}^m$ . ■

**Proposizione B.2.** Siano  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{p \times q}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^q$ . Allora si ha

$$(A \otimes B)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (A\mathbf{v}) \otimes (B\mathbf{w}).$$

*Dimostrazione.* Innanzitutto verifichiamo che gli oggetti con cui abbiamo a che fare siano ben definiti, ossia che i prodotti riga per colonna siano svolti tra oggetti delle dimensioni corrette. Per quanto riguarda il membro di sinistra,  $A \otimes B$  è una matrice di dimensioni  $mp \times nq$  e  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$  è un vettore colonna di dimensione  $nq$ , dunque il prodotto  $(A \otimes B)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$  è ben definito ed è un vettore colonna di dimensione  $mp$ . Per quanto riguarda il membro di destra, è immediato vedere che i prodotti  $A\mathbf{v}$  e  $B\mathbf{w}$  sono ben definiti e producono vettori colonna di dimensione  $m$  e  $p$ , rispettivamente. Di conseguenza anche il membro di destra è un vettore colonna di dimensione  $mp$ .

Per dimostrare la proposizione risulta sufficiente svolgere esplicitamente il calcolo di  $(A \otimes B)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$  e rendersi conto che coincide con  $(A\mathbf{v}) \otimes (B\mathbf{w})$ .

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) &= \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1\mathbf{w} \\ v_2\mathbf{w} \\ \vdots \\ v_n\mathbf{w} \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} a_{1j}v_j B\mathbf{w} \\ a_{2j}v_j B\mathbf{w} \\ \vdots \\ a_{mj}v_j B\mathbf{w} \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} a_{1j}v_j \\ a_{2j}v_j \\ \vdots \\ a_{mj}v_j \end{pmatrix} \otimes (B\mathbf{w}) = \\ &= (A\mathbf{v}) \otimes (B\mathbf{w}) \end{aligned}$$

■

# Bibliografia

- [1] Atiyeh Bayani et al. «The transition to synchronization of networked dynamical systems». In: *Nature Communications* 15.4955 (2024). DOI: <https://doi.org/10.1038/s41467-024-48203-6>.
- [2] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. 3<sup>a</sup> ed. Chapman e Hall/CRC, 2024. ISBN: 978-0-367-02650-9. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780429398490>.
- [3] James D. Murray. *Mathematical Biology*. 2<sup>a</sup> ed. Springer Berlin, Heidelberg, 2013. ISBN: 978-3-662-08542-4. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-08542-4>.
- [4] Bard Ermentrout e Nancy Kopell. «Multiple pulse interactions and averaging in systems of coupled neural oscillators». In: *Journal of Mathematical Biology* 29 (gen. 1991), pp. 195–217. DOI: [10.1007/BF00160535](https://doi.org/10.1007/BF00160535).
- [5] Gyorgy Buzsáki e Andreas Draguhn. «Neuronal Oscillations in Cortical Networks». In: *Science (New York, N.Y.)* 304 (lug. 2004), pp. 1926–9. DOI: [10.1126/science.1099745](https://doi.org/10.1126/science.1099745).
- [6] Peter J. Uhlhaas e Wolf Singer. «Neural Synchrony in Brain Disorders: Relevance for Cognitive Dysfunctions and Pathophysiology». In: *Neuron* 52.1 (2006), pp. 155–168. ISSN: 0896-6273. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.neuron.2006.09.020>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0896627306007276>.
- [7] Yoshiki Kuramoto. «Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators». In: *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*. A cura di Huzihiro Araki. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1975, pp. 420–422. ISBN: 978-3-540-37509-8.
- [8] Steven H. Strogatz. «From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators». In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 143.1 (2000), pp. 1–20. ISSN: 0167-2789. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(00\)00094-4](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(00)00094-4). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278900000944>.
- [9] Yoshiki Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer Berlin, Heidelberg, 1984. ISBN: 978-3-642-69691-6. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-69689-3>.
- [10] R. Mirollo e S.H. Strogatz. «The Spectrum of the Partially Locked State for the Kuramoto Model». In: *Journal of Nonlinear Science* 17.4 (giu. 2007), pp. 309–347. ISSN: 1432-1467. DOI: [10.1007/s00332-006-0806-x](https://doi.org/10.1007/s00332-006-0806-x). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00332-006-0806-x>.

- 
- [11] Louis M. Pecora e Thomas L. Carroll. «Master Stability Functions for Synchronized Coupled Systems». In: *Phys. Rev. Lett.* 80 (10 mar. 1998), pp. 2109–2112. DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.2109. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.2109>.
- [12] J. Sun, E. M. Bollt e T. Nishikawa. «Master stability functions for coupled nearly identical dynamical systems». In: *EPL (Europhysics Letters)* 85.6 (mar. 2009), p. 60011. ISSN: 1286-4854. DOI: 10.1209/0295-5075/85/60011. URL: <http://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/85/60011>.
- [13] Charo I. del Genio et al. «Synchronization in dynamical networks with unconstrained structure switching». In: *Phys. Rev. E* 92 (6 dic. 2015), p. 062819. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.062819. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.92.062819>.
- [14] Rita Fioresi e Marta Morigi. *Introduzione all'algebra lineare*. 2<sup>a</sup> ed. Casa Editrice Ambrosiana, giu. 2021. ISBN: 9788808420183. URL: <https://www.zanichelli.it/ricerca/prodotti/introduzione-all-algebra-lineare-001>.
- [15] Mark Newman. *Networks: An Introduction*. Oxford University Press, mar. 2010. ISBN: 9780199206650. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780199206650.001.0001. URL: <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199206650.001.0001>.

# Ringraziamenti

Desidero ringraziare innanzitutto il Prof. Marco Lenci per avermi seguito come relatore in questo percorso di tesi. Lavorare con lui mi ha permesso di toccare con mano il mondo della ricerca scientifica, un'esperienza che mi ha arricchito notevolmente. Lo ringrazio inoltre per la pazienza e per l'atteggiamento aperto che ha dimostrato nei miei confronti, ascoltando con interesse le mie idee e i miei dubbi.

Ringrazio tutte le persone fantastiche con cui ho avuto a che fare durante la mia permanenza al DIFA, tanto i docenti quanto gli studenti. L'ambiente che ho trovato in dipartimento è sempre stato accogliente nei miei confronti, facendomi sentire parte di una grande famiglia.

Un ringraziamento speciale va ai miei amici, che mi sono stati vicini in ogni momento di questo percorso. Senza di voi non ce l'avrei mai fatta.

Infine, porgo un ringraziamento enorme alla mia famiglia, e in particolare ai miei genitori. Mi avete sempre sostenuto in ogni mia scelta, spronandomi ad inseguire i miei sogni. Grazie di cuore per tutto quello che avete fatto e che continuate a fare per me.