

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

I Teoremi No-Go della meccanica quantistica

Relatore:
Prof. Francesco Ravanini

Presentata da:
Sebastiano Manicardi

Anno Accademico 2024/2025

Abstract

Nella seguente tesi si esaminano i principi dell'entanglement quantistico, con particolare attenzione alla critica mossa dal Paradosso EPR, evidenziando il suo legame con l'informazione quantistica. In questo modo si arriva ad affrontare i Teoremi No-Go e nello specifico il No-Signalling Theorem, teorema cardine in ambito quantistico strettamente legato al principio di causalità relativistico. Si analizzano infine le sue implicazioni ed il rapporto di questo teorema con gli assiomi di Von Neumann.

Indice

Introduzione	3
1 Stati ed insiemi	5
1.1 Assiomi della meccanica quantistica	5
1.2 Il Qubit	6
1.3 Spin 1/2	6
1.4 Matrice di densità degli stati	8
1.5 Sfera di Bloch	10
1.6 Teorema di Gleason	11
1.7 Evoluzione dell'operatore densità	12
1.8 Decomposizione di Schmidt	12
1.9 Entanglement	14
1.10 Convessità	14
1.11 Preparazione dell'insieme	14
1.12 Cancellazione quantistica	15
2 Misura ed evoluzione	16
2.1 Misure ortogonali	16
2.2 Misure generalizzate	17
2.3 Teorema di Neumark	18
2.4 Misure ortogonali sul prodotto tensoriale	19
2.5 Operatore somma	21
2.6 Linearità	23
2.7 Positività completa	24
2.8 POVM come superoperatore	25
2.9 Il teorema di rappresentazione di Kraus	25
2.10 Canali quantistici	27
2.11 L'evoluzione Markoviana	31
2.12 La Lindbladiana	32
3 Entanglement quantistico	33
3.1 Informazione quantistica nascosta	33
3.2 Variabili nascoste e disuguaglianze di Bell	34
3.3 Fotoni	36
3.4 Altre disuguaglianze di Bell	37
3.5 Dense coding	39
3.6 Quantum key	40
3.7 No-Cloning Theorem	41
3.7.1 Dimostrazione 1	42
3.7.2 Dimostrazione 2	43
3.7.3 Interpretazione	43
3.8 Teletrasporto quantistico	44

4	Teoremi No-Go	45
4.1	No-Broadcast Theorem	45
4.2	No-Deletion Theorem	46
4.3	No-Teleportation Theorem	46
4.4	No-Signalling Theorem	46
5	Dal No-Signalling alla meccanica quantistica	48
6	Analisi delle dimostrazioni del No-Signalling theorem	50
6.1	No-Signalling: circolarità, assunzioni e fondamenti	50
6.2	Il prodotto tensoriale	51
6.3	Scelta di osservabili	52
6.4	Perturbazioni	52
6.5	Unificazione	53
6.6	Discussione	53
7	Derivazione del TPR	53
7.1	Assiomi di Von Neumann e prodotto tensoriale	53
7.2	Estensione di operatori	54
7.3	Funzione ψ combinata	55
7.4	IC-UNIUNI e IC-UNIMARG	55
	Conclusioni	57
	Riferimenti bibliografici	58

Introduzione

A partire dal 1600, la fisica conobbe un forte sviluppo grazie a teorie sempre più sofisticate, in grado di spiegare dettagliatamente i fenomeni naturali. In questo contesto, si arrivò alla comprensione del moto dei corpi, della gravitazione, dei fenomeni ondulatori e tanto altro. In particolar modo, verso la fine del 1800, Maxwell riscrisse l'intero elettromagnetismo attraverso quattro equazioni che portano il suo nome, completando il quadro della "fisica classica". Tuttavia, per quanto molti fisici pensassero che la fisica fosse giunta al proprio termine, il 1900 segnò una svolta epocale grazie alla nascita di due grandissime teorie. L'esperimento di Michelson e Morley portò alla formulazione della "teoria della relatività", mentre lo studio sullo spettro di radiazione del corpo nero diede luce alla "meccanica quantistica".

Quest'ultima, nello specifico, si fonda su principi totalmente nuovi rispetto alla fisica classica. Il primo esempio riguarda la dualità della luce, tale per cui essa si comporta sia come un'onda sia come un corpuscolo. Non solo, le particelle fisiche (anch'esse intese sia come onde sia come corpuscoli) smettono di comportarsi in modo deterministico come la meccanica classica descriverebbe: le traiettorie vengono sostituite dalla *probabilità* che le particelle si trovino in determinati punti in un certo tempo t . Solo attraverso questo cambio di prospettiva è possibile chiarire i risultati di esperimenti quali la doppia fenditura di Young ed il corpo nero di Kirchhoff.

Il passaggio alla meccanica quantistica fu tutt'altro che semplice: si impiegarono circa trent'anni per fornirne una solida formulazione, su cui si aprì inoltre un enorme dibattito riguardo la sua interpretazione. Si consideri, a tal proposito, una misura della posizione di una generica particella [1]. Se la misura mostra che la particella si trova nel punto A, dov'era la particella poco prima di essere misurata?

- **Posizione realista:** la particella si trova in A. L'incertezza sulla posizione introdotta tramite la meccanica quantistica riflette l'incompletezza della teoria stessa. In altri termini, il non conoscere con esattezza la posizione della particella prima della misura è legato all'ignoranza dell'osservatore, non alla natura probabilistica della realtà.
- **Posizione ortodossa:** la particella non è in un punto preciso, ma è forzata a comparire solo a seguito della misura. La misura, quindi, perturba il sistema. Questo è quanto afferma l'interpretazione di Copenaghen.
- **Posizione agnostica:** non si risponde alla domanda. Infatti, poter rilevare dove sia la particella prima della misura implicherebbe effettuare un'altra misura prima della misura stessa, non arrivando così ad una vera e propria risposta. La questione è di tipo metafisico e non può essere risolta attraverso osservazioni sperimentali.

Tra i grandi sostenitori della posizione realista ci fu Einstein, il quale cercò a tutti i costi di screditare la versione ortodossa (supportata da Bohr, Schrödinger e tanti altri) attraverso il famoso *paradosso EPR* [2] sfruttando l'*entanglement quantistico*. Il concetto di entanglement fu introdotto per la prima volta da E. Schrödinger:

Quando due sistemi [...] subiscono un'interazione fisica temporanea dovuta a forze conosciute tra di essi [...], non possono più essere descritti nello stesso modo di prima, cioè assegnando a ciascuno un proprio rappresentante. [...] Per interazione i due rappresentanti (o funzioni d'onda) sono diventati entangled [3].

Secondo Einstein, Podolsky e Rosen, l'entanglement porterebbe a violare il principio di causalità della relatività, permettendo di inviare informazioni più velocemente della luce. Nel 1964, J. S. Bell dimostrò attraverso una disuguaglianza che la meccanica quantistica è incompatibile con teorie a *variabili nascoste* predette dai realisti, favorendo la posizione ortodossa. Furono eseguiti numerosi esperimenti per verificare la disuguaglianza di Bell, i più famosi sono attribuiti a Clauser, Freedman [4] e ad Aspect, Grangier e Roger [5]. I risultati furono in perfetto accordo con le predizioni della meccanica quantistica, quindi in disaccordo con la disuguaglianza di Bell [1], portando così Clauser e Aspect a vincere il premio Nobel per la fisica nel 2022.

L'obiettivo di questa tesi è quello di approfondire il concetto di entanglement e il ruolo che gioca all'interno dei cosiddetti *Teoremi No-Go*, ovvero teoremi che sanciscono l'impossibilità della realizzazione di particolari situazioni. Tra questi spiccano in particolar modo il *No-Cloning Theorem*, il quale afferma che non è possibile copiare uno stato quantistico se questo non è conosciuto, ed il *No-Signalling Theorem*, secondo cui non è possibile quantisticamente scambiare segnali più velocemente della luce.

In particolare, nel primo capitolo si affronta il concetto di *operatore di densità* nel caso di miscele quantistiche, con relative proprietà matematiche. Il secondo capitolo tratta invece l'evoluzione temporale di una miscela quantistica e dell'influenza che una misura ha su essa attraverso il cosiddetto POVM. Il terzo capitolo si concentra sul Teorema di Bell [6] e su varie disuguaglianze possibili [7] che mostrano l'incompatibilità della meccanica quantistica con le teorie a variabili nascoste. Nel quarto capitolo si elencano alcuni teoremi No-Go, di cui si propongono le dimostrazioni, questo per poter arrivare ad affrontare il No-Signalling Theorem e le conseguenze che esso apporta nella meccanica quantistica (quinto capitolo). Infine, nel sesto e settimo capitolo si mostra come tutte le possibili dimostrazioni del No-Signalling Theorem siano circolari in quanto il teorema è contenuto implicitamente all'interno degli assiomi di Von Neumann utilizzati per costruire la meccanica quantistica stessa.

1 Stati ed insiemi

1.1 Assiomi della meccanica quantistica

La meccanica quantistica descrive in termini matematici il mondo fisico. Essa è fondata sulla base di cinque assiomi [8].

1. **Stati del sistema:** Ad ogni sistema fisico quantistico corrisponde uno spazio di Hilbert \mathcal{H} complesso e separabile. Lo stato del sistema ad un determinato tempo t è rappresentato da un raggio appartenente ad \mathcal{H} , ovvero una classe di equivalenza di vettori di \mathcal{H} differenti l'uno dall'altro tramite una costante arbitraria $\alpha \in \mathbb{C}/\{0\}$.
2. **Osservabili fisiche:** Un'osservabile è una proprietà del sistema che, in linea di principio, può essere misurata. In meccanica quantistica è rappresentata tramite un operatore hermitiano \mathbf{F} che opera all'interno dello spazio di Hilbert. Un operatore hermitiano è tale che

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^\dagger, \quad (1.1)$$

inoltre, soddisfa l'equazione agli autovalori

$$\mathbf{F} |n\rangle = f_n |n\rangle \quad (1.2)$$

con $|n\rangle$ autovettore e f_n autovalore relativo, tali che $\{|n\rangle\}$ è una base ortonormale e f_n è reale. Si definiscono inoltre gli operatori di proiezione

$$\mathbf{P}_n = |n\rangle \langle n|, \quad (1.3)$$

da cui segue la decomposizione spettrale

$$\mathbf{F} = \sum_n f_n \mathbf{P}_n. \quad (1.4)$$

3. **Misura:** La misura di una osservabile attraverso un operatore \mathbf{F} agente sullo stato $|\psi\rangle$ del sistema proietta tale stato su uno degli autovettori $|n\rangle$ dell'operatore. Il risultato della misura coincide con l'autovalore a_n relativo all'autovettore, con una probabilità

$$\mathbf{Prob}(a_n) = \|P_n |\psi\rangle\|^2 = \langle \psi | P_n | \psi \rangle \quad (1.5)$$

4. **Dinamica:** L'evoluzione temporale di uno stato quantistico agisce su di esso attraverso un operatore hermitiano \mathbf{H} , ovvero l'hamiltoniana del sistema. L'azione di \mathbf{H} sullo stato è descritta dall'equazione di Schrödinger

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \mathbf{H} |\psi(t)\rangle. \quad (1.6)$$

Espressa in termini differenziali, lo stato $|\psi(t + dt)\rangle$ si può esprimere come

$$|\psi(t + dt)\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar} \mathbf{H} dt\right) |\psi(t)\rangle \quad (1.7)$$

da cui si evince l'espressione dell'operatore di evoluzione temporale $\mathbf{U}(t) = \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar} \mathbf{H} dt$.

5. **Sistemi composti:** Lo spazio di Hilbert che descrive un sistema composto AB , o bivariato, a partire da due sistemi A e B è $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ e lo stato del sistema coincide con $|\psi, \phi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$, dati $|\psi\rangle_A$ e $|\phi\rangle_B$ stati rispettivi di A e B .

1.2 Il Qubit

Alla base della teoria dell'informazione classica risiede il bit, unità di informazione che può assumere solo uno dei possibili valori 0,1. In meccanica quantistica, il bit assume un comportamento probabilistico, tantochè, per essere differenziato dall'analogo classico, prende il nome di *qubit*. Esso viene descritto attraverso uno spazio di Hilbert \mathcal{H} bidimensionale, la cui base di autovettori normalizzati è $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ (che corrispondono agli stati 0 e 1 del bit) [8, p. 40]. Lo stato del qubit è descritto attraverso una sovrapposizione degli stati della base,

$$a |0\rangle + b |1\rangle, \quad (1.8)$$

dove la normalizzazione comporta $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Una eventuale misura sullo stato del qubit porterebbe il sistema a trovarsi nello stato $|0\rangle$ con probabilità $|a|^2$ e nello stato $|1\rangle$ con probabilità $|b|^2$. In questo caso, il sistema collassa e il suo stato viene disturbato proprio a seguito della misura. Effettuando ulteriori misure sul qubit, si nota che questo mantiene sempre lo stesso valore in cui è collassato a seguito della prima misura, per questo motivo il risultato delle misure successive alla prima è certo. Questo comportamento lo differenzia rispetto al classico bit: esso possiede uno stato definito, 0 o 1. Misurando lo stato del bit, il sistema non viene perturbato e il suo stato si conserva nel tempo. Al contrario, lo stato di un qubit è descritto più genericamente dalla (2.8), quindi non è possibile determinare con esattezza il valore del qubit, ecco perchè il suo stato è *sconosciuto*. Al contrario, se si effettua una misura, si porta il sistema al collasso su 0 o su 1, facendo sì che lo stato sia determinato, quindi *conosciuto*.

1.3 Spin 1/2

Si propone di seguito un esempio sulla differenza tra bit e qubit [8, p. 41]. Si consideri il caso di un bit classico probabilistico, ovvero di un bit classico il cui stato è sconosciuto. Ciò

che si conosce è che, misurando lo stato del bit, la probabilità che sia 0 è $1/2$, così come la probabilità che sia 1. Apparentemente, il comportamento del bit sembra in linea con quello di un qubit. Qual è la differenza? Per rispondere a questa domanda è utile costruire un'analogia tra un qubit e una particella di spin $1/2$: le particelle a spin $1/2$ sono caratterizzate dal fatto che la terza componente del momento angolare intrinseco m_s assume solo due valori possibili ($+1/2$, $-1/2$) lungo una certa direzione spaziale, così che i due stati possono essere indicati rispettivamente come $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$. $|0\rangle$ e $|1\rangle$ possono essere interpretati quindi come $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$. I numeri complessi a e b (con eventuali fasi relative) possono essere associati all'orientazione dello spin nello spazio (ovvero la coordinata polare θ e l'angolo azimutale ϕ).

Si considerano le rotazioni di un angolo $|\theta\rangle$ attorno ad un asse identificato dal vettore normalizzato $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$:

$$R(\hat{n}, \theta) = \exp(-i\theta\hat{n} \cdot \vec{\mathbf{J}}), \quad (1.9)$$

dove $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3$ sono le componenti del momento angolare, per le quali vale

$$\mathbf{J}_k = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_k \quad (1.10)$$

con

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

matrici di Pauli. Definendo $\mathbf{U}(\hat{n}, \theta)$ come $R(\hat{n}, \theta)$ espressa in termini delle matrici di Pauli, si può verificare che

$$\mathbf{U}(\hat{n}, \theta = 2\pi) = -1 \quad (1.12)$$

da cui segue

$$\mathbf{U}(R_1)\mathbf{U}(R_2) = \pm\mathbf{U}(R_1 \circ R_2). \quad (1.13)$$

Questa doppia rappresentazione del gruppo di rotazioni prende il nome di *rappresentazione spinoriale*. È possibile ricavare autostati del momento angolare lungo la direzione $\hat{n} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$, applicando una rotazione θ attorno ad $\hat{n}' = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$ all'autostato di \mathbf{J}_3 :

$$\begin{aligned} \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\hat{n}' \cdot \vec{\boldsymbol{\sigma}}\right) &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(\hat{n}' \cdot \vec{\boldsymbol{\sigma}}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Applicando la (1.14) a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, si giunge a

$$|\psi(\theta, \varphi)\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

da cui $a = e^{-i\varphi/2} \cos \theta/2$, $b = e^{i\varphi/2} \sin \theta/2$, stato rappresentante uno spin che punta nella direzione (θ, ϕ) . Considerando un caso particolare, con $\theta = \pi/2$ e $\phi = 0$, l'autostato dello spin diventa

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle), \quad (1.16)$$

mentre il suo stato ortogonale è descritto da

$$|\downarrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle - |\downarrow_z\rangle). \quad (1.17)$$

In altre parole, misurando la componente dello spin lungo l'asse z, in entrambi gli stati si ottiene spin up con probabilità 1/2 o spin down con probabilità 1/2. Se si considerasse invece uno stato dato dalla sovrapposizione dei due,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_x\rangle + |\downarrow_x\rangle), \quad (1.18)$$

sarebbe opportuno chiedersi quale sia la componente dello spin diretta lungo l'asse z. Per un bit classico probabilistico, essendo il bit in uno solo tra gli stati up e down lungo x, si ha nuovamente che la componente lungo z ha spin up con probabilità 1/2 o spin down con probabilità 1/2. Al contrario, un qubit si trova in una sovrapposizione degli stati $|\uparrow_x\rangle$ e $|\downarrow_x\rangle$, quindi sommando i due stati risulta che la componente lungo z è una sola: $|\uparrow_z\rangle$. Questo fenomeno è un esempio di ciò che viene definito come “*interferenza quantistica*”.

1.4 Matrice di densità degli stati

Gli assiomi della meccanica quantistica risultano fondamentali per la sua formulazione. Sebbene si possa pensare che questi debbano essere sempre validi, lo sono in realtà solo per sistemi chiusi. Si consideri, a tal proposito, un sottosistema di un sistema quantistico [8, p. 49]. Considerando solamente ciò che avviene nel suo sottosistema, gli assiomi possono risultare violati. Ciò comporta che gli stati del sistema possono non essere vettori, che le misure non sono proiezioni ortogonali e che l'evoluzione temporale non è unitaria. D'ora in avanti ci si riferirà a due sistemi, A e B, che costituiscono l'sistema quantistico totale AB. Per il momento si consideri una base ortonormale per l'sistema A $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$ e una base ortonormale per l'sistema B $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$. Si considerano, in questo esempio, A e B come due qubit formante lo stato

$$|\psi\rangle_{AB} = a|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + b|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B \quad (1.19)$$

Si noti che A e B sono correlati. Supponendo di poter accedere al solo sistema A, proiettando tale stato sulla base $\{|0_A\rangle, |1_A\rangle\}$ si ottiene lo stato

$$|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B \quad (1.20)$$

con probabilità $|a|^2$, oppure lo stato

$$|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B \quad (1.21)$$

con probabilità $|b|^2$. Sebbene non si possa accedere all'sistema B, è evidente in questo caso che lo stato di A è in correlazione con lo stato di B, quindi misurando il qubit A è possibile determinare anche il qubit B. L'applicazione che agisce solamente sul qubit A è

$$\mathbf{M}_A \otimes \mathbf{1}_B, \quad (1.22)$$

da cui è possibile calcolarne il valore medio

$$\begin{aligned} \langle \psi | \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{1}_B | \psi \rangle &= (a^*_A \langle 0| \otimes_B \langle 0| + b^*_B \langle 1| \otimes_B \langle 1|) (\mathbf{M}_A \otimes \mathbf{1}_B) (a|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + b|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B) \\ &= |a_A|^2 \langle 0 | \mathbf{M}_A | 0 \rangle_A + |b_A|^2 \langle 1 | \mathbf{M}_A | 1 \rangle_A. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Si ottiene quindi che

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{M}_A \rangle &= tr(\mathbf{M}_A \rho_A), \\ \rho_A &= |a|^2 |0\rangle_A \langle 0| + |b|^2 |1\rangle_A \langle 1| \end{aligned} \quad (1.24)$$

Dove ρ_A è detta *matrice di densità* per il qubit A e $tr(\cdot)$ denota la traccia. La matrice di densità rappresenta il sistema dei possibili stati quantistici, ciascuno pesato secondo una specifica probabilità. Quindi, $|a|^2$ è la probabilità che il qubit A si trovi nello stato $|0\rangle_A$ mentre $|b|^2$ è la probabilità che il qubit si trovi nello stato $|1\rangle_A$. La probabilità $Prob(a)$ che una misura su A generi un valore a si ottiene considerando i proiettori \mathbf{E}_A dell'osservabile \mathbf{M}_A :

$$Prob(a) = p_{0A} \langle 0 | \mathbf{E}_A(a) | 0 \rangle_A + p_{1A} \langle 1 | \mathbf{E}_A(a) | 1 \rangle_A \quad (1.25)$$

Estendendo questi concetti a due generici sistemi A e B di basi ortonormali rispettive $\{|i\rangle_A\}$

e $\{|\mu\rangle_B\}$, la base ortonormale di $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ è $\{|i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B\}$ e gli stati sono espandibili come

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,\mu} a_{i\mu} |i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B, \quad (1.26)$$

in modo che $\sum_{i,\mu} |a_{i\mu}|^2 = 1$. Analogamente, ripetendo i passaggi precedenti, si ottiene la matrice di densità di A

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{tr}_B (|\psi\rangle_{AB} \langle\psi|_{AB}) \\ &\equiv \sum_{i,j,\mu} a_{i\mu} a_{j\mu}^* |i\rangle_A \langle j|_A, \end{aligned} \quad (1.27)$$

dove $\text{tr}_B(\cdot)$ è definita come la traccia parziale del sottosistema B della matrice densità di AB. l'operatore ρ_A ha le seguenti proprietà:

1. ρ_A è autoaggiunta: $\rho_A = \rho_A^\dagger$.
2. ρ_A è positiva: Per ogni $|\psi\rangle_A$, ${}_A\langle\psi|\rho_A|\psi\rangle_A = \sum_{\mu} \sum_i |a_{i\mu} {}_A\langle i|\psi\rangle_A|^2 \geq 0$.
3. $\text{tr}(\rho_A) = \sum_{i,\mu} |a_{i\mu}|^2 = 1$.

La più generale forma della matrice densità, espressa nella forma diagonale, è

$$\rho_A = \sum_a p_a |\psi_a\rangle \langle\psi_a|, \quad (1.28)$$

con $0 < p_a \leq 1$ e rappresenta lo stato del sistema A. Nel caso in cui questo stato è identificabile con un raggio $|\psi\rangle_A$, lo stato si dice puro, per cui vale $\rho_A^2 = \rho_A$ e $\text{tr}(\rho_A^2) = 1$. Nel caso in cui lo stato non sia rappresentabile con un raggio, ci sono due o più termini nella sommatoria e $\rho_A^2 \neq \rho_A$. Si dice che ρ_A è in una sovrapposizione incoerente degli stati $\{|\psi_a\rangle\}$, che significa che le fasi delle $|\psi_a\rangle$ sono inaccessibili. Riassumendo, la matrice densità descrive un sistema di stati quantistici puri $|\psi_a\rangle$ che si verificano con probabilità P_a . Quindi, quando un sistema A interagisce con un sistema B, essi sono “entangled”, ovvero correlati. L'entanglement distrugge la coerenza della sovrapposizione degli stati di A, così che le fasi nella sovrapposizione diventano inaccessibili osservando solamente il sistema A.

1.5 Sfera di Bloch

Riconsiderando il semplice caso dove il sistema A è un singolo qubit con la propria matrice densità ρ [8, p. 54], è possibile espandere ρ nel modo seguente:

$$\rho(\vec{P}) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{1} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma} \right), \quad (1.29)$$

dove $\vec{\sigma}$ vettore composto dalle matrici di Pauli $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e \vec{P} vettore tale che $|\vec{P}|^2 < 1$. Se $\det(\rho) \geq 0$, è possibile costruire una corrispondenza biunivoca tra lo spazio costituito dalle ρ e la sfera a tre dimensioni (più precisamente, una palla), chiamata “Sfera di Bloch”, i cui punti sono identificati dal vettore \vec{P} . Ai confini di questa sfera, si trovano le matrici tali per cui $|\vec{P}| = 1$ ed il determinante di ρ si annulla. Necessariamente, siccome $\text{tr}(\rho) = 1$, gli autovalori sono 0 e 1. Le matrici densità in questo caso non sono altro che proiettori, quindi pure. È possibile dimostrare infatti che, sotto queste condizioni, la matrice densità si scrive come

$$\rho(\hat{n}) = |\psi(\hat{n})\rangle\langle\psi(\hat{n})|. \quad (1.30)$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto considerando lo stato

$$|\psi(\theta, \varphi)\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

da cui si può calcolare la matrice densità

$$\begin{aligned} \rho(\theta, \varphi) &= |\psi(\theta, \varphi)\rangle\langle\psi(\theta, \varphi)| \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{1} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{1} + \hat{n} \cdot \vec{\sigma}). \end{aligned} \quad (1.32)$$

1.6 Teorema di Gleason

Il teorema di Gleason tratta il concetto di probabilità associata alle proiezioni ortogonali nello spazio di Hilbert [8, p. 56]. In particolare, lo stato di un sistema quantistico può essere considerato come una mappa che associa ad ogni operatore di proiezione \mathbf{E} una probabilità $p(\mathbf{E})$:

$$\mathbf{E} \rightarrow p(\mathbf{E}); \quad 0 < p(\mathbf{E}) \leq 1 \quad (1.33)$$

La mappa rispetta le proprietà:

1. $p(\mathbf{0}) = 0$
2. $p(\mathbf{1}) = 1$
3. Se $\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 = 0$, allora $p(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) = p(\mathbf{E}_1) + p(\mathbf{E}_2)$

Il punto numero tre è fondamentale perchè stabilisce la somma delle probabilità nel caso in cui i risultati si escludono tra loro. Il teorema mostra che per ogni mappa soddisfacente queste proprietà esiste un ρ hermitiano positivo con $\text{tr}(\rho)=1$ tale per cui

$$p(\mathbf{E}) = \text{tr}(\rho\mathbf{E}), \quad (1.34)$$

a patto che la dimensione dello spazio di Hilbert sia maggiore di due. Per il caso di dimensione due, infatti, non esiste un numero sufficiente di proiettori mutualmente esclusivi e le funzioni che soddisferebbero le tre richieste del teorema sono molteplici.

1.7 Evoluzione dell'operatore densità

Fino ad ora sono state accennate alcune proprietà dell'operatore densità, ma resta incognita la sua evoluzione temporale [8, p. 58]. Si consideri quindi un sistema AB dato da una hamiltoniana

$$\mathbf{H}_{AB} = \mathbf{H}_A \otimes \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \otimes \mathbf{H}_B. \quad (1.35)$$

I sistemi A e B evolvono indipendentemente:

$$\begin{aligned} |i(t)\rangle_A &= \mathbf{U}_A(t)|i(0)\rangle_A, \\ |\mu(t)\rangle_B &= \mathbf{U}_B(t)|\mu(0)\rangle_B, \end{aligned} \quad (1.36)$$

dove questi ultimi definiscono le basi ortonormali rispettivamente per \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B . Calcolando la traccia parziale su B, si ottiene la matrice densità ρ_A che, in forma diagonalizzata, risulta

$$\rho_A(t) = \sum_a p_a \mathbf{U}_A(t)|\psi_a(0)\rangle_A \langle\psi_a(0)| \mathbf{U}_A^\dagger(t). \quad (1.37)$$

Il risultato mostra che gli stati evolvono, come previsto, attraverso l'operatore $\mathbf{U}_A(t)$ e, se p_a è la probabilità con cui si verifica $|\psi_a(0)\rangle$, è anche la probabilità con cui si verifica $|\psi_a(t)\rangle$. Tuttavia questi risultati valgono solo per hamiltoniane non accoppiate, secondo la (1.35). Il caso generico sarà trattato più avanti.

1.8 Decomposizione di Schmidt

Risulta spesso utile rappresentare uno stato puro di \mathcal{H}_{AB} attraverso una particolare forma, la *Rappresentazione di Schmidt* [8, p. 59]. Considerando un generico stato

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,\mu} a_{i\mu} |i\rangle_A |\mu\rangle_B \equiv \sum_{i,\mu} |i\rangle_A |\tilde{i}\rangle_B, \quad (1.38)$$

dove si indica

$$|\tilde{i}\rangle_B \equiv \sum_{\mu} a_{i\mu} |\mu\rangle_B. \quad (1.39)$$

Se $\{|i\rangle_A\}$ è base ortonormale di \mathcal{H}_A e $\{|\mu\rangle_B\}$ base ortonormale di \mathcal{H}_B , si può dimostrare che l'insieme di stati $\{|\tilde{i}\rangle_B\}$ sono ortogonali:

$${}_B\langle \tilde{j} | \tilde{i} \rangle_B = p_i \delta_{ij}. \quad (1.40)$$

Definendo $|i'\rangle_B$ stato normalizzato di $|\tilde{i}\rangle_B$,

$$|i'\rangle_B = p_i^{-1/2} |\tilde{i}\rangle_B, \quad (1.41)$$

si giunge a

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i} |i\rangle_A |i'\rangle_B \quad (1.42)$$

da cui è utile ricavare entrambe le matrici densità ρ_A e ρ_B

$$\begin{aligned} \rho_A &= \sum_i p_i |i\rangle_A \langle i| \\ \rho_B &= \text{tr}_A (|\psi\rangle_{AB} \langle \psi|) = \sum_i p_i |i'\rangle_B \langle i'|. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Come si nota dalle due uguaglianze, le matrici densità di \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B hanno gli stessi autovalori non nulli. Necessariamente, data l'eventuale diversità di dimensione tra \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , il numero di autovalori nulli in ρ_A e ρ_B può variare. Queste regole si applicano al caso in cui non ci sia degenerazione per gli autovalori non nulli, in modo da poter costruire univocamente una coppia $|i\rangle_A$ e $|i'\rangle_B$ per ciascun i a parità di autovalore. Tuttavia, nel caso di degenerazione, non è possibile eseguire una scelta univoca per ottenere l'equazione precedente. Considerando $\dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B = N$, è possibile infatti applicare una trasformazione unitaria U_{ij} che preserva lo stato $|\psi\rangle_{AB}$

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i,j=1}^N |i\rangle_A U_{ij} |j'\rangle_B, \quad (1.44)$$

preservando quindi anche $\rho_A = \rho_B = \frac{1}{N} \mathbf{1}$.

1.9 Entanglement

È possibile ora definire quando un sistema puro bipartito con stato $|\psi\rangle_{AB}$ è *entangled*, questo attraverso il *numero di Schmidt* [8, p. 61]. Il *numero di Schmidt* è un numero intero positivo che caratterizza lo stato e quantifica il numero di autovalori non nulli di ρ_A . Se questo è maggiore di uno il sistema si dice *entangled*, altrimenti si dice *separabile* ed esprimibile come prodotto tensoriale di stati puri in \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B

$$|\psi\rangle_{AB} = |\varphi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B. \quad (1.45)$$

In quest'ultimo caso, segue che le matrici di densità sono rispettivamente $\rho_A = |\varphi\rangle_A \langle\varphi|$ e $\rho_B = |\chi\rangle_B \langle\chi|$. Uno stato entangled si ottiene solo applicando trasformazioni unitarie collettive al sistema AB che sono in grado di aumentare il numero di Schmidt. Al contrario, trasformazioni unitarie locali o misure locali sul sistema non sono in grado di aumentare il numero di Schmidt, quindi non possono indurre uno stato entangled.

1.10 Convessità

Grazie alle proprietà elencate precedentemente, l'operatore costruito a partire da una combinazione lineare convessa di due operatori densità è a sua volta un operatore densità [8, p. 62]:

$$\rho(\lambda) = \lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2. \quad (1.46)$$

L'insieme delle matrici densità $N \times N$ costituiscono un sottospazio convesso dello spazio $N \times N$ di matrici hermitiane. Di notevole rilevanza è il fatto che non tutti gli operatori densità sono esprimibili come combinazione lineare convessa di altri operatori densità. In particolar modo, considerando un generico stato puro $\rho = |\psi\rangle \langle\psi|$, non può essere espresso tramite la (1.46): considerando un certo $|\psi_\perp\rangle$ ortogonale a $|\psi\rangle$,

$$\langle\psi_\perp|\rho|\psi_\perp\rangle = 0 = \lambda\langle\psi_\perp|\rho_1|\psi_\perp\rangle + (1 - \lambda)\langle\psi_\perp|\rho_2|\psi_\perp\rangle. \quad (1.47)$$

Entrambi i termini sono positivi, quindi entrambi si devono annullare. Escludendo $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$ e considerando la genericità di $|\psi_\perp\rangle$, deve valere $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Questo implica che gli stati puri sono *estremali* del sottosistema convesso, mentre gli stati misti, esprimibili come combinazione lineare di stati puri, non possono essere estremali. Per $N = 2$ un insieme simile è rappresentato dalla sfera di Bloch in tre dimensioni. Tuttavia, per $N > 2$ questa analogia non è più valida, in quanto gli estremali non sono più solamente stati puri, ma anche stati misti con almeno un autovalore nullo.

1.11 Preparazione dell'insieme

Sfruttando la convessità dell'insieme delle matrici di densità, si consideri il caso seguente [8, p. 64]: si vuole preparare uno tra i due operatori densità ρ_1 e ρ_2 , rispettivamente con

probabilità λ e $1 - \lambda$. Dato un'osservabile \mathbf{M} , il valore medio risulterà

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{M} \rangle &= \lambda \langle \mathbf{M} \rangle_1 + (1 - \lambda) \langle \mathbf{M} \rangle_2 \\ &= \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{M}\boldsymbol{\rho}_1) + (1 - \lambda) \operatorname{tr}(\mathbf{M}\boldsymbol{\rho}_2) \\ &= \operatorname{tr}(\mathbf{M}\boldsymbol{\rho}(\lambda)),\end{aligned}\tag{1.48}$$

il quale coincide esattamente col valore medio nel caso in cui fosse stato preparato l'operatore densità $\boldsymbol{\rho}(\lambda) = \lambda\boldsymbol{\rho}_1 + (1 - \lambda)\boldsymbol{\rho}_2$. Dato un operatore densità misto, esistono infiniti modi di rappresentazione attraverso una combinazione lineare convessa tra due operatori densità, quindi infiniti modi di preparare $\boldsymbol{\rho}(\lambda)$. Tutto il contrario accade per un operatore puro: esso è rappresentabile in un unico modo, quindi non si verifica alcuna ambiguità di preparazione. L'esempio più immediato sfrutta la sfera di Bloch. Considerando $\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2}\mathbf{1}$, può essere rappresentato come

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2}|\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z| + \frac{1}{2}|\downarrow_z\rangle\langle\downarrow_z|,\tag{1.49}$$

oppure come

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2}|\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x| + \frac{1}{2}|\downarrow_x\rangle\langle\downarrow_x|.\tag{1.50}$$

Generalizzando, il centro della sfera è rappresentabile tramite una qualsiasi coppia di punti estremali identificati dai vettori $(\hat{n}, -\hat{n})$. Questo fatto ha enorme influenza nella differenza tra informazione classica e quantistica, in quanto nella prima si è sicuri che gli estremali di partenza utilizzati per preparare un certo stato sono 0 o 1, mentre nella seconda gli estremali utilizzati possono essere qualsiasi pur giacendo nella sfera di Bloch secondo $(\hat{n}, -\hat{n})$.

1.12 Cancellazione quantistica

La matrice di densità $\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2}\mathbf{1}$ può essere ottenuta da una sovrapposizione incoerente degli stati $|\uparrow_z\rangle$ e $|\downarrow_z\rangle$ [8, p. 68], in contrapposizione con le sovrapposizioni coerenti quali

$$\begin{aligned}|\uparrow_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle) \\ |\downarrow_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle - |\downarrow_z\rangle).\end{aligned}\tag{1.51}$$

Sebbene entrambe sono espresse come sommatoria di termini, è molto importante riconoscere le differenze, fondamentali per la comprensione della meccanica quantistica. Nel caso della sovrapposizione coerente, le fasi relative tra i termini determinano conseguenze osservabili, in questo caso il verso dello spin lungo l'asse x . L'interferenza quantistica gioca un ruolo fondamentale ed agisce proprio perchè non è possibile conoscere la direzione dello spin

lungo z ($|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle$). Se le due particelle sono entangled, la particella A è descritta tramite una sovrapposizione incoerente, in cui le fasi relative diventano inaccessibili, così come inaccessibile è lo spin della particella B, impedendo all'interferenza di verificarsi. In questo caso si dice che l'entanglement causa la decoerenza dello spin A. È possibile, tuttavia, fare in modo che lo stato di A torni nella sua originale coerenza. Si considerino a tal proposito due osservatori, Bob e Alice, dotati di un insieme di particelle entangled. Se Bob decidesse di misurare lo spin lungo la direzione x , ciascuna delle sue particelle sarebbe descritta da uno dei due stati puri $|\uparrow_x\rangle_B$ o $|\downarrow_x\rangle_B$, mentre le particelle di Alice sarebbero a loro volta descritte da $|\uparrow_x\rangle_A$ o $|\downarrow_x\rangle_A$, che si comportano quindi come uno stato coerente in z . Se Bob misurasse in seguito lo spin lungo z , chiaramente le particelle di Alice, influenzate da quelle di Bob, perderebbero il loro stato di coerenza, perchè viene selezionato solo uno tra $|\uparrow_z\rangle_A$ o $|\downarrow_z\rangle_A$. Misurando nuovamente, dopo questo lungo procedimento, lo spin delle particelle di Bob lungo x , si riverificherebbe la situazione iniziale e le particelle di Alice tornerebbero nel loro stato coerente lungo z . Tutto questo prende il nome di *cancellazione quantistica* (*quantum eraser*), proprio perchè l'informazione viene cancellata tra una misura e la successiva.

2 Misura ed evoluzione

2.1 Misure ortogonali

Un ruolo chiave nella teoria quantistica è assunto dalla misura di un sistema quantistico. In questo capitolo, si tratterà in particolar modo di misure ortogonali. Una *misura ortogonale* sfrutta l'entanglement tra un sistema quantistico ed un puntatore [8, p. 77], in modo che, misurando il puntatore, si possano dedurre le misure sul sistema. Si considera, per esempio, il puntatore come una particella libera che si propaga come pacchetto d'onda, la cui posizione è dettata da

$$\Delta x(t) \sim \Delta x + \frac{\hbar t}{m\Delta x}. \quad (2.1)$$

La particella è accoppiata col sistema quantistico, così che l'hamiltoniana totale risulta

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + \lambda\mathbf{M}\mathbf{P}, \quad (2.2)$$

dove \mathbf{H}_0 è l'hamiltoniana del sistema, \mathbf{P} è la quantità di moto della particella e $\lambda\mathbf{M}\mathbf{P}$ il termine di accoppiamento. Si considera $[\mathbf{M}, \mathbf{H}_0]=0$, in questo modo l'hamiltoniana è approssimabile a $\mathcal{H} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{P}$, da cui

$$\mathbf{U}(t) \simeq \exp[-i\lambda t\mathbf{M}\mathbf{P}]. \quad (2.3)$$

\mathbf{P} è tale da generare una traslazione della posizione del puntatore, infatti

$$e^{-ix_o\mathbf{P}}\psi(x) = \psi(x - x_o); \quad (2.4)$$

considerando l'evoluzione al tempo t del sistema partendo dallo stato a $t=0$, si arriva a

$$\mathbf{U}(t) \left(\sum_a \alpha_a |a\rangle \otimes |\psi(x)\rangle \right) = \sum_a \alpha_a |a\rangle \otimes |\psi(x - \lambda t M_a)\rangle, \quad (2.5)$$

con $\mathbf{U}(t) = \sum_a |a\rangle \exp[-i\lambda t M_a \mathbf{P}] \langle a|$ nella base in cui \mathbf{M} è diagonale. Come si può osservare dalla (2.5), misurando la posizione del puntatore, viene preparato uno stato del tipo $|\psi(x - \lambda t M_a)\rangle$ con probabilità $|\alpha_a|^2$. Quindi, il sistema viene proiettato sulla base $\{|a\rangle\}$ degli autostati di \mathbf{M} con le rispettive probabilità. Questo è il modello proposto da *Von Neumann* per le misure ortogonali.

Considerando ora una generica osservabile \mathbf{M} del sistema, dotata di un insieme di proiettori ortogonali $\{\mathbf{E}_a\}$, la misura del puntatore induce il sistema a preparare uno stato puro del tipo

$$\frac{\mathbf{E}_a |\psi\rangle \langle \psi| \mathbf{E}_a}{\langle \psi | \mathbf{E}_a | \psi \rangle} \quad (2.6)$$

per un qualche a fissato. La nuova matrice di densità corrispondente sarà formata dall'insieme di ciascuno stato puro moltiplicato per la rispettiva probabilità $p_a = \langle \psi | \mathbf{E}_a | \psi \rangle$:

$$|\psi\rangle \langle \psi| \longrightarrow \sum_a \mathbf{E}_a |\psi\rangle \langle \psi| \mathbf{E}_a. \quad (2.7)$$

Questa è la trattazione da assumere valida nel momento in cui si esegue una misura senza conoscerne il risultato, passando da uno stato puro iniziale ad uno stato misto finale (ad eccezione del caso in cui lo stato puro iniziale fosse già un autostato dell'osservabile). Per una generico operatore densità ρ , le misure ortogonali trasformano l'operatore densità secondo

$$\rho \longrightarrow \sum_a \mathbf{E}_a \rho \mathbf{E}_a. \quad (2.8)$$

2.2 Misure generalizzate

L'obiettivo ora è quello di estendere il caso delle misure ortogonali [8, p. 81], considerando uno spazio di Hilbert \mathcal{H} come somma diretta di due spazi \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_A^\perp : $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_A^\perp$. Il sistema A ha accesso alle osservabili con supporto in A, ovvero

$$\mathbf{M}_A |\psi^\perp\rangle = 0 = \langle \psi^\perp | \mathbf{M}_A. \quad (2.9)$$

Effettuare misure ortogonali su \mathcal{H} implica preparare stati ortogonali tra loro che costituiscono una base ortonormale per \mathcal{H} ; tuttavia, un ipotetico osservatore chiuso nel sistema A, avrà accesso solo ad una parte di questi stati, che non risulteranno così ortogonali. Considerando ρ_A operatore densità con supporto in A e $\mathbf{E}_a = |u_a\rangle \langle u_a|$ proiettore unidimensionale, con $|u_a\rangle$ vettore normalizzato in \mathcal{H} , esiste un'unica decomposizione

$$|u_a\rangle = |\tilde{\psi}_a\rangle + |\tilde{\psi}_a^\perp\rangle, \quad (2.10)$$

in cui $|\tilde{\psi}_a\rangle$ e $|\tilde{\psi}_a^\perp\rangle$ sono vettori non necessariamente normalizzati in \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_A^\perp . A seguito della misura, la matrice densità diventa $|u_a\rangle\langle u_a|$ con probabilità $\langle u_a|\rho_A|u_a\rangle = \langle \tilde{\psi}_a|\rho_A|\tilde{\psi}_a\rangle$. L'osservatore in \mathcal{H}_A non nota alcuna differenza tra i vettori $|u_a\rangle$ e $|\tilde{\psi}_a\rangle$ in quanto non ha accesso alle informazioni di \mathcal{H}_A^\perp . Riscrivendo $|\tilde{\psi}_a\rangle = \sqrt{\lambda_a}|\psi_a\rangle$ attraverso lo stato normalizzato $|\psi_a\rangle$, si può affermare che il risultato della misura per l'osservatore sia dato da $|\psi_a\rangle\langle\psi_a|$ con probabilità $\langle\tilde{\psi}_a|\rho_A|\tilde{\psi}_a\rangle$.

Risulta utile definire

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{E}_A \mathbf{E}_a \mathbf{E}_A = |\tilde{\psi}_a\rangle\langle\tilde{\psi}_a| = \lambda_a |\psi_a\rangle\langle\psi_a|, \quad (2.11)$$

tale per cui la probabilità di ottenere il risultato a è $Prob(a) = tr(\mathbf{F}_a \rho)$. L'insieme di tutti i possibili \mathbf{F}_a costituisce ciò che viene chiamato POVM (*positive operator valued measure*). Si noti che \mathbf{F}_a non è necessariamente un proiettore, a meno che $\lambda_a=1$. Tramite la (2.11) è possibile ottenere una generalizzazione della formula (2.8):

$$\begin{aligned} \rho &\longrightarrow \rho' = \sum_a |\psi_a\rangle\langle\psi_a| (\lambda_a \langle\psi_a|\rho|\psi_a\rangle) \\ &= \sum_a (\sqrt{\lambda_a}|\psi_a\rangle\langle\psi_a|) \rho (\sqrt{\lambda_a}|\psi_a\rangle\langle\psi_a|) \\ &= \sum_a \sqrt{\mathbf{F}_a} \rho \sqrt{\mathbf{F}_a}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

la quale mostra tutti i risultati possibili $|\psi_a\rangle\langle\psi_a|$ che possono verificarsi ciascuno con propria probabilità $tr(\mathbf{F}_a \rho)$.

2.3 Teorema di Neumark

Nel paragrafo precedente si è visto come si possono effettuare misure ortogonali su un insieme \mathcal{H} . Se questo viene scomposto in due sottosistemi, indicati come \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_A^\perp , è possibile costruire un POVM che realizza le misure generalizzate. Ora ci si concentra sul percorso inverso, ovvero dimostrare che, per ogni spazio \mathcal{H} , esiste sempre uno spazio maggiore contenente \mathcal{H} che realizza il POVM [8, p. 84]. Questo è il teorema di Neumark.

Dato \mathcal{H} di dimensione N , si considera il POVM $\{\mathbf{F}_a\}$ con $a = 1, \dots, n$ e $n > N$. Per definizione, vale $\mathbf{F}_a = |\tilde{\psi}_a\rangle\langle\tilde{\psi}_a|$, con $|\tilde{\psi}_a\rangle$ vettore non necessariamente normalizzato. La proprietà $\sum_a \mathbf{F}_a = 1$ implica

$$\sum_{a=1}^n (F_a)_{ij} = \sum_{a=1}^n \tilde{\psi}_{ai}^* \tilde{\psi}_{aj} = \delta_{ij}. \quad (2.13)$$

Considerando l'elemento $(\tilde{\psi}_a)_j$, può essere visto come elemento di una matrice $n \times N$ che ha per righe proprio i vettori $|\tilde{\psi}_a\rangle$. Cambiando prospettiva, anzichè considerare n vettori riga in uno spazio di dimensione N , si considerano N vettori colonna $(\tilde{\psi}_j)_a$ in uno spazio di dimensione n . Siccome $N < n$, questi non possono costituire una base per tale spazio, tuttavia la condizione (2.13) impone che questi siano ortonormali. Si costruisce una base ortonormale $|u_j\rangle$ per lo spazio n -dimensionale, con $u_{aj} = \tilde{\psi}_{aj}$ per $j = 1, \dots, n$; denominando \mathbf{U} la matrice formata da tutti gli $(u_a)_j$, vale

$$\sum_a u_{ai}^* u_{aj} = \delta_{ij}, \quad (2.14)$$

quindi $\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{1}$, da cui segue immediatamente $\mathbf{U} \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1}$. L'ultima espressione indica la lineare indipendenza dei vettori riga, quindi dei $(u_a)_j$. Dati i proiettori $\mathbf{E}_a = |u_a\rangle\langle u_a|$ che realizzano le misure ortogonali, ciascuna $|u_a\rangle$ possiede un'unica scomposizione ortogonale

$$|u_a\rangle = |\tilde{\psi}_a\rangle + |\tilde{\psi}_a^\perp\rangle, \quad (2.15)$$

con $|\tilde{\psi}_a\rangle$ e $|\tilde{\psi}_a^\perp\rangle$ appartenenti a \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_A^\perp , da cui è possibile infine ricavare il POVM supposto inizialmente. Per chiarire meglio il funzionamento del teorema di Neumark, si considera l'esempio su un singolo qubit. Un POVM può essere costituito da

$$\mathbf{F}_a = \frac{2}{3} |\uparrow_{\hat{n}_a}\rangle\langle\uparrow_{\hat{n}_a}|, \quad (2.16)$$

con $a = 1, 2, 3$ e $\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + \hat{n}_3 = 0$, imponendo $\hat{n}_1 = (0, 0, 1)$, $\hat{n}_2 = (\sqrt{3}/2, 0, -1/2)$, $\hat{n}_3 = (-\sqrt{3}/2, 0, -1/2)$ (dove $\phi = 0$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2\pi/3$ e $\theta_3 = 4\pi/3$). Richiamando

$$|\theta, \varphi = 0\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

si rappresentano le $|\tilde{\psi}_a\rangle = \sqrt{2/3} |\theta_a, \varphi = 0\rangle$, per cui

$$|\tilde{\psi}_1\rangle, |\tilde{\psi}_2\rangle, |\tilde{\psi}_3\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{1/6} \\ \sqrt{1/2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{1/6} \\ \sqrt{1/2} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Secondo il teorema di Neumark, inserendo questi vettori come colonne in una matrice 2×3 , le righe sono ortonormali ed è possibile aggiungere una terza riga ortonormale alle prime due:

$$|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} \\ 0 \\ \sqrt{1/3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{1/6} \\ \sqrt{1/2} \\ -\sqrt{1/3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{1/6} \\ \sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/3} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Il qubit è diventato un "qutrit", nel senso che si è passati da uno spazio bidimensionale ad uno spazio tridimensionale. Le misure ortogonali sulla base $\{|u_a\rangle\}$ fanno sì che per un osservatore, informato solo di ciò che succede nello spazio a due dimensioni, si verifichi il POVM $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3\}$.

2.4 Misure ortogonali sul prodotto tensoriale

Risulta opportuno estendere l'azione delle misure ortogonali anche su uno spazio \mathcal{H} dato dal prodotto tensoriale tra \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B : $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ [8, p. 86]. Si considera quindi una matrice densità

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B, \quad (2.20)$$

dati \mathbf{E}_a proiettori ortogonali, la matrice di densità a seguito delle misure ortogonali sarà

$$\boldsymbol{\rho}'_{AB}(a) = \frac{\mathbf{E}_a(\boldsymbol{\rho}_A \otimes \boldsymbol{\rho}_B)\mathbf{E}_a}{\text{tr}_{AB}[\mathbf{E}_a(\boldsymbol{\rho}_A \otimes \boldsymbol{\rho}_B)]}. \quad (2.21)$$

L'osservatore in A tuttavia afferma che la sua matrice di densità coincide con la traccia parziale della matrice di AB

$$\boldsymbol{\rho}'_A(a) = \frac{\text{tr}_B[\mathbf{E}_a(\boldsymbol{\rho}_A \otimes \boldsymbol{\rho}_B)\mathbf{E}_a]}{\text{tr}_{AB}[\mathbf{E}_a(\boldsymbol{\rho}_A \otimes \boldsymbol{\rho}_B)]}. \quad (2.22)$$

Introducendo $\{|i\rangle_A\}$, $\{|\mu\rangle_B\}$ basi ortonormali di \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , esprimendo la probabilità di ottenere il risultato a si ottiene

$$\sum_{ij\mu\nu} (E_a)_{j\nu,i\mu}(\boldsymbol{\rho}_A)_{ij}(\boldsymbol{\rho}_B)_{\mu\nu} = \sum_{ij} (F_a)_{ji}(\boldsymbol{\rho}_A)_{ij}, \quad (2.23)$$

da cui segue

$$(F_a)_{ji} = \sum_{\mu\nu} (E_a)_{j\nu,i\mu}(\boldsymbol{\rho}_B)_{\mu\nu}. \quad (2.24)$$

Dall'ultima equazione si deduce che \mathbf{F}_a è *hermitiana*, *positiva* e $\sum_a \mathbf{F}_a = \mathbf{1}_{AB}$. A questo punto non resta che capire, dato \mathcal{H}_A con dimensione N ed un POVM $\{\mathbf{F}_a\}$, come scegliere un $\boldsymbol{\rho}_B$ in \mathcal{H}_B tale per cui la probabilità di uscita di a sia

$$\text{tr} \mathbf{E}_a(\boldsymbol{\rho}_A \otimes \boldsymbol{\rho}_B) = \text{tr}(\mathbf{F}_a \boldsymbol{\rho}_A), \quad (2.25)$$

la quale impone che le probabilità espresse dalle misure ortogonali siano uguali a quelle corrispondenti al POVM. Innanzitutto, dato $\mathbf{F}_a = |\tilde{\psi}_a\rangle\langle\tilde{\psi}_a|$ e grazie al teorema di Neumark, esiste

$$|u_a\rangle = |\tilde{\psi}_a\rangle + |\tilde{\psi}_a^\perp\rangle. \quad (2.26)$$

Considerando un caso semplice, da generalizzare successivamente, in cui $\dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) = n = rN$ con r intero positivo, si scompone $|\tilde{\psi}_a^\perp\rangle$ in $r - 1$ vettori N -dimensionali:

$$|\tilde{\psi}_a^\perp\rangle = |\tilde{\psi}_{1,a}^\perp\rangle \oplus |\tilde{\psi}_{2,a}^\perp\rangle \oplus \cdots \oplus |\tilde{\psi}_{r-1,a}^\perp\rangle, \quad (2.27)$$

dove $|\tilde{\psi}_{1,a}^\perp\rangle$ rappresenta le prime N componenti di $|\tilde{\psi}_a^\perp\rangle$, $|\tilde{\psi}_{2,a}^\perp\rangle$ rappresenta le seconde N componenti di $|\tilde{\psi}_a^\perp\rangle$ e così via. Dall'ortonormalità delle $|u_a\rangle$ si ricava

$$\delta_{ab} = \langle u_a | u_b \rangle = \langle \tilde{\psi}_a | \tilde{\psi}_b \rangle + \sum_{\mu=1}^{r-1} \langle \tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp | \tilde{\psi}_{\mu,b}^\perp \rangle. \quad (2.28)$$

Scegliendo un'opportuna base ortonormale $\{|\mu\rangle_B\}$ per \mathcal{H}_B , si costruisce una fase ortonormale per $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

$$|\Phi_a\rangle_{AB} = |\tilde{\psi}_a\rangle_A |0\rangle_B + \sum_{\mu=1}^{r-1} |\tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp\rangle_A |\mu\rangle_B, \quad a = 1, 2, \dots, n. \quad (2.29)$$

Supponendo uno stato iniziale per $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ del tipo

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes |0\rangle_B \langle 0|, \quad (2.30)$$

la probabilità che il risultato della misura sia a è data da

$${}_A \langle \Phi_a | \rho_{AB} | \Phi_a \rangle_{AB} = {}_A \langle \tilde{\psi}_a | \rho_A | \tilde{\psi}_a \rangle_A = \text{tr}(\mathbf{F}_a \rho_A). \quad (2.31)$$

Questo è il metodo per realizzare un POVM a partire da misure ortogonali su $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Quindi, se la misura risulta a , nel sistema AB viene preparato lo stato

$$\rho'_{AB} = |\Phi_a\rangle_{AB} \langle \Phi_a|, \quad (2.32)$$

mentre per A l'operatore densità vale

$$\begin{aligned} \rho'_A &= \text{tr}_B (|\Phi_a\rangle_{AB} \langle \Phi_a|) \\ &= |\tilde{\psi}_a\rangle_A \langle \tilde{\psi}_a| + \sum_{\mu=1}^{r-1} |\tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp\rangle_A \langle \tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp|. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Come precedentemente accennato, è necessario ampliare la realizzazione del POVM anche a casi in cui $n \neq rN$. Considerando c un'ulteriore costante intera per la quale $0 < c < N$, il caso in cui $n = rN - c$ non è particolarmente insidioso come sembra: basta solamente azzerare le ultime c componenti del vettore $|\tilde{\psi}_{r-1,a}^\perp\rangle_A$ senza perdere l'ortonormalità degli altri stati. In questo modo è necessario aggiungere c stati

$$|e_i\rangle_A |r-1\rangle_B, \quad i = N - c + 1, N - c + 2, \dots, N, \quad (2.34)$$

per costruire la base ortonormale di uno spazio $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ rN -dimensionale, dove $|e_i\rangle_A$ sono vettori ortonormali con componente 1 nella posizione i -esima.

2.5 Operatore somma

Il ruolo dell'operatore densità è quello di esprimere una serie di possibili stati in cui un sottosistema A può trovarsi. Inoltre, se questo operatore è composto da solo uno stato puro, misure ortogonali eseguite sul sistema bipartito AB può portare A da uno stato puro ad uno stato misto. Resta tuttavia incognita il come la matrice densità si evolve nel

tempo. Si suppone quindi che la matrice densità di AB sia il prodotto tensoriale tra ρ_A e $\rho_B = |0\rangle_B \langle 0|$ [8, p. 92]:

$$\rho_A \otimes |0\rangle_B \langle 0|; \quad (2.35)$$

chiaramente, la sua evoluzione temporale si esprimerà attraverso l'operatore U_{AB} come

$$U_{AB} (\rho_A \otimes |0\rangle_B \langle 0|) U_{AB}^\dagger, \quad (2.36)$$

di cui si esegue la traccia parziale su B per esprimere la matrice densità vista in A

$$\begin{aligned} \rho'_A &= \text{tr}_B \left(U_{AB} (\rho_A \otimes |0\rangle_B \langle 0|) U_{AB}^\dagger \right) \\ &= \sum_{\mu} {}_B \langle \mu | U_{AB} | 0 \rangle_B \rho_A {}_B \langle 0 | U_{AB}^\dagger | \mu \rangle_B, \end{aligned} \quad (2.37)$$

con $\{|\mu\rangle_B\}$ base ortonormale di \mathcal{H}_B . Come si può intuire, il termine ${}_B \langle \mu | U_{AB} | 0 \rangle_B$ non è altro che un operatore agente su \mathcal{H}_A , per cui si battezza

$$\mathbf{M}_\mu = {}_B \langle \mu | U_{AB} | 0 \rangle_B \quad (2.38)$$

per esprimere

$$\$(\rho_A) \equiv \rho'_A = \sum_{\mu} \mathbf{M}_\mu \rho_A \mathbf{M}_\mu^\dagger. \quad (2.39)$$

Quest'ultima mostra l'evoluzione di ρ_A in ρ'_A attraverso la mappa definita attraverso gli \mathbf{M}_μ . L'equazione prende infatti il nome di *rappresentazione dell'operatore somma*. Sfruttando le proprietà di U_{AB} , vale

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \mathbf{M}_\mu^\dagger \mathbf{M}_\mu &= \sum_{\mu} {}_B \langle 0 | U_{AB}^\dagger | \mu \rangle_B {}_B \langle \mu | U_{AB} | 0 \rangle_B \\ &= {}_B \langle 0 | U_{AB}^\dagger U_{AB} | 0 \rangle_B = \mathbf{1}_A. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Una qualsiasi mappa soddisfacente questa uguaglianza è definita *superoperatore*. È facile verificare che

- (1) ρ'_A è hermitiana: $\rho'_A = \sum_{\mu} \mathbf{M}_\mu \rho_A \mathbf{M}_\mu^\dagger = \rho_A$
- (2) ρ'_A ha traccia unitaria: $\text{tr} \rho'_A = \sum_{\mu} \text{tr}(\rho_A \mathbf{M}_\mu^\dagger \mathbf{M}_\mu) = \text{tr} \rho_A = 1$
- (3) ρ'_A è positiva: ${}_A \langle \psi | \rho'_A | \psi \rangle_A = \sum_{\mu} ({}_A \langle \psi | \mathbf{M}_\mu) \rho_A (\mathbf{M}_\mu^\dagger | \psi \rangle_A) \geq 0.$ (2.41)

Assumendo $\{|\phi\rangle_A\}$ una base per \mathcal{H}_A ed esprimendo lo stato di \mathcal{H}_{AB}

$$\mathbf{U}_{AB}(|\varphi\rangle_A \otimes |0\rangle_B) = \sum_{\mu} \mathbf{M}_{\mu} |\varphi\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B, \quad (2.42)$$

è possibile ricostruire la rappresentazione dell'operatore somma esprimendo \mathbf{U}_{AB} proprio attraverso i \mathbf{M}_{μ}

$$\$(\rho_A) = \text{tr}_B \left(\mathbf{U}_{AB}(|\varphi\rangle_A \otimes |0\rangle_B) ({}_A\langle\varphi| \otimes {}_B\langle 0|) \mathbf{U}_{AB}^{\dagger} \right) = \sum_{\mu} \mathbf{M}_{\mu} |\varphi\rangle_A {}_A\langle\varphi| \mathbf{M}_{\mu}^{\dagger}. \quad (2.43)$$

L'introduzione degli operatori \mathbf{M}_{μ} è funzionante, tuttavia è l'unica? Considerando $\mathbf{N}_{\nu} = U_{\nu\mu} \mathbf{M}_{\mu}$ e che la traccia parziale può essere eseguita su una base arbitraria di \mathcal{H}_B , scegliendo la base $\{|\nu\rangle_B = \sum_{\mu} U_{\nu\mu} |\mu\rangle_B\}$, si ottiene

$$\$(\rho_A) = \sum_{\nu} \mathbf{N}_{\nu} \rho_A \mathbf{N}_{\nu}^{\dagger}; \quad (2.44)$$

è evidente quindi che esistono più rappresentazioni per l'operatore somma. Il superoperatore risulta molto importante nel contesto dell'entanglement: se nella (2.42) è presente un solo termine, allora ρ_A evolve in uno stato puro; al contrario, in presenza di due o più termini evolve in uno stato misto. In quest'ultima casistica, se lo stato di \mathcal{H}_A era puro, significa che il sistema A entra in entanglement col sistema B a causa dell'evoluzione temporale dettata da \mathbf{U}_{AB} , in altri termini il numero di Schmidt è aumentato. Analizzando più attentamente l'operatore di evoluzione temporale, la sua rappresentazione sottoforma di operatore somma non garantisce necessariamente che questo sia unitario. Più in dettaglio, l'unitarietà è garantita dall'invertibilità, ma questa vale solamente se in (2.42) è presente un solo termine nella sommatoria. Questo significa che quando si verifica la decoerenza, non è possibile "tornare indietro nel tempo" ed invertire il processo per restaurare lo stato puro iniziale.

2.6 Linearità

In precedenza sono state menzionate le tre proprietà di un superoperatore, sebbene una sia stata leggermente trascurata: la linearità. Essa stabilisce

$$\$(\rho(\lambda)) \equiv \$(\lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2) = \lambda\$(\rho_1) + (1 - \lambda)\$(\rho_2), \quad (2.45)$$

ovvero l'evoluzione di $\rho(\lambda)$ coincide con la probabilità λ che moltiplica l'evoluzione di ρ_1 sommata con la probabilità $1 - \lambda$ moltiplicata per l'evoluzione di ρ_2 [8, p. 95]. La linearità garantisce che non si presentino apparenti paradossi. Si consideri, per esempio, un superoperatore definito tramite

$$\$(\rho) = \exp[i\pi\sigma_1 \text{tr}(\sigma_1\rho)]\rho \exp[-i\pi\sigma_1 \text{tr}(\sigma_1\rho)] \quad (2.46)$$

e un operatore densità del tipo $\rho = \frac{1}{2}\mathbf{1}$. Quest'ultimo può essere ottenuta come

$$\rho = \frac{1}{2} |\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z| + \frac{1}{2} |\downarrow_z\rangle\langle\downarrow_z|, \quad (2.47)$$

per la quale l'evoluzione temporale manda $|\uparrow_z\rangle$ in se stesso. Si suppone ora, a parità di operatore densità, di ruotare lo stato $|\downarrow_z\rangle$ in $|\uparrow_x\rangle$

$$\rho' = \frac{1}{2}|\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z| + \frac{1}{2}|\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x|. \quad (2.48)$$

Attraverso $\$$ lo stato $|\uparrow_z\rangle$ si evolve in $|\downarrow_z\rangle$. Dov'è il problema? Il problema risiede nel fatto che lo stato $|\uparrow_z\rangle$ si comporta in modo differente nei due casi (in uno evolvendo in se stesso, nell'altro evolvendo nello stato ortogonale), sebbene all'interno delle espressioni di ρ e ρ' lo stato $|\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z|$ è preservato. In un qualche modo, in questa visione, l'evoluzione di $|\uparrow_z\rangle$ dipende anche dal come viene preparato lo stato $|\downarrow_z\rangle$. Questo fenomeno prende il nome di *Telefono di Everett*, in quanto è come se i due differenti stati comunicassero fra loro. Tutto ciò mostra l'importanza della linearità di $\$$, senza la quale si otterrebbero degli assurdi.

2.7 Positività completa

Dalle proprietà (1), (2), (3) e dalla recente imposizione della linearità, sarebbe molto utile poter affermare che un qualsiasi operatore, soddisfacente queste condizioni, possa avere una *operator-sum representation*. Purtroppo però non è così. È necessario introdurre una nuova condizione, la *positività completa*[8, p. 97]. Considerando uno spazio \mathcal{H}_A con $\$A$ evoluzione unitaria su \mathcal{H}_A , $\$A$ è *completamente positiva* se per ogni estensione $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, $\$A \otimes \mathbf{1}_B$ è positiva. Con questa nuova condizione (più stringente rispetto alla (3)) e con le precedenti si garantisce che $\$$ è un superoperatore. Un esempio di come (1), (2), (3) non sono sufficienti a garantire che $\$$ sia un superoperatore è costituito dall'operatore trasposizione

$$T : \rho \rightarrow \rho^T. \quad (2.49)$$

Dati \mathcal{H}_A , \mathcal{H}_B e $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ con $\dim\mathcal{H}_A = \dim\mathcal{H}_B = N$ e dato lo stato entangled

$$\Phi_{AB} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N |i\rangle_A \otimes |i'\rangle_B, \quad (2.50)$$

con $\{|i\rangle_A\}$ base ortonormale di \mathcal{H}_A e $\{|i'\rangle_B\}$ base ortonormale di \mathcal{H}_B , l'azione di $T_A \otimes \mathbf{1}_B$ su Φ_{AB} agisce come

$$\begin{aligned} T_A \otimes \mathbf{1}_B : \rho &= |\Phi_{AB}\rangle\langle\Phi_{AB}| = \frac{1}{N} \sum_{i,j} |i\rangle_A \langle j| \otimes |i'\rangle_B \langle j'| \\ &\rightarrow \rho' = \frac{1}{N} \sum_{i,j} |j\rangle_A \langle i| \otimes |i'\rangle_B \langle j'| \end{aligned} \quad (2.51)$$

da cui l'azione di $N\rho'$ è data da

$$N\rho'(|\varphi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B) = |\psi\rangle_A \otimes |\varphi\rangle_B. \quad (2.52)$$

$N\rho'$ rappresenta l'operatore di scambio, i cui autovalori sono +1 per stati simmetrici e -1

per stati antisimmetrici. Proprio a causa di quest'ultimo autovalore, $N\rho'$ non è definita positiva, quindi T_A non è completamente positiva.

2.8 POVM come superoperatore

In precedenza, è stato introdotto il concetto di POVM per un sistema A in seguito alle misure ortogonali sul più ampio sistema AB, mentre un superoperatore descrive l'evoluzione del sistema A percepita da A stesso, ignaro del comportamento di B. Per il momento non si ha motivo di credere che ci sia un collegamento fra i due, eppure un semplice esempio mostrerebbe il contrario. Si consideri l'evoluzione di

$$|\varphi\rangle_A|0\rangle_B \rightarrow \sum_{\mu} \mathbf{M}_{\mu}|\varphi\rangle_A|\mu\rangle_B \quad (2.53)$$

secondo la rappresentazione dell'operatore somma [8, p. 98]. Introducendo gli spazi di Hilbert per A, B e AB, rispettivamente \mathcal{H}_A , \mathcal{H}_B , \mathcal{H}_{AB} ed seguendo misure ortogonali sulla base $\{|\mu\rangle_B\}$ di \mathcal{H}_B , la probabilità di osservare un autovalore μ è

$$\text{Prob}(\mu) = {}_A\langle\varphi|\mathbf{M}_{\mu}^{\dagger}\mathbf{M}_{\mu}|\varphi\rangle_A, \quad (2.54)$$

esprimibile anche attraverso ρ_A chiamando $\mathbf{F}_{\mu} = \mathbf{M}_{\mu}^{\dagger}\mathbf{M}_{\mu}$ come

$$\text{Prob}(\mu) = \text{tr}(\mathbf{F}_{\mu}\rho_A). \quad (2.55)$$

È evidente che \mathbf{F}_{μ} è positiva, hermitiana e $\sum_{\mu} \mathbf{F}_{\mu} = \mathbf{1}$, quindi $\{\mathbf{F}_{\mu}\}$ è un POVM. Definendo \mathbf{N}_{μ} tale che $\mathbf{N}_{\mu}\mathbf{N}_{\mu} = \mathbf{F}_{\mu}$, segue

$$\rho \rightarrow \sum_{\mu} \mathbf{N}_{\mu}\rho\mathbf{N}_{\mu} \quad (2.56)$$

Il POVM, quindi, soddisfa le proprietà di un superoperatore e ad esso corrisponde un certo \mathbf{U}_{AB} tale che

$$\mathbf{U}_{AB} : |\varphi\rangle_A \otimes |0\rangle_B \rightarrow \sum_{\mu} \mathbf{N}_{\mu}|\varphi\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B. \quad (2.57)$$

In questo caso, se a seguito della misura viene preparato

$$\rho'_A = \mathbf{N}_{\mu}\rho_A\mathbf{N}_{\mu} \quad (2.58)$$

è indifferente affermare che la causa di ciò sia stata la misura stessa o l'evoluzione unitaria dettata da \mathbf{U}_{AB} .

2.9 Il teorema di rappresentazione di Kraus

Grazie all'hermitianità e all'unitarietà della traccia di ρ_A , insieme alla positività completa, è possibile ottenere una rappresentazione per l'operatore somma, detta anche *rappresentazione di Kraus* [8, p. 100]. Ora è arrivato il momento di fornire la dimostrazione, utilizzando

il cosiddetto "relative state method". Si considera lo stato

$$|\tilde{\psi}\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^N |i\rangle_A \otimes |i'\rangle_B \quad (2.59)$$

con $\{|i\rangle_A\}$ base ortonormale di A ($\{|i'\rangle_B\}$ è ottenuto tramite la decomposizione di Schmidt), tale per cui $\langle\tilde{\psi}|\tilde{\psi}\rangle = N$. Notando che per ogni

$$|\varphi\rangle_A = \sum_i a_i |i\rangle_A \quad (2.60)$$

esiste un vettore $|\varphi^*\rangle_B$ tale per cui

$$|\varphi\rangle_A = {}_B\langle\varphi^*|\tilde{\psi}\rangle_{AB}, \quad (2.61)$$

la mappa che associa ad ogni $|\varphi\rangle_A$ il corrispondente $|\varphi^*\rangle_B$ è antilineare. Si dice in questo caso che $|\varphi\rangle_A$ è lo *stato relativo* dell'*indice relativo* $|\varphi^*\rangle_B$. Dato l'operatore M_A agente in \mathcal{H}_A , vale

$$(M_A \otimes \mathbf{1}_B)|\tilde{\psi}\rangle_{AB} = \sum_i M_A|i\rangle_A \otimes |i'\rangle_B, \quad (2.62)$$

da cui è evidente che proiezioni ortogonali su \mathcal{H}_B entangled con \mathcal{H}_A preparano lo stato $|\varphi\rangle_A$ di A se il risultato della misura in B è $|\varphi^*\rangle_B$, secondo

$${}_B\langle\varphi^*|(M_A \otimes \mathbf{1}_B)|\tilde{\psi}\rangle_{AB} = M_A|\varphi\rangle_A. \quad (2.63)$$

Si nota che è indifferente effettuare prima le misure ortogonali su \mathcal{H}_B e poi applicare l'operatore M_A oppure il contrario. Ora si vuole dimostrare che, dato \mathcal{S}_A soddisfacente le condizioni già elencate, esiste sempre una rappresentazione dell'operatore somma. Siccome vale la proprietà (3') (completa positività), $\mathcal{S}_A \otimes \mathbf{1}_B$ è sicuramente positivo, per cui evolve matrici di densità in matrici di densità come

$$(\mathcal{S}_A \otimes I_B)|\psi\rangle_{AB} {}_{AB}\langle\psi| = \sum_{\mu} q_{\mu} |\Phi_{\mu}\rangle_{AB} {}_{AB}\langle\Phi_{\mu}|, \quad (2.64)$$

dove $\tilde{\rho}_{AB} = |\psi\rangle_{AB} {}_{AB}\langle\psi|$ è uno stato puro e $\tilde{\rho}'_{AB}$ è una combinazione di stati puri ($\langle\tilde{\Phi}_{\mu}|\tilde{\Phi}_{\mu}\rangle = N$). Attraverso il relative state method discusso precedentemente,

$$\mathcal{S}_A(|\varphi\rangle_A {}_A\langle\varphi|) = {}_B\langle\varphi^*|(\mathcal{S}_A \otimes I_B)(|\tilde{\psi}\rangle_{AB} {}_{AB}\langle\tilde{\psi}|)|\varphi^*\rangle_B = \sum_{\mu} q_{\mu} {}_B\langle\varphi^*|\tilde{\Phi}_{\mu}\rangle_{AB} {}_{AB}\langle\tilde{\Phi}_{\mu}|\varphi^*\rangle_B. \quad (2.65)$$

Dato l'operatore M_{μ} su \mathcal{H}_A

$$M_{\mu} : |\varphi\rangle_A \rightarrow \sqrt{q_{\mu}} \langle\varphi^*|\tilde{\Phi}_{\mu}\rangle_{AB}, \quad (2.66)$$

si è costruita una corrispondenza tra \mathcal{S}_A e $\{\mathbf{M}_\mu\}$:

$$\mathcal{S}_A(|\varphi\rangle_A \langle\varphi|) = \sum_{\mu} M_{\mu} |\varphi\rangle_A \langle\varphi| M_{\mu}^{\dagger} \quad (2.67)$$

per uno stato puro. Esprimendo ρ_A come sommatoria di stati puri, vale

$$\mathcal{S}_A(\rho_A) = \sum_{\mu} M_{\mu} \rho_A M_{\mu}^{\dagger}. \quad (2.68)$$

La rappresentazione di Kraus resta tuttavia ambigua, esiste infatti un operatore unitario $\mathbf{U}_{\mu a}$ tale per cui $\mathbf{N}_a = \mathbf{M}_{\mu} \mathbf{U}_{\mu a}$ che preserva \mathcal{S}_A , quindi $\tilde{\rho}'_A$.

La dimostrazione appena fornita descrive il come costruire gli operatori $\{\mathbf{M}_{\mu}\}$ a partire dall'insieme di stati $|\varphi\rangle_A \langle\varphi|$, tuttavia è possibile percorrere la strada inversa: se

$$\mathcal{S}_A(|i\rangle_A \langle j|) = \sum_{\mu} \mathbf{M}_{\mu} |i\rangle_A \langle j| \mathbf{M}_{\mu}^{\dagger}, \quad (2.69)$$

allora

$$(\mathcal{S}_A \otimes \mathbf{I}_B)(|\tilde{\psi}\rangle_{AB} \langle\tilde{\psi}|) = \sum_{i,j} (\mathbf{M}_{\mu} |i\rangle_A \langle i'|_B) ({}_A \langle j| \mathbf{M}_{\mu}^{\dagger} |j'\rangle) = \sum_{\mu} q_{\mu} |\tilde{\Phi}_{\mu}\rangle_{AB} \langle\tilde{\Phi}_{\mu}|, \quad (2.70)$$

con $\sqrt{q_{\mu}} |\tilde{\Phi}_{\mu}\rangle_{AB} = \sum_i \mathbf{M}_{\mu} |i\rangle_A \langle i'|_B$.

L'operatore unitario \mathcal{S}_{AB} non è altro quindi che un operatore unitario \mathbf{U}_{AB} tale per cui

$$\mathbf{U}_{AB} : |\psi\rangle_A \otimes |0\rangle_B \rightarrow \sum_{\mu} |\varphi\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B. \quad (2.71)$$

Questo risultato ha un significato profondo: se il sistema A interagisce con la controparte B, un generico stato puro di A evolve in una miscela di stati puri, quindi in una matrice densità, portando A e B ad essere entangled anche se, inizialmente, non lo erano.

2.10 Canali quantistici

Si mostra ora il comportamento di alcuni superoperatori, detti "canali quantistici", in casi specifici. In particolar modo, si vuole discutere il come l'informazione si propaghi nel tempo se soggetta ad errori che possono alterarla. Questo è quello che succede usualmente quando un sistema interagisce con l'ambiente.

Canale di depolarizzazione

Riconsiderando il qubit con base ortonormale $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, il canale di depolarizzazione permette o che non si verifichi alcun errore con probabilità $1 - p$ (informazione preservata), o che si verifichi un errore con probabilità p (informazione alterata) [8, p. 104]. Nello specifico, sono tre i tipi di errori che possono verificarsi:

1. Errore *Bit flip*:

- $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$
- $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$

$$\circ |\psi\rangle \rightarrow \sigma_1|\psi\rangle, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Errore *Phase flip*:

- $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$
- $|1\rangle \rightarrow -|1\rangle$

$$\circ |\psi\rangle \rightarrow \sigma_3|\psi\rangle, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Entrambi:

- $|0\rangle \rightarrow i|1\rangle$
- $|1\rangle \rightarrow -i|0\rangle$

$$\circ |\psi\rangle \rightarrow \sigma_2|\psi\rangle, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

L'evoluzione unitaria U_{AE} di un raggio in $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E$ (per il momento si sostituisce il sistema B con il sistema *Environment* E) è

$$\begin{aligned} U_{AE} : |\psi\rangle_A \otimes |0\rangle_E \\ \rightarrow \sqrt{1-p}|\psi\rangle_A \otimes |0\rangle_E + \sqrt{\frac{p}{3}} [\sigma_1|\psi\rangle_A \otimes |1\rangle_E \\ + \sigma_2|\psi\rangle_A \otimes |2\rangle_E + \sigma_3|\psi\rangle_A \otimes |3\rangle_E], \end{aligned} \quad (2.72)$$

con $\{|\mu\rangle_E\}$ base di \mathcal{H}_E per $i = 0, 1, 2, 3$ e $\dim \mathcal{H}_E = 4$. Grazie alla rappresentazione di Kraus è facile individuare i $\{M_\mu\}$:

$$M_0 = \sqrt{1-p} \mathbf{1}, \quad M_1 = \sqrt{\frac{p}{3}} \sigma_1, \quad M_2 = \sqrt{\frac{p}{3}} \sigma_2, \quad M_3 = \sqrt{\frac{p}{3}} \sigma_3, \quad (2.73)$$

da cui si ricava l'evoluzione di ρ come

$$\rho \rightarrow \rho' = (1-p)\rho + \frac{p}{3} (\sigma_1\rho\sigma_1 + \sigma_2\rho\sigma_2 + \sigma_3\rho\sigma_3). \quad (2.74)$$

Ora si considera A come un qubit entangled col qubit B. Introducendo i quattro stati

massimamente in entangled

$$\begin{aligned}
|\phi^+\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}), \\
|\phi^-\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{AB} - |11\rangle_{AB}), \\
|\psi^+\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{AB} + |10\rangle_{AB}), \\
|\psi^-\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{AB} - |10\rangle_{AB}),
\end{aligned} \tag{2.75}$$

si mostra l'evoluzione di uno di questi stati, $|\phi^+\rangle_{AB}$, in modo che sia soggetto eventualmente ad errori:

$$|\phi^+\rangle\langle\phi^+| \rightarrow (1-p)|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + \frac{p}{3}(|\psi^+\rangle\langle\psi^+| + |\psi^-\rangle\langle\psi^-| + |\phi^-\rangle\langle\phi^-|). \tag{2.76}$$

Il caso in cui $p = \frac{3}{4}$,

$$|\phi^+\rangle\langle\phi^+| = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{AB} \tag{2.77}$$

e lo stato in \mathcal{H}_A evolve portandosi appresso della "spazzatura", ovvero perdendo in parte l'informazione originale:

$$|\varphi\rangle_A \langle\varphi| \rightarrow {}_B\langle\varphi^*| 2 \left(\frac{1}{4}\mathbf{1}_{AB} \right) |\varphi^*\rangle_B = \frac{1}{2}\mathbf{1}_A. \tag{2.78}$$

Si definisce la *fedeltà quantistica* F_e

$$F_e = \langle\phi^+|\rho'|\phi^+\rangle, \tag{2.79}$$

che simboleggia il quanto fedelmente è stata mantenuta l'informazione iniziale, quindi quanto "bene" la matrice di densità finale si avvicina alla matrice di densità iniziale. Nell'esempio precedente, $F_e = 1 - p$. Quanto descritto fino ad ora ha una sua rappresentazione nello spazio della sfera di Bloch. Ricordando la formula generale per un operatore densità

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\sigma}) \tag{2.80}$$

si considera per semplicità $\vec{\mathbf{P}} = (0, 0, P_3)$. Siccome $\sigma_1\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_3 = \sigma_2\sigma_3\sigma_2$ e $\sigma_3\sigma_3\sigma_3 = +\sigma_3$, ρ' evolve secondo

$$\rho' = \left(1 - p + \frac{p}{3}\right) \frac{1}{2}(\mathbf{1} + P_3\sigma_3) + \frac{2p}{3} \frac{1}{2}(\mathbf{1} - P_3\sigma_3). \tag{2.81}$$

Sviluppando i calcoli, si giunge a $P'_3 = (1 - \frac{4}{3}p)P_3$, generalizzabile a $\vec{\mathbf{P}}' = (1 - \frac{4}{3}p)\vec{\mathbf{P}}$. L'azione di un errore di tipo *bit flip* porta la polarizzazione dello spin nella sfera di Bloch a contrarsi di un termine $(1 - \frac{4}{3}p)$.

Canale di smorzamento di fase

Una rappresentazione unitaria di tale canale è data da

$$\begin{aligned} |0\rangle_A|0\rangle_E &\rightarrow \sqrt{1-p}|0\rangle_A|0\rangle_E + \sqrt{p}|0\rangle_A|1\rangle_E, \\ |1\rangle_A|0\rangle_E &\rightarrow \sqrt{1-p}|1\rangle_A|0\rangle_E + \sqrt{p}|1\rangle_A|2\rangle_E, \end{aligned} \quad (2.82)$$

in cui viene eventualmente alterato solo il secondo qubit, in modo che questo subisca uno scattering da uno stato $|n\rangle$ ad uno $|n+1\rangle$ [8, p. 108]. Gli operatori di Kraus in questo caso valgono

$$M_0 = \sqrt{1-p} \mathbf{1}, \quad M_1 = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.83)$$

da cui deriva la rappresentazione dell'operatore somma

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\rho) &= M_0 \rho M_0^\dagger + M_1 \rho M_1^\dagger + M_2 \rho M_2^\dagger \\ &= (1-p)\rho + p \begin{pmatrix} \rho_{00} & 0 \\ 0 & \rho_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{00} & (1-p)\rho_{01} \\ (1-p)\rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Definendo Γ la probabilità di scattering per unità di tempo, con $p = \Gamma\Delta t \ll 1$, passato un certo $n\Delta t$ l'evoluzione temporale sarà descritta da \mathcal{S}^n ed i termini diagonali vengono soppressi secondo $(1-p)^n = (1-\Gamma\Delta t)^{t/\Delta t} \rightarrow e^{-\Gamma t}$ per $\Delta t \rightarrow 0$. Questo implica l'evoluzione dell'operatore densità in un nuovo operatore i cui termini diagonali sono tendenti a zero, quindi evolve in uno stato incoerente. Un'interpretazione di carattere fisico potrebbe essere la seguente: si considerano dei microscopici granelli di sabbia che scatteranno con molteplici fotoni e lo stato dei granelli è descritto dallo stato coerente $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + |-x\rangle)$ (con $|x\rangle, |-x\rangle$ autostati della posizione). Sarebbe impensabile tracciare tutti gli urti che avvengono in un certo tempo tra i fotoni ed i granelli, per questo motivo si ricorre alla statistica. Dopo un certo tempo $t \propto \Gamma^{-1}$ i termini diagonali della matrice densità saranno trascurabili e lo stato coerente si sarà evoluto in uno stato incoerente, così che questi non possano più interferire tra loro.

Canale di smorzamento dell'ampiezza

Il modello su cui si fonda il canale di smorzamento dell'ampiezza è quello di un oscillatore armonico quantistico e del suo diseccitamento, con conseguente rilascio di un fotone [8, p. 111]. Si denota $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$ base ortonormale per \mathcal{H}_A , con $|0\rangle_A$ rappresentante l'oscillatore nello stato non eccitato e $|1\rangle_A$ per l'oscillatore eccitato, mentre $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$ denotano rispettivamente gli stati dell'ambiente in assenza di un fotone o con fotone. La rappresentazione unitaria per il canale è

$$\begin{aligned}
|0\rangle_A|0\rangle_E &\rightarrow |0\rangle_A|0\rangle_E \\
|1\rangle_A|0\rangle_E &\rightarrow \sqrt{1-p}|1\rangle_A|0\rangle_E + \sqrt{p}|0\rangle_A|1\rangle_E.
\end{aligned} \tag{2.85}$$

La prima equazione rappresenta un oscillatore A non eccitato accoppiato con l'ambiente caratterizzato dall'assenza del fotone (non può far altro che evolversi in se stesso). La seconda equazione rappresenta un oscillatore eccitato con ambiente senza fotone, che si diseccita con probabilità p , oppure che mantiene il proprio stato con probabilità $1-p$. Effettuando la traccia parziale sul sistema E, si ottengono gli operatori di Kraus

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.86}$$

dove \mathbf{M}_0 permette la transizione di un sistema in se stesso (preserva lo stato), mentre \mathbf{M}_1 rappresenta la diseccitazione dell'oscillatore con rilascio del fotone. Dato $p = \Gamma\Delta t$ e $t = n\Delta t$, la matrice densità si evolve secondo

$$\rho \rightarrow \mathcal{S}(\rho) = M_0\rho M_0^\dagger + M_1\rho M_1^\dagger = \begin{pmatrix} \rho_{00} + p\rho_{11} & \sqrt{1-p}\rho_{01} \\ \sqrt{1-p}\rho_{10} & (1-p)\rho_{11} \end{pmatrix}. \tag{2.87}$$

Per $t \rightarrow \infty$, la matrice $\mathcal{S}(\rho)$ tende a

$$\mathcal{S}(\rho) \rightarrow \begin{pmatrix} \rho_{00} + \rho_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.88}$$

L'oscillatore armonico quantistico, per tempi molto grandi, tende ad assumere lo stato diseccitato. Si noti come lo stato finale è puro, a prescindere dalla forma di ρ . Se nei casi precedenti si è evidenziato come stati puri spesso si evolvono in stati misti, è vero che a volte persino gli stati misti possono diventare stati puri, cancellando così la condizione di entanglement.

2.11 L'evoluzione Markoviana

Alla base di un sistema quantistico giace l'equazione di Schrödinger, equazione differenziale che descrive la dinamica del sistema attraverso l'evoluzione dello stato $|\psi\rangle$. Da essa deriva l'operatore unitario di evoluzione temporale \mathbf{U} , già ampiamente discusso nei paragrafi precedenti. Allo stesso modo, sarebbe utile trovare, nel formalismo hamiltoniano, un'equazione differenziale che permetta di descrivere l'evoluzione di una matrice densità ρ se il sistema non evolve unitariamente [8, p. 114]. Non sempre è possibile identificare tale equazione differenziale, tuttavia nel caso specifico di sistemi quantistici detti *Markoviani* lo è. Un sistema Markoviano è tale che $\rho(t+dt)$ è determinata a partire da $\rho(t)$; in altri termini si dice che $\rho(t)$ è *locale*. L'evoluzione non unitaria di una matrice ρ_A in \mathcal{H}_A è sempre estendibile ad una evoluzione unitaria in $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E$, tuttavia la sola conoscenza di ρ_A non

è sufficiente per garantire la località ed è necessaria la conoscenza di ρ_{AB} per $t = 0$. In realtà, $\rho_A(t + dt)$ non solo dipende da $\rho_A(t)$, ma anche da ρ_A per tempi precedenti. Questo è dovuto al fatto che l'ambiente tiene traccia della possibile informazione che fluttua dal sistema A al sistema E e viceversa. Il tempo che l'informazione impiega per essere cancellata definitivamente anche dal sistema E verrà denominata Δt_{res} (res indica reservoir). Al contempo, in questo modello si vogliono escludere tutte le alte frequenze del moto all'interno della dinamica, per cui $\omega \gg \Delta t_{coarse}^{-1}$. L'ultimo intervallo temporale da definire è quello in cui si svolge la dinamica del sistema Δt_{damp} . L'approssimazione markoviana si applica se $\Delta t_{damp} \gg \Delta t_{coarse} \gg \Delta t_{res}$.

2.12 La Lindbladiana

L'evoluzione unitaria per un operatore è descritta dall'equazione di Schrödinger [8, p. 117]

$$\dot{\rho} = -i[\mathbf{H}, \rho]. \quad (2.89)$$

Generalizzando per un'evoluzione markoviana non unitaria si utilizza l'operatore lindbladiano \mathcal{L} nel contesto

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}[\rho], \quad (2.90)$$

la cui soluzione è $\rho(t) = e^{\mathcal{L}t}[\rho(0)]$. Per ottenere la lindbladiana secondo (2.90), si considera l'evoluzione data dalla rappresentazione di Kraus

$$\rho(t) = \sum_{\mu} \mathbf{M}_{\mu}(t) \rho(0) \mathbf{M}_{\mu}^{\dagger}(t). \quad (2.91)$$

In termini infinitesimali,

$$\begin{aligned} \rho(dt) &= \rho(0) + O(dt) \\ \mathbf{M}_{\mu} &= \sqrt{dt} \mathbf{L}_{\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots \\ \mathbf{M}_0 &= \mathbf{1} + (-i\mathbf{H} + \mathbf{K})dt \end{aligned} \quad (2.92)$$

con \mathbf{H} , \mathbf{K} hermitiane. Gli $\{\mathbf{M}_{\mu}\}$ descrivono i salti quantistici possibili del sistema con probabilità di ordine dt . Utilizzando

$$1 = \sum_{\mu} \mathbf{M}_{\mu}^{\dagger} \mathbf{M}_{\mu} = \mathbf{1} + dt(2\mathbf{K} + \sum_{\mu>0} \mathbf{L}_{\mu}^{\dagger} \mathbf{L}_{\mu}) \quad (2.93)$$

nella (2.39) si ottiene la Lindbladiana

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}[\rho] = -i[\mathbf{H}, \rho] + \sum_{\mu>0} \left(\mathbf{L}_{\mu} \rho \mathbf{L}_{\mu}^{\dagger} - \frac{1}{2} \mathbf{L}_{\mu}^{\dagger} \mathbf{L}_{\mu} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{L}_{\mu}^{\dagger} \mathbf{L}_{\mu} \right), \quad (2.94)$$

che descrive la più generale evoluzione Markoviana in termini operatoriali, dove gli $\{\mathbf{L}_{\mu}\}$ sono detti *operatori lindbladiani*.

3 Entanglement quantistico

3.1 Informazione quantistica nascosta

Mentre nei capitoli precedenti si sono stabilite le basi matematiche per descrivere il mondo quantistico, con accenno ad autostati, operatori unitari e matrici di densità, in questo capitolo si mira a consolidare le informazioni sull'entanglement quantistico, approfondendolo anche grazie a degli esempi pratici (in linea di principio).

Classicamente, il bit è portavoce dell'informazione, espressa tramite un numero binario. Chiaramente, per codificare messaggi complessi, è necessario considerare due o più bit. Quantisticamente, il bit è sostituito dal qubit, complicando notevolmente le modalità di estrapolazione dell'informazione. Si consideri, a questo scopo, lo stato $|\phi^+\rangle_{AB}$ nello spazio \mathcal{H}_{AB} generato da due qubit A e B con relativi spazi \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B [8, p. 139]

$$|\phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}). \quad (3.1)$$

Questo stato è massimamente entangled, tantochè la matrice densità in \mathcal{H}_A risulta

$$\rho_A = \text{tr}_B(|\phi^+\rangle_{AB}\langle\phi^+|_{AB}) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_A. \quad (3.2)$$

Come precedentemente descritto, una tale matrice di densità descrive uno spin che possiede probabilità 1/2 di essere up o down indipendentemente dalla direzione \hat{n} di misurazione. Inoltre, la (3.2) non permette di risalire al quale stato è stato preparato per ottenerla. In altri termini, se si considerasse la base $\{|\phi^+\rangle, |\phi^-\rangle, |\psi^+\rangle, |\psi^-\rangle\}$ per lo spazio \mathcal{H}_{AB} con

$$\begin{aligned} |\phi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \\ |\psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle), \end{aligned} \quad (3.3)$$

la matrice di densità ridotta risulterebbe la stessa anche per tutti questi stati massimamente entangled. Questo significa che, effettuando misure locali su A o B, è impossibile acquisire dell'informazione relativa allo stato $|\phi^+\rangle_{AB}$. Per questo motivo l'informazione si dice *nascosta*.

Apparentemente, l'unico modo per estrapolare l'informazione sui due qubit sarebbe quello di effettuare una misura non locale su \mathcal{H}_{AB} . Localmente, tuttavia, è possibile modificare lo stato preservando l'entanglement. Applicando infatti l'operatore σ_1 , viene modificata la *parità* del qubit ($|\phi\rangle \leftrightarrow |\psi\rangle$), mentre l'applicazione di σ_3 cambia la fase relativa dello stato ($+\leftrightarrow -$). In questo modo la matrice di densità è preservata e stati massimamente entangled sono trasformati in altri stati massimamente entangled. In definitiva, se si volesse determinare l'informazione relativa ai due qubit A e B, ovvero parità e fase dello stato, è necessario che questi qubit si trovino vicini tra loro, così da eseguire una misura non locale. Com'è possibile, quindi, ottenere fase e parità? Una maniera efficace consiste nell'applicare una trasformazione che ruoti la base della (3.3) in una nuova base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. La trasformazione prevede la composizione dell'operatore \mathbf{H} (*trasformazione di Hadamard*),

tale per cui

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 + \sigma_3), \quad (3.4)$$

con l'operatore logico $XOR : |a, b\rangle \rightarrow |a, a \oplus b\rangle$. L'operatore H agisce come una rotazione attorno all'asse $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{z})$ a meno di una fase. Vale infatti

$$R(\hat{n}, \theta) = \mathbf{1} \cos \frac{\theta}{2} + i\hat{n} \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 + \sigma_3) = iH. \quad (3.5)$$

L'azione di questi due operatori sugli stati descritti da (3.3) è

$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle \rightarrow |\phi^+\rangle, \\ |01\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle \rightarrow |\psi^+\rangle, \\ |10\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle \rightarrow |\phi^-\rangle, \\ |11\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|1\rangle \rightarrow |\psi^-\rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Invertendo tale trasformazione, si ottiene la trasformazione desiderata

$$\begin{aligned} |\phi^+\rangle &\rightarrow |00\rangle \\ |\psi^+\rangle &\rightarrow |01\rangle \\ |\phi^-\rangle &\rightarrow |10\rangle \\ |\psi^-\rangle &\rightarrow |11\rangle. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Effettuando quindi misure ortogonali sulla base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, si risale alle informazioni sullo stato dei qubit.

3.2 Variabili nascoste e disuguaglianze di Bell

Una delle proprietà più sconvolgenti della meccanica quantistica è la sua imprevedibilità: sebbene a volte essa sia deterministica, la maggior parte delle volte è necessario ricorrere alla probabilità [8, 144]. Non si riuscirebbe ad esprimere il risultato di una misura senza descrivere un insieme di valori che si verificano con una certa probabilità. In passato è stato piuttosto complicato accettare questa natura probabilistica, anche per fisici del calibro di Albert Einstein. Einstein era a conoscenza dei risultati della meccanica quantistica, tuttavia faticava ad accettarli. Lui affermava convintamente che la natura è deterministica e che la meccanica quantistica deve essere incompleta: nella sua formulazione, mancherebbe un set di variabili $\{\lambda\}$, chiamate *variabili nascoste*, che avrebbero dovuto prevedere l'esito di una qualsiasi misura, senza dover ricorrere alla probabilità. Per esempio, preparato lo stato di spin $|\uparrow_z\rangle$, lo spin lungo un asse formante un angolo θ con \hat{z} è dipendente da una variabile

nascosta $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |\uparrow_\theta\rangle, \text{ per } 0 \leq \lambda \leq \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ |\downarrow_\theta\rangle, \text{ per } \cos^2 \frac{\theta}{2} \leq \lambda \leq 1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Inoltre, sempre secondo Einstein, l'entanglement stesso violava le leggi della fisica, in quanto permetterebbe di trasmettere informazione a velocità superiori di quella della luce, fatto che prese il nome di *Paradosso EPR* [2].

Negli anni a seguire, il primo fisico che evidenziò l'inconsistenza di una eventuale teoria a variabili nascoste fu John Stewart Bell. Il teorema di Bell [6] contiene infatti una disuguaglianza che, per mostrare l'esistenza di variabili nascoste, dovrebbe essere verificata. In realtà, le disuguaglianze costruibili sono molteplici. Si consideri lo stato $|\psi^-\rangle$ dotato della seguente proprietà

$$\langle \psi^- | (\sigma_i^{(A)} + \sigma_j^{(B)}) | \psi^- \rangle = 0. \quad (3.9)$$

Si calcola il valore di aspettazione

$$\langle \psi^- | (\boldsymbol{\sigma}^{(A)} \cdot \hat{\mathbf{n}})(\boldsymbol{\sigma}^{(B)} \cdot \hat{\mathbf{m}}) | \psi^- \rangle \quad (3.10)$$

utilizzando la (3.9),

$$-\langle (\boldsymbol{\sigma}^{(A)} \cdot \hat{\mathbf{n}})(\boldsymbol{\sigma}^{(A)} \cdot \hat{\mathbf{m}}) \rangle = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{m}} = -\cos \theta, \quad (3.11)$$

con θ angolo compreso tra $\hat{\mathbf{m}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$. Per calcolare la probabilità di ottenere un certo risultato a seguito delle misure su $\hat{\mathbf{m}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$, si utilizzano gli operatori di proiezione sullo spin up (+) e down (-) $\mathbf{E}(\hat{\mathbf{n}}, \pm)$, da cui

$$\begin{aligned} \langle \psi^- | \mathbf{E}^{(A)}(\hat{\mathbf{n}}, +) \mathbf{E}^{(B)}(\hat{\mathbf{m}}, +) | \psi^- \rangle &= \frac{1}{4}(1 - \cos \theta) \\ \langle \psi^- | \mathbf{E}^{(A)}(\hat{\mathbf{n}}, -) \mathbf{E}^{(B)}(\hat{\mathbf{m}}, -) | \psi^- \rangle &= \frac{1}{4}(1 - \cos \theta) \\ \langle \psi^- | \mathbf{E}^{(A)}(\hat{\mathbf{n}}, +) \mathbf{E}^{(B)}(\hat{\mathbf{m}}, -) | \psi^- \rangle &= \frac{1}{4}(1 + \cos \theta) \\ \langle \psi^- | \mathbf{E}^{(A)}(\hat{\mathbf{n}}, -) \mathbf{E}^{(B)}(\hat{\mathbf{m}}, +) | \psi^- \rangle &= \frac{1}{4}(1 + \cos \theta). \end{aligned} \quad (3.12)$$

La probabilità di ottenere lo stesso risultato per entrambi gli spin è $P_s = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$, mentre per risultati diversi $P_o = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$. Si identificano gli assi

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{n}}_1 &= (0, 0, 1) \\
\hat{\mathbf{n}}_2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right) \\
\hat{\mathbf{n}}_3 &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right),
\end{aligned} \tag{3.13}$$

di cui si considerano \hat{n}_1 e \hat{n}_2 su cui effettuare le misure (un osservatore in B misura su $-\hat{n}_1$, un osservatore in A misura su \hat{n}_2), ottenendo $P_s = \frac{1}{4}$. Una teoria a variabili nascoste dovrebbe prevedere che

$$P_{same}(1, 2) + P_{same}(1, 3) + P_{same}(2, 3) \geq 1, \tag{3.14}$$

in quanto, essendo solamente due i risultati possibili della misura su ogni asse con tre assi a disposizione, è garantito che ci siano almeno due assi che presentano lo stesso risultato. Tuttavia, la meccanica quantistica prevede un risultato diverso:

$$P_{same}(1, 2) + P_{same}(1, 3) + P_{same}(2, 3) = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1. \tag{3.15}$$

Il problema della teoria a variabili nascoste sorge proprio nell'assunzione che lo spin sia determinato per ogni asse anche prima della misura. In questo modo, la disequazione (3.14) è inevitabile. La meccanica quantistica invece afferma che lo spin non è determinato fino al momento in cui si esegue una misura su un particolare asse, così che non necessariamente la somma delle probabilità $P_s(ij)$ sia almeno 1. La differenza fondamentale è che mentre le variabili nascoste permettono di considerare contemporaneamente risultati di esperimenti non eseguiti simultaneamente, la meccanica quantistica lo vieta in assoluto.

3.3 Fotoni

Il fenomeno dell'entanglement è verificabile anche attraverso dei fotoni, sebbene non siano degli spinori [8, p. 148]. Per il momento l'obiettivo è ottenere un risultato che verrà utilizzato più avanti nella disuguaglianza di Bell.

Si considerano due fotoni emessi in direzioni opposte con momento angolare e parità nulle. In generale, gli autostati dell'elicità si descrivono attraverso gli stati $|x\rangle$ e $|y\rangle$ di polarizzazione orizzontale e verticale,

$$\begin{aligned}
|+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle) \\
|-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i|x\rangle + |y\rangle).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Per il sistema AB, gli stati

$$\begin{aligned}
|+\rangle_A |-\rangle_B \\
|-\rangle_A |+\rangle_B
\end{aligned} \tag{3.17}$$

sono invarianti per rotazione rispetto a z. Tenendo conto che una trasformazione per riflessione rispetto al piano $y-z$ manda $|x\rangle \rightarrow -|x\rangle$, l'autostato della parità con $\mathbf{J}_z = 0$ e parità positiva è

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{\sqrt{2}}(|+\rangle_A|-\rangle_B + |-\rangle_A|+\rangle_B) \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}}(|xx\rangle_{AB} + |yy\rangle_{AB}) = |\phi^+\rangle_{AB}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Detti $|x(\theta)\rangle = (\cos\theta, \sin\theta)$ e $|y(\theta)\rangle = (-\sin\theta, \cos\theta)$ autostati della polarizzazione lungo assi ruotati di un angolo θ rispetto ad x e y , si costruisce un operatore analogo a $\vec{\sigma} \cdot \hat{n}$ per la polarizzazione,

$$\tau(\theta) = |x(\theta)\rangle\langle x(\theta)| - |y(\theta)\rangle\langle y(\theta)|, \quad (3.19)$$

da cui si calcola il valore di aspettazione relativo alla misura della polarizzazione per il fotone A e per il fotone B

$$\begin{aligned} & \langle \Phi^+ | \tau^{(A)}(\theta_1) \tau^{(B)}(\theta_2) | \Phi^+ \rangle_{AB} = \\ & = \langle \Phi^+ | \tau^{(A)}(0) \tau^{(B)}(\theta_2 - \theta_1) | \Phi^+ \rangle_{AB} \\ & = \frac{1}{2} {}_B \langle x | \tau^{(B)}(\theta_2 - \theta_1) | x \rangle_B - \frac{1}{2} {}_B \langle y | \tau^{(B)}(\theta_2 - \theta_1) | y \rangle_B \\ & = \cos^2(\theta_2 - \theta_1) - \sin^2(\theta_2 - \theta_1) = \cos[2(\theta_2 - \theta_1)]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Per gli spinori si sarebbe ottenuto un risultato simile a meno del fattore 2 sull'argomento del coseno.

3.4 Altre disuguaglianze di Bell

Il risultato precedente è ora utile per ricavare un'ulteriore disuguaglianza ancor più generale [8, p. 150]. Dati due fotoni polarizzati A e B correlati tra loro, si possono scegliere due assi, α e α' , lungo cui misurare la polarizzazione attraverso l'operatore τ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} & = \tau^{(A)}(\alpha) \\ \mathbf{a}' & = \tau^{(A)}(\alpha'). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Lo stesso vale per B con gli assi β e β' ,

$$\begin{aligned} \mathbf{b} & = \tau^{(B)}(\beta) \\ \mathbf{b}' & = \tau^{(B)}(\beta'). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Supponendo, per il momento, che $\alpha' = \beta' = \gamma$, la meccanica quantistica prevede che \mathbf{a}' e \mathbf{b}' sono la stessa osservabile, d'ora in poi chiamata con \mathbf{c} , in accordo con

$$\langle \mathbf{a}' \mathbf{b}' \rangle = \langle \tau^{(A)}(\gamma) \tau^{(B)}(\gamma) \rangle = 1. \quad (3.23)$$

Si suppone che $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ siano tre variabili che possano assumere solamente i valori ± 1 (siccome lo spin può essere solamente up o down), da cui si può verificare

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{a}\mathbf{b}(1 - \mathbf{b}\mathbf{c}). \quad (3.24)$$

Integrando sulla ipotetica variabile nascosta, si ottiene

$$\langle \mathbf{a}\mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{a}\mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}\mathbf{b}(1 - \mathbf{b}\mathbf{c}) \rangle, \quad (3.25)$$

da cui, siccome $\mathbf{a}\mathbf{b} = \pm 1$,

$$|\langle \mathbf{a}\mathbf{b}(1 - \mathbf{b}\mathbf{c}) \rangle| \leq |1 - \langle \mathbf{b}\mathbf{c} \rangle| = 1 - \langle \mathbf{b}\mathbf{c} \rangle. \quad (3.26)$$

Combinando la (3.25) e la (3.26) si ottiene la disuguaglianza di Bell nella forma originale:

$$|\langle \mathbf{a}\mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{a}\mathbf{c} \rangle| \leq 1 - \langle \mathbf{b}\mathbf{c} \rangle. \quad (3.27)$$

Non è difficile verificare che la meccanica quantistica viola questa condizione: si considera uno spinore preparato nello stato $|\phi^+\rangle$, dove gli assi α, β, γ formano angoli di 60° fra loro. Allora, vale

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}\mathbf{b} \rangle &= \frac{1}{2} \\ \langle \mathbf{b}\mathbf{c} \rangle &= \frac{1}{2} \\ \langle \mathbf{a}\mathbf{c} \rangle &= -\frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

da cui $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \not\leq 1 - \frac{1}{2}$. Più in generale, se gli assi α' e β' sono diversi fra loro, le variabili $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}'$ sono indipendenti tra loro e assumono sempre i valori ± 1 . Vale la relazione

$$(\mathbf{a} + \mathbf{a}')\mathbf{b} - (\mathbf{a} - \mathbf{a}')\mathbf{b}' = \pm 2, \quad (3.29)$$

da cui deriva

$$\langle \mathbf{ab} \rangle + \langle \mathbf{a'b} \rangle - \langle \mathbf{ab}' \rangle + \langle \mathbf{a'b}' \rangle = \langle \boldsymbol{\theta} \rangle = \pm 2. \quad (3.30)$$

Dalla (3.29), si deduce che

$$|\langle \boldsymbol{\theta} \rangle| = |\langle \mathbf{ab} \rangle + \langle \mathbf{a'b} \rangle - \langle \mathbf{ab}' \rangle + \langle \mathbf{a'b}' \rangle| \leq 2, \quad (3.31)$$

disuguaglianza chiamata CHSH (Clauser-Horne-Shimony-Holt). A questo punto non ci si dovrebbe sorprendere del fatto che persino la (3.29) è violata. Considerando infatti gli assi $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ separati da angoli di 22.5° , i valori medi previsti valgono

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{ab} \rangle = \langle \mathbf{a'b}' \rangle = \langle \mathbf{a'b} \rangle &= \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \langle \mathbf{ab}' \rangle &= \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

ed inseriti nella disuguaglianza permettono di ottenere $2\sqrt{2} \not\leq 2$.

3.5 Dense coding

Oltre agli aspetti matematici che riguardano l'entanglement, si possono affrontare anche aspetti applicativi, tra cui il *dense coding* [8, p. 156]. Si considerino quindi due osservatori, Alice e Bob, posti a grande distanza fra loro. Per scambiarsi messaggi, Alice potrebbe inviare a Bob dei classici bit, così che Bob è in grado di ricostruire il messaggio al completo quando possiede tutti i bit necessari. Se si sostituissero i bit con i qubit, cosa cambierebbe? Nulla in particolare, assumendo che non possano verificarsi errori durante il trasporto. Alice può preparare il qubit scegliendo uno stato tra $|\uparrow_z\rangle$ o $|\downarrow_z\rangle$, spedirlo a Bob, che poi effettua una misura dello spin lungo \hat{z} , ritrovando il messaggio di Alice. Quindi, a parità di bit scambiati attraverso il canale di comunicazione, ogni qubit non trasporta di fatto più informazione rispetto ad un bit. Tuttavia, è possibile sfruttare le proprietà quantistiche del qubit per rendere il tutto più interessante. Supponendo che Alice possa inviare solo un qubit alla volta, essa decide di preparare uno stato entangled $|\phi^+\rangle_{AB}$, di cui invia uno dei due qubit a Bob. Chiaramente l'informazione è contenuta in entrambi i qubit, non solo nel primo o nel secondo, così che Bob, per il momento, non è in grado di accedere all'informazione. Alice a questo punto può scegliere di applicare una trasformazione unitaria al proprio qubit:

- $\mathbf{1}$ (nessuna trasformazione effettuata) $\rightarrow |\phi^+\rangle_{AB}$
- $\boldsymbol{\sigma}_1$ (180° rotazione attorno l'asse x) $\rightarrow |\psi^+\rangle_{AB}$
- $\boldsymbol{\sigma}_2$ (180° rotazione attorno l'asse y) $\rightarrow |\psi^-\rangle_{AB}$
- $\boldsymbol{\sigma}_3$ (180° rotazione attorno l'asse z) $\rightarrow |\phi^-\rangle_{AB}$.

Quindi, verranno preparati i relativi stati in base al tipo di trasformazione adottata. Alice invia successivamente il suo qubit a Bob, così che possa effettuare delle misure su entrambi i qubit per proiettarli sulla base costituita dai quattro stati massimamente entangled, distinguendo in quale caso si trova il sistema. Non solo, rispetto al caso classico, nel caso in cui ci sia un terzo osservatore intento a spiare la conversazione tra Alice e Bob, detto Eva, se intercettasse il qubit spedito da Alice non sarebbe in grado di interpretarlo, siccome la sua matrice di densità è $\rho_A = \frac{1}{2}\mathbf{1}$. Questo è ciò che viene definito come *dense coding*. Si noti che, in ogni caso, il numero di qubit che Bob deve avere per interpretare il messaggio è sempre due, quindi anche in questo caso, l'invio del secondo qubit non ha portato "più informazione" di un normale bit.

3.6 Quantum key

Riprendendo la situazione precedente, è necessario per Alice e Bob comunicare senza che Eva riesca a capire ciò che i due si inviano [8, p. 158]. Per questo motivo è utile che Alice e Bob condividano una chiave segreta (*key*) composta da una sequenza di 0 e 1, in modo che Alice, intenta ad inviare un messaggio a Bob, possa convertire il messaggio in ASCII. Il problema sorge nel come stabilire questa chiave segreta senza che Eva ne venga a conoscenza. A questo scopo, si può sfruttare *l'informazione quantistica*. Supponendo che Alice e Bob possiedano un insieme di coppie entangled nello stato $|\psi^-\rangle$, essi scelgono di misurare ciascun qubit attraverso σ_1 o σ_3 , ottenendo uno specifico risultato. Infine, pubblicano quale operatore è stato applicato per ciascun qubit, senza far sapere il risultato. In questo modo, Alice e Bob possono risalire non solo a quali coppie di qubit sono state misurate con lo stesso osservabile, ma anche allo spin dei bit posseduti dall'altro (misure anticorrelate). Eva però, se fosse riuscita ad entrare a contatto con le coppie, potrebbe provare a stabilire un entanglement tra queste coppie ed una serie di qubit da lei posseduti, così da risalire, in base ai risultati di Bob e Alice, alla chiave. La meccanica quantistica proibisce questa cosa: supponendo un generale stato entangled tra AB ed E,

$$|\Upsilon\rangle_{ABE} = |00\rangle_{AB}|\epsilon_{00}\rangle_E + |01\rangle_{AB}|\epsilon_{01}\rangle_E + |10\rangle_{AB}|\epsilon_{10}\rangle_E + |11\rangle_{AB}|\epsilon_{11}\rangle_E, \quad (3.33)$$

l'anticorrelazione di $|\psi^-\rangle$ fa sì che esso sia autostato di $\sigma_1^{(A)}\sigma_1^{(B)}$ e $\sigma_3^{(A)}\sigma_3^{(B)}$ con autovalore -1 . Se Alice e Bob potessero misurare questa proprietà, Eva deve far sì che i due non si accorgano della sua intercettazione, per cui deve modificare lo stato $|\Upsilon\rangle_{ABE}$ affinché lo stato in AB soddisfi le due condizioni. L'unica possibilità è

$$|\Upsilon\rangle_{ABE} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)_{AB}|\epsilon\rangle_E = |\psi^-\rangle_{AB}|\epsilon\rangle_E, \quad (3.34)$$

ovvero uno stato separabile tra AB ed E. Eva, quindi, non è in grado di intercettare il messaggio senza che Alice e Bob lo scoprano.

La sicurezza dello scambio di chiavi quantistiche, in gergo chiamata "*quantum key distribution*", è garantita da una proprietà intrinseca dell'informazione quantistica: non è possibile acquisire informazione che distingue stati non ortogonali senza disturbare il sistema. Nell'esempio del cosiddetto "*protocollo BB84*", si considera Alice, intenta a mandare un qubit a Bob preparato in uno tra gli stati $|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle, |\uparrow_x\rangle, |\downarrow_x\rangle$, mentre Eva è sempre intenta a

capire il messaggio scambiato. Dati due stati generici $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ non ortonormali, tali per cui $\langle\psi|\phi\rangle \neq 0$, si vuole capire se è possibile applicare una trasformazione unitaria U tale che non disturbi gli stati di partenza.

$$U : \begin{cases} |\psi\rangle \otimes |0\rangle_E \rightarrow |\psi\rangle \otimes |e\rangle_E \\ |\varphi\rangle \otimes |0\rangle_E \rightarrow |\varphi\rangle \otimes |f\rangle_E \end{cases} \quad (3.35)$$

Per l'unitarietà di U , segue

$$\begin{aligned} \langle\psi|\varphi\rangle &= {}_E\langle 0| \otimes \langle\psi|)(|\varphi\rangle \otimes |0\rangle_E) \\ &= {}_E\langle e| \otimes \langle\psi|)(|\varphi\rangle \otimes |f\rangle_E) \\ &= \langle\psi|\varphi\rangle {}_E\langle e|f\rangle_E. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Siccome $\langle\psi|\phi\rangle \neq 0$, se ne deduce che ${}_E\langle e|f\rangle_E = 1$, ma i due stati sono ortonormali, quindi $|e\rangle_E = |f\rangle_E$. In altri termini, non c'è nessun modo per Eva di distinguere gli stati non ortogonali iniziali di Alice senza perturbare il sistema. Questo significa che se Alice decide di inviare uno tra $|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle, |\uparrow_x\rangle, |\downarrow_x\rangle$, Eva non può scoprire di quale stato si tratta senza far sapere ad Alice e Bob della sua intrusione.

3.7 No-Cloning Theorem

Un aspetto particolarmente interessante riguarda la possibilità di creare copie di uno stato di partenza. Classicamente, non si incontrano particolari difficoltà nel copiare oggetti. In meccanica quantistica tuttavia la questione è più seria: una macchina in grado di effettuare queste copie dovrebbe rispettare tutte le leggi della meccanica quantistica per non incorrere in paradossi. A tal scopo, si considera una macchina M , rappresentata da un operatore unitario U [9, p. 142] con la seguente proprietà:

$$U : |\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle^{\otimes n}, \quad (3.37)$$

dove, per convenzione, $|\psi\rangle^{\otimes n}$ è il prodotto tensoriale tra n stati $|\psi\rangle$. Considerando sempre i due compagni Alice e Bob, che condividono una coppia di qubit entangled nello stato

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \quad (3.38)$$

se Alice decidesse di effettuare una misura rispetto all'asse z , i risultati possibili in B sarebbero

$${}_A\langle 0|\Psi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle_B \quad {}_A\langle 1|\Psi^-\rangle_{AB} = -\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_B. \quad (3.39)$$

Se al contrario Alice misurasse rispetto ad x , si otterrebbe uno fra

$${}_A \langle + | \Psi^- \rangle_{AB} = -\frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle_B \quad {}_A \langle - | \Psi^- \rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle_B, \quad (3.40)$$

con

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle) \quad (3.41)$$

autostati dello spin lungo x . Sebbene le situazioni siano formalmente distinte, la matrice densità in \mathcal{H}_B corrispondente in entrambi i casi è $\rho_B = \frac{1}{2}\mathbf{1}_B$. Bob non è in grado di capire il metodo di preparazione di ρ_B , quindi di distinguere su quale asse Alice abbia deciso di eseguire la misura. Al contrario, con una macchina descritta dall'equazione (3.37) le cose andrebbero diversamente. Potendo clonare a piacimento il qubit in \mathcal{H}_B , se Alice misurasse lungo x , Bob otterrebbe $|0\rangle^{\otimes n}$ o $|1\rangle^{\otimes n}$, da cui misure ripetute lungo z su ciascun qubit darebbero tutte lo stesso risultato. Se invece Alice misurasse lungo x , Bob otterrebbe $|+\rangle^{\otimes n}$ o $|-\rangle^{\otimes n}$, da cui misure ripetute mostrerebbero risultati anche discordanti. In particolar modo, per n molto grandi la probabilità che le misure mostrino tutte lo stesso risultato è approssimabile a 0. In questo modo, Bob potrebbe riconoscere in quale delle due situazioni si torva e potrebbe sfruttare questo fatto per stabilire con Alice un tipo di comunicazione più veloce della luce. Intuitivamente, per poter salvare il principio di causalità, bisogna scartare la possibilità dell'esistenza di un operatore \mathbf{U} che si comporti secondo (3.37), di conseguenza non è possibile costruire una macchina unitaria di clonazione di generici stati quantistici. Quest'ultima affermazione costituisce l'enunciato del *No-Cloning Theorem*.

3.7.1 Dimostrazione 1

La seguente dimostrazione è tratta da [9], basata a sua volta sull'approccio dell'articolo originale [10]. Supponendo che esista un'operatore unitario \mathbf{U} in grado di clonare due stati ortogonali $|\psi\rangle_A$ e $|\phi\rangle_A$ sullo stato iniziale $|0\rangle_B$ di B, si definisce anche lo stato iniziale $|\mathcal{M}_0\rangle$ della macchina M. L'operatore \mathbf{U} agisce secondo

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |\psi\rangle_A \otimes |0\rangle_B \otimes |\mathcal{M}_0\rangle \rightarrow |\Psi'\rangle = \mathbf{U}|\Psi\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B \otimes |\mathcal{M}_\psi\rangle \\ |\Phi\rangle &= |\phi\rangle_A \otimes |0\rangle_B \otimes |\mathcal{M}_0\rangle \rightarrow |\Phi'\rangle = \mathbf{U}|\Phi\rangle = |\phi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B \otimes |\mathcal{M}_\phi\rangle. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Si considera ora una combinazione lineare degli stati ortogonali $|\psi\rangle_A$ e $|\phi\rangle_A$,

$$|\sigma\rangle = a|\psi\rangle + b|\phi\rangle, \quad (3.43)$$

tale che $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Lo stato iniziale è dato da

$$|\Sigma\rangle = |\sigma\rangle_A \otimes |0\rangle_B \otimes |\mathcal{M}_0\rangle = a|\Psi\rangle + b|\Phi\rangle, \quad (3.44)$$

mentre lo stato finale risulta

$$|\Sigma'\rangle = a|\Psi'\rangle + b|\Phi'\rangle = a|\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B \otimes |\mathcal{M}_\psi\rangle + b|\phi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B \otimes |\mathcal{M}_\phi\rangle, \quad (3.45)$$

chiaramente diverso dallo stato duplicato $|\sigma\rangle_A \otimes |\sigma\rangle_B \otimes |\mathcal{M}_\sigma\rangle$. La trasformazione \mathbf{U} non è quindi in grado di copiare una combinazione lineare degli stati ortogonali $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$.

3.7.2 Dimostrazione 2

La seconda dimostrazione sfrutta sempre la trasformazione unitaria \mathbf{U} [9, p. 144]. In particolar modo, dati due stati *non* ortogonali $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$,

$$0 < \langle\psi|\phi\rangle < 1 \quad (3.46)$$

e, per la conservazione del prodotto scalare data dall'unitarietà della trasformazione, vale

$$|\langle\Psi'|\Phi'\rangle| = |\langle\Psi|\Phi\rangle| = |\langle\psi|\phi\rangle|. \quad (3.47)$$

allo stesso modo, scrivendo esplicitamente gli stati secondo la (3.42), si giunge a

$$|\langle\Psi'|\Phi'\rangle| = |\langle\psi|\phi\rangle|^2 |\langle\mathcal{M}_\psi|\mathcal{M}_\phi\rangle| < |\langle\psi|\phi\rangle|, \quad (3.48)$$

giungendo ad un assurdo. In definitiva, non è possibile duplicare due stati distinti non ortogonali.

3.7.3 Interpretazione

Entrambe le dimostrazioni mettono in evidenza l'impossibilità della clonazione di stati non-ortogonali, sottolineando aspetti diversi del meccanismo [9, p. 145]. Dalla dimostrazione 2 si deduce che, se $\langle\psi|\phi\rangle = 0$, non si giunge a nessun assurdo, per cui in linea di principio stati ortogonali potrebbero essere clonati. Questo è l'assunto non giustificato della dimostrazione 1, la quale mostra invece che l'azione di \mathbf{U} su uno stato non ortogonale non porta alla clonazione, bensì stabilisce una relazione di entanglement tra i sistemi A, B e M.

Nonostante il nome del teorema, affermare genericamente che è impossibile copiare uno stato quantistico non è del tutto corretto (dopotutto, gli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$ sono copiabili). Ogni volta che si presenta uno stato *conosciuto* del tipo

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (3.49)$$

con a e b fissati ($0 \leq a, b \leq 1$), è sempre possibile realizzare una macchina (ovvero una

trasformazione unitaria) in grado di clonare lo stato. Non solo, questa può essere resa tale anche da copiare tutti gli stati ortogonali di $|\psi\rangle$. Al contrario, il No-Cloning Theorem stabilisce l'impossibilità di clonare uno stato *sconosciuto*, ovvero uno stato di cui non si conoscono i coefficienti, questo perchè non esiste una trasformazione unitaria che duplichi con esattezza qualsiasi stato in input.

3.8 Teletrasporto quantistico

Il teletrasporto quantistico sfrutta l'entanglement quantistico per riuscire a trasportare uno stato quantistico tra due punti lontani fra loro [8, p. 164]. Si considerino i soliti compagni Bob e Alice che condividono due qubit entangled in uno stato $|\phi\rangle_{AB}$. Alice possiede un terzo qubit con stato $|\psi\rangle_C = a|0\rangle + b|1\rangle$ che vuole trasmettere a Bob; per farlo, Alice deve necessariamente far interagire il qubit C con il qubit da lei posseduto della coppia entangled. In questo modo, lo stato dei tre qubit si può riscrivere come

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_C |\phi^+\rangle_{AB} &= (a|0\rangle_C + b|1\rangle_C) \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (a|000\rangle_{CAB} + a|011\rangle_{CAB} + b|100\rangle_{CAB} + b|111\rangle_{CAB}) \\
&= \frac{1}{2} a (|\phi^+\rangle_{CA} + |\phi^-\rangle_{CA}) |0\rangle_B + \frac{1}{2} a (|\psi^+\rangle_{CA} + |\psi^-\rangle_{CA}) |1\rangle_B \\
&\quad + \frac{1}{2} b (|\psi^+\rangle_{CA} - |\psi^-\rangle_{CA}) |0\rangle_B + \frac{1}{2} b (|\phi^+\rangle_{CA} - |\phi^-\rangle_{CA}) |1\rangle_B \\
&= \frac{1}{2} |\phi^+\rangle_{CA} (a|0\rangle_B + b|1\rangle_B) + \frac{1}{2} |\psi^+\rangle_{CA} (a|1\rangle_B + b|0\rangle_B) \\
&\quad + \frac{1}{2} |\psi^-\rangle_{CA} (a|1\rangle_B - b|0\rangle_B) + \frac{1}{2} |\phi^-\rangle_{CA} (a|0\rangle_B - b|1\rangle_B). \tag{3.50}
\end{aligned}$$

Una volta stabilito l'entanglement tra A e C, Alice effettua una misura sui qubit, proiettandoli sulla base $\{|\phi^\pm\rangle, |\psi^\pm\rangle\}$. Infine, comunica il suo risultato con Bob, spedendogli una stringa di due bit classici. Ricevuta la stringa, Bob conosce in quale dei quattro stati descritti da (3.3) si trovano i due qubit C ed A, quindi conosce anche il corrispondente stato del qubit B essendo A,B e C entangled. In base allo stato di AC, se Bob esegue una misura seguendo

$$\begin{aligned}
|\phi^+\rangle_{CA} &\rightarrow \mathbf{1}_B, \\
|\psi^+\rangle_{CA} &\rightarrow \sigma_1^{(B)}, \\
|\psi^-\rangle_{CA} &\rightarrow \sigma_2^{(B)}, \\
|\phi^-\rangle_{CA} &\rightarrow \sigma_3^{(B)}, \tag{3.51}
\end{aligned}$$

ottiene lo stato $|\psi\rangle_B$, una perfetta copia del qubit C. Questa trattazione può sembrare, a prima vista, uno stratagemma per riuscire a creare una copia di C, tuttavia quanto affermato in precedenza per la creazione di copie è ancora valido: creato il clone di C in B, C perde completamente lo stato iniziale e rimane entangled con A. Alla fine si ottiene sempre due qubit entangled ed un terzo separato dagli altri due.

4 Teoremi No-Go

Famosi in meccanica quantistica sono i cosiddetti "No-Go Theorems", ovvero un insieme di teoremi che mostrano, sfruttando in particolar modo la proprietà di linearità, l'impossibilità nel realizzare certe situazioni fisiche. Essi hanno un profondo impatto, specialmente a livello sperimentale. Tra questi si ritrova il No-Cloning theorem, già affrontato in precedenza, a cui sono strettamente legati i seguenti tre teoremi.

4.1 No-Broadcast Theorem

Il No-Broadcast-Theorem generalizza il No-Cloning theorem anche al caso di stati misti. Considerando uno stato misto ρ in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , data una mappa E che mappa ρ in uno stato ρ_{AB} in \mathcal{H}_{AB} , con \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B spazi isomorfi ad \mathcal{H} , si dice che E *trasmette* ρ (dall'inglese "to broadcast") se

$$\text{Tr}_A(\rho_{AB}) = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \rho. \quad (4.1)$$

Il teorema "No-Broadcast" afferma che non esiste una mappa tale per cui valga (4.1) per uno stato misto arbitrario [11, p. 516].

Dimostrazione:

Prima di procedere, considerando che la dimostrazione si basa sull'utilizzo dell'entropia relativa tra sistemi quantistici, è necessario introdurre l'entropia S di Von Neumann:

$$S = -\text{Tr}(\rho \log \rho), \quad (4.2)$$

da cui deriva la formula dell'entropia relativa tra ρ_1 e ρ_2 ,

$$S(\rho_1 | \rho_2) = \text{Tr}[\rho_1(\log \rho_1 - \log \rho_2)]. \quad (4.3)$$

Considerando l'evoluzione temporale unitaria, essa conserva l'entropia, per cui

$$S(\rho_1(t) | \rho_2(t)) = S(\rho_1(0) | \rho_2(0)). \quad (4.4)$$

Allo stesso modo, L'entropia di Von Neumann è monotona, quindi

$$S(\rho_{1,AB} | \rho_{2,AB}) \geq S(\rho_{1,B} | \rho_{2,B}), \quad (4.5)$$

dove $\rho_{1,AB}$ e $\rho_{2,AB}$ appartengono a \mathcal{H}_{AB} mentre $\rho_{1,B}$ e $\rho_{2,B}$ appartengono a \mathcal{H}_B . Riassumendo, la (4.4) implica che

$$S(\rho_1 | \rho_2) = S(\rho_{1,AB} | \rho_{2,AB}), \quad (4.6)$$

ma al contempo la (4.5) implica

$$S(\rho_1 | \rho_2) < S(\rho_{1,AB} | \rho_{2,AB}), \quad (4.7)$$

che contraddice la relazione precedente [12].

4.2 No-Deletion Theorem

il "No-Deletion Theorem" afferma che è impossibile eliminare una copia di uno stato arbitrario attraverso una trasformazione unitaria [13].

Dimostrazione

Dato lo stato $|\psi\rangle$, la sua copia si presenta anch'essa come $|\psi\rangle$. La trasformazione unitaria $U : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_A$ in grado di distruggere la copia agisce secondo

$$U (|\psi\rangle|\psi\rangle|A\rangle) = |\psi\rangle|0\rangle|A'\rangle, \quad (4.8)$$

dove $|A\rangle$ e $|A'\rangle$ sono interpretabili come gli stati in \mathcal{H}_A della macchina responsabile della trasformazione rispettivamente prima e dopo la sua azione. Sfruttando l'invertibilità di U , vale

$$|\psi\rangle|\psi\rangle|A\rangle = U^{-1}|\psi\rangle|0\rangle|A'\rangle, \quad (4.9)$$

in chiara contraddizione con il No-Cloning Theorem. Non può esistere quindi una trasformazione U tale per cui valga la relazione (4.8) [13].

4.3 No-Teleportation Theorem

Il No-Teleportation Theorem afferma che non è possibile convertire uno stato quantistico arbitrario in una sequenza di bit classici, così come è impossibile costruire lo stato quantistico originale a partire da una sequenza di bit. Questo teorema discende proprio dal No-Cloning Theorem, perchè codificare e successivamente decodificare uno stato attraverso dei bit permetterebbe di costruire una copia dello stato, che è proibito [14].

Dimostrazione

Dati due stati ρ_1 e ρ_2 , essi si dicono *identici* se i valori medi di tutte le osservabili sono uguali tra loro. Preparando quindi uno stato misto generico ρ_{input} su cui sono eseguite delle misure, si ottengono una serie di risultati. Questi risultati possono essere utilizzati per costruire ρ_{output} , stima dello stato in input. Siccome servirebbero infinite copie di ρ_{input} per riprodurre fedelmente tale stato, vale

$$\rho_{input} \neq \rho_{output}, \quad (4.10)$$

da cui se ne deduce che non è possibile convertire un generico ρ in una sequenza di bit [14].

4.4 No-Signalling Theorem

Sicuramente uno dei teoremi più studiati e dibattuti nel corso degli ultimi decenni è proprio il "No-Signalling Theorem". Esso afferma che è impossibile stabilire un tipo di comunicazione superluminale, ovvero comunicare più velocemente della luce. L'informazione possiede quindi un limite fisico che nemmeno la meccanica quantistica è in grado di superare. Tale teorema è strettamente connesso all'entanglement, tantochè costituisce proprio la risposta che Einstein, quando formulò il paradosso EPR, ancora ignorava.

In questa sezione si vuole proporre una dimostrazione, più precisamente la dimostrazione formulata da Gian Carlo Ghirardi nell'articolo "A General Argument against Superluminal Transmission through the Quantum Mechanical Measurement Process" [15]. Si considerino, a tal proposito, gli sistemi A, B e AB tali per cui $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Si necessitano

inoltre degli apparati U e V che effettuano misure rispettivamente su A e B. Una misura sul sistema A comporta un'interazione, definita come $W(A-U)$, agente su $\mathcal{H}_U \otimes \mathcal{H}_A$, così come l'interazione tra B e V è $W(V-B)$ agente su $\mathcal{H}_V \otimes \mathcal{H}_B$. W è quindi un operatore che agisce sullo spazio di Hilbert del sistema misurato e sull'apparato di misura. Si assume che il processo di misura rispetti l'evoluzione secondo Schrödinger, per cui valgono le seguenti considerazioni:

1. Lo spazio di Hilbert totale dei sistemi è costituito dal prodotto tensoriale dei singoli elementi,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_U \otimes \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_V \otimes \mathcal{H}_B. \quad (4.11)$$

2. Lo stato iniziale del sistema è

$$\rho^0 = \rho_{AB}^0 \otimes \rho_U^0 \otimes \rho_V^0 \quad (4.12)$$

3. Se una misura attraverso U non influenza l'apparato V, deve esistere un'operatore unitario U_{A-U} che corrisponde all'identità in $\mathcal{H}_V \otimes \mathcal{H}_B$. Se la misura avviene solo sul sistema U, la matrice densità diventa

$$\rho_U = U_{U-A} (\rho_{AB}^0 \otimes \rho_U^0 \otimes \rho_V^0) U_{U-A}^\dagger, \quad (4.13)$$

mentre se precedentemente è stata effettuata una misura anche su V diventa

$$\rho_{VU} = U_{V-B} U_{U-A} (\rho_{AB}^0 \otimes \rho_U^0 \otimes \rho_V^0) U_{U-A}^\dagger U_{V-B}^\dagger. \quad (4.14)$$

Considerando un osservabile generico F_U solo sull'apparato U, il suo valore di aspettazione sarebbe

$$\begin{aligned} \langle F_U \rangle_{VU} &= \text{Tr} [F_U \rho_{VU}] \\ &= \text{Tr} \left[F_U U_{U-A} U_{V-B} (\rho_{AB}^0 \otimes \rho_U^0 \otimes \rho_V^0) U_{V-B}^\dagger U_{U-A}^\dagger \right] \\ &= \text{Tr} \left[U_{V-B}^\dagger U_{U-A}^\dagger F_U U_{U-A} U_{V-B} (\rho_{AB}^0 \otimes \rho_U^0 \otimes \rho_V^0) \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Sfruttando la commutatività di U_{V-B} con U_{U-A} e F_U ,

$$\begin{aligned} \langle F_U \rangle_{VU} &= \text{Tr} \left[U_{U-A}^\dagger F_U U_{U-A} (\rho_{AB}^0 \otimes \rho_U^0 \otimes \rho_V^0) \right], \\ &= \text{Tr} \left[F_U U_{U-A} (\rho_{AB}^0 \otimes \rho_U^0 \otimes \rho_V^0) U_{U-A}^\dagger \right], \\ &= \text{Tr} [F_U \rho_U] \equiv \langle F_U \rangle_U. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Definendo $\langle F_U \rangle_0 = \text{Tr} [F_U \rho^0]$, si arriva a

$$\langle F_U \rangle_{VU} - \langle F_U \rangle_0 = \langle F_U \rangle_U - \langle F_U \rangle_0, \quad (4.17)$$

la quale mette in relazione la variazione del valore di aspettazione rispetto allo stato iniziale attraverso una sola misura su U e attraverso una misura su U ed una su V. Come si può notare, la variazione è la stessa in entrambi i casi, confermando così che l'interazione V-B non influenza l'esito della misura dell'apparato U. È importante sottolineare come non è stato necessario introdurre assunzioni sul metodo di misura, tantomeno sono state formulate leggi di conservazione.

5 Dal No-Signalling alla meccanica quantistica

Il No-Signalling Theorem, quindi, sembrerebbe avere radici solide all'interno della meccanica quantistica. La precedente dimostrazione mette in chiaro che le osservabili fisiche non sono in grado in alcun modo di poter inviare segnali attraverso misure su sistemi bipartiti. L'unica ipotesi di partenza coinvolge una proprietà fondamentale dei sistemi quantistici, il prodotto tensoriale. In questo paragrafo si vuole percorrere il ragionamento contrario: assumendo in partenza le condizioni del No-Signalling, che cosa si può dedurre della teoria quantistica? Si considerano quindi i seguenti assunti [16]:

1. Gli stati fisici sono descrivibili attraverso raggi nello spazio di Hilbert.
2. Le probabilità dei risultati delle misure si calcolano attraverso le regole della traccia.
3. Non è possibile comunicare messaggi più velocemente della luce.

Il punto (3) discende direttamente dalla teoria della relatività ristretta e si adatta nella teoria quantistica assumendo che il commutatore di operatori relativi a regioni spazio-temporalmente separate sia nullo. In particolar modo, non è possibile nemmeno sfruttare l'entanglement per trasmettere messaggi superluminali, come si vedrà tra poco.

Si considerano Alice e Bob che condividono uno stato quantistico puro $|\psi_{AB}\rangle$. La risposta al perchè non si può sfruttare l'entanglement per comunicare più velocemente della luce risiede proprio nelle matrici di densità ridotte ρ_A e ρ_B : qualsiasi sia la misura che effettua Bob sul suo qubit, la matrice ρ_A non verrà mai alterata. Dal punto di vista matematico, la traccia parziale eseguita su B fa in modo che ρ_A sia sempre la stessa, indipendentemente da ρ_B . Dal punto di vista pratico, se Bob decidesse misurare con una tra due basi ortonormali differenti, Alice non riuscirebbe a capire quale delle due basi Bob ha usato siccome le distribuzioni di probabilità sono le stesse.

Ora si vuole mostrare invece come la dinamica quantistica possa essere ricavata dagli assiomi della meccanica quantistica insieme alla "No-Signalling condition". Dati gli sistemi entangled A e B, separati spazio-temporalmente con osservabili commutanti, di stato totale $|\psi\rangle_{AB}$ e di matrice ridotta ρ_A , misure ortogonali in B preparano un certo stato in A. Ricordando la regola della traccia, questa permette di calcolare la probabilità congiunta di ottenere un certo risultato a dalla misura su AB attraverso i proiettori $\mathbf{E}_A \otimes \mathbf{E}_B$, data da

$$Prob(a) = Tr_{AB}(\rho_{AB} \mathbf{E}_A \otimes \mathbf{E}_B). \quad (4.18)$$

Allo stesso modo, è possibile calcolare la probabilità di ottenere un qualsiasi a sapendo che si è ottenuto un certo risultato su B attraverso il proiettore \mathbf{E}_B . La probabilità condizionata è data da

$$P(\mathbf{E}_A | \mathbf{E}_B) = \frac{P(\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B)}{P(\mathbf{E}_B)} = \frac{Tr_{AB}(\rho_{AB} \cdot (\mathbf{E}_A \otimes \mathbf{E}_B))}{Tr_{AB}(\rho_{AB} \cdot (\mathbf{1}_A \otimes \mathbf{E}_B))}. \quad (4.19)$$

Da quest'ultimo risultato è possibile ricavare la matrice di densità per A condizionata dal

fatto che su B si ha una determinata ρ_B :

$$\rho_A^{(E_B)} = \frac{\text{Tr}_B(\rho_{AB} \cdot (\mathbf{1}_A \otimes \mathbf{E}_B))}{\text{Tr}_{AB}(\rho_{AB} \cdot (\mathbf{1}_A \otimes \mathbf{E}_B))} \quad (4.20)$$

Si noti come si è giunti alla (4.20), formula già vista in precedenza, non ipotizzando il postulato della proiezione.

Infine, si considera $\mathcal{U} : \mathbf{E}_A \rightarrow \mathcal{U}(\mathbf{E}_A)$ mappa di evoluzione temporale e $\{|\psi\rangle_i\}$, $\{|\phi\rangle_j\}$ due diverse miscele di stati con rispettive distribuzioni di probabilità $\{p_i\}$ e $\{q_j\}$ per le quali vale

$$\sum_i p_i \mathbf{E}_{\psi_i} = \sum_j q_j \mathbf{F}_{\phi_j} = \rho_A, \quad (4.21)$$

con \mathbf{E}_{ψ_i} proiettori relativi agli stati $|\psi\rangle_i$ ed \mathbf{F}_{ϕ_j} proiettori relativi agli stati $|\phi\rangle_j$. Il No-Signalling Theorem impone che non ci sia modo per l'osservatore A di distinguere le due miscele. L'esistenza di \mathcal{U} potrebbe apparentemente violare questa condizione. Infatti, data \mathcal{U} , non si assume che stati puri evolvano necessariamente in altri stati puri, per cui può stabilirsi nel tempo una relazione d'entanglement tra A e B. Se la matrice di densità è genericamente espressa come somma di proiettori, essa si evolverà come somma dell'evoluzione di proiettori: $\{\mathbf{E}_{\psi_i}, p_i\}$ diventa $\{\mathcal{U}(\mathbf{E}_{\psi_i}), p_i\}$, così come $\{\mathbf{F}_{\phi_j}, q_j\}$ diventa $\{\mathcal{U}(\mathbf{F}_{\phi_j}), q_j\}$. Valgono infatti

$$\begin{aligned} \rho'_A\{\mathbf{E}_{\psi_i}, p_i\} &= \sum_i p_i \mathcal{U}(\mathbf{E}_{\psi_i}) \\ \rho'_A\{\mathbf{F}_{\phi_j}, q_j\} &= \sum_j q_j \mathcal{U}(\mathbf{F}_{\phi_j}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

A priori, le due matrici densità non sono necessariamente uguali, in quanto l'evoluzione temporale è applicata ai singoli proiettori e non interamente a ρ_A (la linearità non è ancora stata dimostrata). Tuttavia, assunto la condizione del No-Signalling, non è possibile distinguere tra le due miscele se entrambe originano la stessa matrice di densità, quindi anche l'evoluzione temporale deve soddisfare questa richiesta. Necessariamente,

$$\rho'_A\{\mathbf{E}_{\psi_i}, p_i\} = \rho'_A\{\mathbf{F}_{\phi_j}, q_j\} = \rho'_A. \quad (4.23)$$

Di conseguenza, \mathcal{U} deve essere una mappa in funzione della sola ρ_A , da cui

$$\rho'_A = \mathcal{U}(\rho_A) = \mathcal{U}\left(\sum_i \mathbf{E}_i P_{\psi_i}\right). \quad (4.24)$$

Combinando la (4.22) con la (4.24) si dimostra anche la linearità di \mathcal{U} . La positività della trasformazione, invece, è necessaria per assicurare che tutte le probabilità restino positive [16].

Nel capitolo 2 si è ribadita l'importanza di un superoperatore completamente positivo, non solamente positivo. Ebbene, considerando un sistema A e ipotizzando che possa essere in entanglement con un generico sistema B (di dimensione qualsiasi), è anche possibile che il

sistema evolva secondo $\mathcal{U}_A \otimes \mathbf{1}_B$, ovvero evolve solo A. Per avere senso fisico, l'operatore densità del sistema deve evolvere in un altro operatore densità, che è l'esatta definizione di "positività completa".

In conclusione, si nota come le proprietà della meccanica quantistica nascano in modo naturale da alcune ipotesi di partenza, in particolar modo dal No-Signalling Theorem. Considerando il quadro generale descritto fino ad ora, il teorema e la meccanica quantistica sembrano soddisfacentemente compatibili. Nel prossimo capitolo si mostrerà come questa compatibilità non sia una semplice coincidenza, anzi, possiede origini profonde.

6 Analisi delle dimostrazioni del No-Signalling theorem

6.1 No-Signalling: circolarità, assunzioni e fondamenti

Il paradosso di Bell ha sollevato numerose perplessità da parte del mondo scientifico, portando i fisici a fornire una spiegazione di come l'entanglement non violi alcuna legge fisica, così da salvare la meccanica quantistica. Per evitare il paradosso, l'entanglement quantistico, noto per influenzare particelle anche a grandi distanze, deve necessariamente proibire il passaggio di informazione tra le particelle coinvolte, in modo da conciliarsi con il principio di causalità [18, p. 543]. Questo è ciò che il No-Signalling Theorem cerca di chiarire. Negli anni, numerose sono state le dimostrazioni fornite del teorema, tuttavia in seguito se ne considerano solo alcune, in particolar modo quelle pubblicate sugli articoli di Ghirardi et al. [15], Bussey [20], Jordan [19], Shimony [21], Redhead [22], Eberhard e Ross [23]. Sfruttando le loro dimostrazioni, si vuole mostrare un approccio completamente differente allo studio della non località, per evidenziare come i suoi principi siano già insiti all'interno della teoria quantistica.

Prima di procedere, è necessario fare una breve introduzione riguardo la probabilità di sistemi isolati e congiunti, che tornerà molto utile nella trattazione. Dati infatti due sistemi L e R entangled tra loro, mostrano correlazioni tra i risultati di misure, chiamati $\{i\}$ e $\{j\}$. La probabilità di trovare un risultato j in R senza aver effettuato alcuna misura sul sistema L non coincide necessariamente con la probabilità di trovare lo stesso j dato un risultato i . In altri termini,

$$P(j|0) \neq P(j|i), \quad (6.1)$$

dove $P(j|0)$ indica proprio la probabilità che si verifichi j senza nessuna misura su L. Il teorema di Bell garantisce che i risultati correlati delle misure siano creati durante la misura, implicando che debba sussistere una influenza a distanza tra regioni spatio-temporalmente separate. La probabilità che si verifichi j in R senza nessuna misura su L coincide inoltre con la probabilità pesata che si verifichi j dato un generico risultato i su L,

$$P(j|0) = P(j|L) = \sum_i P(j|i)P(0|i), \quad (6.2)$$

dove $P(j|L)$ si legge come "la probabilità del risultato j in R dato un generico risultato in L". È importante ricordare tuttavia che, per un osservatore che ha accesso solo ad uno dei sistemi L o R, la statistica risulta la stessa indipendentemente dall'esecuzione o meno

di una misura sul sistema opposto. Quest'ultima affermazione è proprio il contenuto del No-Signalling theorem.

Ora si considerano una serie di affermazioni, approfondite più nel dettaglio in seguito:

1. Le dimostrazioni considerate possono essere unificate e sono la conseguenza del modo di rappresentare i sistemi combinati, o meglio del *prodotto tensoriale*.
2. Sono necessarie ulteriori assunzioni fisiche, oltre agli assiomi della meccanica quantistica stabiliti da Von Neumann, per derivare la rappresentazione del prodotto tensoriale.
3. Le nuove assunzioni fisiche sono equivalenti al No-Signalling theorem, così che le dimostrazioni sono circolari (queste presuppongono la validità del prodotto tensoriale per sistemi composti, ma il prodotto tensoriale stesso implica la validità del No-Signalling theorem).
4. La giustificazione empirica per l'introduzione di questi assiomi non è chiara. Questi sembrano basarsi sul concetto filosofico, detto "*Particolarismo*" [17], proposto da Teller, secondo il quale il mondo è composto da individui, con proprietà non relazionali. Questo concetto tuttavia è stato superato in meccanica quantistica con la scoperta dell'entanglement.

Se queste affermazioni risultassero valide, il No-Signalling theorem rientrerebbe già all'interno della struttura della meccanica quantistica e le sue dimostrazioni perderebbero di senso. Nonostante la possibile circolarità del teorema, è importante sottolineare che la comunicazione superluminale è comunque estremamente improbabile: la si considera solamente per studiare la non-località e l'effettiva differenza tra comunicazione e correlazione. Non solo, il prodotto tensoriale è ampiamente accettato e lo si ritiene corretto, sebbene sia importante chiarire se derivi da considerazioni sperimentali o da convenzioni teoriche.

6.2 Il prodotto tensoriale

Un sistema quantistico viene sempre descritto attraverso tre costituenti principali, che sono lo spazio di Hilbert, gli operatori (osservabili) ad esso associati e lo stato del sistema [18, p. 546]. Considerando quindi due sistemi, L e R, lo spazio di L verrà denominato \mathcal{H}_L , con operatori \mathcal{O}_L e stati $|\psi\rangle_L$. Analogamente si rappresenteranno lo spazio, gli operatori e gli stati di R. Spesso un sistema si trova a far parte di un insieme più grande ed è quindi combinato rispetto ad un altro sistema. In questo caso, L e R formano un sistema, dotato anch'esso di uno spazio di Hilbert, di osservabili e di stati, ricavabili attraverso la *rappresentazione del prodotto tensoriale* (TPR):

- Spazio del prodotto tensoriale (TPS): $\mathcal{H} = \mathcal{H}_L \otimes \mathcal{H}_R$
- Azione limitata di estensione (RAE): $\mathcal{O} = \mathcal{O}_L \otimes \mathcal{O}_R$
- Funzione ψ combinata (operatore densità): $|\psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle$

Tutte le dimostrazione del No-Signalling Theorem usano questi presupposti del TPR.

6.3 Scelta di osservabili

Le dimostrazioni di Bussey (1982) e Jordan (1983) mostrano che la distribuzione dei risultati di un sistema non dipende dalla scelta di osservabili misurate sull'altro sistema [18, p.547]. In altri termini, la statistica dei risultati su R deve essere la medesima misurando σ_x o σ_z su L. Chiamando PL_i il proiettore $|i\rangle\langle i|$ su L, la dimostrazione di Jordan considera il valor medio $\langle PL_i PR_j \rangle$,

$$\begin{aligned} P(j|L) &= \sum_i \langle PL_i PR_j \rangle = \langle \sum_i PL_i PR_j \rangle \\ &= \langle (\sum_i PL_i) PR_j \rangle = \langle PR_j \rangle, \end{aligned} \quad (6.3)$$

che coincide con l'equazione (6.2). La (6.3) mostra come la probabilità marginale su R di ottenere uno specifico risultato è indipendente dall'osservabile misurato su L [19]. Analogamente, la dimostrazione proposta da Bussey si basa sulla lineare indipendenza delle righe-colonne della matrice del cambio di base $[\beta_{ij}]$ tra le basi $\{|u_i\rangle\}$ e $\{|w_k\rangle\}$ di osservabili diverse in L [20]. Non è complicato dimostrare come questa condizione la si ottenga proprio dalla dimostrazione di Jordan:

$$\begin{aligned} \sum_k PL_k &= 1 \Rightarrow \delta_{kk'} = \langle w_k | w_{k'} \rangle \\ &= [\sum_i \langle u_i | \beta_{ik}^*] [\sum_l \beta_{lk'} | u_l \rangle] \\ &= \sum_i \beta_{ik}^* \beta_{ik'}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Scherer e Busch (1993) sottolinearono invece come la matrice densità ρ_R fosse la stessa indipendentemente dall'osservabile di R,

$$\sum_i P(i) Tr_L(\rho_i) = Tr_L \left\{ \sum_i P(i) \frac{|i\rangle\langle i|}{\sqrt{P(i)}} \rho \frac{|i\rangle\langle i|}{\sqrt{P(i)}} \right\} = Tr_L \{ \rho \}, \quad (6.5)$$

in linea con Jordan in quanto entrambe le dimostrazioni si basano sulla proiezione di $|\psi\rangle$ su una base ortonormale di stati per poi sommarli assieme, tornando allo stato di partenza.

6.4 Perturbazioni

Un'altra categoria di dimostrazioni si basa sulla perturbazione, ovvero sull'interazione, dell'apparato strumentale con il sistema da misurare [18, p. 548]. Rientrano all'interno le versioni di Shimony (1984), Redhead (1987) e Ghirardi (1980) (la cui dimostrazione è stata riportata nel paragrafo precedente).

Eberhard e Ross (1989), invece, giunsero a dimostrare il No-Signalling theorem utilizzando una hamiltoniana imperturbata, dove la perturbazione su L risulta commutare con l'osservabile misurato su R (sebbene questa condizione dovrebbe verificarsi per qualsiasi osservabile su R, altrimenti il teorema sarebbe verificato solo su alcune osservabili). Questa conclusione è analoga alle versioni di Redhead, Shimony e Ghirardi.

6.5 Unificazione

Attraverso qualche passaggio algebrico, si può evidenziare come le due classi di dimostrazione del teorema siano equivalenti [18, p. 548]. Si consideri infatti l'operatore evoluzione, per il sistema perturbato, come $U_{L'} = U_L U_{\Delta L}$, dove il ruolo di termine perturbativo è assunto solamente da $U_{\Delta L}$. Data l'evoluzione nel tempo di $|\psi\rangle$, denominando $1_S = \sum_i |i\rangle \langle i|$ la probabilità di trovare j in R perturbando il sistema L è

$$\langle \psi | U_{\Delta L}^\dagger (1_S \otimes |j\rangle \langle j|) U_{\Delta L} | \psi \rangle = \langle \psi | [(\sum_i U_{\Delta L}^\dagger |i\rangle \langle i| U_{\Delta L}) \otimes |j\rangle \langle j|] | \psi \rangle. \quad (6.6)$$

Come si può notare, la perturbazione su L comporta una rotazione della base in L. Allo stesso modo, calcolando la probabilità di j in R dopo misure su L si ottiene

$$\sum_i \langle \psi | (|i\rangle \langle i| \otimes |j\rangle \langle j|) | \psi \rangle = \langle \psi | (\sum_i |i\rangle \langle i| \otimes |j\rangle \langle j|) | \psi \rangle. \quad (6.7)$$

Se si fosse scelta un'altra osservabile, l'equazione precedente rimarrebbe tale ma con la seguente modifica: $\sum_i |i\rangle \langle i| \rightarrow \sum_{i'} |i'\rangle \langle i'|$. Anche la classe di dimostrazioni che fa uso della scelta di osservabili comporta una rotazione della base. In definitiva, tutte le dimostrazioni si basano su un unico fatto: data la rappresentazione del prodotto tensoriale per sistemi combinati, interazioni arbitrarie o riconfigurazione di strumenti hanno come unica implicazione la trasformazione della base di un sottosistema senza alterare le proiezioni sull'altro sottosistema.

6.6 Discussione

Nel quadro impostato sul No-Signalling theorem, è importante notare che ci sono alcune limitazioni [18, p. 549].

1. La prima limitazione riguarda proprio la distinzione tra comunicazione ed influenza: sebbene sia vero che le precedenti dimostrazioni negano la possibilità di comunicare a velocità superiori della luce, non è assolutamente proibito influenzare oggetti lontani a velocità maggiori della luce. Questo è chiaro considerando l'entanglement stesso, dove senza dubbio la non località non impedisce a due particelle di influenzarsi a vicenda (naturalmente, senza poter trasmettere informazione).
2. I precedenti teoremi coprono solo alcune casistiche in cui effettivamente sussiste il No-Signalling theorem.
3. L'assunzione di una perturbazione "unitaria" potrebbe essere definita controversa, siccome una perturbazione implica un collasso, chiaramente in contrasto con l'evoluzione descritta da Schrödinger.

7 Derivazione del TPR

7.1 Assiomi di Von Neumann e prodotto tensoriale

Il primissimo argomento affrontato in questo scritto riguardava proprio gli assiomi della meccanica quantistica. In particolare, i primi quattro, riguardanti gli *stati del sistema*,

osservabili fisiche, misure e dinamica, sono meglio conosciuti come gli *assiomi di Von Neumann*, presentati all'interno dell'articolo " *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*" [24]. Una particolarità di questi assiomi è che non riescono ad introdurre in modo completo tutte le parti della teoria [18, p. 550], così che spesso queste sono introdotte in modo accidentale. Si pensi per esempio alle regole di quantizzazione, ma in particolar modo alla rappresentazione del prodotto tensoriale. Quest'ultima in particolare entra all'interno della meccanica quantistica in tre modi diversi: alcuni autori la introducono come uno strumento matematico aggiuntivo, altri come il quinto assioma (come è stato fatto in questo scritto), altri ancora attraverso considerazioni di tipo fisico.

Von Neumann affrontò questo problema, chiedendosi, dati due spazi \mathcal{H}_L e \mathcal{H}_R , quale fosse lo spazio \mathcal{H} più appropriato per rappresentare il sistema composto. Un noto teorema in matematica, proposto da Courant e Hilbert in " *Methoden der mathematischen Physik*" (1924) [25], afferma che, dati due set di funzioni ortonormali $\{f_i(x)\}$ e $\{g_j(y)\}$ nei domini di x e y , allora il set di funzioni $\{f_i(x)g_j(y)\}$ forma un insieme ortonormale completo e può essere usato come set di espansione per una generica funzione con dominio in (x, y) . Infatti, per y_0 fissato, una generica funzione $F(x, y_0)$ può essere espansa attraverso $\{f_i(x)\}$,

$$F(x, y_0) = \sum_i a_i(y_0) f_i, \quad (7.1)$$

con $a(y_0)$ scalare che dipende solo da y_0 . Considerando invece y come variabile, è possibile espandere $a(y)$ attraverso $\{g_j(y)\}$, così che

$$F(x, y) = \sum_i \left(\sum_j b_{ij} g_j \right) f_i = \sum_{ij} b_{ij} f_i g_j. \quad (7.2)$$

Considerando le funzioni f_i e g_j come elementi di uno spazio vettoriale, la (7) coincide con la definizione di prodotto tensoriale:

$$|f\rangle \otimes |g\rangle = |fg\rangle. \quad (7.3)$$

Questa dimostrazione permette subito di intuire quale sia l'elemento matematico da utilizzare per costruire un sistema combinato a partire dai singoli stati. Questa fu l'intuizione che portò Von Neumann a servirsi del prodotto tensoriale per coppie di stati. Si noti come il prodotto tensoriale non crea né distrugge gradi di libertà, quindi non ci sono stati acquisiti o persi; lo stato finale invece è dato invece da tutte le possibili combinazioni degli stati di partenza.

7.2 Estensione di operatori

Von Neumann proseguì il suo lavoro cercando un modo per estendere operatori di un sottosistema ad operatori del sistema globale [18, p. 553]. La conclusione è che, dato A_L operatore su \mathcal{H}_L , l'estensione appropriata agente in $\mathcal{H}_L \otimes \mathcal{H}_R$ è $A_L \otimes \mathbf{1}_R$. Questo prende il nome di *principio di azione limitata di estensione* (RAE). Il fisico Joseph Maria Jauch giustifica questa conclusione nel seguente modo:

"Siccome $[A_L]$ è un'osservabile solamente su L, deve essere l'identità $\mathbf{1}$ in \mathcal{H}_R . Quindi deve avere la forma di $A_L \otimes \mathbf{1}_R$ " [26].

La giustificazione, quindi, consiste nel considerare operatori di un sottosistema agenti solamente su tale sottosistema. Anche Von Neumann provò a risolvere questo problema, arrivando alle stesse conclusioni. Considerando una funzione $\psi_L(m)$ in L con m gradi di libertà classici e $\psi_R(n)$ in R con n gradi di libertà,

”Qualsiasi osservabile fisica in L lo è naturalmente anche in L+R e l’estensione A può essere determinata da A_L nel seguente modo: per valutare $A\psi(m, n)$ si considera n costante e si applica A_L alla funzione $\psi(m, n)$ [con m gradi di libertà]. Questa regola di associazione è valida per gli operatori di posizione e momento, [...]. Possiamo quindi postulare che la regola sia valida in generale” [24, p. 225].

La validità di questa regola la si può notare anche nell’applicazione del quadrato di un operatore (l’estensione del quadrato di un operatore coincide con il quadrato dell’estensione dello stesso). Tuttavia, la regola non viene propriamente dimostrata, quindi Von Neumann non aggiunge nulla che non fosse già stato affermato da Jauch.

7.3 Funzione ψ combinata

L’ultimo caso da affrontare riguarda le relazioni tra gli operatori densità ρ_L e ρ_R dei sottosistemi con il ρ del sistema globale [18, p. 554]. In che modo si può ottenere l’operatore densità legato ad un osservatore che, dato un sistema L+R, ha accesso al solo sottosistema L? Von Neumann arrivò al risultato partendo da ciò che lui chiama *condizione di invarianza* (IC). In breve, i valori di aspettazione per un osservabile A_L devono coincidere con i valori di aspettazione di A , così come valori di aspettazione di B_L devono coincidere con quelli di B . La condizione si traduce facilmente in

$$Tr_L(\rho_L A_L) = Tr(\rho A), \quad (7.4)$$

che può essere espansa attraverso la definizione di prodotto tensoriale. Notando che il modulo dei coefficienti c_{jj} rappresenta la probabilità di trovare il risultato j senza alcuna misura in R, coincide con la probabilità menzionata inizialmente $P(j|0)$, mentre $c_{ij,ij}$ coincide con $P(ij)$. La condizione di invarianza si traduce quindi in

$$\sum_j a_j P(j|0) = \sum_j a_j (\sum_i P(ij)). \quad (7.5)$$

Siccome questa relazione deve essere valida per ogni ρ e ρ_L , deve valere

$$P(j|0) = \sum_i P(ij) = P(j|L). \quad (7.6)$$

L’equazione (7.6), ottenuta dalla condizione di invarianza descritta da Von Neumann, coincide a tutti gli effetti con l’equazione (5.2) che descrive la condizione del No-Signalling Theorem. Questo prova che il No-Signalling Theorem è implicitamente incluso nella meccanica quantistica nel momento in cui si definisce il prodotto tensoriale. Quindi, tutte le dimostrazioni che, partendo dal prodotto tensoriale, dimostrano il no-signalling theorem, sono circolari.

7.4 IC-UNIUNI e IC-UNIMARG

In questa sezione si vuole mostrare un metodo alternativo per arrivare alle conclusioni dettate dal RAE. Per farlo, è necessario introdurre diversi tipi di probabilità associati a misure sul sistema [18, p. 556]:

- $P(ij)$: probabilità legata ad una misura bivariata su $L + R$ con risultato (ij) .

- $P_{uL}(i)$: probabilità legata ad una misura univariata, ovvero individuale, su L con risultato i .
- $P_{uLR}(i|0)$: probabilità legata ad una misura univariata su $L + R$ con risultato i (il sistema R non è misurato).
- $P_{mLR}(i|R)$: probabilità legata ad una misura marginale, ovvero somma di misure bivariate, con risultato i .

In generale, le due probabilità univariate non è detto che coincidano con la probabilità marginale [27], ovvero quando, per esempio, il sottosistema L isolato si comporta diversamente rispetto allo stesso congiunto con R, attraverso una sorta di influenza.

Quando, in fisica, una teoria può essere espressa in termini differenti, questi devono coincidere per far sì che la teoria sia coerente. Von Neumann applicò questo principio proprio sulle probabilità univariate, ottenendo così la relazione denominata *IC-UNIUNI*:

$$P_{uL}(i) = P_{uLR}(i|0). \quad (7.7)$$

Al contempo, è valida matematicamente la relazione *IC-UNIMARG*:

$$P_{uL}(i) = P_{mLR}(i|R). \quad (7.8)$$

In queste uguaglianze sono paragonati termini provenienti da esperimenti concettualmente differenti. Infatti, la probabilità di ottenere il risultato i nel sistema L è la stessa sia che R sia misurato, sia che R non sia misurato. Nuovamente, ecco spuntare il No-Signalling Theorem. L'obiettivo tuttavia è un altro. Attraverso IC-UNIUNI e IC-UNIMARG è possibile scrivere

$$P_{uL}(i|0) = P_{mLR}(i|R) = P_{uLR}(i|0), \quad (7.9)$$

da cui si calcola velocemente la probabilità marginale:

$$\sum_j Tr\{\rho|i_j\rangle\langle i_j|\} = Tr\{\rho(\sum_j |i_j\rangle\langle i_j|)\} = Tr\{\rho|i\rangle\langle i| \otimes \mathbf{1}_R\}. \quad (7.10)$$

In definitiva, quando viene effettuata una misura univariata, l'estensione appropriata per l'operatore A_L è $A_L \otimes \mathbf{1}_R$, che è proprio il RAE descritto in precedenza.

Conclusioni

I risultati dei teoremi No-Go rimarcano le straordinarie differenze tra il mondo classico ed il mondo quantistico. Sebbene, ai tempi della formulazione della meccanica quantistica, queste costituirono dei notevoli rompicapi che i fisici dovettero comprendere (e tal volta persino accettare), al giorno d'oggi sono essenziali per il *quantum computing*. Il quantum computing è un tipo di computazione che sfrutta i fenomeni quantistici per risolvere più velocemente ed efficacemente problemi complessi. Gli ambiti di interesse non sono solamente legati alla fisica e alla matematica, ma anche alla biologia, medicina, farmacologia e alla meteorologia. Un esempio concreto è l'*algoritmo di Grover*, che permette di individuare un elemento preciso in una lista di N elementi. Un computer classico controllerebbe mediamente $N/2$ elementi prima di trovare quello giusto. Si dice infatti che la complessità temporale è proporzionale a N e si indica come $O(N)$. Un computer quantistico su cui è implementato l'algoritmo di Grover invece, sfruttando l'entanglement, permette di risolvere lo stesso problema ma con una complessità temporale $O(\sqrt{N})$. Ancor più noto è l'*algoritmo di Shor*, che permette di affrontare un problema particolarmente arduo per un computer classico: la fattorizzazione in numeri primi. Infatti, mentre un generico computer impiega trilioni di anni per fattorizzare un numero scritto in binario a 2048 bit (complessità $O(e^{c\sqrt[3]{n(\log n)^2}})$), un computer quantistico che realizza l'algoritmo di Shor riuscirebbe a completare lo stesso compito in poche ore (complessità $O(n^2 \log n \log \log n)$).

In questo senso, lo studio della meccanica quantistica trova un grande risvolto nel quantum computing, il quale a sua volta sta rivoluzionando il settore tecnologico. È plausibile ritenere che gran parte delle tecnologie del futuro si fonderanno proprio sui principi discussi in questa tesi.

Riferimenti bibliografici

- [1] D. J. Griffiths, "Introduction to Quantum Mechanics", Pearson Prentice Hall (2017) 3-5.
- [2] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?", *Phys. Rev.* **47** (1935) 777-780.
- [3] E. Schrödinger, "Discussion of Probability Relations between Separated Systems", *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **31** (1935) 555–563.
- [4] S. J. Freedman, J. F. Clauser, "Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories"; *Phys. Rev. Lett.* **28** (1972) 938-941.
- [5] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, "Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem"; *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 460-463.
- [6] J. Bell, "On the Einstein Podolski Rosen Paradox", *Physics* **1** (1964) 195-200.
- [7] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt, "Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories", *Phys. Rev. Lett.* **23** (1969), 880-884.
- [8] J. Preskill, "Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation", California Institute of Technology (1998).
- [9] B. Schumacher, M. Westmoreland, "Quantum Processes Systems. & Information", Cambridge University Press (2010) 142-146.
- [10] W.K Wootters, W.H.Zurek, "A single quantum cannot be cloned", *Nature* **299** (1982) 802-803.
- [11] K. K. Sharma, V. P. Gerdt, P. V. Gerdt, "Milestone Developments in Quantum Information and No-Go Theorems" in "Lecture Notes in Computer Science", Springer **12563** (2020) 510–525.
- [12] A. Kalev, I. Hen, "The No-Broadcasting Theorem and its Classical Counterpart", *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 210502.
- [13] A. K. Pati, S. L. Braunstein, "Impossibility of deleting an unknown quantum state", *Nature* **404** (2000) 164–165.
- [14] J. Gruska, H. Imai, "Power, puzzles and properties of entanglement", Springer **2055** (2001) 25-68.
- [15] G.C. Ghirardi, A. Rimini, T. Weber, "A General Argument against Superluminal Transmission through the Quantum Mechanical Measurement Process", *Lett. Nuovo Cimento* **27** (1980) 293-298.
- [16] C. Simon, V. Bužek, N. Gisin, "The no-signaling condition and quantum dynamics", *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 170405.
- [17] P. Teller, "Relativity, Relational Holism, and the Bell Inequalities" in J. Cushing, E. McMullin, "Philosophical Consequences of the Quantum Theory: Reflections on Bell's Theorem", University of Notre Dame Press (1989).

- [18] J. B. Kennedy, "On The Empirical Foundations Of The Quantum No-Signalling Proofs", Cambridge University Press **62** (1995) 543-560.
- [19] T. F. Jordan, "Quantum Correlations Do Not Transmit Signals", Phys. Lett. **94** (1968) 264.
- [20] P. J. Bussey, "Superluminal Communication in the EPR Experiments", Phys. Lett. **90** (1982) 9-12.
- [21] A. Shimony, "The Search for a Naturalistic World View", Cambridge University Press (1984) 130-139.
- [22] M. Redhead, "Incompleteness, Non-locality, and Realism", Oxford University Press (1987).
- [23] P. H. Eberhard, R. R. Ross, "Quantum Field Theory Cannot Provide Faster-than-Light Communication", Found Phys Lett **2** (1989) 127-149.
- [24] J. Von Neumann, "Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik", Springer Berlin (1968).
- [25] R. Courant, D. Hilbert, "Methoden der mathematischen Physik", Springer Berlin (1924).
- [26] J. F. Jauch, "Foundations of Quantum Mechanics", Addison-Wesley Pub. Co. (1968).
- [27] G. Korn, T. Korn, "Mathematical Handbook for Scientists and Engineers", New York: J. Wiley and Sons (1968).

Ringraziamenti

Vorrei dedicare un breve paragrafo a coloro che mi hanno affiancato durante il mio percorso accademico, grazie alle quali ho potuto affrontare e superare tre anni parecchio complicati. Queste persone sono, Leonardo, Antonella, Iacopo, Paola.

Vorrei infine ringraziare il professore Francesco Ravanini per tutte le ore che mi ha dedicato e per la sua enorme disponibilità.