

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

I Teoremi di  
Cartan-Hadamard e di Gromov  
in geometria metrica

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:  
Prof. Stefano Riolo

Presentata da:  
Marco Longo

Anno Accademico 2023-2024



*Si parte,  
si torna insieme...*



# Introduzione

L'oggetto principale di questa tesi sono gli spazi  $CAT(0)$ , cioè spazi metrici che soddisfano la *disuguaglianza*  $CAT(0)$ . Tale disuguaglianza incapsula il concetto di curvatura non positiva in geometria riemanniana e ci permette di trattarlo in un contesto molto più ampio, quello degli spazi metrici geodetici.

Questo studio trova origine in un lavoro di A.D. Alexandrov del 1957, in cui viene data una serie di definizioni equivalenti su cosa significa per uno spazio metrico essere a curvatura limitata superiormente da un numero reale  $k$ . Una di queste viene poi messa in risalto da Gromov che le dà il nome di disuguaglianza  $CAT(k)$  (le cui lettere indicano le iniziali di E.Cartan, A.D.Alexandrov e A.Topogonov, i quali hanno contribuito significativamente allo studio della nozione di curvatura); forniamo alcuni elementi preliminari per comprenderla.

Uno spazio metrico  $X$  si dice *geodetico* se per ogni coppia di punti esiste una *geodetica*, cioè un cammino tra essi che sia isometrico ad un segmento  $[0, l]$ . Un *triangolo geodetico* è il dato di tre punti, detti *vertici*, e di tre geodetiche che li connettono, dette *lati*. L'idea è, per ogni triangolo geodetico  $\Delta$  in  $X$ , di considerare un triangolo  $\bar{\Delta}$  su  $\mathbb{R}^2$ , detto *triangolo di comparazione*, tale che la distanza tra i suoi vertici sia uguale alla distanza tra i vertici del primo. Diciamo che  $X$  soddisfa la disuguaglianza  $CAT(0)$  se la distanza tra ogni coppia di punti in  $\Delta$  è minore o uguale della distanza dei corrispondenti punti in  $\bar{\Delta}$ . Diciamo invece che  $X$  è a *curvatura non positiva* se è localmente  $CAT(0)$ .

Già nei suoi primi lavori Alexandrov decide di considerare i triangoli di comparazione non solo in  $\mathbb{R}^2$ , ma anche negli spazi  $M_k^2$ , i quali: se  $k < 0$  sono definiti come il piano iperbolico  $\mathbb{H}^2$  con la funzione distanza riscalata di un fattore  $1/\sqrt{-k}$ ; se  $k = 0$  come il piano Euclideo; se  $k > 0$  come la sfera  $\mathbb{S}^2$  con la metrica riscalata di un fattore  $1/\sqrt{k}$ . La *disuguaglianza*  $CAT(k)$  è definita in modo analogo alla disuguaglianza  $CAT(0)$ , considerando però il triangolo di comparazione nello spazio  $M_k^2$ .

Come detto sopra, l'oggetto principale di questo studio sono gli spazi  $CAT(0)$ , ma introdurremo anche la nozione di  $CAT(1)$  (Sezione 2.2), che giocherà un ruolo

---

importante nell'ultimo capitolo. Gli spazi  $CAT(k)$ , per gli altri  $k$  reali, non verranno trattati.

Lo scopo della tesi è dimostrare il "Teorema di Cartan-Hadamard" per la geometria metrica, cioè una generalizzazione di Gromov del famoso teorema di geometria riemanniana. Questo afferma che una condizione locale come quella di curvatura non positiva, per spazi completi e connessi, si estende globalmente sul rivestimento universale.

Una proprietà degli spazi  $CAT(0)$  è di essere contraibili, quindi il teorema ha come conseguenza che, se uno spazio topologico connesso ammette una metrica completa e nonpositivamente curva, allora è asferico. Vediamo quindi come una condizione geometrica aiuti a determinare fatti topologici.

Per usare il Teorema di Cartan-Hadamard ci serve uno spazio con una metrica nonpositivamente curva, o un metodo per determinare se uno spazio topologico la ammette. Ci viene in aiuto il Criterio di Gromov, che introdurremo nell'ultimo capitolo. Questo criterio ci dice che un *complesso metrico*, ovvero un complesso simpliciale localmente finito che dotiamo di una metrica, è a curvatura non positiva se e solo se il link di ogni suo vertice è  $CAT(1)$ , dove il *link* rappresenta la 'geometria infinitesima' dello spazio attorno ad un punto. In particolare, nel caso dei complessi metrici 2-dimensionali, la condizione di avere il link  $CAT(1)$  equivale alla condizione di non aver loop di lunghezza maggiore di  $2\pi$  nel link.

Se quindi abbiamo uno spazio topologico con la stessa omotopia di un complesso simpliciale che ammette una curvatura non positiva, allora è asferico. Abbiamo quindi una condizione sufficiente per determinare se uno spazio è asferico.

Nel primo capitolo, nelle prime due sezioni, introdurremo alcuni concetti base per lo studio degli spazi  $CAT(0)$ . Nelle due sezioni seguenti daremo gli strumenti utili alla dimostrazione di Cartan-Hadamard: capiremo infatti come si può trasferire una metrica da uno spazio metrico al suo rivestimento universale. Nelle ultime due sezioni, invece, studieremo due particolari costruzioni di spazi metrici, il *cono su uno spazio metrico* ed i *complessi metrici*.

Nel secondo capitolo introdurremo gli spazi  $CAT(0)$ , daremo alcune definizioni equivalenti utilizzando la nozione di angolo introdotta nel primo capitolo, e dimostreremo alcune proprietà di questi spazi. Seguirà un'introduzione veloce sugli spazi  $CAT(1)$  e un teorema che in un qualche senso collega gli spazi  $CAT(0)$  e  $CAT(1)$ , che sarà uno strumento fondamentale per la dimostrazione del Criterio di Gromov.

Il terzo capitolo si concentrerà unicamente sulla dimostrazione del Teorema di Cartan-Hadamard, che consisterà nella 'costruzione a mano' del rivestimento universale dello spazio considerato, per poi mostrare le sue proprietà.

Nell'ultimo capitolo dimostreremo il Criterio di Gromov e forniremo alcuni esempi su come utilizzarlo.



# Indice

<b>1</b>	<b>Spazi metrici</b>	<b>1</b>
1.1	Geodetiche e angoli . . . . .	1
1.2	Lunghezza di una curva . . . . .	6
1.3	Spazi di lunghezza . . . . .	8
1.4	Metrica sui rivestimenti . . . . .	10
1.5	Alcune costruzioni . . . . .	14
1.5.1	Complessi metrici . . . . .	14
1.5.2	Cono su uno spazio metrico . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Spazi CAT(0)</b>	<b>27</b>
2.1	Proprietà degli spazi CAT(0) . . . . .	27
2.2	Un'altra curvatura . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Cartan-Hadamard</b>	<b>35</b>
3.1	Un lemma fondamentale . . . . .	35
3.2	Costruzione del rivestimento universale . . . . .	39
3.3	Dimostrazione Cartan-Hadamard . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Criterio di Gromov</b>	<b>49</b>
4.1	Un particolare tipo di esempi . . . . .	53



# Capitolo 1

## Spazi metrici

### 1.1 Geodetiche e angoli

**Definizione 1.1.** Sia  $(X, d)$  spazio metrico. Una curva  $c : [0, l] \rightarrow X$  da  $x$  a  $y$  si dice *geodetica* se

$$d(c(t), c(t')) = |t - t'| \quad \forall t, t' \in [0, l].$$

In particolare si ha che  $d(x, y) = l$ . Indichiamo la sua immagine con  $[x, y]$ , che chiamiamo *segmento* (a volte abuseremo del termine geodetica indicando con esso il segmento  $[x, y]$ ).

Chiamiamo *geodetica linearmente riparametrizzata* una curva  $c : [0, 1] \rightarrow X$  tale che

$$d(c(t), c(t')) = \lambda |t - t'| \quad \forall t, t' \in [0, 1].$$

Quindi ad ogni geodetica  $c$  corrisponde una geodetica  $\bar{c}$  linearmente riparametrizzata, prendendo  $\bar{c}(t) = c(\lambda t)$ , con  $\lambda = d(x, y)$ .

Un sottoinsieme  $C$  di uno spazio geodetico si dice *convesso* se ogni segmento tra due punti di  $C$  sta tutto in  $C$ . Diciamo che l'*inviluppo convesso* di un insieme  $C$  è l'intersezione di tutti i convessi contenenti  $C$ , quindi questa definizione coincide con quella standard nello spazio euclideo.

Una *geodetica locale* è una curva  $c : I \rightarrow X$  tale che per ogni  $t \in I$ , con  $I$  intervallo chiuso, esiste  $\epsilon > 0$  per cui

$$c|_{I \cap [t-\epsilon, t+\epsilon]}$$

è una geodetica.

Uno spazio metrico  $X$  si dice (*unicamente*) *geodetico* se esiste una (unica) geodetica tra ogni coppia di punti di  $X$ . Se ciò vale per geodetiche locali,  $X$  si dice

(unicamente) *local-geodetico*.

Se invece per ogni coppia di punti a distanza minore di  $r$  esiste una (unica) geodetica, allora si dice che  $X$  è (unicamente) *r-geodetico*.

Se  $X$  è unicamente (local-)geodetico, diciamo che le geodetiche (locali) *variano in modo continuo con gli estremi* se, indicando con  $c(x, y)$  la riparametrizzazione lineare dell'unica geodetica (locale) da  $x$  a  $y$ , prendiamo  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \rightarrow y$ , allora

$$c(x_n, y_n) \rightarrow c(x, y)$$

uniformemente.

Chiamiamo *triangolo geodetico* il dato di tre punti  $x, y, z$  che chiamiamo *vertici*, e di tre segmenti  $[x, y], [y, z], [z, x]$  che chiamiamo *lati*. Lo indichiamo con  $\Delta(x, y, z)$  (o eventualmente con  $\Delta([x, y], [y, z], [z, x])$ ). A volte abuseremo del termine triangolo geodetico indicando con esso e con il simbolo  $\Delta(x, y, z)$  l'unione delle tre geodetiche  $[x, y], [y, z], [z, x]$ .

*Osservazione 1.1.1.* Sia  $z \in [x, y]$  segmento, allora la disuguaglianza triangolare diventa banale, cioè

$$d(x, y) = d(x, z) + d(y, z).$$

Infatti se  $c : [0, l] \rightarrow X$  la geodetica di immagine  $[x, y]$ , con  $z = c(t)$ , allora

$$\begin{aligned} d(x, z) + d(z, y) &= |t - 0| + |l - t| = \\ &= l = d(x, y). \end{aligned}$$

**Definizione 1.2.** Sia  $(X, d)$  spazio metrico e siano  $x, y, z \in X$ . Definiamo il *triangolo di comparazione*  $\bar{\Delta}(x, y, z)$  per la tripla di punti  $x, y, z$  come l'unico triangolo (a meno di isometria) nel piano euclideo con vertici  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  tale che

$$d(x, y) = d(\bar{x}, \bar{y}), \quad d(y, z) = d(\bar{y}, \bar{z}), \quad d(x, z) = d(\bar{x}, \bar{z}).$$

Se il triangolo geodetico  $\Delta(x, y, z)$  esiste, diciamo che  $\bar{\Delta}(x, y, z)$  è *triangolo di comparazione* per  $\Delta(x, y, z)$ .

Un punto  $\bar{p} \in [\bar{x}, \bar{y}]$  (o in un altro lato) viene detto *punto di comparazione* di  $p$  se  $d(x, p) = d(\bar{x}, \bar{p})$ . Gli angoli interni del triangolo di comparazione vengono chiamati *angoli di comparazione* e si indicano con  $\bar{Z}_x(y, z)$  (e analogamente per gli altri vertici).

*Osservazione 1.1.2.* Dati  $x, y, z \in X$  e  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  loro punti di comparazione, le scritture  $\Delta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  e  $\bar{\Delta}(x, y, z)$  sono equivalenti.

Il triangolo di comparazione sopra definito esiste sempre. Infatti chiamando  $a = d(x, y)$ ,  $b = d(x, z)$ ,  $c = d(y, z)$ , prendiamo un punto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$  e costruiamo due segmenti  $[\bar{x}, \bar{y}]$  e  $[\bar{x}, \bar{z}]$  di lunghezza  $a$  e  $b$  rispettivamente, che si incontrano con un angolo  $\gamma$ , dove  $\gamma \in [0, \pi]$  è l'unica soluzione di

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma, \quad (1.1)$$

la legge del coseno in  $\mathbb{R}^2$ , per cui la distanza tra  $y$  e  $z$  è  $c$ .

**Definizione 1.3** (Angolo di Alexandrov). Sia  $X$  uno spazio metrico e siano  $c_0 : [0, a_0] \rightarrow X$  e  $c_1 : [0, a_1] \rightarrow X$  due geodetiche tali che  $c_0(0) = c_1(0)$ .

Per ogni  $t_0 \in [0, a_0]$  e  $t_1 \in [0, a_1]$  consideriamo il triangolo di comparazione  $\bar{\Delta}(c_0(0), c_0(t_0), c_1(t_1))$  e l'angolo di comparazione  $\bar{\angle}_{c_0(0)}(c_0(t_0), c_1(t_1))$ .

Definiamo l'*angolo di Alexandrov* tra  $c_0$  e  $c_1$  come il numero  $\angle(c_0, c_1) \in [0, \pi]$  tale che

$$\angle(c_0, c_1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{0 < t_0, t_1 < \epsilon} \bar{\angle}_{c_0(0)}(c_0(t_0), c_1(t_1)).$$

Notiamo come su  $\mathbb{R}^2$  l'angolo di Alexandrov coincide con l'angolo usuale, quindi l'angolo di comparazione  $\bar{\angle}_z(x, y)$  si può scrivere come  $\angle_z([\bar{x}, \bar{z}], [\bar{z}, \bar{y}])$ .

Nel caso in cui  $X$  sia unicamente geodetico, scrivere  $\angle_z(x, y)$  al posto di  $\angle_z([z, x], [y, z])$  non crea ambiguità. Nel caso in cui  $X$  non fosse geodetico, se abbiamo fissato un triangolo geodetico  $\Delta(x, y, z)$  con lati  $[x, y]$ ,  $[y, z]$ ,  $[z, x]$ , indicheremo con  $\angle_z(x, y)$  l'angolo  $\angle_z([z, x], [z, y])$  quando non crea ambiguità.

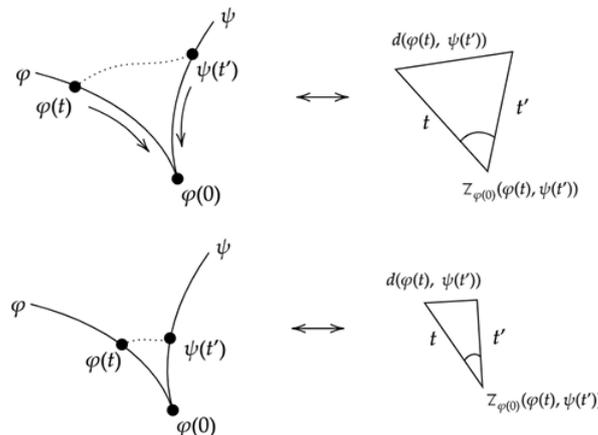


Figura 1.1: Notiamo come l'angolo di comparazione dipende da quali punti scegliamo lungo le geodetiche. In questa immagine le geodetiche sono nominate  $\psi$  e  $\varphi$  invece che  $c_0$  e  $c_1$ .

Osserviamo come valgano le proprietà di simmetria e positività per l'angolo di Alexandrov sopra definito. Si può inoltre mostrare che questo definisce uno

pseudometrica nello spazio (dei germi) delle geodetiche, infatti vale la seguente proposizione:

**Proposizione 1.4.** *Sia  $X$  uno spazio metrico. Siano  $c_1, c_2$  e  $c_3$  tre geodetiche con lo stesso punto iniziale, allora*

$$\angle(c_1, c_2) \leq \angle(c_1, c_3) + \angle(c_3, c_2).$$

*Dimostrazione.* Vedi [BH99] p.10. □

*Osservazione 1.1.3.* Sia  $r \in [p, q]$  diverso da  $p$  e  $q$ . Allora

$$\angle_r([p, r], [r, q]) = \pi.$$

Questo perché  $p, r$  e  $q$  appartengono alla stessa geodetica, quindi il triangolo di comparazione  $\overline{\Delta}(p, r, q)$  è degenere per l'Oss.1.1.1, per cui l'angolo di comparazione  $\overline{\angle}_r(p, q)$  sarà sempre uguale a  $\pi$  per ogni  $\epsilon > 0$ . Segue la tesi dalla definizione di angolo di Alexandrov.

**Lemma di Alexandrov 1.5.** *Sia  $X$  geodetico. Siano  $x, y, p \in X$  e sia  $z \in [x, y]$ , allora*

$$\begin{aligned} \overline{\angle}_x([x, p], [x, y]) - \overline{\angle}_x([x, p], [x, z]) & \quad e \\ \overline{\angle}_z([z, p], [z, x]) + \overline{\angle}_z([z, p], [z, y]) - \pi & \end{aligned}$$

*hanno lo stesso segno.*

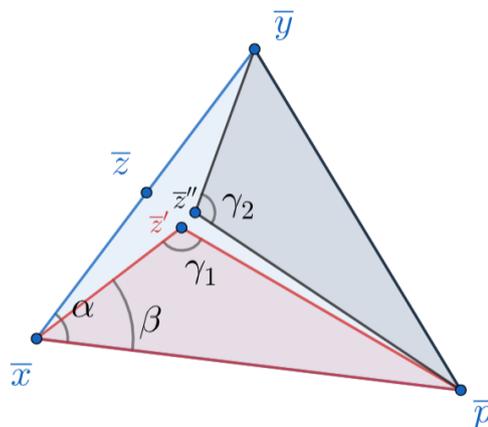


Figura 1.2: Lemma ci dice che  $\alpha \geq \beta \iff \gamma_1 + \gamma_2 \geq \pi$

*Dimostrazione.* Siano  $\overline{\Delta} = \Delta(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p})$ ,  $\overline{\Delta}' = \Delta(\overline{x}, \overline{z}', \overline{p})$  triangoli di comparazione per  $\Delta(x, y, p)$  e  $\Delta(x, z, p)$  rispettivamente.

Prolunghiamo  $[\overline{x}, \overline{z}']$  fino al punto  $\overline{y}'$  tale che  $d(x, y) = d(\overline{x}, \overline{y}')$ . Per la legge del coseno, l'angolo interno di un triangolo è crescente in funzione della lunghezza del lato opposto, per cui

$$\begin{aligned} \angle_{\overline{x}}([\overline{x}, \overline{p}], [\overline{x}, \overline{y}]) - \angle_{\overline{x}}([\overline{x}, \overline{p}], [\overline{x}, \overline{y}']) & \text{ e} \\ \angle_{\overline{z}'}([\overline{z}', \overline{p}], [\overline{z}', \overline{y}]) - \angle_{\overline{z}'}([\overline{z}', \overline{p}], [\overline{z}', \overline{y}']) & \end{aligned}$$

hanno lo stesso segno. Mentre per come abbiamo scelto  $\overline{y}'$  vale

$$\angle_{\overline{z}'}([\overline{z}', \overline{p}], [\overline{z}', \overline{y}']) = \pi - \angle_{\overline{z}'}([\overline{z}', \overline{p}], [\overline{z}', \overline{x}]).$$

□

Per le dimostrazioni successive ci servirà una nuova terminologia: dati due punti  $x, y \in \mathbb{R}^2$  (si generalizza anche per  $\mathbb{S}^2$  e altri spazi), c'è un'unica retta che passa per  $x$  e  $y$ , che separa il piano in due componenti connesse. Diciamo che due punti  $z, w \in \mathbb{R}^2$  stanno *dalla parte opposta rispetto a*  $[x, y]$  se sono in componenti connesse diverse.

*Osservazione 1.1.4.* Nel caso in cui i due numeri del Lemma di Alexandrov 1.5 sono positivi, vale anche

$$d(\overline{x}, \overline{p}) + d(\overline{p}, \overline{y}) \geq d(\overline{x}, \overline{z}') + d(\overline{z}', \overline{y})$$

dove  $\Delta(\overline{x}, \overline{p}, \overline{z}')$  e  $\Delta(\overline{y}, \overline{p}, \overline{z}')$  sono i triangoli di comparazione per  $\Delta(x, p, z)$  e  $\Delta(y, p, z)$  rispettivamente, posti in modo che  $\overline{x}$  e  $\overline{y}$  siano dalla parte opposta rispetto a  $[\overline{p}, \overline{z}']$ . Sia poi  $\tilde{y}$  l'unico punto tale che  $\overline{z}' \in [\overline{x}, \tilde{y}]$  e  $d(\overline{z}', \tilde{y}) = d(\overline{z}', \overline{y})$  (vedi Fig. 1.3).

Allora per la legge del coseno vale  $d(\overline{p}, \overline{y}) \geq d(\overline{p}, \tilde{y})$ , da cui

$$d(\overline{x}, \overline{p}) + d(\overline{p}, \overline{y}) \geq d(\overline{x}, \overline{p}) + d(\overline{p}, \tilde{y}) \geq d(\overline{x}, \tilde{y}) = d(\overline{x}, \overline{z}') + d(\overline{z}', \tilde{y}) = d(\overline{x}, \overline{z}') + d(\overline{z}', \overline{y}),$$

dove la penultima uguaglianza è perché  $\overline{z}' \in [\overline{x}, \tilde{y}]$ .

*Esempio 1.1.1.* Consideriamo come spazi la circonferenza  $\mathbb{S}^1$  e la sfera  $\mathbb{S}^2$ , che dotiamo della metrica  $d$  tale che  $d(A, B)$  è l'unico numero in  $[0, \pi]$  che soddisfa

$$\cos d(A, B) = \langle A, B \rangle,$$

con  $\langle, \rangle$  prodotto scalare standard. (Si dimostra che è metrica tramite la Prop.1.4).

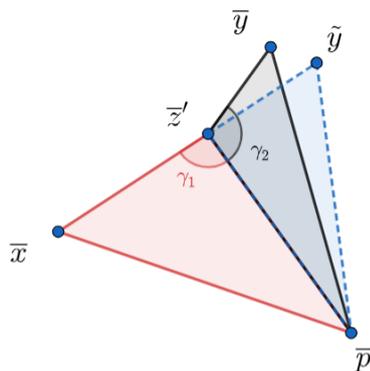


Figura 1.3: Triangoli di comparazione di  $\Delta(x, p, z)$  e  $\Delta(y, p, z)$  posti in modo che  $[\bar{p}, \bar{z}']$  è in comune.

Si dimostra che sono spazi completi, geodetici e sono  $\pi$ -unicamente geodetici. Un segmento tra  $A, B \in \mathbb{S}^2$  è l'arco minore tra  $A$  e  $B$  ottenuto dall'intersezione tra il piano passante per  $0, A, B$  e la sfera (vedi Fig.1.4).

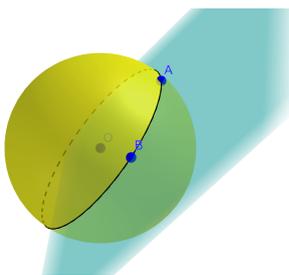


Figura 1.4: Geodetica in  $\mathbb{S}^2$

Se  $d(A, B) < \pi$  allora questa è unica, mentre se  $d(A, B) = \pi$ , i due punti sono antipodali, e quindi esistono infiniti piani passanti per  $0, A, B$ , per cui infinite geodetiche.

Si dimostra anche che esiste un'analogia della legge del coseno per cui, come nel caso euclideo, un lato varia in funzione dell'angolo opposto nel triangolo. Grazie a ciò si dimostra l'esistenza dei triangoli di comparazione (per triangoli con perimetro inferiore a  $2\pi$ ) analogamente al caso euclideo (per una trattazione completa guardare [BH99] p.16).

## 1.2 Lunghezza di una curva

Data una curva  $c : [a, b] \rightarrow X$ , indichiamo con  $\bar{c}$  la sua inversa, cioè la curva tale che  $\bar{c}(t) = c(a + b - t)$ . Date  $c_1 : [a_1, b_1] \rightarrow X$  e  $c_2 : [a_2, b_2] \rightarrow X$  curve tali che  $c_1(b_1) = c_2(a_2)$ , definiamo la loro concatenazione come la curva  $c : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \rightarrow X$  tale

che

$$\begin{cases} c(t) = c_1(t), & \text{per } t \in [a_1, b_1] \\ c(t) = c_2(a_2 - b_1 + t), & \text{per } t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2]. \end{cases}$$

**Definizione 1.6.** Sia  $X$  uno spazio metrico. La *lunghezza*  $\ell(c)$  di una curva  $c : [a, b] \rightarrow X$  è

$$\ell(c) = \sup_{a=t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b} \sum_{i=0}^{n-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})).$$

Questo numero è non negativo o è infinito. Una curva viene detta *rettificabile* se la sua lunghezza è finita.

*Esempio 1.2.1* (Un esempio di curva non rettificabile). Consideriamo lo spazio metrico  $X = [0, 1]$ . Sia  $0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$  una successione infinita in  $[0, 1]$  che converge a 1 per  $n \rightarrow \infty$ . Sia  $c : [0, 1] \rightarrow X$  una curva tale che  $c(0) = 0$  e  $c(t_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}/k$ . Questa non è una curva rettificabile dato che  $d(c(t_n), c(t_{n+1})) = 1/n$ , quindi la sua lunghezza è limitata inferiormente dalla serie armonica, che diverge.

**Lemma 1.7.** Sia  $X$  uno spazio metrico e  $c : [a, b] \rightarrow X$  una curva. Allora

(1)  $\ell(c) \geq d(c(a), c(b))$

(2) se  $\phi$  è una mappa monotona da  $[a', b']$  a  $[a, b]$ , allora  $\ell(c) = \ell(c \circ \phi)$ .

(Da cui segue che la lunghezza di una curva non cambia se viene riparametrizzata linearmente).

(3) Se  $c$  è la concatenazione di due curve  $c_1$  e  $c_2$ , allora  $\ell(c) = \ell(c_1) + \ell(c_2)$

(4) vale  $\ell(c) = \ell(\bar{c})$ , con  $\bar{c}$  cammino inverso di  $c$

(5) se  $c$  è una curva rettificabile di lunghezza  $l$ , allora la funzione

$$\begin{aligned} \lambda : [a, b] &\rightarrow [0, l] \\ t &\longmapsto \ell(c|_{[a, t]}) \end{aligned}$$

è continua e monotona.

*Dimostrazione.* Le proprietà (1), (2), (3) e (4) seguono direttamente dalla definizione di lunghezza di una curva.

Mostriamo (5). Sia  $\epsilon > 0$ . Per il punto (3) e la definizione di continuità, se riusciamo a dividere  $[a, b]$  in un numero finito di sottointervalli tale che la lunghezza di  $c$  ristretto a ciascuno di essi è minore di  $\epsilon$  abbiamo finito.

Per uniforme continuità di  $c$  (continua su  $[a, b]$  compatto), possiamo trovare  $\delta > 0$  tale che  $d(c(t), c(t')) < \epsilon/2$  per ogni  $t, t' \in [a, b]$  con  $|t - t'| < \delta$ .

Dato che  $c$  è rettificabile, possiamo trovare una partizione  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  tale che

$$\sum_{i=0}^{k-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})) > \ell(c) - \epsilon/2.$$

A meno di prendere una partizione più fine, possiamo supporre che  $|t_i - t_{i+1}| < \delta$  per  $i = 0, \dots, k-1$ , e quindi  $d(c(t_i), c(t_{i+1})) < \epsilon/2$ .

Ora  $\ell(c) = \sum_{i=0}^{k-1} \ell(c_{|[t_i, t_{i+1}]})$  per (3), quindi dalla disuguaglianza sopra otteniamo

$$\sum_{i=0}^{k-1} [\ell(c_{|[t_i, t_{i+1}]}) - d(c(t_i), c(t_{i+1}))] < \epsilon/2$$

dove ogni addendo è non negativo per definizione di lunghezza, quindi ognuno di essi è minore di  $\epsilon/2$ , da cui

$$\ell(c_{|[t_i, t_{i+1}]}) < \epsilon/2 + d(c(t_i), c(t_{i+1})) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

e quindi la tesi. □

### 1.3 Spazi di lunghezza

In questa sezione parleremo spazi metrici la cui distanza tra due punti è data dall'estremo inferiore delle lunghezze dei cammini tra essi. In questo contesto è naturale introdurre metriche per le quali la distanza tra due punti può essere infinita. Ovviamente a questo problema da subito considerando l'insieme ordinato  $[0, \infty]$  con la convenzione che  $a + \infty = \infty$  per ogni  $a \in [0, \infty]$ .

Con questo possiamo generalizzare la nozione di metrica ad una mappa  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty]$  che soddisfa gli assiomi classici delle metriche.

**Definizione 1.8.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Definiamo  $\bar{d}$  la *metrica di lunghezza associata a  $d$*  come la funzione  $\bar{d} : X \times X \rightarrow [0, \infty]$  tale che

$$\bar{d}(x, y) = \inf_{\gamma \in \Omega(X, x, y)} \ell(\gamma),$$

dove  $\Omega(X, x, y)$  è l'insieme delle curve rettificabili in  $X$  da  $x$  a  $y$ . Se non c'è nessuna curva rettificabile da  $x$  a  $y$  diciamo che  $\bar{d}(x, y) = \infty$ .

Diciamo che  $X$  è uno *spazio di lunghezza* se  $d = \bar{d}$ .

**Proposizione 1.9.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico, allora*

- (1)  $\bar{d}$  è una metrica (nel senso generalizzato descritto sopra),
- (2)  $\bar{d}(x, y) \geq d(x, y)$  per ogni  $x, y \in X$ ,
- (3) se  $c$  è una curva in  $(X, \bar{d})$ , allora lo è anche in  $(X, d)$ ,
- (4) se  $c$  è una curva rettificabile in  $(X, d)$ , allora lo è anche in  $(X, \bar{d})$ ,
- (5) la lunghezza di una curva  $c$  in  $(X, d)$  e in  $(X, \bar{d})$  è la stessa.

*Dimostrazione.* I punti (1) e (2) seguono dalla definizione di lunghezza. (3) è implicato da (2).

(4) segue dal Lemma 1.7(5). Infatti, dato  $\epsilon > 0$ , il punto (5) del lemma ci dice che

$$l(\gamma|_{[t, t']}) = l(\gamma|_{[a, t]}) - l(\gamma|_{[a, t']}) < \epsilon$$

se  $t, t'$  abbastanza vicini. Quindi

$$\bar{d}(c(t), c(t')) = \inf_{\gamma} l(\gamma) = \inf_{\gamma} \sum_{i=1}^n l(\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}) < n\epsilon$$

prendendo una partizione abbastanza piccola di  $[0, t - t']$ .

Mostriamo (5). Sia  $c : [a, b] \rightarrow X$  cammino, con  $\bar{\ell}(c)$  lunghezza rispetto a  $\bar{d}$  e  $\ell(c)$  lunghezza rispetto a  $d$ . Vale  $\bar{\ell}(c) \geq \ell(c)$  per (2), mentre

$$\begin{aligned} \bar{\ell}(c) &= \sup_{a=t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n=b} \sum_{i=0}^{n-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})) \\ &\leq \sup_{a=t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n=b} \sum_{i=0}^{n-1} \ell(c|_{[t_i, t_{i+1}]}) = \ell(c). \end{aligned}$$

Quindi  $\ell(c) = \bar{\ell}(c)$ . □

**Lemma 1.10.** *Ogni spazio geodetico è di lunghezza.*

*Dimostrazione.* Siano  $x, y \in X$  e  $c : [0, l] \rightarrow X$  geodetica da  $x$  a  $y$ , allora

$$\begin{aligned} \ell(c) &= \sup_{a=t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n=b} \sum_{i=0}^{n-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})) = \\ &= \sup_{a=t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n=b} \sum_{i=0}^{n-1} |t_{i+1} - t_i| = \\ &= l = d(x, y). \end{aligned}$$

Se  $\gamma \in \Omega(X, x, y)$  si ha  $\ell(\gamma) \geq d(x, y)$  per il Lemma 1.7(1), quindi

$$d(x, y) = \ell(c) = \inf_{\gamma \in \Omega(X, x, y)} \ell(\gamma)$$

da cui la tesi. □

Esistono però spazi di lunghezza non geodetici, per esempio  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  con la metrica indotta da  $\mathbb{R}^n$  è di lunghezza, ma non c'è nessuna geodetica tra un punto e il suo antipodale.

Una condizione sufficiente affinché uno spazio di lunghezza (in cui le distanze sono finite) sia geodetico, è data dal seguente teorema:

**Teorema 1.11** ("Hopf-Rinow"). *Sia  $X$  spazio di lunghezza. Se  $X$  è completo e localmente compatto allora*

- $X$  è proprio, cioè le palle chiuse sono compatte, e
- $X$  è geodetico.

*Dimostrazione.* Vedi [BH99] p.35. □

## 1.4 Metrica sui rivestimenti

**Definizione 1.12.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un suo rivestimento. Dotiamo  $\tilde{X}$  della pseudometrica

$$d_p(\tilde{x}, \tilde{y}) = \inf \left\{ \ell(p \circ c) \mid c \text{ curva in } \tilde{X} \text{ tra } \tilde{x} \text{ e } \tilde{y} \right\}.$$

La chiamiamo *metrica indotta da  $p$*  (dimostriamo sotto che è una metrica).

Questa è anche una metrica, infatti se  $d_p(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ , allora per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste una curva  $c : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  da  $\tilde{x}$  a  $\tilde{y}$  tale che  $\ell(p \circ c) < \epsilon$ , per cui  $d(x, y) \leq \bar{d}(x, y) = 0$ , essendo  $p \circ c$  un cammino da  $x = p(\tilde{x})$  a  $y = p(\tilde{y})$ . Quindi abbiamo  $x = y$ , da cui segue che  $\tilde{x} = \tilde{y}$ , essendo  $p$  un omeomorfismo locale.

*Osservazione 1.4.1.* Dotando  $\tilde{X}$  della metrica  $d_p$ , si ha che  $p$  non incrementa le distanze.

*Dimostrazione.* Siano  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ , allora

$$d_p(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq \inf_{c \in \Omega(X, p(\tilde{x}), p(\tilde{y}))} \ell(c) \geq d(p(\tilde{x}), p(\tilde{y}))$$

con la prima disuguaglianza che segue dal fatto che  $\{p \circ c \mid c \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x}, \tilde{y})\} \subseteq \Omega(X, p(\tilde{x}), p(\tilde{y}))$ , mentre la seconda disuguaglianza segue dal Lemma 1.7(1).  $\square$

**Proposizione 1.13.** *Sia  $X$  uno spazio di lunghezza, e  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un suo rivestimento. Sia  $d_p$  la metrica indotta da  $p$ , allora*

- (1) *se mettiamo a  $\tilde{X}$  la metrica  $d_p$ , allora  $p$  è un'isometria locale,*
- (2)  *$d_p$  è una metrica di lunghezza,*
- (3)  *$d_p$  è l'unica metrica che soddisfa (1) e (2).*

*Dimostrazione.* Mostriamo (1). Sia  $\tilde{x} \in p^{-1}(x) \subseteq \tilde{X}$  e siano  $U$  intorno ben coperto di  $x$  e  $\tilde{U}$  intorno di  $\tilde{x}$  tale che  $p|_{\tilde{U}}$  omeomorfismo su  $U$ . Chiamiamo  $s : U \rightarrow \tilde{U}$  l'inversa di  $p|_{\tilde{U}}$ , e sia  $r > 0$  tale che  $B(x, 2r) \subseteq U$ . Mostriamo che  $s$  induce un'isometria da  $B(x, r) \subseteq X$  a  $B(\tilde{x}, r) \subseteq \tilde{X}$ .

Siano  $y, z \in B(x, r)$  e  $\epsilon \in (0, r)$ . Dato che  $X$  è uno spazio di lunghezza esiste una curva  $c$  contenuta in  $B(x, 2r)$  tale che

$$\ell(c) < d(y, z) + \epsilon$$

da cui, essendo  $s \circ c$  una curva in  $\tilde{X}$ , si ha

$$d_p(s(y), s(z)) < d(y, z) + \epsilon$$

per definizione di  $d_p$ . Questo per ogni  $\epsilon > 0$  piccolo, per cui

$$d_p(s(y), s(z)) \leq d(y, z).$$

Per l'Osservazione 1.4.1 si ha che  $d_p(s(y), s(z)) \geq d(y, z)$ , da cui l'uguaglianza. Quindi abbiamo

$$s : B(x, r) \rightarrow s(B(x, r)) \subseteq B(\tilde{x}, r)$$

che lascia invariate le distanze. Ma  $p \circ s$  è l'identità su  $B(x, r)$ , quindi  $s(B(x, r)) = B(\tilde{x}, r)$ , da cui (1).

Mostriamo (2). Le locali isometrie preservano le lunghezza dei cammini, quindi

$$\ell(p \circ c) = \ell(c)$$

Basta infatti prendere una partizione  $0 < t_1 < \dots < t_n < 1$  di  $[0, 1]$  tale che  $c(t_i)$  e  $c(t_{i+1})$  sono in un stesso intorno per cui  $p$  è un'isometria, e ogni partizione più fine

avrà questa proprietà. Quindi

$$d_p(\tilde{x}, \tilde{y}) = \inf_{c \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x}, \tilde{y})} \ell(p \circ c) = \inf_{c \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x}, \tilde{y})} \ell(c)$$

da cui  $d_p$  metrica di lunghezza.

Mostriamo (3). Sia  $d_1$  una metrica che soddisfa (1) e (2). Per (1) si ha che l'identità è un'isometria locale

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{X}, d_p) & \xrightarrow{id} & (\tilde{X}, d_1) \\ & \searrow p & \downarrow p \\ & & (X, d) \end{array}$$

quindi preserva la lunghezza delle curve. Ma per (2)  $d_1$  è di lunghezza, quindi  $id$  è un'isometria globale.  $\square$

*Osservazione 1.4.2.* Guardando la dimostrazione di (1) capiamo che, per dimostrare il teorema, basta che  $X$  sia localmente uno spazio di lunghezza, cioè per ogni punto di  $X$  deve esistere un intorno che è di lunghezza <sup>1</sup> con la metrica indotta. Infatti basta prendere nella dimostrazione un  $r > 0$  piccolo a sufficienza.

Notiamo che se le palle (anche solo minori un certo raggio) in  $X$  sono convesse, cioè ogni coppia di punti nella palla è collegata da un'unica geodetica tutta contenuta nella palla, allora queste sono di lunghezza.

Infatti essendo geodetiche, l'estremo inferiore nella definizione della metrica è proprio la lunghezza della geodetica.

*Osservazione 1.4.3.* Sempre guardando la dimostrazione di (1), capiamo che se  $p$  è un rivestimento, allora dotando  $\tilde{X}$  della metrica  $d_p$ ,  $p$  rimane un rivestimento.

Infatti i vari  $B(x, r)$  diventano i nuovi intorni ben coperti del rivestimento; le loro preimmagini sono disgiunte essendo disgiunti i vari  $\tilde{U}$ .

Ora un risultato che ci servirà nel capitolo 3, cioè una condizione sufficiente per avere un rivestimento.

**Proposizione 1.14.** *Sia  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  una mappa tra spazi metrici tale che*

- (1)  $X$  è connesso,
- (2)  $p$  è un'isometria locale,

---

<sup>1</sup>L'inf è preso sulle curve in tutto lo spazio, non solo nell'intorno.

(3)  $X$  è localmente unicamente geodetico, e le geodetiche variano in modo continuo con gli estremi localmente,

(4)  $\tilde{X}$  è completo.

Allora  $p$  è un rivestimento.

*Dimostrazione.* Proviamo innanzitutto che esiste un unico sollevamento per ogni cammino. Sia  $c : [0, 1] \rightarrow X$  cammino con punto iniziale  $x \in X$ , e sia  $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ .

Essendo  $p$  un omeomorfismo locale, in un intorno di  $x$  si ha un unico sollevamento  $\tilde{c}$ , per cui  $p(\tilde{c}(t)) = c(t)$  per ogni  $t \in [0, a)$ , per un certo  $a > 0$ . Sia

$$S = \{t \in [0, 1] \mid p(\tilde{c}(s)) = c(s) \quad \forall s \in [0, t]\}$$

che è non vuoto, dato che  $0 \in S$ .

$S$  è aperto dato che  $p$  è un omeomorfismo locale, quindi per ogni  $t_0 \in S$ , il sollevamento in un intorno di  $c(t_0)$  esiste, per cui si ha un sollevamento per  $c|_{[0, t_0 + \epsilon]}$ .

$S$  è chiuso. Prendiamo  $t_n \in [0, a) \subseteq S$  che converge ad  $a$ ; essendo  $p$  un'isometria locale, abbiamo

$$d(\tilde{c}(t_n), \tilde{c}(t_m)) \leq \ell(\tilde{c}|_{[t_n, t_m]}) = \ell(c|_{[t_n, t_m]}). \quad (1.2)$$

Ma  $(\ell(c|_{[0, t_n]}))_n \subseteq \mathbb{R}$  è di Cauchy, dato che la funzione  $t \mapsto \ell(c|_{[0, t]})$  è continua per il Lemma 1.7, quindi la successione è convergente. Allora per (1.2) la successione  $\tilde{c}(t_n)$  è di Cauchy in  $\tilde{X}$ , e quindi converge a  $\tilde{c}(a)$  per completezza, con  $p(\tilde{c}(a)) = c(a)$  per continuità di  $p$  e  $c$ . Quindi  $a \in S$ .

L'unicità del sollevamento segue semplicemente dal fatto che  $\tilde{X}$  è Hausdorff e che  $p$  è un omeomorfismo locale. Si dimostra facendo vedere che, se  $c, c'$  cammini tali che  $c(0) = c'(0)$ , l'insieme  $H$  in cui  $c$  e  $c'$  coincidono è (non vuoto) sia aperto che chiuso.

Infatti se coincidono in un punto allora coincidono anche in un intorno di esso, essendo  $p$  un omeomorfismo locale. Perciò  $H$  è aperto. Se invece non coincidono in un punto  $h$ , le due immagini di esso tramite  $c$  e  $c'$  stanno in due aperti disgiunti  $U$  e  $U'$ , essendo  $\tilde{X}$  Hausdorff. Per continuità, esiste un intorno  $V$  di  $h$  tale che  $c(V) \subseteq U$  e  $c'(V) \subseteq U'$ . Per cui  $c$  e  $c'$  non coincidono in nessuno punto di  $V$ . Segue che il complementare di  $H$  è aperto, quindi  $H$  è chiuso. Infine è non vuoto perché contiene 0.

Essendo  $X$  connesso per archi (dato che è connesso e localmente connesso per archi) si ha che  $p$  è una suriezione tra ogni componente connessa di  $\tilde{X}$  e  $X$ .

Ora fissato  $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ , sia  $r > 0$  tale che la palla  $B(x, r)$  è unicamente geodetica, per cui per ogni  $y \in B(x, r)$  denotiamo con  $c_y : [0, 1] \rightarrow B(x, r)$  l'unica geodetica linearmente riparametrizzata da  $x$  a  $y$  e con  $\tilde{c}_y$  il suo sollevamento da  $\tilde{x}$ .

Definiamo la mappa  $s_{\tilde{x}} : B(x, r) \rightarrow \tilde{X}$  tale che  $y \mapsto \tilde{c}_y(1)$  e mostriamo che è un omeomorfismo con un aperto di  $\tilde{X}$ . Per farlo basta dire che  $s_{\tilde{x}}$  è continua, dato che la sua inversa  $p$  è un omeomorfismo locale.

Fissato  $y \in B(x, r)$ , copriamo l'immagine di  $c_y$  con un numero finito di palle  $B_k \subseteq B(x, r)$  in modo che  $c_y([(k-1)/n, k/n]) \subseteq B_k$  per  $k = 1, \dots, n$ ; per (2) esiste una funzione continua  $s_k : B_k \rightarrow \tilde{X}$  tale che  $s_k \circ p$  è l'identità su  $B_k$  e tale che  $s_k(c_y(t)) = s_{\tilde{x}}(c_y(t))$  per ogni  $t \in [(k-1)/n, k/n]$ .

Dato che le geodetiche variano in modo continuo con gli estremi in  $B(x, r)$ , se prendo  $\delta > 0$  sufficientemente piccolo, per ogni  $z$  tale che  $d(y, z) < \delta$  vale  $c_z([(k-1)/n, k/n]) \subseteq B_k$ .

Quindi la funzione  $\tilde{s} : B(y, \delta) \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  tale che  $\tilde{s}(z, t) = s_k(c_z(t))$  se  $t \in [(k-1)/n, k/n]$  sarà ben definita, dato che  $s_{k+1}$  e  $s_k$  coincidono in  $B(y, \delta) \times \{k/n\}$  per l'uguaglianza  $s_k(c_y(t)) = s_{\tilde{x}}(c_y(t))$ , e continua perché le geodetiche variano in modo continuo.

In particolare, la funzione  $s_{\tilde{x}}$  coincide con  $z \mapsto \tilde{s}(z, 1)$  in  $B(y, \delta)$ , per cui è continua in  $y$ .

Quindi abbiamo che  $p^{-1}(B(x, r))$  è l'unione degli aperti  $s_{\tilde{x}}(B(x, r))$  al variare di  $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ , e  $p$  ristretta ad ognuno di questi aperti è un omeomorfismo con  $B(x, r)$ . Rimane solo da controllare che questi sono disgiunti.

Sia  $\tilde{y} \in s_{\tilde{x}}(B(x, r)) \cap s_{\tilde{x}'}(B(x, r))$  con  $\tilde{x}, \tilde{x}' \in p^{-1}(x)$ , quindi i sollevamenti di  $\tilde{c}_p(\tilde{y})$  con punti iniziali  $\tilde{x}$  e  $\tilde{x}'$  finiscono entrambi in  $\tilde{y}$ , quindi coincidono per unicità del sollevamento (considerando il cammino inverso). In particolare  $\tilde{x} = \tilde{x}'$ , da cui la tesi.  $\square$

## 1.5 Alcune costruzioni

### 1.5.1 Complessi metrici

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico con una relazione d'equivalenza  $\sim$  e sia  $\hat{X} = X/\sim$ . Definiamo su  $\hat{X}$  la *pseudometrica quoziente*

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \inf \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i)$$

dove l'*inf* è preso sull'insieme delle successioni  $C = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$  di punti di  $X$  tali che  $x_1 \in \hat{x}$ ,  $y_n \in \hat{y}$  e  $y_i \sim x_{i+1}$  per  $i = 1, \dots, n-1$ . Una tale successione è chiamata *n-catena tra  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$* .

**Definizione 1.15** (Simplessi euclidei/sferici). Chiamiamo *n-simplesso euclideo*  $S$  l'involuppo convesso di  $n+1$  punti in  $\mathbb{R}^N$  che non sono contenuti in un piano di dimensione  $n-1$ , con la metrica indotta da quella euclidea, e questi punti vengono detti *vertici* di  $S$ . Una *faccia*  $T \subseteq S$  è definita come l'involuppo convesso di un sottoinsieme non vuoto dei vertici di  $S$ . Se  $T \neq S$ , viene detto che  $T$  è una *faccia propria* di  $S$ . L'*interno* di un semplice è l'insieme dei punti che non appartengono a nessuna faccia propria.

Analogamente <sup>2</sup> si ha la definizione di *n-simplesso sferico* sostituendo  $\mathbb{R}^N$  con  $\mathbb{S}^N$  e la metrica euclidea con quella sferica descritta nell'Esempio 1.1.1. Richiediamo però che i vertici scelti stiano tutti in una palla aperta di raggio  $\pi/2$ .

**Definizione 1.16** (Complessi (simpliciali) metrici euclidei/sferici). Sia  $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una famiglia di simplessi euclidei. Sia  $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (S_\lambda \times \{\lambda\})$  <sup>3</sup> la loro unione disgiunta, e  $K = X / \sim$  con  $\sim$  relazione d'equivalenza, dotato della pseudometrica quoziente. Siano  $p : X \rightarrow K$  la proiezione naturale e  $p_\lambda : S_\lambda \rightarrow K$  tale che  $p_\lambda(x) := p(x, \lambda)$ .

Diciamo che  $K$  è un *complesso (simpliciale) metrico euclideo* se

- (1) per ogni  $\lambda \in \Lambda$  la mappa  $p_\lambda$  è iniettiva, e
- (2) se  $p_\lambda(S_\lambda) \cap p_{\lambda'}(S_{\lambda'}) \neq \emptyset$  allora esiste un'isometria  $h_{\lambda\lambda'}$  da una faccia  $T_\lambda \subseteq S_\lambda$  a una faccia  $T_{\lambda'} \subseteq S_{\lambda'}$  tale che  $p(x, \lambda) = p(x', \lambda')$  se e solo se  $x' = h_{\lambda\lambda'}(x)$ .

Richiediamo inoltre che  $K$  sia localmente finito, cioè per ogni  $x \in K$  esiste un intorno che interseca solo un numero finito di  $n$ -simplessi.

Un sottoinsieme  $S \subseteq K$  viene detto *n-simplesso* se è l'immagine tramite qualche  $p_\lambda$  di una faccia  $n$ -dimensionale di  $S_\lambda$ .

Definiamo la *dimensione* di un complesso metrico come la dimensione massima dei simplessi che lo compongono.

Analogamente si ha la definizione di *complesso metrico sferico* sostituendo  $\mathbb{R}^N$  con  $\mathbb{S}^N$  e la metrica euclidea con quella sferica descritta nell'Esempio 1.1.1.

Quando diciamo *complesso metrico*, senza specificare se euclideo o sferico, stiamo considerando entrambi.

<sup>2</sup>Utilizzando la nozione di involuppo convesso in uno spazio geodetico data a inizio capitolo.

<sup>3</sup>Dotiamo l'unione disgiunta della metrica  $d$  tale che  $d((x, \lambda), (x', \lambda)) := d_\lambda(x, x')$  e  $d((x, \lambda), (x', \lambda')) := \infty$  se  $\lambda \neq \lambda'$

**Definizione 1.17** (Supporto, Stella). Dato un complesso metrico  $K$ , e un punto  $x \in K$ , definiamo il *supporto* di  $x$  come l'unico semplice  $supp(x)$  che contiene  $x$  nel suo interno, mentre definiamo la *stella* di  $x$  come l'unione dell'interno dei semplici che contengono  $x$ , e la indichiamo con  $st(x)$ .

*Osservazione 1.5.1.* Sia  $S$  un semplice di un complesso metrico  $K$ . Chiamiamo  $d_S$  la metrica su  $S$  data da  $\mathbb{R}^n$  (o  $\mathbb{S}^n$ , in base a se il complesso è euclideo o metrico) e  $d$  la metrica su  $S$  indotta da  $K$ .

In generale abbiamo che  $d_S(x, y) \geq d(x, y)$ . Per esempio se consideriamo il complesso in Figura 1.5, abbiamo che  $d_S(A, B) = 3$  mentre  $d(A, B) = 2$ .



Figura 1.5: Grafo metrico in cui  $d_S > d$

Tuttavia, essendo i complessi metrici localmente finiti, è possibile suddividere i vari semplici in semplici più piccoli, affinché valga l'uguaglianza  $d_S = d$  per ogni  $S$  semplice, lasciando invariata la metrico del complesso (vedi Fig.1.6).

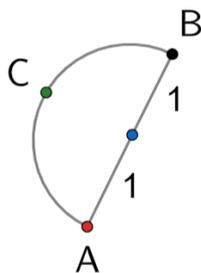


Figura 1.6: Abbiamo suddiviso il grafo metrico dell'esempio precedente in semplici più piccoli. Ora vale  $d_S = d$  per ogni  $S$  semplice.

Per le dimostrazioni seguenti, supponiamo quindi che  $d_S = d$  per ogni semplice  $S$ .

**Lemma 1.18.** *La pseudometrica quoziente sul complesso metrico è una metrica, ed è di lunghezza.*

*Dimostrazione.* Dobbiamo mostrare che  $\hat{d}(x, y) > 0$  se  $x \neq y$ . Possiamo supporre  $x, y$  abbastanza vicini, altrimenti la tesi è banale, in modo che siano nello stesso intorno per cui il complesso è finito.

Ora facciamo un po' di considerazioni sulle catene da  $x$  a  $y$ . Utilizzando la disuguaglianza triangolare ed essendo  $\hat{d}$  un estremo inferiore per definizione, possiamo supporre:

- che  $x_{i+1} \neq y_i$  per ogni  $i$ ,
- che tutti i punti della catena siano nell'intorno per cui il complesso è finito
- che  $x_i$  e  $y_i$  non siano entrambi nell'interno di una stessa faccia, quindi lungo tutta la catena non saranno presenti due punti nell'interno di una stessa faccia.

Possiamo quindi considerare solo catene finite, la cui lunghezza sarà al più pari al numero di facce nell'intorno.

Riassumendo, se il numero di facce che intersecano l'intorno è  $n$ , l'insieme su cui prendiamo l'estremo inferiore sarà formato dalle catene da  $x$  a  $y$  di lunghezza al più  $n$ . Ogni punto della catena è preso da una faccia, e le facce sono insiemi compatti.

Stiamo quindi cercando un estremo inferiore su un'unione finita di compatti, che è compatta. La definizione di  $\hat{d}$  diventa quindi il minimo in un insieme di numeri positivi (essendo i vari  $d(x_i, y_i) > 0$ ), quindi la metrica è positiva.

Mostriamo che è  $\hat{d}$  di lunghezza. Sia  $a = \hat{d}(x, y)$ , quindi per ogni  $\epsilon > 0$  esiste una  $n$ -catena tra  $x$  e  $y$  tale che

$$\sum_{i=1}^n d(x_i, y_i) < a + \frac{\epsilon}{2}.$$

Essendo la metrica  $d$  sull'unione disgiunta dei semplici una metrica di lunghezza (dato che ogni semplice è di lunghezza), per ogni  $i = 1, \dots, n$  esiste un cammino  $c_i$  da  $x_i$  a  $y_i$  di lunghezza inferiore a  $d(x_i, y_i) + \epsilon/n$ .

Sia  $\hat{c}$  la concatenazione delle curve  $p \circ c_i$ , dove  $p$  è la proiezione al quoziente. Essendo  $\hat{d}(x, y) \leq d(x', y')$  per ogni  $x', y'$  tale che  $p(x') = x, p(y') = y$ , vale che  $\hat{c}$  è una curva tra  $x$  e  $y$  nel complesso metrico di lunghezza minore di  $a + \epsilon$ . Dato che ciò vale per ogni  $\epsilon > 0$ , si ha la tesi.  $\square$

Dunque è lecito chiamare la pseudometrica  $\hat{d}$  come *metrica quoziente*.

**Lemma 1.19.** *La metrica quoziente su un complesso metrico è completa.*

*Dimostrazione.* Basta provare che ogni successione di Cauchy ammette una sottosuccessione convergente.

Sia  $(x_n)_n$  di Cauchy, per cui esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $x_n$  e  $x_m$ , per ogni  $n, m \geq N$ , sono contenuti in una stessa palla in cui il complesso metrico è finito.

Essendo finito, possiamo prendere una sottosuccessione di  $(x_n)_n$  tutta contenuta in uno stesso semplice. Su di esso la metrica è completa, per cui abbiamo che la sottosuccessione converge, essendo di Cauchy, da cui la tesi.  $\square$

Osserviamo come un complesso metrico sia localmente compatto, essendo localmente finito, quindi per ogni punto esiste un intorno che è unione finita di compatti, che quindi è compatto.

Considerando ciò, i precedenti due lemmi e il fatto che la distanza tra ogni due punti è finita, possiamo applicare il Teorema di Hopf-Rinow 1.11; per cui vale:

**Teorema 1.20.** *Un complesso metrico è uno spazio metrico completo e geodetico.*

*Esempio 1.5.1.* Un complesso metrico connesso  $G$  di dimensione uno si dice *grafo (simpliciale) metrico*. I semplici di dimensione 1 che lo compongono vengono detti *lati*, mentre quelli di dimensione 0 *vertici*.

Ogni lato sarà di lunghezza  $l$  pari alla distanza dei vertici che abbiamo scelto, quindi possiamo parametrizzarlo tramite una geodetica  $c : [0, l] \rightarrow G$ .

Chiamiamo *loop* la concatenazione di alcune di queste curve, che ha stesso punto finale e iniziale. Richiediamo che la curva ottenuta sia iniettiva fuori dal punto iniziale (vedi Fig.1.7).

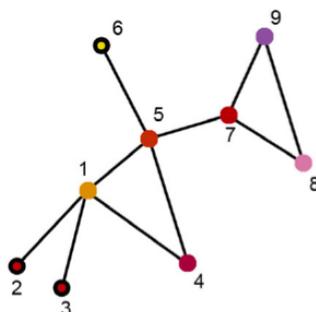


Figura 1.7: Grafo con due loop (i triangoli con vertici 1,4,5 e 7,8,9)

**Definizione 1.21** (Link di semplici/complessi metrici). Sia  $x \in S$  con  $S$  semplice. Definiamo il *link* di  $x$  come l'insieme delle classi di equivalenza  $\sim$  delle geodetiche  $[x, y]$  in  $S$ , dove  $y \in st(x) \setminus \{x\}$  e  $[x, y_1] \sim [x, y_2]$  se  $[x, y_1] \subseteq [x, y_2]$ , e lo denotiamo con  $Lk(x, S)$ .

Definiamo la distanza tra due geodetiche  $[x, y_1]$  e  $[x, y_2]$  come

$$\angle_x(y_1, y_2),$$

cioè l'angolo in  $x$  del triangolo  $\Delta(x, y_1, y_2) \subseteq S$ .

Sia ora  $x \in K$  con  $K$  complesso metrico. Definiamo il *link* di  $x$  come il quoziente dell'unione disgiunta degli  $\text{Lk}(x, S_\lambda)$  al variare di  $S_\lambda \subseteq K$  semplice contenente  $x$ , indotto dal quoziente  $K = \left( \coprod_\lambda S_\lambda \right) / \sim$ . Lo denotiamo con  $\text{Lk}(x, K)$ .

Notiamo come se  $x \in K$  è un vertice, allora  $\text{Lk}(x, K)$  è un complesso metrico sferico, per cui valgono le proprietà dimostrate sopra.

*Esempio 1.5.2.* Dato un complesso metrico 2-dimensionale, il link di un suo vertice è un grafo metrico che ha un vertice per ogni faccia 1-dimensionale e un lato per ogni faccia 2-dimensionale che contiene il vertice, di lunghezza pari all'angolo su quest'ultimo (vedi Fig.1.8).

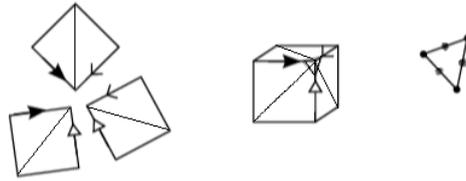


Figura 1.8: Complesso metrico e suo link

I risultati di questa sezione valgono più in generale per i complessi poliedrali localmente finiti, spazi per cui si possono attaccare i semplici più liberamente.

## 1.5.2 Cono su uno spazio metrico

**Definizione 1.22.** Dato uno spazio metrico  $(Y, d)$ , definiamo il *cono*  $C(Y)$  su  $Y$  come il quoziente dello spazio  $Y \times [0, +\infty)$  secondo la relazione di equivalenza  $[(x, 0) \sim (y, 0) \ \forall x, y \in Y]$ .

Indichiamo la classe di punti  $(y, t)$  con  $ty$  se  $t \neq 0$  e quella di  $(y, 0)$  con  $0$ . Dati due punti  $x = ty, x' = t'y'$  definiamo la funzione  $d_C$  tale che

$$d_C(x, x')^2 = t^2 + t'^2 - 2tt' \cos d_\pi(y, y'),$$

dove  $d_\pi(y, y') = \min\{\pi, d(y, y')\}$ .

*Esempio 1.5.3.* Consideriamo lo spazio  $\mathbb{S}^1$ . Abbiamo che  $C(\mathbb{S}^1)$  è isometrico a  $\mathbb{R}^2$  tramite

$$\begin{aligned} C(\mathbb{S}^1) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ tx &\longmapsto t \cdot x \end{aligned}$$

dove vediamo  $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ . Questa è un'isometria per la legge del coseno in  $\mathbb{R}^2$ . Analogamente si ha  $C(\mathbb{S}^n)$  isometrico a  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemma 1.23.**  $d_C$  è una metrica

*Dimostrazione.* La proprietà simmetrica e la positività della metrica seguono facilmente dalla definizione; noi mostriamo la disuguaglianza triangolare.

Consideriamo  $x_i = t_i y_i$  per  $i = 1, 2, 3$ , vogliamo mostrare  $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ .

Se uno dei  $t_i = 0$ , allora la disuguaglianza segue dalla disuguaglianza in  $\mathbb{R}^2$ , dato che le distanze sono le stesse per ciò che mostriamo più avanti nell'Osservazione 1.5.3. Quindi supponiamo  $t_i > 0$  per ogni  $i = 1, 2, 3$  e consideriamo due casi:

(1):  $d(y_1, y_2) + d(y_2, y_3) < \pi$ .

Dalla disuguaglianza triangolare in  $Y$  segue che  $d(y_1, y_3) < \pi$ . Considero quindi tre punti  $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3 \in \mathbb{S}^2$  tali che  $d(y_i, y_j) = d(\bar{y}_i, \bar{y}_j)$  per  $i, j = 1, 2, 3$ .

Ora  $C(\{y_1, y_2, y_3\})$  è isometrico a  $C(\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3\}) \subseteq C(\mathbb{S}^2) = \mathbb{R}^3$  con la metrica indotta da  $C(Y)$  e  $C(\mathbb{S}^2)$  rispettivamente, come nell'esempio sopra, quindi utilizzo la disuguaglianza triangolare in  $\mathbb{R}^3$ .

(2):  $d(y_1, y_2) + d(y_2, y_3) \geq \pi$ .

Considero tre punti  $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3 \in \mathbb{S}^1$  tali che  $d(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = d_\pi(y_1, y_2)$  e  $d(\bar{y}_2, \bar{y}_3) = d_\pi(y_2, y_3)$ .

Identifichiamo  $C(\mathbb{S}^1)$  con  $\mathbb{R}^2$ . Se  $\bar{x}_i = t_i \bar{y}_i$  per  $i = 1, 2, 3$ , allora  $d(x_1, x_2) = d(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ,  $d(x_2, x_3) = d(\bar{x}_2, \bar{x}_3)$  e  $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, 0) + d(0, x_3) = t_1 + t_3$ .

Infine, essendo la somma degli angoli  $d(\bar{y}_1, \bar{y}_2) + d(\bar{y}_2, \bar{y}_3) \geq \pi$ , per l'Oss.1.1.4 vale  $d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + d(\bar{x}_2, \bar{x}_3) \geq d(0, x_1) + d(0, x_3) = t_1 + t_3$ ; quindi unendo tutto si ha

$$d(x_1, x_3) \leq t_1 + t_3 \leq d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + d(\bar{x}_2, \bar{x}_3) = d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3).$$

□

*Osservazione 1.5.2.* Osserviamo che la distanza tra due punti  $x = ty$  e  $x' = t'y'$  è  $d(x, x') = t$  se  $x' = 0$  e che  $\bar{Z}_0(x, x') = d_\pi(y, y')$  se  $t, t' > 0$ .

Inoltre vale che, se  $d(y_1, y_2) \geq \pi$ , c'è un segmento  $[x_1, x_2]$ , con  $x_i = t_i y_i$ , che passa per 0. Infatti vale  $d_\pi(y_1, y_2) = \pi$ , quindi  $d(x_1, x_2) = t_1 + t_2$ , per cui il segmento è l'immagine della geodetica  $[0, t_1 + t_2] \rightarrow X$  tale che

$$\begin{cases} (t_1 - t)y_1, & \text{se } t \in [0, t_1] \\ (t - t_1)y_2, & \text{se } t \in [t_1, t_2] \end{cases}$$

**Proposizione 1.24.** *Siano  $x_1 = t_1 y_1$  e  $x_2 = t_2 y_2 \in C(Y)$ . Allora*

- (1) *Se  $t_1, t_2 > 0$  e  $d(y_1, y_2) < \pi$ , c'è una biezione tra l'insieme delle geodetiche da  $x_1$  a  $x_2$  in  $C(Y)$  e l'insieme delle geodetiche da  $y_1$  a  $y_2$  in  $Y$ .*
- (2) *In tutti gli altri casi c'è un'unica geodetica tra  $x_1$  e  $x_2$ , e questa passa per 0.*

In particolare si ha

$$C(Y) \text{ (unicamente) geodetico} \iff Y \text{ (unicamente) } \pi\text{-geodetico}$$

*Dimostrazione.* Mostriamo (1). Consideriamo un segmento  $[y_1, y_2] \subseteq Y$ . Il cono  $C([y_1, y_2]) \subseteq C(Y)$  è isometrico ad un settore in  $\mathbb{R}^2$ , che è convesso, e quindi abbiamo un segmento che connette  $x_1$  e  $x_2$  in  $C([y_1, y_2])$ .

Viceversa, consideriamo un segmento  $[x_1, x_2] \subseteq X$ , con  $x_i = t_i y_i$  per  $i = 1, 2$ , e sia  $x = ty \in [x_1, x_2]$ . Osserviamo come  $t$  deve essere  $> 0$ , altrimenti  $d(x_1, x_2) = d(x_1, 0) + d(0, x_2) = t_1 + t_2$  per l'Oss.1.1.1, e quindi  $d(y_1, y_2) \geq \pi$  per la definizione di metrica del cono, che va contro le ipotesi. Quindi la proiezione  $ty \mapsto y$  di  $[x_1, x_2]$  su  $Y$  è ben definita.

Vogliamo provare che l'immagine di  $[x_1, x_2]$  tramite questa proiezione è un segmento che connette  $y_1$  e  $y_2$  in  $Y$ ; per questo è sufficiente mostrare che  $d(y_1, y) + d(y, y_2) = d(y_1, y_2)$ .

Consideriamo i triangoli di comparazione  $\bar{\Delta}_1 = \Delta(\bar{0}, \bar{x}, \bar{x}_1)$ ,  $\bar{\Delta}_2 = \Delta(\bar{0}, \bar{x}, \bar{x}_2)$  per la tripla  $(0, x, x_1)$ ,  $(0, x, x_2)$  rispettivamente, posti in modo che  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$  siano dalla parte opposta rispetto a  $[\bar{0}, \bar{x}]$  (vedi Fig.1.9). Quindi per la definizione di metrica del cono, l'angolo di  $\bar{\Delta}_1$  in  $\bar{0}$  è pari  $d_\pi(y_1, y)$ , mentre l'angolo di  $\bar{\Delta}_2$  in  $\bar{0}$  è pari  $d_\pi(y, y_2)$  (vedi Fig.1.9). Ma

$$d(\bar{x}_1, \bar{x}) + d(\bar{x}, \bar{x}_2) = d(x_1, x) + d(x, x_2) = d(x_1, x_2) < d(x_1, 0) + d(0, x_2) = d(\bar{x}_1, \bar{0}) + d(\bar{0}, \bar{x}_2)$$

dove la seconda uguaglianza e la disuguaglianza valgono essendo  $[x_1, x_2]$  segmento, con  $0 \notin [x_1, x_2]$ , mentre le altre valgono per come abbiamo preso i triangoli di comparazione; per cui  $d(y_1, y) + d(y, y_2) < \pi$  (in particolare  $d_\pi(y_1, y) = d(y_1, y)$  e  $d_\pi(y, y_2) = d(y, y_2)$ ).

Sia infine  $\tilde{\Delta}(\tilde{0}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  triangolo di comparazione per la tripla  $(0, x_1, x_2)$ , il cui angolo in  $\tilde{0}$  è  $d(y_1, y_2)$ . Ma

$$d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq d(\bar{x}_1, \bar{x}) + d(\bar{x}, \bar{x}_2) = d(x_1, x) + d(x, x_2) = d(x_1, x_2) = d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2),$$

quindi dalla legge del coseno  $d(y_1, y) + d(y, y_2) \leq d(y_1, y_2)$ . La disuguaglianza contraria è data dalla disuguaglianza triangolare. Da cui l'uguaglianza.

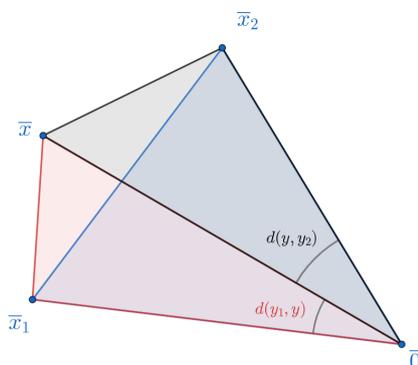


Figura 1.9: Triangoli di comparazione nella dimostrazione

Mostriamo (2). Mostriamo il caso  $d(y_1, y_2) \geq \pi$ , dato che per  $t_1 = 0$  o  $t_2 = 0$  è banale. Infatti se  $t_1 = 0$  (o analogamente  $t_2 = 0$ ), supponiamo ci siano due geodetiche. Sia  $x \in [0, x_2]$  punto in una delle due geodetiche, e consideriamo il triangolo di comparazione di  $\Delta(0, x, x_2)$ . Questo è degenere essendo  $d(0, x_2) = d(0, x) + d(x, x_2)$ , e i due triangoli sono isometrici per l'Oss.1.5.3, quindi è degenere anche  $\Delta(0, x, x_2)$ , per cui le due geodetiche coincidono.

Ora mostriamo che la geodetica scritta nell'Oss.1.5.2 è l'unica geodetica tra  $x_1$  e  $x_2$ .

Consideriamo ora il caso  $t_1, t_2 > 0$  e  $d(y_1, y_2) \geq \pi$ . Basta mostrare che se  $x = ty$ ,  $d(x_1, x) + d(x, x_2) = d(x_1, x_2)$  e  $d(x_1, x) < t_1$  allora  $y = y_1$ . Come nella parte (1), costruiamo i due triangoli di comparazione  $\bar{\Delta}_1$  e  $\bar{\Delta}_2$ , che hanno angolo in  $\bar{0}$  rispettivamente  $d_\pi(y_1, y)$  e  $d_\pi(y, y_2)$ , che per ipotesi hanno somma maggiore o uguale di  $\pi$ ; ma

$$d(\bar{x}_1, \bar{x}) + d(\bar{x}, \bar{x}_2) = d(x_1, x) + d(x, x_2) = d(x_1, x_2) = d(x_1, 0) + d(0, x_2) = d(\bar{x}_1, \bar{0}) + d(\bar{0}, \bar{x}_2)$$

dove la penultima uguaglianza vale essendo  $0 \in [x_1, x_2]$ . Tuttavia ciò è vero solo se entrambi i triangoli  $\bar{\Delta}_1$  e  $\bar{\Delta}_2$  sono degeneri, caso in cui  $x$  sta lungo la congiungente di  $0$  e  $x_1$ , e quindi  $y = y_1$ .  $\square$

**Corollario 1.25.**  $C(Y)$  è (unicamente) geodetico se e solo se esiste una palla centrata nel vertice di  $C(Y)$  convessa (e unicamente geodetica).

*Dimostrazione.* Basta mostrare se esiste una palla centrata nel vertice di  $C(Y)$  convessa (e unicamente geodetica) allora  $Y$  è (unicamente)  $\pi$ -geodetico, la tesi segue dal teorema.

Sia palla convessa intorno al vertice di raggio  $2t > 0$  e siano  $y_1, y_2 \in Y$  tali che  $d(y_1, y_2) < \pi$ . Allora i punti  $x_1 = ty_1$  e  $x_2 = ty_2$  sono connessi da una geodetica, e quindi dal punto (1) del teorema precedente c'è una geodetica che connette  $y_1$  e  $y_2$ . Inoltre, sempre per il punto (1), questa è unica se e solo se la geodetica tra  $x_1$  e  $x_2$  è unica. Segue la tesi.  $\square$

*Osservazione 1.5.3.* Dato  $Y$  spazio metrico, consideriamo un triangolo geodetico sul suo cono  $C(Y)$  con un vertice coincidente col vertice del cono. Allora il triangolo è isometrico al suo triangolo di comparazione.

*Dimostrazione.* Dato un triangolo geodetico  $\Delta(0, x_1, x_2) \subseteq C(Y)$  con  $x_i = t_i y_i$  per  $i = 1, 2$ , consideriamo il suo triangolo di comparazione  $\Delta(\bar{0}, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , che quindi ha  $d_\pi(y_1, y_2)$  come angolo in  $\bar{0}$ .

Iniziamo mostrando che la distanza tra i punti di  $[0, x_1]$  e  $[0, x_2]$  non varia passando al triangolo di comparazione (vedi Fig.1.10).

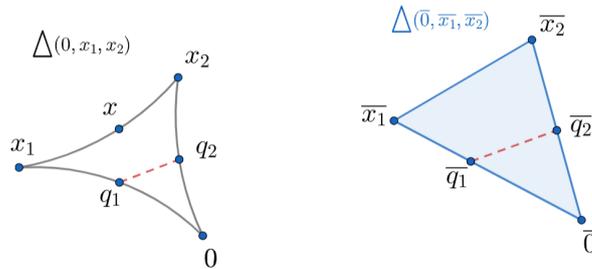


Figura 1.10: Dobbiamo mostrare che i due tratti in rosso hanno la stessa lunghezza

Prendiamo due punti  $q_1 = h_1 y_1 \in [0, x_1]$ ,  $q_2 = h_2 y_2 \in [0, x_2]$ , a distanza  $h_1$  e  $h_2$  da 0 rispettivamente, e siano  $\bar{q}_1, \bar{q}_2$  loro punti di comparazione. La loro distanza sarà data da

$$d(q_1, q_2)^2 = h_1^2 + h_2^2 - 2h_1 h_2 \cos d_\pi(y_1, y_2) = d(\bar{q}_1, \bar{q}_2)^2$$

dato che l'angolo in  $\bar{0}$  è lo stesso per  $\Delta(0, x_1, x_2)$  e  $\Delta(0, q_1, q_2)$ .

Ora mostriamo che la distanza tra i punti  $[0, x_1]$  e  $[x_1, x_2]$  non varia passando al triangolo di comparazione (vedi Fig.1.11). Analogamente per  $[0, x_2]$  e  $[x_1, x_2]$ ; da cui si ha la tesi.

Prendiamo  $x = hy \in [x_1, x_2]$ . Se mostriamo che il triangolo di comparazione  $\hat{\Delta} = \Delta(\bar{0}, \bar{x}_1, \hat{x})$  della tripla  $(0, x_1, x)$  è proprio  $\Delta(\bar{0}, \bar{x}_1, \bar{x})$ , con  $\bar{x} \in [\bar{x}_1, \bar{x}_2]$  punto di comparazione di  $x$ , allora applicando il ragionamento sopra otteniamo che

$$d(q_1, x) = d(\bar{q}_1, \bar{x})$$

dato che  $x \in [0, x]$  e  $q_1 \in [0, x_1]$ . In modo analogo si procede per  $q_2$ .

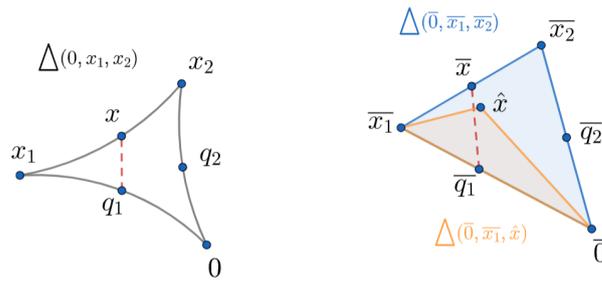


Figura 1.11: Dobbiamo mostrare che i due tratti in rosso hanno la stessa lunghezza

Per mostrarlo, basta dire che la distanza tra  $\bar{0}$  e  $\hat{x}$  è proprio  $d(\bar{0}, \bar{x})$ . Ma i lati  $[\bar{0}, \bar{x}_1]$  e  $[\bar{x}_1, \bar{x}]$  sono lunghi rispettivamente  $t_1$  e  $t_1^2 + h^2 - 2t_1h \cos d_\pi(y_1, y)$ , mentre l'angolo in  $\bar{0}$  di  $\hat{\Delta}$  è  $d_\pi(y_1, y)$ ; quindi il lato  $[\bar{0}, \hat{x}]$  è lungo  $h$ , da cui la tesi.  $\square$

Ora un teorema che ci rivela l'utilità della costruzione del cono che abbiamo fatto:

**Teorema 1.26.** *Sia  $x \in K$  con  $K$  complesso metrico. Allora esiste  $\epsilon > 0$  per cui  $B(x, \epsilon)$  è isometrico ad una palla di raggio  $\epsilon$  intorno al vertice di  $C(\text{Lk}(x, K))$ .*

*Dimostrazione.* Identifichiamo  $B$  palla intorno al vertice di  $C(\text{Lk}(x, K))$  con  $B(x, \epsilon)$  tramite una funzione  $B \rightarrow B(x, \epsilon)$  che manda  $tu$  in  $v \in K$  tale che  $d(x, v) = t$  e che sta lungo il segmento nella classe di  $u$  che contiene  $v$ . Se prendiamo  $\epsilon$  minore del minimo della distanza tra  $x$  e i simplessi non contenuti in  $st(x)$ , questa è una biezione, dato che c'è un unico segmento tra  $x$  e ogni  $v \in B(x, \epsilon)$ .

Ora mostriamo che la metrica indotta per restrizione su  $B(x, \epsilon)$  e la metrica  $d_C$  del cono indotta dalla biezione su  $B(x, \epsilon)$  coincidono, da cui l'isometria.

Siano  $v, u \in B(x, \epsilon)$  e  $\gamma$  geodetica tra  $v$  e  $u$ . Prendiamo una partizione  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  di  $[0, 1]$  in modo che  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  sia contenuto tutto in un semplice.

Consideriamo  $\Delta = \Delta(x, v, u)$  e lo dividiamo in piccoli triangoli  $\Delta_i = \Delta(x, \gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$ . Per cui ogni  $\Delta_i$  è in un semplice, e quindi è isometrico al suo triangolo di comparazione in  $\mathbb{R}^2$ , quindi soddisfa  $CAT(0)$  (vedi Def.2.1). Dal Lemma 3.11 otteniamo che  $\Delta$  soddisfa  $CAT(0)$ , allora

$$\begin{aligned}
 d(x, \gamma(t)) &\leq d(\bar{x}, \overline{\gamma(t)}) && \text{per la disuguaglianza } CAT(0) \\
 &\leq td(\bar{x}, \overline{\gamma(0)}) + (1-t)d(\bar{x}, \overline{\gamma(1)}) && \text{per convessità della metrica euclidea (vedi Def.2.2)} \\
 &\leq td(x, \gamma(0)) + (1-t)d(x, \gamma(1)) && \text{essendo } \Delta(\bar{x}, \overline{\gamma(0)}, \overline{\gamma(1)}) \text{ triangolo di comparazione} \\
 &< t\epsilon + (1-t)\epsilon && \text{dato che } \gamma(0), \gamma(1) \in B(x, \epsilon) \\
 &= \epsilon.
 \end{aligned}$$

Quindi  $\gamma$  sta tutta in  $B(x, \epsilon)$ , per cui  $B(x, \epsilon)$  è geodetico, e quindi la sua metrica è di lunghezza per il Lemma 1.10. Inoltre  $d_C$  è geodetica per la Prop.1.24 essendo il link  $\pi$ -geodetico, e quindi anch'essa è di lunghezza.

Osserviamo che abbiamo due metriche di lunghezza che, per costruzione, coincidono sui semplici, che sono anch'essi di lunghezza con la metrica indotta per restrizione.

In conclusione abbiamo che le due metriche coincidono, infatti dati due punti  $x, y \in B(x, \epsilon)$  vale

$$d(x, y) = \inf_c l(c) = \inf_c \sum_{i=0}^n l(c_i) \geq \sum_{i=0}^n \inf_c l(c_i) = d(x, z_1) + \cdots + d(z_n, y)$$

dove i  $c_i$  sono una restrizione di  $c$  contenuta tutta in un semplice. La prima uguaglianza vale essendo la metrica su  $B(x, \epsilon)$  di lunghezza, mentre l'ultima essendo di lunghezza le metriche sui semplici.

Per la disuguaglianza triangolare si ha la disuguaglianza contraria, e quindi l'uguaglianza. Quindi la distanza tra due punti dipende solo dalle metriche sui singoli semplici, per cui le due metriche coincidono.  $\square$

*Osservazione 1.5.4.* Per come è definito  $\epsilon$  nella dimostrazione del teorema, l'insieme delle palle  $B(v, \epsilon)$  al variare di  $v$  vertice in  $K$ , ricopre tutto  $K$ .

Inoltre, nella dimostrazione, abbiamo anche mostrato che ognuna di queste palle è uno spazio metrico geodetico.



# Capitolo 2

## Spazi CAT(0)

### 2.1 Proprietà degli spazi CAT(0)

**Definizione 2.1.** Sia  $X$  uno spazio metrico e  $\Delta$  un triangolo geodetico e  $\bar{\Delta}$  il triangolo di comparazione associato. Diciamo che  $\Delta$  soddisfa la *disuguaglianza CAT(0)* (o più semplicemente soddisfa *CAT(0)*) se per ogni  $x, y \in \Delta$  con punti di comparazione  $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Delta}$  vale

$$d(x, y) \leq d(\bar{x}, \bar{y}).$$

Uno spazio metrico si dice *CAT(0)* se è geodetico e ogni triangolo geodetico soddisfa *CAT(0)*. Mentre uno spazio metrico che è localmente *CAT(0)* si dice a *curvatura non positiva*. (Nello scrivere la disuguaglianza utilizzeremo sempre  $d$  al posto di  $d_E$  per alleggerire la notazione).

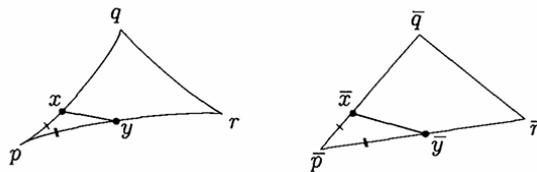


Figura 2.1: La disuguaglianza *CAT(0)*.

Ora definiamo ciò che sarà la proprietà più importante degli spazi *CAT(0)*:

**Definizione 2.2.** Diciamo che una metrica  $d$  su  $X$  è convessa se date  $c : [0, 1] \rightarrow X$  e  $c' : [0, 1] \rightarrow X$  geodetiche linearmente riparametrizzate vale

$$d(c(t), c'(t)) \leq (1 - t)d(c(0), c'(0)) + td(c(1), c'(1))$$

per ogni  $t \in [0, 1]$ .

**Lemma 2.3.** *Se  $X$  è CAT(0), allora la sua metrica è convessa.*

*Dimostrazione.* Supponiamo inizialmente che  $c(0) = c'(0)$ , e consideriamo il triangolo di comparazione  $\overline{\Delta}$  per  $\Delta(c(0), c(1), c'(1))$ . Essendo nel piano euclideo, ed essendo geodetiche, si ha  $d(\overline{c(t)}, \overline{c'(t)}) = td(\overline{c(1)}, \overline{c'(1)}) = td(c(1), c'(1))$ , mentre per la condizione CAT(0) si ha  $d(c(t), c'(t)) \leq d(\overline{c(t)}, \overline{c'(t)})$ . Da queste si ha  $d(c(t), c'(t)) \leq td(c(1), c'(1))$ .

Sia ora  $c'' : [0, 1] \rightarrow X$  una geodetica linearmente riparametrizzata tra  $c(0)$  e  $c'(1)$ . Applichiamo il punto precedente a  $c, c''$  e a  $c', c''$  orientate inversamente, da cui

$$\begin{aligned} d(c(t), c''(t)) &\leq td(c(1), c''(1)), \\ d(c'(t), c''(t)) &\leq (1-t)d(c'(0), c''(0)). \end{aligned}$$

Quindi per la disuguaglianza triangolare, si ha la tesi.  $\square$

Ora altre proprietà degli spazi CAT(0) (alcune di queste proprietà si possono dimostrare usando solo la convessità della metrica).

**Proposizione 2.4.** *Sia  $X$  uno spazio CAT(0), allora*

- (1)  *$X$  è unicamente geodetico, e le geodetiche variano in modo continuo con gli estremi.*
- (2) *Ogni geodetica locale in  $X$  è una geodetica.*
- (3) *Ogni palla in  $X$  è convessa (cioè ogni coppia di punti nella palla è collegata da un'unica geodetica tutta contenuta nella palla).*
- (4)  *$X$  è contraibile.*

*Dimostrazione.* Mostriamo (1). Siano  $p, q \in X$  e siano  $[p, q], [p, q]'$  due geodetiche. Siano ora  $r \in [p, q]$  e  $r' \in [p, q]'$  tali che  $d(p, r) = d(p, r')$ .

Spezziamo  $[p, q]$  in due geodetiche  $[p, r]$  e  $[r, q]$  e notiamo che il triangolo di comparazione in  $\mathbb{R}^2$  di  $\Delta([p, q]', [p, r], [r, q])$  è degenere, per cui i punti di comparazione di  $r$  e  $r'$  sono uguali.

La disuguaglianza CAT(0) implica che  $d(r, r') = 0$ , cioè  $r = r'$ , e quindi al variare di  $r$  si ha  $[p, q] = [p, q]'$ .

Siano ora  $p_n, q_n$  successioni in  $X$  tali che  $p_n \rightarrow p$  e  $q_n \rightarrow q$ . Siano  $c, c_n$  rispettivamente le geodetiche  $[p, q], [p_n, q_n]$  linearmente riparametrizzate. Allora per convessità si ha

$$d(c(t), c_n(t)) \leq td(q, q_n) + (1-t)d(p, p_n) \rightarrow 0$$

per cui

$$[q_n, p_n] \rightarrow [p, q]$$

uniformemente.

Mostriamo (2). Sia  $c : [0, l] \rightarrow X$  una geodetica locale. Definiamo

$$S = \{t \in [0, l] \mid c|_{[0, t]} \text{ geodetica}\}$$

per cui:

- $S$  non vuoto, dato che  $0 \in S$ .
- $S = \phi^{-1}(0)$  con  $\phi(t) = d(c(0), c(t)) - t$  continua, quindi  $S$  chiuso.
- $S$  aperto. Dato  $t_0 \in S$ , esiste  $\epsilon \in (0, l - t_0)$  tale che  $c|_{[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]}$  geodetica. Abbiamo quindi che  $c|_{[0, t_0]}$ ,  $c|_{[t_0, t_0 + \epsilon]}$  sono geodetiche, per cui se consideriamo  $\Delta = \Delta(c(0), c(t_0), c(t_0 + \epsilon))$ , vale che, per l'unicità delle geodetiche,  $c([0, t_0 + \epsilon])$  è l'unione di due lati di  $\Delta$ .

Allora il triangolo di comparazione  $\overline{\Delta}$  è degenere, infatti se non lo fosse, prendo  $x \in [c(t_0 - \epsilon), c(t_0)]$  e  $y \in [c(t_0), c(t_0 + \epsilon)]$ , per cui  $x, y$  in una stessa geodetica, e quindi

$$d(\overline{x}, \overline{y}) < d(\overline{x}, \overline{c(t_0)}) + d(\overline{c(t_0)}, \overline{y}) = d(x, c(t_0)) + d(c(t_0), y) = d(x, y)$$

dove la prima uguaglianza vale per la definizione di triangolo di comparazione, mentre la seconda per l'Osservazione 1.1.1. Ma questo è assurdo per la disuguaglianza  $CAT(0)$ , per cui anche  $\Delta$  è degenere, e quindi  $c|_{[0, t_0 + \epsilon]}$  è una geodetica.

Mostriamo (3). Siano  $x, y \in B(z, \epsilon) \subseteq X$ . Prendiamo la geodetica  $c$  tra  $x$  e  $y$ , e consideriamo il triangolo geodetico  $\Delta(x, y, z)$ . Per la condizione  $CAT(0)$  abbiamo che

$$d(z, c(t)) \leq d(\overline{z}, \overline{c(t)}) < \epsilon$$

dato che in  $\mathbb{R}^2$  le palle sono convesse.

Mostriamo (4). Segue da (1) che dato  $x_0 \in X$ , la mappa

$$r_{x_0} : X \times [0, 1] \rightarrow X$$

che associa a  $(y, t)$  il punto a distanza  $td(x_0, y)$  da  $y$  lungo la geodetica  $[x_0, y]$  è continua. Questa è una retrazione per deformazione di  $X$  in  $x_0$ .  $\square$

**Proposizione 2.5.** *Sia  $X$  uno spazio geodetico. Allora sono equivalenti:*

- (1)  $X$  è CAT(0);
- (2) se  $\Delta(p, q, r)$  è un triangolo geodetico in  $X$  e  $\overline{\Delta}(p, q, r)$  è il suo triangolo di comparazione, allora per ogni  $x \in [q, r]$  vale

$$d(p, x) \leq d(\overline{p}, \overline{x})$$

con  $\overline{x} \in [\overline{q}, \overline{r}]$  punto di comparazione di  $x$ ;

- (3) se  $\Delta(p, q, r)$  è un triangolo geodetico in  $X$  e  $\overline{\Delta}(p, q, r)$  è il suo triangolo di comparazione, allora per ogni  $x \in [q, r]$  e ogni  $y \in [p, r]$ , con  $x, y \neq p$ , vale

$$\overline{Z}_p(x, y) \leq \overline{Z}_p(q, r);$$

- (4) L'angolo di Alexandrov tra i lati di ogni triangolo geodetico è minore o uguale dell'angolo tra i lati corrispondenti del triangolo di comparazione.

*Dimostrazione.* L'implicazione (1)  $\Rightarrow$  (2) è ovvia.

L'implicazione (3)  $\Rightarrow$  (4) è data dal fatto che

$$\sup_{0 < t, t' < \epsilon} \overline{Z}_p(c(t), c'(t)) \leq \overline{Z}_p(q, r)$$

per l'ipotesi di (3), per cui vale anche facendo tendere  $\epsilon$  a 0.

Mostriamo (1)  $\iff$  (3). Siano  $\Delta = \Delta(p, q, r)$ ,  $x \in [p, q]$ ,  $y \in [p, r]$ , con  $x, y \neq p$ , e sia  $\Delta' = \Delta(p, x, y)$ . Siano  $\overline{\Delta} = \Delta(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r})$  e  $\overline{\Delta}' = \Delta(\overline{p}, \overline{x}', \overline{y}')$  triangoli di comparazione di  $\Delta$  e  $\Delta'$  rispettivamente. Allora per la legge del coseno (1.1) si ha

$$d(\overline{x}', \overline{y}') \leq d(\overline{x}, \overline{y}) \iff \angle_{\overline{p}}(\overline{x}', \overline{y}') \leq \angle_{\overline{p}}(\overline{x}, \overline{y})$$

con  $d(x, y) = d(\overline{x}', \overline{y}')$ ,  $\angle_{\overline{p}'}(\overline{x}', \overline{y}') = \overline{Z}_p(x, y)$  e  $\angle_{\overline{p}}(\overline{x}, \overline{y}) = \angle_{\overline{p}}(\overline{q}, \overline{r}) = \overline{Z}_p(q, r)$  per definizione di triangolo e angolo di comparazione.

Mostriamo (2)  $\Rightarrow$  (3). Con le notazione sopra, sia  $\overline{\Delta}'' = \Delta(\overline{p}, \overline{x}'', \overline{r}'')$  triangolo di comparazione di  $\Delta'' = \Delta(p, x, r)$ . Usando (2) su  $\Delta''$  si ha  $d(x, y) \leq d(\overline{x}'', \overline{y}'')$ , con  $\overline{y}'' \in [\overline{p}, \overline{r}'']$  punto di comparazione di  $y \in [p, r]$ , e  $d(\overline{x}', \overline{y}') = d(x, y)$ , da cui

$$\angle_{\overline{p}}(\overline{x}', \overline{y}') \leq \angle_{\overline{p}}(\overline{x}'', \overline{r}'') \tag{2.1}$$

per la legge del coseno. Usando (2) su  $\Delta$  si ha  $d(x, r) \leq d(\bar{x}, \bar{r})$ , con  $d(x, r) = d(\bar{x}'', \bar{r}'')$ , da cui come prima

$$\angle_{\bar{p}}(\bar{x}'', \bar{r}'') \leq \angle_{\bar{p}}(\bar{x}, \bar{r}) \quad (2.2)$$

dove  $\angle_{\bar{p}}(\bar{x}, \bar{r}) = \angle_{\bar{p}}(\bar{q}, \bar{r})$  per definizione di angolo di comparazione. Quindi unendo (2.1) e (2.2) si ha la condizione (3).

Mostriamo (4)  $\Rightarrow$  (2). Sia  $\Delta = \Delta(p, q, r)$  e sia  $x \in [q, r]$ , con  $x \neq q, r$ , e sia  $[x, p]$  una geodetica. Siano  $\gamma, \gamma'$  gli angoli  $\angle_x(p, q), \angle_x(p, r)$  rispettivamente, e sia  $\beta = \angle_q(r, p)$ .

Prendiamo  $\tilde{\Delta} = \Delta(\bar{p}, \bar{q}, \tilde{r}), \bar{\Delta} = \Delta(\bar{p}, \bar{x}, \bar{q}), \bar{\Delta}' = \Delta(\bar{p}, \bar{x}, \bar{r}')$  triangoli di comparazione di  $\Delta, \Delta(p, x, q), \Delta(p, x, r)$  rispettivamente, e li posizioniamo su  $\mathbb{R}^2$  in modo che  $\bar{q}$  e  $\bar{r}'$  siano dalla parte opposta rispetto a  $[\bar{p}, \bar{x}]$ . Siano  $\bar{\gamma}, \bar{\gamma}'$  angoli di comparazione di  $\gamma, \gamma'$ , mentre  $\bar{\beta}, \tilde{\beta}$  angoli di comparazione di  $\beta$  in  $\bar{\Delta}$  e  $\tilde{\Delta}$ .

Per la disuguaglianza triangolare, e dato che  $x \in [q, r]$ , abbiamo che

$$\gamma + \gamma' \geq \angle_x(q, r) = \pi.$$

Quindi per (4) si ha

$$\bar{\gamma} + \bar{\gamma}' \geq \pi.$$

Allora per il Lemma di Alexandrov 1.5

$$\bar{\beta} \leq \tilde{\beta},$$

da cui  $d(p, x) = d(\bar{p}, \bar{x}) \leq d(\bar{p}, \tilde{x})$  per legge del coseno (vedi Fig.2.2), quindi vale (2).  $\square$

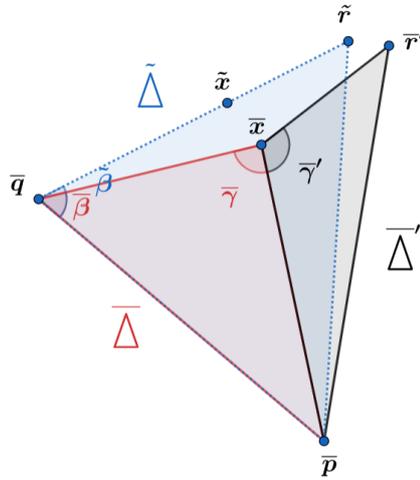


Figura 2.2: Il Lemma di Alexandrov ci dice che  $\tilde{\beta} \geq \bar{\beta}$  essendo  $\bar{\gamma} + \bar{\gamma}' \geq \pi$ .

*Esempio 2.1.1.* Gli spazi  $\mathbb{S}^1$  e  $\mathbb{S}^2$  non sono  $CAT(0)$ , infatti come abbiamo visto tra ogni punto e il suo antipodale esistono più geodetiche, quindi viene meno la proprietà (1) della Prop.2.4.

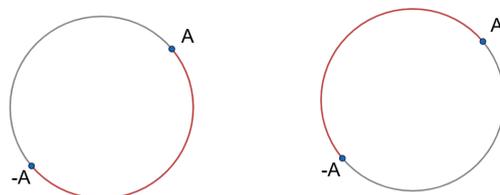


Figura 2.3: Le due geodetiche tra un punto e il suo antipodale in  $\mathbb{S}^1$ .

## 2.2 Un'altra curvatura

Lo "0" in  $CAT(0)$  può essere sostituito con altri numeri reali, cambiando anche lo spazio base in cui andiamo a comparare i triangoli. In questo caso prendiamo i triangoli di comparazione in  $\mathbb{S}^2$ ; sappiamo dall'Es.1.1.1 che esistono se i triangoli hanno perimetro minore di  $2\pi$ .

**Definizione 2.6.** Uno spazio  $\pi$ -geodetico si dice  $CAT(1)$  se dato  $\Delta$  triangolo geodetico con perimetro minore di  $2\pi$  e  $\bar{\Delta} \subseteq \mathbb{S}^2$  il suo triangolo di comparazione, per ogni  $x, y \in \Delta$  e rispettivi punti di comparazione  $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Delta}$  vale

$$d(x, y) \leq d(\bar{x}, \bar{y}).$$

Gli spazi  $CAT(0)$  e  $CAT(1)$  sono strettamente legati, infatti

**Teorema 2.7.** *Sia  $Y$  spazio metrico. Allora*

$$Y \text{ è } CAT(1) \iff C(Y) \text{ è } CAT(0).$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $Y$  sia  $CAT(1)$ . Il cono è geodetico per la Prop.1.24, quindi ci basta mostrare la disuguaglianza  $CAT(0)$ . Consideriamo un triangolo sul cono. Se un vertice è zero, allora per l'Oss.1.5.3 vale la disuguaglianza, quindi supponiamo che tutti i vertici non siano zero.

Siano  $x_i = t_i y_i$  per  $i = 1, 2, 3$  i vertici. Consideriamo i tre casi:

(1)  $d(y_1, y_2) + d(y_2, y_3) + d(y_3, y_1) < 2\pi$ .

(2)  $d(y_1, y_2) + d(y_2, y_3) + d(y_3, y_1) \geq 2\pi$  ma  $d(y_i, y_j) < \pi \quad \forall i, j = 1, 2, 3$ .

(3) Uno dei  $d(y_i, y_j)$  è  $\geq \pi$ .

Caso (1). Consideriamo un triangolo  $\Delta(y_1, y_2, y_3) \subseteq Y$ , e un triangolo di comparazione  $\overline{\Delta}$  in  $\mathbb{S}^2$  con vertici  $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3$ . Quindi la mappa naturale  $\overline{\Delta} \rightarrow \Delta$  si estende ad una biezione  $C(\overline{\Delta}) \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow C(\Delta)$ , e il triangolo  $\Delta(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) \subseteq C(\overline{\Delta})$ , con  $\overline{x}_i = t_i \overline{y}_i$ , può essere visto come triangolo di comparazione per  $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ .

Allora dati  $\overline{x} = t\overline{y}, \overline{x}' = t'\overline{y}'$  punti di comparazione per  $x = ty, x' = t'y'$ , abbiamo  $d(y, y') \leq d(\overline{y}, \overline{y}')$  disuguaglianza  $CAT(1)$ , e quindi

$$\begin{aligned} d(\overline{x}, \overline{x}')^2 &= t^2 + t'^2 - 2tt' \cos d_\pi(\overline{y}, \overline{y}') \\ &\geq t^2 + t'^2 - 2tt' \cos d_\pi(y, y') = d(x, x')^2, \end{aligned}$$

da cui la tesi, essendo le distanze numeri non negativi.

Caso (2). Siano  $\Delta(\tilde{0}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \Delta(\tilde{0}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_3)$  i triangoli di comparazione in  $\mathbb{R}^2$  per  $\Delta(0, x_1, x_2), \Delta(0, x_1, x_3)$  rispettivamente, scelti in modo che  $\tilde{x}_2, \tilde{x}_3$  siano dalla parte opposta rispetto a  $[\tilde{0}, \tilde{x}_1]$ .

Sia  $\Delta(\hat{0}, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  triangolo di comparazione in  $\mathbb{R}^2$  per  $\Delta(0, x_2, x_3)$ . Dalla definizione di metrica del cono e dalla legge del coseno, abbiamo  $\angle_{\tilde{0}}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = d(y_1, y_2), \angle_{\tilde{0}}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3) = d(y_1, y_3), \angle_{\hat{0}}(\hat{x}_2, \hat{x}_3) = d(y_2, y_3)$ , quindi

$$\angle_{\tilde{0}}(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = 2\pi - \angle_{\tilde{0}}(\tilde{x}_2, \tilde{x}_1) - \angle_{\tilde{0}}(\tilde{x}_3, \tilde{x}_1) \leq d(y_2, y_3) = \angle_{\hat{0}}(\hat{x}_2, \hat{x}_3)$$

da cui  $d(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \leq d(\hat{x}_2, \hat{x}_3) = d(x_2, x_3)$  per la legge del coseno.

Ora sia  $\Delta(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$  triangolo di comparazione in  $\mathbb{R}^2$  di  $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ , per cui

$$\begin{aligned} \angle_{\overline{x}_1}(\overline{x}_2, \overline{x}_3) &\geq \angle_{\tilde{x}_1}(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3) && \text{per legge del coseno} \\ &= \angle_{\tilde{x}_1}(\tilde{x}_2, \tilde{0}) + \angle_{\tilde{x}_1}(\tilde{0}, \tilde{x}_3) && \text{per come abbiamo costruito } \Delta(\tilde{0}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \Delta(\tilde{0}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_3) \\ &= \angle_{x_1}(x_2, 0) + \angle_{x_1}(0, x_3) && \text{per Oss.1.5.3} \\ &\geq \angle_{x_1}(x_2, x_3) && \text{per disuguaglianza triangolare.} \end{aligned}$$

Per cui la condizione (4) della Proposizione 2.5 è soddisfatta.

Caso (3). Supponiamo  $d(y_1, y_3) \geq \pi$ , quindi per 1.24 il segmento  $[x_1, x_3]$  è l'unione di  $[x_1, 0]$  e  $[0, x_3]$ .

Siano  $\overline{\Delta}_1 = \Delta(\overline{0}, \overline{x}_1, \overline{x}_2), \overline{\Delta}_3 = \Delta(\overline{0}, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$  triangoli di comparazione per  $\Delta(0, x_1, x_2), \Delta(0, x_2, x_3)$ , scelti in modo che  $\overline{x}_1, \overline{x}_3$  siano dalla parte opposta rispetto a  $[0, \overline{x}_2]$ .

La somma degli angoli in  $\overline{0}$  di  $\overline{\Delta}_1$  e  $\overline{\Delta}_3$  è  $d_\pi(y_1, y_2) + d_\pi(y_2, y_3) \geq \pi$ . (Infatti se uno dei due addendi è  $\geq \pi$  vale, mentre se sono entrambi  $< \pi$  si usa la disuguaglianza

triangolare per cui sarà  $\geq d(y_2, y_3) \geq \pi$ ).

Ora raddrizzando l'unione di questi due triangoli per ottenerne uno di comparazione per  $\Delta(x_1, x_2, x_3)$  (vedi Fig.2.4), il Lemma di Alexandrov 1.5 ci assicura che gli angoli non diminuiscono, e quindi  $\Delta(x_1, x_2, x_3)$  soddisfa  $CAT(0)$ , dato che lo soddisfavano  $\Delta(0, x_1, x_2), \Delta(0, x_2, x_3)$  per l'Oss.1.5.3.

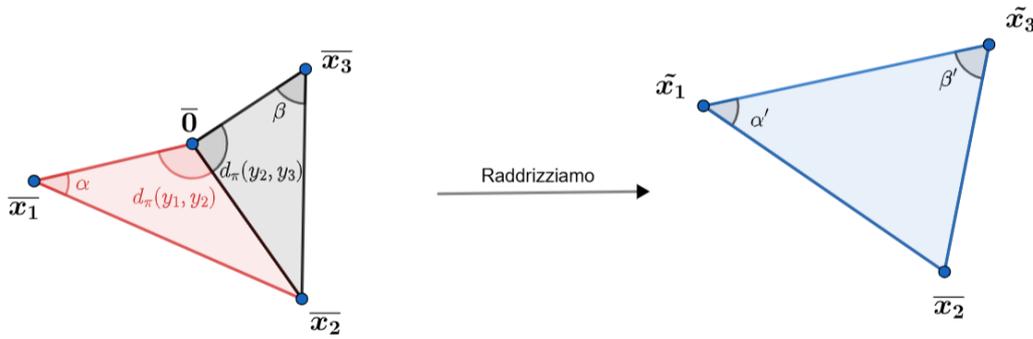


Figura 2.4: Raddrizzando l'unione dei due triangoli (raddrizzamento in cui lasciamo fissi  $\bar{x}_2$  e le lunghezze di  $[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$  e  $[\bar{x}_2, \bar{x}_3]$ ), il Lemma di Alexandrov ci dice che  $\alpha \leq \alpha'$  e  $\beta \leq \beta'$ , quindi continua a valere la condizione  $CAT(0)$ .

Ora rimane da mostrare che  $Y$  è  $CAT(1)$  se  $C(Y)$  è  $CAT(0)$ . Essendo  $C(Y)$   $CAT(0)$ , quindi unicamente geodetico, per la Prop.1.24 abbiamo che  $Y$  è unicamente  $\pi$ -geodetico.

Sia  $\Delta = \Delta(y_1, y_2, y_3)$  un triangolo geodetico in  $Y$  con perimetro minore di  $2\pi$ , e sia  $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) \subseteq \mathbb{S}^2$  un suo triangolo di comparazione.

Consideriamo il triangolo  $\Delta' \subseteq C(\Delta) \subseteq C(Y)$  con vertici  $x_i = ty_i$  per  $i = 1, 2, 3$ . Dato che  $C(\bar{\Delta}) \subseteq C(\mathbb{S}^2) = \mathbb{R}^3$ , consideriamo  $\bar{\Delta}'$  il triangolo di comparazione per  $\Delta'$  immerso in  $C(\bar{\Delta})$ , con vertici  $\bar{x}_i = t\bar{y}_i$ .

Se  $x = ty \in [x_2, x_3]$ , il suo punto di comparazione è  $\bar{x} = t\bar{y}$ , con  $\bar{y} \in \mathbb{S}^2$  punto di comparazione per  $y$ .

Per ipotesi,  $d(x_1, x) \leq d(\bar{x}_1, \bar{x})$ , quindi per la definizione di metrica del cono abbiamo  $d(y_1, y) \leq d(\bar{y}_1, \bar{y})$ . □

Guardando la dimostrazione, osserviamo che per dimostrare che  $Y$  è  $CAT(1)$  è servito solo il fatto che un intorno del vertice di  $C(Y)$  è  $CAT(0)$ . Infatti per il Corollario 1.25 abbiamo che  $C(Y)$  è unicamente geodetico se e solo se lo è una palla attorno al vertice. Segue quindi:

**Corollario 2.8.** *Sia  $Y$  uno spazio metrico.  $C(Y)$  è  $CAT(0)$  se e solo se esiste un intorno del vertice di  $C(Y)$  che è  $CAT(0)$ .*

# Capitolo 3

## Cartan-Hadamard

In questo capitolo andremo a dimostrare come la nozione locale di curvatura non positiva di uno spazio con alcune proprietà si estenda globalmente sul suo rivestimento universale.

Osserviamo che se uno spazio metrico connesso è a curvatura non positiva, allora è localmente contraibile (Prop.2.4(4)), e quindi ammette un rivestimento universale. Si ricordi la nozione di metrica indotta dal rivestimento (Def.1.12).

**Teorema di Cartan-Hadamard.** *Sia  $X$  uno spazio metrico completo e connesso. Se  $X$  è a curvatura non positiva, allora il suo rivestimento universale, con la metrica indotta dal rivestimento, è  $CAT(0)$ .*

**Corollario 3.1.** *Se uno spazio topologico connesso ammette una metrica completa e non positivamente curva, allora è asferico.*

*Dimostrazione.* Per la Prop.2.4(4) e il Teorema di Cartan-Hadamard, il rivestimento universale è contraibile, quindi lo spazio è asferico.  $\square$

### 3.1 Un lemma fondamentale

D'ora in poi utilizzeremo liberamente il termine *geodetica (locale)* per indicare le geodetiche (locali) linearmente riparametrizzate.

**Lemma 3.2.** *Sia  $X$  uno spazio metrico. Supponiamo che la metrica sia localmente convessa e localmente completa. Sia  $c : [0, 1] \rightarrow X$  una geodetica locale da  $x$  a  $y$ . Sia  $\epsilon > 0$  tale che per ogni  $t \in [0, 1]$  la metrica indotta sulla palla chiusa  $\overline{B}(c(t), 2\epsilon)$  sia completa e convessa. Allora:*

- (1) *per ogni  $\bar{x}, \bar{y} \in X$  tali che  $d(x, \bar{x}) < \epsilon$  e  $d(y, \bar{y}) < \epsilon$ , esiste un'unica geodetica locale  $\bar{c} : [0, 1] \rightarrow X$  tra  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  tale che la funzione  $t \mapsto d(c(t), \bar{c}(t))$  è una funzione convessa.*

$$(2) \ell(\bar{c}) \leq \ell(c) + d(x, \bar{x}) + d(y, \bar{y}).$$

Prima di dimostrare il lemma, vediamo subito una conseguenza. Ricordiamo che uno spazio metrico si dice (unicamente) local-geodetico se esiste un'unica geodetica locale tra ogni coppia di punti dello spazio.

**Corollario 3.3.** *Nelle ipotesi del lemma, se  $X$  è unicamente (local-)geodetico, allora le geodetiche (locali) variano in modo continuo con gli estremi.*

*Dimostrazione.* Siano  $x_n, y_n$  successioni in  $X$  tali che  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \rightarrow y$ , e sia  $c_n$  la geodetica (locale) con estremi  $x_n$  e  $y_n$ . Quindi per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $d(x_n, x) < \epsilon$  e  $d(y_n, y) < \epsilon$  per ogni  $n \geq N$ , per cui:

$$\begin{aligned} d(c_n(t), c(t)) &\leq td(x_n, x) + (1-t)d(y_n, y) && \text{per il Lemma 3.2} \\ &< t\epsilon + (1-t)\epsilon = \epsilon \end{aligned}$$

per ogni  $n \geq N$ . □

*Dimostrazione Lemma 3.2.* Proviamo per prima l'unicità di  $\bar{c}$ . Siano  $c', c'' : [0, 1] \rightarrow X$  due geodetiche locali che rispettano la condizione in (1), per cui

$$d(c(t), c'(t)) \leq td(c(0), c'(0)) + (1-t)d(c(1), c'(1)) < t\epsilon + (1-t)\epsilon = \epsilon$$

per ogni  $t \in [0, 1]$ . Analogamente  $d(c(t), c''(t)) < \epsilon$  per ogni  $t \in [0, 1]$ , quindi  $c'(t), c''(t) \in \bar{B}(c(t), 2\epsilon)$ .

Dato che la metrica su  $\bar{B}(c(t), 2\epsilon)$  è convessa, la funzione  $t \mapsto d(c'(t), c''(t))$  è localmente convessa, quindi convessa (essendo localmente convessa su un intervallo in  $\mathbb{R}$ ). Siccome in più valgono  $c'(0) = c''(0)$  e  $c'(1) = c''(1)$ , allora  $c' = c''$ .

Ora mostriamo che (1) implica (2). Osserviamo che per una geodetica locale  $\gamma$  valgono le proprietà

$$\begin{aligned} \ell(\gamma|_{[0,t]}) &= t\ell(\gamma) \quad \text{e} \\ \ell(\gamma|_{[0,t]}) &= d(\gamma(0), \gamma(t)) \end{aligned}$$

per  $t > 0$  sufficientemente piccolo. Per cui se abbiamo  $c', c''$  geodetiche locali tali che  $d(c(t), c'(t)) < \epsilon$  e  $d(c(t), c''(t)) < \epsilon$  per ogni  $t \in [0, 1]$  e tali che  $c'(0) = c''(0)$ ,

allora per  $t > 0$  abbastanza piccolo si ha

$$\begin{aligned} t\ell(c'') &= d(c''(0), c''(t)) = d(c'(0), c''(t)) \leq \\ &\leq d(c'(0), c'(t)) + d(c'(t), c''(t)) \leq \\ &\leq t\ell(c') + td(c'(1), c''(1)) \end{aligned}$$

e quindi  $\ell(c'') \leq \ell(c') + d(c'(1), c''(1))$ . Sia ora  $\bar{c}'$  l'unica geodetica tra  $\bar{x}$  e  $y$  che soddisfa la condizione (1) del lemma.

Applicando l'argomento precedente con  $c' = \bar{c}'$  e  $c'' = \bar{c}$  otteniamo  $\ell(\bar{c}) \leq \ell(\bar{c}') + d(y, \bar{y})$ ; mentre applicandolo a  $c'(t) = c(1-t)$  e  $c'' = \bar{c}'(1-t)$  otteniamo  $\ell(\bar{c}') \leq \ell(c) + d(x, \bar{x})$ . Ora unendole si ottiene la condizione (2).

Proviamo l'esistenza in (1). Dato  $A > 0$ , consideriamo la seguente proprietà:

**P(A).** Per ogni  $a, b \in [0, 1]$  tali che  $0 < b - a \leq A$  e ogni  $\bar{p}, \bar{q} \in X$  tali che  $d(c(a), \bar{p}) < \epsilon$  e  $d(c(b), \bar{q}) < \epsilon$ , esiste una geodetica locale  $\bar{c} : [a, b] \rightarrow X$  tale che  $\bar{c}(a) = \bar{p}$  e  $\bar{c}(b) = \bar{q}$  e  $d(c(t), \bar{c}(t)) < \epsilon$  per ogni  $t \in [a, b]$ .

Se mostriamo P(A) vale per  $A \geq 1$ , abbiamo la tesi. Osserviamo che, essendo  $X$  localmente convesso, P(A) è vera per  $A < \epsilon/\ell(c)$ , infatti  $d(c(a), c(b)) = \ell(c|_{[a,b]}) \leq \epsilon$ . Per cui se proviamo che se vale P(A) allora vale P(3A/2) abbiamo finito.

Quindi supponiamo che P(A) sia vera, e siano  $a, b \in [0, 1]$  tali che  $0 < b - a < 3A/2$ . Dividiamo  $[a, b]$  in tre parti uguali con estremi  $a < a_1 < b_1 < b$ . Siano  $\bar{p}, \bar{q}$  tali che  $d(c(a), \bar{p}) < \epsilon$  e  $d(c(b), \bar{q}) < \epsilon$ .

Procedendo ricorsivamente costruiremo due successioni  $(p_n)$  e  $(q_n)$  nell'intorno di raggio  $\epsilon$  di  $c(a_1)$  e  $c(b_1)$  rispettivamente. Successivamente costruiremo una geodetica locale da  $a$  a  $b$  come in P(3A/2), prendendo l'unione della geodetica da  $\bar{p}$  al limite di  $(q_n)$  e la geodetica da  $\bar{q}$  al limite di  $(p_n)$  (vedi Fig.3.1).

Definiamo quindi  $p_0 := c(a_1), q_0 := c(b_1)$ . Assumendo che  $p_{n-1}, q_{n-1}$  siano definite, usiamo P(A) per costruire le geodetiche locali

- $c_n : [a, b_1] \rightarrow X$  tra  $\bar{p}$  e  $q_{n-1}$
- $c'_n : [a_1, b] \rightarrow X$  tra  $p_{n-1}$  e  $\bar{q}$

tali che  $d(c(t), c_n(t)) < \epsilon$  per  $t \in [a, b_1]$  e  $d(c(t), c'_n(t)) < \epsilon$  per  $t \in [a_1, b]$ . Siano quindi  $p_n := c_n(a_1)$  e  $q_n := c'_n(b_1)$ .

Dato che la metrica di  $B(c(t), \epsilon)$  è convessa, allora la funzione  $t \mapsto d(c_n(t), c_{n+1}(t))$  è localmente convessa, e quindi convessa. Inoltre  $d(p_0, p_1) < \epsilon/2$

e  $d(q_0, q_1) < \epsilon/2$ , infatti

$$\begin{aligned} d(p_0, p_1) &= d(c(a_1), c_1(a_1)) \\ &\leq \frac{1}{2}d(c(a), c_1(a)) + \frac{1}{2}d(c(b_1), c_1(b_1)) \\ &< \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

dato che  $c(a) = \bar{p} = c_n(a)$  per ogni  $n$ . Analogamente si ha  $d(q_0, q_1) < \epsilon/2$ . Inoltre

$$\begin{aligned} d(p_n, p_{n+1}) &= d(c_n(a_1), c_{n+1}(a_1)) \\ &\leq \frac{1}{2}d(c_n(a), c_{n+1}(a)) + \frac{1}{2}d(c_n(b_1), c_{n+1}(b_1)) \\ &= \frac{1}{2}d(q_{n-1}, q_n) \end{aligned}$$

e analogamente  $d(q_n, q_{n+1}) \leq \frac{1}{2}d(p_{n-1}, p_n)$ . Quindi si ottiene che

$$\begin{aligned} d(p_n, p_{n+1}) &< \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \\ d(q_n, q_{n+1}) &< \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , e quindi  $(p_n)_n$  e  $(q_n)_n$  sono di Cauchy in  $\bar{B}(p_0, \epsilon)$  e  $\bar{B}(q_0, \epsilon)$  rispettivamente, quindi convergono ai punti  $p_\infty, q_\infty$  rispettivamente.

Ora la funzione  $t \mapsto d(c_n(t), c_{n+1}(t))$  è convessa e limitata da  $d(q_{n+1}, q_n) < \epsilon/2^n$ ; quindi anche  $(c_n(t))_n$  è di Cauchy nella palla completa  $\bar{B}(c(t), \epsilon)$  per ogni  $t \in [a, b_1]$ . Analogamente  $(c'_n(t))_n$  è di Cauchy in  $\bar{B}(c'(t), \epsilon)$  per ogni  $t' \in [a_1, b]$ .

Quindi le geodetiche locali  $c_n, c'_n$  convergono uniformemente a delle geodetiche locali  $c_\infty : [a, b_1] \rightarrow X, c'_\infty : [a_1, b] \rightarrow X$ .

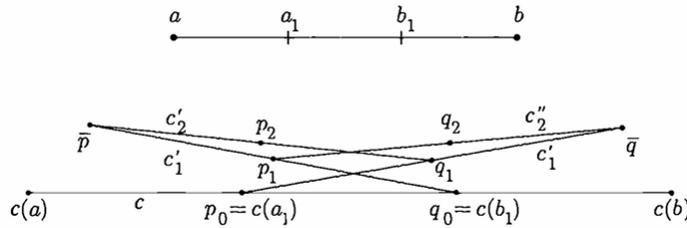
Queste, ristrette all'intervallo  $[a_1, b_1]$ , sono due geodetiche locali da  $p_\infty$  a  $q_\infty$ ; ma  $b_1 - a_1 = A/3 < A$ , per cui  $c_\infty = c'_\infty$  su  $[a_1, b_1]$  per l'unicità mostrata all'inizio.

Infine la geodetica locale

$$\bar{c}(t) = \begin{cases} c_\infty(t), & \text{se } t \in [a, b_1] \\ c'_\infty(t), & \text{se } t \in [a_1, b] \end{cases}$$

da  $\bar{p}$  a  $\bar{q}$  è quella che cercavamo.

□

Figura 3.1: Costruzione di  $\bar{c}$ .

## 3.2 Costruzione del rivestimento universale

Costruiamo a mano ciò che sarà il rivestimento universale del nostro spazio.

**Definizione 3.4.** Sia  $X$  spazio metrico e sia  $x_0 \in X$ . Definiamo  $\tilde{X}_{x_0}$  come lo spazio delle geodetiche locali  $c : [0, 1] \rightarrow X$  con punto iniziale  $x_0$ , insieme alla mappa  $\tilde{x}_0$  costante in  $x_0$ . Diamo a  $\tilde{X}_{x_0}$  la metrica

$$\tilde{d}(c, c') := \sup\{d(c(t), c'(t)) \mid t \in [0, 1]\}$$

e definiamo  $\exp : \tilde{X}_{x_0} \rightarrow X$  come la mappa  $c \mapsto c(1)$ .

**Assunzione.** Da adesso fino alla fine del capitolo assumiamo che  $X$  sia lo spazio delle ipotesi del Teorema di Cartan-Hadamard, cioè uno spazio metrico connesso, completo e a curvatura non positiva.

Ora l'obiettivo è dimostrare che  $\exp : \tilde{X}_{x_0} \rightarrow X$  è il rivestimento universale (Teorema 3.8).

**Proposizione 3.5.**  $\tilde{X}_{x_0}$  è contraibile, in particolare è semplicemente connesso.

*Dimostrazione.* Si ha la retrazione per deformazione  $r : \tilde{X}_{x_0} \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}_{x_0}$  data da  $(c, s) \mapsto r_s(c)$ , dove

$$\begin{aligned} r_s(c) &: [0, 1] \rightarrow X \\ t &\mapsto c(st). \end{aligned}$$

Questa è continua perché le geodetiche in  $X$  variano in modo continuo con gli estremi, essendo  $X$  localmente  $CAT(0)$ .  $\square$

**Proposizione 3.6.**  $\exp : \tilde{X}_{x_0} \rightarrow X$  è un'isometria locale.

*Dimostrazione.* Sia  $c \in \tilde{X}_{x_0}$  e  $c(1) \in X$  la sua immagine tramite  $\exp$ . Sia  $\epsilon > 0$  come nel Lemma 3.2, e sia  $w \in X$  tale che  $d(c(1), w) < \epsilon$ .

Allora, per il Lemma 3.2, esiste un'unica  $\bar{c} \in \tilde{X}_{x_0}$  geodetica locale da  $c(0)$  a  $w$  tale che

$$d(c(t), \bar{c}(t)) \leq (1-t)d(c(1), w) < (1-t)\epsilon < \epsilon,$$

quindi passando al sup vale  $\tilde{d}(c, \bar{c}) < \epsilon$ . Questo ci dice che c'è una biezione tra  $B(c, \epsilon) \subseteq \tilde{X}_{x_0}$  e  $B(c(1), \epsilon) \subseteq X$ .

Ragionando come sopra, se  $d(c(1), w) = \epsilon_1 < \epsilon$ , allora  $d(c(t), \bar{c}(t)) \leq \epsilon_1$  per ogni  $t \in [0, 1]$ ; inoltre  $d(c(1), \bar{c}(1)) = \epsilon_1$ , da cui per definizione di sup si ha

$$\tilde{d}(c, \bar{c}) = \epsilon_1,$$

che dimostra la tesi. □

**Proposizione 3.7.**  $\tilde{X}_{x_0}$  è completo.

*Dimostrazione.* Sia  $(c_n)_n$  di Cauchy in  $\tilde{X}_{x_0}$ , quindi, dalla definizione di  $\tilde{d}$  (Def.3.4), si ottiene che per ogni  $t \in [0, 1]$  la successione  $(c_n(t))_n$  è di Cauchy in  $X$ , e quindi convergente in  $X$  per completezza. Dunque vale

$$d(c_n(t), c(t)) < \epsilon$$

per ogni  $t \in [0, 1]$ , per una certa funzione  $t \mapsto c(t)$ , e allora vale passando al  $\sup_{t \in [0, 1]}$ . Se mostriamo che  $t \mapsto c(t)$  è una geodetica locale, allora abbiamo che  $\tilde{d}(c_n, c) < \epsilon$ , e quindi si ha convergenza in  $\tilde{X}_{x_0}$ .

Intanto  $t \mapsto c(t)$  è continua, dato che le  $c_n$  sono continue e convergono uniformemente a  $c$ .

Mostriamo che è una geodetica locale. Per ogni  $t$ , prendiamo  $\epsilon > 0$  tale che  $B(c(t), \epsilon)$  ha metrica indotta convessa (questo  $\epsilon$  esiste per la Prop.3.6), e siano  $\delta > 0$  tale che  $c([t - \delta, t + \delta]) \subseteq B(c(t), \epsilon)$  (esiste per continuità), e  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $c_n([t - \delta, t + \delta]) \subseteq B(c(t), \epsilon)$  per ogni  $n \geq N$  (esiste per convergenza puntuale). A meno di diminuire  $\delta$ , supponiamo che  $c_n|_{[t - \delta, t + \delta]}$  sia una geodetica. Sia ora  $\gamma$  l'unica geodetica in  $B(c(t), \epsilon)$  tra  $c(t - \delta)$  e  $c(t + \delta)$ . Per la disuguaglianza triangolare

$$d(c(v), \gamma(v)) \leq d(c(v), c_n(v)) + d(c_n(v), \gamma(v))$$

con  $c_n$  e  $\gamma$  geodetiche locali. Per convessità

$$d(c_n(v), \gamma(v)) \leq v d(c_n(t - \delta), \gamma(t - \delta)) + (1 - v) d(c_n(t + \delta), \gamma(t + \delta)) \rightarrow 0$$

perciò si ha  $d(c(v), \gamma(v)) = 0$ , cioè  $c = \gamma$  per  $v \in [t - \delta, t + \delta]$ . Questo per ogni  $t$ , quindi  $c$  è una geodetica locale. □

Ora le due proposizioni precedenti ci dicono che le condizioni (2),(4) della Prop.1.14 sono vere, mentre la (3) è implicata dal fatto che  $X$  è localmente  $CAT(0)$

utilizzando la Prop.2.4(1). La (1) vale per l'assunzione iniziale. Quindi, utilizzando anche la Prop.3.5, vale il seguente teorema:

**Teorema 3.8.**  *$exp : \tilde{X}_{x_0} \rightarrow X$  è il rivestimento universale di  $X$ .*

Ora una proprietà importante del rivestimento universale appena costruito. In questa dimostrazione quando parliamo di classe di omotopia di cammini ci riferiamo a classi di omotopia con estremi fissati.

**Proposizione 3.9.**  *$\tilde{X}_{x_0}$  è unicamente local-geodetico e le geodetiche locali variano in modo continuo con i suoi estremi.*

*Dimostrazione.* Se mostriamo che è unicamente local-geodetico, il fatto che le geodetiche locali variano in modo continuo con gli estremi segue dal Corollario 3.3.

Dividiamo la dimostrazione in 2 punti:

- (1) C'è un'unica geodetica locale tra  $\tilde{x}_0$  e ogni altro punto di  $\tilde{X}_{x_0}$ .
- (2) C'è un'unica geodetica locale tra ogni coppia di punti in  $\tilde{X}_{x_0}$ .

Mostriamo (1). Osserviamo che  $\tilde{c}$  è una geodetica locale in  $\tilde{X}_{x_0}$  se e solo se  $exp \circ \tilde{c}$  è una geodetica locale in  $X$ . Questo perché  $exp$  è un'isometria locale, quindi  $d(exp(\tilde{c}(t)), exp(\tilde{c}(t'))) = d(\tilde{c}(t), \tilde{c}(t')) = |t - t'|$  a meno di prendere  $t, t'$  tali che  $\tilde{c}(t)$  e  $\tilde{c}(t')$  sono nello stesso intorno per cui  $exp$  è un'isometria. Per le proprietà di rivestimento sui sollevamenti, si ha in particolare che esiste una biezione

$$\begin{aligned} \{\text{geodetiche locali in } X \text{ da } x_0\} &\longleftrightarrow \{\text{geodetiche locali in } \tilde{X}_{x_0} \text{ da } \tilde{x}_0\} \\ c &\longmapsto (s \mapsto r(c, s)) \end{aligned}$$

con  $r$  come nella Prop.3.5, che ha come punto finale proprio  $c$ . Quindi per ogni  $c \in \tilde{X}_{x_0}$ ,  $s \mapsto r(c, s)$  è l'unica geodetica locale da  $\tilde{x}_0$  in  $c$ .

Mostriamo (2). Dati  $p, q \in \tilde{X}_{x_0}$ , siccome  $\tilde{X}_{x_0}$  è semplicemente connesso, c'è un'unica classe di omotopia di cammini tra  $p$  e  $q$ , e  $exp$  induce una biezione tra questa ed una classe di cammini in  $X$ , per le proprietà dei rivestimenti (sollevamento dell'omotopia e unicità del sollevamento dei cammini).

Se mostriamo che ogni classe di cammini in  $X$  contiene un'unica geodetica locale, abbiamo finito, essendo  $exp$  un'isometria locale. Per ogni  $x_0 \in X$ , abbiamo  $\tilde{X}_{x_0}$  rivestimento universale. Ora ogni classe di cammini da  $x_0$  a  $x_1$  è in biezione con una classe di cammini da  $\tilde{x}_0$  a  $\tilde{x}_1$ , che contiene un'unica geodetica locale per il punto (1), e quindi anche la classe in  $X$  ne contiene solo una. Al variare di  $x_0$  in  $X$  si ha il punto (2).  $\square$

Ora dobbiamo fare attenzione con le seguenti metriche.

- $\tilde{d}$  è la metrica che abbiamo considerato finora su  $\tilde{X}_{x_0}$ , definita come

$$\tilde{d}(c, c') := \sup \{ d(c(t), c'(t)) \mid t \in [0, 1] \};$$

- Indichiamo con  $d_p$  la metrica  $d_{exp}$  indotta dal rivestimento  $exp : \tilde{X}_{x_0} \rightarrow X$  (vedi Def.1.12);
- $\bar{d}$  è la metrica di lunghezza associata a  $\tilde{d}$  (vedi Def.1.8).

Ora l'obiettivo è dimostrare che  $\tilde{X}_{x_0}$  con la metrica  $d_p$  indotta dal rivestimento è unicamente geodetico (Prop.3.10). A tal fine, ci servirà prima sapere che  $(\tilde{X}_{x_0}, d_p)$  è uno spazio unicamente local-geodetico, cosa che al momento sappiamo solo per  $(\tilde{X}_{x_0}, \tilde{d})$ . Questa proprietà si "trasferisce" a  $(\tilde{X}_{x_0}, d_p)$  grazie ai due fatti seguenti.

**Fatto 1.** Vale  $d_p = \bar{d}$ .

*Dimostrazione.* Proviamo che le mappe

$$exp : (\tilde{X}_{x_0}, d_p) \longrightarrow (X, d), \tag{3.1}$$

$$exp : (\tilde{X}_{x_0}, \bar{d}) \longrightarrow (X, d) \tag{3.2}$$

sono isometrie locali. Essendo entrambe le metriche su  $\tilde{X}_{x_0}$  di lunghezza, la tesi seguirà dunque dalla Prop.1.13(3).

La (3.1) è un'isometria locale per l'Oss.1.4.2. Infatti  $exp : (\tilde{X}_{x_0}, \bar{d}) \longrightarrow (X, d)$  è già un rivestimento e le palle sufficientemente piccole di  $(X, d)$  sono convesse, per cui anche di lunghezza.

Dato che  $(X, d)$  è localmente  $CAT(0)$  e  $exp : (\tilde{X}_{x_0}, \bar{d}) \longrightarrow (X, d)$  è un'isometria locale, le palle di raggio sufficientemente piccolo in  $(\tilde{X}_{x_0}, \bar{d})$  sono convesse (Prop.2.4(3)). In particolare le palle sufficientemente piccole in  $(\tilde{X}_{x_0}, \bar{d})$  sono di lunghezza, cioè  $\bar{d} = \tilde{d}$  localmente.

Prendendo come intorni l'intersezione delle palle per cui  $(\tilde{X}_{x_0}, \bar{d})$  è di lunghezza e delle palle per cui  $exp : (\tilde{X}_{x_0}, \bar{d}) \longrightarrow (X, d)$  è un'isometria locale, si ha che la (3.2) è un'isometria locale.

□

**Fatto 2.** Per ogni curva  $c : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}_{x_0}$  vale

$$c \text{ geodetica locale rettificabile con } d_p \iff c \text{ geodetica locale rettificabile con } \bar{d}.$$

*Dimostrazione.* Per il Fatto 1 vale che  $d_p = \tilde{d}$ . Per la Prop.1.9 si ha che  $c$  è una curva rettificabile con  $\tilde{d}$  se e solo se lo è con  $\tilde{d}$ , e che ha la stessa lunghezza nelle due metriche.

Infine il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{X}_{x_0}, \tilde{d}) & \xrightarrow{id} & (\tilde{X}_{x_0}, d_p) \\ & \searrow exp & \downarrow exp \\ & & (X, d) \end{array}$$

ci dice che, essendo le due  $exp$  delle isometrie locali, la proprietà di essere geodetica locale rimane invariata scambiando le due metriche.  $\square$

Quindi per i due fatti precedenti e per l'Osservazione 1.4.3, abbiamo che:

- (1)  $exp : (\tilde{X}_{x_0}, d_p) \rightarrow (X, d)$  è un rivestimento;
- (2)  $(\tilde{X}_{x_0}, d_p)$  è unicamente local-geodetico, localmente CAT(0) e localmente completo.

D'ora in poi utilizzeremo  $\tilde{X}$  per indicare lo spazio di lunghezza  $(\tilde{X}_{x_0}, d_p)$ .

**Proposizione 3.10.**  $\tilde{X}$  è unicamente geodetico.

*Dimostrazione.* Per ogni  $p, q \in \tilde{X}$ , sia  $c_{p,q} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  l'unica geodetica locale tra  $p$  e  $q$ . Se mostriamo che per ogni  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  rettificabile e per ogni  $t \in [0, 1]$  vale

$$\ell(c_{\gamma(0), \gamma(t)}) \leq \ell(\gamma|_{[0,t]}),$$

si ha  $\ell(c_{p,q}) = d(p, q)$  per ogni  $p$  e  $q$ , essendo  $\tilde{X}$  uno spazio di lunghezza. Ma essendo queste geodetiche locali uniche, e dato che la restrizione di una geodetica locale ad un intervallo rimane una geodetica locale, abbiamo che

$$\ell(c_{p,q}|_{[t,t']}) = d(c_{p,q}(t), c_{p,q}(t')) \quad \forall t, t',$$

da cui

$$\begin{aligned} d(c_{p,q}(t), c_{p,q}(t')) &= \ell(c_{p,q}|_{[t,t']}) = \sup_{t < t_0 < \dots < t_n < t'} \sum_{i=0}^n d(c_{p,q}(t_i), c_{p,q}(t_{i+1})) \geq \\ &\geq \sum_{i=0}^n |t_{i+1} - t_i| = |t - t'| \end{aligned}$$

essendo  $c_{p,q}$  una geodetica locale. Mentre per la disuguaglianza triangolare abbiamo

$$d(c_{p,q}(t), c_{p,q}(t')) \leq \sum_{i=0}^n |t_{i+1} - t_i| = |t - t'|,$$

da cui  $d(c_{p,q}(t), c_{p,q}(t')) = |t - t'|$ , cioè  $c_{p,q}$  geodetica.

Mostriamo la condizione enunciata sopra. Sia

$$S = \{t \in [0, 1] \mid \ell(c_{\gamma(0), \gamma(t)}) \leq \ell(\gamma|_{[0,t]}) \ \forall \gamma \text{ rettificabile}\} \subseteq [0, 1].$$

Allora

- $S$  è non vuoto, dato che per  $t$  piccolo  $c_{\gamma(0), \gamma(t)}$  è una geodetica per la Prop.2.4(2), essendo  $\tilde{X}$  localmente  $CAT(0)$ .
- $S$  è chiuso. La funzione  $f_\gamma(t) = \ell(c_{\gamma(0), \gamma(t)}) - \ell(\gamma|_{[0,t]})$  è continua per il Lemma 1.7(5), quindi  $f_\gamma^{-1}(0)$  è chiuso, e

$$S = \bigcap_{\gamma} f_\gamma^{-1}(0).$$

- $S$  aperto. Sia  $t_0 \in S$ , per cui  $\ell(c_{\gamma(0), \gamma(t)}) \leq \ell(\gamma|_{[0,t]})$  per ogni  $t \leq t_0$ . Se prendiamo  $\epsilon > 0$  sufficientemente piccolo, per il Lemma 3.2(2) abbiamo che

$$\begin{aligned} \ell(c_{\gamma(0), \gamma(t_0+\epsilon)}) &\leq \ell(c_{\gamma(0), \gamma(t_0)}) + d(\gamma(0), \gamma(0)) + d(\gamma(t_0), \gamma(t_0 + \epsilon)) \leq \\ &\leq \ell(\gamma|_{[0,t_0]}) + \ell(\gamma|_{[t_0, t_0+\epsilon]}) = \ell(\gamma|_{[0, t_0+\epsilon]}) \end{aligned}$$

per cui ogni  $t \leq t_0 + \epsilon$  sta in  $S$ .

□

*Osservazione 3.2.1.*  $\tilde{X}$  è localmente completo e localmente convesso, essendo  $exp : \tilde{X} \rightarrow X$  un'isometria locale, per cui per Corollario 3.3 si ha che le geodetiche in  $\tilde{X}$  variano in modo continuo con gli estremi.

### 3.3 Dimostrazione Cartan-Hadamard

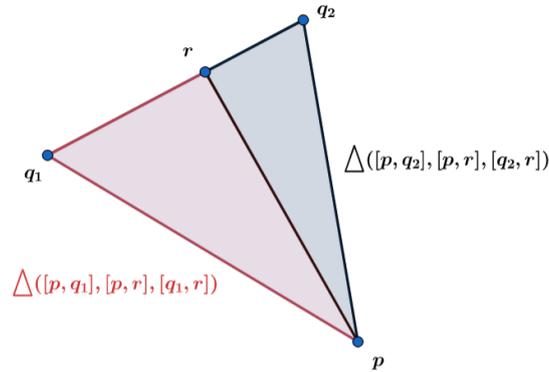
In questa parte ci servirà la definizione di  $CAT(0)$  mediante gli angoli di Alexandrov come esposta nella Proposizione 2.5(4).

**Lemma di incollamento 3.11.** *Sia  $X$  geodetico. Sia  $\Delta = \Delta([p, q_1], [p, q_2], [q_1, q_2])$  triangolo geodetico e sia  $r \in [q_1, q_2]$ . Siano ora*

$$\Delta_1 = \Delta([p, q_1], [p, r], [q_1, r]) \quad e$$

$$\Delta_2 = \Delta([p, q_2], [p, r], [q_2, r])$$

*triangoli geodetici.. Se  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  soddisfano la condizione  $CAT(0)$ , allora anche  $\Delta$  la soddisfa.*



*Dimostrazione.* Se  $r = q_1$  oppure  $r = q_2$ , l'enunciato è banale. Supponiamo  $r \neq q_1, q_2$ . Siano  $\bar{\Delta}_1 = \Delta(\bar{p}, \bar{r}, \bar{q}_1)$  e  $\bar{\Delta}_2 = \Delta(\bar{p}, \bar{r}, \bar{q}_2)$  triangoli di comparazione per  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$ , posizionati sul piano in modo che il lato  $[\bar{p}, \bar{r}]$  sia in comune e che  $\bar{q}_1$  e  $\bar{q}_2$  siano dalla parte opposta rispetto a  $[\bar{p}, \bar{r}]$ .

Per l'Oss.1.1.3 e la Prop.1.4,  $\angle_r(p, q_1) + \angle_r(p, q_2) \geq \angle_r(q_1, q_2) = \pi$ , da cui  $\bar{Z}_r(p, q_1) + \bar{Z}_r(p, q_2) \geq \pi$  per la condizione  $CAT(0)$ .

Ora per il Lemma di Alexandrov 1.5 e per la condizione  $CAT(0)$  si ha

$$\bar{Z}_{q_1}(p, q_2) \geq \bar{Z}_{q_1}(p, r) \geq \angle_{q_1}(p, r) = \angle_{q_1}(p, q_2)$$

e analogamente  $\bar{Z}_{q_2}(p, q_1) \geq \angle_{q_2}(p, q_1)$ .

Sia ora  $\tilde{\Delta} = \Delta(\tilde{p}, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$  triangolo di comparazione per  $\Delta$ . Allora:

$$\begin{aligned} d(\bar{q}_1, \bar{q}_2) &\leq d(\bar{q}_1, \bar{r}) + d(\bar{r}, \bar{q}_2) \\ &= d(q_1, r) + d(q_2, r) && \text{essendo } r, q_i \text{ vertici di } \bar{\Delta}_i \\ &= d(q_1, q_2) && \text{dato che } r \in [q_1, q_2] \\ &= d(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) && \text{essendo } \tilde{q}_1, \tilde{q}_2 \text{ vertici di } \tilde{\Delta}. \end{aligned}$$

Allora vale

$$\begin{aligned}
 \bar{\angle}_p(q_1, q_2) &\geq \bar{\angle}_p(q_1, r) + \bar{\angle}_p(r, q_2) && \text{per la disuguaglianza sopra} \\
 &\geq \angle_p(q_1, r) + \angle_p(r, q_2) && \text{per la condizione CAT}(0) \\
 &\geq \angle_p(q_1, q_2) && \text{essendo } \angle \text{ pseudometrica per la Prop.1.4}
 \end{aligned}$$

□

Ora siamo pronti a dimostrare il teorema di Cartan-Hadamard. L'idea è quella di, dato un triangolo geodetico, dividerlo in tanti piccoli triangoli geodetici ognuno contenuto in un intorno in cui  $\tilde{X}$  è CAT(0), per poi usare ripetutamente il Lemma di incollamento 3.11.

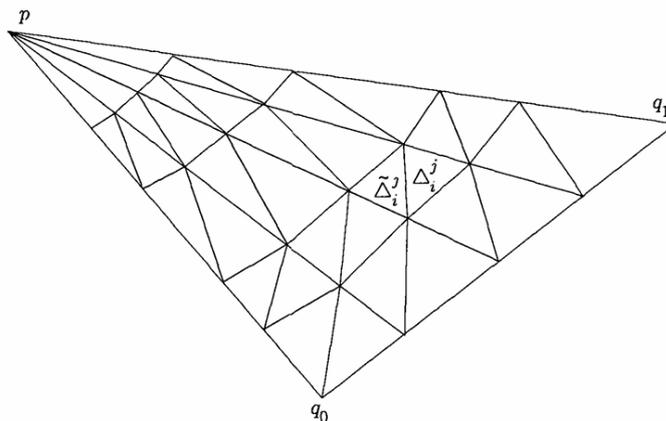


Figura 3.2: Partizione in triangoli che soddisfano CAT(0).

*Dimostrazione di Cartan-Hadamard.* Sia  $\Delta = \Delta(q_0, q_1, p)$  un triangolo geodetico in  $\tilde{X}$ . Sia  $q : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  la geodetica (unica per Prop.3.10) tra  $q_1$  e  $q_0$ , e per ogni  $s \in [0, 1]$ , sia  $c_s : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  la geodetica tra  $p$  e  $q(s)$ . Quindi i lati di  $\Delta$  sono  $q([0, 1])$ ,  $c_0([0, 1])$  e  $c_1([0, 1])$ .

Siccome le geodetiche in  $\tilde{X}$  variano in modo continuo con gli estremi, allora la funzione

$$\begin{aligned}
 c : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \tilde{X} \\
 (s, t) &\mapsto c_s(t)
 \end{aligned}$$

è continua. Per cui possiamo prendere due partizioni di  $[0, 1]$

$$\begin{aligned} 0 &= s_0 < s_1 < \cdots < s_k = 1 \\ 0 &= t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1 \end{aligned}$$

tali che  $c([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_{ij} \subseteq \tilde{X}$ , con  $U_{ij}$  CAT(0) con la metrica indotta da  $\tilde{X}$ .

Consideriamo per ogni  $i \leq k$  i triangoli geodetici  $\Delta_i$  con lati  $c_{s_{i-1}}([0, 1])$ ,  $c_{s_i}([0, 1])$  e  $q([s_{i-1}, s_i])$ . Usi ripetuti del Lemma di incollamento 3.11 ci permetteranno di verificare la condizione CAT(0) su ogni  $\Delta_i$  per ottenerla su  $\Delta$ .

Ora dividiamo ogni  $\Delta_i$  in  $2k - 1$  triangoli geodetici  $\Delta_i^1, \Delta_i^2, \tilde{\Delta}_i^2, \dots, \Delta_i^k, \tilde{\Delta}_i^k$  tali che:

- $\Delta_i^1$  contenuto in  $U_{1,1}$  con vertici  $p$ ,  $c_{s_{i-1}}(t_1)$  e  $c_{s_i}(t_1)$ .
- $\Delta_i^j$  contenuto in  $U_{ij}$  con vertici  $c_{s_{i-1}}(t_{j-1})$ ,  $c_{s_i}(t_{j-1})$  e  $c_{s_{i-1}}(t_j)$ .
- $\tilde{\Delta}_i^j$  contenuto in  $U_{ij}$  con vertici  $c_{s_{i-1}}(t_j)$ ,  $c_{s_i}(t_{j-1})$  e  $c_{s_i}(t_j)$ .

Usando ripetutamente il Lemma di incollamento, dato che ogni triangolo geodetico sopra considerato è in un intorno CAT(0), si ha che  $\Delta_i$  soddisfa CAT(0), per cui anche  $\Delta$ , da cui la tesi (vedi Fig.3.2).  $\square$

*Esempio 3.3.1.* Gli spazi  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  non ammettono una metrica completa e non-positivamente curva, dato che hanno come rivestimento universale  $\mathbb{S}^2$  che non è contraibile.



# Capitolo 4

## Criterio di Gromov

Vogliamo avere un criterio per costruire spazi a curvatura non positiva o per determinare se uno spazio topologico ammette una metrica non positivamente curva. Questo ci darà anche una base di esempi di spazi a cui applicare il Teorema di Cartan-Hadamard. Ci viene in aiuto il criterio di Gromov:

**Criterio di Gromov.** *Un complesso metrico euclideo è a curvatura non positiva se e solo se il link di ogni suo vertice è  $CAT(1)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $v$  un vertice di  $K$  complesso metrico. Per il Teorema 1.26 esiste  $\epsilon > 0$  per cui  $B(v, \epsilon)$  è isometrico ad una palla centrata nel vertice di  $C(\text{Lk}(v, K))$ , che per il Teor.2.7 e il Cor.2.8 è  $CAT(0)$  se e solo se  $\text{Lk}(v, K)$  è  $CAT(1)$ . Per l'Oss.1.5.4 abbiamo che, in tal caso, ogni punto ha un intorno  $CAT(0)$ .  $\square$

In particolare, per avere un criterio visivamente più immediato, consideriamo i complessi metrici 2-dimensionali  $K$ , per cui  $\text{Lk}(x, K)$  è un grafo metrico la cui lunghezza dei lati è pari all'angolo in  $x$  dei semplici che contengono  $x$ . Abbiamo che la condizione di essere  $CAT(1)$  diventa una condizione che riguarda i loop (come definiti nell'Es.1.5.1) in  $\text{Lk}(x, K)$ , con  $x$  vertice. Vale il seguente teorema:

**Teorema 4.1.** *Un complesso metrico euclideo 2-dimensionale  $K$  ha curvatura non positiva se e solo se per ogni vertice  $v$ , ogni loop in  $\text{Lk}(v, K)$  ha lunghezza almeno  $2\pi$ .*

*Dimostrazione.* Per il Criterio di Gromov, basta mostrare che un grafo metrico non ha loop di lunghezza minore di  $2\pi$  se e solo se è  $CAT(1)$ .

Se il grafo metrico è  $CAT(1)$ , riscrivendo la dimostrazione della Prop.2.4(1) si ha che è unicamente  $\pi$ -geodetico. Se ci fosse un loop di lunghezza minore di  $2\pi$ , spezzandolo a metà otterremmo due curve diverse di lunghezza minore di  $\pi$ . Queste

curve sarebbero geodetiche perché sarebbero le uniche, e quindi le più corte, che collegano i due punti.

Viceversa se non esistono loop di lunghezza minore di  $2\pi$ , allora ogni triangolo geodetico di perimetro minore di  $2\pi$  è degenere, perché altrimenti sarebbe un loop.

□

*Esempio 4.0.1.* Diamo inizialmente due esempi semplici, ma che danno un'idea su come controllare la condizione sui link del Teorema 4.1.

- (1) Consideriamo il complesso metrico ottenuto attaccando sei triangoli come in Figura 4.1. Quattro di questi sono rettangoli, gli altri due no; li attacchiamo con isometrie in modo che l'angolo attorno ai vertici sia maggiore di  $2\pi$ . Infatti

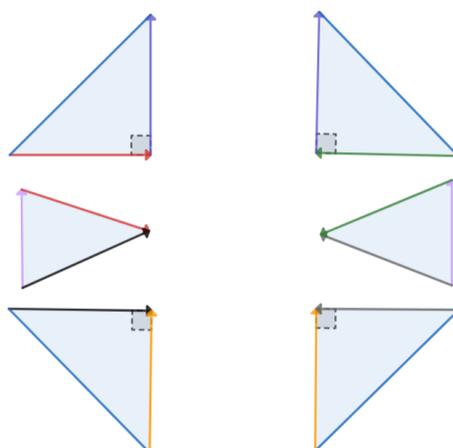


Figura 4.1: Complesso metrico omeomorfo al cilindro. Gli attaccamenti considerati sono contrassegnati da colori e frecce (i lati in azzurro sono gli unici non incollati).

il link del vertice al centro è il grafo a destra nella Figura 4.2, in cui la somma delle lunghezze dei vari lati è maggiore di  $2\pi$ , mentre il link degli altri vertici è come il grafo al centro o il grafo a sinistra nella Figura 4.2, quindi non contiene loop. Tutti i loop hanno perciò lunghezza maggiore di  $2\pi$ , per cui la condizione del Teorema 4.1 è soddisfatta.

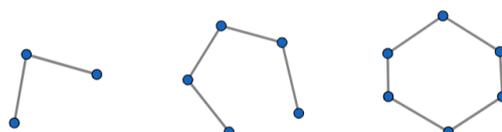


Figura 4.2: Link dei vertici del complesso in Figura 4.1.

Il complesso considerato è quindi a curvatura non positiva, quindi il suo rivestimento universale, che è  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ , ammette una metrica  $CAT(0)$  (ovviamente lo sapevamo: bastava prendere la metrica euclidea su  $\mathbb{R}^2$  e restringerla su  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ ).

- (2) Consideriamo il complesso metrico in Figura 4.3, attaccando dei triangoli come a formare una corona circolare. I triangoli rettangoli che attacchiamo sono isometrici a quelli dell'esempio (1).

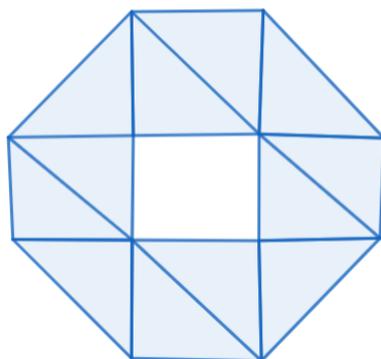


Figura 4.3: Complesso metrico omeomorfo a  $S^1 \times [0, 1]$ .

Su uno dei triangoli del complesso, ci costruiamo sopra uno spazio analogo all'esempio (1), come in Figura 4.4. Cioè consideriamo lo spazio dell'esempio (1), e attacchiamo il triangolo in basso a sinistra di Fig.4.1 al triangolo in basso a sinistra di Fig.4.3.

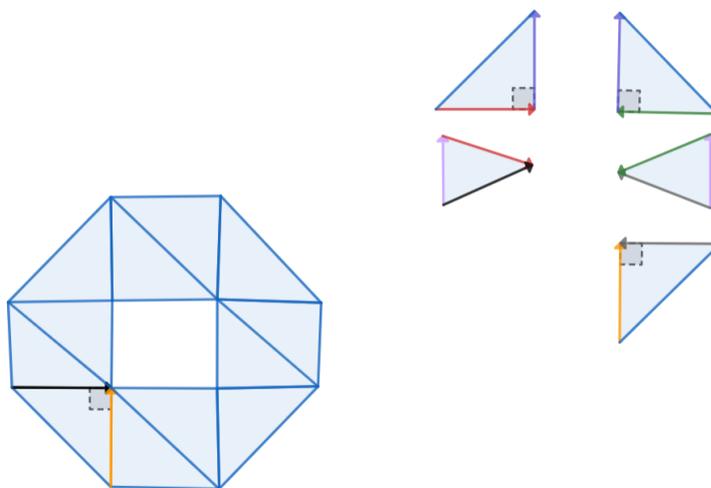


Figura 4.4: Incolliamo il complesso considerato con lo spazio dell'esempio (1).

Controlliamo ora i link dei vari vertici. Sul bordo interno della corona circolare, l'unico link con loop è quello in basso a sinistra, dove abbiamo attaccato gli altri triangoli. Su quest'ultimo, come nell'esempio (1), saranno presenti solo loop di lunghezza maggiore di  $2\pi$ . I link di tutti gli altri vertici non hanno loop. La condizione del Teor.4.1 è quindi soddisfatta.

Segue che il rivestimento universale ammette una metrica  $CAT(0)$ , e in particolare è contraibile, cioè il complesso metrico è asferico (anche in questo caso lo sapevamo già; il complesso metrico è infatti omotopo ad un bouquet di due circonferenze).

(3) Mostriamo che la superficie topologica chiusa e orientata ammette una metrica completa e nonpositivamente curva se e solo se ha genere positivo.

Infatti se  $g = 0$  abbiamo la sfera, che non è asferica, e quindi per il Cor.3.1 non ammette una tale metrica. Se invece  $g > 0$ , possiamo ottenere la superficie triangolando un  $4g$ -agono regolare, come in Figura 4.5.

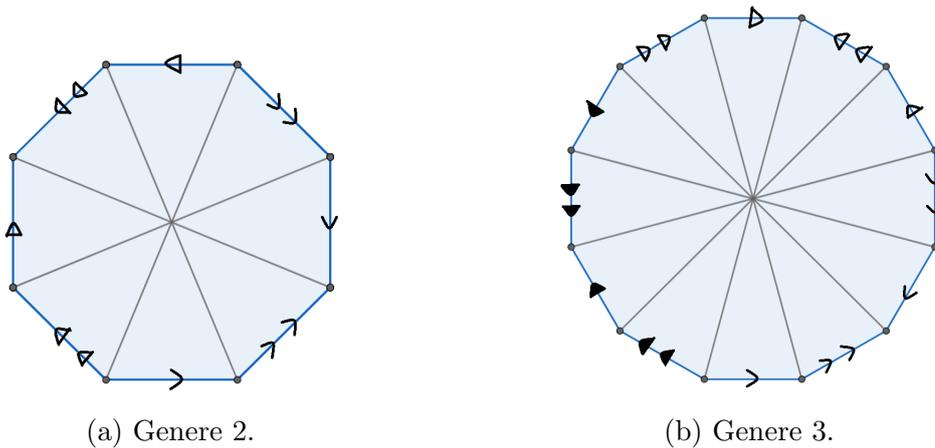


Figura 4.5: Triangolazione delle superfici chiuse e orientate di genere 2 e 3.

Con queste triangolazioni le superfici non sono complessi simpliciali, ma suddividendo baricentricamente ogni triangolo, come in Figura 4.6, lo diventano. Suddividendo in questo modo vengono aggiunti dei vertici, quindi dobbiamo controllare anche i loro link. Ma questi sono tutti loop di lunghezza  $2\pi$ , quindi non creano problemi per l'utilizzo del Criterio di Gromov.

Ci rimangono da controllare i vertici della prima suddivisione in Figura 4.5a. Quello al centro ha come link un loop di di lunghezza  $2\pi$ , quindi va bene. I rimanenti vertici sul bordo dell'esagono (in Figura 4.5a) sono tutti identificati tra loro dall'incollamento, quindi rimane un solo vertice da controllare.

Gli angoli interni di un  $n$ -poligono regolare hanno valore  $\pi(n - 2)/n$ , che è crescente per  $n \geq 2$  e vale  $2\pi$  per  $n = 4$ , quindi il link nel vertice sarà un grafo metrico

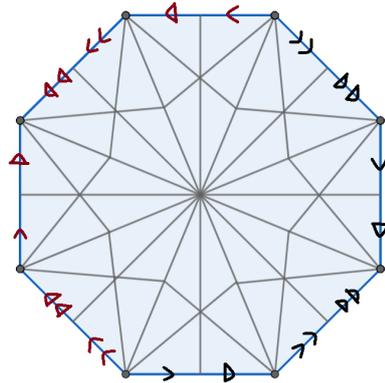


Figura 4.6: Suddivisione baricentrica del complesso in Figura 4.5a, in modo da farlo diventare un complesso simpliciale.

con un loop di lunghezza non minore di  $2\pi$ . La condizione del Teor.4.1 è dunque soddisfatta.

(Il Criterio di Gromov vale anche per complessi poliedrali localmente finiti, per cui anche la triangolazione in 4.5 andava bene.)

## 4.1 Un particolare tipo di esempi

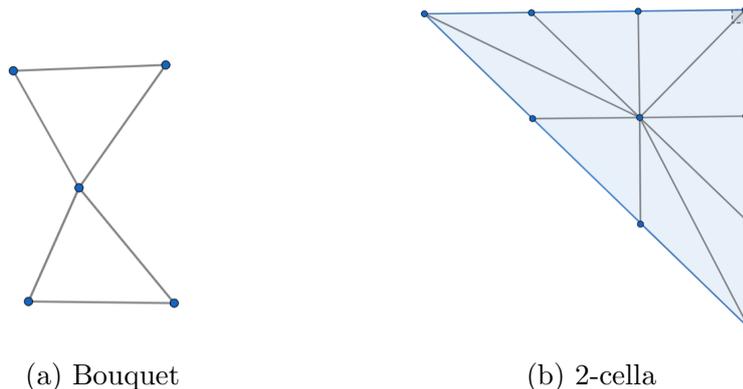
Ora un paio di esempi semplici per "giocare" un po' con i complessi metrici.

In [Hat02] pag.52 viene spiegato come, dato un gruppo  $G = \langle g_\alpha \mid r_\beta \rangle$ , costruire un CW-complesso con gruppo fondamentale  $G$ . L'idea è quella di prendere un bouquet di circonferenze, dove ogni circonferenza rappresenta un generatore  $g_\alpha$ , e attaccarci delle 2-celle nei loop dati dalle relazioni  $r_\beta$ .

Vogliamo utilizzare una costruzione analoga, con i complessi metrici al posto dei CW-complessi. Quindi dato un gruppo  $G = \langle g_\alpha \mid r_\beta \rangle$ , vogliamo se possibile ottenere uno complesso metrico a curvatura non positiva utilizzando il Criterio di Gromov, ottenendo quindi un  $K(G, 1)$ , cioè uno spazio topologico asferico con gruppo fondamentale  $G$  (lo spazio sarà asferico per il Corollario 3.1).

*Esempio 4.1.1.* (1) Sia  $G = \langle a, b \mid a^2b = 1 \rangle$ . Consideriamo il complesso metrico in Figura 4.7a; svolgerà il ruolo del bouquet di circonferenze spiegato sopra. Questo è formato da due triangoli al posto delle due circonferenze, dato che il triangolo è il complesso simpliciale più semplice per descrivere una circonferenza.

I tre lati del triangolo in alto li prendiamo di lunghezza  $1/3$ , mentre del triangolo in basso di lunghezza  $2/3$ . Il triangolo sopra rappresenta il generatore  $a$ , mentre quello sotto il generatore  $b$ .


 Figura 4.7: Complessi metrici per costruire il  $K(G, 1)$ .

Ora, se lavorassimo con i CW-complessi, dovremmo attaccare una 2-cella al cammino dato da  $a^2b$ .

Dato che lavoriamo con complessi metrici, prendiamo come 2-cella un triangolo  $T$ , con l'ipotenusa di lunghezza 2 e i cateti di lunghezza 1, e triangoliamolo come in Figura 4.7b. La triangolazione serve per attaccare il Bouquet e la 2-cella, in modo da ottenere un complesso metrico. Ogni lato del bordo di  $T$  deve quindi essere diviso in tre segmenti di lunghezza  $1/3$  per i cateti e  $2/3$  per l'ipotenusa, in modo da poterli incollare al Bouquet.

L'attaccamento della due celle sarà quindi quello in figura 4.8, cioè incollando il bordo al cammino  $a^2b$  del bouquet. Avremo quindi due lati del bordo incollati lungo il cammino  $a$  (il triangolo in alto del bouquet) e l'altro lato incollato lungo il cammino  $b$  (il triangolo in basso del bouquet).

Osserviamo che con questo incollamento non abbiamo più un complesso simpliciale, ma possiamo supporre che lo sia a meno di una suddivisione baricentricamente. Infatti i vertici aggiunti con la suddivisione baricentrica hanno tutti un loop di lunghezza  $2\pi$  come link (come nell'Esempio 4.0.1(3)), quindi non danno problemi per il Criterio di Gromov. Quindi considereremo solo i link nei vertici del complesso senza la suddivisione baricentrica (quello in Figura 4.8b).

Ora controlliamo i loop nei link dei vertici. Osserviamo che, per come abbiamo incollato, il complesso metrico ha 5 vertici  $A, B, C, B', C'$  (in figura quelli equivalenti sono indicati dalla stessa lettera).

I vertici  $C$  e  $B$  hanno come link una circonferenza di raggio  $2\pi$ . I link nei restanti vertici  $A, C', B'$  invece non hanno loop. La condizione del Teorema 4.1 è quindi soddisfatta. Abbiamo ottenuto un  $K(G, 1)$  per  $G = \langle a, b \mid a^2b = 1 \rangle$ .

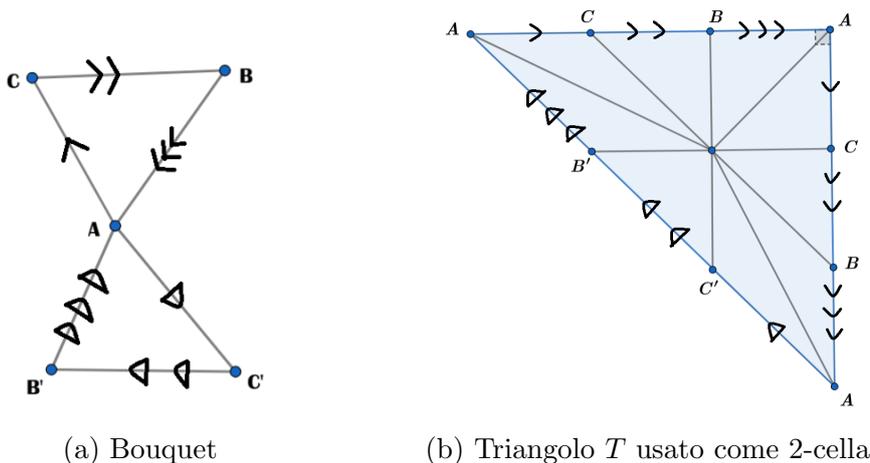


Figura 4.8

(Osserviamo come  $G$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , per cui come  $K(G, 1)$  bastava prendere  $\mathbb{S}^1$ , che è a curvatura non positiva).

- (2) Sia  $G = \langle a, b \mid a^2b^2 = 1 \rangle$ . Procediamo come nell'esercizio precedente, ma cambiando la 2-cella.

Prendiamo un quadrato, e lo triangoliamo come in Figura 4.9a. Consideriamo il bouquet di triangoli dell'esercizio precedente (4.8a), prendendo però tutti i lati della stessa lunghezza, e incolliamo il bordo del quadrato al bouquet come in figura 4.9b (l'incollamento sul bouquet è quello dell'esercizio precedente, in Figura 4.8a).

Anche in questo caso il complesso non è simpliciale, ma vale lo stesso discorso dell'esempio precedente, per cui possiamo considerare solamente i vertici di questo complesso, e non quelli aggiunti tramite la suddivisione baricentrica.

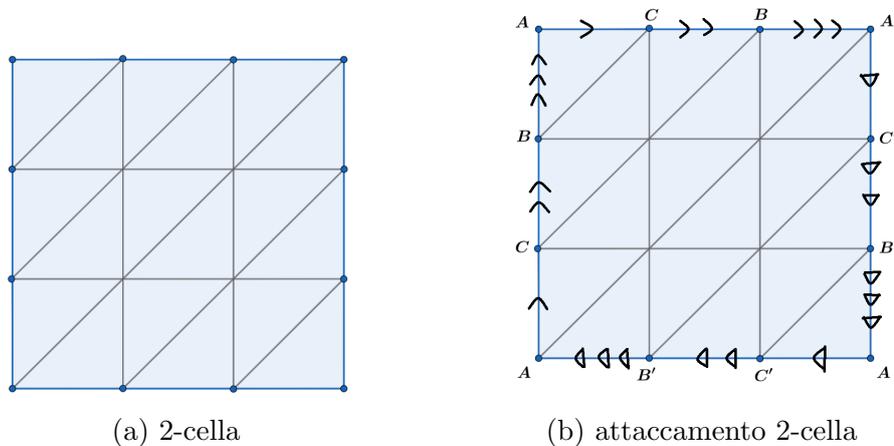
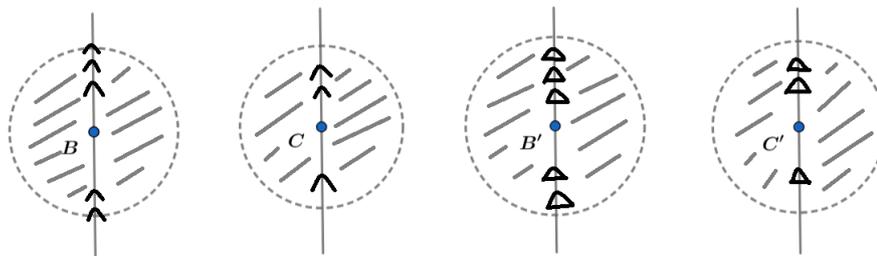


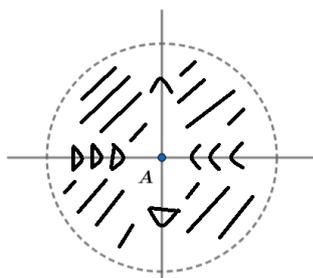
Figura 4.9: Attaccamento del bouquet con il bordo della 2-cella.

Controlliamo i link. I vertici  $C, B, C', B'$  hanno un intorno come quelli in figura 4.10a, quindi ogni loop nei link dei vertici ha lunghezza non minore di  $2\pi$ . Per il vertice  $A$  l'intorno è come quello in figura 4.10b, quindi anche qua il link del vertice non ha loop di lunghezza minore di  $2\pi$ .

La condizione del Teor.4.1 è soddisfatta, dunque il complesso costruito è un  $K(G, 1)$  per  $G = \langle a, b \mid a^2b^2 = 1 \rangle$ .



(a) Intorno dei vertici  $B, C, B', C'$  rispettivamente.



(b) Intorno del vertice  $A$ .

Figura 4.10: Intorno dei vertici del complesso.

# Bibliografia

- [BH99] Martin R. Bridson e Andre Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*. Springer-Verlag, 1999.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Wil11] Henry Wilton. *NON-POSITIVELY CURVED CUBE COMPLEXES*. <https://www.dpmms.cam.ac.uk/~hjr2/Notes/cubenotes.pdf>. 2011.
- [Pou24] Søren R. B. Poulsen. “A gentle introduction to CAT(0) spaces”. Tesi di laurea mag. Aarhus Universitet, 2024.