Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Matematica

Teoria della Misura

di Lebesgue-Stieltjes

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Bonfiglioli

Presentata da:
Giuseppe Pulcini

Anno Accademico 2024/2025

A mamma e papà, per l'amore, la pazienza e il sostegno che non mi avete mai fatto mancare. Questo traguardo è nostro.

Introduzione

> *"Nessuna scoperta è stata fatta in matematica, e non solo in matematica, attraverso uno sforzo di logica deduttiva. Ogni scoperta è sempre il risultato di un travaglio creativo dell'immaginazione che costruisce ciò che ad essa sembra dover essere la verità, guidata spesso da analogie, talvolta da un ideale estetico, ma mai ricorrendo a basi logiche. Fatta la scoperta, la logica interviene dopo, per controllo, ed è essa che in ultima sintesi decide se si trattava di una vera scoperta o non piuttosto di una scoperta illusoria."*
>
> Henri Lebesgue

L'origine della teoria della misura di Lebesgue-Stieltjes va ricercata all'interno della storia dello sviluppo della teoria dell'integrazione. Quest'ultima ha inizio nella seconda metà del XIX secolo con il matematico e fisico tedesco Bernhard Riemann, il quale formalizzò l'integrale che oggi porta il suo nome. Tuttavia, l'integrale di Riemann presenta limiti piuttosto significativi: non è ben definito per funzioni molto irregolari e non riesce a gestire bene i limiti di successioni di funzioni.

Prima di giungere a una teoria dell'integrazione più generale e flessibile, furono necessari alcuni passaggi fondamentali. Il primo contributo significativo in questo senso fu quello di Georg Cantor, che sviluppò la teoria degli insiemi. Il suo lavoro pose le basi per una visione più astratta del concetto di "misura": non è affatto banale, infatti, stabilire cosa significhi che un insieme sia "grande" o "piccolo" quando si ha a che fare con insiemi particolarmente complessi. La teoria di Cantor sollevò nuove questioni su come definire l'estensione di un insieme in modo coerente e rigoroso.

Una vera e propria rivoluzione si ebbe con il lavoro del matematico francese Henri Lebesgue, che nel 1902 pubblicò la sua tesi di dottorato "Intégrale, longueur, aire", in cui definì l'integrale che porta il suo nome. A differenza dell'integrale di Riemann, che si basa sulla suddivisione del dominio della funzione e sulla somma delle aree dei rettangoli costruiti usando i valori di estremo superiore e inferiore nei sottointervalli, Lebesgue propone un cambio di prospettiva radicale: suddivide il codominio, ovvero l'insieme dei valori assunti dalla funzione, e per ciascun intervallo considera l'estensione (cioè la misura) dell'insieme delle preimmagini. A ciascuno di questi "livelli" viene associato un contributo dato dal valore della funzione moltiplicato per la misura dell'insieme corrispondente. La somma di questi contributi costituisce una approssimazione del valore dell'integrale.

La Teoria della Misura nasce dunque come strumento fondamentale per questa nuova modalità di integrazione. È chiaro che l'integrale di Lebesgue è molto più potente di quello di Riemann, in quanto amplia notevolmente la classe delle funzioni integrabili e consente di trattare con efficacia i limiti di successioni di funzioni.

Un altro limite dell'approccio di Riemann è la sua incapacità di attribuire pesi diversi a parti differenti del dominio: l'integrazione riemanniana è sempre uniforme, cioè considera ogni sottointervallo con la stessa "densità". A tale scopo, il matematico olandese Thomas Jan Stieltjes introdusse, nel 1894, una variante dell'integrale di Riemann, nota come integrale di Riemann-Stieltjes. In questa formulazione, si integra una funzione rispetto a una funzione crescente, che può non essere derivabile. Tale funzione crescente funge da "misura" non uniforme, consentendo di dare pesi diversi a zone diverse del dominio.

È in questo contesto storico e matematico che nasce effettivamente la misura di Lebesgue-Stieltjes. L'obiettivo è quello di unificare i due approcci: da un lato, utilizzare l'impianto concettuale della teoria della misura e dell'integrazione di Lebesgue, in grado di gestire funzioni irregolari e limiti di successioni; dall'altro, costruire una misura a partire da una funzione crescente, come avviene nell'integrale di Stieltjes. Si giunge così alla definizione dell'integrale di Lebesgue-Stieltjes, che costituisce il naturale punto d'approdo di questo sviluppo teorico.

A partire da questi risultati, tra il 1901 e il 1930, si sviluppa compiutamente la Teoria astratta della Misura e dell'integrazione grazie ai contributi di matematici come Maurice Fréchet, Johann Radon, Percy Daniell e Constantin Carathéodory, ciascuno dei quali contribuirà ad affinare e formalizzare il quadro teorico in cui oggi si colloca la misura di Lebesgue-Stieltjes.

In questo quadro si inserisce la presente tesi, che ha come filo conduttore il legame profondo tra le funzioni reali e le misure di Lebesgue-Stieltjes ad esse associate. L'obiettivo di questo lavoro si articola lungo due direzioni, complementari e speculari. Da un lato, si intende analizzare la misura di Lebesgue-Stieltjes in quanto oggetto matematico autonomo, studiandone la struttura, le proprietà e i meccanismi di costruzione. In particolare, si cercherà di comprendere in che modo le caratteristiche della funzione monotona di partenza si riflettono direttamente nella natura della misura costruita. Dall'altro lato, si affronta il percorso inverso: partire da una misura per risalire alla funzione che l'ha generata. Questo è reso possibile da un risultato fondamentale, secondo cui ogni misura di Radon positiva su $\mathbb{R}$ può essere espressa come misura di Lebesgue-Stieltjes associata a una funzione monotona crescente. Tale corrispondenza permette di ribaltare il punto di vista e studiare le funzioni reali a partire dalle proprietà della misura: in particolare, l'analisi si concentra sulle classi di funzioni crescenti, funzioni a variazione limitata e funzioni assolutamente continue.

La tesi si sviluppa seguendo questo doppio approccio, dalla funzione alla misura, e dalla misura alla funzione, costruendo un quadro teorico in cui i due oggetti si illuminano reciprocamente. Da un lato, la Teoria della Misura fornisce strumenti potenti per analizzare e decomporre le funzioni; dall'altro, la conoscenza della struttura delle funzioni reali consente di interpretare le misure associate. L'intreccio tra questi due punti di vista non solo permette uno studio più completo delle funzioni e delle misure, ma rivela una profonda simmetria teorica.

Nel primo capitolo vengono presentati alcuni risultati preliminari sulle funzioni monotone, fondamentali poiché la misura di Lebesgue-Stieltjes si costruisce a partire da una funzione di questo tipo. Si analizzano inizialmente le proprietà di continuità, la classificazione e la cardinalità dei punti di discontinuità. Si passa poi a un risultato particolarmente significativo: il Teorema di Lebesgue, secondo cui ogni funzione monotona è differenziabile quasi ovunque rispetto alla misura di Lebesgue. Il capitolo si conclude con un teorema che mostra come la derivata di una funzione crescente sia sommabile.

Nel secondo capitolo si procede alla costruzione formale della misura di Lebesgue-Stieltjes attraverso il metodo di Carathéodory. Dopo averne stabilito le proprietà fondamentali, si dimostra che ogni misura di Radon positiva su $\mathbb{R}$ può essere rappresentata come misura di Lebesgue-Stieltjes associata a una funzione monotona crescente. Il capitolo si chiude con un risultato che rafforza questo legame: imponendo ulteriori condizioni, ossia la continuità da sinistra e l'annullarsi della funzione nell'origine, si ottiene una corrispondenza biunivoca tra tali funzioni e le misure di Radon positive.

Il terzo capitolo è dedicato allo studio delle funzioni a variazione limitata e alle loro proprietà. Grazie al Teorema di Jordan, si dimostra che ogni funzione a variazione limitata può essere scritta come differenza di due funzioni crescenti. Ciò consente di associare in modo naturale una misura di Lebesgue-Stieltjes anche a questa più ampia classe di funzioni. Sempre grazie al Teorema di Jordan si mostra anche come diversi risultati sulle funzioni monotone sono validi anche per le funzioni a variazione limitata.

Nel quarto capitolo si analizzano inizialmente le funzioni assolutamente continue, approfondendone le proprietà fondamentali. Si mostra che ogni funzione assolutamente continua è anche a variazione limitata, e dunque le può essere associata una misura di

Lebesgue-Stieltjes. Successivamente si tratta la decomposizione delle funzioni crescenti in tre componenti: una parte assolutamente continua, una parte singolare crescente e una parte discreta a salti.

Il quinto capitolo, infine, approfondisce la decomposizione delle misure. Dopo alcuni richiami generali, si studia la decomposizione di una misura di Lebesgue-Stieltjes nelle sue tre componenti, assolutamente continua, singolare e discreta, in parallelo con la scomposizione della funzione originaria. Utilizzando questa decomposizione si mostra che la derivata della funzione crescente originaria è la derivata di Radon-Nikodym della misura ad essa associata. Il capitolo si chiude presentando un approccio funzionale alternativo, in cui la misura di Lebesgue-Stieltjes viene interpretata come derivata debole della funzione crescente da cui ha origine. Si mostra che questa formulazione costituisce a tutti gli effetti una caratterizzazione della misura di Lebesgue-Stieltjes. Sfruttando tale risultato, è possibile definire un metodo alternativo per associare una misura a una funzione monotona e verificare che questo approccio conduce, in maniera del tutto coerente, alla stessa misura di Lebesgue-Stieltjes ottenuta tramite costruzione diretta. Ciò conferma la solidità e l'equivalenza teorica tra le due prospettive.

Il percorso tracciato in questa tesi mostra come le nozioni di misura e funzione confluiscano in una struttura teorica condivisa e sorprendentemente armoniosa. Al di là degli aspetti tecnici, emerge la possibilità di interpretare fenomeni analitici complessi attraverso due prospettive che, pur sembrando inizialmente distanti, si rivelano profondamente connesse. In questo senso, la misura di Lebesgue-Stieltjes non rappresenta soltanto una costruzione matematica, ma un esempio emblematico di come l'Analisi moderna riesca a dar forma unitaria a oggetti e problemi eterogenei.

Indice

Introduzione **i**

1 Proprietà delle Funzioni Monotone **1**

1.1 Risultati preliminari sulle funzioni monotone 1

1.2 Il Teorema di Lebesgue 3

1.3 Sommabilità della derivata di una funzione monotona 7

2 Misura di Lebesgue-Stieltjes **11**

2.1 Costruzione della misura di Lebesgue-Stieltjes 11

2.2 Teorema di Rappresentazione di Lebesgue 17

2.3 Caratterizzazione delle misure di Radon positive 18

3 Funzioni a Variazione Limitata **21**

3.1 Proprietà delle funzioni a variazione limitata 21

3.2 Teorema di Jordan 22

4 Funzioni Assolutamente Continue **27**

4.1 Proprietà delle funzioni assolutamente continue 27

4.2 Decomposizione di funzioni crescenti 30

5 Decomposizione delle Misure e Risultati di Rappresentazione **35**

5.1 Decomposizione di misure 35

5.2 Rappresentazioni delle misure 42

Bibliografia **45**

Capitolo 1

Proprietà delle Funzioni Monotone

In questa primo capitolo ci soffermeremo sulle proprietà fondamentali delle funzioni monotone definite su intervalli reali: analizzeremo infatti la loro continuità e differenziabilità. Queste proprietà sono importanti innanzitutto per darci una visione più chiara delle funzioni con le quali stiamo lavorando; inoltre saranno fondamentali nel capitolo successivo per associare ad una funzione crescente una corrispondente misura di Lebesgue-Stieltjes.

1.1 Risultati preliminari sulle funzioni monotone

Definizione 1.1 (Funzione monotona). *Sia I un intervallo contenuto in $\mathbb{R}$; allora la funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice monotona se è crescente o decrescente; più precisamente*

f si dice crescente se

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

f si dice decrescente se

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

La monotonia impone vincoli forti sull'ordinamento dei valori di una funzione, suggerendo un legame naturale con la continuità. I risultati seguenti mostrano che le discontinuità di una funzione monotona sono al più numerabili e solo di prima specie.

Proposizione 1.2. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora f ammette il limite destro e sinistro in ogni punto di $[a, b]$ e inoltre tali limiti sono finiti.*

Dimostrazione. Analizziamo il caso in cui f è crescente; il caso in cui f è decrescente si affronta in maniera analoga.

Prendiamo un punto x_0 in $[a, b[$ e mostriamo che esiste $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$. Dal momento che f è una funzione crescente,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x \in]x_0, b]} f(x),$$

e quindi il limite esiste. Inoltre, dal momento che l'estremo inferiore è definito sull'insieme $]x_0, b]$, avremo che $f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \leq f(b)$. Da questo segue che il limite destro di f in x_0 è finito.

Si dimostra sempre in maniera analoga che, se $x_0 \in]a, b]$, esiste ed è finito $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, da cui segue definitivamente la tesi. $\square$

Proposizione 1.3. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona e $x_0 \in [a, b]$ un punto di discontinuità di f. Allora f ha una discontinuità di prima specie in x_0.*

Dimostrazione. Dalla Proposizione 1.2 sappiamo che il limite destro e sinistro in x_0 esistono e sono finiti. Se questi due limiti coincidessero la funzione sarebbe necessariamente continua poiché $f(x_0)$ sarebbe vincolato per monotonia ad avere lo stesso valore dei due limiti. Ma abbiamo ipotizzato che x_0 è un punto di discontinuità di f, quindi questo è un assurdo. Dunque i limiti destro e sinistro esistono finiti e sono diversi, che è esattamente la definizione di discontinuità di prima specie. $\square$

Il prossimo risultato ci permette di completare il ragionamento iniziato nella Proposizione 1.3. Mostreremo che l'insieme dei punti di discontinuità è numerabile e che quindi, sostanzialmente, una funzione monotona può essere pensata come una funzione continua a meno di una famiglia al più numerabile di salti.

Proposizione 1.4. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora l'insieme dei punti di discontinuità di f in $[a, b]$ è al più numerabile.*

Dimostrazione. Possiamo ignorare il comportamento in a e b, a meno di aggiungere due punti all'insieme delle discontinuità. Poniamo

$$A_n = \left\{ x_0 \in]a, b[: \left| \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x) \right| > \frac{f(b) - f(a)}{n} \right\}.$$

Esso è l'insieme dei punti di discontinuità di f il cui salto è maggiore di $\frac{f(b)-f(a)}{n}$. In questo modo $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ è l'insieme di tutti i punti di discontinuità di f, perché, considerando tutti gli $n \in \mathbb{N}$, copriamo tutti i possibili valori che può avere un salto in un punto di discontinuità. Consideriamo ora un $n \in \mathbb{N}$ e il corrispondente A_n. Prendiamo $x_1, ..., x_m \in A_n$; per tali punti varrà la seguente disequazione:

$$\left| \lim_{x \to x_i^+} f(x) - \lim_{x \to x_i^-} f(x) \right| > \frac{f(b) - f(a)}{n} \quad \forall i \in \{1, ..., m\}.$$

A questo punto sommando membro a membro otteniamo:

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\lim_{x\to x_i^+} f(x) - \lim_{x\to x_i^-} f(x)\right| > \frac{m}{n}(f(b)-f(a)).$$

Tuttavia per la monotonia la somma dei salti non può superare $f(b) - f(a)$ e quindi $m < n$. Abbiamo mostrato che ogni A_n ha una cardinalità finita da cui segue che la cardinalità di A è al più numerabile, in quanto unione numerabile di insiemi finiti. □

Osservazione 1.5. Consideriamo le ipotesi della Proposizione 1.4. Dal momento che l'insieme dei punti di discontinuità di f è al più numerabile, allora ha misura di Lebesgue nulla. Questo implica che una funzione monotona è continua $\mathcal{L}^1$-q.o. e quindi che, dal punto di vista dell'integrazione, i punti di discontinuità di f non hanno influenza sul valore dell'integrale della funzione. Quindi sostanzialmente la monotonia garantisce che una funzione sia integrabile rispetto alla misura di Lebesgue.

1.2 Il Teorema di Lebesgue

Il prossimo teorema è fondamentale nello studio delle funzioni reali. Esso mostra che una funzione monotona è differenziabile quasi ovunque rispetto alla misura di Lebesgue. Questo è il maggior risultato che in generale possiamo raggiungere a livello di regolarità a partire esclusivamente dalla condizione di monotonia.

Teorema 1.6 (**Teorema di Lebesgue**). *Siano I un intervallo contenuto in $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora f è differenziabile $\mathcal{L}^1 -$ q.o. in I.*

Non abbiamo ancora tutti gli strumenti per poter procedere con la dimostrazione del Teorema 1.6. Prima di proseguire dobbiamo enunciare un teorema di ricoprimento di Vitali, un risultato importante che sarà essenziale proprio per mostrare che l'insieme dei punti in cui f non è differenziabile ha misura nulla secondo Lebesgue. Enunceremo prima la versione generale in $\mathbb{R}^d$ e poi una versione adattata al caso reale in cui stiamo lavorando, anche per poter meglio comprendere, intuitivamente, il ruolo che questo risultato ha nella dimostrazione del Teorema 1.6.

Teorema 1.7 (**Teorema di Ricoprimento di Vitali**). *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^d$ e $\mathcal{F}$ un ricoprimento di A costituito da palle chiuse non degeneri di $\mathbb{R}^d$,*

$$\mathcal{F} = \{\overline{B(x_\alpha, r_\alpha)} : \alpha \in \mathcal{A}, x_\alpha \in \mathbb{R}^d, r_\alpha > 0\}.$$

Inoltre assumiamo che per ogni $x \in A$

$$\inf\{r_\alpha : x \in \overline{B(x_\alpha, r_\alpha)}\} = 0. \tag{1.1}$$

Allora esiste una famiglia numerabile $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ di palle disgiunte, corrispondenti ad un sottoinsieme numerabile di indici $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, tali che

$$\mathcal{L}^1\left(A \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}'} \overline{B(x_\alpha, r_\alpha)}\right) = 0.$$

Definizione 1.8 (Ricoprimento di Vitali). *Siano $\mathcal{F}$ una famiglia di intervalli chiusi contenuti in $\mathbb{R}$ ed E un insieme contenuto in $\mathbb{R}$. Diremo che $\mathcal{F}$ è un ricoprimento di Vitali di E se per ogni $x \in E$ e per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intervallo $I \in \mathcal{F}$ tale che $x \in I$ e $\mathcal{L}^1(I) < \epsilon$. Inoltre $\mathcal{L}^1(I) > 0$ per ogni $I \in \mathcal{F}$.*

Teorema 1.9 (Teorema di Ricoprimento di Vitali, versione in $\mathbb{R}$). *Siano E un insieme di misura finita contenuto in $\mathbb{R}$ e $\mathcal{F}$ un ricoprimento di Vitali di E. Esiste una successione di intervalli chiusi $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ a due a due disgiunti e tali che*

$$\mathcal{L}^1\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n\right) = 0.$$

Osservazione 1.10. Notiamo come la prima e la seconda versione del teorema cercano di fare sostanzialmente la stessa cosa, ovvero ricoprire un insieme, a meno di un altro insieme di misura nulla, con una quantità numerabile di palle chiuse.

L'ultimo passo prima di procedere alla dimostrazione del Teorema 1.6 è introdurre una notazione comoda per la derivata inferiore e superiore, dal momento che verranno ampiamente utilizzate nella dimostrazione.

Definizione 1.11. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $x \in]a, b[$. Definiamo la derivata superiore e la derivata inferiore di f in x rispettivamente come:*

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} := \inf_{\delta>0}\left(\sup_{y\in]a,b[,\ 0<|y-x|<\delta} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right),$$

$$\underline{D}f(x) = \liminf_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} := \sup_{\delta>0}\left(\inf_{y\in]a,b[,\ 0<|y-x|<\delta} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right).$$

Dimostrazione (Teorema 1.6). Mostriamo l'enunciato nel caso in cui f è crescente, I è un aperto limitato e f è limitata su I. Fissato un $x \in I$, f è differenziabile in x se e solo se $\overline{D}f(x) = \underline{D}f(x)$ e tale valore è finito. Dal momento che f è crescente e che il limite superiore è maggiore o uguale del limite inferiore, sappiamo già che $\overline{D}f(x) \geq \underline{D}f(x) \geq 0$. Quindi f è differenziabile in x se e solo se $\overline{D}f(x) \leq \underline{D}f(x)$ e $\overline{D}f(x) < +\infty$. Fino ad ora abbiamo ragionato sulla differenziabilità di f in un punto, ma ricordiamo che il nostro fine è di mostrare che f è differenziabile quasi ovunque rispetto alla misura di Lebesgue. Per farlo dobbiamo dimostrare che i due insiemi

$$E_1 = \{x \in I : \overline{D}f(x) = +\infty\} \qquad E_2 = \{x \in I : \overline{D}f(x) > \underline{D}f(x)\}$$

sono trascurabili, ovvero hanno misura di Lebesgue nulla.

Iniziamo mostrando che $\mathcal{L}^1(E_1) = 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$A_n = \{x \in I : \overline{D}f(x) > n\},$$

da cui si ottiene che

$$E_1 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

In questo modo, se mostriamo che A_n ha misura di Lebesgue nulla, anche E_1 avrà misura nulla. Fissiamo ora un $n \in \mathbb{N}$ e cerchiamo di trovare un ricoprimento di Vitali di A_n per poter applicare il Teorema 1.9. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di intervalli chiusi (non degeneri in un punto) $[a, b]$ contenuti in I tali che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq n,$$

ovvero tali che

$$f(b) - f(a) \geq (b - a)n.$$

Da qui si ottiene che, per ogni $[a, b] \in \mathcal{F}$,

$$\mathcal{L}^1(]f(a), f(b)[) = \mathcal{L}^1([f(a), f(b)]) = f(b) - f(a) \geq (b - a)n = n\mathcal{L}^1([a, b]).$$

Inoltre se consideriamo un $x \in A_n$, sappiamo che $\overline{D}f(x) > n$, ovvero che

$$\inf_{\delta > 0} \left(\sup_{0 < |h| < \delta} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right) > n.$$

Quindi per ogni $\delta > 0$,

$$\sup_{0 < |h| < \delta} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} > n.$$

Risulta quindi che

$$\forall \delta > 0 \quad \exists\, 0 < |h| < \delta : f(x + h) - f(x) > nh.$$

Dal precedente ragionamento si ottiene che

$$x \in [\min\{x, x + h\}, \max\{x, x + h\}] \in \mathcal{F}.$$

Quindi $\mathcal{F}$ è un ricoprimento di Vitali di A_n; infatti ogni elemento di A_n è contenuto in intervalli arbitrariamente piccoli della famiglia $\mathcal{F}$ e gli intervalli non sono degeneri perché $h > 0$. Per il Teorema 1.9 esiste una successione di intervalli chiusi $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}} = \{[a_j, b_j]\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ a due a due disgiunti tali che

$$\mathcal{L}^1\left(A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j\right) = 0.$$

Resta da mostrare che anche $\bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j$ ha misura nulla: in questo modo otteniamo che $\mathcal{L}^1(A_n) = 0$. Dal momento che f è una funzione crescente vale la seguente uguaglianza

$$\text{Int}(f(I_j)) =]f(a_j), f(b_j)[.$$

Inoltre gli elementi di tale famiglia sono intervalli disgiunti tali che

$$\exists M > 0 : \bigcup_{j=1}^{+\infty}]f(a_j), f(b_j)[\subseteq [-M, M].$$

Dalla precedente segue facilmente, per l'additività e la monotonia della misura, che

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mathcal{L}^1(]f(a_j), f(b_j)[) \leq 2M.$$

Per come abbiamo definito $\mathcal{F}$ e dal momento che la successione che abbiamo preso $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ sta in $\mathcal{F}$, allora otteniamo:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mathcal{L}^1([a_j, b_j]) = \sum_{j=1}^{+\infty} (b_j - a_j) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(b_j) - f(a_j)}{n} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\mathcal{L}^1(]f(a_j), f(b_j)[)}{n} \leq \frac{2M}{n}.$$

In conclusione otteniamo dunque che

$$\mathcal{L}^1(E_1) \leq \mathcal{L}^1(A_n) = \mathcal{L}^1\left(A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j\right) + \mathcal{L}^1(\bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j) \leq \frac{2M}{n}.$$

Dall'arbitrarietà di n otteniamo che $\mathcal{L}^1(E_1) = 0$.

Per mostrare che $\mathcal{L}^1(E_2) = 0$ si fa un ragionamento simile al precedente; prima si scrive E_2 come unione di insiemi su cui valgono disuguaglianze specifiche, poi si mostra tramite i ricoprimenti di Vitali e il Teorema 1.9 che tali insiemi hanno misura nulla. A questo punto la dimostrazione nel caso f crescente, I aperto limitato e f limitata su I è conclusa.

Supponiamo ora solamente f crescente e consideriamo l'insieme

$$K = \left\{(q_1, q_2) \in (I \cap \mathbb{Q})^2 : q_1 < q_2\right\}.$$

K è numerabile ed è tale che

$$\bigcup_{(q_1,q_2)\in K}]q_1, q_2[$$

copre tutto I; infatti gli unici punti che possono restare esclusi sono i due estremi di I nel caso in cui sia un intervallo chiuso. Quindi si ottiene che

$$\mathcal{L}^1\left(I \setminus \bigcup_{(q_1,q_2)\in K}]q_1, q_2[\right) = 0.$$

Chiamiamo S l'insieme dei punti in cui f non è differenziabile. A questo punto possiamo applicare, per ogni $(q_1, q_2) \in K$, la prima parte della dimostrazione su $S \cap]q_1, q_2[$ dal momento che è un intervallo aperto e limitato. Possiamo quindi ottenere che $\mathcal{L}^1(S \cap]q_1, q_2[) = 0$. Ma allora, dato che possiamo scrivere S nel seguente modo

$$S = \left(S \cap \bigcup_{(q_1,q_2)\in K}]q_1, q_2[\right) \cup \left(S \setminus \bigcup_{(q_1,q_2)\in K}]q_1, q_2[\right),$$

S risulta essere l'unione di due insiemi trascurabili e quindi anch'esso ha misura di Lebesgue nulla. Questo completa la dimostrazione nel caso in cui f sia crescente.

A questo punto resta solo il caso in cui f è decrescente. Questo si risolve facilmente poichè è sufficiente considerare $-f$, a cui, essendo crescente, possiamo applicare la prima parte della dimostrazione. La tesi segue dal fatto che f e $-f$ sono differenziabili esattamente negli stessi punti. $\square$

1.3 Sommabilità della derivata di una funzione monotona

Prima di enunciare e dimostrare il prossimo risultato, ricordiamo il Lemma di Fatou, nella versione in cui si richiede l'ipotesi di convergenza puntuale quasi ovunque.

Lemma 1.12. *Siano (X, Σ, μ) uno spazio di misura e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili a valori in $[0, +\infty]$. Se la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente ad una funzione f μ-q.o. su X, allora*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Teorema 1.13. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione crescente. Allora $f' \in L^1([a, b])$ e*

$$\int_a^b f' d\mathcal{L}^1 \leq f(b) - f(a).$$

Dimostrazione. Se $a = b$ il risultato è evidente; supponiamo quindi $a < b$. Per il Teorema 1.6, sappiamo che f' esiste $\mathcal{L}^1$-q.o. su $[a, b]$. Fissiamo ora un $n \in \mathbb{N}$ e, per ogni k intero tale che $0 \leq k < 2^n$, poniamo

$$a_{n,k} = a + \frac{k(b-a)}{2^n},$$
$$b_{n,k} = a + \frac{(k+1)(b-a)}{2^n},$$
$$I_{n,k} = [a_{n,k}, b_{n,k}[.$$

Osserviamo che $[a, b[$ si può scrivere come unione disgiunta degli intervalli appena definiti, ovvero

$$[a, b[= \bigcup_{k=0}^{2^n-1} I_{n,k}.$$

A questo punto, per ogni $x \in [a, b[$ esiste un solo $k < 2^n$ tale che $x \in I_{n,k}$. Quindi la seguente definizione è ben posta

$$g_n(x) = \frac{2^n}{b-a} \left(f(b_{n,k}) - f(a_{n,k}) \right).$$

g_n è una funzione semplice, infatti è definita a tratti ed è constante in ogni $I_{n,k}$. Da questo segue

$$\int_a^b g_n d\mathcal{L}^1 = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{b-a}{2^n} g_n(a_{n,k}) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(f(b_{n,k}) - f(a_{n,k}) \right) = f(b) - f(a).$$

Se mostriamo che g_n converge puntualmente a f' $\mathcal{L}^1$-q.o. su $[a, b]$, allora possiamo applicare il Lemma 1.12. In questo modo la dimostrazione è conclusa, infatti otteniamo

$$\int_a^b f' d\mathcal{L}^1 = \int_a^b \liminf_{n\to\infty} g_n d\mathcal{L}^1 \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n d\mathcal{L}^1 = f(b) - f(a).$$

Sia $E \subset [a, b]$ l'insieme su cui f' non è definita; sempre per il Teorema 1.6 sappiamo che $\mathcal{L}^1(E) = 0$. Mostriamo ora che

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f'(x) \quad \forall x \in]a, b[\setminus E.$$

Fissiamo un $x \in]a, b[\setminus E$. Dato che f è differenziabile in x

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \forall\, |h| \leq \delta \quad x + h \in [a, b], \quad |f(x + h) - f(x) - hf'(x)| \leq \epsilon |h|.$$

Prendiamo ora $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$ si ha $2^{-n}(b - a) \leq \delta$. Inoltre fissato $n \geq N$ sia $k < 2^n$ tale che $x \in I_{n,k}$. Allora

$$x - \delta \leq a_{n,k} \leq x < b_{n,k} \leq x + \delta.$$

Osserviamo che per ogni $0 \leq k < 2^n$ vale

$$\frac{2^n}{b-a}(b_{n,k} - a_{n,k}) = 1.$$

A questo punto segue che

$$\begin{aligned}
|g_n(x) - f'(x)| &= \left| \frac{2^n}{b-a}(f(b_{n,k}) - f(a_{n,k}) - (b_{n,k} - a_{n,k})f'(x)) \right| \leq \\
&\leq \frac{2^n}{b-a} |f(b_{n,k}) - f(x) - (b_{n,k} - x)f'(x)| + \\
&+ \frac{2^n}{b-a} |f(x) - f(a_{n,k}) - (x - a_{n,k})f'(x)| \leq \\
&\leq \frac{2^n}{b-a} \left(\epsilon |b_{n,k} - x| + \epsilon |x - a_{n,k}| \right) = \frac{2^n}{b-a}(b_{n,k} - a_{n,k})\epsilon = \epsilon.
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo mostrato che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$|g_n(x) - f'(x)| \leq \epsilon \quad \forall\, n \geq N,$$

ovvero che $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f'(x)$. In questo modo la dimostrazione è conclusa. $\square$

Capitolo 2

Misura di Lebesgue-Stieltjes

In questo capitolo, l'obiettivo principale è di costruire la misura di Lebesgue-Stieltjes a partire da una funzione crescente, sfruttando le proprietà delle funzioni monotone studiate nel capitolo precedente. Inizieremo con alcune osservazioni preliminari sulla misurabilità delle funzioni monotone, che ci permetteranno di definire la misura in modo più rigoroso. Successivamente, definiremo formalmente la misura di Lebesgue-Stieltjes, analizzandone le principali proprietà. Infine, concluderemo con il Teorema di rappresentazione di Lebesgue, che costituisce un risultato fondamentale per stabilire la corrispondenza tra funzioni crescenti e misure di Radon positive.

Osservazione 2.1. Se una funzione f definita da un intervallo di numeri reali I ad $\mathbb{R}$ è monotona, allora è boreliana. Ricordiamo infatti che una funzione è boreliana se la controimmagine di ogni aperto è un boreliano. In questo caso la controimmagine tramite f di un intervallo aperto sarà necessariamente un intervallo, eventualmente degenere. Dal momento che un aperto qualsiasi di $\mathbb{R}$ è unione di intervalli aperti, la sua controimmagine tramite f sarà unione di intervalli e quindi sarà un insieme boreliano.

Osservazione 2.2. Se una funzione f definita da un intervallo di numeri reali I ad $\mathbb{R}$ è monotona, allora f' si può estendere ad una funzione boreliana su tutto I. Infatti, grazie al Teorema 1.6, sappiamo che f' è definita su I tranne che in un insieme di punti al più numerabile. Si può provare che se estendiamo f' in questi punti in cui non è definita assegnandogli il valore 0 otteniamo una funzione boreliana.

2.1 Costruzione della misura di Lebesgue-Stieltjes

Poiché nella dimostrazione del teorema successivo utilizzeremo frequentemente i concetti di limite destro e sinistro, introduciamo ora la relativa notazione.

Definizione 2.3. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Definiamo per ogni $x \in]a, b[$ (e analogamente $f(a+)$ e $f(b-)$):*

$$f(x+) := \lim_{y \to x^+} f(y), \text{ se tale limite esiste.}$$

$$f(x-) := \lim_{y \to x^-} f(y), \text{ se tale limite esiste.}$$

Teorema 2.4. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente. Per ogni intervallo aperto a destra $[a, b[$ definiamo*

$$\begin{cases} \lambda_f([a, b[) = 0 & \text{se } [a, b[= \emptyset \\ \lambda_f([a, b[) = f(b-) - f(a-) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Definiamo inoltre $\theta_f : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$

$$\theta_f(A) := \inf \left\{ \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_f(I_j) : (I_j)_{j \in \mathbb{N}} \text{ successioni di intervalli half-open, } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j \right\}.$$

Allora:

1. *θ_f è una misura esterna su $\mathbb{R}$;*

2. *i boreliani di $\mathbb{R}$ sono tutti θ_f-misurabili.*

3. *Sia μ_f la misura ottenuta da θ_f con il metodo di Carathéodory e Σ_f la σ-algebra degli insiemi θ_f-misurabili. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si ha*

$$\begin{aligned} \mu_f([a, b[) &= f(b-) - f(a-), \\ \mu_f(]a, b[) &= f(b-) - f(a+), \\ \mu_f([a, b]) &= f(b+) - f(a-), \\ \mu_f(]a, b]) &= f(b+) - f(a+). \end{aligned}$$

4. *Per ogni $A \in \Sigma_f$*

$$\begin{aligned} \mu_f(A) &= \inf \left\{ \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_f(I_j) : (I_j)_{j \in \mathbb{N}} \text{ intervalli aperti, } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j \right\} \\ &= \inf \{ \mu_f(U) : U \text{ aperto, } A \subseteq U \} \\ &= \sup \{ \mu_f(K) : K \text{ compatto, } K \subseteq A \}. \end{aligned}$$

5. *Siano $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un'altra funzione crescente, $c \in \mathbb{R}$, $A \in \Sigma_f \cap \Sigma_g$ e $B \in \Sigma_f$ allora*

$$\mu_{f+g}(A) = \mu_f(A) + \mu_g(A),$$

$$\mu_{cf}(B) = c\mu_f(B).$$

Dimostrazione. Iniziamo mostrando che θ_f è una misura esterna su $\mathbb{R}$. Se $A = \emptyset$ è evidente che $\theta_f(A) = 0$, dato che possiamo ricoprire A con l'intervallo vuoto, che ha misura nulla per come è definita λ_f. Se $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, ogni ricoprimento di intervalli aperti a destra di B è anche un ricoprimento di A e quindi, per la monotonia dell'estremo inferiore, $\theta_f(A) \leq \theta_f(B)$. Resta da mostrare la σ-subadditività. Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ una successione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Consideriamo un $n \in \mathbb{N}$ e il corrispondente A_n. Tramite la caratterizzazione dell'estremo inferiore, per ogni $\epsilon > 0$ esiste una successione di intervalli aperti a destra tali che valgono le seguenti:

$$A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{+\infty} I_{n,j} \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_f(I_{n,j}) < \theta_f(A_n) + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}. \tag{2.1}$$

Da qui otteniamo che:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n,j\in\mathbb{N}} I_{n,j} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_{n_k,j_k},$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla numerabilità di $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, che ci permette di rinominare gli indici. Da questo segue che:

$$\begin{aligned}\theta_f\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_f(I_{n_k,j_k}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_f(I_{n,j}) \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\theta_f(A_n) + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \theta_f(A_n) + \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ϵ segue la proprietà di σ-subadditività e quindi abbiamo mostrato che θ_f è una misura esterna.

Passiamo ora a mostrare che i boreliani di $\mathbb{R}$ sono θ_f-misurabili. Per poterlo fare è prima necessario mostrare che gli intervalli half-open sono θ_f-misurabili. Siano dunque $[a,b[$ un tale intervallo e $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\theta_f(A) < +\infty$. Per la proprietà di subadditività sappiamo già che

$$\theta_f(A \cap [a,b[) + \theta_f(A \setminus [a,b[) \geq \theta_f(A),$$

resta da mostrare la disuguaglianza opposta. Similmente a come fatto nella (2.1) per ogni $\epsilon > 0$ esiste una successione di intervalli aperti a destra $\{I_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tali che valgono le seguenti

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_f(I_j) < \theta_f(A) + \epsilon.$$

Consideriamo ora le seguenti successioni: $I_j \cap [a,b[$, $I_j \cap]-\infty, a[$ e $I_j \cap [b,+\infty[$. Queste sono successioni di intervalli aperti a destra e sostanzialmente ci permettono di scomporre ogni intervallo I_j in tre parti: la prima serve a ricoprire $A \cap [a,b[$ e le altre due per $A \setminus [a,b[$;

infatti

$$A \cap [a,b[\subset \bigcup_{j=0}^{+\infty} (I_j \cap [a,b[), \qquad A \setminus [a,b[\subset \left(\bigcup_{j=0}^{+\infty} I_j \cap]-\infty, a[\right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{+\infty} I_j \cap [b,+\infty[\right).$$

In questo modo riusciamo a fare i seguenti passaggi

$$\begin{aligned}
&\theta_f(A \cap [a,b[) + \theta_f(A \setminus [a,b[) \leq \\
&\leq \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_f \left(I_j \cap [a,b[\right) + \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_f \left(I_j \cap]-\infty, a[\right) + \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_f \left(I_j \cap [b,+\infty[\right) = \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_f(I_j) < \theta_f(A) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ϵ segue la disuguaglianza che restava da mostrare e quindi $[a,b[$ è θ_f-misurabile. Dalla θ_f-misurabilità degli intervalli aperti a destra segue anche quella degli intervalli aperti a destra illimitati del tipo $[a,+\infty[$; infatti questi si possono scrivere nel seguente modo

$$[a,+\infty[= \bigcup_{n=0}^{+\infty} [a+n, a+n+1[.$$

Similmente otteniamo che anche gli insiemi con un solo punto sono θ_f-misurabili, dal momento che si possono scrivere come segue

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a, a+\frac{1}{n}[.$$

A questo punto qualsiasi intervallo risulta essere θ_f-misurabile perché può essere ottenuto da intervalli aperti a destra limitati o illimitati, eventualmente passando al complementare oppure aggiungendo o togliendo un punto. Infine otteniamo che un qualsiasi aperto di $\mathbb{R}$ è θ_f-misurabile dato che può essere scritto come unione al più numerabile di intervalli aperti e disgiunti. I boreliani di $\mathbb{R}$ sono a loro volta generati dagli aperti di $\mathbb{R}$ e quindi abbiamo mostrato che sono θ_f-misurabili.

Abbiamo quindi mostrato che θ_f è una misura esterna e che i boreliani di $\mathbb{R}$ sono contenuti nella σ-algebra Σ_f degli insiemi θ_f-misurabili. A questo punto, tramite il metodo di Carathéodory, possiamo ottenere da θ_f una misura μ_f definita sulla σ-algebra Σ_f. Mostriamo ora le proprietà di μ_f enunciate nel punto 3. La prima proprietà segue dal fatto che $[a,b[$ è un ricoprimento di se stesso, infatti

$$\mu_f([a,b[) = \lambda_f([a,b[) = f(b-) - f(a-).$$

Consideriamo ora l'intervallo $[a,b]$; esso può essere scritto come

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[a, b+\frac{1}{n} \right[.$$

Da questo segue

$$\begin{aligned}\mu_f([a,b]) &= \mu_f\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left[a, b+\frac{1}{n}\right[\right) = \lim_{n\to+\infty}\mu_f\left(\left[a,b+\frac{1}{n}\right[\right) = \\ &= \lim_{n\to+\infty}\lambda_f\left(\left[a,b+\frac{1}{n}\right[\right) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\left(b+\frac{1}{n}\right)-\right) - f(a-) = \\ &= f(b+) - f(a-). \end{aligned} \tag{2.2}$$

In realtà l'ultima uguaglianza non è affatto banale. Per motivarla vogliamo mostrare che $f(b+) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\left(b+\frac{1}{n}\right)-\right)$. Iniziamo osservando che

$$f(b+) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f\left(b+\frac{1}{n}\right), \qquad \lim_{n\to+\infty} f\left(\left(b+\frac{1}{n}\right)-\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\in\mathbb{N}} f\left(b+\frac{1}{n}-\frac{1}{k}\right).$$

A questo punto, dalla monotonia di f segue che

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\left(b+\frac{1}{n}\right)-\right) \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} f\left(b+\frac{1}{n}-\frac{1}{k}\right) \leq f\left(b+\frac{1}{n}\right).$$

Passando all'estremo inferiore su $\mathbb{N}$ otteniamo

$$f(b+) \geq \lim_{n\to+\infty} f\left(\left(b+\frac{1}{n}\right)-\right).$$

Inoltre per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} f\left(b+\frac{1}{N}-\frac{1}{k}\right) < \lim_{n\to+\infty} f\left(\left(b+\frac{1}{n}\right)-\right) + \epsilon.$$

Scegliendo $K = 2N$ otteniamo

$$\begin{aligned} f(b+) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f\left(b+\frac{1}{n}\right) &\leq f\left(b+\frac{1}{2N}\right) = f\left(b+\frac{1}{N}-\frac{1}{K}\right) \leq \\ &\leq \sup_{k\in\mathbb{N}} f\left(b+\frac{1}{N}-\frac{1}{k}\right) < \lim_{n\to+\infty} f\left(\left(b+\frac{1}{n}\right)-\right) + \epsilon. \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ϵ segue che $f(b+) \leq \lim_{n\to+\infty} f\left(\left(b+\frac{1}{n}\right)-\right)$, e quindi la (2.2) è valida. A questo punto possiamo ottenere piuttosto facilmente le altre due uguaglianze del punto 3. Infatti, scelto un qualsiasi $C > 0$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \mu_f(]a,b[) &= \mu_f([a-C,b[) - \mu_f([a-C,a]) = \\ &= f(b-) - f(a-C-) - f(a+) + f(a-C-) = f(b-) - f(a+), \\ \mu_f(]a,b]) &= \mu_f([a-C,b]) - \mu_f([a-C,a]) = \\ &= f(b+) - f(a-C-) - f(a+) + f(a-C-) = f(b+) - f(a+). \end{aligned}$$

Questo conclude la prova. $\square$

Definizione 2.5 (**Misura di Lebesgue-Stieltjes**). *La misura μ_f costruita a partire da una funzione crescente f come descritto nel Teorema 2.4 viene detta misura di Lebesgue-Stieltjes associata a f.*

Esistono diversi modi per costruire e definire la misura di Lebesgue-Stieltjes. Noi abbiamo utilizzato gli intervalli aperti a destra $[a, b[$ e definito la misura sfruttando i limiti sinistri della funzione f. Precisamente, per un intervallo di questo tipo, abbiamo posto

$$\lambda_f([a, b[) = f(b-) - f(a-).$$

Un modo alternativo consiste nell'uso degli intervalli aperti a sinistra $]a, b]$, definendo la misura in termini di limiti destri. In questo caso la definizione diventa

$$\lambda_f(]a, b]) = f(b+) - f(a+).$$

Questa scelta è del tutto equivalente in termini di costruzione della misura, ma offre un punto di vista differente e talvolta conveniente a seconda del tipo di funzione e dell'applicazione desiderata. Il processo di costruzione della misura associata si semplifica ulteriormente se assumiamo che la funzione f sia crescente e continua da sinistra (o da destra a seconda della scelta di cui abbiamo appena discusso). In questo caso possiamo definire direttamente

$$\lambda_f([a, b[) = f(b) - f(a),$$

dato che $f(b) - f(a) = f(b-) - f(a-)$. Con questo approccio non utilizziamo i limiti da sinistra ed evitiamo diverse complicazioni tecniche durante la dimostrazione. Infine, nel caso in cui la funzione f è continua, la misura di Lebesgue-Stieltjes associata assume una forma particolarmente semplice e uniforme. In tale situazione otteniamo infatti che

$$\mu_f([a, b[) = \mu_f(]a, b]) = \mu_f([a, b]) = \mu_f(]a, b[) = f(b) - f(a).$$

In questo modo il valore della misura è indipendente dalla scelta della tipologia di intervallo.

Il processo di costruzione della misura di Lebesgue-Stieltjes è, sotto molti aspetti, simile a quello della misura di Lebesgue. Infatti nel seguente esempio mostriamo che la misura di Lebesgue è un caso particolare della misura di Lebesgue-Stieljes, ottenuta scegliendo come funzione monotona generatrice la funzione identità.

Esempio 2.6. Consideriamo la funzione identità $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. La misura di Lebesgue-Stieltjes associata a f coincide proprio con la misura di Lebesgue. Per vedere questo, consideriamo due punti $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e calcoliamo la misura dell'intervallo $[a, b]$. Abbiamo

$$\mu_f([a, b]) = f(b+) - f(a-) = f(b) - f(a) = b - a = \mathcal{L}^1([a, b]).$$

Osservazione 2.7. L'oggetto principale della nostra analisi sono le misure di Lebesgue-Stieltjes associate a funzioni definite su $\mathbb{R}$. Tuttavia, la definizione di misura di Lebesgue-Stieltjes può essere ampliata a funzioni con dominio in $\mathbb{R}^n$. Quando si estende la costruzione ad $\mathbb{R}^n$ il processo diventa significativamente più complesso, dato che richiede un uso approfondito delle funzioni di distribuzione e delle loro derivate parziali in senso distribuzionale.

Osservazione 2.8. Un legame interessante tra le funzioni crescenti e le misure di Lebesgue-Stieltjes ad esse associate riguarda il comportamento rispetto alla continuità o alla discontinuità della funzione. Se la funzione f è continua, la misura associata μ_f attribuisce misura nulla agli insiemi costituiti da un singolo punto, ovvero per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\mu_f(\{x\}) = 0.$$

Invece, se f presenta un punto di discontinuità in $x_0 \in \mathbb{R}$, la misura associata dell'insieme $\{x_0\}$ vale

$$\mu_f(\{x_0\}) = \mu_f([x_0, x_0]) = f(x_0+) - f(x_0-).$$

Quindi la misura μ_f riflette la discontinuità di f in x_0.

2.2 Teorema di Rappresentazione di Lebesgue

Definizione 2.9 (Misura di Radon positiva). *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$. Prendiamo una misura boreliana μ su Ω. μ è una misura di Radon positiva se è finita sui compatti di Ω ed è sia internamente che esternamente regolare, ovvero valgono*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A,\ K \text{ compatto}\},$$
$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U,\ U \text{ aperto}\}.$$

Inoltre denotiamo con $\mathcal{M}(\Omega)$ l'insieme delle misure di Radon positive su Ω.

Nel Teorema 2.4 abbiamo mostrato che per ogni funzione crescente f si può ottenere una misura μ_f corrispondente. Osserviamo che, per la definizione che abbiamo appena dato e per le varie proprietà enunciate nel Teorema 2.4, la misura μ_f è una misura di Radon positiva. Ora vogliamo ribaltare il processo e mostrare come a partire da una qualunque misura di Radon positiva μ possiamo ricavare una funzione f crescente tale che μ è esattamente la misura di Lebesgue-Stieltjes di f, ovvero tale che $\mu = \mu_f$.

Teorema 2.10 (Rappresentazione di Lebesgue). *Sia μ una misura di Radon positiva su $\mathbb{R}$. Allora esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e continua da sinistra tale che μ è la misura di Lebesgue-Stieltjes associata ad f.*

Dimostrazione. Definiamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nel seguente modo

$$f(x) = \begin{cases} -\mu([x, 0[) & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ \mu([0, x[) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Questa definizione è ben posta dal momento che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, gli insiemi $[x, 0[,]0, x]$ sono boreliani e μ è una misura boreliana. Verifichiamo che f è crescente sfruttando la monotonia della misura μ. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \leq y$. Se $0 \leq x \leq y$ abbiamo

$$f(x) = \mu([0, x[) \leq \mu([0, y[) = f(y).$$

Se $x \leq y \leq 0$ abbiamo

$$f(x) = -\mu([x, 0[) \leq -\mu([y, 0[) = f(y).$$

Invece se $x \leq 0 \leq y$, per come è stata definita f, si ha

$$f(x) \leq 0 \leq f(y).$$

Mostriamo ora che la misura μ coincide, sugli intervalli aperti a destra, con la misura di Lebesgue-Stieltjes associata alla funzione f che abbiamo appena definito. Consideriamo $a, b \in \mathbb{R}$ e supponiamo $0 < a < b$. Per l'additività finita della misura e dato che $[0, b[= [0, a[\cup[a, b[$

$$\mu([a, b[) = \mu([0, b[) - \mu([0, a[) = f(b) - f(a) = f(b-) - f(a-).$$

L'ultima uguaglianza segue dalla continuità da sinistra della funzione f. Non ci dovrebbe stupire che ad ogni misura si può associare una funzione continua da sinistra, dato che nell'Osservazione 2.11 abbiamo spiegato come, cambiando il valore della funzione nei punti di discontinuità, si ottiene la medesima misura di Lebesgue-Stieltjes. I casi $a < b < 0$ e $a < 0 < b$ sono analoghi, mentre se $a = 0$ o $b = 0$ segue direttamente da come abbiamo definito f. □

2.3 Caratterizzazione delle misure di Radon positive

In questo capitolo, abbiamo innanzitutto illustrato il procedimento che permette di associare una misura a una funzione monotona crescente. Successivamente, abbiamo esplorato il percorso inverso, cioè come definire una funzione crescente a partire da una misura di Radon positiva. Ora desideriamo analizzare la relazione che si instaura tra funzioni monotone crescenti e misure di Radon positive attraverso questi due procedimenti, con l'obiettivo di comprendere se essi siano in corrispondenza biunivoca. In altre parole, cercheremo di dimostrare che i due percorsi sono l'uno l'inverso dell'altro. Qualora ci riuscissimo, potremmo affermare che tra le funzioni monotone crescenti e le misure di Radon positive esiste una biezione. Tuttavia, prima di procedere con questa dimostrazione, sarà utile fare un'osservazione preliminare che ci aiuterà a identificare le condizioni necessarie affinché tale corrispondenza sia effettivamente biunivoca. Infatti, risulterà evidente che uno dei due procedimenti non è intrinsecamente unico; pertanto, sarà necessario introdurre alcune condizioni aggiuntive per garantire l'ottenimento di una vera e propria biezione tra certe funzioni crescenti e le misure di Radon positive.

Osservazione 2.11. Nel Teorema 2.4 abbiamo mostrato come si può associare ad una funzione crescente f una misura μ_f. Tuttavia, una stessa misura di Lebesgue-Stieltjes può provenire da molteplici funzioni differenti. Per esempio μ_f, ovvero la misura associata alla funzione crescente f, è identica alla misura associata alla funzione $f + C$, dove C è una costante reale qualsiasi. Le possibili varianti di funzioni che generano la stessa misura μ_f non si limitano a queste trasformazioni costanti. Infatti, nella definizione di μ_f del Teorema 2.4, compaiono i limiti sinistri di f, ma non i valori puntuali assunti da f. Questo implica che, nei punti di discontinuità di f, possiamo modificare il valore di f sostituendolo con qualunque valore compreso tra il limite sinistro e il limite destro, mantenendo invariata la misura. In altre parole, possiamo costruire una funzione g che differisce da f in un insieme di punti al più numerabile (come affermato nella Proposizione 1.4), pur essendo anch'essa crescente e tale che $\mu_g = \mu_f$. In sintesi, la stessa misura di Lebesgue-Stieltjes può essere associata a una famiglia di funzioni crescenti, che possono differire tra loro sia per costanti additive sia per variazioni nei punti di discontinuità.

Proposizione 2.12. *Siano $\mathcal{F}$ l'insieme delle funzioni reali definite su $\mathbb{R}$, monotone crescenti, continue da sinistra e nulle nell'origine; e $\mathcal{G}$ l'insieme delle misure di Radon positive su $\mathbb{R}$. Allora esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$.*

Dimostrazione. Iniziamo definendo $\Phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ come nel Teorema 2.4, ovvero

$$\Phi(f) = \mu_f, \quad \mu_f([a, b[) = f(b-) - f(a-) \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$

Definiamo invece $\Psi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ come nel Teorema 2.10, ovvero

$$\Psi(\mu) = f_\mu, \quad f_\mu(x) = \begin{cases} -\mu([x, 0[) & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ \mu([0, x[) & \text{se } x > 0; \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mostriamo ora che $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ e $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{G}}$. Da questo segue che $\Psi = \Phi^{-1}$, ovvero che Φ è una applicazione biunivoca. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$
\begin{aligned}
(\Psi \circ \Phi)(f)(x) &= \Psi(\mu_f)(x) = f_{\mu_f}(x) = \\
&= \begin{cases} -\mu_f([x,0[) & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ \mu_f([0,x[) & \text{se } x > 0; \end{cases} = \begin{cases} f(x-) - f(0-) & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ f(x-) - f(0-) & \text{se } x > 0; \end{cases} = \\
&= \begin{cases} f(x) - f(0) & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ f(x) - f(0) & \text{se } x > 0; \end{cases} = \begin{cases} f(x) & \text{se } x < 0, \\ f(0) & \text{se } x = 0, \\ f(x) & \text{se } x > 0; \end{cases} = f(x).
\end{aligned}
$$

In questi passaggi si vede come l'ipotesi della continuità da sinistra di f e il fatto che $f(0) = 0$ sono essenziali per ottenere $f_{\mu_f} = f$. Senza fissare il valore di f in un punto avremmo ottenuto una corrispondenza suriettiva ma non iniettiva. Per la composizione in ordine inverso iniziamo verificando che le misure coincidono sugli intervalli aperti a destra $[a,b[$ con $0 \leq a < b$. I casi $a < b \leq 0$ e $a \leq 0 \leq b$ sono analoghi. Si ha

$$
\begin{aligned}
(\Phi \circ \Psi)(\mu)([a,b[) &= \Phi(f_\mu)([a,b[) = \mu_{f_\mu}([a,b[) = f_\mu(b-) - f_\mu(a-) = \\
&= f_\mu(b) - f_\mu(a) = \mu([0,b[) - \mu([0,a[) = \mu([a,b[).
\end{aligned}
$$

Abbiamo verificato che le misure coincidono sugli intervalli $[a,b[$. Per poter affermare con precisione che le due misure coincidono sull'intera σ-algebra di Borel servirebbero alcuni altri passaggi tecnici sull'unicità dell'estensione della misura che ometteremo. $\square$

Capitolo 3

Funzioni a Variazione Limitata

In questo capitolo introduciamo le funzioni a variazione limitata. Dopo aver definito formalmente il concetto di variazione totale, il capitolo esplora le principali proprietà delle funzioni a variazione limitata, con una maggiore attenzione alle proprietà che le collegano alle funzioni monotone. Inoltre, viene presentato il Teorema di Jordan, che fornisce una caratterizzazione utile delle funzioni a variazione limitata in termini di differenza di due funzioni monotone crescenti.

Definizione 3.1 (**Variazione totale**). *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e $D \subseteq \mathbb{R}$. Definiamo la variazione totale di f su D la quantità*

$$V_D(f) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| : n \geq 1, x_j \in I \cap D, x_0 \leq \cdots \leq x_n \right\}. \tag{3.1}$$

Nel caso in cui $D \cap I = \emptyset$, poniamo $V_D(f) = 0$. Indichiamo la variazione totale di f su I semplicemente con $V(f)$ invece di $V_I(f)$. Nel caso in cui $V_D(f)$ è finita diciamo che f è una funzione a variazione limitata su D. Se $V(f)$ è finita diciamo semplicemente che f è una funzione a variazione limitata.

Osservazione 3.2. Possiamo definire la variazione totale anche per le funzioni a valori in un qualsiasi spazio metrico (X, d). Per farlo è sufficiente sostituire $|f(x_j) - f(x_{j-1})|$ con $d(f(x_j), f(x_{j-1}))$ nella (3.1).

3.1 Proprietà delle funzioni a variazione limitata

Nella proposizione seguente evidenziamo due proprietà fondamentali della variazione totale: la sub-linearità, che garantisce che la variazione totale di una somma di funzioni non supera la somma delle loro variazioni, da cui segue che la classe delle funzioni a variazione limitata è chiusa rispetto a somma (e ovviamente alla moltiplicazione per scalari); e poi mostriamo l'additività rispetto alle scomposizioni del dominio, che consente di calcolare la variazione totale su un insieme come somma delle variazioni su sottoinsiemi.

Proposizione 3.3. *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni, $D' \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in R$. Allora valgono le seguenti proprietà della variazione totale:*

1. *$V_D(f+g) \leq V_D(f) + V_D(g)$, da cui segue che se f, g sono funzioni a variazione limitata su D, allora lo è anche $f+g$;*

2. *$V_D(cf) = |c| V_D(f)$, da cui segue che se f è una funzione a variazione limitata su D, allora lo è anche cf;*

3. *$V_{D'}(f) \leq V_D(f)$;*

4. *$V_D(f) \geq V_{D\cap]-\infty,x]}(f) + V_{D\cap[x,+\infty[}(f)$ per ogni $x \in R$, mentre se $x \in I$ otteniamo l'uguaglianza;*

5. *se f è monotona e $D \cap I \neq \emptyset$, allora*

$$V_D(f) = \sup_{D\cap I} f - \inf_{D\cap I} f;$$

   se f è anche limitata, allora è una funzione a variazione limitata.

Osservazione 3.4. Consideriamo $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione reale. In questo caso particolare il punto 5 della Proposizione 3.3 assume la seguente forma: se f è una funzione crescente, allora f è a variazione limitata e si ha $V(f) = f(b) - f(a)$.

3.2 Teorema di Jordan

Il Teorema di Jordan permette di decomporre una funzione a variazione limitata come differenza di due funzioni crescenti. Questa rappresentazione descrive la struttura delle funzioni a variazione limitata e costituisce una base fondamentale per collegarle alla teoria delle misure di Radon. Inoltre, questa decomposizione mette in evidenza il legame con le funzioni monotone, da cui derivano altre caratteristiche delle funzioni a variazione limitata.

Teorema 3.5 (Teorema di Jordan). *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ e $D \subseteq \mathbb{R}$. f è una funzione a variazione limitata su D se e solo se esistono $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ funzioni crescenti e limitate tali che $f = f_1 - f_2$ in $D \cap I$.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia una funzione a variazione limitata su D e mostriamo che esistono f_1, f_2 con le proprietà richieste. Se $D \cap I = \emptyset$, possiamo prendere banalmente $f_1 = f_2 = 0$. Supponiamo quindi $D \cap I \neq \emptyset$ e poniamo per ogni $x \in D \cap I$

$$g(x) = V_{D\cap]-\infty,x]}(f).$$

Definiamo (su $D \cap I$) $g_1 := g + f$, $g_2 := g - f$ e mostriamo che sono funzioni crescenti. Prendiamo $a, b \in D \cap I$ con $a \leq b$; per le proprietà della variazione totale vale

$$\begin{aligned} g(b) = V_{D\cap]-\infty,b]}(f) &= V_{D\cap]-\infty,a]}(f) + V_{D\cap[a,b]}(f) = \\ &= g(a) + V_{D\cap[a,b]}(f) \geq g(a) + |f(b) - f(a)|, \end{aligned}$$

e quindi otteniamo

$$g_1(b) - g_1(a) = g(b) + f(b) - g(a) - f(a) \geq |f(b) - f(a)| + f(b) - f(a) \geq 0.$$

Si mostra in modo analogo che $g_2(b) - g_2(a) \geq 0$. Mostriamo ora che esistono $h_1, h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni crescenti che coincidono rispettivamente con g_1, g_2 su $D \cap I$. Poniamo

$$c_1 = \inf_{D\cap I} g_1, \quad c_2 = \inf_{D\cap I} g_2;$$

si ha che $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ perché f è a variazione limitata su D e quindi sia f che g sono limitate. A questo punto definiamo

$$h_1(x) = \sup\{\{c_1\} \cup \{g_1(y) : y \in D \cap I, y \leq x\}\},$$

$$h_2(x) = \sup\{\{c_2\} \cup \{g_2(y) : y \in D \cap I, y \leq x\}\},$$

e otteniamo così le proprietà richieste. Inoltre, per ogni $x \in D \cap I$, avremo

$$h_1(x) + h_2(x) = g_1(x) + g_2(x) = 2g(x),$$

$$h_1(x) - h_2(x) = g_1(x) - g_2(x) = 2f(x).$$

Infine, ponendo $f_1 = \frac{h_1}{2}, f_2 = \frac{h_2}{2}$ otteniamo due funzioni crescenti tali che per ogni $x \in D \cap I$ si ha

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{h_1(x) - h_2(x)}{2} = \frac{g_1(x) - g_2(x)}{2} = f(x).$$

Supponiamo ora che f_1, f_2 siano funzioni crescenti, limitate e mostriamo che $f = f_1 - f_2$ è una funzione a variazione limitata. Dato che f_1, f_2 sono crescenti e limitate, per la Proposizione 3.3 si ha

$$V(f_1) = \sup_{\mathbb{R}} f_1 - \inf_{\mathbb{R}} f_1 < +\infty,$$

$$V(f_2) = \sup_{\mathbb{R}} f_2 - \inf_{\mathbb{R}} f_2 < +\infty.$$

Ma allora, sempre per le proprietà della variazione totale nella Proposizione 3.3,

$$\begin{aligned} V_D(f) = V_{D\cap I}(f) = V_{D\cap I}(f_1 - f_2) \leq V_{D\cap I}(f_1) + V_{D\cap I}(-f_2) = \\ = V_{D\cap I}(f_1) + V_{D\cap I}(f_2) \leq V(f_1) + V(f_2) < +\infty. \end{aligned}$$

Da questo segue che f è una funzione a variazione limitata su D. □

Le proprietà elencate nella prossima proposizione confermano che le funzioni a variazione limitata ereditano molte delle caratteristiche strutturali delle funzioni monotone, come l'esistenza di limiti destri e sinistri, la numerabilità dei punti di discontinuità e la differenziabilità.

Proposizione 3.6. *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione a variazione limitata. Allora*

1. *f ammette limite destro e sinistro in ciascun punto di I;*

2. *l'insieme dei punti di discontinuità di f in I è al più numerabile;*

3. *f è differenziabile $\mathcal{L}^1$-q.o. in I, f' è una funzione $\mathcal{L}^1$-sommabile su I e*

$$\int_I |f'| d\mathcal{L}^1 \leq V(f).$$

Dimostrazione. Dal momento che f è una funzione a variazione limitata su I, per il Teorema 3.5 esistono due funzioni $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ crescenti e limitate tali che $f = f_1 - f_2$ su I. A questo punto il punto 1 segue dall'esistenza dei limiti destri e sinistri per le funzioni monotone che abbiamo mostrato nella Proposizione 1.2, mentre il punto 2 segue dalla numerabilità dell'insieme dei punti di discontinuità di una funzione monotona che abbiamo mostrato nella Proposizione 1.4.

Il punto 3 non segue in modo così immediato dai risultati che abbiamo mostrato per le funzioni crescenti. Per il Teorema 1.6 sappiamo che f_1, f_2 sono differenziabili $\mathcal{L}^1$-q.o. in I e di conseguenza anche f lo è. Quindi f' è definita $\mathcal{L}^1$-q.o. in I, inoltre, per l'Osservazione 2.2, f' è misurabile rispetto ad $\mathcal{L}^1$. Poniamo ora, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = V_{I\cap]-\infty,x]}(f).$$

F è una funzione crescente e positiva. Prendiamo $x, y \in I$ con $x \leq y$, allora vale

$$F(y) - F(x) = V_{I\cap]-\infty,y]}(f) - V_{I\cap]-\infty,x]}(f) = V_{I\cap[x,y]}(f) \geq |f(y) - f(x)|.$$

Quindi ne segue $F'(x) \geq |f'(x)|$ in ogni punto $x \in I$ in cui entrambe le derivate esistono, ovvero $\mathcal{L}^1$-q.o. su I. Inoltre, sempre per l'Osservazione 2.2, anche F' è $\mathcal{L}^1$-misurabile, quindi otteniamo

$$\int_I |f'| d\mathcal{L}^1 \leq \int_I F' d\mathcal{L}^1. \tag{3.2}$$

Prendiamo $a, b \in I$ con $a \leq b$; allora per il Teorema 1.13 abbiamo

$$\int_a^b F' d\mathcal{L}^1 \leq F(b) - F(a) \leq F(b) = V_{I \cap]-\infty, b]}(f) \leq V(f).$$

Possiamo esprimere I come l'unione di una successione crescenti di intervalli della forma $[a_n, b_n]$. Quindi dal Teorema della convergenza monotona segue che

$$\begin{aligned}\int_I F' d\mathcal{L}^1 &= \int F' \chi_I d\mathcal{L}^1 = \int \lim_{n\to\infty} \left(F' \chi_{[a_n, b_n]}\right) d\mathcal{L}^1 = \\ &= \lim_{n\to\infty} \int F' \chi_{[a_n, b_n]} d\mathcal{L}^1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{a_n}^{b_n} F' d\mathcal{L}^1 \leq V(f).\end{aligned}$$

Da questo deduciamo che F' è $\mathcal{L}^1$-sommabile su I. Ricordando che abbiamo mostrato la (3.2): otteniamo da essa che anche f' è $\mathcal{L}^1$-sommabile su I. Infatti vale

$$\int_I |f'| d\mathcal{L}^1 \leq \int_I F' d\mathcal{L}^1 \leq V(f).$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Osservazione 3.7. Nel seguito capiterà di considerare differenze di misure. Questo tipo di oggetti rientra nel contesto più generale delle misure con segno, che estendono il concetto di misura permettendo valori negativi. Senza entrare nella teoria completa di queste misure, ci limiteremo a utilizzarle nei casi in cui la differenza tra misure è naturale e non comporta difficoltà aggiuntive rispetto al quadro teorico sviluppato.

Osservazione 3.8. Consideriamo $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione a variazione limitata. Per il Teorema 3.5 esistono $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ crescenti tali che $f = f_1 - f_2$. Per il Teorema 2.4 possiamo associare ad f_1, f_2 rispettivamente μ_{f_1}, μ_{f_2}. In questo modo possiamo ampliare la definizione di misura di Lebesgue-Stieltjes alle funzioni a variazione limitata, ponendo $\mu_f = \mu_{f_1} - \mu_{f_2}$. La definizione è ben posta dato che vale

$$\begin{aligned}\mu_{f_1}([a, b[) - \mu_{f_2}([a, b[) &= f_1(b-) - f_1(a-) - f_2(b-) + f_2(a-) \\ &= f(b-) - f(a-) = \mu_f([a, b[).\end{aligned}$$

Capitolo 4

Funzioni Assolutamente Continue

In questo capitolo studiamo le funzioni assolutamente continue, analizzandone le proprietà principali, con particolare attenzione a quelle necessarie per i risultati successivi. In particolare mostreremo che, essendo a variazione limitata, a tali funzioni possiamo associare una misura di Lebesgue-Stieltjes. Da qui costruiremo una decomposizione delle funzioni crescenti e di conseguenza anche delle funzioni a variazione limitata.

Definizione 4.1 (Funzione assolutamente continua). *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è assolutamente continua se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che*

$$\sum_{j=1}^{k} |f(y_j) - f(x_j)| < \epsilon,$$

per ogni famiglia finita di punti $x_j, y_j \in I$ tale che

$$x_1 \leq y_1 \leq ... \leq x_k \leq y_k, \quad \sum_{j=1}^{k} |y_j - x_j| < \delta.$$

4.1 Proprietà delle funzioni assolutamente continue

Questa sezione è dedicata all'analisi delle proprietà fondamentali delle funzioni assolutamente continue. L'obiettivo è porre le basi per collegarle alla misura di Lebesgue-Stieltjes e alle decomposizioni introdotte nelle sezioni successive.

Proposizione 4.2. *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione assolutamente continua. Allora f è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Fissiamo $\epsilon > 0$ e sia δ come nella Definizione 4.1. Prendiamo una coppia di punti $x, y \in I$ tale che $|x - y| < \delta$. Poniamo $x_1 = \min\{x, y\}$ e $y_1 = \max\{x, y\}$. Dal momento che $\{x_1, y_1\}$ è una famiglia finita di punti, otteniamo dall'assoluta continuità

$$|f(y_1) - f(x_1)| = |f(x) - f(y)| < \epsilon,$$

ovvero f è uniformemente continua. $\square$

Esempio 4.3. Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana di costante $c \geq 0$. Allora f è assolutamente continua.

Dimostrazione. Dato $\epsilon > 0$, consideriamo un $\delta > 0$ tale che $c\delta < \epsilon$. Allora vale

$$\sum_{j=1}^{k} |f(y_j) - f(x_j)| \leq c \sum_{j=1}^{k} (y_j - x_j) \leq c\delta < \epsilon,$$

per ogni famiglia finita di punti $x_j, y_j \in I$ tale che

$$x_1 \leq y_1 \leq ... \leq x_k \leq y_k, \quad \sum_{j=1}^{k} |y_j - x_j| < \delta,$$

ovvero f è assolutamente continua. $\square$

Proposizione 4.4. *Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ due intervalli chiusi, $c \in \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ due funzioni assolutamente continue. Allora valgono i seguenti fatti:*

1. *$f + g : I \cap J \to \mathbb{R}$ è assolutamente continua;*
2. *cf è assolutamente continua;*
3. *$fg : I \cap J \to \mathbb{R}$ è assolutamente continua;*
4. *se g è crescente con $g(J) \subseteq I$, allora $f \circ g$ è assolutamente continua.*

La dimostrazione è semplice e la omettiamo.

Teorema 4.5. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione assolutamente continua. Allora f è a variazione limitata e anche $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, definita come*

$$F(x) = V_{[a,x]}(f),$$

è una funzione assolutamente continua. Da questo inoltre segue che esistono due funzioni crescenti e assolutamente continue $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ tali che $f = f_1 - f_2$ su $[a, b]$.

Dimostrazione. Prendiamo $\epsilon = 1$; allora esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\sum_{j=1}^{k} |f(y_j) - f(x_j)| < 1, \tag{4.1}$$

per ogni famiglia finita di punti $x_j, y_j \in [a,b]$ tale che

$$x_1 \leq y_1 \leq ... \leq x_k \leq y_k, \quad \sum_{j=1}^{k} |y_j - x_j| < \delta.$$

Siano $n \geq 1$ tale che $\frac{b-a}{n} < \delta$ e $a = x_0 \leq \cdots \leq x_k = b$. Possiamo supporre che i punti $a + m\frac{b-a}{n}$ (con $0 \leq m \leq n$) appartengano alla suddivisione $\{x_0, \ldots, x_k\}$ e che corrispondano agli indici $h_0, \ldots, h_n$. Allora abbiamo:

$$\sum_{h=h_m+1}^{h_{m+1}} (x_h - x_{h-1}) = \frac{b-a}{n} < \delta,$$

da cui, per la (4.1), otteniamo

$$\sum_{h=h_m+1}^{h_{m+1}} |f(x_h) - f(x_{h-1})| < 1.$$

Da questo segue

$$\sum_{h=1}^{k} |f(x_h) - f(x_{h-1})| = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{h=h_m+1}^{h_{m+1}} |f(x_h) - f(x_{h-1})| < n,$$

quindi $V[a,b](f) \leq n$, ovvero f è una funzione a variazione limitata.

Siano ora $\epsilon > 0$ e sia $\delta > 0$ relativo ad $\frac{\epsilon}{2}$ nella definizione di assoluta continuità di f. Consideriamo una famiglia finita di punti $x_j, y_j \in [a,b]$ tale che

$$x_1 \leq y_1 \leq ... \leq x_k \leq y_k, \quad \sum_{j=1}^{k} |y_j - x_j| < \delta.$$

Inoltre, per ogni $h \in \{1, \ldots, k\}$, esistono $x_h = t_0^{(h)} \leq \cdots \leq t_{n_h}^{(h)} = y_h$ tali che

$$\sum_{j=1}^{n_h} |f(t_j^{(h)}) - f(t_{j-1}^{(h)})| > V_{[x_h, y_h]}(f) - \frac{\epsilon}{2k}.$$

Allora otteniamo

$$\frac{\epsilon}{2} > \sum_{h=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_h} |f(t_j^{(h)}) - f(t_{j-1}^{(h)})| > \sum_{h=1}^{k} V_{[x_h, y_h]}(f) - \frac{\epsilon}{2},$$

ovvero

$$\sum_{h=1}^{k} (F(y_h) - F(x_h)) = \sum_{h=1}^{k} (V_{[a, y_h]}(f) - V_{[a, x_h]}(f)) = \sum_{h=1}^{k} V_{[x_h, y_h]}(f) < \epsilon.$$

Da qui si conclude che F è una funzione assolutamente continua.

Infine, l'esistenza di f_1, f_2, con le proprietà descritte nell'enunciato, segue da quanto appena dimostrato e dalla scomposizione già vista nel Teorema di Jordan. $\square$

Osservazione 4.6. Abbiamo mostrato che per ogni funzione a variazione limitata è possibile definire la misura di Lebesgue-Stieltjes associata. Dal Teorema 4.5 segue che una funzione assolutamente continua è a variazione limitata e quindi esiste la misura di Lebesgue-Stieltjes associata.

Riportiamo il seguente risultato senza dimostrazione, che può essere consultata in [6].

Proposizione 4.7. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione assolutamente continua differenziabile. Se $f'(x) = 0$ per $\mathcal{L}^1$-q.o. $x \in [a, b]$, allora f è costante in $[a, b]$.*

4.2 Decomposizione di funzioni crescenti

In questa Sezione vogliamo decomporre una funzione crescente in tre componenti: assolutamente continua, singolare crescente e discreta a salti. Questo risultato permette di descrivere con precisione la struttura di una funzione crescente, evidenziando come le sue diverse caratteristiche si riflettano in queste tre componenti. La decomposizione gioca un ruolo cruciale nella teoria delle misure di Lebesgue-Stieltjes e prepara il terreno per la successiva analisi delle misure associate. Prima di procedere con il risultato principale, abbiamo bisogno di definire le funzioni salto ed analizzarne alcune proprietà.

Definizione 4.8 (Famiglia sommabile). *Siano $\mathcal{A}$ un insieme di indici qualunque ed $E_{\mathcal{A}} = \{w_\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una famiglia di numeri reali. Nel caso in cui $w_\alpha \geq 0$ per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$ definiamo la somma come*

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} w_\alpha := \sup \left\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} w_\alpha : \mathcal{B} \text{ è finito, } \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \right\}.$$

Diciamo che $E_{\mathcal{A}}$ è una famiglia sommabile se entrambe le famiglie a termini positivi

$$E_{\mathcal{A}}^+ = \{w_\alpha^+ : \alpha \in \mathcal{A}\}, \quad E_{\mathcal{A}}^- = \{w_\alpha^- : \alpha \in \mathcal{A}\},$$

(con $w^+ = \max\{w, 0\}$ e $w^- = \max\{-w, 0\}$) hanno somme finite. Per una famiglia sommabile definiamo la somma come

$$\sum_{\alpha \in A} w_\alpha := \sum_{\alpha \in A} w_\alpha^+ - \sum_{\alpha \in A} w_\alpha^-.$$

Definizione 4.9 (Funzione salto). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è una funzione salto se esistono due famiglie sommabili*

$$\{u_t : t \in [a, b[\} \quad e \quad \{v_t : t \in [a, b]\}$$

tali che per ogni $x \in [a, b]$ abbiamo

$$f(x) = \sum_{t \in [a, x[} u_t + \sum_{t \in [a, x]} v_t.$$

Osservazione 4.10. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione salto con $\{u_t : t \in [a, b[\}$ e $\{v_t : t \in [a, b]\}$ le famiglie associate ad f come nella Definizione 4.9. Allora valgono le seguenti proprietà:

1. $v_a = f(a)$;

2. per ogni $x \in]a, b]$, $v_x = f(x) - f(x-)$;

3. per ogni $x \in [a, b[$, $u_x = f(x+) - f(x)$.

In particolare segue che f è continua in $x \in]a, b[$ se e solo se $u_x = v_x = 0$, che f è continua in a se e solo se $u_a = 0$ e che f è continua in b se e solo se $v_b = 0$. Osserviamo inoltre che se f, g sono funzioni salto e $c \in \mathbb{R}$, allora anche $f + g$ e cf sono funzioni salto.

Proposizione 4.11. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione salto con $\{u_t : t \in [a, b[\}$ e $\{v_t : t \in [a, b]\}$ le famiglie associate ad f. Allora f è a variazione limitata,*

$$V(f) = \sum_{t \in [a,b[} |u_t| + \sum_{t \in]a,b]} |v_t|,$$

e f' è nulla $\mathcal{L}^1$-q.o. in $[a, b]$.

La dimostrazione è omessa e si può trovare, ad esempio, in [6].

Teorema 4.12. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione crescente. Allora esistono una funzione salto $f_s : [a, b] \to \mathbb{R}$, una funzione assolutamente continua $f_{ac} : [a, b] \to \mathbb{R}$ ed una funzione $f_c : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenziabile $\mathcal{L}^1$-q.o. in $]a, b[$ con derivata nulla tali che*

$$f = f_s + f_{ac} + f_c.$$

Inoltre, le tre funzioni f_s, f_{ac} e f_c sono crescenti. Infine, la decomposizione è unica a meno di costati additive. Infatti se imponiamo che $f_{ac}(a) = f(a)$ e $f_s(a) = f_c(a) = 0$ la decomposizione è unica.

Dimostrazione. Poniamo $v_a = 0$, $v_t = f(t) - f(t-)$ per ogni $t \in]a, b]$ e $u_t = f(t+) - f(t)$ per ogni $t \in [a, b[$. Dato che f è una funzione crescente, tutti i v_t, u_t che abbiamo appena definito sono positivi. Inoltre, presa una qualunque famiglia finita $a < t_0 < \cdots < t_n < b$, si ha

$$\sum_{i=0}^{n} (u_{t_i} + v_{t_i}) = \sum_{i=0}^{n} (f(t_i+) - f(t_i-)) \leq f(b) - f(a),$$

ovvero le somme su famiglie finite sono limitate da $f(b) - f(a)$. Quindi $\{u_t\}_{t \in [a,b[}$ e $\{v_t\}_{t \in]a,b]}$ sono famiglie sommabili. Poniamo

$$f_s = \sum_{t \in [a,b[} u_t + \sum_{t \in]a,b]} v_t.$$

In questo modo otteniamo una funzione salto tale che per ogni $x \in [a, b]$ vale

$$f_s(x) = f(a+) - f(a) + \sum_{t \in]a,x[} (f(t+) - f(t-)) + f(x) - f(x-). \tag{4.2}$$

Definiamo ora $F = f - f_s$ e mostriamo che sia f_s che F sono funzioni crescenti. Prendiamo $x, y \in [a, b]$ con $x < y$; per ogni famiglia finita $x = t_0 < \cdots < t_{n+1} = y$ vale

$$\begin{aligned} f(x+) - f(x) + \sum_{i=1}^{n} (f(t_i+) - f(t_i-)) + f(y) - f(y-) = \\ = f(y) - f(x) - \sum_{i=1}^{n+1} (f(t_i-) - f(t_{i-1}+)) \leq f(y) - f(x). \end{aligned}$$

A questo punto, sfruttando la (4.2), otteniamo

$$\begin{aligned} f_s(y) - f_s(x) = f(x+) - f(x) + \sum_{t \in]x,y[} (f(t+) - f(t-)) + f(y) - f(y-) \leq \\ \leq f(y) - f(x). \end{aligned}$$

Da questo segue

$$F(y) = f(y) - f_s(y) \geq f(x) - f_s(x) = F(x),$$

ovvero F è crescente. Inoltre, dal momento che f è crescente, per la (4.2) è evidente che anche f_s è crescente. Risulta che

$$f_s(a) = v_a = 0,$$

$$f_s(t) - f_s(t-) = v_t = f(t) - f(t-) \quad \forall\, t \in]a, b],$$

$$f_s(t+) - f_s(t) = u_t = f(t+) - f(t) \quad \forall\, t \in [a, b[.$$

Allora

$$F(a) = 0,$$

$$F(t) - F(t-) = 0 \quad \forall\, t \in]a, b],$$

$$F(t+) - F(t) = 0 \quad \forall\, t \in [a, b[.$$

Questo significa che F è continua su $]a, b[$. Inoltre, la decomposizione $f = F + f_s$ con F continua e f_s una funzione salto è unica a meno di costanti additive. Per dimostrarlo consideriamo una seconda decomposizione $f = \overline{F} + \overline{f_s}$. Allora $F - \overline{F} = \overline{f_s} - f_s$ è una funzione continua su $]a, b[$. Indichiamo con $\{u_t\}_{t \in [a,b[}$, $\{v_t\}_{t \in]a,b]}$ le famiglie sommabili corrispondenti a f_s e con $\{\overline{u_t}\}_{t \in [a,b[}$, $\{\overline{v_t}\}_{t \in]a,b]}$ quelle corrispondenti a $\overline{f_s}$. Dalle proprietà delle funzioni salto che abbiamo visto nell'Osservazione 4.10 segue

$$u_t = v_t = \overline{u_t} = \overline{v_t} = 0 \quad \forall\, t \in]a, b[.$$

Da qui otteniamo, per ogni $x \in [a, b]$,

$$\overline{f_s}(x) - f_s(x) = \sum_{t \in [a,x[} \overline{u_t} + \sum_{t \in [a,x]} \overline{v_t} - \left(\sum_{t \in [a,x[} u_t + \sum_{t \in [a,x]} v_t \right) = \overline{u_a} + \overline{v_a} - u_a - v_a,$$

ovvero la differenza $\overline{f_s} - f_s$ è costante e quindi anche la differenza $F - \overline{F}$ è costante. Da questo possiamo concludere che la rappresentazione è unica a meno di costanti additive. Dal momento che f è una funzione crescente, per il Teorema 1.13 sappiamo che f' è una funzione sommabile rispetto a $\mathcal{L}^1$. Inoltre, per la Proposizione 4.11, $f' = 0$ $\mathcal{L}^1$-q.o. su $[a, b]$, visto che f_s è una funzione salto. Quindi $f' = F' + f_s' = F'$ $\mathcal{L}^1$-q.o. su $[a, b]$. Poniamo, per ogni $x \in [a, b]$,

$$f_{ac}(x) = f(a) + \int_a^x f' d\mathcal{L}^1.$$

Per come è definita, f_{ac} è crescente e assolutamente continua. Infine, poniamo

$$f_c = F - f_{ac} = f - f_s - f_{ac}.$$

Prendiamo $x, y \in [a, b]$ con $x \leq y$; grazie al Teorema 1.13 otteniamo

$$f_{ac}(y) - f_{ac}(x) = \int_x^y f' d\mathcal{L}^1 = \int_x^y F' d\mathcal{L}^1 \leq F(y) - F(x),$$

da cui segue

$$f_c(x) = F(x) - f_{ac}(x) \leq F(y) - f_{ac}(y) = f_c(y),$$

ovvero f_c è una funzione crescente. Inoltre, per come abbiamo definito f_{ac}, vale $f_{ac}' = F'$ $\mathcal{L}^1$-q.o. su $[a, b]$, da cui segue $f_c' = F' - f_{ac}' = 0$ $\mathcal{L}^1$-q.o. su $[a, b]$. Mostriamo che anche la decomposizione $F = f_{ac} + f_c$ è unica a meno di costanti additive, da cui segue l'unicità della decomposizione complessiva. Consideriamo una seconda decomposizione $F = \overline{f_{ac}} + \overline{f_c}$. Allora la funzione $f_{ac} - \overline{f_{ac}} = f_c - \overline{f_c}$ è assolutamente continua ed ha derivata nulla quasi ovunque. Dalla Proposizione 4.7 segue che essa è una costante e questo conclude la dimostrazione. □

Corollario 4.13. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione a variazione limitata. Allora esistono una funzione salto $f_s : [a, b] \to \mathbb{R}$, una funzione assolutamente continua $f_{ac} : [a, b] \to \mathbb{R}$ ed una funzione $f_c : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenziabile $\mathcal{L}^1$-q.o. in $]a, b[$ con derivata nulla tali che*

$$f = f_s + f_{ac} + f_c.$$

Inoltre la decomposizione è unica a meno di costati additive. Infatti se imponiamo che $f_{ac}(a) = f(a)$ e $f_s(a) = f_c(a) = 0$ la decomposizione è unica.

Capitolo 5

Decomposizione delle Misure e Risultati di Rappresentazione

In questo capitolo introduciamo le misure singolari e assolutamente continue, insieme alla decomposizione di Lebesgue, per poi applicare questi concetti alla misura di Lebesgue-Stieltjes. Costruiremo una decomposizione specifica che mette in risalto le proprietà di tale misura. Infine mostreremo che questa decomposizione corrisponde alle misure di Lebesgue-Stieltjes associate alla decomposizione delle funzioni crescenti costruita in precedenza. Queste due prospettive opposte ma equivalenti rivelano il legame profondo tra funzione e misura associata.

5.1 Decomposizione di misure

Iniziamo questa sezione con definizioni e risultati generali sulla decomposizione delle misure. Questi strumenti teorici sono essenziali per affrontare la decomposizione della misura di Lebesgue-Stieltjes.

Definizione 5.1 (Misura assolutamente continua rispetto a un'altra). *Siano $(X, \mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e λ, μ due misure definite su $\mathfrak{M}$. Diciamo che μ è assolutamente continua rispetto a λ e scriviamo $\mu \ll \lambda$, se per ogni $E \in \mathfrak{M}$ tale che $\lambda(E) = 0$ si ha anche $\mu(E) = 0$.*

Definizione 5.2 (Misure singolari)**.** *Siano $(X, \mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e λ, μ due misure definite su $\mathfrak{M}$. Diciamo che μ è singolare rispetto a λ e scriviamo $\mu \perp \lambda$, se esiste $S \in \mathfrak{M}$ tale che*

$$\lambda(S) = \mu(X \setminus S) = 0.$$

Teorema 5.3. *Siano (X, μ) uno spazio misurabile e λ, μ due misure σ-finite definite su $\mathfrak{M}$. Allora valgono i seguenti fatti:*

1. *esiste una ed una sola coppia $(\mu_{a,\lambda}, \mu_{s,\lambda})$ di misure definite su $\mathfrak{M}$ tali che*
$$\mu = \mu_{a,\lambda} + \mu_{s,\lambda}, \quad \mu_{a,\lambda} \ll \lambda, \quad \mu_{s,\lambda} \perp \lambda;$$
2. *esiste (a meno di insiemi di misura nulla rispetto a λ) una ed una sola funzione λ-misurabile $\phi : X \to \mathbb{R}$ con $\phi \geq 0$ tale che per ogni $E \in \mathfrak{M}$ vale*
$$\mu_{a,\lambda}(E) = \int_E \phi d\lambda;$$
3. *per ogni $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabile e per ogni $f : X \to \mathbb{C}$ μ-sommabile vale*
$$\int f d\mu = \int f\phi d\lambda + \int f d\mu_{s,\lambda}.$$

Il teorema è riportato senza dimostrazione; per i dettagli rimandiamo a [5].

Definizione 5.4 (**Decomposizione di Lebesgue**)**.** *Siano (X, μ) uno spazio misurabile e λ, μ due misure σ-finite definite su $\mathfrak{M}$. La coppia $(\mu_{a,\lambda}, \mu_{s,\lambda})$, caratterizzata nel teorema precedente, si chiama decomposizione di Lebesgue di μ rispetto a λ. Infine la funzione λ-misurabile ϕ, caratterizzata nel teorema precedente, si chiama derivata di Radon-Nikodym di μ rispetto a λ e si denota con $\frac{d\mu}{d\lambda}$. Se $X = \mathbb{R}$, $\mathfrak{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e $\lambda = \mathcal{L}^1$, poniamo $\mu_a := \mu_{a,\mathcal{L}^1}$ e $\mu_s := \mu_{s,\mathcal{L}^1}$.*

Corollario 5.5 (**Teorema di Radon-Nikodym**)**.** *Siano (X, μ) uno spazio misurabile e λ, μ due misure σ-finite definite su $\mathfrak{M}$ con $\mu \ll \lambda$. Allora per ogni $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabile e per ogni $f : X \to \mathbb{C}$ μ-sommabile vale*
$$\int f d\mu = \int f \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda.$$

Teorema 5.6. *Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente, μ_f la misura di Lebesgue-Stieltjes associata a f e Σ_f la σ-algebra su cui tale misura è definita. Allora valgono i seguenti fatti:*

1. *La misura μ_f si può decomporre in tre componenti*
$$\mu_f = \mu_{ac} + \mu_j + \mu_c,$$
tali che
$$\mu_{ac} \ll \mathcal{L}^1, \quad \mu_j \perp \mathcal{L}^1, \quad \mu_c \perp \mathcal{L}^1,$$
$$\mu_c(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad e \quad \mu_j(E) = \sum_{x \in E} \mu_j(\{x\}) \quad \forall E \in \Sigma_f.$$

2. *Se restringiamo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, per il Teorema 4.12 esiste ed è unica la decomposizione $f = f_s + f_{ac} + f_c$ tale che $f_{ac}(a) = a$ e $f_s(a) = f_c(a) = 0$. Allora sugli insiemi boreliani di $\mathbb{R}$*

$$\mu_j = \mu_{f_s}, \quad \mu_{ac} = \mu_{f_{ac}}, \quad \mu_c = \mu_{f_c}.$$

Le misure $\mu_{f_s}, \mu_{f_{ac}}, \mu_{f_c}$ sono le misure di Lebesgue-Stieltjes associate alle funzioni ottenute dalla decomposizione di f, estese a tutto $\mathbb{R}$ con $f(x) = f(a)$ per $x < a$ e $f(x) = f(b)$ per $x > b$ (e lo stesso per f_s, f_{ac}, f_c). Inoltre per ogni $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ valgono le seguenti uguaglianze:

$$\mu_{ac}(E) = \int_E f' d\mathcal{L}^1,$$

$$\mu_j(E) = \sum_{t \in E} \left(f(t+) - f(t-)\right) = \sum_{t \in E \cap D_f} \left(f(t+) - f(t-)\right),$$

dove D_f è l'insieme dei punti di discontinuità di f.

Dimostrazione. Mostriamo il punto 1 nel caso in cui μ_f sia totalmente finita, ovvero se $\mu_f(\mathbb{R}) < +\infty$. Applichiamo il Teorema 5.3 a μ_f rispetto alla misura $\mathcal{L}^1$. Allora esistono due misure μ_{ac} e μ_s tali che

$$\mu_{ac} \ll \mathcal{L}^1, \quad \mu_s \perp \mathcal{L}^1, \quad \mu_f = \mu_{ac} + \mu_s.$$

Definiamo ora una misura μ_j sulla σ-algebra Σ_f nel seguente modo

$$\mu_j(E) = \sup\{\mu_f(E \cap K) : K \subseteq \mathbb{R}, |K| \text{ al più numerabile}\} \quad \forall E \in \Sigma_f.$$

Vogliamo mostrare che μ_j è una misura e che $\mu_j \perp \mathcal{L}^1$. Dalla definizione di μ_j segue banalmente $\mu_j(\emptyset) = 0$. Consideriamo una successione disgiunta di insiemi $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma_f$ e poniamo

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Allora per ogni $K \subseteq \mathbb{R}$ con $|K|$ al più numerabile, $\{E_n \cap K\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione disgiunta e vale

$$\mu_f(E \cap K) = \mu_f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n \cap K)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_f(E_n \cap K) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_j(E_n).$$

Quindi passando all'estremo superiore sugli insiemi K con cardinalità al più numerabile otteniamo

$$\mu_j(E) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_j(E_n).$$

Viceversa, prendiamo $\epsilon > 0$. Dal momento che stiamo assumendo μ_f totalmente finita

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu_f(E_n) = \mu_f(E) < +\infty,$$

da cui segue che esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \mu_f(E_n) < \epsilon.$$

Inoltre per ogni $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ esiste un insieme di cardinalità al più numerabile $F_k \subseteq \mathbb{R}$ tale che

$$\mu_f(E_k \cap F_k) \geq \mu_j(E_k) - \frac{\epsilon}{N+1}.$$

Poniamo

$$F = \bigcup_{k=0}^{N} F_k \subseteq \mathbb{R}.$$

Esso è un insieme di cardinalità al più numerabile ed è tale che per ogni $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, $E_k \cap F_k \subseteq E \cap F$ sono insiemi disgiunti. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}\mu_j(E) \geq \mu_f(E \cap F) \geq \sum_{k=0}^{N} \left(\mu_j(E_k) - \frac{\epsilon}{N+1}\right) &= \sum_{k=0}^{N} \mu_j(E_k) - \epsilon \\ > \sum_{k=0}^{N} \mu_j(E_k) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mu_j(E_k) - 2\epsilon &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mu_j(E_k) - 2\epsilon.\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ϵ segue

$$\mu_j(E) \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \mu_j(E_k),$$

quindi vale anche l'uguaglianza e μ_j è una misura. Osserviamo che per ogni insieme $E \subset \mathbb{R}$ di cardinalità al più numerabile abbiamo $\mu_j(E) = \mu_f(E)$; inoltre $\mu_f(E) = \mu_s(E)$, visto che $\mathcal{L}^1(E) = 0$ e quindi, dato che $\mu_{ac} \ll \mathcal{L}^1$, anche $\mu_{ac}(E) = 0$. Resta da mostrare che $\mu_j \perp \mathcal{L}^1$. Per come è stata definita μ_j, per ogni $E \subseteq \mathbb{R}$ esiste una successione di insiemi di cardinalità al più numerabile $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $\lim_{n\to+\infty} \mu_j(K_n) = \mu_j(E)$. Prendendo $E = \mathbb{R}$ e ponendo

$$\overline{K} = \bigcup_{n\in N} K_n,$$

otteniamo che $\overline{K}$ è un insieme di cardinalità al più numerabile e soddisfa

$$\mu_j(\overline{K}) = \lim_{n\to+\infty} \mu_j(K_n) = \mu_j(\mathbb{R}),$$

ovvero vale

$$\mathcal{L}^1(\overline{K}) = \mu_j(\mathbb{R} \setminus \overline{K}) = 0,$$

da cui segue $\mu_j \perp \mathcal{L}^1$. Mostriamo un'altra proprietà dell'insieme $\overline{K}$: per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{K}$ si ha $\mu_f(\{x\}) = 0$. Supponiamo per assurdo che esista un $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{K}$ con $\mu_f(\{x\}) > 0$; allora vale

$$\mu_j(\mathbb{R}) \geq \mu_f(\overline{K} \cup \{x\}) > \mu_f(\overline{K}) = \mu_j(\overline{K}) = \mu_j(\mathbb{R}),$$

ma questa è una contraddizione. Infine, poniamo $\mu_c = \mu_s - \mu_j$. Dato che μ_s e μ_j sono misure, anche μ_c lo è, inoltre vale $\mu_c \perp \mathcal{L}^1$. Abbiamo quindi mostrato che $\mu_f = \mu_{ac} + \mu_j + \mu_c$, e resta da dimostrare che tale decomposizione ha le proprietà richieste. Abbiamo visto che μ_j è concentrata sull'insieme di cardinalità al più numerabile $\overline{K}$, e quindi che per ogni insieme $E \in \Sigma_f$ vale $\mu_j(E) = \mu_j(E \cap \overline{K})$. A questo punto, considerando tutto quello che abbiamo osservato fino ad ora, otteniamo

$$\begin{aligned}\mu_j(E) = \mu_j(E \cap \overline{K}) &= \mu_j\left(\bigcup_{x \in \overline{K}} (E \cap \{x\})\right) = \sum_{x \in \overline{K}} \mu_j(E \cap \{x\}) \\ &= \sum_{x \in E \cap \overline{K}} \mu_j(\{x\}) = \sum_{x \in E} \mu_j(\{x\}).\end{aligned}$$

Abbiamo precedentemente osservato che sugli insiemi di cardinalità al più numerabile $\mu_f = \mu_s = \mu_j$, quindi μ_c è una misura nulla sugli insiemi numerabili ed a maggior ragione è nulla sugli insiemi con un solo elemento. Questo completa le proprietà della decomposizione di μ_f nel caso in cui è totalmente finita.

Consideriamo ora una μ_f qualunque. Sia ora $\{X_h\}_{h \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma_f$ una successione disgiunta di insiemi di misura finita che ricoprono $\mathbb{R}$. Definiamo la misura $\mu_h = \mu_f|_{X_h}$ nel seguente modo

$$\mu_h(E) = \mu_f|_{X_h}(E) = \mu_f(E \cap X_h), \quad \forall E \in \Sigma_f.$$

Allora μ_h è totalmente finita e possiamo applicare quanto già dimostrato. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia $\mu_h = \mu_{ac}^h + \mu_j^h + \mu_c^h$ la sua decomposizione. Dato che $\mu_f = \sum_{h=0}^{+\infty} \mu_h$ ed essendo $\{X_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ una successione disgiunta, possiamo porre

$$\mu_{ac} = \sum_{h=0}^{+\infty} \mu_{ac}^h, \quad \mu_j = \sum_{h=0}^{+\infty} \mu_j^h, \quad \mu_c = \sum_{h=0}^{+\infty} \mu_c^h.$$

In questo modo otteniamo la decomposizione $\mu_f = \mu_{ac} + \mu_j + \mu_c$. Le misure che abbiamo costruito hanno le proprietà richieste. Questo segue facilmente dalle proprietà corrispondenti delle misure $\mu_{ac}^h, \mu_j^h, \mu_c^h$.

Passiamo a mostrare il punto 2. Per come abbiamo esteso $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a tutto $\mathbb{R}$ e per come abbiamo definito la misura di Lebesgue-Stieltjes, μ_f è nulla sui boreliani di $\mathbb{R} \setminus [a, b]$. Da questo si deduce che μ_{ac}, μ_j, μ_c sono anch'esse nulle sui boreliani di $\mathbb{R} \setminus [a, b]$. Quindi sarà sufficiente mostrare che le misure coincidono sui boreliani di $[a, b]$

per poi dedurre che coincidono su tutti i boreliani di $\mathbb{R}$. Consideriamo $f = f_{ac} + f_s + f_c$ la decomposizione di f secondo il Teorema 4.12. Per le proprietà della misura di Lebesgue-Stieltjes enunciate nel Teorema 2.4, per ogni boreliano $E \subseteq [a, b]$ vale

$$\mu_f(E) = \mu_{f_{ac}}(E) + \mu_{f_s}(E) + \mu_{f_c}(E).$$

Inoltre, dato che f_{ac} è una funzione assolutamente continua, allora è continua. Quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f(x) = f(x+) = f(x-)$ e da questo segue che per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha < \beta$ vale

$$\int_\alpha^\beta f'_{ac} d\mathcal{L}^1 = f_{ac}(\beta) - f_{ac}(\alpha) = \mu_{f_{ac}}([\alpha, \beta[) = \mu_{f_{ac}}([\alpha, \beta]) = \mu_{f_{ac}}(]\alpha, \beta[) = \mu_{f_{ac}}(]\alpha, \beta[).$$

Dunque, per ogni boreliano $E \subseteq \mathbb{R}$ otteniamo

$$\mu_{f_{ac}}(E) = \int_E f'_{ac} d\mathcal{L}^1,$$

da cui segue $\mu_{f_{ac}} \ll \mathcal{L}^1$. Consideriamo ora

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ non è continua in } x\}.$$

D_f è un insieme di cardinalità al più numerabile; inoltre, sempre per il Teorema 2.4, per ogni $a < \alpha < \beta < b$ vale

$$\begin{aligned}
\mu_{f_s}([\alpha, \beta[) = f_s(\beta-) - f_s(\alpha-) &= \sum_{t \in [a, \alpha[} (f(t+) - f(t-)) - \sum_{t \in [a, \beta[} (f(t+) - f(t-)) \\
&= \sum_{t \in [\alpha, \beta[} (f(t+) - f(t-)) = \sum_{t \in [\alpha, \beta[\cap D_f} (f(t+) - f(t-)) \\
&= \sum_{t \in [\alpha, \beta[\cap D_f} \mu_f(\{t\}) = \mu_f([\alpha, \beta[\cap D_f),
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $[\alpha, \beta[\cap D_f$ è un insieme di cardinalità numerabile. Similmente si possono mostrare le stesse proprietà per gli intervalli $]\alpha, \beta[$, $[\alpha, \beta]$, $]\alpha, \beta]$ e quindi per ogni insieme boreliano $E \subseteq [a, b]$ otteniamo

$$\mu_{f_s}(E) = \sum_{t \in E \cap D_f} (f(t+) - f(t-)) = \mu_f(E \cap D_f).$$

Da quello che abbiamo appena mostrato segue

$$\mathcal{L}^1(D_f) = \mu_{f_s}(\mathbb{R} \setminus D_f) = 0,$$

quindi si può concludere che $\mu_{f_s} \perp \mathcal{L}^1$. Ora vogliamo mostrare anche $\mu_{f_c} \perp \mathcal{L}^1$. Decomponiamo la misura μ_{f_c} come nel Teorema 5.3. Per non complicare ulteriormente la notazione poniamo $\mu_{f_c} = \lambda + \sigma$, con $\lambda \ll \mathcal{L}^1, \sigma \perp \mathcal{L}^1$. Mostriamo che λ è la misura nulla, da cui seguirà $\mu_{f_c} \perp \mathcal{L}^1$. Definiamo una funzione crescente $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < a, \\ \lambda([a, t[) & t \in [a, b], \\ g(b) & t > b. \end{cases}$$

Si può mostrare facilmente che g è anche una funzione continua. Inoltre $\lambda = \mu_g$ sui boreliani di $[a, b]$. Infatti, per ogni $a < \alpha < \beta < b$ otteniamo

$$\mu_g([\alpha, \beta[) = g(\beta-) - g(\alpha-) = g(\beta) - g(\alpha) = \lambda([\alpha, \beta[).$$

Lo stesso vale anche per gli intervalli $]\alpha, \beta[, [\alpha, \beta],]\alpha, \beta]$, quindi $\lambda(E) = \mu_g(E)$ per ogni boreliano E di $[a, b]$. In aggiunta, dato che $\lambda \ll \mathcal{L}^1$, esiste una funzione $\mathcal{L}^1$-sommabile ϕ tale che per ogni insieme boreliano E vale $\lambda(E) = \int_E \phi d\mathcal{L}^1$. Quindi per ogni $x \in [a, b]$ otteniamo

$$g(x) - g(a) = \mu_g([a, x[) = \lambda([a, x[) = \int_a^x \phi d\mathcal{L}^1,$$

da cui segue che g è assolutamente continua rispetto a $\mathcal{L}^1$. Ma allora la funzione crescente f_c ammette due decomposizioni: $0 + f_c$ e $g + (f_c - g)$. Per l'unicità della decomposizione di f_c nel Teorema 4.12, g deve essere costante, ovvero

$$g(x) = g(a) = f_c(a) = 0,$$

e quindi $\lambda = \mu_g = 0$. Abbiamo concluso che $\mu_{f_c} = \sigma$ e quindi $\mu_{f_c} \perp \mathcal{L}^1$. Dal momento che abbiamo provato che $\mu_{f_{ac}} \ll \mathcal{L}^1, \mu_{f_s} \perp \mathcal{L}^1, \mu_{f_c} \perp \mathcal{L}^1$, possiamo applicare l'unicità della decomposizione del Teorema 5.3 e otteniamo

$$\mu_{ac} = \mu_{f_{ac}}, \quad \mu_j + \mu_c = \mu_{f_s} + \mu_{f_c}. \tag{5.1}$$

Osserviamo che, dal momento che f_c è continua, per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\mu_{f_c}(\{x\}) = f_c(x+) - f_c(x-) = 0.$$

Da questo segue che f_c è nulla sugli insiemi numerabili. Riordinando l'uguaglianza (5.1) otteniamo

$$\mu_j - \mu_{f_s} = \mu_{f_c} - \mu_c.$$

Per le proprietà di μ_j, μ_c che abbiamo mostrato precedentemente possiamo dedurre che la misura $\mu_j - \mu_{f_s}$ è concentrata sull'insieme $\overline{K} \cup D_f$, mentre la misura $\mu_{f_c} - \mu_c$ è nulla sugli insiemi misurabili. Dato che vale

$$(\mu_{f_c} - \mu_c)(\overline{K} \cup D_f) = (\mu_j - \mu_{f_s})(\mathbb{R} \setminus (\overline{K} \cup D_f)) = 0,$$

allora otteniamo

$$(\mu_j - \mu_{f_s}) \perp (\mu_{f_c} - \mu_c),$$

e quindi le misure devono essere nulle. A questo punto, sfruttando quanto già dimostrato per $\mu_{f_{ac}}$ e μ_{f_c}, per ogni insieme boreliano E vale

$$\mu_{ac} = \mu_{f_{ac}}(E) = \int_E f'_{ac} d\mathcal{L}^1,$$

$$\mu_j(E) = \mu_{f_s}(E) = \sum_{t \in E \cap D_f} (f(t+) - f(t-)).$$

Questo completa definitivamente la dimostrazione. □

Corollario 5.7. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione crescente. Sia μ_f la misura di Lebesgue-Stieltjes associata all'estensione di f a tutto $\mathbb{R}$ con $f(x) = f(a)$ per $x < a$ e $f(x) = f(b)$ per $x > b$. Se f è assolutamente continua, allora*

$$\mu_f \ll \mathcal{L}^1 \quad e \quad f' = \frac{d\mu_f}{d\mathcal{L}^1}.$$

Dimostrazione. Per il Teorema 4.12, possiamo decomporre f in modo unico come

$$f = f_s + f_{ac} + f_c.$$

Visto che f è assolutamente continua otteniamo $f_s = 0$, $f_c = 0$ e $f_{ac} = f$. A questo punto, per il Teorema 5.6, possiamo decomporre μ_f come

$$\mu_f = \mu_j + \mu_{ac} + \mu_c,$$

dove

$$\mu_j = \mu_{f_s} = 0, \quad \mu_c = \mu_{f_c} \quad e \quad \mu_{ac} = \mu_{f_{ac}} = \mu_f.$$

Quindi $\mu_f \ll \mathcal{L}^1$ e per ogni $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vale

$$\mu_f(E) = \int_E f' d\mathcal{L}^1.$$

Da questo segue che f' è la derivata di Radon-Nikodym di μ_f rispetto a $\mathcal{L}^1$. □

5.2 Rappresentazioni delle misure

In questa sezione conclusiva mostriamo che la misura di Lebesgue-Stieltjes è una derivata debole della funzione crescente dalla quale deriva. Questa proprietà è estremamente significativa, poiché, essendo una caratterizzazione della misura di Lebesgue-Stieltjes, offre un approccio alternativo ed equivalente per dimostrare alcuni dei più importanti risultati che abbiamo ottenuto nel capitolo precedente.

Teorema 5.8. *Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente e μ_f la misura di Lebesgue-Stieltjes ad essa associata. Allora, presi $a, b \in \mathbb{R}$, per ogni $\phi \in C_c^\infty([a,b];\mathbb{R})$ vale*

$$\int_a^b f\phi' d\mathcal{L}^1 = -\int_a^b \phi d\mu_f.$$

Dimostrazione. Poniamo $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\alpha(t) = \mu_f([a,t[) = f(t-) - f(a-).$$

Dal Teorema di Fubini segue che per ogni $\phi \in C_c^\infty([a,b];\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha\phi' d\mathcal{L}^1 &= \int_a^b \mu_f([a,t[)\phi'(t) d\mathcal{L}^1(t) = \int_a^b \left(\int_{[a,t[} d\mu_f(s)\right)\phi'(t) d\mathcal{L}^1(t) \\ &= \int_{[a,b]} \left(\int_s^b \phi'(t) d\mathcal{L}^1(t)\right) d\mu_f(s) = -\int_a^b \phi(s) d\mu_f(s).\end{aligned}$$

Ricordiamo che dalla Proposizione 1.4 sappiamo che una funzione monotona è continua a meno di un insieme numerabile di punti. Quindi avremo che $f(t+) = f(t-) = f(t)$ per $\mathcal{L}^1$-q.o. $t \in [a,b]$. Grazie a questo possiamo completare il ragionamento

$$\begin{aligned}\int_a^b f\phi' d\mathcal{L}^1 &= \int_a^b f(t-)\phi'(t) d\mathcal{L}^1(t) = \int_a^b (\alpha(t) + f(a-))\,\phi'(t) d\mathcal{L}^1(t) \\ &= -\int_a^b \phi d\mu_f + f(a-)\int_a^b \phi' d\mathcal{L}^1 \\ &= -\int_a^b \phi d\mu_f + f(a-)\,(\phi(b) - \phi(a)) = -\int_a^b \phi d\mu_f.\end{aligned}$$

Questo completa la prova. □

Definizione 5.9 (Forma lineare positiva). *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e $T : C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ una forma lineare. Diciamo che T è positiva se per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ con $f \geq 0$ si ha $T(f) \geq 0$.*

Teorema 5.10 (Teorema di Rappresentazione di Riesz). *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $T : C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ una forma lineare positiva. Allora esiste una ed una sola $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ tale che per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ vale*

$$T(f) = \int_\Omega f d\mu.$$

Questo risultato è ben noto in letteratura; una dimostrazione si trova in [5].

Teorema 5.11. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione crescente. Allora esiste una ed una sola $\mu \in \mathcal{M}(]a,b[)$ tale che per ogni $g \in C_c^\infty(]a,b[;\mathbb{R})$ vale*

$$-\int_a^b g' f d\mathcal{L}^1 = \int_{]a,b[} g d\mu.$$

Inoltre, se estendiamo f a tutto $\mathbb{R}$ con $f(x) = f(a)$ per $x < a$ e $f(x) = f(b)$ per $x > b$, tale misura è esattamente la misura di Lebesgue-Stieltjes associata ad f.

Dimostrazione. Definiamo il funzionale $T : C_c^\infty(]a,b[,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che

$$T(g) = -\int_a^b g' f d\mathcal{L}^1.$$

T è una forma lineare dato che f è integrabile perché è una funzione monotona e $g \in C_c^\infty(]a,b[,\mathbb{R})$. Mostriamo ora che è anche positiva. Prendiamo $g \in C_c^\infty(]a,b[,\mathbb{R})$ con $g \geq 0$. Dal momento che g è a supporto compatto esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $g = 0$ fuori da $[\alpha,\beta] \subseteq]a,b[$. Risulta quindi, per ogni $h \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&-\int_a^b h\left(g\left(x+\frac{1}{h}\right) - g(x)\right) f(x) d\mathcal{L}^1(x) \\
&= h\left(-\int_\alpha^\beta g\left(x+\frac{1}{h}\right) f(x) d\mathcal{L}^1(x) + \int_\alpha^\beta g(x) f(x) d\mathcal{L}^1(x)\right) \\
&= h\left(-\int_\alpha^\beta g(x) f\left(x-\frac{1}{h}\right) d\mathcal{L}^1(x) + \int_\alpha^\beta g(x) f(x) d\mathcal{L}^1(x)\right) \\
&= h\int_\alpha^\beta g(x)\left(f(x) - f\left(x-\frac{1}{h}\right)\right) d\mathcal{L}^1(x) \geq 0.
\end{aligned}$$

Passando al limite per $h \to \infty$ otteniamo

$$-\int_a^b g' f d\mathcal{L}^1 \geq 0,$$

da cui segue che T è una forma lineare e positiva. A questo punto, per il Teorema 5.10, esiste una ed una sola $\mu \in \mathcal{M}(]a,b[)$ tale che per ogni $g \in C_c^\infty(]a,b[;\mathbb{R})$ vale

$$-\int_a^b g' f d\mathcal{L}^1 = \int_{]a,b[} g d\mu. \tag{5.2}$$

Consideriamo ora l'estensione di f a tutto $\mathbb{R}$ con $f(x) = f(a)$ per $x < a$ e $f(x) = f(b)$ per $x > b$. Per il Teorema 5.8, la misura di Lebesgue-Stieltjes μ_f associata ad f soddisfa la (5.2) e quindi la misura di cui abbiamo appena dimostrato l'esistenza e l'unicità è esattamente μ_f. □

Osservazione 5.12. Nel Teorema 5.11 di fatto abbiamo mostrato un metodo alternativo per ottenere la misura di Lebesgue-Stieltjes, a partire da una proprietà che la caratterizza, nel caso di una funzione crescente. Possiamo procedere in modo analogo a quanto fatto nei capitoli precedenti per estendere tale ragionamento alle funzioni a variazioni limitata e a quelle assolutamente continue.

Bibliografia

[1] W. Rudin: *Analisi Reale e Complessa*, Bollati Boringhieri, 1974.

[2] G. B. Folland: *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons Inc, 1999.

[3] D. L. Cohn: *Measure Theory*, Birkhäuser, 2010

[4] R. R. Reitano; *Foundation of Quantitative Finance: 1. Measure Spaces and Mea surable Functions*, Brandeis International Business School, 2017.

[5] M. Degiovanni: *Teoria della Misura*, Dispensa, Anno Accademico 2011/2012. Disponibile all'url

`https://www.dmf.unicatt.it/pub/users/degiova/preprint/tm.pdf`

[6] F. S. Priuli: *Un'Introduzione alla Teoria della Misura*, Dispensa, Anno Accademico 2010/2011. Disponibile all'url

`https://www.math.unipd.it/~priuli/misura_v2.pdf`

[7] R. Monti: *Analisi Reale*, Dispensa, Anno Accademico 2015/2016. Disponibile all'url

`https://www.math.unipd.it/~monti/AR_2015_16/AppuntiFinali.pdf`