

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Astronomia

**TEOREMA DEL VIRIALE
E APPLICAZIONI
ASTROFISICHE**

Relatrice:
Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa

Presentata da:
Giulia D'Orazio

**Sessione 1
Anno Accademico 2024-2025**

Indice

1	Introduzione	2
2	Cenni sul problema degli N-corpi	2
	2.1 Tempo di rilassamento	3
3	Formulazione del teorema del Viriale	4
	3.1 Verso il teorema del viriale scalare	4
	Regime non collisionale	4
	Equazioni di Jeans	5
	3.2 Sistemi autogravitanti	7
	3.3 Piano viriale	8
4	Applicazioni astrofisiche	10
	4.1 Evaporazione gravitazionale e catastrofe gravotermica	10
	4.2 Stima della massa di un ammasso di galassie	12
	4.3 Sistemi multicomponenti	14
	Alone di materia oscura in una galassia	14
5	Conclusioni	15
A		16
1	Introduzione ai sistemi multicomponenti	16
	Caso a più componenti	17

1 Introduzione

Il Teorema del Viriale rappresenta uno degli strumenti matematici fondamentali nello studio dei sistemi fisici e astrofisici. Introdotto da Clausius nel 1870 nell'ambito della meccanica statistica, esso consente di descrivere la partizione dell'energia all'interno di un sistema di N corpi all'equilibrio. La sua importanza si è affermata nel corso del Novecento, in particolare nell'astrofisica, dove ha trovato vasta applicazione nello studio di sistemi stellari tra cui galassie, ammassi globulari e ammassi di galassie. L'eleganza formale del teorema si accompagna a una notevole potenza predittiva: in molti casi, infatti, consente di derivare informazioni globali sull'equilibrio dinamico di un sistema anche in assenza di soluzioni analitiche complete delle equazioni del moto. In questo lavoro di tesi si intende esporre i fondamenti teorici e alcune applicazioni astrofisiche del teorema del viriale. Dopo una breve introduzione al problema degli N -corpi e alla definizione del tempo di rilassamento, si procederà alla deduzione formale del teorema, con particolare attenzione ai casi di sistemi autogravitanti. Verrà poi introdotto il concetto di piano viriale, utile strumento grafico per l'interpretazione dell'equilibrio nei sistemi stellari. La seconda parte della trattazione sarà dedicata alle applicazioni astrofisiche del teorema, soffermandosi su tre tematiche principali: l'evaporazione gravitazionale e la catastrofe gravotermica, fenomeni centrali nell'evoluzione dinamica degli ammassi globulari, la stima della massa negli ammassi globulari, introducendo l'anomalia della materia oscura, e l'analisi di sistemi multicomponenti, con particolare riferimento all'interazione tra materia barionica e materia oscura nelle galassie. L'obiettivo è fornire una panoramica chiara e coerente del teorema del viriale, mettendone in luce sia l'eleganza matematica sia la rilevanza fisica nell'interpretazione di fenomeni che caratterizzano l'universo.

2 Cenni sul problema degli N -corpi

Il problema degli N -corpi consiste nello studio di un sistema di masse puntiformi interagenti gravitazionalmente: si tratta probabilmente del problema più famoso di tutta la fisica matematica, in quanto è ben noto che per $N \geq 3$ non esiste una soluzione analitica generale. Tuttavia è possibile ottenere informazioni dalle equazioni sottostanti attraverso tecniche di calcolo numerico oppure con 'ipotesi addizionali'. Per semplicità, si riportano le equazioni in formalismo Newtoniano:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i \\ \dot{\mathbf{v}}_i = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i} \\ U = -\frac{G}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^N \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \end{cases} \quad (2.0.1)$$

Il pedice i è riferito all' i -esima particella del sistema a N -corpi, mentre U rappresenta l'energia potenziale totale. Al sistema di equazioni sopra riportate, vengono assegnate le condizioni iniziali

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{v}_i(0) = \mathbf{v}_0 \end{cases} \quad (2.0.2)$$

Per risolvere il caso generale, dove a ogni particella sono associate 6 equazioni scalari, sono necessarie $6N - 1$ leggi di conservazione. Nello spazio delle fasi $6N$ dimensionale si può rappresentare ogni integrale primo del moto come una varietà: la soluzione analitica è intersezione di $6N - 1$ varietà, ma con $N > 2$ non è possibile costruirne in tal numero. Tuttavia, come già anticipato, è possibile aggiungere qualche ipotesi (motivata) in modo tale da 'estrarre' informazioni anche senza avere in mano una soluzione generale. Innanzitutto, considerando una galassia come esempio, è possibile approssimare ogni stella come un punto materiale: le dimensioni medie di una stella rispetto alle dimensioni caratteristiche della galassia fanno sì che il libero cammino medio di una di esse sia $\approx 10^{13}$ volte le dimensioni della galassia.¹ Ciò si traduce in una probabilità nulla di *urto geometrico* tra stelle.

2.1 Tempo di rilassamento

Per affrontare la derivazione (qualitativa) del teorema del viriale scalare, è necessario introdurre ancora qualche strumento matematico fondamentale.

Se si considera un sistema ad N -corpi (tenendo sempre come esempio una galassia), è naturale considerarlo come una distribuzione discreta di particelle. Ai fini della discussione, è possibile aggiungere un'ulteriore ipotesi e assumere la distribuzione di densità come *continua*, approssimazione all'apparenza molto forte ma con una altrettanto forte motivazione: avvalorandosi di una stima, le distanze interstellari sono circa 1-10pc, mentre un diametro galattico è 10^5 pc, dunque 4/5 ordini di grandezza di differenza sono sufficienti a motivare la scelta della distribuzione continua.

Data la valutazione (corretta) di ρ continua, posso associare ad essa un potenziale gravitazionale dall'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (2.1.1)$$

nella forma

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -G \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3 \mathbf{x}' \quad (2.1.2)$$

Dato che il sistema è composto da N -corpi, è necessario trovare il potenziale complessivo ϕ_N , dato dalla somma dei potenziali di ogni corpo e tale per cui ogni particella i si muove sotto l'azione di tale potenziale ϕ_N .

$$\phi_N(\mathbf{x}_i, t) = -G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \quad (2.1.3)$$

È possibile ora formulare la domanda: siccome la distribuzione continua è un'approssimazione, quanto tempo deve trascorrere prima che la 'perturbazione' data dalla distribuzione di stelle discreta modifichi le orbite date dalla distribuzione continua?² In 'linguaggio matematico', dopo quanto tempo $\phi - \phi_N$ diventa un termine perturbativo significativo (di una stella che si muove sotto l'azione di ϕ)?

Un possibile approccio consiste nel considerare una massa di test m_t (le altre particelle sono dette 'masse di campo' m_f) e calcolare la variazione di energia per ogni urto m_t - m_f

¹Per confrontare, il Sole ha compiuto circa 20-25 giri attorno al centro galattico in circa $4.5Gyr$.

²È ovvio che per rispondere in modo preciso è necessario conoscere entrambe le orbite ed è altrettanto ovvio che non è possibile determinarle.

$|\Delta E|$ e trovare il tempo caratteristico che il sistema impiega affinché la somma su tutti gli urti di $|\Delta E|$ eguagli l'energia iniziale della particella di test.

$$\sum_{\text{urti}} |\Delta E| = E_{m_t}^0$$

Si può dimostrare che

$$t_{2b} \sim \frac{0.1N}{\ln N} t_{\text{cross}} \quad (2.1.4)$$

con t_{cross} il tempo impiegato da una stella per percorrere le dimensioni del sistema. Si osserva che t_{2b} aumenta all'aumentare del numero di oggetti all'interno del sistema. Dunque per vari oggetti con vari valori di N , si ottengono vari tempi di rilassamento che vanno confrontati con l'età degli oggetti stessi:

- nel caso in cui $t_{2b} > t_{\text{obj}}$, si è in regime *non collisionale*. Il sistema non ha ancora raggiunto l'equilibrio termodinamico. Il termine perturbativo $\phi - \phi_N$ non ha ancora significativamente variato le orbite generate da ϕ .
Ad esempio, se si considera una galassia ellittica con $N \approx 10^{11}$ e $t_{\text{cross}} \approx 10^8$ anni, il suo tempo di rilassamento è dell'ordine di 10^{16} anni, ovvero dieci milioni di volte più lungo dell'età dell'universo.
- nel caso in cui $t_{2b} \lesssim t_{\text{obj}}$, si è in regime *collisionale*. Il sistema sta tendendo o ha già raggiunto l'equilibrio termodinamico, quindi la funzione di distribuzione delle velocità tende ad una Maxwelliana. Il termine perturbativo $\phi - \phi_N$ ha significativamente variato le orbite generate da ϕ .
Per esempio, un ammasso globulare con $N \approx 10^6$ e $t_{\text{cross}} \approx 10^6$ anni, il tempo di rilassamento è dell'ordine del tempo di Hubble, dunque si può già considerare il regime collisionale. Per gli ammassi aperti il tempo di rilassamento è dell'ordine delle centinaia di milioni di anni, dunque il regime è sicuramente collisionale.

3 Formulazione del teorema del Viriale

3.1 Verso il teorema del viriale scalare

Le considerazioni precedenti sono state utili per definire in particolare i concetti di distribuzione di *densità continua* e *regime non collisionale*. Per mantenere la massima generalità, si considera anche un potenziale esterno ϕ_{ext} generato da una densità $\rho_{\text{ext}} \neq \rho$.³ Il potenziale totale è quindi

$$\phi_T = \phi_{\text{ext}} + \phi$$

Regime non collisionale

Si dimostra nella trattazione del tempo di rilassamento a due corpi che l'approssimazione non collisionale di un sistema, ovvero la 'sostituzione' del sistema discreto 'reale' con una distribuzione continua, è ottimamente verificata per tempi scala molto lunghi, permettendo così di ridurre le dimensioni dello spazio delle fasi (da $6N$ a 6 dimensioni.).

Tuttavia la descrizione dell'*evoluzione* del sistema in modo non collisionale prevede una

³Anche se spesso sono spazialmente sovrapposte, ad esempio nel caso della materia oscura. È interessante notare che se $\phi_{\text{ext}} = 0$, si ha il caso autogravitante.

equazione differenziale alle derivate parziali (PDE) della funzione di distribuzione. Idealmente, sapendo che la funzione di distribuzione contiene tutte le informazioni di posizioni e velocità del sistema, risolvendo la PDE si può ottenere la soluzione generale di un qualsiasi sistema non collisionale.

La PDE in questione è nota in dinamica stellare come **Equazione di Boltzmann non collisionale** (CBE ⁴)

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \phi_T}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \quad (3.1.1)$$

La PDE sarebbe risolvibile con un metodo detto *delle caratteristiche*, in 6+1 dimensioni (contando anche il tempo), ma ancora le conoscenze matematiche non sono in grado di fornire una soluzione analitica generale. Ciò significa che l'ipotesi di non collisionalità non è sufficiente per fornire la descrizione generale del sistema di N-corpi con potenziale $\phi_T(\mathbf{x}, t)$, anch'esso generico.

Equazioni di Jeans

Tuttavia è possibile ricavare informazioni con metodi diversi da quello sopracitato, in base al tipo di analisi che si vuole proseguire. In linea di massima esistono due tipi di indagine: la risoluzione di casi particolari, costruendo un'espressione analitica esatta per tale situazione, oppure l'estrazione di informazioni a partire dal caso generale. Quest'ultimo metodo, detto *dei momenti*, sfrutta alcune grandezze per costruire delle equazioni differenziali più semplici della PDE di partenza.

A livello qualitativo, queste nuove equazioni (storicamente dette *di Jeans*) hanno una 'gerarchia' che coinvolge momenti di ordine sempre maggiore.

Le equazioni di Jeans sono esatte e possono essere utilizzate per ridurre di dimensioni il sistema nello spazio delle fasi, tuttavia ne esistono un numero infinito siccome la gerarchia dei momenti è infinita. Si tratta dunque di un sistema 'aperto' di equazioni.⁵

In particolare, le equazioni di Jeans descrivono le relazioni tra i momenti della funzione di distribuzione nello spazio delle velocità (v), ma è possibile costruire ulteriori equazioni nello spazio delle configurazioni (\mathbf{x}): queste ultime sono le *equazioni viriali in forma tensoriale*.

In dinamica stellare ci si limita all'utilizzo dei momenti delle velocità fino al II ordine (salvo rari casi), riportati in seguito:

$$\bar{v}_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} v_i f d^3\mathbf{v} \quad (3.1.2)$$

$$\overline{v_i v_j}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} v_i v_j f d^3\mathbf{v} \quad (3.1.3)$$

$$\sigma_{ij}^2(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) f d^3\mathbf{v} \quad (3.1.4)$$

(\bar{v}_i e $\overline{v_j}$ sono le componenti delle velocità medie, σ_{ij}^2 tensore di dispersione delle velocità [2]).

⁴*Collisionless Boltzmann Equation*

⁵In fluidodinamica, si ha un insieme di equazioni 'chiuso' grazie alla termodinamica che fornisce le relazioni necessarie per la chiusura. In dinamica stellare, quando si tratta un regime non collisionale, non è possibile utilizzare le relazioni della termodinamica poichè non ci sono sufficienti interazioni tra i componenti (stelle) del sistema. Dunque l'insieme di equazioni rimane 'aperto'.

Tra questi, di particolare interesse astrofisico, emerge il tensore di dispersione delle velocità: siccome è simmetrico e definito positivo, dal teorema spettrale è possibile trovare una matrice ortogonale tale che σ_{ij}^2 nella nuova base (ovvero nel nuovo sistema di riferimento) sia diagonale e con autovalori positivi. Nello spazio delle velocità (\mathbb{R}^3) si ha, quindi, un ellissoide con assi σ_{11}^2 , σ_{22}^2 e σ_{33}^2 che variano in funzione dello spazio \mathbf{x} e del tempo. È immediato dedurre che se il tensore di velocità è isotropo (quindi i tre valori sulla diagonale sono uguali) allora nello spazio delle velocità l'ellissoide è in realtà una sfera.

Ritornando alle equazioni viriali in forma tensoriale, dai momenti delle velocità sopracitati, si definiscono i tensori nello spazio delle configurazioni:

$$I_{ij}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho x_i x_j d^3\mathbf{x} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{Tensore di inerzia} \quad (3.1.5)$$

la cui traccia è

$$\text{Tr}(I_{ij}) = I$$

il momento d'inerzia. Analogamente, per $i, j = 1, 2, 3$

$$K_{ij}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \overline{v_i v_j} d^3\mathbf{x} \quad \text{Tensore di energia cinetica totale} \quad (3.1.6)$$

$$T_{ij}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \overline{v_i} \overline{v_j} d^3\mathbf{x} \quad \text{Tensore di energia cinetica ordinata} \quad (3.1.7)$$

$$\Pi_{ij}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho \sigma_{ij}^2 d^3\mathbf{x} \quad \text{Tensore di energia cinetica di dispersione} \quad (3.1.8)$$

$$U_{ij}(t) = - \int_{\mathbb{R}^3} \rho x_i \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d^3\mathbf{x} \quad \text{Tensore di autoenergia} \quad (3.1.9)$$

$$W_{ij}(t) = - \int_{\mathbb{R}^3} \rho x_i \cdot \frac{\partial \phi_{\text{tot}}}{\partial x_j} d^3\mathbf{x} \quad \text{Tensore di energia di interazione} \quad (3.1.10)$$

e le rispettive tracce (si omette la dipendenza temporale per alleggerire la notazione)

$$\text{Tr}(K_{ij}) = K, \quad \text{Tr}(T_{ij}) = T, \quad \text{Tr}(\Pi_{ij}) = \Pi \quad \text{Tr}(U_{ij}) = U \quad \text{Tr}(W_{ij}) = W$$

In particolare, si nota l'importante relazione che lega le varie energie cinetiche: i contributi dell'energia cinetica totale dal parte del moto ordinato e non ordinato

$$K_{ij} = T_{ij} + \frac{\Pi_{ij}}{2} \quad (3.1.11)$$

Inoltre per ogni galassia si associano le seguenti grandezze scalari:

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \phi d^3\mathbf{x} = -\frac{G}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \quad \text{Autoenergia gravitazionale} \quad (3.1.12)$$

$$U_{\text{ext}}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho \phi_{\text{ext}} d^3\mathbf{x} = -G \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho_{\text{ext}}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \quad \text{Energia gravitazionale esterna} \quad (3.1.13)$$

Si dimostra che, partendo dalle equazioni di Jeans e considerando i le relazioni dalla eq. (3.1.5) alla eq. (3.1.11), si ottiene il seguente **Teorema del Viriale in forma tensoriale** (del II ordine):

$$\boxed{\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2} = 2T_{ij} + \Pi_{ij} + W_{ij}} \quad (3.1.14)$$

Infine, dall'equazione viriale del II ordine (non ricavata esplicitamente), si considerano le tracce dei tensori e si ottiene il **Teorema del Viriale in forma scalare**: \forall galassia,

$$\boxed{\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2K + W} \quad (3.1.15)$$

ricordando che dalla relazione eq. (3.1.11), prendendo le tracce, si ottiene

$$2K = 2T + \Pi$$

e considerando un sistema allo stato stazionario, l'equazione scalare prende la forma

$$\boxed{2K = -W} \quad (3.1.16)$$

Prima di continuare con la trattazione, è bene ricordare che le ultime tre relazioni sono state derivate a partire dalle CBE, valide solo in un regime non collisionale. Quindi *sicuramente* tali relazioni sono verificate in un sistema a regime non collisionale, ma non è condizione necessaria. È possibile che esistano sistemi che non si trovano in regimi non collisionali in cui queste soluzioni sono verificate.

È importante ricordare che il teorema del viriale è estremamente generale e si manifesta in modi diversi in base al sistema studiato: a partire dalle caratteristiche del sistema, è possibile dimostrare e ricavare un'espressione analoga alla eq. (3.1.14) (Ciotti, esercizio 6.6 [3])

3.2 Sistemi autogravitanti

A partire dai risultati esatti del problema degli N-corpi, si possono esplicitare alcune proprietà globali del sistema basate sul concetto di viriale.

In particolare, un sistema di N corpi si dice **autogravitante** se il potenziale gravitazionale totale che determina il moto delle particelle è generato dalle particelle stesse.

Si dimostra nella parte iniziale della App. 1 che nel caso di un sistema autogravitante, quindi dove

$$\phi_{\text{ext}} = 0$$

il tensore di interazione e il tensore di autoenergia coincidono. Dunque è possibile scrivere il teorema del viriale scalare per sistemi autogravitanti nel seguente modo [2]: (nel sistema inerziale)

$$2K = -U > 0 \quad \forall t \quad (3.2.1)$$

Immediatamente si ottengono i seguenti risultati:

- Un sistema di N-corpi autogravitante è virializzato $\Leftrightarrow \frac{dI}{dt} = 0$, dove I è il momento d'inerzia nel sistema del centro di massa;

- In un sistema di N-corpi autogravitante al viriale l'energia meccanica E è negativa ($E < 0$);
- Un sistema di N-corpi è al viriale $\Leftrightarrow K = K(0)$ e $U = U(0)$, quindi se l'energia cinetica e potenziale rimangono costanti nel tempo.

Inoltre si definiscono due grandezze interessanti per applicazioni di carattere astrofisico, come la struttura delle galassie, derivate direttamente dalle definizioni di energia cinetica e potenziale. Si definisce V_v *velocità viriale*

$$K = \frac{M_{\text{gal}} V_v^2}{2} \Rightarrow V_v = \sqrt{\frac{2K}{M_{\text{gal}}}} \quad (3.2.2)$$

$$|U| = \frac{GM_{\text{gal}}^2}{r_v} \Rightarrow r_v = \frac{GM_{\text{gal}}^2}{|U|} \quad (3.2.3)$$

Sostituendo in eq. (3.2.1), si ottiene la relazione che lega le due nuove grandezze

$$V_v^2 = \frac{GM_{\text{gal}}}{r_v} \quad (3.2.4)$$

Si può osservare che, dati valori o misurazioni delle velocità delle stelle e delle dimensioni caratteristiche della galassia, è possibile stimare la massa M_{gal} contenuta nella galassia. In questo modo è stato possibile dedurre che la massa necessaria affinché le stelle siano in tale configurazione di equilibrio all'interno della galassia sia molto maggiore di quella osservata. Dunque l'intuizione dell'esistenza di una materia sconosciuta, chiamata per l'appunto *dark matter*, che produce campo gravitazionale, ma non interagisce con la materia barionica. (section 4.2)

3.3 Piano viriale

Ora è possibile introdurre uno strumento intuitivo che permette di ricavare proprietà fondamentali di un sistema (stellare) autogravitante, a partire dalla forma più semplice del teorema del viriale (eq. (3.2.1)).

A livello qualitativo, il **piano viriale** è uno strumento che permette di visualizzare 'l'azione' del teorema del viriale su sistemi di varie caratteristiche.[3] Siccome si analizzano sistemi *autogravitanti* e con forze agenti del tipo $\propto \frac{1}{r^2}$ (ovvero dove l'unica forza in gioco è quella gravitazionale), si rappresenta l'energia gravitazionale $|U|$ (in modulo) sull'asse delle ascisse mentre nell'asse delle ordinate si trova l'energia cinetica K . Dunque lungo l'asse x si trovano sistemi dai più 'diluuti' (vicino all'origine, con valore dell'energia gravitazionale in modulo molto bassi) ai più compatti (con valori elevati di $|U|$); analogamente lungo l'asse delle ascisse si hanno sistemi 'freddi' vicino all'origine e sistemi 'caldi' con alto valore di K .

È immediato dalla eq. (3.2.1) identificare la *retta del viriale* $K = \frac{|U|}{2}$, dove si trovano tutti i sistemi virializzati, ed è bene specificare che non si tratta della bisettrice $K = |U|$. Tutti i punti che non si trovano sulla retta del viriale **non** sono sistemi all'equilibrio.

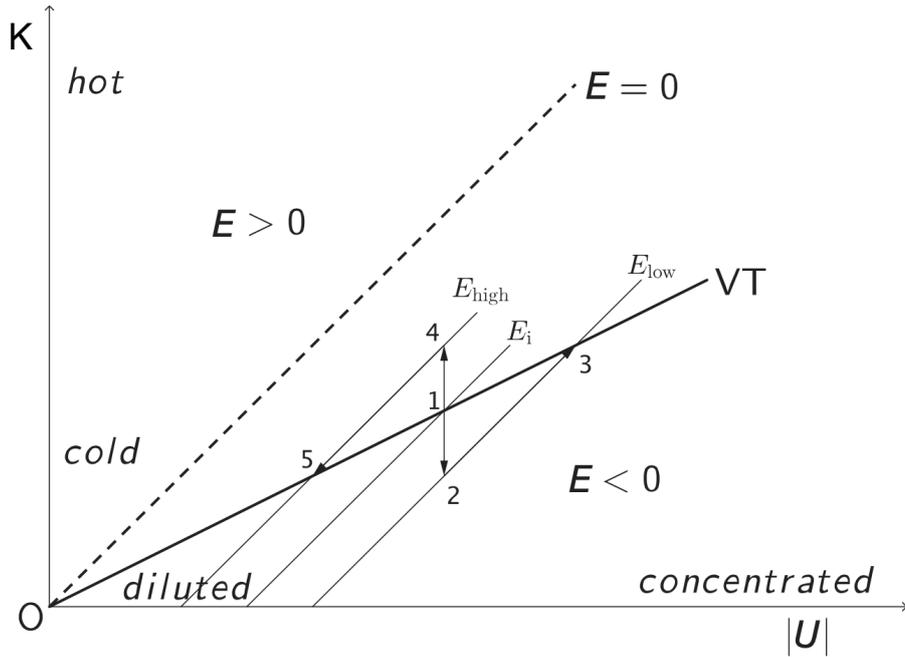


Figura 3.1: **Piano viriale:** La retta del viriale è data da $K = \frac{|U|}{2}$. I sistemi sono soggetti solo alla forza gravitazionale, dunque sono conservativi e i punti nel piano viriale si muovono lungo le rette di energia costante. Per raggiungere l'equilibrio, il punto si ferma all'intersezione tra retta viriale e retta dell'energia costante. Tale discorso è valido solo per sistemi con energia negativa, in quanto un sistema con energia positiva non ha intersezioni con la retta del viriale.

Per comprendere la prima proprietà dei sistemi autogravitanti direttamente dal piano viriale in modo intuitivo, si può utilizzare un esempio esplicativo.

Si considera un sistema *non* all'equilibrio con energia totale $E = K + U = 0$, con $U = -|U|$: siccome è un *sistema conservativo*, dalle premesse di autogravitazione e con forze solamente gravitazionali, tale valore di energia totale si conserva. Dunque graficamente il sistema-punto può muoversi nel piano solo lungo la retta $K = |U|$. Perché sia al viriale, si deve trovare necessariamente sul punto di intersezione tra le due rette, viriale ed energia totale conservata, così che le due condizioni siano verificate⁶: in questo esempio specifico si osserva che l'intersezione cade proprio sull'origine, delimitando due regioni del piano in base al valore dell'energia E :

- per $E < 0$ c'è una sola intersezione \Rightarrow È possibile raggiungere uno stato virializzato
- per $E > 0$ non ci sono intersezioni \Rightarrow Non è possibile raggiungere l'equilibrio.

Considerando ora un secondo esempio, supponendo un punto **1** nel piano sulla retta del viriale, una parte di energia cinetica viene persa (ad esempio nel caso di evaporazione gravitazionale section 4.1) mentre $|U|$ rimane pressoché identico. Graficamente, il punto scende fino a raggiungere **2**, che si trova ad un'altra energia totale E_{low} minore di quella iniziale e non si trova all'equilibrio. Per raggiungere il viriale, deve muoversi lungo la retta di E_{low} fino al punto **3** intersezione con la retta viriale. Si osserva che il punto **3** è a una temperatura maggiore e ha energia potenziale (in modulo) maggiore. Qualitativamente, è

⁶È bene prestare attenzione alla condizione di equilibrio: è una condizione necessaria ma *non sufficiente*. Affinché un sistema sia all'equilibrio è *necessario* che sia sulla retta del viriale, ma non è *sufficiente* trovarsi sulla retta per essere all'equilibrio (esistono stati di equilibrio instabile).

stato 'raffreddato' il sistema all'equilibrio, ma nel nuovo equilibrio il sistema è 'più caldo' di prima.

Analogamente si può procedere 'riscaldando' il sistema fino al punto **4**, il quale raggiungerà l'intersezione **5** e si troverà ad una temperatura cinetica K e $|U|$ minori, quindi più 'freddo' e 'diffuso'.

A livello termodinamico, si può affermare che i sistemi autogravitanti ⁷ hanno *calore specifico negativo*.

4 Applicazioni astrofisiche

4.1 Evaporazione gravitazionale e catastrofe gravotermica

Con la trattazione del piano viriale, è stato introdotto il processo alla base della catastrofe gravotermica che avviene negli ammassi globulari, fenomeno conseguenza dell'effetto di *evaporazione gravitazionale*.

Già trattato nella section 2.1, il tempo di rilassamento risulta essere uno strumento molto utile in astrofisica per determinare il metodo con cui studiare un sistema (regime collisionale o non collisionale). In particolare, nel caso degli ammassi globulari (GC), dove $t_{2b} \sim t_{GC}$ ⁸ si è di fronte ad un regime collisionale: la termodinamica sta iniziando ad agire, facendo tendere la funzione di distribuzione ad una Maxwelliana.

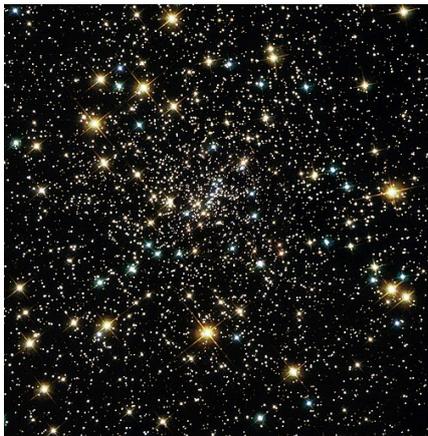


Figura 4.1: **NGC 6397**: È uno degli ammassi globulari nella Via Lattea che hanno subito core collapse. Immagine di HST (NASA/ESA and the Hubble Heritage Team (AURA/STScI)).

Il rilassamento è il primo processo dinamico che differenzia le stelle in base alla loro massa: le stelle più grandi, per equipartizione di energia cinetica ⁹, si spostano nelle regioni centrali, le quali diventano significativamente più dense rispetto alle regioni esterne. Invece le stelle più leggere interagiscono con le regioni centrali, guadagnando energia e aumentando la loro velocità. I sistemi come gli ammassi globulari hanno velocità di fuga finita, dunque con il passare del tempo e all'aumentare delle interazioni tra regioni esterne e regioni interne, le stelle leggere possono acquisire *velocità maggiori* della velocità di fuga del GC. ¹⁰

I modelli di evoluzione degli ammassi globulari di tipo "evaporativo" sono stati promossi già dagli anni '40 da Ambartsumian (1938) e da Spitzer (1940), studiati poi da Chandrasekhar, Antonov, King, Heron e tanti altri. Antonov in particolare introdusse l'idea di una 'instabilità gravitazionale', forte della tesi che i riaggiustamenti interni non portano all'equilibrio termodinamico poiché *potrebbe* essere instabile per sistemi autogravitanti. Da tale affermazione, l'instabilità si manifesterebbe attraverso il core collapse.

⁷Non sono gli unici sistemi ad avere tale caratteristica, ad esempio le trasformazioni politropiche cfr. Ciotti L., *Introduction to Stellar Dynamics* (footnote 4 Ch.10), 2021.

⁸ t_{GC} rappresenta l'età degli ammassi globulari.

⁹Equipartizione energetica e *mass segregation* non sono lo stesso processo, un sistema può essere "mass-segregated" senza essere all'equipartizione. [5]

¹⁰Ciotti L., *Introduction to Stellar Dynamics*, Ch. 7.3, 2021[3]

Dagli studi di Heron, si osserva che l'evaporazione è fortemente dipendente dalla massa, difatti sono le stelle massive che tendono a cedere energia alle meno massive, dunque la percentuale di stelle poco massive che lasciano l'ammasso è nettamente superiore alla percentuale di stelle massive: il meccanismo è analogo alla separazione delle masse nelle regioni interne ed esterne.

Il tasso di evaporazione tende ad aumentare con l'avanzare dell'evoluzione dell'ammasso. I due motivi principali sono l'aumento della concentrazione del core e l'aumento dell'anisotropia tra regioni interne ed esterne.[6] Nella maggior parte degli ammassi, la dispersione di velocità decresce all'aumentare del raggio, quindi si può affermare che le regioni interne sono più calde di quelle esterne. Di conseguenza, le stelle esterne quando interagiscono con il core, trasferiscono energia dall'interno all'esterno. Il core, principalmente dominato dalla gravità, ha calore specifico negativo, dunque perdendo energia si riscalda e si contrae (cfr fig. 3.1). Quindi si crea un divario di temperatura sempre più elevato.¹¹ Se non intervengono altri fenomeni a frenare tale compressione, il core collassa: il fenomeno viene chiamato *catastrofe gravotermica*. [1]

Durante l'evoluzione dell'ammasso globulare avvengono vari processi, alcuni dei quali includono la partecipazione di sistemi binari, che possono essere primordiali oppure formati per *three-body captures* oppure *tidal captures*. In particolare, i sistemi binari tendono a raggrupparsi all'interno del core, in quanto più massivi delle stelle singole, e avendo anche una sezione d'urto maggiore sono più soggetti a interazioni con stelle singole: le *hard binaries* (binarie le cui componenti sono molto vicine tra loro e hanno energia di legame - in modulo - elevata, principalmente formate da *tidal captures*) cedono $\frac{2}{3}$ della loro energia alle stelle singole con cui interagiscono, mentre $\frac{1}{3}$ viene utilizzata per spostarsi in orbite del core più grandi di quelle in cui si trovano.¹²

Dunque, la presenza di binarie permette non solo l'arresto del core collapse, bensì anche una lieve espansione. Alcune simulazioni mostrano che possono esistere diverse fasi di contrazione ed espansione del core che vengono chiamate *gravothermal oscillation* o oscillazioni gravotermiche. [6]

¹¹Al contrario dei gas, dove la termodinamica tende a rendere il sistema isoterma, la termodinamica di un sistema con calore specifico negativo tende ad aumentare il gradiente termico.

¹²Risultati ottenuti dalle simulazioni di Gao (1991).

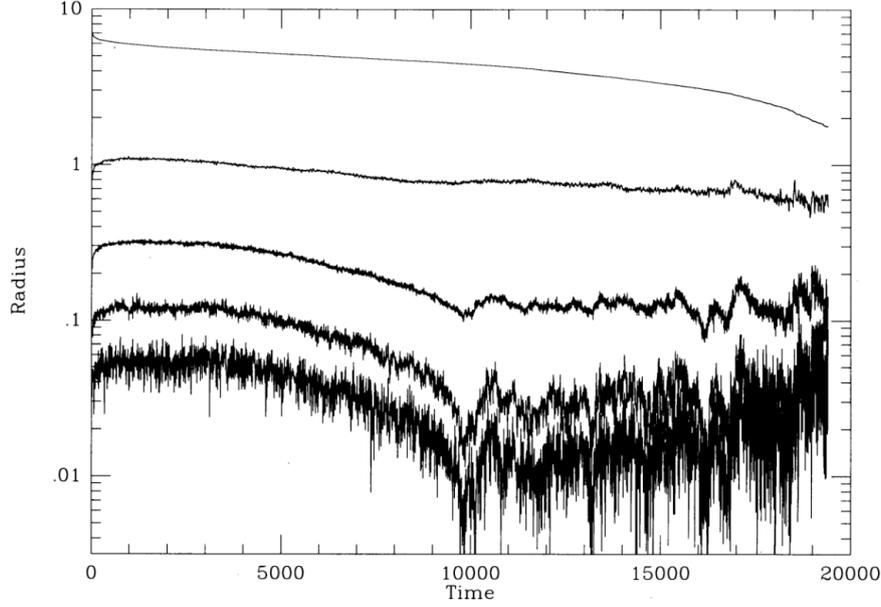


Figura 4.2: **Oscillazioni gravotermiche:** Nell'asse delle ordinate si possono identificare due raggi in particolare. Il *raggio metà-massa* rimane costante per tutta la durata della simulazione, mentre il raggio interno (del core) presenta una prima decrescita identificabile con il core collapse, poi varie fasi di oscillazioni. Nell'asse x si trova il tempo in Myr. (Meylan & Hoggie, 1996, A&A Review, 9.1).[6]

La profondità del core collapse e la frequenza delle sue oscillazioni dipende da vari fattori, ad esempio la percentuale di binarie primordiali.

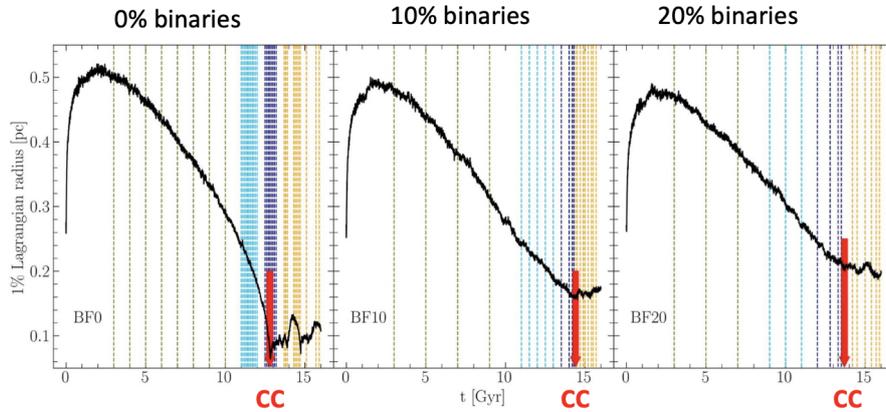


Figura 4.3: **Variazione del core collapse con diversa concentrazione di binarie primordiali:** Per alte percentuali di binarie (destra) si osserva una notevole diminuzione della profondità del core collapse e delle oscillazioni conseguenti. (Lanzoni B., Resolved Stellar Population, 2025). [5]

4.2 Stima della massa di un ammasso di galassie

Fritz Zwicky, studiando l'ammasso della Coma, osservò per la prima volta un'anomalia negli effetti gravitazionali di ammassi di galassie. Misurando l'effetto Doppler delle galassie, ottenne le loro velocità e utilizzò il teorema del viriale (in modo analogo alle stelle in una galassia eq. (3.2.2), eq. (3.2.3)) e fu in grado di ottenere una stima della massa totale del sistema.

Le misurazioni delle rotazioni all'interno del cluster forniscono valori minimi della massa

delle galassie componenti. Assumendo che le galassie si muovano con velocità inferiori di quella di fuga, si ha che

$$v_{\text{esc}} \geq v_{\text{max}} \geq r_0 \omega_0 \quad \Rightarrow \quad M > M_0 \geq \frac{r_0^3 \omega_0^2}{2G} \quad (4.2.1)$$

dove r_0 , ω_0 e M_0 sono rispettivamente il raggio, la velocità angolare e la massa del core. Approssimando inizialmente il sistema a regime stazionario, è possibile applicare il teorema del viriale per stimare la massa totale in termini delle velocità (delle galassie) misurate per effetto Doppler: moltiplicando scalarmente per la distanza di una componente dal centro di massa

$$M_g \frac{d^2 \mathbf{r}_g}{dt^2} = \mathbf{F}_g \quad \Rightarrow \quad M_g \left(\mathbf{r}_g \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}_g}{dt^2} = \mathbf{F}_g \right) = \mathbf{r}_g \cdot \mathbf{F}_g \quad (4.2.2)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (M_g r_g^2) = W + M_g \left(\frac{d\mathbf{r}_g}{dt} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = W + 2T \quad (4.2.3)$$

In regime stazionario, il LHS si annulla ed essendo un sistema autogravitante $W = U$. Inoltre, se si approssima la distribuzione delle galassie come uniforme in una sfera di raggio R

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} \quad \text{da cui} \quad U = -\frac{3GM^2}{5R} \quad \text{e} \quad K = \frac{3}{2} M \overline{v^2}$$

Tuttavia è immediato notare che la distribuzione reale *non* è uniforme, dunque il valore di U è un limite superiore. In aggiunta, le osservazioni permettono di misurare la velocità radiale. Assumendo la simmetria sferica, si può affermare che $\overline{v^2} = 3\overline{v_s^2}$. Svolgendo i calcoli, si ottiene il valore limite della massa totale

$$M > \frac{R \overline{v^2}}{5G} = \frac{3R \overline{v_s^2}}{5G} \quad (4.2.4)$$

I dati dell'epoca ([7]) assumevano la massa totale barionica contenuta nel cluster¹³ pari a

$$M_{\text{obs}} \approx 4.5 \cdot 10^{10} M_{\odot} \approx 9 \cdot 10^{43} g$$

Sostituendo i valori osservati nella eq. (4.2.4), si ottiene un limite di massa *superiore* alla massa stimata precedentemente:

$$M > 9 \cdot 10^{46} g$$

Nonostante disponesse di dati non precisi e avesse utilizzato un valore della costante di Hubble non adeguata per stimare la distribuzione di luminosità [7], le conclusioni di Zwicky si rivelarono all'avanguardia e gettarono le basi del concetto moderno di materia oscura, anticipando sviluppi scientifici che sarebbero emersi solo decenni più tardi. [7]

¹³Attualmente la massa totale ammonta a $\approx 10^{14} g$, tuttavia si ha lo stesso un deficit di massa.



Figura 4.4: **Ammasso della Coma**: immagine di HST (NASA, ESA, and the Hubble Heritage Team (STScI/AURA))

4.3 Sistemi multicomponenti

Una trattazione completa di come si ottengono le relazioni utilizzate in seguito è presentata in App. 1, in quanto i calcoli risultano marginali al fine delle conclusioni della sezione. In particolare, nel caso seguente verrà trattato un sistema che considera sia densità ρ che genera il potenziale ϕ , sia una densità esterna ρ_{ext} con il suo potenziale ϕ_{ext} : i sistemi dove vengono considerate le densità con tutti i corrispettivi potenziali generati possono essere chiamati 'sistemi multicomponenti' (da *Multicomponent Systems*¹⁴).

Alone di materia oscura in una galassia

Una galassia con il suo alone di materia oscura è un ottimo esempio di sistema a più componenti: in tal caso, si deve considerare la densità delle stelle ρ_* e il potenziale da essa generato ϕ_* insieme alla densità di materia oscura ρ_{DM} con potenziale ϕ_{DM} . Da eq. (1.0.16) il sistema al viriale si riscrive

$$\begin{cases} 2K_* = -U_{**} - W_{*DM} \\ 2K_{\text{DM}} = -U_{\text{DMDM}} - W_{\text{DM}*} \end{cases} \quad (4.3.1)$$

L'errore da evitare sarebbe quello di scrivere W_{*DM} e $W_{\text{DM}*}$ sviluppando separatamente i termini di interazione e ottenendo il seguente risultato (analogo anche nel caso di $W_{\text{DM}*}$):

$$W_{*DM} = U_{*DM} = \frac{1}{2} \int \rho_* \phi_{\text{DM}} + \rho_{\text{DM}} \phi_* d^3\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int 2 \rho_* \phi_{\text{DM}} d^3\mathbf{x} = \int \rho_* \phi_{\text{DM}} d^3\mathbf{x}$$

In questo modo, il sistema complessivo avrà valore **doppio** del termine di interazione, che ovviamente non corrisponde al valore reale. Infatti si ottiene

$$\begin{aligned} 2(K_* + K_{\text{DM}}) &= -\frac{1}{2} \int \rho_* \phi_* d^3\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int \rho_{\text{DM}} \phi_{\text{DM}} d^3\mathbf{x} - 2 \int \rho_* \phi_{\text{DM}} d^3\mathbf{x} \\ &= -U_{**} - U_{\text{DMDM}} - 2 \int \rho_* \phi_{\text{DM}} d^3\mathbf{x} \end{aligned}$$

Il procedimento corretto prevede, partendo dalla eq. (1.0.17), si sostituiscono rispettivamente $\rho_1 = \rho_*$, $\rho_2 = \rho_{\text{DM}}$, $\phi_1 = \phi_*$ e $\phi_2 = \phi_{\text{DM}}$, da cui il termine corretto di interazione tra le due componenti del sistema:

$$\begin{aligned} 2(K_* + K_{\text{DM}}) &= -U_{**} - U_{\text{DMDM}} - \frac{1}{2} \int \rho_* \phi_{\text{DM}} d^3\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int \rho_{\text{DM}} \phi_* d^3\mathbf{x} \\ &= -U_{**} - U_{\text{DMDM}} - \int \rho_* \phi_{\text{DM}} d^3\mathbf{x} \end{aligned}$$

In questo contesto, il teorema del viriale generalizzato assume un ruolo cruciale nel quantificare le condizioni di equilibrio, includendo non solo i termini di auto-interazione (U_{**} e U_{DMDM}), ma anche i termini di interazione incrociata (W_{*DM} e $W_{\text{DM}*}$), che rappresentano l'energia potenziale generata da ciascuna componente sull'altra. Estendendo formalmente il teorema del viriale a sistemi sferici a due componenti, viene dimostrato che un'errata contabilizzazione del termine di interazione produce una stima non corretta del bilancio energetico globale. È possibile costruire modelli analitici che permettono di esplorare

¹⁴cfr. par. 10.5.1, L. Ciotti, *Introduction to Stellar Dynamics* (2021)

come diverse combinazioni di massa, concentrazione e profili di densità per le due componenti conducano a diverse configurazioni di equilibrio. L'interazione gravitazionale tra le componenti, rappresentata matematicamente dai termini $\int \rho_* \phi_{DM} d^3x$ e $\int \rho_{DM} \phi_* d^3x$, non è un mero dettaglio, ma uno dei principali determinanti della struttura finale del sistema. I risultati mostrano che anche piccole variazioni nei rapporti di massa o nelle scale radiali possono alterare in modo significativo le condizioni di virializzazione e la stabilità complessiva, aprendo la strada a spiegazioni teoriche per osservabili galattici quali la dispersione di velocità, le curve di rotazione e le relazioni fondamentali (es. il piano fondamentale). [4]

5 Conclusioni

Lo studio del Teorema del Viriale non solo ha permesso di esplorare un risultato teorico, bensì anche il modo in cui tali relazioni matematiche possono descrivere modelli e sistemi nelle loro dinamiche estremamente complicate. Dai processi di rilassamento, al collasso dei core degli ammassi globulari, fino all'intuizione di una componente di materia sconosciuta, il concetto di viriale si è rivelato uno strumento fondamentale per interpretare i comportamenti di vari sistemi, illustrati anche in modo intuitivo attraverso l'uso del piano viriale. L'analisi in questione ha dimostrato che, mediante l'utilizzo di strumenti seppur all'apparenza semplici, è possibile avvicinarsi all'interpretazione della dinamica dei sistemi astrofisici.

Appendice A

1 Introduzione ai sistemi multicomponenti

Come già discusso nella section 3, il teorema del viriale con potenziale $\phi \propto \frac{1}{r}$ è nella forma

$$2K = -W \quad (1.0.1)$$

con W traccia del tensore delle interazioni $W_{i,j}$ scritto come segue:

$$W_{i,j} = - \int \rho x_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x} \quad (1.0.2)$$

$$W = \text{Tr}(W_{i,j}) = \int \rho (\mathbf{x} \cdot \nabla \phi) d^3 \mathbf{x} \quad (1.0.3)$$

Non c'è nessuna richiesta ulteriore sul potenziale: può essere autogravitante, non autogravitante o una combinazione lineare dei due.

Nel caso di un sistema **autogravitante**, è possibile scrivere W come segue

$$W = -G \int \rho(\mathbf{x}) \left(\mathbf{x} \cdot \int \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \rho(\mathbf{y}) d^3 \mathbf{y} \right) d^3 \mathbf{x} \quad (1.0.4)$$

Siccome i termini al di fuori dell'integrale in $d^3 \mathbf{y}$ sono indipendenti da \mathbf{y} , posso unire i due integrali:

$$W = -G \iint \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{y}) \left(\mathbf{x} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \right) d^3 \mathbf{y} d^3 \mathbf{x} \quad (1.0.5)$$

Si osserva che la traccia del tensore, come il tensore stesso, nel caso di un sistema autogravitante presenta una simmetria rispetto al cambio di coordinate $x = y$. Infatti, si ottiene la stessa forma effettuando lo scambio:

$$W = -G \iint \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{y}) \left(\mathbf{y} \cdot \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \right) d^3 \mathbf{y} d^3 \mathbf{x} \quad (1.0.6)$$

Ora, sommando eq. (1.0.5) e eq. (1.0.6) ottengo una curiosa equazione:

$$2W = -G \iint \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{y}) \left(\mathbf{x} - \mathbf{y} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \right) d^3 \mathbf{y} d^3 \mathbf{x} = -G \iint \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3 \mathbf{y} d^3 \mathbf{x} \quad (1.0.7)$$

Con le dovute semplificazioni e sostituzioni, si ottiene una relazione tra (traccia del) tensore di interazione e potenziale autogravitante

$$2W = \int \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \quad (1.0.8)$$

con il potenziale

$$\phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3\mathbf{y} \quad (1.0.9)$$

da cui si ottiene immediatamente

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = U \quad (1.0.10)$$

dove U è l'energia potenziale gravitazionale del sistema autogravitante. Sostituendo il risultato appena ricavato si ottiene l'espressione del teorema del Viriale più nota:

$$2K = -U \quad (1.0.11)$$

Caso a più componenti

Nel caso composto, dove il potenziale è somma di più potenziali, vale sempre la condizione eq. (1.0.2)

$$W_{i,j} = - \int \rho x_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d^3\mathbf{x} \quad (1.0.12)$$

dove in questo caso il potenziale totale ϕ_T è somma del potenziale dato dalla componente ρ e quello della componente esterna ρ_{ext}

$$\phi_T = \phi + \phi_{ext} \quad (1.0.13)$$

Sviluppando eq. (1.0.12) si ottiene un integrale separabile in due termini, uno autogravitante (trattato sopra) e uno esterno

$$\begin{aligned} W_T &= - \int \rho(\mathbf{x}) [\mathbf{x} \cdot (\nabla \phi + \nabla \phi_{ext})] d^3\mathbf{x} = \\ &= - \int \rho(\mathbf{x}) [\mathbf{x} \cdot \nabla \phi] d^3\mathbf{x} - \int \rho(\mathbf{x}) [\mathbf{x} \cdot \nabla \phi_{ext}] d^3\mathbf{x} = W + W_{ext} = U + W_{ext} \end{aligned} \quad (1.0.14)$$

Quindi l'espressione del teorema del viriale per un sistema con potenziale composto è della forma

$$2K = -U - W_{ext} \quad (1.0.15)$$

È importante tenere presente che in quest'ultimo caso specifico, vengono considerati i potenziali ϕ e ϕ_{ext} , ma l'unica densità che interagisce è ρ , **non** ρ_{ext} .

In un sistema multicomponente si considerano entrambe le densità generatrici dei potenziali ϕ e ϕ_{ext} .

Il sistema

$$\begin{cases} 2K_1 = -U_{11} - W_{12} \\ 2K_2 = -U_{22} - W_{21} \end{cases} \quad (1.0.16)$$

è complessivamente autogravitante. U_{11} indica l'energia potenziale gravitazionale generata dalla densità ρ_1 che interagisce con il suo stesso potenziale ϕ_1 (e analogamente U_{22}), mentre W_{12} e W_{21} sono i tensori di interazione rispettivamente di ρ_1 con ϕ_2 e di ρ_2 con ϕ_1 .

Dunque sommando le equazioni membro a membro si ottiene l'espressione

$$2(K_1 + K_2) = -(U_{11} + U_{22}) - (W_{12} + W_{21}) \quad (1.0.17)$$

$$= -\frac{1}{2} \int (\rho_1 + \rho_2) (\phi_1 + \phi_2) d^3 \mathbf{x}$$

che posso sviluppare in tre addendi

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \int \rho_1 \phi_1 d^3 \mathbf{x} - \frac{1}{2} \int \rho_2 \phi_2 d^3 \mathbf{x} - \frac{1}{2} \int (\rho_2 \phi_1 + \rho_1 \phi_2) d^3 \mathbf{x} \\ &= -U_{11} - U_{22} - \int \rho_1 \phi_2 d^3 \mathbf{x} \end{aligned}$$

L'ultimo termine $-\int \rho_1 \phi_2 d^3 \mathbf{x}$ è uguale a $-\int \rho_2 \phi_1 d^3 \mathbf{x}$: si dimostra brevemente scrivendo per esteso il potenziale con eq. (1.0.9) ed effettuando un cambio di coordinate.

$$\begin{aligned} \int \rho_1 \phi_2 d^3 \mathbf{x} &= -G \int \rho_1(\mathbf{x}) \int \frac{\rho_2(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3 \mathbf{y} d^3 \mathbf{x} \\ &= -G \int \rho_2(\mathbf{y}) \int \frac{\rho_1(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{y} = \int \rho_2 \phi_1 d^3 \mathbf{y} \end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] Binney J., Tremaine S., *Galactic Dynamics*, II edizione, Princeton Series in Astrophysics, 2008.
- [2] Ciotti L., 'Alcune questioni matematiche riguardanti la dinamica stellare' in *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 5-A—La Matematica nella Società e nella Cultura*, n.1, p. 97–141, Unione Matematica Italiana, 2002.
- [3] Ciotti L., *Introduction to Stellar Dynamics*, Cambridge University Press, 2021.
- [4] Dantas C.C., Ribeiro A.L.B., Capelato H.V., De Carvalho R.R., 'The two-component virial theorem and the physical properties of stellar systems' in *The Astrophysical Journal*, The American Astronomical Society, 528:L5–L8, 2000 Jan 1
- [5] Lanzoni B., *Lecture notes of Resolved Stellar Population*, 2025.
- [6] Meylan G. e Heggie D.C., 'Internal dynamics of globular clusters' (1996) in *The Astronomy and Astrophysics Review*, Springer-Verlag, 1997.
- [7] Zwicky F., 'On the masses of nebulae and of clusters of nebulae' in *The Astrophysical Journal*, The American Astronomical Society, 86-3, Oct 1937