

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”
Corso di Laurea in Fisica

MODELLI DI INFLAZIONE COSMOLOGICA

Relatore:
Prof. Roberto Casadio

Presentata da:
Francesco Graziani

Anno Accademico 2024/2025

Indice

1	Abstract	2
2	Richiami di cosmologia	3
2.1	La metrica FRW	3
2.2	La forma dell'universo	3
2.3	L'espansione dell'universo e la costante di Hubble	4
2.4	Il modello del fluido perfetto e la costante cosmologica	6
2.5	Le equazioni di Friedmann	7
2.6	La teoria del Big Bang	8
3	Le incompletezze della teoria del Big Bang	9
3.1	Il problema della piattezza	9
3.2	La radiazione cosmica di fondo	10
3.3	Il problema dell'orizzonte	12
4	L'inflazione	18
4.1	L'inflazione come soluzione al problema dell'orizzonte	18
4.2	L'inflazione come soluzione al problema della piattezza	20
4.3	Le condizioni per l'inflazione	21
5	Campi scalari del modello inflazionario	25
5.1	L'inflatone	25
5.2	Il modello lagrangiano della dinamica inflazionaria	27
6	Modelli inflazionari a campo singolo	34
6.1	L'inflazione slow-roll	34
6.2	Alcuni esempi di modelli slow-roll	39
6.3	L'inflazione K	41
7	Modelli inflazionari ibridi	47
8	Oltre i modelli inflazionari "classici"	49

1 Abstract

La cosmologia è una delle branche della fisica che si sta sviluppando maggiormente nel corso degli ultimi anni. Si tratta di una teoria ancora incompleta sotto molti punti di vista, ma che pone interrogativi estremamente affascinanti e antichi quanto il genere umano stesso: come è nato l'universo? Come si è formata la materia che ci circonda e di cui siamo fatti? L'universo ha una fine? E, se la risposta è "sì", quando cesserà di esistere?

Addentrandosi sempre di più in questa disciplina, nasce la speranza di potere, un giorno, dare una risposta a questi grandi interrogativi.

All'interno di questo elaborato si tornerà indietro nel tempo fino ai primissimi istanti successivi alla nascita dell'universo (da circa $10^{-35}s$ a circa $10^{-30}s$ dopo l'inizio), durante i quali quest'ultimo è andato incontro a una fase di espansione rapidissima, (a velocità molto maggiori di quella della luce) chiamata *inflazione*, (dall'inglese *inflate*, ossia "gonfiarsi") in assenza della quale il cosmo non sarebbe come lo si osserva oggi.

Date le dimensioni microscopiche che caratterizzavano l'universo primordiale, sarebbe necessario avvalersi della meccanica quantistica per descrivere lo spazio-tempo e la gravità in quei primi istanti.

Tuttavia, per cominciare, è utile sviluppare una trattazione "classica" basata solo sulla Relatività Generale che, nonostante l'uso di concetti e strumenti matematici più semplici, permette comunque di trarre alcune conclusioni importanti.

2 Richiami di cosmologia

2.1 La metrica FRW

La cosmologia moderna si basa su due principi fondamentali:

- 1) **Principio copernicano:** non esiste un osservatore privilegiato nell'universo;
- 2) **Principio cosmologico:** l'universo è omogeneo e isotropo;

La Relatività Generale descrive l'universo come una varietà differenziale quadridimensionale. A ogni punto di questa varietà è associata la seguente quadrupla di *coordinate comoventi*:

$$\{t, r, \theta, \phi\} \quad (2.1)$$

dove l'origine $r = 0$ è totalmente arbitraria per il principio copernicano e t è il tempo proprio di un osservatore comovente con il cosiddetto *fluido cosmico* (*omogeneo*) che permea l'universo, costituito da tutta la materia e la radiazione presente.

I principi di omogeneità e isotropia definiscono univocamente la seguente metrica sulla varietà appena descritta, detta *metrica FRW*:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (2.2)$$

dove la funzione del tempo $a(t)$ è detta *fattore di scala* e k è detta *costante di curvatura* che, se opportunamente riscalata, può assumere i seguenti tre valori: $k = 0; \pm 1$.

2.2 La forma dell'universo

La presenza del fattore di scala indica che la metrica FRW non è statica.

A ogni istante di tempo t posso definire un'ipersuperficie Σ_t (omogenea e isotropa) descritta dalle sole coordinate spaziali e sulla quale uno spostamento infinitesimo è dato da:

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.3)$$

dove si pone:

$$dR_{(3)}^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} \quad (2.4)$$

ossia il quadrato del differenziale della distanza radiale propria riscalata su Σ_t . Si noti che questa non è la vera distanza propria fra due punti.

Per ottenerla, occorre moltiplicarla per il fattore di scala: $dR = a(t)dR_{(3)}$.

La precedente espressione, che definisce la metrica sulla singola ipersuperficie, ha dipendenza unicamente da k , per cui si possono avere i tre seguenti scenari:

1) $k = 0 \implies d\sigma^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) = dx^2 + dy^2 + dz^2$, per cui le ipersuperfici sono euclidee e l'universo è piatto;

2) $k = +1 \implies dR_{(3)} = \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \implies R_{(3)} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1-(r')^2}} = \arcsin(r)$, per cui $R_{(3)}$ risulta superiormente limitato e, dal momento che $0 \leq r \leq 1$, si pone $r = \sin(X)$.

Da qui si ottiene: $d\sigma^2 = dX^2 + \sin^2(X)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$, per cui Σ_t è una sfera tridimensionale e l'universo è chiuso;

3) $k = -1 \implies dR_{(3)} = \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} \implies R_{(3)} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1+(r')^2}} = \operatorname{arcsinh}(r)$, per cui si pone $r = \sinh(X)$ e si ottiene: $d\sigma^2 = dX^2 + \sinh^2(X)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$, per cui Σ_t è un iperboloide tridimensionale e l'universo è aperto.

2.3 L'espansione dell'universo e la costante di Hubble

Si noti che $d\sigma^2$ non dipende dal tempo, per cui l'universo non va incontro a deformazione durante la sua evoluzione, ma solo a un'espansione dello spazio descritta dal fattore di scala.

La metrica cambia nel tempo e perciò cambia anche la distanza fra i vari punti del cosmo, non perché questi punti si muovano, ma perché si allunga lo spazio fra di essi.

Per il momento si è considerato il fattore di scala semplicemente come una funzione arbitraria del tempo.

A partire da esso si definisce una grandezza di cruciale importanza in cosmologia, chiamata impropriamente *costante di Hubble* dal momento che in realtà dipende anch'essa dal tempo:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (2.5)$$

La costante di Hubble ha le dimensioni del reciproco di un tempo (u.d.m. s^{-1}) e rappresenta il tasso di espansione relativo dell'universo, ossia misura la rapidità dell'espansione in proporzione alla dimensione attuale del cosmo.

L'andamento nel tempo del fattore di scala, e quindi della costante di Hubble, non può essere noto a priori. Per studiarlo è necessario misurare la dilatazione o la

contrazione dello spazio-tempo su scala cosmica.

L'osservazione di galassie lontane milioni o addirittura miliardi di anni luce consente di rispondere parzialmente a questo problema, poiché la radiazione elettromagnetica da esse emessa subisce un *redshift*, non causato dal loro moto relativo rispetto alla Terra, ma proprio dalla dilatazione dello spazio che si interpone fra la Terra e la sorgente luminosa.

Il redshift è definito nel modo seguente:

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_s}{\lambda_s} \quad (2.6)$$

dove $\lambda_{o,s}$ sono rispettivamente la lunghezza d'onda della radiazione registrata al tempo t_o dell'osservazione e quella della stessa radiazione al momento t_s dell'emissione.

Si dimostra che il redshift può essere anche espresso come:

$$z = \frac{a_o}{a_s} - 1 \quad (2.7)$$

dove $a_{o,s}$ sono rispettivamente il fattore di scala al tempo dell'osservazione del segnale e quello al tempo della sua emissione.

Dal momento che si osserva un redshift si ha che $\lambda_o > \lambda_s \implies z > 0 \implies \frac{a_o}{a_s} > 1 \implies a_o > a_s$.

Questo dimostra un fatto cruciale: il fattore di scala è una funzione crescente del tempo e perciò l'universo si sta espandendo (si ricordi che si tratta di un'espansione intrinseca legata all'evoluzione della metrica).

Non solo: ulteriori prove sperimentali dimostrano che l'universo è attualmente soggetto a un'espansione accelerata ($\ddot{a} > 0$).

A partire dal *redshift* è possibile derivare la famosa *legge di Hubble*:

$$d = \frac{z}{H_0} \quad (2.8)$$

dove d è la distanza di una sorgente luminosa dall'osservatore e H_0 è il valore della costante di Hubble al tempo presente.

Questa legge afferma che i punti dello spazio-tempo in espansione (ai quali possono corrispondere oggetti cosmici come galassie) si allontanano dall'osservatore a una velocità $v \sim z$ che è direttamente proporzionale alla distanza dall'osservatore stesso. La costante di proporzionalità è H_0^{-1} , il cui valore è detto *tempo di Hubble*, ossia un'approssimazione dell'età dell'universo.

2.4 Il modello del fluido perfetto e la costante cosmologica

Fino a questo momento è stato trattato l'universo da un punto di vista puramente geometrico, ossia come una varietà differenziale quadridimensionale su cui è definita una metrica, avente una certa forma e soggetta a espansione accelerata.

Tuttavia, non è ancora stato fatto alcun riferimento a tutta la materia e alla radiazione presente al suo interno.

L'universo è infatti permeato da una miriade di galassie, ammassi, nebulose, pianeti e altri corpi celesti che sono distribuiti uniformemente su tutto lo spazio.

L'insieme di questi oggetti può essere trattato da un punto di vista fisico come un *fluido (cosmico) perfetto*, ossia un modello ideale di materia avente le seguenti proprietà:

- 1) È descritto da due variabili di stato: la densità di energia (ρ) e la pressione (p);
- 2) È isotropo e omogeneo;
- 3) Ha viscosità nulla;
- 4) Non conduce calore;

Il tensore energia-impulso di un fluido perfetto ha la forma:

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p) \quad (2.9)$$

e soddisfa la seguente *equazione di continuità*:

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0 \quad (2.10)$$

La componente con $\nu = 0$ di questa equazione tensoriale dà la conservazione dell'energia:

$$-\nabla_{\mu} T_0^{\mu} = \dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (2.11)$$

Le variabili di stato del fluido sono legate da un'equazione di stato che si suppone abbia la seguente forma:

$$p = \omega \rho \quad (2.12)$$

dove ω è una costante.

Sostituendo la (2.12) nella (2.11) si ottiene:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega) \frac{\dot{a}}{a} \implies \int_0^t \frac{\dot{\rho}}{\rho} dt = -3(1 + \omega) \int_0^t \frac{\dot{a}}{a} dt \implies \rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad (2.13)$$

Questo vuol dire che:

$$\rho a^{3(1+w)} = \text{const} = \rho_{0w} a_0^{3(1+w)} \quad (2.14)$$

dove tutte le grandezze indicizzate con '0' corrispondono al valore che assumono nel presente.

Il fluido cosmico è costituito da componenti di diversa natura, a ognuna delle quali può essere associato un diverso valore di ω :

1) **Polvere:** materia non relativistica che non esercita alcuna forza al di fuori della gravità e quindi nessuna pressione, per cui:

$$p = 0 \implies \omega = 0 \implies \rho_p \propto a^{-3} \quad (2.15)$$

2) **Radiazione:** particelle prive di massa (come i fotoni) che si muovono alla velocità della luce. A causa dell'assenza di massa si annulla la traccia del tensore energia impulso e si ottiene la seguente equazione di stato:

$$-\rho + 3p = 0 \implies p = \frac{1}{3}\rho \implies \rho_r \propto a^{-4} \quad (2.16)$$

3) **Energia oscura:** energia associata allo spazio vuoto necessaria a spiegare l'espansione accelerata dell'universo, fenomeno non compatibile con gli effetti di polvere e radiazione. L'equazione di stato dell'energia oscura ha la seguente forma:

$$\rho = -p = M_{pl}^2 \Lambda \quad (2.17)$$

dove Λ è una costante fondamentale della cosmologia, ovvero la *costante cosmologica*, mentre $M_{pl} = \frac{1}{\sqrt{8\pi G_N}}$ è detta *massa di Plank ridotta*.

2.5 Le equazioni di Friedmann

La forma simmetrica della metrica FRW riduce le equazioni di campo di Einstein a sole due equazioni che descrivono l'evoluzione del fattore di scala dato uno specifico contenuto di materia. Esse sono dette *equazioni di Friedmann*:

$$\begin{cases} H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{1}{3M_{pl}^2} \rho \\ \dot{H} + H^2 = -\frac{1}{6M_{pl}^2} (\rho + 3p) \end{cases}$$

Si consideri la prima delle due equazioni e si dividano entrambi i membri per H^2 :

$$1 + \frac{k}{a^2 H^2} = \frac{\rho}{3H^2 M_{pl}^2} \quad (2.18)$$

Definisco il seguente *parametro di densità* come:

$$\Omega = \frac{\rho}{3H^2 M_{pl}^2} = \frac{\rho}{\rho_{crit}} \quad (2.19)$$

dove ρ_{crit} è detta *densità critica*, e riscrivo la (2.18) nella seguente forma:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2} \quad (2.20)$$

Dalla (2.20) emerge un importante legame fra il parametro di densità e la costante di curvatura, ovvero fra la densità di energia del fluido cosmico e la forma dell'universo. In particolare sono possibili i seguenti tre casi:

- 1) $\rho < \rho_{crit} \iff \Omega < 1 \iff k = -1 \iff$ Universo aperto;
- 2) $\rho = \rho_{crit} \iff \Omega = 1 \iff k = 0 \iff$ Universo piatto;
- 3) $\rho > \rho_{crit} \iff \Omega > 1 \iff k = 1 \iff$ Universo chiuso;

La (2.20), che contiene il parametro di densità Ω , può essere riscritta sfruttando la (2.14) ottenendo così:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2 [\Omega_w \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w} + 1 - \Omega_w] \quad (2.21)$$

che in alternativa può essere scritta come:

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 [\Omega_w \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w} + 1 - \Omega_w] \quad (2.22)$$

dove è stato posto: $\Omega_w = \frac{\rho_{0w}}{\rho_{crit,0}}$

2.6 La teoria del Big Bang

La teoria del Big Bang è , al giorno d'oggi, il modello più diffuso per spiegare la nascita dell'universo.

In base alle conclusioni tratte sull'evoluzione del fattore di scala (parag. 2.3), che risulta essere una funzione crescente del tempo, è possibile supporre che l'universo, in tempi remoti, fosse estremamente piccolo e denso ($a = 0$, ossia una singolarità in corrispondenza di un certo t_{in} , a partire dal quale ebbe inizio l'espansione).

Tutta la materia e l'energia erano confinate in uno spazio infinitesimo che si è successivamente espanso e raffreddato fino ad assumere la forma che conosciamo oggi.

Tuttavia, nuove osservazioni sperimentali hanno messo alla luce fenomeni e fatti del tutto inaspettati che il modello standard del Big Bang non riusciva a spiegare.

3 Le incompletezze della teoria del Big Bang

La teoria del Big Bang fu una svolta epocale nello studio della cosmologia. Si sviluppò nella prima metà del XX secolo per creare un modello cosmologico che includesse l'espansione dell'universo e da allora si sono accumulate una serie di prove che hanno contribuito a rafforzarla.

Una di queste, per esempio, è il fatto che il modello del Big Bang interpreta bene le *abbondanze cosmiche*, ossia prevede in maniera precisa il rapporto fra la quantità di idrogeno e di elio presenti nel cosmo.

Tuttavia, come precedentemente accennato, questa teoria si rivelò presto incompleta, poiché c'erano alcune questioni che proprio non riusciva a spiegare.

Fra queste, ce n'erano tre particolarmente cruciali:

- 1) Il problema dell'orizzonte;
- 2) Il problema della piattezza;
- 3) Il problema del monopolo;

L'ultimo di questi non verrà approfondito in questo discorso. Si accenna solo al fatto che, secondo la teoria del Big Bang, all'inizio dell'universo sarebbero dovuti esistere dei *monopoli magnetici*, ossia particelle aventi una carica magnetica netta. Questi oggetti però non sono mai stati osservati. Si sono sempre osservati solo e unicamente i comunissimi dipoli magnetici.

Gli altri due problemi, invece, verranno approfonditi nei prossimi paragrafi.

3.1 Il problema della piattezza

Nel paragrafo 2.2 si è parlato della forma dell'universo, ossia della curvatura delle ipersuperfici Σ_t in base al valore del parametro k . Queste possono essere sferiche ($k = 1$), piatte ($k = 0$) o iperboliche ($k = -1$).

Inoltre, nel paragrafo 2.5, sfruttando le equazioni di Friedmann, è stato possibile legare il parametro di curvatura k al parametro di densità Ω , ossia legare la forma dell'universo alla densità del fluido cosmico.

A questo punto sorge spontanea una domanda: qual è la forma del nostro universo? È sferico, piatto o iperbolico?

Il risultato confermato da varie misure effettuate nel corso del tempo è sorprendente: Ω è praticamente uguale a 1 e quindi l'universo è piatto.

Questo risultato è sorprendente perché, se adesso l'universo è piatto, nei suoi istanti primordiali doveva avere una condizione di densità particolarissima, ossia esattamente uguale a quella critica o al massimo differente di una frazione infinitesima ($|1 - \Omega| \lesssim 10^{-55}$).

Sono innumerevoli le condizioni che possono portare a un universo curvo, mentre sono pochissime quelle che invece lo rendono euclideo.

Sembrava quindi incredibile che proprio quelle condizioni peculiari si fossero manifestate. Poteva trattarsi di puro caso, ma avrebbe anche potuto celarsi qualcosa sotto questo fatto, e quel "qualcosa" doveva essere spiegato.

3.2 La radiazione cosmica di fondo

Nel 1964 venne fatta una scoperta incredibile che avrebbe cambiato per sempre la storia della cosmologia e che fornì una prova ulteriore alla teoria del Big Bang.

Arno Penzias e Robert Wilson, due giovani fisici, scoprirono la cosiddetta *radiazione cosmica di fondo*, detta anche *CMB*, ossia *cosmic microwave background*.

Stando alla teoria del Big Bang, l'espansione dell'universo aveva portato al progressivo raffreddamento di questa radiazione fino alla temperatura di circa 2.7K. Una traccia di essa non solo doveva esistere, ma avrebbe dovuto pervadere tutto l'universo.

Si ricordi il legame fra temperatura e radiazione: qualunque corpo emette radiazione in base alla sua temperatura.

L'occhio umano è in grado di vedere solo una piccola porzione dello spettro elettromagnetico per cui riesce a osservare direttamente la radiazione emessa solo da oggetti ad alta temperatura, come ad esempio un metallo incandescente.

Se lo stesso metallo non fosse incandescente, emetterebbe ugualmente radiazioni, ma la loro frequenza sarebbe troppo bassa per essere percepita dai nostri occhi.

La radiazione cosmica di fondo ha avuto origine in un tempo $t_d \approx 380.000$ anni dopo il Big Bang.

Prima di allora la temperatura dell'universo era sufficientemente alta (oltre 3000K) da far sì che protoni ed elettroni formassero un gas totalmente ionizzato.

In una situazione di questo tipo l'interazione dominante fra materia e radiazione (i fotoni) è il cosiddetto *scattering di Thompson*, ossia la diffusione elastica dei fotoni sugli elettroni liberi.

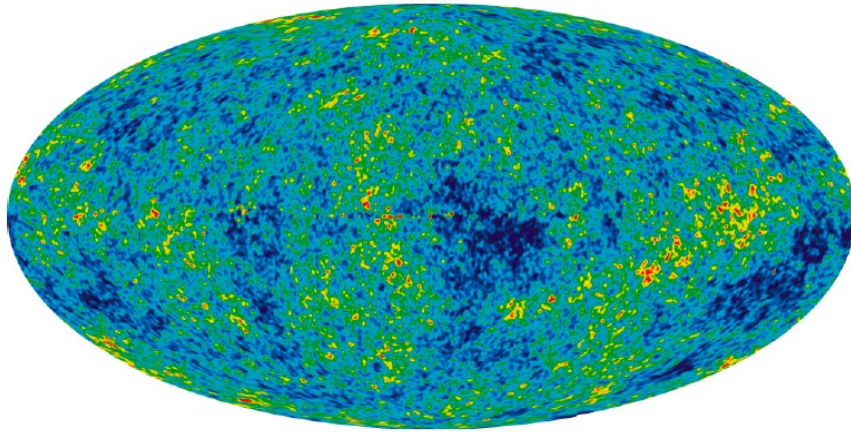


Figura 1: [1], mappa della radiazione cosmica di fondo ottenuta dalla missione WMAP. Le differenze cromatiche evidenziano le piccole anisotropie della temperatura.

I fotoni subivano continui processi di diffusione, senza quindi riuscire a propagarsi. Il loro cammino libero medio era molto piccolo, per cui l'universo era un gas opaco di particelle subatomiche.

In seguito, quando la temperatura scese sotto i 3000K, iniziò il processo di *ricombinazione*: l'energia di protoni ed elettroni scese a tal punto da rendere possibile la formazione di uno stato legato, ovvero dell'atomo di idrogeno.

Come conseguenza del processo di ricombinazione, la densità degli elettroni liberi crollò e iniziò la fase di *disaccoppiamento* (*decoupling*) fra materia e radiazione.

I fotoni smisero di interagire con gli elettroni e diventarono liberi di propagarsi nello spazio. Da quel momento materia e radiazione iniziarono a evolversi separatamente.

La radiazione cosmica di fondo aveva però una caratteristica fondamentale e inaspettata che mise in crisi la teoria del Big Bang: era quasi perfettamente omogenea in tutto il cosmo.

Questa proprietà, che sembrerebbe in accordo con il Principio Cosmologico, in realtà racchiude una questione molto più ampia che verrà trattata in dettaglio nel prossimo paragrafo, ossia il cosiddetto *problema dell'orizzonte*.

In realtà, per quanto sorprendentemente uniforme, questa radiazione fossile presentava comunque piccole anisotropie che, grazie al miglioramento degli strumenti di misura, sono state apprezzate con maggiore precisione, come rappresentato in Figura 1 (le fluttuazioni sono minori di $10\mu K$).

3.3 Il problema dell'orizzonte

Prima di trattare il problema dell'orizzonte è necessario introdurre alcuni nuovi concetti.

Il tempo conforme e l'orizzonte comovente

Per studiare la propagazione della luce, e dunque anche la struttura causale dell'universo, è necessario definire il *tempo conforme*, ossia una grandezza data dalla seguente espressione:

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)} \quad (3.1)$$

Si può quindi scrivere la metrica FRW usando il tempo conforme e raccogliere il quadrato del fattore di scala, ottenendo in questo modo una metrica statica di Minkowski moltiplicata per un fattore conforme $a(\tau)$ dipendente dal tempo:

$$ds^2 = a^2(\tau)[-d\tau^2 + dr^2 + r^2(\sin^2\theta d\theta^2 + d\phi^2)] = a^2(\tau)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (3.2)$$

L'espressione (3.2) si semplifica se si considera un raggio di luce che si propaga in direzione radiale rispetto a un osservatore arbitrario, poiché si annullano i differenziali delle coordinate angolari:

$$ds^2 = a^2(\tau)[-d\tau^2 + dr^2] \quad (3.3)$$

Esattamente come nei diagrammi di Minkowski, le traiettorie nulle dei fotoni ($ds^2 = 0$) sono rette parallele alle bisettrici dei quadranti nel piano $\tau - r$:

$$r(\tau) = \pm\tau + \text{const} \quad (3.4)$$

A questo punto è possibile calcolare la distanza che un fotone può percorrere fra due istanti di tempo t_i e t , che, in base alla (3.4), è equivalente alla quantità di tempo conforme trascorsa fra t_i e t .

Dal momento che i fotoni viaggiano alla velocità della luce, questa distanza sarà maggiore di quella percorribile da qualunque particella massiva nello stesso lasso di tempo:

$$\Delta r = \Delta\tau = \tau - \tau_i = \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (3.5)$$

Si pongano:

- 1) $t_i = 0$, ossia l'istante di "origine dell'universo";
- 2) $a_i = a(t_i = 0) = 0$, ossia la singolarità iniziale;

e si definisca l'*orizzonte comovente (di una particella)*, ossia la distanza che la luce avrebbe potuto percorrere dall'inizio dell'universo a un istante successivo t :

$$\Delta r_{max}(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \tau(t) - \tau(0) \quad (3.6)$$

Il raggio comovente di Hubble e la sfera di Hubble

Il *raggio comovente di Hubble* è definito nel seguente modo:

$$R_H = \frac{1}{aH} \quad (3.7)$$

Questa grandezza identifica la cosiddetta *sfera di Hubble*, ossia una sfera centrata sull'osservatore avente raggio fisico:

$$r_H = acR_H = \frac{c}{H} \quad (3.8)$$

La superficie della Sfera di Hubble è detta *orizzonte di Hubble*.

In base alla precedente definizione e alla Legge di Hubble, i corpi celesti situati all'interno della sfera di Hubble ($d < r_H$) si allontanano dall'osservatore a una velocità minore di quella della luce e viceversa per quelli posti all'esterno.

La sfera di Hubble è dunque la distanza dall'osservatore di un oggetto comovente con l'espansione dell'universo a una velocità uguale a quella della luce.

$$\begin{cases} d = \frac{v}{H} \\ d < r_H = \frac{c}{H} \end{cases} \implies \frac{v}{H} < \frac{c}{H} \implies v < c$$

$$\begin{cases} d = \frac{v}{H} \\ d > r_H = \frac{c}{H} \end{cases} \implies \frac{v}{H} > \frac{c}{H} \implies v > c$$

Si noti come questo fatto non violi i postulati della relatività, perché non c'è nessun oggetto che si muove nello spazio a velocità maggiore di quella della luce, ma è lo spazio stesso che si dilata a tale velocità.

La sfera di Hubble non coincide con l'universo osservabile: è possibile osservare galassie al di fuori di essa, perché la loro luce è stata emessa quando erano più

vicine all'osservatore e lo spazio si è espanso durante il viaggio della radiazione.

Si notino inoltre le differenze fra il raggio comovente di Hubble e l'orizzonte comovente: il primo è definito istantaneamente per ogni tempo t e gli oggetti possono entrare e uscire dalla sfera di Hubble, mentre il secondo tiene conto dell'intera storia passata dell'osservatore e quando un oggetto entra al suo interno ci resterà in eterno.

Si introduce a questo punto il concetto di *scala cosmologica*, ossia la lunghezza caratteristica associata alla perturbazione di una certa grandezza, come ad esempio la radiazione cosmica di fondo.

Una perturbazione è identificata da un certo numero d'onda comovente k , per cui la lunghezza caratteristica che definisce la scala comovente è data da:

$$\lambda_{com} = \frac{2\pi}{k} \quad (3.9)$$

Per ottenere la corrispondente scala fisica è sufficiente moltiplicare la (3.9) per $a(t)$.

Una questione cruciale è il confronto delle scale cosmiche con il raggio comovente di Hubble, che può essere visto come una *scala caratteristica* dell'universo.

Infatti, in base alla legge di Hubble si può affermare che:

1) Se $\lambda_{com} < (aH)^{-1}$, allora si dice che la scala è all'interno dell'orizzonte. I punti del cosmo separati da una distanza comovente λ_{com} si allontanano a velocità minore della luce, per cui possono essere causalmente connessi e la perturbazione di un certo ente fisico (come la CMB) definita in quei punti continua a oscillare e a evolvere.

2) Se $\lambda_{com} > (aH)^{-1}$, allora si dice che la scala è all'esterno dell'orizzonte. I punti del cosmo separati da una tale distanza si allontanano a velocità maggiore di quella della luce, per cui non possono essere causalmente connessi e ogni perturbazione risulta congelata.

Le scale cosmiche possono entrare e uscire dall'orizzonte. Questo significa che due punti che non sono causalmente connessi nel presente perché troppo distanti come nel punto 2), nel passato, quando erano più vicini e si allontanavano a velocità minore, avrebbero potuto esserlo.

Si cerchi adesso un'espressione che descriva l'evoluzione del tempo conforme e del raggio comovente di Hubble.

Per la materia ordinaria vale la *condizione di energia forte*, che si traduce nella seguente equazione:

$$1 + 3w > 0 \quad (3.10)$$

In un universo permeato da un fluido perfetto descritto da un'equazione di stato del tipo (2.12), il raggio comoviente di Hubble aumenta con l'espansione dell'universo. Infatti:

$$\frac{1}{aH} = \frac{1}{\dot{a}} = \frac{1}{a_0 H_0 [\Omega_w (a_0/a)^{1+3w} + 1 - \Omega_w]^{1/2}} \propto a^{\frac{1}{2}(1+3w)} \quad (3.11)$$

dove ho espresso $\dot{a}$ tramite la (2.21).

Si può scrivere il tempo conforme con il seguente cambio di variabile:

$$a = a(t) \implies da = \dot{a}(t)dt \implies \tau = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{a(t)} \frac{da'}{a' \cdot \dot{a}} \quad (3.12)$$

Dove ancora una volta è stato esplicitato $\dot{a}$ tramite la (2.21) ottenendo la seguente espressione per il tempo conforme:

$$\tau = \frac{1}{H_0 a_0} \int_0^{a(t)} \frac{da'}{a' [\Omega (a_0/a')^{1+3w} + 1 - \Omega]^{1/2}} \propto \frac{2}{1+3w} a^{\frac{1}{2}(1+3w)} \quad (3.13)$$

Inoltre, data la (3.13), la singolarità iniziale ($a = 0$) corrisponde a $\tau = 0$ e, dalla (3.6), segue che l'orizzonte comoviente è finito.

Il problema del rapporto di causalità

Dal fatto che l'orizzonte comoviente sia finito segue che sia finito anche il tempo conforme trascorso fra l'inizio dell'universo ($t_i = 0$) e un istante successivo, come ad esempio t_d , ossia l'inizio del processo di disaccoppiamento fra materia e radiazione introdotto nel paragrafo (3.2).

Questo però pone un problema cruciale che risulta evidente dal calcolo dell'angolo sotteso dall'orizzonte comoviente al tempo della ricombinazione, definito come il rapporto fra l'orizzonte comoviente al tempo della ricombinazione e la distanza angolare comoviente fra l'osservatore (con redshift $z = 0$) e la ricombinazione ($z \simeq 1090$):

$$\theta_{hor} = \frac{d_{hor}}{d_A} \quad (3.14)$$

Si definisce la seguente grandezza:

$$\mathcal{I}(z_1, z_2) = \tau_2 - \tau_1 = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{H(z)} \quad (3.15)$$

ossia la distanza comoviente fra i redshift z_1 e z_2 , con:

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\gamma(1+z)^4 + \Omega_\Lambda} \quad (3.16)$$

dove $\Omega_{m,\gamma,\Lambda}$ sono costanti note.

L'orizzonte comoviente al tempo della ricombinazione è dunque dato da:

$$d_{hor} = \tau_{rec} - \tau_i \approx \mathcal{I}(z_{rec}, \infty) \quad (3.17)$$

In un universo piatto, la distanza angolare comoviente fra l'osservatore e la ricombinazione è:

$$d_A = \tau_0 - \tau_{rec} = \mathcal{I}(0, z_{rec}) \quad (3.18)$$

A questo punto è possibile calcolare θ_{hor} :

$$\theta_{hor} = \frac{d_{hor}}{d_A} = \frac{\mathcal{I}(z_{rec}, \infty)}{\mathcal{I}(0, z_{rec})} \simeq 1.16^\circ \quad (3.19)$$

Questo risultato fondamentale indica che due punti nel cielo (supponendo che siano osservati dalla Terra) separati da una distanza angolare $\theta > \theta_c = 2\theta_{hor}$ non avrebbero mai potuto essere legati da un rapporto di causa-effetto (si veda Figura 2).

Tuttavia, come precedentemente affermato nel paragrafo (3.2), le misurazioni effettuate sulla radiazione cosmica di fondo ne evidenziano una quasi perfetta omogeneità.

Questo è evidentemente in contrasto con il precedente risultato, per cui due punti del cosmo possono essere legati da un rapporto causa-effetto solo se separati da una distanza angolare non superiore a $\theta_c \simeq 2.3^\circ$.

Il rapporto causale fra le varie aree dell'universo è necessario per garantire l'omogeneità della radiazione cosmica di fondo.

Questa contraddizione che compare nella teoria del Big Bang è il cosiddetto *problema dell'orizzonte*.

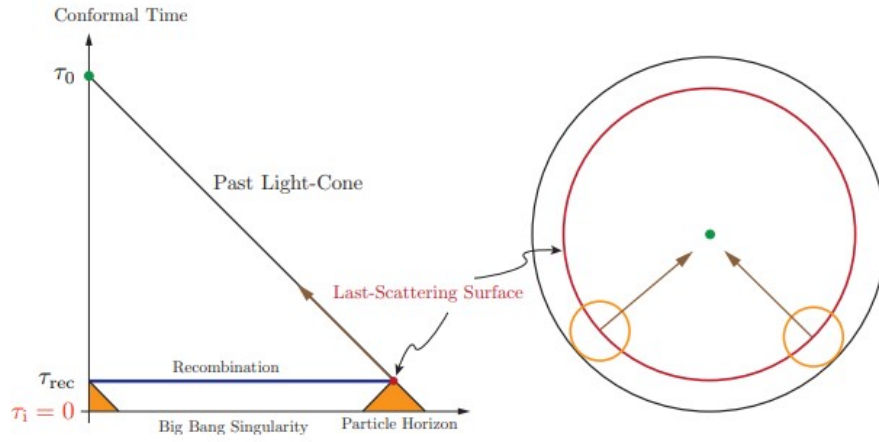


Figura 2: [1], diagramma di Minkowski conforme nel modello della cosmologia FRW standard. Il cono di luce del passato di un evento presente (avvenuto al tempo conforme τ_0) può essere in rapporto causale con i due eventi evidenziati avvenuti al tempo conforme della ricombinazione. Tuttavia i coni di luce del passato di quei due eventi non si sovrappongono e quindi non possono essere causalmente connessi.

4 L'inflazione

La radiazione cosmica di fondo può essere omogenea soltanto se è esistito un momento nella storia dell'universo in cui tutti i punti sono stati causalmente connessi fra loro, ma una simile condizione non era prevista dalla teoria del Big Bang.

Per risolvere il problema dell'orizzonte e il problema della piattezza fu quindi necessario completare il modello introducendo l'ipotesi dell'*inflazione*, ossia una fase dell'universo primordiale durante la quale è avvenuta una contrazione del raggio comoviente di Hubble, ossia:

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0 \quad (4.1)$$

Se questa fase dura abbastanza a lungo, il problema dell'orizzonte e il problema della piattezza vengono risolti. Nei prossimi paragrafi verrà illustrato come questo avviene.

4.1 L'inflazione come soluzione al problema dell'orizzonte

L'ipotesi inflazionaria (4.1) implica una violazione della condizione di energia forte (3.10) dal momento che il raggio comoviente di Hubble ha un andamento del tipo (3.11). Si ha dunque:

$$1 + 3w < 0 \quad (4.2)$$

Si nota dunque che la singolarità ($a = 0$) è spostata a un tempo conforme negativo:

$$\tau_i \propto \frac{2}{1 + 3w} a_i^{\frac{1}{2}(1+3w)} = -\infty \quad (4.3)$$

La (4.3) indica che è trascorso molto più tempo conforme fra la singolarità e il disaccoppiamento di quanto si pensasse.

Il diagramma di Minkowski rappresentato in Figura 2 assume un nuovo aspetto, come si nota dalla Figura 3.

Adesso i coni di luce del passato dei due eventi evidenziati avvenuti al tempo conforme della ricombinazione possono essere causalmente connessi dal momento che rispettivi coni di luce del passato hanno abbastanza tempo per sovrapporsi.

Un raggio comoviente di Hubble decrescente garantisce che anche punti enormemente distanti hanno avuto abbastanza tempo per entrare in contatto prima dell'istante $\tau = 0$ e quindi per stabilire l'uniformità spaziale della radiazione cosmica di fondo.

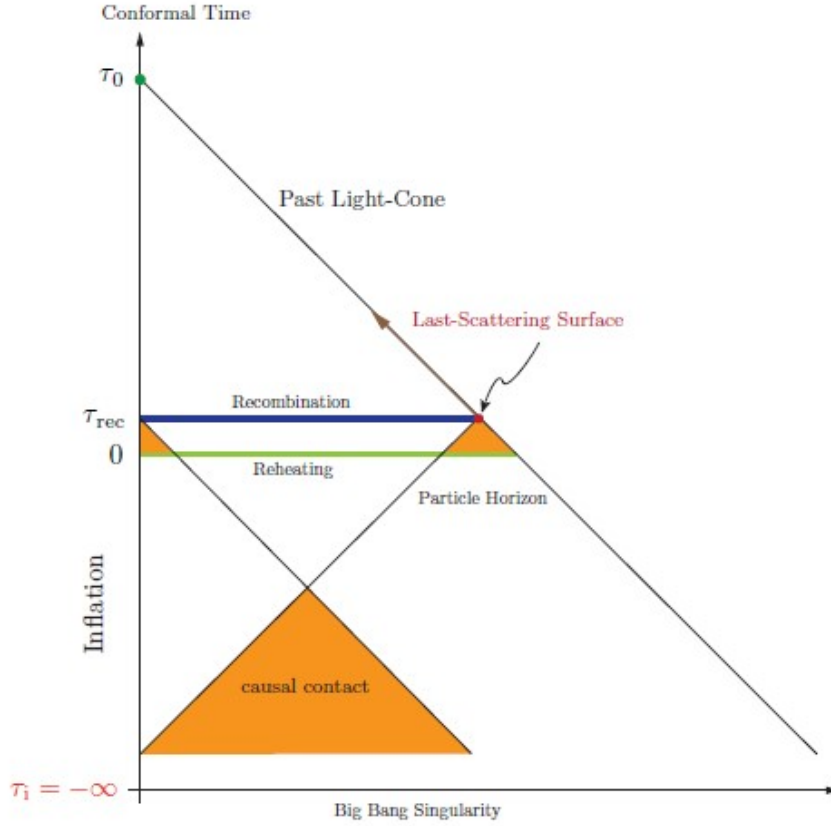


Figura 3: [1], diagramma di Minkowski conforme per la cosmologia inflazionaria.

Grazie all'introduzione dell'inflazione, il problema dell'orizzonte viene quindi risolto.

In cosmologia inflazionaria $\tau = 0$ non è l'istante della singolarità iniziale, ma diventa l'istante del ri-riscaldamento (dall'inglese *reheating*), ossia il momento successivo all'inflazione a partire dal quale si formano particelle e radiazione (che riscaldano l'universo) e torna a essere valida la teoria del Big Bang standard.

Il grafico in Figura 4 mostra come le scale comoventi per un certo periodo erano interne all'orizzonte, per cui le aree dell'universo erano causalmente connesse fra loro. In questa fase è stata possibile lo sviluppo dell'omogeneità e le piccole perturbazioni presenti potevano evolvere.

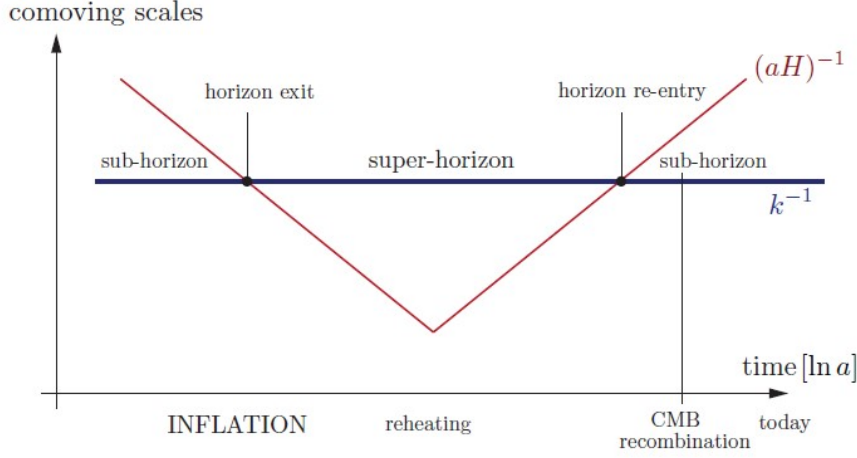


Figura 4: [1], soluzione al problema dell'orizzonte.

Durante l'inflazione il raggio comoviente di Hubble decresce, mentre le scale comovienti restano invariate e perciò escono dall'orizzonte di Hubble (le scale maggiori escono prima, quelle minori escono dopo) e le perturbazioni presenti si sono congelate.

Con la fine dell'inflazione però il raggio comoviente di Hubble ricomincia a crescere per cui, dopo un certo periodo, le scale comovienti iniziano a rientrare nell'orizzonte (quelle più piccole rientrano prima, quelle più grandi rientrano successivamente: per esempio, alcune scale sono talmente grandi che non sono ancora rientrate nell'orizzonte) e le perturbazioni primordiali che si erano congelate durante l'inflazione rientrano a loro volta generando piccole anisotropie nella struttura cosmica. Queste imperfezioni sono alla base delle anisotropie della CMB e sono osservabili ancora oggi.

4.2 L'inflazione come soluzione al problema della piattezza

La condizione inflazionaria (4.1) è in grado di risolvere anche il problema della piattezza.

Si consideri la prima equazione di Friedmann:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{1}{3M_{pl}^2} \rho \quad (4.4)$$

e si dividano entrambi i membri per il quadrato della costante di Hubble.

Si ottiene così:

$$1 - \Omega(a) = -\frac{k}{(aH)^2} \quad (4.5)$$

Come è già noto, la differenza fra il parametro di densità Ω e l'unità definisce la curvatura dell'universo.

Dalle osservazioni sperimentali emerge che $|1 - \Omega(a)| \lesssim 0.01$, ma per spiegare questi dati, considerando l'aumento della curvatura spaziale, bisogna supporre una piattezza ancora più estrema dell'universo primordiale, ossia $|1 - \Omega(a)| \lesssim 10^{-55}$.

Dall'equazione (4.4) si vede come l'evoluzione della quantità $|1 - \Omega(a)|$ sia legata all'andamento del raggio comovente di Hubble.

In particolare, se il raggio comovente di Hubble decresce, come accade durante l'inflazione, il secondo membro della (4.5) tende a zero, portando così l'universo ad avere un parametro di densità prossimo a 1.

Anche il problema della piattezza trova dunque una spiegazione grazie all'ipotesi inflazionaria.

4.3 Le condizioni per l'inflazione

La contrazione del raggio comovente di Hubble è la definizione fondamentale di inflazione, dal momento che si collega direttamente al problema dell'orizzonte.

Tuttavia questa definizione è equivalente ad altre modalità per descrivere l'inflazione che verranno esaminate nel dettaglio nei prossimi paragrafi.

Espansione accelerata

Dalla condizione inflazionaria (4.1) si ottiene:

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{d}{dt}(\dot{a})^{-1} = -\frac{\ddot{a}}{(\dot{a})^2} < 0 \implies \ddot{a} > 0 \quad (4.6)$$

Questo spiega il motivo per cui l'inflazione è solitamente descritta come un periodo di espansione accelerata.

Per quantificare l'espansione accelerata dell'universo durante l'inflazione si usano i cosiddetti *e-folds*, definiti come un aumento del fattore di scala $a(t)$ di un fattore $e \simeq 2.718$, ovvero:

$$a = e^N \iff N = \ln(a) \quad (4.7)$$

dove N è il numero di *e-folds* fra la singolarità iniziale e un tempo t successivo. Se si considera il caso più generale, si può scrivere:

$$N = \ln\left(\frac{a(t_f)}{a(t_i)}\right) \quad (4.8)$$

dove $t_{f,i}$ sono due generici istanti di tempo rispettivamente finale e iniziale.

Dalla definizione (4.7) si ricava il seguente differenziale:

$$dN = \frac{\dot{a}}{a} dt = H dt \quad (4.9)$$

Lenta variazione della costante di Hubble

In alternativa al caso precedente, la (4.1) può essere sviluppata nel seguente modo:

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{(aH)^2} = -\frac{1}{a}(1 - \epsilon) \quad (4.10)$$

dove si è posto:

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad (4.11)$$

Il segno di ϵ è dato dal segno di $\dot{H}$, ossia:

$$\dot{H} = \frac{d}{dt} \frac{1}{a} = -\frac{\ddot{a}}{(\dot{a})^2} < 0 \implies \epsilon > 0 \quad (4.12)$$

Dalla (4.10) si deduce che ϵ deve anche essere minore di 1, altrimenti la derivata rispetto al tempo del raggio comovente di Hubble non sarebbe negativa, per cui vale la seguente condizione su ϵ :

$$0 < \epsilon < 1 \quad (4.13)$$

Sfruttando i risultati precedenti, ϵ può essere scritto come di seguito:

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{\dot{H}}{H} \cdot \frac{1}{H} = -\frac{d\ln(H)}{dN} < 1 \quad (4.14)$$

Ciò significa che la variazione relativa della costante di Hubble per *e-fold* è piccola.

Come affermato all'inizio della Sezione 4, la radiazione cosmica di fondo può uniformarsi su tutto lo spazio soltanto se l'inflazione dura per un lasso di tempo sufficientemente lungo.

Di conseguenza, anche ϵ deve restare piccolo abbastanza a lungo, ossia per un numero sufficiente di *e-folds*.

Questa condizione è misurata da un secondo parametro η definito nel seguente modo:

$$\eta = \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon} = \frac{d\ln(\epsilon)}{dN} \quad (4.15)$$

Per $|\eta| < 1$, la variazione relativa di ϵ per *e-fold* è piccola e l'inflazione persiste.

Pressione negativa

A questo punto si cercano le condizioni da imporre sul fluido cosmico (perfetto) avente densità di energia ρ e pressione p affinché possa esserci un'espansione accelerata.

Si riprenda la seconda equazione di Friedmann:

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{1}{6M_{pl}^2}(\rho + 3p) \quad (4.16)$$

e la si riscriva attraverso i seguenti passaggi:

$$\frac{\dot{H}}{H^2} + 1 = -\frac{1}{6M_{pl}^2 H^2}(\rho + 3p) \implies -\frac{\dot{H}}{H^2} = 1 + \frac{1}{6M_{pl}^2 H^2}(\rho + 3p) \quad (4.17)$$

Ricordando che:

$$\begin{cases} \epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} < 1 \\ \rho_{crit} = \frac{1}{3M_{pl}^2 H^2} \end{cases}$$

si scrive la (4.17) nella seguente forma:

$$\epsilon = 1 + \frac{\rho}{2\rho_{crit}}\left(1 + \frac{3p}{\rho}\right) \implies \epsilon = 1 + \frac{\Omega}{2}(1 + 3w) < 1 \quad (4.18)$$

con $\Omega = 1$, dal momento che l'universo è piatto.

Si conclude quindi che:

$$1 + \frac{1}{2}(1 + 3w) < 1 \implies 1 + 3w < 0 \quad (4.19)$$

per cui, durante l'inflazione, deve essere violata la condizione di energia forte, che è equivalente ad affermare che la pressione del fluido perfetto deve essere negativa.

5 Campi scalari del modello inflazionario

Nei precedenti paragrafi è stata postulata l'esistenza dell'inflazione come fase dell'universo primordiale in cui il raggio comoviente di Hubble diminuiva nel tempo. Si è visto come il completamento della teoria del Big Bang con questa assunzione abbia risolto il problema dell'orizzonte e il problema della piattezza.

Sono inoltre state esaminate le condizioni che rendessero possibile un simile evento, ma non è ancora stato elaborato un modello che descriva la fisica dietro alla contrazione della sfera di Hubble.

Proprio questo è l'obiettivo che si cercherà di raggiungere nei prossimi paragrafi. Si discuterà infatti di quale sia la fisica (microscopica) che possa far sì che le condizioni per l'inflazione risultino verificate.

5.1 L'inflatone

Nell'universo primordiale, una delle condizioni che doveva rispettare il fluido cosmico affinché fosse possibile l'inflazione era la violazione della condizione di energia forte.

Questa caratteristica è inusuale per la materia ordinaria perché dovrebbe avere una pressione negativa. Infatti, un materiale con questa proprietà non è mai stato osservato.

Occorre dunque supporre che, almeno nelle condizioni singolari dell'universo inflazionario, un tipo di materia di questo genere fosse esistito.

Secondo la teoria quantistica dei campi quantizzati, le particelle elementari possono essere viste come oscillazioni di un campo (quantizzato) che perde o acquista energia e impulso in modo discreto.

Dunque, le ipotetiche particelle che costituivano il fluido cosmico primordiale possono essere rappresentate da un campo ϕ chiamato *inflatone*.

Questo campo deve avere le seguenti caratteristiche per rispettare il Principio Cosmologico:

- 1) Deve essere omogeneo, ossia non dipendere dalla posizione $\vec{x}$, ma solo dal tempo;
- 2) Deve avere spin 0 in modo che sia invariante per rotazioni e che garantisca quindi l'isotropia dell'universo;

3) L'accoppiamento con altri campi (come quello gravitazionale) deve essere trascurabile.

I campi quantizzati di spin 0 sono scalari, proprio perché, essendo isotropi, non sono definiti da una direzione e da un verso, ma solo da un modulo.

Un esempio famoso di campo scalare è il *campo di Higgs*, ossia un campo che interagisce con le particelle facendo loro acquisire (non a tutte, come per esempio ai fotoni) una certa massa.

Per osservare sperimentalmente il *campo di Higgs* sono necessarie energie molto alte, che però gli scienziati sono riusciti a ottenere all'interno degli acceleratori di particelle.

Se l'inflatone esistesse veramente, potrebbe quindi essere osservato come è successo per il campo di Higgs, ma la scala energetica che servirebbe per rilevarlo (ossia quella caratteristica dell'universo primordiale) è così elevata che, almeno ad oggi, è impossibile da ricreare in un laboratorio.

Per questo motivo il modello che verrà sviluppato nei prossimi paragrafi non è supportato da prove sperimentali, ma è basato soltanto su deduzioni e supposizioni teoriche.

Inflatone e anisotropie

L'introduzione di un campo quantizzato nella teoria inflazionaria è in grado di spiegare le piccole anisotropie della radiazione cosmica di fondo.

Nonostante l'inflatone assuma omogeneità e isotropia sulle scale interne all'orizzonte di Hubble durante l'inflazione, la sua natura quantomeccanica prevede che sia soggetto a fluttuazioni microscopiche intrinseche (a causa del *principio di indeterminazione*).

Queste perturbazioni si sono congelate durante l'inflazione quando le scale cosmiche sono uscite dall'orizzonte di Hubble.

Quando in seguito le scale sono rientrate nell'orizzonte, queste perturbazioni hanno pervaso l'universo rendendolo leggermente anisotropo e questo è ben evidente osservando la radiazione cosmica di fondo.

5.2 Il modello lagrangiano della dinamica inflazionaria

Lagrangiana di un campo scalare generico

Le proprietà di un qualunque sistema nella fisica fondamentale sono descritte da un certo funzionale d'azione, definito come:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} L dt \quad (5.1)$$

dove L è la lagrangiana del sistema che dipende dalle sue coordinate.

Affinché la lagrangiana sia invariante sotto trasformazioni di Lorentz, la lagrangiana del campo deve essere esprimibile nella forma:

$$L = \int \mathcal{L} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (5.2)$$

dove $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \nabla\phi, \dot{\phi})$ è la *densità lagrangiana*, $\phi = \phi(\vec{x}, t)$ è (per il momento) un generico campo scalare e $dx^1 dx^2 dx^3$ è l'elemento infinitesimo di volume definito dalle coordinate spaziali (si consideri per il momento uno spazio-tempo piatto).

Il funzionale d'azione può quindi essere scritto come:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \mathcal{L} dx^1 dx^2 dx^3 dt = \int \mathcal{L} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \int \mathcal{L} d^4x \quad (5.3)$$

Azione di Einstein-Hilbert

Sfruttando la teoria dei campi quantizzati, nel paragrafo (5.1) abbiamo definito l'inflatone come un campo materiale di spin 0 (e quindi scalare) che descrive le ipotetiche particelle del fluido cosmico inflazionario avente pressione negativa.

Tuttavia è noto che il fluido cosmico (rappresentato matematicamente nelle equazioni di campo di Einstein dal tensore energia-impulso) è sorgente di gravità, per cui si può affermare che l'inflatone stesso sia sorgente di gravità.

Questo passaggio è fondamentale perché permette di formulare la relatività generale attraverso il principio d'azione discusso nel paragrafo precedente.

In uno spazio-tempo curvo con metrica $g^{\mu\nu}$ permeato da un campo scalare materiale, si definisce l'azione di Einstein-Hilbert come segue:

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{EH} \quad (5.4)$$

dove:

- 1) $\sqrt{-g}$ è il determinante della metrica;
- 2) $d^4x \sqrt{-g}$ è l'elemento infinitesimo di volume dello spazio-tempo curvo;
- 3) La densità lagrangiana $\mathcal{L}_{EH}$ contiene un termine gravitazionale e un termine materiale ed è data dalla seguente espressione:

$$\mathcal{L}_{EH} = \mathcal{L}_{grav} + \mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} M_{pl}^2 R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \quad (5.5)$$

dove $V(\phi)$ è detto *potenziale del campo*.

L'azione di Einstein-Hilbert dipende da due campi:

- un campo scalare ϕ ;
- un campo tensoriale $g^{\mu\nu}$;

Per studiare l'evoluzione del sistema lagrangiano relativo a un campo occorre applicare il *principio d'azione*:

$$\delta S = 0 \quad (5.6)$$

dove δS è la variazione dell'azione a seguito di una piccola variazione del campo.

Derivazione delle equazioni di campo di Einstein

Si vuole studiare l'evoluzione del sistema lagrangiano in rapporto a una variazione della metrica attraverso il principio d'azione.

Si sviluppi il seguente calcolo a partire dalla (5.4):

$$\begin{aligned} \delta S = 0 &\Rightarrow \int \left[\frac{M_{pl}^2}{2} \frac{\delta(\sqrt{-g} R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x = \\ &= \int \left[\frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0 \end{aligned}$$

Affinché questo sia vero, l'integranda deve annullarsi, per cui deve valere la seguente *equazione del moto* per il campo metrico:

$$\frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) = - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (5.7)$$

Si consideri il primo membro della (5.7) e si calcolino i seguenti differenziali:

1) *Differenziale dello scalare di Ricci (δR):*

Il differenziale dello scalare di Ricci segue dal calcolo del differenziale del tensore di Riemann e del tensore di Ricci.

- Si applichi l'identità di Palatini:

$$\delta R_{\sigma\nu} = \delta R_{\sigma\rho\nu}^\rho = \nabla_\rho(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\rho\sigma}^\rho) \quad (5.8)$$

- Si applichi la regola del prodotto a partire dalla definizione dello scalare di Ricci:

$$\begin{aligned} R = g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu} &\implies \delta R = R_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu} \delta R_{\sigma\nu} = \\ R_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\nu} + \nabla_\rho(g^{\sigma\nu} \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - g^{\sigma\rho} \delta\Gamma_{\mu\sigma}^\mu) &= R_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\nu} + \nabla_\rho A^\rho \end{aligned}$$

Si noti che nella precedente espressione è stata sfruttata la proprietà di compatibilità della metrica ($\nabla_\sigma g^{\mu\nu} = 0$) e sono stati rinominati gli indici dell'ultimo termine nel seguente modo: $(\rho, \nu) \rightarrow (\mu, \rho)$.

- Si moltiplichino entrambi i membri per $\sqrt{-g}$:

$$\delta R \sqrt{-g} = R_{\sigma\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\sigma\nu} + \sqrt{-g} \nabla_\rho A^\rho = R_{\sigma\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\sigma\nu} + \partial_\rho (\sqrt{-g} A^\rho) \quad (5.9)$$

dove la derivata covariante sul termine A^ρ diventa una derivata totale se quest'ultimo è moltiplicato per $\sqrt{-g}$.

Quando questo viene poi integrato risulta in una condizione al contorno secondo il teorema di Stokes.

Il termine al contorno è generalmente diverso da zero, poiché l'integranda non dipende solo da $\delta g^{\mu\nu}$, ma anche dalle sue derivate parziali $\partial_\lambda \delta g^{\mu\nu} = \delta \partial_\lambda g^{\mu\nu}$.

Tuttavia, quando il termine $\delta g^{\mu\nu}$ si annulla in un intorno del contorno, oppure quando non c'è alcun contorno, il termine $\partial_\rho (\sqrt{-g} A^\rho)$ non contribuisce alla variazione dell'azione di Einstein-Hilbert. Per questo vale semplicemente:

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (5.10)$$

2) *Differenziale del determinante della metrica ($\delta\sqrt{-g}$):*

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = \frac{1}{2} \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \quad (5.11)$$

Sostituendo la (5.10) e la (5.11) al primo membro della (5.7) si ottiene:

$$M_{pl}^2 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = - \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (5.12)$$

Si sostituisca il tensore di Einstein al primo membro e sviluppo il secondo:

$$M_{pl}^2 G_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_\phi = T_{\mu\nu} \quad (5.13)$$

Il risultato finale è proprio l'equazione di campo di Einstein con il tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$. Ponendo $\mathcal{L}_\phi$ come nella (5.5) si ottiene:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right] \quad (5.14)$$

Densità di energia e pressione dell'inflatone

Dall'equazione (5.14) che definisce il tensore energia-impulso in funzione del campo scalare ϕ , è possibile ricavare le espressioni per la densità di energia ρ_ϕ e della pressione p_ϕ dell'inflatone.

Ricordando che quest'ultimo è un campo scalare omogeneo, si sviluppi il seguente calcolo:

$$\rho_\phi = T_{00} = T_{tt} = \partial_t \phi \partial_t \phi - (-1) \left(-\frac{1}{2} \partial_t \phi \partial_t \phi + V(\phi) \right) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (5.15)$$

$$g_{ii} p_\phi = T_{ii} = \partial_i \phi \partial_i \phi - g_{ii} \left(-\frac{1}{2} \partial_t \phi \partial_t \phi + V(\phi) \right) = g_{ii} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right) \quad (5.16)$$

Equazione di Klein-Gordon

A questo punto si vuole studiare l'evoluzione del sistema lagrangiano in rapporto a una variazione del campo scalare ϕ :

$$\delta S = \int \delta[(\mathcal{L}_{grav} + \mathcal{L}_\phi) \sqrt{-g}] d^4 x \delta \phi = 0 \quad (5.17)$$

L'espressione si semplifica perché $\mathcal{L}_{grav}$ non dipende dal campo ϕ , per cui si ottiene:

$$\delta S = \int d^4x \delta[\sqrt{-g}(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi))]\delta\phi = 0 \quad (5.18)$$

Si sviluppa il calcolo e si giunge al seguente risultato:

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g}[\Box\phi - V'(\phi)]\delta\phi = 0 \implies \Box\phi - V'(\phi) = 0 \quad (5.19)$$

dove $\Box\phi = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi]$ è l'operatore d'Alembertiano.

Considerando il caso della metrica FRW e l'omogeneità dell'inflatone ϕ , il d'Alembertiano assume la seguente forma:

$$\Box\phi = -\frac{1}{a^3}\partial_t(a^3\dot{\phi}) = -\ddot{\phi} - 3H\dot{\phi} \quad (5.20)$$

Sostituendo la (5.20) nella (5.19) si ottiene l'equazione di *Klein-Gordon*:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (5.21)$$

Il potenziale dell'inflatone

Per il momento non è stato detto molto riguardo la funzione $V(\phi)$. È stata definita come una funzione scalare arbitraria del campo scalare ϕ all'interno della densità lagrangiana materiale $\mathcal{L}_\phi$ che, su modello della lagrangiana della meccanica classica, è costituita da un termine cinetico e da un potenziale.

Adesso però si vuole cercare di attribuire un significato fisico a questo termine e vedere che ruolo gioca nel processo dell'inflazione.

Si inserisca la (5.13) all'interno della prima equazione di Friedmann (con $k = 0$ per la condizione di piattezza):

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right] \quad (5.22)$$

Si derivi la (5.22) rispetto al tempo:

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3M_{pl}^2}[\dot{\phi}\ddot{\phi} + V'(\phi)\dot{\phi}] = \frac{\dot{\phi}}{3M_{pl}^2}[\ddot{\phi} + V'(\phi)] \quad (5.23)$$

Si sostituisca il termine fra parentesi quadra della (5.23) con la (5.21) e si ottiene:

$$2H\dot{H} = \frac{\dot{\phi}}{3M_{pl}^2}[-3H\dot{\phi}] \implies \dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2M_{pl}^2} \quad (5.24)$$

Si consideri nuovamente il parametro ϵ definito nella (4.14) e lo si riscriva usando la (5.24):

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2 H^2} \quad (5.25)$$

Si esprime il denominatore di quest'ultima espressione scrivendo H^2 come nella (5.22):

$$\epsilon = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2}{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V\right]} \quad (5.26)$$

Il parametro ϵ è definito nell'intervallo $(0;1)$, per cui risulta:

$$\frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2}{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V\right]} < 1 \quad (5.27)$$

Svolgendo la disequazione (5.27) si giunge facilmente al seguente risultato:

$$V > \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \quad (5.28)$$

L'inflazione dunque si verifica quando l'energia potenziale V domina su quella cinetica. Questo accade se la (5.28) rimane valida abbastanza a lungo, per cui l'accelerazione del campo scalare deve essere piccola.

Per far valere questa condizione è utile definire un nuovo parametro δ nel seguente modo:

$$\delta = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \quad (5.29)$$

Si calcoli il parametro η definito nella (4.15) sfruttando la (5.23):

$$\eta = 2\frac{\dot{\phi}\ddot{\phi}H - \dot{\phi}^2\dot{H}}{\dot{\phi}^2 H^2} = 2\left[\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}H} - \frac{\dot{H}}{H^2}\right] = 2(\epsilon - \delta) \quad (5.30)$$

Si può quindi concludere che, se $\{\epsilon, |\delta|\} \ll 1$, allora sia H che ϵ avranno piccole variazioni per *e-fold*: $\{\epsilon, |\eta|\} \ll 1$.

Il fatto che, dopo un certo tempo, il potenziale smetta di dominare sull'energia

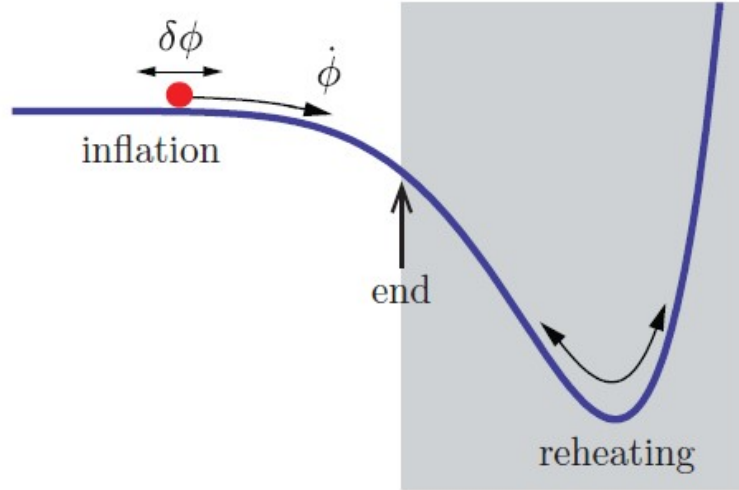


Figura 5: [1]; andamento di un generico potenziale inflazionario, fase dell'inflazione e fase di *reheating*.

cinetica, vuol dire che $V(\phi)$ è una funzione decrescente (almeno in un opportuno intervallo di definizione).

Nei modelli inflazionari che verranno esaminati, si supporrà sempre che esista un minimo del potenziale, poiché altrimenti la densità di energia del fluido cosmico diventerebbe negativa.

La curva che mostra l'andamento di un generico potenziale inflazionario in funzione del campo scalare è rappresentato in Figura 5.

Come mostra la Figura 5, l'inflazione persiste durante una fase in cui il potenziale decresce lentamente, mantenendosi dominante sull'energia cinetica.

Quando però questa condizione viene meno, l'inflazione termina, il campo scalare raggiunge il minimo del potenziale e inizia a oscillare attorno ad esso.

Questo comportamento del campo dà inizio al *reheating*: senza approfondire oltre un certo limite questa questione, si accenna al fatto che, oscillando attorno al minimo del suo potenziale, l'inflatone perde energia e decade generando particelle elementari e radiazione.

Da questo momento in poi torna a essere valida la teoria del Big Bang.

6 Modelli inflazionari a campo singolo

A partire dalla nascita del concetto di inflazione, sono stati sviluppati diversi modelli matematici che hanno cercato di interpretarlo al meglio.

Tutte queste interpretazioni sono accomunate dalla stessa idea di base, per cui nei seguenti paragrafi rimangono valide tutte le conclusioni tratte nei paragrafi precedenti.

Tuttavia, soprattutto nella scelta del potenziale dell'inflatone e della lagrangiana utilizzati, i vari modelli presenteranno alcune differenze.

In particolare, all'interno di questa sezione, verranno affrontati i modelli inflazionari a campo singolo, ossia quelli sviluppati a partire da un unico campo scalare ϕ .

6.1 L'inflazione slow-roll

Approssimazione slow-roll

Si riprendano i passaggi effettuati nel paragrafo sul potenziale dell'inflatone e si noti come non sia stata fatta alcuna approssimazione. È solo stato definito un certo regime ($\{\epsilon, |\delta|\} \ll 1$) in cui l'inflazione non si arresta.

Grazie a questa condizione è ora possibile effettuare un'approssimazione molto comoda che permette di semplificare notevolmente le equazioni (5.21) e (5.22), detta *approssimazione slow-roll*:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \\ |\delta| = \frac{|\ddot{\phi}|}{H|\dot{\phi}|} \ll 1 \end{cases}$$

La prima condizione del sistema permette di semplificare l'equazione di Friedmann (5.22):

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right] \simeq \frac{V}{3M_{pl}^2} \quad (6.1)$$

La seconda condizione del sistema permette di semplificare l'equazione di Klein-Gordon (5.21):

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi) \quad (6.2)$$

I parametri slow-roll

L'inflazione slow-roll è regolata da una coppia di parametri definiti in analogia con ϵ, η , ossia:

$$\epsilon = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2 H^2} \approx \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 = \epsilon_V \quad (6.3)$$

Inoltre, derivando rispetto al tempo la (6.2) si ottiene:

$$3\dot{H}\dot{\phi} + 3H\ddot{\phi} = -V''\dot{\phi} \implies -\frac{\dot{H}}{H^2} - \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} = \frac{V''}{3H^2} \quad (6.4)$$

Sostituendo H^2 con la (6.1) si giunge alla seguente espressione:

$$\delta + \epsilon \approx M_{pl}^2 \frac{V''}{V} = \eta_V \quad (6.5)$$

ϵ_V, η_V sono i cosiddetti *parametri slow-roll* e, quando sono piccoli ($\ll 1$), l'inflazione slow-roll persiste.

Al contrario, i parametri ϵ e η sono spesso chiamati *parametri slow-roll di Hubble*. Durante l'inflazione slow-roll valgono le seguenti approssimazioni:

$$\begin{cases} \epsilon_V \approx \epsilon \\ \eta_V \approx 2\epsilon - \frac{1}{2}\eta \end{cases}$$

Si noti come, affinché i parametri slow-roll siano sufficientemente piccoli, il potenziale V debba essere il più possibile piatto e monotono ($|V''|, |V'|$ vicini a zero). Questo modello è detto infatti "slow-roll" proprio perché durante la fase inflazionaria il potenziale è quasi piatto e il campo "rotola" lentamente lungo di esso. Si consideri per esempio il potenziale generico rappresentato in Figura 5.

La fine dell'inflazione e il *reheating*

Ogni modello inflazionario efficace deve includere un meccanismo che, dopo un certo tempo, porti alla conclusione della fase dell'inflazione e dia inizio al riscaldamento.

Questo avviene se, a un certo punto, le condizioni sui parametri slow-roll vengono violate, ed è proprio quello che succede:

$$\dot{\epsilon}_V = \frac{M_{pl}^2}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 = M_{pl}^2 \left(\frac{\dot{V}'V'}{V^2} - \frac{(V')^2 \dot{V}}{V^3} \right) \quad (6.6)$$

Valgono le seguenti identità per la regola della catena:

$$\begin{cases} \dot{V} = V' \dot{\phi} \\ \dot{V}' = V'' \dot{\phi} \end{cases}$$

Si sostituiscano le espressioni per $\dot{V}$ e $\dot{V}'$ nella (6.6):

$$\epsilon_V = M_{pl}^2 \dot{\phi} \frac{V'}{V} \left(\frac{V''}{V} - \frac{(V')^2}{V^2} \right) \quad (6.7)$$

Si sostituiscano le equazioni (6.1), (6.2), (6.3), (6.5) nella (6.7) e si ottiene:

$$\epsilon_V = \frac{\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2 H} (2\epsilon_V - \eta_V) \quad (6.8)$$

Questa quantità è strettamente positiva perché:

- 1) $H > 0$, poiché l'universo inflazionario si espande;
- 2) $2\epsilon_V - \eta_V > 0$ vale per potenziali sufficientemente piatti e monotoni che tipicamente compaiono nei modelli slow-roll.

Si conclude che il parametro ϵ_V cresce col passare del tempo, per cui è possibile definire un istante t_f in cui sarà abbastanza vicino a 1 da violare le condizioni slow-roll e interrompere l'inflazione.

Il potenziale $V(\phi)$ domina sul termine cinetico $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ durante la fase inflazionaria. V resta quasi piatto e poi decresce al termine dell'inflazione a vantaggio della componente cinetica. L'inflatone cade verso il minimo del suo potenziale e inizia a oscillare attorno ad esso.

Ha così inizio la fase di *reheating*.

Quantificazione dell'inflazione slow-roll

Si vuole ora misurare l'espansione dell'universo fra gli istanti t_i e t_f , tali che $\epsilon(t_i) = \epsilon(t_f) = 1$, ossia due istanti successivi in cui la derivata rispetto al tempo del raggio comoviente di Hubble si annulla.

Per effettuare questa misura occorre calcolare il numero di e-folds che quantificano l'espansione dell'universo fra t_i e t_f :

$$N = \int_{t_i}^{t_f} H(t) dt \quad (6.9)$$

Si effettui il seguente cambio di variabile: $d\phi = \dot{\phi} dt$:

$$N = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \quad (6.10)$$

dove ϕ_i e ϕ_f sono gli estremi dell'intervallo in cui $\epsilon_V < 1$.

Si riscriva l'integranda tramite la (6.1) e la (6.2), ottenendo così:

$$N \simeq \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{V}{M_{pl}^2 V'} = \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{d\phi}{M_{pl} \sqrt{2\epsilon_V}} \quad (6.11)$$

Per calcolare una durata minima dell'inflazione espressa in e-folds occorre calcolare l'espansione dell'universo fra il momento in cui le maggiori scale cosmiche comovienti osservabili oggi sono uscite dall'orizzonte di Hubble ($\phi = \phi_{cmb}$) e la fine dell'inflazione ($\phi = \phi_f$):

$$N_{cmb} = \int_{\phi_f}^{\phi_{cmb}} \frac{d\phi}{M_{pl} \sqrt{2\epsilon_V}} \approx 40 - 60 \quad (6.12)$$

La (6.12) afferma che sono trascorsi da 40 a 60 e-folds fra l'uscita delle scale maggiori osservabili nella radiazione cosmica di fondo dall'orizzonte di Hubble alla fine dell'inflazione, per cui quest'ultima deve essere durata almeno N_{cmb} e-folds.

La (6.12) afferma inoltre che, durante l'inflazione, l'universo si sia ingrandito di un fattore enorme, pari a circa $e^{60} \simeq 10^{26}$.

Attrattori inflazionari

Si riprendano le equazioni che descrivono la dinamica dell'inflatone in approssimazione slow-roll:

$$\begin{cases} 3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi) \\ H^2 \simeq \frac{V(\phi)}{3M_{pl}^2} \end{cases}$$

Queste equazioni formano un sistema dinamico, il cui stato è rappresentato dalla coppia $(\phi, \dot{\phi})$ e che evolve lungo traiettorie (rappresentabili nello spazio delle fasi) del tipo $\dot{\phi} = \dot{\phi}(\phi)$.

Questo sistema ammette una soluzione del tipo $\dot{\phi}_{sr} = \dot{\phi}_{sr}(\phi_{sr})$, che ha la proprietà di essere un "attrattore dinamico" del sistema, ossia una soluzione delle

equazioni del moto tale che, indipendentemente dalle condizioni iniziali (entro certi limiti), l'evoluzione del sistema tende ad avvicinarsi a quella soluzione col passare del tempo.

Questo si verifica facilmente considerando una generica traiettoria dello spazio delle fasi che si discosta di una certa quantità dall'attrattore, ossia

$$\dot{\phi} = \dot{\phi}_{sr} + \delta\dot{\phi} \quad (6.13)$$

e studiando l'andamento del termine $\delta\dot{\phi}$.

Dal momento che $\dot{\phi}_{sr}$ è soluzione vale la seguente:

$$\dot{\phi}_{sr} = -\frac{V'}{3H} \implies \delta\dot{\phi} = \dot{\phi} + \frac{V'}{3H} \quad (6.14)$$

Si derivino entrambi i membri rispetto al numero di e-folds, tenendo presente che tutti i termini con l'apostrofo, tranne V , sono derivate rispetto a N :

$$\delta\dot{\phi}' = \dot{\phi}' + \frac{V''\phi'}{3H} - \frac{V'H'}{3H^2} \quad (6.15)$$

Valgono le seguenti identità per la regola della catena, per la (5.19) e la (6.2):

$$\begin{cases} \phi' = \frac{d\phi}{dN} = \frac{d\phi}{Hdt} = \frac{\dot{\phi}}{H} \\ \dot{\phi}' = \frac{d\dot{\phi}}{dN} = \frac{d\dot{\phi}}{Hdt} = \frac{\ddot{\phi}}{H} = -3\dot{\phi} - \frac{V'}{H} \\ 3H^2 = \frac{V}{M_{pl}^2} \end{cases}$$

Si sostituiscano le equazioni del sistema nella (6.11):

$$\delta\dot{\phi}' = \left(-3\dot{\phi} - \frac{V'}{H}\right) + M_{pl}^2 \frac{V''\dot{\phi}}{V} - M_{pl}^2 \frac{V'H'}{V} \quad (6.16)$$

Trascuro il secondo e il terzo termine poiché sono dell'ordine dei parametri slow-roll (quindi $\ll 1$) e riscrivo l'equazione approssimata:

$$\delta\dot{\phi}' \simeq -3\dot{\phi} - \frac{V'}{H} \simeq -3\delta\dot{\phi} \implies \delta\dot{\phi} \simeq e^{-3(N-N_0)} \quad (6.17)$$

Questo risultato permette di concludere che qualunque differenza iniziale dalla traiettoria $\dot{\phi}_{sr}$ decade esponenzialmente dopo pochi e-folds (in approssimazione slow-roll) e che la soluzione $\dot{\phi}_{sr}$ sia un attrattore, per cui la dinamica inflazionaria slow-roll non dipende dalle condizioni iniziali, ma solo dal potenziale dell'inflatone: tutto si riconduce a quella singola traiettoria.

6.2 Alcuni esempi di modelli slow-roll

Nei paragrafi seguenti verranno analizzati nel concreto alcuni modelli di inflazione slow-roll. Questi modelli differiscono fra loro per la scelta del potenziale $V(\phi)$, che determina una diversa dinamica inflazionaria.

Il modello $m^2\phi^2$

Si tratta di uno dei modelli più semplici, ossia di un'inflazione a campo singolo guidata da un potenziale nella forma:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (6.18)$$

Si calcolino i parametri slow-roll:

$$\begin{cases} \epsilon_V = \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{m^2\phi}{\frac{1}{2}m^2\phi^2} \right)^2 = 2 \left(\frac{M_{pl}}{\phi} \right)^2 \\ \eta_V = M_{pl}^2 \left(\frac{m^2}{\frac{1}{2}m^2\phi^2} \right) = 2 \left(\frac{M_{pl}}{\phi} \right)^2 \end{cases}$$

La quantità $2\epsilon_V - \eta_V$ è positiva, per cui il parametro ϵ_V cresce nel tempo avvicinandosi sempre più a 1 e garantendo l'esistenza di un istante t_f in cui l'inflazione slow-roll giunge al termine.

Le condizioni sui parametri slow-roll impongono che:

$$\epsilon_V < 1 \implies \phi > \sqrt{2}M_{pl} = \phi_f \quad (6.19)$$

A questo punto si calcola il numero di e-folds in cui si espande l'universo prima della fine dell'inflazione:

$$N(\phi) = \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{d\phi}{2\frac{M_{pl}^2}{\phi}} = \frac{1}{2M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2}\phi^2 \right]_{\phi_f}^{\phi} = \frac{1}{4M_{pl}^2}\phi^2 - \frac{1}{2} \quad (6.20)$$

Dunque, secondo questo modello, l'inflatone al momento dell'uscita delle scale maggiori dall'orizzonte di Hubble, era dato da:

$$\phi_{cmb} = 2\sqrt{N_{cmb}}M_{pl} \simeq 15M_{pl} \quad (6.21)$$

La dinamica inflazionaria di questo modello è governata dal seguente sistema:

$$\begin{cases} H^2 = \frac{m^2\phi^2}{6M_{pl}^2} \\ 3H\dot{\phi} = -m^2\phi \end{cases}$$

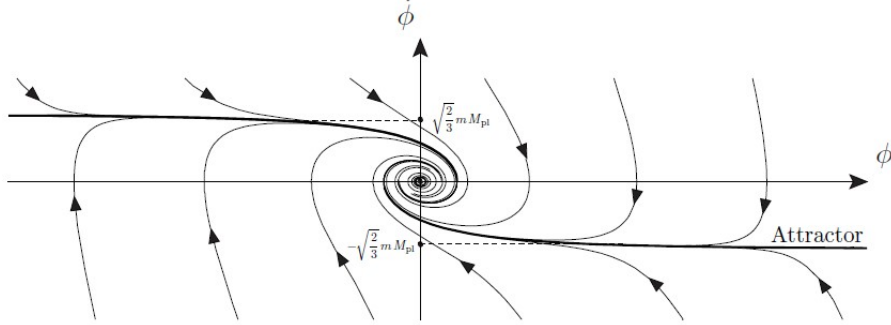


Figura 6: [1], diagramma di fase del modello inflazionario $m^2\phi^2$

La soluzione slow-roll, ossia l'attrattore dinamico, si ottiene risolvendo il sistema. Si esprime H tramite la prima equazione e si sostituisce l'espressione ottenuta nella seconda, ricavando:

$$\phi_{sr} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} m M_{pl} \quad (6.22)$$

Una qualsiasi altra traiettoria generica del tipo $\dot{\phi} = \dot{\phi}(\phi)$ si riporta sulla traiettoria slow-roll dopo un breve lasso di tempo, come mostrato in Figura 6.

Il modello di Starobinsky

Il fisico sovietico Alexei Starobinsky è stato uno dei primi a proporre un modello che descrivesse come l'universo sia andato incontro a un'espansione estremamente accelerata.

Notò infatti che la relatività generale dovesse includere correzioni quantistiche quando era usata per descrivere l'inverso primordiale, poiché estremamente piccolo.

Questo lo portò a introdurre una correzione alla curvatura dell'ordine di R^2 all'azione di Einstein-Hilbert, che assume quindi la seguente forma:

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} M_{pl}^2 \left(R + \frac{R^2}{6M^2} \right) \right] \quad (6.23)$$

dove M è una costante di massa che fissa la scala dell'inflazione.

Come si può immediatamente notare, in questo modello l'inflazione è dovuta unicamente alla componente gravitazionale (modificata) della densità lagrangiana, poiché non compare alcun termine materiale.

Tuttavia è interessante notare come, tramite una *trasformazione di conformalità*, sia possibile ricondurre questo modello basato sulla gravità modificata, a un modello inflazionario a campo scalare come quelli esaminati precedentemente.

La trasformazione di conformalità (indicata con Ω^2) agisce sulla metrica nel modo seguente:

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \quad (6.24)$$

e porta alla definizione di un nuovo scalare di Ricci:

$$\tilde{R} = \frac{1}{\Omega^2} \left[R + \frac{6}{\Omega} \square \Omega \right] \quad (6.25)$$

dove $\square$ è il d'Alembertiano calcolato nella metrica di partenza.

La trasformazione di conformalità permette, grazie a un'accurata scelta di Ω , di riottenere la relatività generale.

In questo modo una teoria della gravità non standard può essere ricondotta a una teoria standard della gravità.

Ponendo:

$$\Omega^2 = 1 + \frac{R}{3M^2} \quad (6.26)$$

ed eseguendo una serie di passaggi algebrici che, per questione di brevità, non verranno riportati di seguito, si giunge al seguente funzionale d'azione:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{pl}^2}{2} \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] \quad (6.27)$$

in cui il potenziale $V(\phi)$ assume la seguente forma:

$$V(\phi) = \frac{3M^2 M_{pl}^2}{4} (1 - e^{-\sqrt{2/3} \phi / M_{pl}})^2 \quad (6.28)$$

Quello di Starobinsky è quindi un modello inflazionario riconducibile a un modello a campo singolo e che può essere studiato come nel paragrafo precedente.

6.3 L'inflazione K

L'inflazione slow-roll assume l'esistenza di un termine cinetico canonico del tipo:

$$X = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \quad (6.29)$$

che per un campo omogeneo prende la forma:

$$X = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \quad (6.30)$$

Come visto in precedenza, questo pone forti vincoli sulla forma del potenziale $V(\phi)$ attraverso le condizioni slow-roll, ossia $\{\epsilon_V, |\eta_V|\} \ll 1$.

Tuttavia queste condizioni per l'inflazione non sono assolute, ma derivano dall'approssimazione slow-roll.

Al contrario, la condizione inflazionaria più generica $\{\epsilon, |\eta|\} \ll 1$ non implica alcun tipo di approssimazione.

In particolare, i vincoli sul potenziale inflazionario potrebbero essere meno rigidi se, durante l'inflazione, correzioni al termine cinetico dipendenti da derivate di ordine superiore fossero dinamicamente rilevanti, ossia $|\dot{H}| \ll H^2$, non a causa di un potenziale dominante, ma perché sono permesse dinamiche non-banali.

Nel modello di inflazione K (dall'inglese *kinetic inflation*) si abbandona il termine cinetico canonico e si riscrive l'azione di Einstein-Hilbert nella seguente forma:

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{pl}^2}{2} R + P(X, \phi) \right] \quad (6.31)$$

dove P è una funzione del termine cinetico e del campo ϕ data dalla seguente espressione generica:

$$P(X, \phi) = \Lambda^4 \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\phi) \left(\frac{X}{\Lambda^4} \right)^n \quad (6.32)$$

dove $\Lambda^4(\phi)$ è una scala energetica caratteristica del modello.

Nel limite $X \ll \Lambda^4$, tutti i termini di ordine superiore al primo diventano trascurabili e la (6.32) può essere riscritta come:

$$\lim_{X \ll \Lambda^4} P(X, \phi) \simeq \Lambda^4 \left(c_0(\phi) + \frac{X}{\Lambda^4} \right) = X + \Lambda^4 c_0(\phi) = X - V_{eff}(\phi) \quad (6.33)$$

per cui la lagrangiana riprende la forma canonica e ci si riconduce al modello slow-roll.

Invece, nel limite $X \rightarrow \Lambda^4$, la funzione P assume un'altra forma:

$$\lim_{X \rightarrow \Lambda^4} P(X, \phi) = \Lambda^4 \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\phi) \quad (6.34)$$

Dalla (6.32) si calcoli $P_{,X}$, ossia la derivata di P rispetto al termine cinetico X :

$$P_{,X} = \Lambda^4 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(\phi) \left(\frac{X}{\Lambda^4} \right)^{n-1} \quad (6.35)$$

che nel limite $X \rightarrow \Lambda^4$ diventa:

$$\lim_{X \rightarrow \Lambda^4} P_{,X} = \Lambda^4 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(\phi) \quad (6.36)$$

Questa espressione non è definita-positiva, per cui possono esserci situazioni (associate ai valori dei coefficienti c_n) in cui si ha $P_{,X} < 0$.

Casi come questi sono detti *ghost states* (stati fantasma), ossia stati instabili in cui al crescere dell'energia cinetica diminuisce l'energia complessiva del sistema.

Per impedire che stati di questo tipo occorranco all'interno del modello teorico, si suppone che la funzione $P(X, \phi)$ goda di particolari simmetrie che pongano vincoli sui coefficienti $c_n(\phi)$ in modo che $P_{,X}$ resti positivo.

Ci sono varie simmetrie possibili per P e nei prossimi paragrafi ne verrà esaminata qualcuna.

Teorie di tipo P(X)

Si tratta di modelli in cui la funzione P è simmetrica sotto la seguente trasformazione:

$$\phi \mapsto \phi + \text{const} \quad (6.37)$$

per cui risulta $P(X, \phi) = P(X)$: c'è dipendenza unicamente dal termine cinetico.

Si studi la dinamica di questo sistema lagrangiano applicando il principio d'azione:

$$\delta S_{EH} = \delta S_{grav} + \delta S_P = 0 \quad (6.38)$$

Mentre il differenziale del termine gravitazionale è già noto dalla (5.12), quello del termine dipendente da P va calcolato:

$$\delta S_P = \int d^4x \delta(\sqrt{-g}P) \delta g^{\mu\nu} = \int d^4x \left[\left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \right) P + \sqrt{-g} \delta P \right] \delta g^{\mu\nu} \quad (6.39)$$

Si calcoli il differenziale di P :

$$\delta P = P_{,X} \delta X = P_{,X} \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right) \quad (6.40)$$

Quindi si riscriva la (6.33) come:

$$\delta S_P = \int d^4x \left[\left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \right) P + \sqrt{-g} P_{,X} \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right) \right] \delta g^{\mu\nu} \quad (6.41)$$

Ora, applicando il principio d'azione, risulta:

$$\begin{aligned} \frac{M_{pl}^2}{2} G_{\mu\nu} \sqrt{-g} &= - \left[\left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \right) P + \sqrt{-g} P_{,X} \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{pl}^2 G_{\mu\nu} &= P g_{\mu\nu} + P_{,X} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \Rightarrow T_{\mu\nu} = P g_{\mu\nu} + P_{,X} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \end{aligned}$$

Considerando il caso di un campo ϕ omogeneo e della metrica FRW, si calcolino:

$$\begin{cases} \rho = T_{00} = 2P_{,X}X - P \\ g_{ii}p = T_{ii} = g_{ii}P \Rightarrow p = P \end{cases}$$

Si determina quindi il significato fisico della funzione P , che risulta analoga alla pressione del fluido cosmico.

Il parametro inflazionario ϵ diventa:

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3XP_{,X}}{2XP_{,X} - P} \quad (6.42)$$

dove $\dot{H}$ e H^2 sono stati espressi rispettivamente tramite la (5.22) e la (5.24). Anche qui, ovviamente, vale la condizione inflazionaria $\epsilon \ll 1$, che diventa ora una condizione da imporre sulla funzione $P(X)$:

$$\frac{3XP_{,X}}{2XP_{,X} - P} \ll 1 \Rightarrow XP_{,X} \ll -P \quad (6.43)$$

ma $XP_{,X} > 0$ per cui $P < 0$. Questo risultato non sorprende, dal momento che la pressione del fluido cosmico deve essere negativa durante l'inflazione.

La fine dell'inflazione è regolata da una struttura cinetica, non da un potenziale. Essa infatti giunge al termine quando $\epsilon \rightarrow 1$, ossia:

$$XP_{,X} + P \simeq 0 \Rightarrow X \simeq -\frac{P}{P_{,X}} \quad (6.44)$$

Questo significa che il termine cinetico cresce nel tempo fino ad arrivare a un valore sufficiente da far venire meno la condizione inflazionaria sul parametro ϵ .

All'interno del fluido cosmico possono propagarsi solo perturbazioni del termine cinetico δX e quindi perturbazioni della metrica $\delta g^{\mu\nu}$. Come avviene in meccanica ondulatoria classica, si definisce la velocità di propagazione di un'onda in un fluido (chiamata *velocità del suono*) come:

$$c_s^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (6.45)$$

In base alle espressioni di p e ρ come funzioni di P , si ricavano i seguenti differenziali:

$$\begin{cases} dP = P_{,X}dX \\ d\rho = d(2XP_{,X} - P) = 2[P_{,X}dX + XP_{,XX}dX] - P_{,X}dX = P_{,X} + 2XP_{,XX} \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni del sistema nella (6.43) si giunge al seguente risultato:

$$c_s^2 = \frac{P_{,X}}{P_{,X} + 2XP_{,XX}} \quad (6.46)$$

Modello di Dirac-Born-Infeld

In questo modello si pone il seguente vincolo sui coefficienti:

$$c_n(\phi) = -\binom{1/2}{n} \quad (6.47)$$

per cui la funzione P assume la forma:

$$P(X, \phi) = -\Lambda^4 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \left(\frac{X}{\Lambda^4}\right)^n \quad (6.48)$$

Dal momento che si ha $\frac{X}{\Lambda^4} < 1$, la sommatoria diventa lo sviluppo in serie di potenze della seguente espressione:

$$P(X, \phi) = -\Lambda^4 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \left(\frac{X}{\Lambda^4}\right)^n = -\Lambda^4 \sqrt{1 + \frac{X}{\Lambda^4}} \quad (6.49)$$

Questo modello però aggiunge alla (6.47) un termine potenziale $-V(\phi)$ in modo da far assumere alla P la seguente forma:

$$P(X, \phi) = -\Lambda^4(\phi) \sqrt{1 + \frac{X}{\Lambda^4(\phi)}} - V(\phi) \quad (6.50)$$

La dinamica inflazionaria torna a essere di tipo slow-roll nel limite $X \ll \Lambda^4$, infatti il termine sotto radice può essere approssimato tramite lo sviluppo di Taylor:

$$-\Lambda^4(\phi)\sqrt{1 + \frac{X}{\Lambda^4(\phi)}} - V(\phi) \simeq -\Lambda^4(\phi) \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{X}{\Lambda^4(\phi)}\right) - V(\phi) \quad (6.51)$$

Si svolgono i calcoli e si ottiene:

$$P \simeq -\Lambda^4(\phi) - \frac{1}{2}X - V(\phi) \approx -X - V_{eff}(\phi) \quad (6.52)$$

dove è stato posto $V_{eff} = \Lambda^4 + V$ per riportare la lagrangiana in una forma analoga a quella della dinamica slow-roll.

7 Modelli inflazionari ibridi

Nei modelli a campo singolo, c'è un unico campo scalare ϕ che governa sia la dinamica inflazionaria ($\epsilon \ll 1$), sia la fine dell'inflazione ($\epsilon \rightarrow 1$).

Nei modelli inflazionari ibridi invece l'inflatone ϕ è accoppiato a un altro campo scalare ψ (detto *campo a cascata*, dall'inglese *waterfall field*) che risulta stabile fino a quando ϕ non scende al di sotto di un certo valore critico ϕ_c .

Quando ciò accade, ψ perde stabilità e l'inflazione giunge al termine.

Si consideri la seguente densità lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu \psi)^2 - V(\phi, \psi) \quad (7.1)$$

dove il potenziale dei campi (rappresentato in Figura 7) è definito come:

$$V(\phi, \psi) = V(\phi) + \frac{1}{4\lambda}(M^2 - \lambda\psi^2)^2 + \frac{g^2}{2}\phi^2\psi^2 \quad (7.2)$$

dove si suppone $V(\phi) \ll \frac{M^4}{4\lambda}$ in modo che il contributo maggiore alla densità di energia inflazionaria sia dato dal termine $\frac{1}{4\lambda}(M^2 - \lambda\psi^2)^2$.

Sviluppando il quadrato, si riscrive la (7.2) nel modo seguente:

$$V(\phi, \psi) = V(\phi) + \frac{M^4}{4\lambda} + \frac{\lambda\psi^4}{4} + (g^2\phi^2 - M^2)\frac{\psi^2}{2} \quad (7.3)$$

L'accoppiamento fra i due campi è dato dal terzo termine della (7.3).

Il fattore fra parentesi è detto *massa effettiva* del campo ψ ed è indicato con $m_\psi^2(\phi)$.

In base al segno della massa effettiva si possono distinguere due casi:

1) $\phi > \phi_c = \frac{M}{g} \implies m_\psi^2(\phi) > 0 \implies V(\psi)$ ha un unico minimo in $\psi = 0$ in corrispondenza del quale ψ si stabilizza e rimane costante.

Il potenziale assume la forma:

$$V(\phi, \psi = 0) = \frac{M^4}{4\lambda} + V(\phi) \quad (7.4)$$

In base alla supposizione precedente, il primo termine (costante) domina sul primo, per cui il potenziale risulta praticamente piatto e può verificarsi l'inflazione slow-roll. La dinamica inflazionaria è quindi governata solo da ϕ .

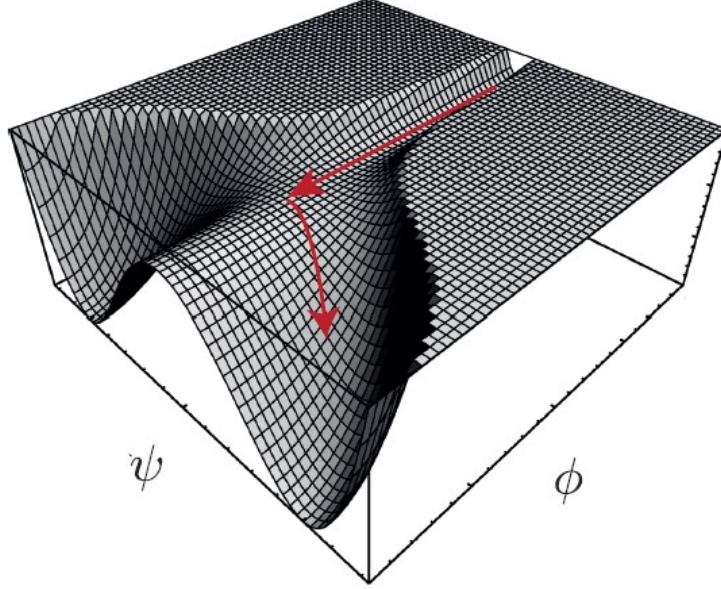


Figura 7: [1] grafico della funzione in due variabili $V(\phi, \psi)$ che rappresenta il potenziale in un modello inflazionario ibrido. Si noti come, per valori decrescenti di ϕ , a un certo punto il potenziale si biforca e si crea l'instabilità che porta alla fine dell'inflazione.

2) $\phi < \phi_c = \frac{M}{g} \implies m_\psi^2(\phi) < 0$ (in questo regime si dice che il campo ψ diventa *tachionico*) $\implies \psi = 0$ adesso diventa un massimo relativo del potenziale $V(\psi)$, mentre i minimi si trovano a $\psi = \pm \sqrt{\frac{|m_\psi^2|}{\lambda}}$.

Il campo ψ non è più stabile in $\psi = 0$ e "cade" verso uno dei minimi (questa transizione di fase è detta *transizione a cascata*).

A seguito del processo a cascata, il campo ψ raggiunge uno dei suoi due minimi e il potenziale diventa:

$$V\left(\phi, \psi = \sqrt{\frac{|m_\psi^2|}{\lambda}}\right) = V(\phi) + \frac{M^2 g^2}{2\lambda} \phi^2 - \frac{g^4}{4\lambda} \phi^4 \quad (7.5)$$

che presenta un minimo in $\phi = 0$.

A questo punto anche l'inflatone cade verso il suo minimo e l'inflazione termina poiché il potenziale non è più dominante sul termine cinetico.

8 Oltre i modelli inflazionari "classici"

Come anticipato nell'Abstract, la trattazione sul tema dell'inflazione sviluppata nelle pagine precedenti è detta *classica*, poiché è basata solo sulla Relatività Generale e non tiene conto degli effetti quantistici che invece caratterizzavano la singolarità iniziale.

Si è fatto un accenno alla meccanica quantistica quando si è parlato dell'inflatone, definito come un ipotetico campo quantizzato materiale di spin 0 al quale sarebbero associate particelle che formerebbero un fluido cosmico primordiale che viola la *condizione di energia forte*.

Tuttavia, fatta eccezione per questo passo del paragrafo 5.1, il fluido cosmico è stato trattato come un oggetto classico, senza tenere conto della sua natura quantomeccanica.

I modelli inflazionari sviluppati sono quindi incompleti, ma nonostante ciò, essi hanno permesso di trarre alcune conclusioni importanti:

- 1) in assenza di inflazione non si spiegherebbe la quasi perfetta omogeneità della radiazione cosmica di fondo;
- 2) il fatto che l'universo sia piatto non è dovuto a un puro caso estremamente fortuito, ma è una conseguenza della fase inflazionaria;
- 3) l'espansione iniziale dell'universo deve essere stata velocissima ed esponenziale;
- 4) l'inflazione deve avere una durata finita;

Introducendo effetti quantistici nel modello, bisogna tenere in considerazione le fluttuazioni intrinseche dell'inflatone dovute al *principio di indeterminazione*, per cui in realtà l'inflatone non è un campo perfettamente omogeneo come nel modello classico, ma è caratterizzato da perturbazioni che dipendono dalla posizione.

Queste hanno permesso di spiegare (come accennato in maniera discorsiva nel paragrafo 5.1) l'origine delle piccole anisotropie che caratterizzano la radiazione cosmica di fondo, ma il fenomeno più strano e affascinante che scaturirebbe è quello della cosiddetta *inflazione eterna*.

Mentre nel caso classico l'inflatone cade verso il minimo del suo potenziale portando alla fine dell'inflazione, nel caso quantistico le fluttuazioni del campo farebbero sì che, solo in alcune aree dell'universo, esso esca dalla "buca di potenziale" e faccia riprendere l'inflazione.

Questo vuol dire che, mentre nella maggior parte delle aree del cosmo l'inflazione termina, in altre essa prosegue dando origine a un altro universo. Questo processo si potrebbe ripetere all'infinito ed è la base della moderna *Teoria delle Bolle*, ossia un modello cosmologico proposto da Andrej Linde, in cui l'inflazione eterna produ-

ce un'infinità di universi (come le bolle di una schiuma) che genera una struttura frattale detta *Multiverso*.

In ognuno di questi universi le costanti fondamentali della natura potrebbero essere diverse e solo in quei pochi in cui assumono specifici valori (come il nostro) possono svilupparsi sistemi biologici.

Alla luce di tutto questo, una serie di nuovi problemi tutt'altro che banali entrano in gioco.

Innanzitutto, nessuno è stato ancora in grado di spiegare cosa sia esattamente l'inflatone e se esso esista veramente. Per il momento è solo un campo ipotetico introdotto nel modello al solo scopo di giustificare l'inflazione stessa. La teoria risulta quindi in gran parte "artificiale" e non risolve il problema fondamentale sull'origine dell'universo, ossia cosa sia il Big Bang.

Inoltre, non è chiaro quali possano essere i meccanismi con cui l'inflatone decade producendo le particelle elementari e dando il via al *reheating*.

Uno degli interrogativi più profondi posti dal modello dell'inflazione eterna è il *Problema della Misura*, che consiste nel calcolo della probabilità che, all'interno di una delle infinite "bolle" del Multiverso, le costanti fondamentali della natura, come la Costante Cosmologica, abbiano un determinato valore.

Tuttavia, dal momento che gli universi sono infiniti, il calcolo della probabilità di osservare un certo valore della costante porterebbe a un rapporto fra quantità infinite, che rappresenta una forma indeterminata.

Questo problema può essere risolto attraverso una procedura di *regolarizzazione*, ossia calcolare il rapporto prendendo un campione di universi sempre più grande e calcolare il limite a cui tende questa frazione.

Tuttavia, diverse procedure per calcolare questo limite conducono a risultati molto diversi.

Questi sono alcuni dei maggiori problemi aperti a cui la cosmologia, in futuro, dovrà cercare di dare una risposta.

Bibliografia

- [1] D. Baumann, *The Physics of Inflation*.
- [2] Andrew R. Liddle, David H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*
- [3] Peter Coles, Francesco Lucchin, *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure*
- [4] Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Starobinsky_inflation
- [5] Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein-Hilbert_action
- [6] Wikipedia: https://it.wikipedia.org/wiki/Inflazione_eterna
- [7] Wikipedia: [https://en.wikipedia.org/wiki/Measure_problem_\(cosmology\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Measure_problem_(cosmology))