Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Il teorema di Bayer-Billera sugli f-vettori di bandiera

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Chiar.mo/a Prof./.ssa
Fabrizio Caselli

Presentata da:
Filippo Casadei

Anno Accademico 2024/2025

Introduzione

Un politopo convesso è l'inviluppo convesso di un numero finito di punti in $\mathbb{R}^d$. I politopi convessi sono la naturale generalizzazione in dimensioni più alte di oggetti geometrici ampiamente studiati fin dall'antichità come i poligoni convessi in due dimensioni e i poliedri convessi in tre dimensioni. La nota formula di Eulero che lega il numero di vertici, lati e facce di un poliedro fu definita da Victor Klee come "the first landmark", cioè la prima pietra miliare, della teoria dei politopi convessi. Ad oggi i politopi convessi sono argomento di studio della combinatoria e della geometria discreta.

Uno dei problemi storici della teoria dei politopi convessi è quello della caratterizzazione dei vettori delle facce; questi vettori, chiamati f-vettori, contano il numero di facce di ogni dimensione e sono invarianti per equivalenza combinatoria. Nel 1906 Steinitz dimostrò il teorema di caratterizzazione degli f-vettori per politopi tridimensionali. In dimensione 4 tale problema è ancora aperto.

Lo spazio affine generato dagli f-vettori dei d-politopi ha dimensione $d-1$: l'unica relazione affine soddisfatta da tutti gli f-vettori è l'equazione di Eulero-Poincaré. Analogamente, sappiamo che la dimensione dello spazio affine generato dagli f-vettori di d-politopi simpliciali è $\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$. Infatti, le equazioni di Dehn-Sommerville forniscono le uniche relazioni affini soddisfatte da tutti gli f-vettori di d-politopi simpliciali.

Queste relazioni devono il loro nome a Max Dehn, che per primo ne congetturò l'esistenza nel 1905, e a Duncan Sommerville, che fu il primo a trovarle e a dimostrarle nel 1927. Nella sua dimostrazione Sommerville applica la formula di Eulero-Poincaré agli intervalli del reticolo delle facce.

Nel 1971 Peter McMullen congetturò una caratterizzazione degli f-vettori di politopi simpliciali, dimostrata nel 1980 da Louis J. Billera e Carl W. Lee per la condizione sufficiente, e da Richard P. Stanley per quella necessaria. Questo teorema è spesso considerato come uno dei risultati più importanti della moderna teoria dei politopi convessi.

Negli anni settanta gli studi di Stanley sui complessi bilanciati e sui poset graduati contribuirono a spostare l'attenzione dagli f-vettori agli f-vettori di bandiera. Questi ultimi sono definiti nel caso di poset graduati di rango d e contano il numero di catene i cui elementi hanno rango in $S \subseteq \{0, 1, \ldots, d-1\}$.

Di particolare interesse è il caso dei poset Euleriani, ovvero poset graduati in cui ogni intervallo non banale ha tanti elementi di rango pari quanti quelli di rango dispari. Nel 1985 Bayer e Billera, seguendo l'idea già usata da Sommerville di applicare la formula di Eulero-Poincaré agli intervalli del poset, trovarono un insieme di relazioni soddisfatte dagli f-vettori di bandiera di un poset Euleriano note come "equazioni di Dehn-Sommerville generalizzate".

Nel teorema di Bayer-Billera sugli f-vettori di bandiera (1985) si dimostra che la dimensione dello spazio affine degli f-vettori di bandiera di un poset Euleriano di rango d è $F_d - 1$, dove F_d è il d-esimo numero di Fibonacci. Infatti Bayer e Billera dimostrarono che il numero di bandiera $f_T(P)$ con $T \subseteq \{0, 1, \ldots, d-1\}$ di un poset Euleriano di rango d è una combinazione lineare dei numeri di bandiera $f_S(P)$, dove $S \subseteq \{0, 1, \ldots, d-2\}$ tale che non contiene due indici consecutivi, motivo per il quale nella dimensione di questo spazio compare il d-esimo numero di Fibonacci. Nell'ingegnosa dimostrazione di questo teorema Bayer e Billera costruirono una base di d-politopi i cui f-vettori di bandiera sono affinemente indipendenti, provando così che una tale base può essere costruita rimanendo nella classe dei politopi. Per costruire questa base si usano politopi ottenuti iterando piramidi e bipiramidi a partire da un punto che indichiamo con la lettera P. I d-politopi cercati corrispondono alle possibili parole di lunghezza $d+1$ nelle lettere P e B, dove P indica "costruire una piramide" e B "costruire una bipiramide", in modo tale che la parola termini sempre in P^2 e che non abbia mai due B consecutive. La parte difficile della dimostrazione del teorema consiste nel provare che gli f-vettori di bandiera di questi politopi sono affinemente indipendenti.
In questa tesi ci concentreremo sul lavoro di Bayer e Billera sugli f-vettori di bandiera, con particolare enfasi sulle equazioni di Dehn-Sommerville generalizzate al caso dei poset Euleriani, e sulla dimostrazione del teorema sull'affine indipendenza degli f-vettori di bandiera di d-politopi.
Nel primo capitolo introduciamo le prime definizioni riguardanti i politopi convessi, in particolare ci concentreremo sulle possibili relazioni tra di essi definenedo quando due politopi sono affinemente isomorfi e combinatoriamente equivalenti. In seguito introduciamo la definizione di vettore delle facce o f-vettore di un politopo e del suo analogo combinatorio che è l'h-vettore e parleremo brevemente della polarità. La parte finale di questo capitolo sarà dedicata agli esempi.
Nel secondo capitolo vedremo alcuni dei risultati più importanti sugli f-vettori come la formula di Eulero-Poincaré e le equazioni di Dehn-Sommerville per politopi simpliciali. In seguito ci concentreremo sugli f-vettori di bandiera di poset graduati con particolare

interesse al caso dei poset Euleriani. Daremo la definizione di reticolo delle facce di un politopo e vedremo che il reticolo delle facce è sempre Euleriano. Infine, seguendo il lavoro di Bayer e Billera troveremo le equazioni di Dehn-Sommerville generalizzate. Concluderemo il capitolo dimostrando che la dimensione dello spazio affine generato dagli f-vettori di bandiera di un poset Euleriano di rango d è al più $F_d - 1$.
Nel terzo capitolo ci occuperemo di studiare alcune operazioni dei politopi convessi: vedremo come costruire piramidi e bipiramidi sopra un politopo e cosa significa effettuare una suddivisione stellare di un politopo simpliciale rispetto ad una sua faccia. In ognuno di questi tre casi osserveremo come cambiano l'f-vettore e l'h-vettore e faremo alcuni esempi. Dimostreremo poi come usare la suddivisione stellare per costruire una base dello spazio di Dehn-Sommerville e dell'iperpiano di Eulero.
L'ultimo capitolo sarà dedicato alla dimostrazione del teorema di Bayer-Billera sugli f-vettori di bandiera. In particolare dimostreremo che la dimensione dello spazio affine generato dagli f-vettori di bandiera di un poset Euleriano di rango d è $F_d - 1$ ed esibiremo una base di d-politopi i cui f-vettori di bandiera siano affinemente indipendenti, provando che anche la dimensione dello spazio affine generato dagli f-vettori di bandiera di d-politopi ha la stessa dimensione.

Indice

Capitolo 1

Preliminari ed esempi

Nel primo capitolo introdurremo le nozioni e le definizioni di base sui politopi convessi e stabiliremo le notazioni che saranno usate nei prossimi capitoli. Per questa introduzione faremo affidamento a [Zie94], al quale si rimanda il lettore per le dimostrazioni e i dettagli che saranno omessi.

1.1 Prime definizioni

Sia $\mathbb{R}^d$ lo *spazio vettoriale* d-dimensionale su $\mathbb{R}$.

Definizione 1.1. Sia H un sottoinsieme di $(\mathbb{R}^d, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^d$; diremo che H è

- un semispazio aperto (chiuso) se esistono opportuni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^d$ tali che $H = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, y \rangle > \alpha\right\}$ (rispettivamente $H = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, y \rangle \geq \alpha\right\}$),
- un iperpiano se esistono opportuni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^d$ tali che $H = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, y \rangle = \alpha\right\}$.

Chiameremo *sottospazi affini* i traslati dei sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^d$: se H è un sottospazio affine non vuoto allora esistono un sottospazio vettoriale $V \subseteq \mathbb{R}^d$ di dimensione $r \leq d$ e un $x \in \mathbb{R}^d$ tali che $H = x + V$. Diremo quindi che H è un sottospazio affine di dimensione r.

Definizione 1.2. (Combinazione affine). Siano $x_1, \ldots, x_n$ punti in $\mathbb{R}^d$. Si definisce *combinazione affine* una combinazione lineare $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tali che $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Definizione 1.3. (Inviluppo affine). Sia $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un sottoinsieme. Si definisce *inviluppo affine* di A, e si indica con $\mathrm{aff}(A)$, l'intersezione di tutti i sottospazi affini che contengono A, ovvero il più piccolo sottospazio affine che contiene A.

Osservazione 1.4. L'inviluppo affine è un sottospazio affine invariante per traslazione, ossia $\mathrm{aff}(x + A) = \mathrm{aff}(A)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$.

Definizione 1.5. (Punti affinemente indipendenti). Diremo che un insieme di $n \geq 0$ punti è *affinemente indipendente* se il suo inviluppo affine ha dimensione $n - 1$, vale a dire che ogni sottoinsieme proprio ha un inviluppo affine più piccolo.

L'affine indipendenza equivale a richiedere che nessuno dei punti sia una combinazione affine dei rimanenti. Ogni sottospazio affine di dimensione r contiene $r + 1$ punti affinemente indipendenti, mentre ogni sottoinsieme con più di $r + 1$ punti è affinemente dipendente.

Osservazione 1.6. Se $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, dove $a_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{id})$, allora il massimo numero di vettori affinemente indipendenti in A è il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1d} \\ 1 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kd} \end{pmatrix}$$

Definizione 1.7. (Segmento). Siano $x, y \in \mathbb{R}^d$. Definiamo il *segmento* di estremi x e y come l'insieme

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Definizione 1.8. (Insieme convesso). Un insieme di punti $K \subseteq \mathbb{R}^d$ si dice *convesso* se per ogni coppia di punti $x, y \in K$ il segmento $[x, y]$ è contenuto in K.

Osservazione 1.9. L'intersezione di due insiemi convessi è convessa.

Definizione 1.10. (Combinazione convessa). Siano $x_1, \ldots, x_n$ punti in $\mathbb{R}^d$. Si definisce *combinazione convessa* una combinazione lineare $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tale che $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$.

Definizione 1.11. (Inviluppo convesso). Sia $K \subseteq \mathbb{R}^d$. L'*inviluppo convesso* di K è l'intersezione di tutti i sottoinsiemi convessi che contengono K, ovvero il più piccolo sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^d$ che contiene K:

$$\mathrm{conv}(K) := \bigcap \left\{K' \subseteq \mathbb{R}^d \mid K \subseteq K',\ K' \text{ convesso}\right\}$$

Vogliamo ora provare che l'inviluppo convesso di un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^d$ è l'insieme di tutte le combinazioni convesse dei punti di K. Per dimostrarlo faremo uso della seguente proposizione:

Proposizione 1.12. *Un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^d$ è convesso se e solo se ogni combinazione convessa di punti di S appartiene ancora a S.*

Dimostrazione. Se ogni combinazione convessa di punti di S è ancora in S, allora in particolare ogni combinazione convessa di due punti qualsiasi di S è ancora in S e quindi S è convesso per definizione.
Viceversa, assumiamo che S sia convesso. Proveremo per induzione su n che ogni punto di $\mathbb{R}^d$ che è combinazione convessa di n punti di S appartiene ancora ad S. Per $n = 1$ è ovvio poichè $1 \cdot x = x \in S$; mentre per $n = 2$ segue per definizione di insieme convesso. Sia dunque $n \geq 3$, assumiamo che ogni combinazione convessa con meno di n punti di S sia ancora in S, e sia

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \quad \text{dove } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \text{ e } \lambda_i \geq 0 \ \forall\ i = 1, \ldots, n$$

una combinazione convessa di punti di S. Se $\lambda_i = 0$ per qualche i, allora x è combinazione convessa di meno di n punti di S, e quindi x appartiene ad S per ipotesi induttiva. Se $\lambda_i \neq 0$ per ogni i, allora $\lambda_i < 1$ per ogni i, da cui segue che $1 - \lambda_1 > 0$. Perciò, possiamo scrivere:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} x_i.$$

Quindi

$$y := \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} x_i$$

è una combinazione convessa dato che $\lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1 - \lambda_1$, e quindi $y \in S$ per ipotesi. Ma per convessità di S $\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) y \in S$, cioè $x \in S$. □

Possiamo ora dare la seguente descrizione di inviluppo convesso di un insieme:

Proposizione 1.13. *Sia $K \subseteq \mathbb{R}^d$. L'inviluppo convesso di K, $\operatorname{conv}(K)$, è l'insieme di tutte le combinazioni convesse dei punti di K.*

Dimostrazione. Denotiamo con C l'insieme di tutte le combinazioni convesse dei punti di K, vogliamo provare che $C = \operatorname{conv}(K)$.
Per $(\subseteq)$ osserviamo che poichè $K \subseteq \operatorname{conv}(K)$, ogni $x \in C$ è anche una combinazione convessa dei punti dell'insieme convesso $\operatorname{conv}(K)$; l'implicazione $(\Rightarrow)$ della proposizione precedente mi permette di conludere che $C \subseteq \operatorname{conv}(K)$.
$(\supseteq)$ Per questa inclusione è sufficiente mostrare che C è un insieme conveso che contiene K. Ogni $x \in K$ può essere scritto come $x = 1 \cdot x$ come combinazione convessa dei punti di K, segue che $K \subseteq C$. Per vedere che $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ è un elemento di C per ogni $x_1, x_2 \in C$

e per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tali che $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ricordiamo che per definzione x_1 e x_2 sono combinazioni convesse di punti di K, quindi

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i, \;\; x_2 = \sum_{i=n+1}^{m} \mu_i y_i, \quad \text{con } y_i \in K \text{ e } m \geq n,$$

dove

$$\mu_i \geq 0 \; \forall i, \;\; \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1, \;\; \sum_{i=n+1}^{m} \mu_i = 1.$$

Ma allora

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \mu_i y_i + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_2 \mu_i y_i,$$

da cui

$$\lambda_1 \mu_i \geq 0, \;\; \lambda_2 \mu_i \geq 0 \;\; \text{e} \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \mu_i + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_2 \mu_i = 1.$$

Questo mostra che $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ è una combinazione convessa di punti $y_1, \ldots, y_m$ di K, quindi $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$, come volevamo. □

Definizione 1.14. (Simplesso). Un *k-simplesso* σ è l'inviluppo convesso di $k+1$ punti affinemente indipendenti $\sigma = \operatorname{conv}\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$.

Una *faccia* di σ è l'inviluppo convesso di un sottoinsieme non vuoto di $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$; diciamo che è una *faccia propria* se il sottoinsieme è propriamente contenuto in $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$.

Definizione 1.15. (Complesso simpliciale). Un complesso simpliciale Δ è una collezione finita di simplessi K tali che

- per ogni simplesso $\sigma \in K$, se τ è una faccia di σ allora $\tau \in K$;
- per ogni σ_0, $\sigma_1 \in K$ $\sigma_0 \cap \sigma_1$ è o una faccia comune di σ_0 e σ_1, oppure è vuota.

Di seguito daremo due definizioni equivalenti di politopo: l'equivalenza tra le due definizioni è sancita dal Teorema fondamentale sui politopi 1.19.

Definizione 1.16. ($\mathcal{V}$-politopo). Un $\mathcal{V}$-politopo è l'inviluppo convesso di un insieme finito di punti in $\mathbb{R}^d$.

Definizione 1.17. ($\mathcal{H}$-poliedro). Un $\mathcal{H}$-poliedro è l'intesezione di un numero finito di semispazi chiusi di $\mathbb{R}^d$.

Definizione 1.18. ($\mathcal{H}$-politopo). Un $\mathcal{H}$-politopo è un $\mathcal{H}$-poliedro limitato, vale a dire che esiste un $M > 0$ tale che $\|x\| \leq M$, per ogni x.

Un politopo è un insieme di punti $P \subseteq \mathbb{R}^d$ che può essere definito sia come $\mathcal{V}$-politopo, che come $\mathcal{H}$-politopo.

Teorema 1.19. *Un sottoinsieme di punti $P \subseteq \mathbb{R}^d$ è un $\mathcal{V}$-politopo se e solo se è un $\mathcal{H}$-politopo.*

La dimostrazione è più lunga di quanto ci si possa aspettare, quindi rimandiamo a [Zie94] per questa.
Dato che i politopi di cui tratteremo saranno sempre convessi adotteremo la scelta fatta in [Grü03] e parleremo di politopi intendendo sempre politopi convessi.

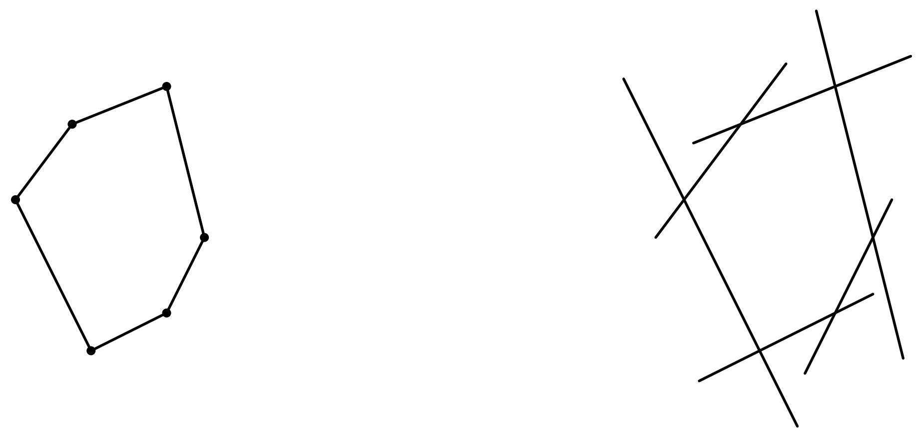


Figura 1.1: *Un esagono costruito seguendo le due definizioni: come $\mathcal{V}$-politopo, dato dall'inviluppo convesso di sei punti (a sinistra), e come $\mathcal{H}$-politopo, ottenuto intersecando sei semipiani limitati dalle sei rette (a destra).*

A seconda dei casi una certa proprietà sui politopi potrebbe essere più immediata da dimostrare con una delle due definizioni piuttosto che con l'altra. Nella prossima proposizione il primo enunciato si dimostra facilmente usando la definizione di $\mathcal{V}$-politopo, ma non con quella di $\mathcal{H}$-politopo, mentre per il secondo vale l'opposto.

Proposizione 1.20.

1. *Sia $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un politopo e $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una trasformazione affine. Allora $\pi(P)$ è un politopo.*

2. *L'intersezione di un politopo con un sottospazio affine è un politopo.*

Dimostrazione.

1. Data π trasformazione affine vale $\pi(tx + (1-t)y) = t\pi(x) + (1-t)\pi(y)$ per ogni $x, y \in P$ e $t \in [0,1]$. Infatti questo è vero sia per la applicazioni lineari, che per le traslazioni. Quindi, se S è un sottoinsieme finito e $P = \mathrm{conv}(S)$, $\pi(P) = \mathrm{conv}(\pi(S))$.

2. Basta osservare che poichè un iperpiano è l'intersezione di due semispazi, l'intersezione di un politopo P con un sottospazio affine è l'intersezione tra un poliedro limitato e un numero finito di semispazi.

$\square$

La *dimensione di un politopo* è la dimensione del suo inviluppo affine. Un *d-politopo* è un politopo di dimensione d immerso in $\mathbb{R}^n$ per qualche $n \geq d$.

Definizione 1.21. (Faccia). Sia $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un politopo, una *faccia* di P è un insieme della forma $F = P \cap \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle c, x\rangle = c_0\right\}$, dove $\langle c, x\rangle \leq c_0$ è una disuguaglianza soddisfatta per ogni $x \in P$.

La dimensione di una faccia F è la dimensione del suo inviluppo affine, vale a dire $\dim(F) = \dim(\text{aff}(F))$. Dalla disuguaglianza $\langle 0, x\rangle \leq\ 1$, deduciamo che $\emptyset$ è sempre una faccia di P (per convenzione poniamo $\dim(\emptyset) = -1$); mentre da $\langle 0, x\rangle \leq 0$ osserviamo che P stesso è sempre una faccia di P. Queste facce sono chiamate *improprie*, mentre tutte le altre facce $F \subseteq P$ sono dette *proprie*. Tra le facce proprie quelle di dimensione $0, 1, \dim(P) - 2, \dim(P) - 1$ sono chiamate rispettivamente *vertici*, *spigoli*, *creste* e *faccette*.

Definizione 1.22. (Politopo simpliciale). Un d-politopo P è *simpliciale* se tutte le sue facce proprie sono simplessi, cioè ogni faccetta ha il minimo numero di d vertici.

Definizione 1.23. (Complesso poliedrale). Un *complesso poliedrale* $\mathscr{C}$ è una collezione finita di poliedri in $\mathbb{R}^d$ tale che:

- $\emptyset \in \mathscr{C}$,
- Se $P \in \mathscr{C}$, allora tutte le facce di P sono in $\mathscr{C}$,
- l'intersezione $P \cap Q$ di due poliedri P, $Q \in \mathscr{C}$ è una faccia sia di P che di Q ed appartiene quindi a $\mathscr{C}$.

La dimensione del complesso poliedrale è definita come $\dim(\mathscr{C}) := \max\{\dim(\text{aff}(P)) \mid P \in \mathscr{C}\}$.
L'insieme sottostante di $\mathscr{C}$ è l'insieme $|\mathscr{C}| := \bigcup_{P \in \mathscr{C}} P$.
Se tutti i poliedri sono politopi diremo che $\mathscr{C}$ è un *complesso politopale*.
Sia P un politopo del complesso politopale $\mathscr{C}$ diremo che P è una faccia di $\mathscr{C}$ e scriveremo $P \in \mathscr{C}$.

Definizione 1.24. (Complesso del bordo). Sia P un k-politopo. Il *complesso del bordo* di P, $\mathscr{B}(P)$, è il complesso politopale costituito da tutte le facce di P con dimensione al più $k - 1$.

Vediamo quali sono le possibili relazioni fra politopi.

Definizione 1.25. Due politopi $P \subseteq \mathbb{R}^n, Q \subseteq \mathbb{R}^m$ si dicono *affinemente isomorfi*, e scriveremo $P \cong Q$, se esiste una trasformazione affine $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x \mapsto Ax + b$ che sia una biiezione tra i punti di P e quelli di Q.

Osservazione 1.26. La trasformazione affine $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ non è necessariamente iniettiva o suriettiva negli spazi ambiente. In ogni caso deve restringersi ad una biiezione $\pi : \mathrm{aff}(P) \to \mathrm{aff}(Q)$.

Definizione 1.27. Due politopi $P \subseteq \mathbb{R}^n$, $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ si dicono *combinatoriamente equivalenti*, e scriveremo $P \simeq Q$, se esiste una biiezione φ tra le facce $\{F\}$ di P e le facce $\{F'\}$ di Q, tale che preservi l'inclusione (cioè tale che $F_1 \subseteq F_2$ se e solo se $\varphi(F_1) \subseteq \varphi(F_2)$). In tal caso diremo anche che P e Q sono *isomorfi* o *dello stesso tipo combinatorio.*

Osservazione 1.28. Se due politopi $P, Q \subseteq \mathbb{R}^d$ sono affinemente isomorfi allora sono combinatoriamente equivalenti. Infatti se esiste una trasformazione affine che è una biiezione tra i punti di P e Q, allora questa è anche una biiezione tra le facce che preserva l'inclusione. Il viceversa in generale non vale (si veda l'Esempio 1.33).

Osservazione 1.29. Se due politopi $P, Q \subseteq \mathbb{R}^d$, $P \simeq Q$, e φ è la biiezione tra le facce dei due politopi, allora per ogni faccia F di P vale $\dim(F) = \dim(\varphi(F))$ e $F \simeq \varphi(F)$.

Dato un politopo P un importante invariante per equivalenza combinatoria è il numero di k-facce, che denoteremo $f_k(P)$. Infatti se $P \simeq P'$, allora $f_k(P) = f_k(P')$ per ogni k. Per questo motivo è utile introdurre la seguente definizione:

Definizione 1.30. (f-vettore). Sia P un d-politopo. Detto f_i il numero di facce i-dimensionali (o i-facce) di P, $\boldsymbol{f}(P) := (f_0, \ldots, f_{d-1})$ è l'*f-vettore* di P.

Indicheremo con $f(\mathscr{P}^d)$ l'insieme di tutti gli f-vettori di tutti i politopi d-dimensionali. Analogamente useremo $f(\mathscr{P}^d_s)$ per indicare gli f-vettori dei politopi simpliciali di dimensione d. In seguito useremo sempre la convenzione $f_{-1} = 1$.
Introduciamo ora uno strumento che, pur mantenendo le stesse informazioni combinatorie dell'f-vettore, permette di esprimere in modo più compatto alcuni risultati fondamentali come le equazioni di Dehn-Sommerville (si veda il Capitolo 2).

Definizione 1.31. (h-vettore). Sia P un d-politopo. Definiamo l'h-vettore di P come $\boldsymbol{h}(P) := (h_0, h_1, \ldots, h_d)$, dove $h_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{d-j}{d-i} f_{j-1}$.

Dall'h-vettore è facile ricavare l'f-vettore tramite la relazione $f_j = \sum_{i=0}^{j+1} \binom{d-i}{d-j-1} h_i$.

1.2 Esempi

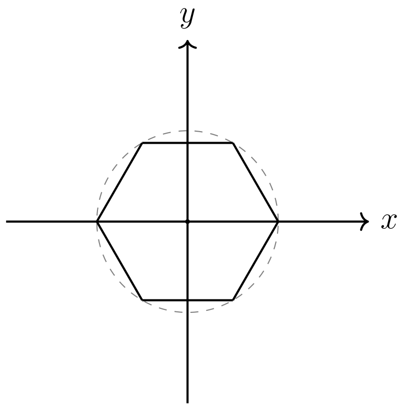
Elenchiamo ora alcuni esempi di politopi che incontreremo nei seguenti capitoli.

Esempio 1.32. I politopi di dimensione 0 sono *punti*, quelli di dimensione 1 sono *segmenti.* è facile vedere che due 0-politopi, così come due 1-politopi, sono sempre affinemente isomorfi.

Esempio 1.33. I politopi di dimensione 2 sono chiamati *poligoni.* Due poligoni sono combinatoriamente equivalenti se e solo se hanno lo sesso numero di vertici. Quindi useremo il termine "n-gono" convesso per riferirici alla classe di equivalenza dei 2-politopi con n vertici. La classe di equivalenza di un n-gono contiene un rappresentante particolarmente utile da considerare: l'*n-gono regolare*,

$$P_2\,(n) := \operatorname{conv}\left\{\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right) \mid 0 \leq k < n\right\}.$$

La figura seguente mostra l'esagono regolare $P_2(6)$ che, per quanto detto, è combinatoriamente equivalente all'esagono 1.1, ma non affinemente isomorfo.



Esempio 1.34. Consideriamo $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, la base canonica di $\mathbb{R}^3$. L'inviluppo convesso $\operatorname{conv}(B)$ è un triangolo in $\mathbb{R}^3$, e i vettori della base B costituiscono l'insieme dei suoi vertici.
Possiamo generalizzare questo caso tramite il *d-simplesso*, definito come in 1.14 dall'inviluppo convesso di $d+1$ punti affinemente indipendenti in $\mathbb{R}^n$, con $n \geq d$.

Quindi, un d-simplesso è un d-politopo con $d+1$ vertici. Dato che due simplessi con lo stesso numero di vertici sono sempre affinemente isomorfi, è utile introdurre un modello canonico di d-simplesso, che chiameremo *d-simplesso standard.*

Definizione 1.35. Il *d-simplesso standard* con $d+1$ vertici in $\mathbb{R}^{d+1}$ è definito come

$$T^d := \operatorname{conv}(e_1, \ldots, e_{d+1}) = \left\{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \sum_{i=1}^{d+1} x_i = 1, \quad x_k \geq 0 \text{ per } 1 \leq k \leq d+1\right\}.$$

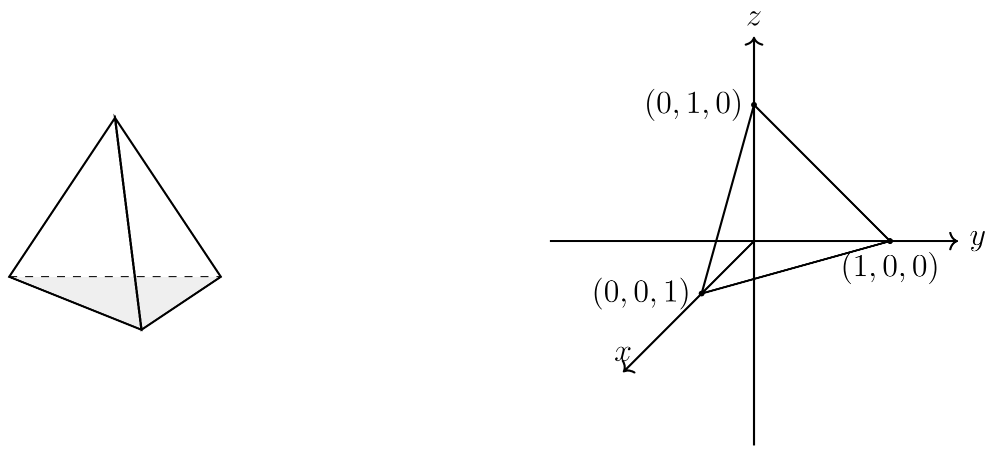


Figura 1.2: *A sinistra un* 3*-simplesso che è un tetraedro in* $\mathbb{R}^4$*; a destra il* 2*-simplesso standard che è un triangolo in* $\mathbb{R}^3$.

Esempio 1.36. Così come per il tetraedro, anche il cubo e l'ottaedro possono essere generalizzati in dimensione d. Diamo le definizioni di ipercubo e iperottaedro sia come $\mathcal{V}$-politopo che come $\mathcal{H}$-politopo.

Definizione 1.37. L'*ipercubo* di dimensione d (d-cubo) è dato da

$$C_d := \operatorname{conv}\left\{\{+1,-1\}^d\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid -1 \leq x_i \leq 1\right\}.$$

Definizione 1.38. Definiamo l'*iperottaedro di dimensione* d come

$$C_d^\Delta := \operatorname{conv}\{\pm e_1, \ldots, \pm e_d\} = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d |x_i| \leq 1\right\}.$$

Definizione 1.39. (Polare). Sia P un d-politopo tale che la sua parte interna contiene l'origine. Allora il *polare* di P è il d-politopo

$$P^\Delta := \left\{y \in \mathbb{R}^d \mid \langle y, x\rangle \leq 1 \text{ per ogni } x \in P\right\}.$$

Dalla definizione che abbiamo dato per l'ipercubo e l'iperottaedro questi sono simmetrici rispetto all'origine. In questo modo i due politopi C_d e C_d^Δ sono uno il polare dell'altro. In generale $P^{\Delta\Delta} = P$ a condizione che $0 \in \operatorname{Int}(P)$ (condizione che può essere facilmente ottenuta con un cambio di coordinate).
Inoltre, se P è dato come $\mathcal{V}$-politopo allora P^Δ ha una naturale presentazione come $\mathcal{H}$-politopo in funzione dei vertici di P:

$$P = \operatorname{conv}\{v_1, \ldots, v_n\} \Longleftrightarrow P^\Delta = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle v_i, x\rangle \leq 1 \text{ per } 1 \leq i \leq n\right\}.$$

Definizione 1.40. (Politopo semplice). Un d-politopo P è *semplice* se ogni vertice è in comune al numero minimo di faccette, ovvero d.

Osservazione 1.41. Per vedere che in un d-politopo ogni vertice appartiene ad almeno d faccette possiamo usare il polare. Infatti possiamo dire che per ogni affermazione sulla struttura combinatoria di un politopo c'è una "affermazione polare" ottenuta scambiando l'inclusione delle facce, che scambia:

$$\begin{array}{rcll} \emptyset & \longleftrightarrow & P & \\ \text{vertici} & \longleftrightarrow & \text{faccette} & \\ \text{lati} & \longleftrightarrow & \text{creste} & \\ \dots & \longleftrightarrow & \dots, & \quad \text{etc.} \end{array}$$

Dunque, se per assurdo esistesse un vertice $v \in P$ appartenente a meno di d faccette, allora esisterebbe una faccetta di P^{Δ} con meno di d vertici, che è assurdo.

Per definizione il duale di un politopo simpliciale è semplice e viceversa. Osserviamo che C_d è un politopo semplice, C_d^{Δ}, che è il suo duale, è simpliciale, mentre T^d è sia simpliciale che semplice.

Figura 1.3: *C_3 (a sinistra) e C_3^{Δ} (a destra).*

Capitolo 2

Il reticolo delle facce e le equazioni di Dehn-Sommerville

In questo capitolo enunciamo alcuni dei risultati più importanti sugli f-vettori dei politopi convessi, come la formula di Eulero-Poincaré e le equazioni di Dehn-Sommerville per politopi simpliciali. Daremo poi la definizione di reticolo delle facce di un politopo e vedremo come generalizzare le equazioni di Dehn-Sommerville al caso del reticolo delle facce di politopi qualsiasi.

2.1 La formula di Eulero-Poincaré e le equazioni di Dehn-Sommerville

Sia P un d-politopo, allora il suo f-vettore $(f_0, \ldots, f_d)$ soddisfa la seguente relazione, nota come formula di Eulero-Poincaré:

$$\sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i f_i(P) = 1 - (-1)^d.$$

L'equazione di Eulero può essere riscritta, usando le notazioni $f_{-1}(P)$ e $f_d(P)$, come

$$\sum_{i=-1}^{d} (-1)^i f_i(P) = 0.$$

Questa è l'unica relazione lineare (affine) soddisfatta da tutti gli f vettori, cioè vale il seguente teorema:

Teorema 2.1. *L'inviluppo affine degli f-vettori di tutti i d-politopi è dato da*

$$\operatorname{aff} f(\mathscr{P}^d) = \left\{ f = (f_0, \ldots, f_{d-1}) \mid \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i f_i = 1 - (-1)^d \right\}.$$

Tuttavia la formula di Eulero-Poincaré non è sufficiente a caratterizzare gli f-vettori dei politopi. In effetti la caratterizzazione degli f-vettori è uno dei problemi storici riguardanti i politopi convessi e, ancora oggi, non abbiamo molti risultati generali validi per politopi qualsiasi: il problema della caratterizzazione degli f vettori per politopi di dimensione 4 è ancora aperto [Zie94, Ex. 8.29]. Per $d = 2$ $(f_0, f_1) \in \mathbb{Z}^2$ è l'f vettore di un poligono se e solo se $f_0 = f_1 \geq 3$. Per $d = 3$ nel 1906 Steinitz provò la seguente caratterizzazione:

Teorema 2.2. $(f_0, f_1, f_2) \in \mathbb{Z}^3$ *è l'*f *vettore di un* 3*-politopo se e solo se sono soddisfatte queste condizioni:*

- $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ *(Formula di Eulero)*
- $f_2 \leq 2f_0 - 4$
- $f_0 \leq 2f_2 - 4$

dove le ultime due relazioni seguono dal fatto che ogni vertice, così come ogni faccetta, è in comune con almeno tre lati. Quindi dal fatto che $f_0 \leq \frac{2}{3}f_1$ si ricava $f_0 \leq 2f_2 - 4$, analogamente da $f_2 \leq \frac{2}{3}f_1$ abbiamo che $f_2 \leq 2f_0 - 4$. Nel caso di politopi simpliciali (ad esempio l'ottaedro) abbiamo che $f_2 = 2f_0 - 4$ e per politopi semplici (ad esempio il cubo) $f_0 = 2f_2 - 4$.

Per quanto riguarda i politopi simpliciali, invece, è nota un caratterizzazione completa degli f-vettori. Questa è stata congetturata per la prima volta da McMullen nel 1971 e provata nel 1980 da Billera, Lee e Stanley. Per enunciare il teorema, abbiamo bisogno di introdurre la seguente definizione.

Definizione 2.3. Siano h e i due interi positivi. Allora esiste un'unica decomposizione di h, chiamata i-esima *rappresentazione canonica*

$$h = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-1}}{i-1} + ... + \binom{n_j}{j}$$

tale che $n_i > n_{i-1} > ... > n_j \geq j \geq 1$.

Diremo che $h^{\langle i \rangle}$ è la i-esima *pseudo-potenza* di h se

$$h^{\langle i \rangle} = \binom{n_i + 1}{i + 1} + \binom{n_{i-1} + 1}{i} + \cdots + \binom{n_j + 1}{j + 1}.$$

Ricordiamo che gli h-vettori sono in corrispondenza biunivoca con gli f-vettori e indichiamo con $h(\mathscr{P}_s^d)$ l'insieme degli h-vettori dei d-politopi simpliciali.

Teorema 2.4. *Sia* $h = (h_0, h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{Z}^d$. *Allora* $h \in h(\mathscr{P}_s^d)$ *se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

i) $h_i = h_{d-i}$, $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$;

ii) $h_{i+1} \geq h_i$, $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor - 1$;

iii) $h_0 = 1$ *e* $h_{i+1} - h_i \leq (h_i - h_{i-1})^{\langle i \rangle}$, $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor - 1$.

Le condizioni espresse in *i)* sono equivalenti alle equazioni

$$f_k = \sum_{j=k}^{d-1} (-1)^{d-1-j} \binom{j+1}{k+1} f_j, \quad 1 \leq k \leq d-2. \tag{2.1}$$

Queste sono le equazioni di Dehn-Sommerville, che devono il loro nome a Dehn, che per primo ne congetturò l'esistenza nel 1905, e Sommerville, che fu il primo a scoprirle e dimostrarle nel 1927.
Nel corso di questo capitolo vogliamo generalizzare queste equazioni al caso dei poset Euleriani e, di conseguenza, al reticolo delle facce di un politopo.

2.2 Il reticolo delle facce

Introduciamo la terminologia sui poset necessaria per poter parlare di reticolo delle facce di un politopo.

Definizione 2.5. (Poset). Un poset $(P, \leq)$ è un insieme finito parzialmente ordinato, cioè, un insieme finito P dotato di una relazione " $\leq$ " che è

- riflessiva: $x \leq x$ per ogni $x \in P$,
- transitiva: per ogni x, $y \in P$ tali che $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$,
- antisimmetrica: per ogni x, $y \in P$ tali che $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$.

Quando l'ordine parziale è chiaro indicheremo un poset con P. Ogni sottoinsieme di P è a sua volta un poset con l'ordine parziale indotto. Una *catena* di P è un sottoinsieme di P totalmente ordinato e la sua *lunghezza* è il numero dei suoi elementi meno 1.
Presi due elementi $x, y \in P$ con $x \leq y$, definiamo l'*intervallo* tra x e y come

$$[x, y] := \{u \in P \mid x \leq u \leq y\}.$$

Se $(P, \leq)$ e $(Q, \preceq)$ sono due poset si dice che sono isomorfi, $P \cong Q$, se esiste una biiezione $\phi : P \to Q$ tale che per ogni $p \in P$ e $q \in Q$, $p \leq q$ se e solo se $\phi(p) \preceq \phi(q)$.

Un intervallo di P è *booleano* se è isomorfo al poset $(\mathcal{P}(I), \subseteq)$ per un qualche insieme finito I, dove $\mathcal{P}(I)$ è l'insieme delle parti di I e $\subseteq$ è la relazione di inclusione.
Diremo che P è *limitato* se esiste un unico elemento *massimale*, che denotiamo con $\hat{1}$, e un unico elemento *minimale*, che chiamiamo $\hat{0}$.
Un poset limitato si dice *graduato* se ogni catena massimale ha la stessa lunghezza. Quindi su un poset graduato possiamo definire una *funzione rango* $\rho : P \to \mathbb{Z}$ che ad un elemento $p \in P$ associa la lunghezza di una qualsiasi catena massimale in $\left[\hat{0}, p\right]$.
Un *reticolo* è un poset limitato tale che ogni coppia di elementi $x, y \in P$ ha un unico estremo superiore in P chiamato *sup*, $x \vee y$, e un unico estremo inferiore $x \wedge y$ in P, detto *inf*. Se P è un reticolo graduato, chiamiamo gli elementi minimali di $P \setminus \hat{0}$ i suoi *atomi*, e gli elementi massimali di $P \setminus \hat{1}$ i suoi *coatomi*.
Un reticolo si dice *atomico* se ogni suo elemento si può scrivere come estremo superiore di atomi, cioè $p = p_1 \vee p_2 ... \vee p_k$, per $k \geq 0$. Analogamente, un reticolo è *coatomico* se ogni suo elemento si può esprimere come estremo inferiore di coatomi.

Definizione 2.6. (reticolo delle facce). Si definisce reticolo delle facce di un politopo convesso P il poset $\mathcal{L} := \mathcal{L}(P)$ di tutte le facce di P, parzialmente ordinate dall'inclusione.

Possiamo a questo punto riformulare la definizione di equivalenza combinatoria fra politopi in termini del reticolo delle facce.

Definizione 2.7. (Equivalenza combinatoria). Due politopi P e Q sono *combinatoriamente equivalenti*, $P \simeq Q$, se e solo se $\mathcal{L}(P) \cong \mathcal{L}(Q)$.

Per rappresentare un reticolo delle facce $\mathcal{L}(P)$ utilizziamo un *diagramma di Hasse*, ovvero un grafo orientato disegnato nel piano in modo tale che ogni faccia di P corrisponda ad un vertice. Viene tracciata una linea che va da un vertice F ad un vertice G se e solo se c'è una relazione di copertura fra F e G, ovvero se $F \subsetneq G$ e $[F, G] = \{F, G\}$.

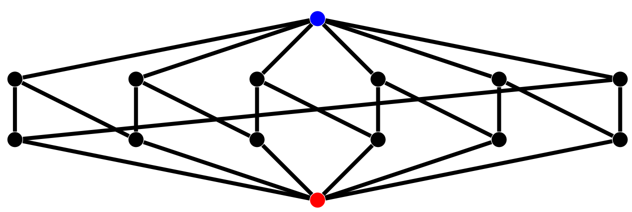


Figura 2.1: *La figura mostra il reticolo delle facce di un esagono: l'elemento minimale (in rosso) corrisponde alla faccia vuota, i sei atomi nel livello superiore sono i vertici, mentre quelli nel livello ancora sopra sono i sei lati, e l'elemento massimale al vertice (in blu) rappresenta l'esagono stesso.*

Definiamo il *poset opposto*, che indicheremo P^{op}, come il poset sullo stesso insieme P tale che $x \leq y$ in P^{op} se e solo se $y \leq x$ in P.

Teorema 2.8. *[Zie94, §2.2] Sia P un politopo convesso, F, G facce di P tali che $F \subseteq G$. Allora:*

- *$[F, G]$ è il reticolo delle facce di un politopo di dimensione $\rho(G) - \rho(F) - 1$;*
- *il suo reticolo delle facce $\mathcal{L}(P)$ è sia atomico che coatomico;*
- *il poset opposto $\mathcal{L}^{op}(P)$ è ancora il reticolo delle facce di un politopo;*
- *per ogni k-faccia F e $(k+2)$-faccia G che contiene F, ci sono esattamente due $(k+1)$-facce H, H' che contengono F e sono contenute in G.*

Il reticolo delle facce di P e quello del suo polare P^{Δ} sono legati da questa propietà:

Proposizione 2.9. *[Zie94, §2.3]*
Il reticolo delle facce di P^{Δ} è l'opposto del reticolo delle facce di P:

$$\mathcal{L}(P^{\Delta}) \cong \mathcal{L}^{op}(P).$$

A partire da un poset graduato P, possiamo costruire un complesso simpliciale $\Delta(P)$ in questo modo:

- i vertici sono l'insieme $P \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$,
- $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ è un simplesso se e solo se $x_1 < x_2 < ... < x_k$ (se necessario dopo aver riordinato).

Quindi i simplessi di $\Delta(P)$ sono le catene in $P \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$. $\Delta(P)$ si chiama *complesso d'ordine* di P. Come prima, diciamo che P è *graduato* se per ogni $x \in P$, $x \neq \hat{0}$, ogni catena massimale $\hat{0} < x_0 < ... < x_k = x$ in P ha la stessa lunghezza $k+1$. Chiamiamo k il *rango* di x, e scriveremo $\rho(x) = k$ con la convenzione $\rho(\hat{0}) = -1$ e $\rho(P) = \rho(\hat{1})$ che è detto *rango del poset*. Osserviamo che questa funzione rango corrisponde alla normale funzione rango di un poset, ma applicata a $P \setminus \{\hat{0}\}$.

Definizione 2.10. Sia P un poset di rango d, e sia $S = \{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{0, 1, \dots, d-1\}$. Definiamo il *numero di bandiera* di tipo S di P, che indichiamo con $f_S(P)$, il numero di catene in P i cui elementi hanno rango in S, ossia

$$f_S(P) := |\{\sigma \in \Delta(P) \mid \sigma = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}, \ \rho(x_k) = i_k\}|.$$

Inoltre, l'*f-vettore di bandiera* di P è il vettore $(f_S(P))_{S\subseteq[d]} \in \mathbb{N}^{2^d}$.
Analogamente definiamo

$$h_S(P) = \sum_{T\subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} f_T(P),$$

e l'*h-vettore di bandiera* come il vettore $(h_S(P))_{S\subseteq[d]} \in \mathbb{N}^{2^d}$.

Se $\mathcal{L}(P)$ è il reticolo delle facce di un d-politopo P, indicheremo con $(f_S(P))_{S\subseteq[d]}$ l'f-vettore di bandiera di $\mathcal{L}(P)$ e con $(h_S(P))_{S\subseteq[d]}$ l' h-vettore di bandiera di $\mathcal{L}(P)$.

Osservazione 2.11. Nel seguito indicheremo con $(f_S(P))$ e con $(h_S(P))$ gli f-vettori di bandiera e gli h-vettori di bandiera di P, senza distinguere tra il politopo convesso P e il suo reticolo delle facce $\mathcal{L}(P)$.

Esempio 2.12. L'f-vettore di bandiera di un cubo (3-politopo) è formato dalle entrate scritte nella seguente tabella.

S	f_S
$\emptyset$	1
$\{0\}$	8
$\{1\}$	12
$\{2\}$	6
$\{0,1\}$	$8\times 3 = 24$
$\{0,2\}$	$8\times 3 = 24$
$\{1,2\}$	$12\times 2 = 24$
$\{0,1,2\}$	$8\times 3\times 2 = 48$

Per esempio, $f_{\{1,2\}} = 24$ perché ogni lato è in comune a due facce.

2.3 Equazioni di Dehn-Sommerville per poset Euleriani

In questa sezione vogliamo definire un analogo delle equazioni di Dehn-Sommerville (2.1) per i poset euleriani. Queste relazioni prendono il nome di equazioni di Dehn-Sommerville generalizzate e, come vedremo nel quarto capitolo, sono le uniche relazioni lineari (affini) soddisfatte dagli f-vettori di bandiera di un poset Euleriano. Concluderemo poi il capitolo mostrando che la dimensione del sottospazio affine generato dagli f-vettori di bandiera di un poset Euleriano di rango d è limitata dall'alto da $F_d - 1$, dove F_d è il d-esimo numero di Fibonacci.

Definizione 2.13. (Funzione di Möbius). La *funzione di Möbius* μ di un poset assegna un numero ad ogni intervallo $[x, y] \subseteq P$, come segue:

i) $\mu(x, x) = 1$ per ogni $x \in P$,

ii) $\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) = 0$ per ogni $x < y$,

iii) $\mu(x, y)$=0 per ogni $x \not\leq y$.

Definizione 2.14. Un poset P si dice Euleriano se per ogni $x, y \in P$ con $x < y$ allora

$$\mu(x, y) = (-1)^{\rho(y)-\rho(x)},$$

dove μ è la funzione di Möbius.

Teorema 2.15. *Il reticolo delle facce $\mathcal{L}(P)$ è sempre Euleriano.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue dalla formula di Eulero-Poincaré 2.1 che abbiamo presentato all'inizio del capitolo. Siano dunque $F, G \in \mathcal{L}(P)$ con $F \subseteq G$, vogliamo provare che $\mu(F, G) = (-1)^{\rho(G)-\rho(F)}$. Procediamo per induzione sulla differenza tra i ranghi $\rho(G) - \rho(F)$.
Passo base: se $\rho(G) - \rho(F) = 0$ allora per definizione di funzione di Möbius

$$\mu(F, F) = 1 = (-1)^0.$$

Passo induttivo: supponiamo di averlo provato per $\rho(G) - \rho(F) < d$, e lo vogliamo provare per $\rho(G) - \rho(F) = d$. Dalla definizione di funzione di Möbius e usando l'ipotesi induttiva abbiamo

$$\mu(F, G) = -\sum_{F \subseteq H \subset G} \mu(F, H) = -\sum_{F \subseteq H \subset G} (-1)^{\rho(H)-\rho(F)}.$$

Definiamo $f_i([F, G])$ il numero di facce in $[F, G]$ (questo è il reticolo delle facce di un politopo di dimensione $\rho(G) - \rho(F) - 1$ per il Teorema 2.8) di rango i. Dalla formula di Eulero-Poincaré 2.1 otteniamo

$$\mu(F, G) = -\sum_{i=-1}^{d-1} (-1)^i f_i([F, G]) = (-1)^d = (-1)^{\rho(G)-\rho(F)}.$$

□

Teorema 2.16. *Sia P un poset Euleriano di rango d, e $S \subseteq \{0, 1, \ldots, d-1\}$. Supponiamo che $\{i, k\} \subseteq S \cup \{-1, d\}$, $i < k - 1$, e che S non contenga elementi tali che $i < j < k$, allora:*

$$\sum_{j=i+1}^{k-1} (-1)^{j-i-1} f_{S \cup j}(P) = f_S(P)(1 - (-1)^{k-i-1}).$$

Dimostrazione. Sia C una catena in P i cui elementi hanno rango in S. Sia x l'elemento di C di rango i ($\hat{0}$ nel caso $i = -1$), e y l'elemento di rango k ($\hat{1}$ nel caso $k = d$). Per $i \leq j \leq k$ indichiamo con $f_j(x, y)$ il numero di elementi di P di rango j compresi fra x e y. Poiché P è Euleriano, $\mu(x, y) = (-1)^{k-i}$ e dal fatto che $\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) = 0$ segue

$$(-1)^{k-i} = \mu(x, y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) = -\sum_{j=i}^{k-1} (-1)^{j-i} f_j(x, y).$$

Allora, osservando che $f_i(x, y) = 1$, otteniamo una forma dell'equazione di Eulero

$$1 - (-1)^{k-i-1} = \sum_{j=i+1}^{k-1} (-1)^{j-i-1} f_j(x, y).$$

Procediamo ora sommando su tutte le catene di elementi di S (qui x e y dipendono da C)

$$\begin{aligned} f_S(P)\left(1 - (-1)^{k-i-1}\right) &= \sum_{C \text{ catena di } S} \sum_{j=i+1}^{k-1} (-1)^{j-i-1} f_j(x, y) \\ &= \sum_{j=i+1}^{k-1} (-1)^{j-i-1} \sum_{C \text{ catena di } S} f_j(x, y) \\ &= \sum_{j=i+1}^{k-1} (-1)^{j-i-1} f_{S \cup j}(P) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che S non contiene elementi j tali che $i < j < k$. □

Osservazione 2.17. Nel caso limite in cui $S = \emptyset$, $i = -1$ e $k = d$, l'equazione fornita dal Teorema 2.16 è la formula di Eulero-Poincaré 2.1.

Concludiamo il capitolo analizzando la dipendenza tra le variabili f_S del Teorema 2.16. Per $d \geq 1$ definiamo Ψ^d l'insieme dei sottoinsiemi $S \subseteq \{0, 1, \ldots, d-2\}$ tali che S non ha due interi consecutivi.

Proposizione 2.18. *Per ogni $T \subseteq \{0, 1, \ldots, d-1\}$ c'è una relazione lineare non banale che esprime $f_T(P)$ in termini di $f_S(P)$, $S \in \Psi^d$, che vale per ogni poset Euleriano P di rango d. Inoltre, la cardinalità di Ψ^d è F_d, dove F_d è il d-esimo numero di Fibonacci.*

Prima di procedere con la dimostrazione definiamo un *ordine lessicografico* sui sottoinsiemi di $\{0, 1, \ldots, d-1\}$ come segue. Se $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $s_1 < s_2 < \ldots < s_k$, e $T = \{t_1, \ldots, t_l\}$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_l$, allora diciamo che $S < T$ se $k < l$ oppure se $k = l$ ed esiste un $j \leq k$ tale che $s_j < t_j$, mentre $s_i = t_i$ per ogni $i < j$.

Dimostrazione. Ordiniamo i sottoinsiemi di $\{0, 1, \ldots, d-1\}$ secondo l'ordine lessicografico appena descritto. Se $T \notin \Psi^d$ allora esiste un k, $1 \leq k \leq d$, tale che $\{k-1, k\} \subseteq T \cup \{d\}$. Sia $S = T \setminus \{k-1\}$, e $i = \max\{j \in T \cup \{-1\} \mid j < k-1\}$. Allora applicando il Teorema 2.16 per questi S, i e k

$$\begin{aligned}(-1)^{k-i} f_T(P) &= \sum_{j=i+1}^{k-2} (-1)^{j-i} f_{S \cup j}(P) + f_S(P)\left(1 - (-1)^{k-i-1}\right) \\ f_T(P) &= \sum_{j=i+1}^{k-2} (-1)^{k-j} f_{S \cup j}(P) + f_S(P)\left(1 - (-1)^{k-i-1}\right).\end{aligned}$$

Osserviamo ora che i pedici che appaiono a destra dell'uguale sono tutti minori di T in ordine lessicografico. Infatti, $|S| = |T| - 1$, mentre $S \cup j$ e T hanno la stessa cardinalità, ma $S \cup j < T$ perché $T = S \cup \{k-1\}$ e $i+1 \leq j \leq k-2$.
Infine, per calcolare $\left|\Psi^d\right|$, notiamo che per ogni $S \in \Psi^d$ ci sono due possibilità: se $d-2 \notin S$ allora $S \in \Psi^{d-1}$; mentre nel caso $d-2 \in S$ allora $d-3 \notin S$, quindi $S \setminus \{d-2\} \in \Psi^{d-2}$. Da ciò segue che $\left|\Psi^d\right| = \left|\Psi^{d-1}\right| + \left|\Psi^{d-2}\right|$. È facile infine vedere che $|\Psi^1| = 1$, $|\Psi^2| = 2$. □

Osserviamo quindi che, insieme alla relazione $f_\emptyset = 1$, la dimensione dello *span* affine degli f-vettori di bandiera di un poset Euleriano di rango d è al più $F_d - 1$.

Capitolo 3

Piramide, bipiramide e suddivisione stellare

In questo capitolo ci occuperemo di studiare alcune operazioni dei politopi convessi che ci saranno utili nel prossimo capitolo: vedremo come costruire piramidi e bipiramidi sopra un politopo e cosa significa effettuare una suddivisione stellare di un politopo simpliciale rispetto ad una sua faccia. Per ognuno di questi tre casi definiremo l'operazione, osserveremo come cambia l'h-vettore e faremo alcuni esempi.

3.1 Piramide

Definizione 3.1. (Piramide). Sia Q un d-politopo e x_0 un punto di $\mathbb{R}^d \setminus \mathrm{aff}(Q)$. Una $(d+1)$-piramide con base Q e apice x_0 è un $d+1$-politopo della forma

$$PQ := \mathrm{conv}(Q \cup \{x_0\}).$$

Sia F_k una k-faccia di PQ, determinata dall'iperpiano H, $F_k = PQ \cap H$. Ci sono due possibilità: se x_0 non è un vertice di F_k, allora F_k è una k-faccia di Q. Altrimenti, i vertici di F_k diversi da x_0 appartengono a Q, e sono essattamente i vertici della $(k-1)$-faccia $H \cap PQ \cap \mathrm{aff}(Q)$ di Q. Quindi F_k è una k-piramide con base $H \cap Q$ e apice x_0.
D'altra parte, per $0 \leq k \leq d$, ogni k-faccia di Q (inclusa la faccia impropria data da Q stesso) è una faccia di PQ. In conclusione possiamo dire che le facce di una piramide PQ sono le facce di Q, il politopo Q stesso, le piramidi sopra ogni faccia di Q, e il nuovo vertice. Questa descrizione delle facce di una piramide si formalizza come segue:

- $f_0(PQ) = f_0(Q) + 1$
- $f_k(PQ) = f_k(Q) + f_{k-1}(Q) \quad$ per $1 \leq k \leq d-1$

- $f_d(PQ) = 1 + f_{d-1}(Q)$

usando la notazione $f_{-1}(PQ) = f_d(PQ) = 1$ e $f_k(PQ) = 0$ per ogni $k < -1$ e per ogni $k > d$, possiamo riformulare le relazioni scritte sopra come

$$f_k(PQ) = f_k(Q) + f_{k-1}(Q) \quad \text{per ogni } k.$$

Osservazione 3.2. La discussione appena fatta sulle facce di una piramide implica che, fissata una base Q, la piramide su Q è unica a meno di equivalenza affine.

Vediamo ora come cambia l'h-vettore di Q dopo aver costruito una piramide su di esso.

Proposizione 3.3. *Nelle stesse notazioni di prima vale la seguente formula:*

$$h(PQ) = (h(Q), 1)$$

Dimostrazione. Indichiamo con $f(Q) = (f_0, \dots, f_{d-1})$ l'f-vettore di Q, e con $f(PQ) = (f'_0, \dots, f'_{d-1}, f'_d)$ quello di PQ. Analogamente per gli h-vettori avremo $h(Q) = (h_0, \dots, h_d)$ e $h(PQ) = (h'_0, \dots, h'_d, h'_{d+1})$. Dalla formula di Eulero sappiamo che $h_d = h'_{d+1} = 1$. Ricordiamo che $h_i = \sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{d-j}{d-i} f_{j-1}$ da cui segue $h_0 = h'_0 = 1$. Rimane dunque da provare che $h_i = h'_i$ per ogni $1 \leq i \leq d-1$.
Sappiamo che $h'_i = \sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{d+1-j}{d+1-i} f'_{j-1}$ e, poiché $f'_{j-1} = f_{j-1} + f_{j-2}$ per ogni $0 \leq j \leq i$, sostituendo otteniamo:

$$\begin{aligned} h'_i &= \sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{d+1-j}{d+1-i} f_{j-1} + \sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{d+1-j}{d+1-i} f_{j-2} \\ &= \sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{d+1-j}{d+1-i} f_{j-1} + \sum_{k=-1}^{i-1}(-1)^{i-k-1}\binom{d-k}{d+1-i} f_{k-1} \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito l'indice della seconda sommatoria con $k = j-1$. Osserviamo che per $k = -1$ si ha $f_{-2} = 0$; mentre il termine corrispondente a $k = i$ scompare perché $\binom{d-i}{d-i+1} = 0$. Quindi

$$\begin{aligned} h'_i &= \sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{d+1-j}{d+1-i} f_{j-1} - \sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{d-k}{d+1-i} f_{k-1} \\ &= \sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\left[\binom{d+1-j}{d+1-i} - \binom{d-j}{d+1-i}\right] f_{j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{d-j}{d-i} f_{j-1} = h_i \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo usato il fatto che $\binom{d+1-j}{d+1-i} - \binom{d-j}{d+1-i} = \binom{d-j}{d-i}$ per la regola di Pascal. $\square$

Figura 3.1: *La piramide su un punto (a sinistra) e su un segmento (a destra). In rosso sono rappresentati i vertici e in blu le basi*

Sia P^d la d-piramide con base P^{d-1}, dove P^{d-1} è una $(d-1)$-piramide con base $(d-2)$-dimensionale K^{d-2}, diremo che P^d è una *d-piramide iterata* due volte. In generale, per un intero positivo r diremo che P^d è una d-piramide iterata r volte con base $(d-r)$-dimensionale K^{d-r} se P^d è una d-piramide con base P^{d-1}, dove P^{d-1} è una $(d-1)$-piramide iterata $r-1$ volte con base K^{d-r}. In particolare la piramide che abbiamo definito prima è una d-piramide iterata 1 volta. Una d-piramide iterata $d-1$ volte ha come base un segmento che, a sua volta, è una 1-piramide iterata 1 volta; quindi ogni d-piramide iterata $d-1$ volte è anche una d-piramide iterata d volte, in altre parole, è un d-simplesso. Vedremo prima della fine di questo capitolo un'applicazione notevole di questo tipo di politopi.

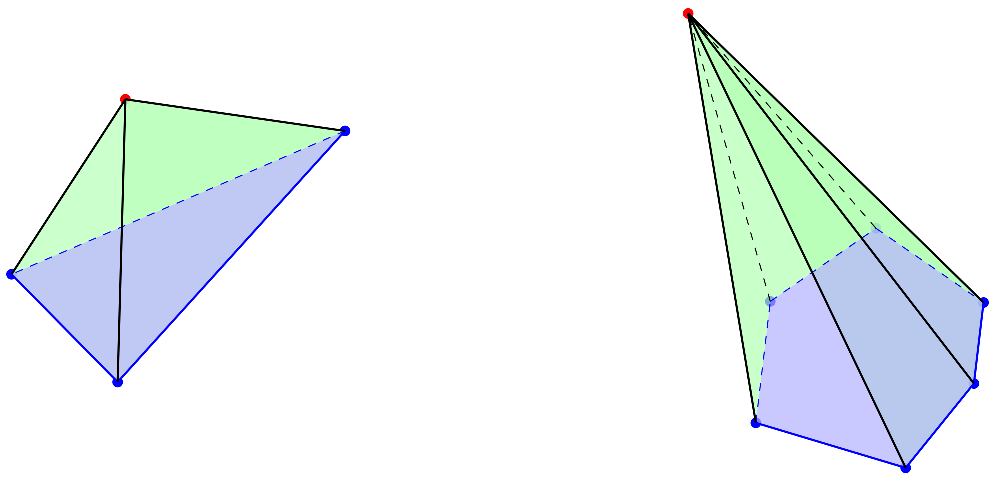


Figura 3.2: *La piramide iterata* 3 *volte su un punto è un tetraedro, cioè un* 3*-simplesso (a sinistra). Nella figura accanto vediamo la piramide disegnata sull'esagono 1.1. In rosso sono rappresentati i vertici e in blu le basi.*

Osservazione 3.4. In generale la piramide PQ non è un politopo simpliciale a meno che Q stesso non sia un simplesso, (come si vede nel primo esempio di 3.2). In questo caso

PQ è ancora un simplesso, e per induzione da 3.3, otteniamo $h(PQ) = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^{d+1}$.

3.2 Bipiramide

Per definire la bipiramide ci sarà utile dire cosa si intende per *parte interna relativa* di un insieme convesso. Se, ad esempio, consideriamo un triangolo in $\mathbb{R}^3$ con la topologia euclidea, questo non ha punti interni. Talvolta però è utile considerare il fatto che ci sono dei punti interni nello spazio affine bidimensionale che è generato dal triangolo. Per questo motivo ha senso introdurre la seguente definizione:

Definizione 3.5. (Interno relativo di un insieme convesso). Sia $K \subseteq \mathbb{R}^d$ un insieme convesso. Si definisce *interno relativo* di K, che indicheremo $\operatorname{relint}(K)$, la parte interna di K nell'inviluppo affine $\operatorname{aff}(K)$ di K.

Osservazione 3.6. L'interno relativo non preserva l'inclusione. Per esempio, sia K_1 il lato di un triangolo K_2. Allora chiaramente $K_1 \subseteq K_2$, mentre $\operatorname{relint}(K_1) \nsubseteq \operatorname{relint}(K_2)$; infatti $\operatorname{relint}(K_1)$ e $\operatorname{relint}(K_2)$ sono insiemi non vuoti e disgiunti.

Siamo ora pronti per definire la bipiramide.

Definizione 3.7. (Bipiramide). Sia Q un d-politopo, e x_0, x_1 due punti di $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{aff}(Q)$ tali che $[x_0, x_1] \cap \operatorname{relint}(Q) \neq \emptyset$. Definiamo la $(d+1)$-bipiramide con base Q e apici x_0, x_1 come un $(d+1)$-politopo della forma

$$BQ := \operatorname{conv}(Q \cup \{x_0, x_1\}).$$

Vogliamo ora descrivere le facce della bipiramide.
Ripetiamo lo stesso ragionamento fatto per la piramide con l'unica differenza che ora, per $0 \leq k \leq d-1$, ogni k-faccia di Q è una faccia di BQ, mentre Q come faccia d dimensionale di Q stesso non è una faccia di BQ. In conclusione possiamo dire che le facce di una bipiramide BQ sono le facce di Q (ma non Q stesso), due piramidi sopra ogni faccia di Q, e i due nuovi vertici. Questa descrizione delle facce di una bipiramide si formalizza come segue:

- $f_k(BQ) = 2f_{k-1}(Q) + f_k(Q) \quad \text{per } k \leq d-1$
- $f_d(BQ) = 2f_{d-1}(Q)$

Vediamo come cambia l'h-vettore di Q dopo aver costruito una bipiramide su di esso.

Proposizione 3.8. *Nelle stesse notazioni di prima vale la seguente formula:*

$$h(BQ) = (h(Q), 0) + (0, h(Q))$$

Dimostrazione. Come prima, indichiamo con $f(Q) = (f_0, \ldots, f_{d-1})$ l'f-vettore di Q, e con $f(BQ) = (f'_0, \ldots, f'_{d-1}, f'_d)$ quello di BQ. Analogamente per gli h-vettori avremo $h(Q) = (h_0, \ldots, h_d)$ e $h(BQ) = (h'_0, \ldots, h'_d, h'_{d+1})$. $(h(Q), 0) + (0, h(Q)) = (h_0, h_0 + h_1, \ldots, h_{d-1} + h_d, h_d)$. Dalla formula di Eulero segue $h_0 = h'_0 = h_d = h'_{d+1} = 1$. Resta da provare che $h'_i = h_i + h_{i-1}$ per ogni $1 \leq i \leq d$. Dalla formula per la i-esima componente dell'h-vettore sappiamo che $h'_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{d+1-j}{d+1-i} f'_{j-1}$ e, poiché $f'_{j-1} = f_{j-1} + 2f_{j-2}$ per ogni $0 \leq j \leq i$, sostituendo otteniamo:

$$\begin{aligned} h'_i &= \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{d+1-j}{d+1-i} (f_{j-1} + 2f_{j-2}) \\ &= \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{d+1-j}{d+1-i} f_{j-1} + 2 \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{d+1-j}{d+1-i} f_{j-2}. \end{aligned}$$

Ora, dividendo l'ultimo addendo in due sommatorie identiche e riscalando gli indici nella prima sommatoria in cui compare f_{j-2} con $k = j - 1$ abbiamo che

$$h'_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{d+1-j}{d+1-i} f_{j-1} + \sum_{k=-1}^{i-1} (-1)^{i-k-1} \binom{d-k}{d+1-i} f_{k-1} + \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{d-(j-1)}{d-(i-1)} f_{j-2}$$

ma, osservando che per $k = -1$ otteniamo $f_{-2} = 0$ e che il termine corrispondente a $k = i$ scompare perché $\binom{d-i}{d+1-i} = 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} h'_i &= \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{d+1-j}{d+1-i} f_{j-1} - \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{d-k}{d+1-i} f_{k-1} + h_{i-1} \\ &= \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \left[\binom{d+1-j}{d+1-i} - \binom{d-j}{d+1-i} \right] f_{j-1} + h_{i-1} \\ &= \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{d-j}{d-i} f_{j-1} + h_{i-1} = h_i + h_{i-1}. \end{aligned}$$

□

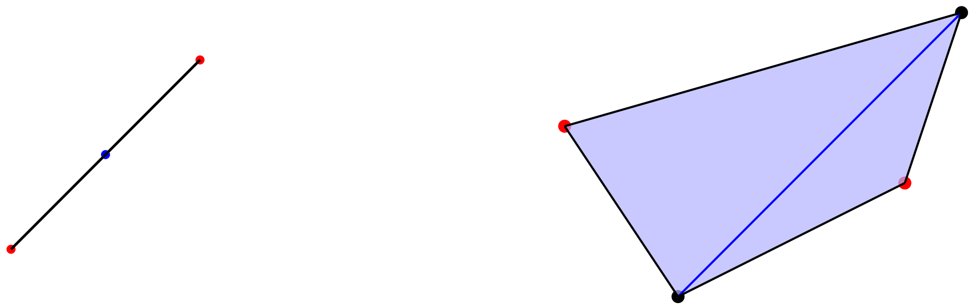


Figura 3.3: *La bipiramide su un punto (a sinistra) e su un segmento (a destra). In rosso sono rappresentati i vertici delle due bipiramidi e in blu le basi.*

In analogia con il caso della piramide è possibile definire la *d-bipiramide iterata n-volte*. Osserviamo che, così come accadeva per le piramidi, una d-bipiramide iterata $(d-1)$ volte è necessariamente una d-bipiramide iterata d volte cioè una bipiramide iterata su un punto. Un d-iperottaedro è un caso particolare di questa tipologia di politopi.

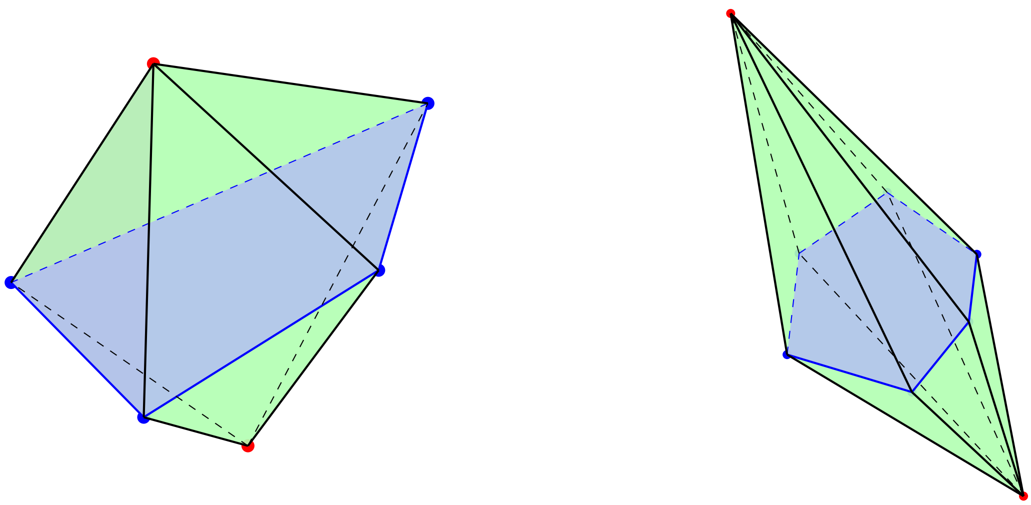


Figura 3.4: *La bipiramide iterata* 3 *volte su un punto è un ottaedro (a sinistra). Nella figura accanto vediamo la bipiramide disegnata sull'esagono 1.1. In rosso sono rappresentati i vertici delle due bipiramidi e in blu le basi.*

Osservazione 3.9. Se Q è un politopo simpliciale, allora lo è anche BQ.

3.3 Suddivisione stellare di un politopo simpliciale

L'ultima operazione che presentiamo in questo capitolo è la suddivisione stellare di un d-politopo simpliciale. Sia Q un d-politopo simpliciale e F una faccia propria di Q. Detto H un iperpiano che contiene Q in uno dei due semispazi che determina, allora un punto $x \notin H$ si dice che è *al di qua* di H se si trova nello stesso semispazio di Q, e *oltre* H altrimenti. Siano ora $F_1, \ldots, F_k$ $(k \geq 1)$ tutte le faccette (facce $(d-1)$-dimensionali) di Q che contengono F. Sia poi x un punto che si trova oltre gli iperpiani generati da queste faccette $\{F_i \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}$ e al di sotto di tutti gli iperpiani generati dalle altre faccette. Osserviamo che un tale punto esiste sempre a patto di considerare un $x \notin Q$ sufficientemente vicino al baricentro di F. Con queste notazioni diamo quindi la definizione di suddivisione stellare di un politopo simpliciale rispetto ad una sua faccia.

Definizione 3.10. (Suddivisione stellare). Definiamo la *suddivisione stellare* di F in Q il d-politopo simpliciale ottenuto come

$$\mathrm{st}(F, Q) = \mathrm{conv}(Q \cup \{x\}).$$

Per descrivere la suddivisione stellare $\mathrm{st}(F, Q)$ da un punto di vista combinatorio consideriamo Δ il complesso del bordo di Q e σ l'insieme dei vertici di F. Allora il complesso del bordo di $\mathrm{st}(F, Q)$ è il complesso $\mathrm{st}(\sigma, \Delta)$, dove

$$\mathrm{st}(\sigma, \Delta) = \{\Delta \setminus \sigma\} \cup \overline{x} \cdot \partial\sigma \cdot lk_{\Delta}\sigma.$$

Qui $\Delta \setminus \sigma = \{\tau \in \Delta \mid \tau \not\supseteq \sigma\}$, $lk_{\Delta}\sigma$ è il *link* di σ in Δ, definito come

$$lk_{\Delta}\sigma := \{\tau \in \Delta \mid \tau \cap \sigma = \emptyset,\, \tau \cup \sigma \in \Delta\},$$

$\partial\sigma$ è il complesso dei sottoinsiemi propri di σ, $\overline{x}$ denota il complesso costituito da $\{x\}$ e $\emptyset$ e $\cdot$ è la giunzione dei complessi simpliciali.

Sia T_0^d il d-simplesso e F^k una faccia di dimensione k di T_0^d, definiamo $T_k^d = \mathrm{st}(F^k,\, T_0^d)$.

Proposizione 3.11. *Per ogni* $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$*, l'*$h$*-vettore di* T_k^d *è*

$$h(T_k^d) = (1, 2, 3, \ldots, k, k+1, k+1, \ldots, k+1, k, \ldots, 3, 2, 1).$$

Seguendo quanto fatto nel caso della piramide e della bipiramide, vogliamo determinare anzitutto come cambia l'f-vettore. Sia V l'insieme dei $d+1$ vertici di T_0^d, etichettati con $\{1, 2, \ldots, d+1\}$, e consideriamo una partizione $V = V_1 \cup V_2$ di V in modo che

- $V_1 = \{1, 2, \ldots, d-k\}$

- $V_2 = \{d-k+1, \ldots, d+1\}$
- V_2 contiene i $k+1$ vertici di F^k (ricordiamo che F^k è un $(k+1)$-simplesso).

Sia ora F^k la faccia k-dimensionale su cui facciamo la suddivisione stellare. Allora il numero di facce di dimensione h che si aggiungono in T_k^d è il numero di h-facce di T_k^d che contengono il nuovo vertice x per cui esiste una faccetta di T_0^d che contiene sia i $k+1$ vertici di F^k, che i vertici della h-faccia che appartengono a T_0^d. In altre parole, vogliamo scegliere i restanti h vertici in modo tale che non contengano V_1. Quindi, per ogni $1 \leq i \leq d-k$ sia $A_i = \{F' \mid F' \text{ è una } h\text{-faccia}, i \in F'\}$, detto $S = \left(\bigcap_{i=1}^{d-k} A_i\right)^c$, il numero di h-facce che stiamo aggiungendo sarà allora $|S|$. Per calcolare $|S|$, possiamo riscrivere S in questo modo:

$$S = \left(\bigcap_{i=1}^{d-k} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{d-k} A_i^c.$$

Ricordiamo ora il principio di inclusione-esclusione secondo cui, data una famiglia finita di insiemi $\{A_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$, vale

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right| = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\},\ I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i^c\right|.$$

Nel nostro caso ogni intersezione di un numero fissato di insiemi A_i ha sempre la stessa cardinalità, quindi

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i^c\right|.$$

Allora dato che $|A_1^c| = \binom{d}{h}$ e $|A_1^c \cap A_2^c| = \binom{d-1}{h}$, in generale avremo $\left|\bigcap_{i=1}^{l} A_i^c\right| = \binom{d-l+1}{h}$. Sostituendo otteniamo

$$|S| = \sum_{l=1}^{d-k} (-1)^{l+1} \binom{d-k}{l} \binom{d-l+1}{h}.$$

Ora dobbiamo togliere le facce di dimensione h che non appartengono più a T_k^d. Queste sono tutte e sole le facce di dimensione h che contengono F^k. Il numero di tali facce corrisponde alle possibili scelte di $(h+1)-(k+1) = h-k$ vertici, cioè i vertici dell'h-faccia meno quelli di F^k, tra i $(d+2)-(k+1) = d+1-k$ vertici che rimangono togliendo da T_k^d i vertici di F^k, ossia $\binom{d+1-k}{h-k}$. Quindi le h-facce di T_k^d sono

$$\sum_{l=1}^{d-k} (-1)^{l+1} \binom{d-k}{l} \binom{d-l+1}{h} - \binom{d+1-k}{h-k}.$$

Vediamo ora alcune identità classiche in combinatoria che ci serviranno nella dimostrazione di 3.11.

Lemma 3.12. *(Convoluzione di Vandermonde). Siano* s, $t \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. *Allora:*

$$\binom{s+t}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k}$$

Dimostrazione. Per il teorema binomiale vale

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{s+t} \binom{s+t}{n} x^n &= (1+x)^{s+t} = (1+x)^s (1+x)^t \\ &= \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} x^k \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} x^k \\ &= \sum_{n=0}^{s+t} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} \right) x^n, \end{aligned}$$

da cui segue $\binom{s+t}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k}$. □

Lemma 3.13. *Siano* $r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. *Allora:*

$$\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \frac{r!}{(r-k)!} &= r(r-1)\dots(r-k+1) \\ &= (-1)^k (-r)(1-r)\dots(k-1-r) = (-1)^k \frac{(k-r-1)!}{(-r-1)!} \end{aligned}$$

□

Lemma 3.14. *(Variante della convoluzione di Vandermonde).*

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{d-k}{r-k} \binom{i+1}{k} = \binom{d-i-1}{r}$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che vale

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \binom{d-k}{r-k} \binom{i+1}{k} = \binom{i+r-d}{r}.$$

Sappiamo che $(-1)^{r-k} \binom{d-k}{r-k} = \binom{r-d-1}{r-k}$ per 3.13, quindi sostituendo otteniamo

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{r-d-1}{r-k} \binom{i+1}{k} = \binom{(i+1)+r-d-1}{r}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato 3.12.
Ora possiamo conlcudere la dimostrazione come segue

$$\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{d-k}{r-k}\binom{i+1}{k}=\frac{\binom{i+r-d}{r}}{(-1)^r}=\frac{(-1)^r\binom{d-i-1}{r}}{(-1)^r}=\binom{d-i-1}{r}$$

□

Siamo ora pronti per dimostrare la Proposizione 3.11.

Dimostrazione. Siano $h(T_k^d) = (h_0', \dots, h_d')$, e $f(T_k^d) = (f_0', \dots, f_{d-1}')$. Sappiamo che $h(T_0^d) = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^{d+1}$. Anzitutto proviamo che se $0 \le i \le k$ allora $h_i' = h_i + i = i+1$. Per quanto visto sull'f-vettore di T_k^d

$$f_h' = f_h + \sum_{l=1}^{d-k}(-1)^{l+1}\binom{d-k}{l}\binom{d-l+1}{h} - \binom{(d+2)-(k+1)}{(h+1)-(k+1)}.$$

Procediamo per induzione su i.
Passo base: per $i = 0$ vale $h_0' = h_0 = 1$.
Per $i = 1$ abbiamo

$$h_1' = \sum_{j=0}^{1}(-1)^{1-j}\binom{d-j}{d-1}\left[f_{j-1} + \sum_{l=1}^{d-k}(-1)^{l+1}\binom{d-k}{l}\binom{d-l+1}{j-1} - \binom{d+1-k}{j-1-k}\right]$$

e osserviamo che $\binom{d+1-k}{j-1-k} = 0$ per ogni $j \in \{0, 1\}$, e che nella seconda sommatoria abbiamo solo il termine corrispondente a $j = 1$. Inoltre $\sum_{j=0}^{1}(-1)^{1-j}\binom{d-j}{d-1}f_{j-1} = h_1$. Quindi

$$\begin{aligned} h_1' &= h_1 + \sum_{l=1}^{d-k}(-1)^{l+1}\binom{d-k}{l} \\ &= h_1 - \sum_{l=1}^{d-k}(-1)^{l}\binom{d-k}{l} \\ &= h_1 - \sum_{l=0}^{d-k}(-1)^{l}\binom{d-k}{l} + 1 = h_1 - (1-1)^{d-k} + 1 = h_1 + 1. \end{aligned}$$

Questo conclude il passo base per $i = 1$.
Passo induttivo: Supponiamo di avere provato che $h_r' = h_r + r = r + 1$ e lo proviamo per $i = r + 1$. Scriviamo esplicitamente h_{r+1}' e osserviamo che $\binom{d+1-k}{j-1-k} = 0$ per ogni

$0 \leq j \leq r+1$, quindi

$$\begin{aligned}
h'_{r+1} &= \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^{r+1-j} \binom{d-j}{d-(r+1)} f'_r \\
&= \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^{r+1-j} \binom{d-j}{d-r-1} \left[f_{j-1} + \sum_{l=1}^{d-k} (-1)^{l+1} \binom{d-k}{l} \binom{d-l+1}{j-1} \right] \\
&= h_{r+1} + \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^{r+1-j} \left[\binom{d-j+1}{d-r} - \binom{d-j}{d-r} \right] \sum_{l=1}^{d-k} (-1)^{l+1} \binom{d-k}{l} \binom{d-l+1}{j-1}.
\end{aligned}$$

Procediamo ora cercando di ricondurci all'ipotesi induttiva

$$\begin{aligned}
h'_{r+1} &= h_{r+1} - \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \left[\binom{d-j+1}{d-r} - \binom{d-j}{d-r} \right] \sum_{l=1}^{d-k} (-1)^{l+1} \binom{d-k}{l} \binom{d-l+1}{j-1} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{d-k} (-1)^{l+1} \binom{d-k}{l} \binom{d-l+1}{r} \\
&= h_{r+1} + \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{d-j}{d-r} \sum_{l=1}^{d-k} (-1)^{l+1} \binom{d-k}{l} \binom{d-l+1}{j-1} \\
&\quad - \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{d-j+1}{d-r} \sum_{l=1}^{d-k} (-1)^{l+1} \binom{d-k}{l} \binom{d-l+1}{j-1} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{d-k} (-1)^{l+1} \binom{d-k}{l} \binom{d-l+1}{r}
\end{aligned}$$

che per ipotesi induttiva diventa

$$h'_{r+1} = h_{r+1} + r + \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^{r+1-j} \binom{d-j+1}{d-r} \sum_{l=1}^{d-k} (-1)^{l+1} \binom{d-k}{l} \binom{d-l+1}{j-1}.$$

Quindi, se proviamo che

$$\sum_{j=0}^{r+1} (-1)^{r+1-j} \binom{d-j+1}{d-r} \sum_{l=1}^{d-k} (-1)^{l+1} \binom{d-k}{l} \binom{d-l+1}{j-1} = 1$$

avremo provato che $h'_{r+1} = h_{r+1} + r + 1 = r + 2$. Procediamo quindi riscalando gli indici tramite $j' = j - 1$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{r+1} (-1)^{r+1-j} \binom{d-j+1}{d-r} \sum_{l=1}^{d-k} (-1)^{l+1} \binom{d-k}{l} \binom{d-l+1}{j-1} \\
&= \sum_{j'=0}^{r} (-1)^{r-j'} \binom{d-j'}{r-j'} \sum_{l=1}^{d-k} (-1)^{l+1} \binom{d-k}{l} \binom{d-l+1}{j'} \\
&= (-1)^r \sum_{l=1}^{d-k} (-1)^{l+1} \binom{d-k}{l} \sum_{j'=0}^{r} (-1)^{j'} \binom{d-j'}{r-j'} \binom{d-l+1}{j'}
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo scambiato le due sommatorie.
Ora, usando la variante della convoluzione di Vandermonde 3.14, abbiamo

$$\sum_{j'=0}^{r}(-1)^{j'}\binom{d-j'}{r-j'}\binom{(d-l)+1}{j'}=\binom{d-1-(d-l)}{r}=\binom{l-1}{r}.$$

Quindi ora dobbiamo provare che

$$(-1)^r\sum_{l=1}^{d-k}(-1)^{l+1}\binom{d-k}{l}\binom{l-1}{r}=1.$$

Per dimostrare quest'ultima possiamo procedere così

$$(-1)^r\sum_{l=r+1}^{d-k}(-1)^{l+1}\binom{d-k}{l}\binom{l-1}{r}=\sum_{l=r+1}^{d-k}(-1)^{l+1-r}\binom{d-k}{d-k-l}\binom{l-1}{r}\overset{3.13}{=}$$
$$=\sum_{l=r+1}^{d-k}\binom{d-k}{d-k-l}\binom{-r-1}{l-1-r}$$

infine, usando la convoluzione di Vandermonde 3.12 dopo aver riscalato gli indici tramite $l'=l-r-1$ possiamo concludere

$$\sum_{l=r+1}^{d-k}\binom{d-k}{d-k-l}\binom{-r-1}{l-1-r}=\sum_{l'=0}^{d-k-r-1}\binom{d-k}{d-k-r-1-l'}\binom{-r-1}{l'}=\binom{d-k-r-1}{d-k-r-1}=1.$$

Resta ora da provare che $h'_i=h'_k=k+1$ per ogni $k+1\le i\le\lfloor d/2\rfloor$ (possiamo fermarci a $\lfloor d/2\rfloor$ grazie alle equazioni di Dehn-Sommerville).
Sia $i=k+n$, $1\le n\le\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor-k$, calcoliamo h'_{k+n}

$$h'_{k+n}=\sum_{j=0}^{k+n}(-1)^{(k+n)-j}\binom{d-j}{d-(k+n)}\left[f_{j-1}+\sum_{l=1}^{d-k}(-1)^{l+1}\binom{d-k}{l}\binom{d-l+1}{j-1}-\binom{d+1-k}{j-1-k}\right]$$

riptendo la stessa dimostrazione per induzione fatta prima notiamo che

$$\sum_{j=0}^{k+n}(-1)^{(k+n)-j}\binom{d-j}{d-(k+n)}\left[f_{j-1}+\sum_{l=1}^{d-k}(-1)^{l+1}\binom{d-k}{l}\binom{d-l+1}{j-1}\right]=h_{k+n}+k+n=k+1+n$$

quindi

$$h'_{k+n}=k+1+n-\sum_{j=0}^{k+n}(-1)^{(k+n)-j}\binom{d-j}{d-(k+n)}\binom{d+1-k}{j-1-k}.$$

Per concludere la dimostrazione mi basta provare che

$$\sum_{j=0}^{k+n}(-1)^{(k+n)-j}\binom{d-j}{d-(k+n)}\binom{d+1-k}{j-1-k}=n\qquad\text{per ogni } 1\le n\le\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor-k.$$

Allora

$$\sum_{j=0}^{k+n}(-1)^{(k+n)-j}\binom{d-j}{d-(k+n)}\binom{d+1-k}{j-1-k} = \sum_{j=0}^{k+n}(-1)^{(k+n)-j}\binom{d-j}{(k+n)-j}\binom{d+1-k}{j-1-k}$$

$$\overset{3.13}{=} \sum_{j=0}^{k+n}\binom{(k-d)+(n-1)}{(k+n)-j}\binom{d+1-k}{j-1-k}$$

riscaliamo gli indici tramite $j' = j-1-k$ e, usando ancora una volta la convoluzione di Vandermonde 3.12, abbiamo

$$\sum_{j'=0}^{n-1}\binom{(k-d)+(n-1)}{(n-1)-j'}\binom{d+1-k}{j'} = \binom{n}{n-1} = n.$$

dove nell'ultima sommatoria sono nulli i termini per $-1-k \leq j' < 0$. □

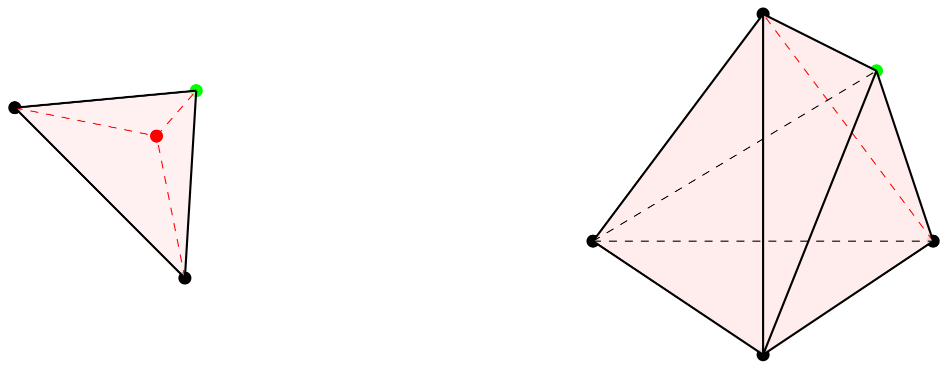


Figura 3.5: *La suddivisione stellare di un triangolo rispetto ad un suo vertice è isomorfa al triangolo di partenza (a sinistra). La suddivisione stellare di un tetraedro rispetto ad un suo lato (a destra). In verde è rappresentato il nuovo vertice, in rosso la faccia su cui stiamo facendo la stella e i lati che scompaiono sono tratteggiati in rosso.*

Definizione 3.15. (Convoluzione tra vettori). Siano $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ e $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_l)$. Definiamo $\mathbf{a} * \mathbf{b} := (c_0, \dots, c_{k+l})$ la *convoluzione* tra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, dove $c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$.

Sappiamo che il complesso del bordo di $\mathrm{st}(F, Q)$, dove F è una k-faccia e Q un d-politopo simpliciale, è il complesso $\mathrm{st}(\sigma, \Delta) = \{\Delta \setminus \sigma\} \cup \overline{x} \cdot \partial\sigma \cdot lk_\Delta\sigma$. Osserviamo che $lk_\Delta\sigma$ è a sua volta il complesso del bordo di un politopo: quello il cui reticolo delle facce è isomorfo all'intervallo $[F, Q]$. Vale quindi il seguente lemma:

Lemma 3.16. *Sia Q un d-politopo simpliciale e F una k-faccia di Q, allora*

$$h(st(F,Q)) = h(Q) + \underbrace{(0, 1, \dots, 1, 0)}_{k+2 \text{ elementi}} * h([F,Q])$$

Nel caso in cui $Q = T_0^d$ allora $lk_\Delta\sigma$ è un $(d-k-1)$-simplesso quindi $h([F,Q]) = (1,\dots,1) \in \mathbb{N}^{d-k}$.
Dimostriamo ora la Proposizione 3.11 come conseguenza del Lemma 3.16.

Dimostrazione. (Proposizione 3.11). Osserviamo che $h(Q) = h(T_0^d) = (1,\dots,1)$ ed è facile vedere che $(0,1,\dots,1,0) * (1,\dots,1)$ è la somma degli elementi sulle diagonali inverse della matrice $H \in M_{(d-k)\times(k+2)}$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a partire dall'elemento in alto a sinistra, cioè $0,\ 0+1,\ 0+1+1$, etc. $\square$

La suddivisione stellare è utile per costruire un insieme di politopi simpliciali i cui f-vettori generano lo spazio definito dalle equazioni di Dehn-Sommerville e, da questi, un insieme di politopi i cui f-vettori generano l'iperpiano di Eulero.
Nel teorema che segue vediamo che gli f-vettori dei politopi simpliciali T_k^d, con $0 \le k \le \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$, costituiscono una base per il sottospazio definito dalle equazioni di Dehn-Sommerville.

Teorema 3.17. *Gli f-vettori dei d-politopi simpliciali T_k^d, $0 \le k \le \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ sono una base del sottospazio di Dehn-Sommerville.*

Dimostrazione. Ci basta provare che $\left\{ f(T_k^d) \mid 0 \le k \le \lfloor \frac{d}{2} \rfloor \right\}$ sono affinemente indipendenti.
Dato che $f_{-1}(T_k^d) = 1$ per ogni k, è sufficiente mostrare che la matrice di questi f-vettori ha rango massimo. Ma dato che la trasformazione dagli f-vettori agli h-vettori è invertibile, è sufficiente considerare la matrice dei corrispondenti h-vettori. Dalla Proposizione 3.11, questa matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots\dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots\dots & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots\dots & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & ..\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1.. & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha chiaramente rango massimo. $\square$

Definiamo ora $T_k^{d,r}$ come la piramide iterata r volte sul $(d-r)$-politopo T_k^{d-r}, dove $0 \le r \le d-2$ e $1 \le k \le \lfloor \frac{d-r}{2} \rfloor$.

Vogliamo provare che gli f-vettori di questi politopi sono una base dell'iperpiano di Eulero. Ci basterà considerare il caso $k = 1$.

Teorema 3.18. *Gli f-vettori dei d-politopi $T_1^{d,r}$, $0 \leq r \leq d-2$, insieme a $f(T_0^d)$, sono una base dell'iperpiano di Eulero.*

Dimostrazione. Basta osservare che la matrice degli h-vettori ha rango massimo. Posizionando nella prima riga $h\left(T_0^d\right)$ e usando le proposizioni 3.3 e 3.11 otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha chiaramente rango massimo. $\square$

Capitolo 4

Il teorema di Bayer-Billera sugli f-vettori di bandiera

4.1 Una base per il sottospazio affine degli f-vettori di bandiera

Nel secondo capitolo abbiamo visto che se $\mathcal{L}(P)$ è il reticolo delle facce di un d-politopo P e $S \subseteq \{0, 1, \ldots, d-1\}$, allora il vettore $(f_S(P))_{S\subseteq[d]} \in \mathbb{N}^{2^d}$, dove $f_S(P)$ indica il numero di catene in $\mathcal{L}(P)$ i cui elementi hanno rango in S, è chiamato f-vettore di bandiera. Sebbene tale vettore abbia 2^d possibili componenti, alcune di esse sono ridondanti. In questo capitolo dimostreremo il teorema di Bayer-Billera sugli f-vettori di bandiera e scopriremo che il numero di entrate non ridondanti per l'f-vettore di bandiera di un d-politopo è esattamente $F_d - 1$, cioè il d-esimo numero di Fibonacci diminuito di 1.

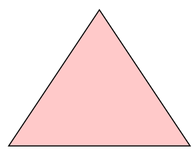
Alla fine del secondo capitolo abbiamo provato che la dimensione del sottospazio affine generato dagli f-vettori di bandiera di un poset Euleriano di rango d è al più $F_d - 1$ 2.18. Come vedremo questa è l'effettiva dimensione di questo spazio. Per dimostrare quanto appena affermato dobbiamo esibire F_d vettori di bandiera che siano affinemente indipendenti. Scopriremo che possiamo trovare questi f-vettori di bandiera rimanendo nella classe dei politopi, cioè trovando F_d vettori affinemente indipendenti della forma $(f_S(P))$ in modo tale che P sia un d-politopo. poiché $F_d = F_{d-1} + F_{d-2}$ sembra naturale provare a usare basi di aff $\left(f_S\left(\mathscr{P}^{d-1}\right)\right)$ e di aff $\left(f_S\left(\mathscr{P}^{d-2}\right)\right)$ per costruire una base per aff $\left(f_S\left(\mathscr{P}^{d}\right)\right)$. Nel corso della dimostrazione del teorema di Bayer-Billera costruiremo una base per il sottospazio affine generato dagli f-vettori di bandiera, provando di conseguenza che la sua dimensione è $F_d - 1$.

In seguito useremo la convenzione per la quale P indica il politopo "0-dimensionale", cioè un punto, che possiamo interpretare come una piramide sul politopo vuoto. Costruiamo dunque delle parole composte in questo modo:

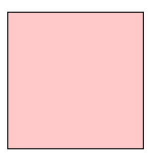
- le sole lettere ammesse sono P, che indica la piramide, e B che indica la bipiramide,
- ogni parola finisce in P^2,
- non sono ammesse parole con due B consecutive.

Ogni parola di questa forma rappresenta la classe di equivalenza del politopo ottenuto costruendo piramidi e bipiramidi a partire dal punto e seguendo l'ordine delle lettere che compaiono nella parola (da destra verso sinistra). Chiaramente, la dimensione del politopo rappresentato da una di queste parole sarà data dalla lunghezza della parola meno 1. Per $d \geq 1$ sia Ω^d l'insieme dei d-politopi corrispondenti a parole di lunghezza $d+1$ di questa forma. Per convenzione poniamo $\Omega^0 = \{\emptyset, P\}$. Grazie al teorema di Bayer-Billera dimostreremo che gli f-vettori di bandiera dei d-politopi di Ω^d sono affinemente indipendenti da cui segue che sono una base.
Vediamo qualche esempio.

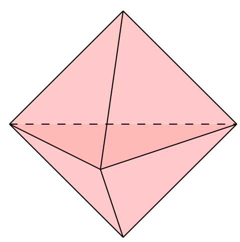
$\mathbf{P^2} = \mathbf{PP}$ *è un segmento.*



$\mathbf{P^3} = \mathbf{PPP}$ *è un triangolo.*



$\mathbf{BP^2} = \mathbf{BPP}$ *è un quadrato.*



$\mathbf{BP^3} = \mathbf{BPPP}$ *è una bipiramide a base triangolare.*

Ad esempio: $\Omega^1 = \{P^2\}$, $\Omega^2 = \{P^3, BP^2\}$ e $\Omega^3 = \{P^4, BP^3, PBP^2\}$.
In Ω^d ci siamo ristretti a parole che terminano in P^2 perché $BP = P^2$.

Osservazione 4.1. La cardinalità di Ω^d è chiaramente F_d. Infatti, per una parola in Ω^d abbiamo due possibilità: se inizia per P allora è della forma PQ dove Q è una qualche parola in Ω^{d-1}; se invece inizia per B allora è della forma BPQ dato che due B consecuitve non sono ammesse, con Q parola in Ω^{d-2}. Di conseguenza $\left|\Omega^d\right| = \left|\Omega^{d-1}\right| + \left|\Omega^{d-2}\right|$, cioè Ω^d soddisfa la relazione ricorsiva della sequenza Fibonacci. Dato che $|\Omega^1| = |\{P^2\}| = 1$ e $|\Omega^2| = |\{P^3, BP^2\}| = 2$, otteniamo $\left|\Omega^d\right| = F_d$.

4.2 La dimostrazione del teorema di Bayer-Billera

Teorema 4.2. *(Bayer-Billera). Per $d \geq 1$, gli f-vettori di bandiera degli F_d elementi di Ω^d sono affinemente indipendenti.*

La dimostrazione di questo risultato è difficile perché, a differenza di quanto accadeva con gli f-vettori (i vettori delle facce), gli effetti delle operazioni di piramide e bipiramide sugli f-vettori di bandiera non è semplice da studiare. Nel terzo capitolo abbiamo visto come sia relativamente facile descrivere le facce di una piramide e di una bipiramide su un politopo in funzione delle facce del politopo di partenza. Osserviamo che tutte le facce di un politopo corrispondente ad una parola in Ω^d appartengono all'insieme $\bigcup_{i=0}^{d-1} \Omega^i$. L'idea della dimostrazione consiste nel definire un vettore che conta il numero di facce di un dato tipo combinatorio (classe di isomorfismo rispetto all'equivalenza combinatoria) $Q \in \Omega^d$, in seguito sfruttare la ricorsività di Ω^d per dimostrare che questi vettori sono indipendenti e, infine, trovare una biiezione che trasformi questi vettori negli f-vettori di bandiera.

Come scopriremo nel corso della dimostrazione, non avremo bisogno di considerare le faccette di $Q \in \Omega^d$. Le facce rimanenti di Q quindi corrispondono a parole nell'insieme $\mathscr{M}^d = \bigcup_{i=0}^{d-2} \Omega^i$; si dimostra facilmente per induzione che $\left|\mathscr{M}^d\right| = \left|\Omega^d\right| = F_d$.

Sia $Q \in \Omega^d$ un d-politopo, costruiamo un vettore riga $(a_{QM})_{M \in \mathscr{M}^d}$ dove a_{QM} è il numero di facce di Q di tipo combinatorio M. Se facciamo variare Q tra gli elementi di Ω^d, otteniamo una matrice quadrata $F_d \times F_d$ $A^d = (a_{QM})$. Il nostro obiettivo sarà provare che questa matrice ha rango per righe massimo. Procediamo quindi per induzione su d.

Nel corso della dimostrazione proveremo che A^d è equivalente alla matrice degli f-vettori di bandiera; a tal fine dobbiamo prima introdurre altre due matrici che chiameremo K^d e T^d. La matrice $K^d \in M_{F_d \times F_d}$ ha le righe indicizzate dagli elementi di Ω^d, le colonne da quelli di Ψ^d, ovvero l'insieme dei sottoinsiemi $S \subseteq \{0, 1, \ldots, d-2\}$ che non contengono due interi consecutivi, ed entrate $k_{QS} = f_S(Q)$. Quindi K^d è una sottomatrice della matrice degli f-vettori di bandiera. Infine definiamo la matrice $T^d \in M_{F_d \times F_d}$ diagonale a blocchi, le cui righe sono indicizzate da $\mathscr{M}^d$, le colonne da Ψ^d e i blocchi diagonali hanno la seguente forma:

$$T^d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & K^1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & K^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & K^{d-2} \end{pmatrix}$$

In questa matrice ogni blocco diagonale K^j è posizionato in corrispondenza delle righe indicizzate da parole di lunghezza $j+1$ e delle colonne indicizzate dagli insiemi di Ψ^d che hanno j come massimo elemento. Le prime due colonne sono indicizzate rispettivamente da $\emptyset$ e $\{0\}$. Quindi, se scriviamo T^d come $T^d = (t)_{MS}$, abbiamo che $t_{MS} = k_{M,S\setminus j} = f_{S\setminus j}$ se M ha lunghezza $j+1$ e j è il massimo di S, $t_{MS} = 0$ altrimenti.

Lemma 4.3. *T^d è la matrice di trasformazione da A^d a K^d, ovvero*

$$A^d\, T^d = K^d.$$

Dimostrazione. Calcoliamo l'elemento di posto QS di $A^d\, T^d$, $\left(A^d\, T^d\right)_{QS} = \left(\text{riga } Q \text{ di } A^d\right)\cdot \left(\text{colonna } S \text{ di } T^d\right)$. Sia j il massimo di S; per la struttura della matrice T^d il prodotto righe per colonne coinvolgerà solo le componenti della riga Q indicizzate con facce corrispondenti a parole di lunghezza $j+1$. Quindi, indicando con $l(M)$ la lunghezza della parola $M \in \mathscr{M}^d$, otteniamo

$$\begin{aligned} \left(A^d\, T^d\right)_{QS} &= \sum_{\substack{M\in\mathscr{M}^d \\ l(M)=j+1}} a_{QM}\cdot k_{M,S\setminus j} \\ &= \sum_{\substack{M\in\mathscr{M}^d \\ l(M)=j+1}} (\text{numero di facce di } Q \text{ di tipo } M)\left(f_{S\setminus j}\,(M)\right) \\ &= \sum_{\substack{F \text{ faccia di } Q \\ \dim(F)=j}} f_{S\setminus j}\,(F) = f_S\,(Q) = k_{QS}. \end{aligned}$$

□

Possiamo dimostrare ora il Teorema di Bayer-Billera 4.2.

Dimostrazione. (Teorema di Bayer-Billera).
Vogliamo provare per induzione che A^d e K^d sono invertibili.
Passo base: Per $d = 1$ abbiamo $A^1 = K^1 = (1)$.

Se $d = 2$

$$A^2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \emptyset & P \end{array} \\ \begin{array}{c} P^3 \\ BP^2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} = K^2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \emptyset & \{0\} \end{array} \\ \begin{array}{c} P^3 \\ BP^2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

quindi $\mathrm{rg}\,(A^2) = \mathrm{rg}\,(K^2) = 2$.

Passo induttivo: Assumiamo $d \geq 3$ e per ogni $r < d$ $\mathrm{rg}\,(A^r) = \mathrm{rg}\,(K^r) = F_r$.
Vogliamo costruire A^d a partire da A^{d-1} e da A^{d-2} e, in seguito, provare che è invertibile.
Introduciamo la matrice $E = (e_{QM})$ di dimensione $F_d \times F_d$ della forma

$$E = \left(\begin{array}{c|c} A_{d-1} & * \\ \hline \mathbf{0} & I_{F_{d-2}} \end{array}\right)$$

con righe indicizzate da Ω^d e colonne indicizzate da $\mathscr{M}^d$. Quindi se $Q \in \Omega^{d-1}$, la riga indicizzata con Q in A^{d-1} diventa la riga PQ di E, mentre per $M \in \mathscr{M}^{d-1}$, la colonna M di A^{d-1} resta la colonna M di E. Invece, se $Q \in \Omega^{d-1}$ e $M \in \mathscr{M}^d \setminus \mathscr{M}^{d-1}$ (cioè, M è una parola di lunghezza $d-1$), definiamo

$$e_{PQ,M} = \text{ il numero di facce di } Q \text{ di tipo combinatorio } M.$$

Quest'ultime sono le entrate della matrice che abbiamo indicato con $*$, mentre il blocco indicato con $I_{F_{d-2}}$ è la matrice identità $F_{d-2} \times F_{d-2}$, quindi $\mathrm{rg}\,(E) = F_{d-1} + F_{d-2} = F_d$.
L'obiettivo dell'ultima parte di questa dimostrazione sarà dimostrare che A^d può essere ottenuta a partire da E effettuando solo operazioni elementari sulle righe e sulle colonne. Vedremo prima le operazioni sulle righe e in seguito quelle sulle colonne. Le operazioni finali sulle colonne trasformeranno le facce di Q in quelle di PQ, ma le utime F_{d-2} righe di E sono quelle indicizzate da parole che iniziano per B e che quindi corrispondono a bipiramidi, non a piramidi. Dovremo quindi mettere nelle ultime F_{d-2} righe vettori che dopo aver applicato le operazioni sulle colonne restituiscano il vettore delle facce di una bipiramide.
Chiameremo G la matrice ottenuta da E mediante operazioni elementari sulle righe. Per costruire G seguiamo queste regole:

i) Le prime F_{d-1} righe di G, quelle che corrispondono a parole che iniziano per P, restano invariate.

ii) Se $Q \in \Omega^{d-2}$ e non inizia per B, allora la riga BPQ di G è ottenuta come somma delle righe PBQ e BPQ di E.

Se $Q \in \Omega^{d-2}$ e inizia per B, allora PBQ non è una parola ammissibile per Ω^d dato che avrebbe due B consecutive e, di conseguenza, non corrisponderebbe ad alcuna riga di E.

Dobbiamo quindi cercare di imitare quanto fatto nel caso precedente scrivendo il vettore delle facce di BQ come combinazione lineare delle prime F_{d-1} righe di E.
Il seguente lemma garantisce che questa combinazione lineare esista sempre.

Lemma 4.4. *Sia v il vettore riga le cui entrate sono date da*

$$v_M = \text{ il numero di facce di } BQ \text{ di tipo } M \qquad \text{dove } M \in \mathscr{M}^d,$$

allora v è linearmente dipendente dalle prime F_{d-1} righe di E.

Dimostrazione. Per quanto detto nel Lemma 4.3 sappiamo che $A^d\, T^d = K^d$, quindi

$$v \left(\begin{array}{c|c} T^{d-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & K^{d-2} \end{array} \right) = (f_S\,(BQ)) \in \mathbb{N}^{F_d}, \quad \text{dove } S \in \Psi^d.$$

Se ora aggiungiamo il vettore v nell'ultima riga della matrice formata dalle prime F_{d-1} righe di E e moltiplichiamo per T^d abbiamo che

$$\left(\begin{array}{c|c} A^{d-1} & * \\ \hline \multicolumn{2}{c}{v} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} T^{d-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & K^{d-2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} K^{d-1} & * \\ \hline \multicolumn{2}{c}{f_S\,(BQ)} \end{array} \right).$$

Dalla Proposizione 2.18 ci sono al più F_{d-1} f-vettori di bandiera indipendenti in dimensione $d-1$, quindi il rango della matrice ottenuta è F_{d-1}.

Ma, ricordando che la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} T^{d-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & K^{d-2} \end{array} \right)$$

è invertibile, dato che sia T^{d-1} che K^{d-2} sono matrici invertibili per ipotesi induttiva, concludiamo che

$$\operatorname{rg} \left(\begin{array}{c|c} A^{d-1} & * \\ \hline \multicolumn{2}{c}{v} \end{array} \right) = F_{d-1}.$$

Quindi v è combinazione lineare delle prime F_{d-1} righe di E.

□

Grazie a questo lemma possiamo finire di descrivere le operazioni sulle righe della matrice E:

iii) se $Q \in \Omega^{d-2}$ e inizia per B, otteniamo la riga BPQ di G aggiungendo alla riga BPQ di E la combinazione lineare delle prime F_{d-1} righe di E data dal Lemma 4.4.

Abbiamo così ottenuto la matrice $G = (g_{QM})$ in modo che le prime F_{d-1} righe siano le stesse di E. Inoltre, l'elemento di posto BPQ, M è dato da

$$g_{BPQ,M} = \text{ il numero di facce di } BQ \text{ di tipo combinatorio } M + \chi\,(M = Q)\,.$$

Qui $\chi\,(M = Q) = 1$ se $M = Q$ e $\chi\,(M = Q) = 0$ altrimenti. Infatti, se $M = Q$ ci troviamo sulla diagonale di E e quindi aggiungiamo l'1 della matrice $I_{F_{d-2}}$.

Chiaramente vale $\mathrm{rg}\,(G) = \mathrm{rg}\,(E) = F_d$.

Descriviamo ora le operazioni elementari sulle colonne di G e chiamiamo $H = (h_{QM})$ la matrice ottenuta da G in seguito a tali operazioni.

i) Se $M \in \mathscr{M}^d$ inizia per B, lasciamo la colonna nella stessa posizione.

ii) Se $M = PN$, $N \in \mathscr{M}^{d-1}$, otteniamo la colonna M di H come somma delle colonne N e M di G.

Osservazione 4.5. Sia Q un politopo, allora costruire piramidi o bipiramidi su Q non aumenta il numero di facce di tipo bipiramidale (si veda sezione 3.1 e sezione 3.2).

Abbiamo così quattro casi da considerare:

i) Supponiamo che $Q \in \Omega^{d-1}$, $M \in \mathscr{M}^d$, e che M inizi per B. Allora $h_{PQ,M} = g_{PQ,M}$ perché la colonna M rimane invariata in H dato che M inizia per B. A sua volta $g_{PQ,M} = e_{PQ,M}$, dato che le prime F_{d-1} righe di G sono esattamente le prime F_{d-1} righe di E. Ma allora abbiamo che

$$\begin{aligned} h_{PQ,M} = g_{PQ,M} = e_{PQ,M} &= \text{il numero di facce di } Q \text{ di tipo } M \\ &= \text{il numero di facce di } PQ \text{ di tipo } M = a_{PQ,M}. \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza vale per l'Osservazione 4.5.

ii) Se $Q \in \Omega^{d-1}$, $N \in \mathscr{M}^{d-1}$, allora $h_{PQ,PN} = g_{PQ,N} + g_{PQ,PN}$ per come abbiamo definito le operazioni sulle colonne, e $g_{PQ,N} + g_{PQ,PN} = e_{PQ,N} + e_{PQ,PN}$ perché le prime F_{d-1} righe di E sono uguali a quelle di G. Per definizione abbiamo

$$\begin{aligned} e_{PQ,N} + e_{PQ,PN} = &\text{ il numero di facce di } Q \text{ di tipo } N + \text{ il numero di facce di } Q \text{ di tipo } PN \\ = &\text{ il numero di facce di } PQ \text{ di tipo } PN \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che, costruendo una piramide PQ su Q, per ogni faccia di Q di tipo N otteniamo una faccia di tipo piramidale su N di PQ. Inoltre ogni faccia di Q di tipo PN rimane una faccia di tipo PN anche in PQ. Quindi le facce di tipo PN in PQ saranno date dalla somma delle facce di tipo N

e di tipo PN di Q. Infine, ricordando che il numero di facce di PQ di tipo PN è $a_{PQ,PN}$, possiamo concludere che

$$h_{PQ,PN} = a_{PQ,PN}.$$

iii) Consideriamo ora il caso $Q \in \Omega^{d-2}$, $M \in \mathscr{M}^d$, e M inizia per B. Allora otteniamo

$$\begin{aligned} h_{BPQ,M} = g_{BPQ,M} &= \text{ il numero di facce di } BQ \text{ di tipo } M + \chi\,(M = Q) \\ &= \text{ il numero di facce di } Q \text{ di tipo } M \\ &= \text{ il numero di facce di } PQ \text{ di tipo } M \\ &= \text{ il numero di facce di } BPQ \text{ di tipo } M \\ &= a_{BPQ,M}. \end{aligned}$$

Qui abbiamo fatto uso ancora una volta dell'osservazione 4.5.

iv) L'ultimo caso che ci rimane da analizzare è quello in cui $Q \in \Omega^{d-2}$ e $N \in \mathscr{M}^{d-1}$. Per come abbiamo agito sulle colonne di H, abbiamo:

$$h_{BPQ,PN} = g_{BPQ,N} + g_{BPQ,PN}$$

e, per definizione, sappiamo che:

$$\begin{aligned} g_{BPQ,N} + g_{BPQ,PN} = &\text{ numero di facce di } BQ \text{ di tipo } N \\ &+ \text{numero di facce di } BQ \text{ di tipo } PN + \chi(PN = Q). \end{aligned}$$

Distinguiamo due casi:

a) Sia N a sua volta una piramide con base L.
Osserviamo che per ogni faccia di Q di tipo L, quando costruiamo la bipiramide BQ su Q, otteniamo due facce di tipo piramidale su L, ossia di tipo $N = PL$, in BQ. Inoltre, ogni faccia di tipo N in Q rimane tale anche in BQ. Quindi il numero di facce di BQ di tipo N sarà dato dalla somma fra il doppio del numero di facce di Q di tipo L e il numero di facce di Q di tipo N. Analogamente, il numero di facce di BQ di tipo PN sarà dato dalla somma fra il doppio del numero di facce di Q di tipo N e il numero di facce di Q di tipo PN. Chiaramente, se $PN = Q$ l'unica faccia di Q di tipo PN è tutto Q,

il che giustifica il termine $\chi(PN = Q)$. Per quanto detto

$$\begin{aligned} h_{BPQ,PN} &= 2 \times \text{il numero di facce di } Q \text{ di tipo } L \\ &\quad + \text{il numero di facce di } Q \text{ di tipo } N \\ &\quad + 2 \times \text{il numero di facce di } Q \text{ di tipo } N \\ &\quad + \text{ il numero di facce di } Q \text{ di tipo } PN \\ &= 2 \times \text{il numero di facce di } Q \text{ di tipo } L \\ &\quad + 3 \times \text{il numero di facce di } Q \text{ di tipo } N \\ &\quad + \text{il numero di facce di } Q \text{ di tipo } PN. \end{aligned}$$

Per quanto visto nel punto ii)

$$\begin{aligned} \text{il numero di facce di } PQ \text{ di tipo } N &= \text{il numero di facce di } Q \text{ di tipo } L \\ &\quad + \text{il numero di facce di } Q \text{ di tipo } N, \end{aligned}$$

analogamente

$$\begin{aligned} \text{il numero di facce di } PQ \text{ di tipo } PN &= \text{il numero di facce di } Q \text{ di tipo } N \\ &\quad + \text{il numero di facce di } Q \text{ di tipo } PN. \end{aligned}$$

Come prima, nel caso in cui $PN = Q$ abbiamo un'unica faccia di Q di tipo PN che è Q stesso. Quindi

$$\begin{aligned} h_{BPQ,PN} &= 2 \times \text{il numero di facce di } PQ \text{ di tipo } N \\ &\quad + \text{il numero di facce di } PQ \text{ di tipo } PN \\ &= \text{il numero di facce di } BPQ \text{ di tipo } PN \\ &= a_{BPQ,PN}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che

$$\begin{aligned} \text{il numero di facce di } BPQ \text{ di tipo } PN &= 2 \times \text{il numero di facce di } PQ \text{ di tipo } N \\ &\quad + \text{numero di facce di } PQ \text{ di tipo } PN. \end{aligned}$$

b) Se N è una bipiramide, allora il numero di facce di BQ di tipo N è uguale al numero di facce di Q di tipo N per l'Osservazione 4.5. Inoltre, il numero di facce di BQ di tipo PN si calcola esattamente come nel caso a). Quindi

$$\begin{aligned} h_{BPQ,PN} &= 3 \times \text{il numero di facce di } Q \text{ di tipo } N \\ &\quad + \text{il numero di facce di } Q \text{ di tipo } PN. \end{aligned}$$

Dato che N è una faccia bipiramidale, il numero di facce di PQ di tipo N è uguale al numero di facce di Q di tipo N. Invece il numero di facce di PQ di tipo PN è la somma del numero di facce di tipo N e di tipo PN di Q. In conclusione

$$\begin{aligned} h_{BPQ,PN} &= 2 \times \text{il numero di facce di } PQ \text{ di tipo } N \\ &\quad + \text{il numero di facce di } PQ \text{ di tipo } PN \\ &= a_{BPQ,PN}. \end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato che $H = A^d$, e che $\operatorname{rg}\left(A^d\right) = \operatorname{rg}(H) = F_d$.
Per ipotesi induttiva, K^r è invertibile per ogni $r < d$; quindi, poiché T^d era diagonale a blocchi con I_2 e K^r per $1 \leq r \leq d-2$ sulla diagonale, segue che anche T^d è invertibile. Inoltre, dato che $K^d = A^d\, T^d$ per il Lemma 4.3, abbiamo che anche K^d è invertibile e quindi $\operatorname{rg}\left(A^d\right) = \operatorname{rg}\left(K^d\right) = F_d$. □

Grazie alla Proposizione 2.18 e al Teorema 4.2 abbiamo dimostrato il seguente teorema

Teorema 4.6. *Per ogni $d \geq 1$,*

$$\begin{aligned} &\dim \operatorname{aff}\left\{ (f_S(P))_{S\subseteq[d]} \,\middle|\, P \text{ è un poset Euleriano di rango } d \right\} \\ =&\dim \operatorname{aff}\left\{ (f_S(P))_{S\subseteq[d]} \,\middle|\, P \text{ è un } d\text{-politopo} \right\} = F_d - 1. \end{aligned}$$

Sappiamo che già in dimensione 4 gli f-vettori dei d-politopi non sono stati ancora caratterizzati. Combinando i risultati visti nel secondo capitolo e in questo possiamo tuttavia dire che le componenti degli f-vettori di bandiera dei 4-politopi sono combinazioni affini dei numeri di bandiera f_0, f_1, f_2 e $f_{\{0,2\}}$.

Bibliografia

[BB84] Margaret M. Bayer e Louis J. Billera. *"Counting faces and chains in polytopes and posets"*. In: *Combinatorics and algebra* 34 (1984), pp.207-252. https://doi.org/10.1090/conm/034/777703

[BB85] Margaret M. Bayer e Louis J. Billera. *"Generalized Dehn-Sommerville relations for polytopes, spheres and Eulerian partially ordered sets"*. In: *Inventiones mathematicae* 79 (1985), pp.143-157. https://doi.org/10.1007/bf01388660

[Grü03] Branko Grünbaum. *Convex Polytopes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2003. https://doi.org/0.1007/978-1-4613-0019-9

[Joh66] John Riordan. *"The number of faces of simplicial polytopes"*. In: *Journal of Combinatorial Theory* 1 (1966), pp.82-95. https://doi.org/10.1016/s0021-9800(66)80006-6

[Zie94] Günter M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1994. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8431-1