

Corso di laurea in Matematica

Fibrati vettoriali e teorema di Bott

Relatrice:

Prof.ssa Alessia Cattabriga

Laureando:

Studente Jacopo Cerro

Anno accademico 2024/2025

“Che cosa vedi, Geremia?”
“Vedo un ramo di mandorlo.”

A mia madre e a mio padre

Indice

1	Fibrati vettoriali	5
1.1	Definizioni iniziali	5
1.2	Classificazione dei fibrati vettoriali	9
1.3	Clutching functions o funzioni di incastro	16
1.3.1	Il line bundle canonico: H	17
2	La K-teoria	20
2.1	La struttura di anello su K e \tilde{K}	21
2.1.1	Il gruppo \tilde{K}	21
2.1.2	Il gruppo K	22
2.1.3	Gli anelli K e \tilde{K}	23
2.2	K e \tilde{K} come funtori	24
2.3	Sequenze di spezzamento	25
3	Il Teorema di Bott	28
3.1	Preliminari: incollamenti, prodotti e sospensioni	28
3.2	Il prodotto esterno	29
3.3	Il prodotto esterno ridotto	30
3.4	Il Teorema di Bott	31

Introduzione

I fibrati vettoriali sono oggetti geometrici tipicamente difficili da visualizzare; preso un primo spazio topologico, gliene porremo sopra un altro in maniera che ogni punto del primo abbia “sopra” uno spazio vettoriale. Questi sono il blocco fondamentale della K -teoria. La K -teoria è un ambito di studio della geometria che usa principalmente l'algebra per studiare i fibrati vettoriali; storicamente la K -teoria nasce dallo studio del teorema di Bott, in questa tesi invece faremo il percorso opposto, introdurremo i concetti di base della K -teoria e poi enunceremo il teorema di periodicità di Bott, un teorema che, a seconda delle sue varie letture, presenta diverse applicazioni, dal calcolo esplicito dei campi vettoriali allo studio dei gruppi di omotopia di uno spazio topologico. Il teorema di Bott permette anche di dimostrare che le uniche sfere con fibrato tangente banale sono S^0, S^1, S^3, S^7 , o, equivalentemente, permette di dimostrare che le uniche algebre di divisione su \mathbb{R} sono i reali, i complessi, i quaternioni e gli ottonioni. In ordine, studieremo nel primo capitolo i fibrati vettoriali e forniremo gli strumenti necessari a manipolarli; nel secondo capitolo daremo le definizioni principali della K -teoria complessa; nel terzo capitolo metteremo a frutto i nostri sforzi e esporremo il teorema di periodicità di Bott.

Capitolo 1

Fibrati vettoriali

In questo capitolo ci concentriamo sulla definizione e lo studio delle proprietà basilari dei fibrati vettoriali, seguendo [Gil; Hat03; Hus66].

1.1 Definizioni iniziali

Iniziamo dando la definizione di fibrato vettoriale.

Definizione 1. *Sia \mathbb{K} un campo. Chiameremo fibrato vettoriale su \mathbb{K} di dimensione n su uno spazio topologico X (abbrevieremo con la sigla VB) il dato di uno spazio topologico E (detto spazio totale) e una mappa $p : E \rightarrow X$ che rispetti le seguenti condizioni:*

- $\forall x \in X$ l'insieme $p^{-1}(x)$, che avolte denoteremo E_x , ha struttura di spazio vettoriale su \mathbb{K} .
- $\exists \{U_a\}_{a \in A}$ ricoprimento aperto di X e una famiglia di omeomorfismi $\{h_a : p^{-1}(U_a) \rightarrow U_a \times \mathbb{K}^n\}_{a \in A}$ tali che per ogni $x \in U_a$ la restrizione di h_a a $p^{-1}(x)$ è un isomorfismo su $\{x\} \times \mathbb{K}^n$.

Lo spazio X è detto spazio base, e, dato $x \in X$, chiameremo $p^{-1}(x)$ fibra su x . Inoltre la coppia (U_a, h_a) è detta trivializzazione locale e il ricoprimento $\{U_a\}_{a \in A}$ è detto ricoprimento trivializzante, spesso scriveremo per alleggerire solo $\{U_a\}_a$ invece di $\{U_a\}_{a \in A}$.

Lavoreremo sempre con spazi vettoriali su campo reale o complesso, quindi gli esempi e le definizioni spesso ometteranno di generalizzare per \mathbb{K} campo qualsiasi. Ecco alcuni esempi di fibrati vettoriali, dove non altrimenti specificato, su \mathbb{R} , facili da visualizzare.

Esempio 1. $\epsilon_{\mathbb{K}}^n := X \times \mathbb{K}^n$ è detto fibrato banale di dimensione n , la mappa p è una semplice proiezione sul primo fattore e ogni ricoprimento aperto di X è trivializzante.

Esempio 2. La circonferenza $X = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ha per VB di dimensione 1 lo spazio totale $E = \mathbb{R} \times [0, 1] / \sim$, con $(x, 0) \sim (-x, 1) \forall x \in \mathbb{R}$ e con la mappa $p : \mathbb{R} \times [0, 1] / \sim \rightarrow S^1$, con $p(x, t) = e^{2\pi it}$. Questo fibrato è detto “di Möbius” essendo E omeomorfo a un nastro di Möbius aperto. La retro-immagine tramite p di un punto $e^{2\pi it}$ sarà, per $t \in (0, 1)$, $p^{-1}(e^{2\pi it}) = \{(x, t)\}_{x \in \mathbb{R}} = \{(x, t)\}_{x \in \mathbb{R}}$, invece per $t = 0, 1$ abbiamo $p^{-1}(e^{2\pi it}) = \{(x, t)\}_{x \in \mathbb{R}} = \{(x, 1), (-x, 0)\}_{x \in \mathbb{R}}$ che è sempre isomorfo a \mathbb{R} perché abbiamo la relazione \sim che attacca $(x, 1) \sim (-x, 0)$. Prendiamo per ricoprimento trivializzante $\{U_N, U_S\} := \{S^1 / \{i\}, S^1 / \{-i\}\}$, e h_{U_N}, h_{U_S} manderanno fibre (rette) sulle rette di un cilindro aperto a cui manca una retta (quindi un cilindro con un taglio verticale) e nel farlo girano le rette dal senso negativo a quello positivo con continuità. In Figura 1.1 è rappresentato il fibrato, va tenuto a mente che le fibre disegnate sono aperte.

Esempio 3. Il fibrato tangente sulla sfera n -dimensionale S^n ha dimensione n ed è definito come $E = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x \perp v\}$ e $p(x, v) = x$. Il VB tangente quindi ha come fibra su ogni punto della sfera l'iperpiano tangente a quel punto traslato nell'origine. Le trivializzazioni sono semplici da definire, sia U_x l'emisfero aperto con centro x allora $h_x : p^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times \mathbb{R}^n$ e $h_x(y, v) = (y, \pi_x(v))$ dove π_x è la proiezione ortogonale U_x su $p^{-1}(x)$.

Esempio 4. Su S^n definiamo in maniera analoga il fibrato normale, che avrà dimensione 1 nella maniera seguente, $E = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}$. La proiezione è definita da $p(x, v) = x$ e le trivializzazioni sono le stesse del fibrato tangente con l'unica differenza che questa volta $p^{-1}(x)$ è lo spazio perpendicolare all'iperpiano tangente in x .

Esempio 5. Sul piano proiettivo $\mathbb{R}P^n = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$ dove $x \sim y \Leftrightarrow x \in \text{span}(y)$, definiamo il line bundle canonico come lo spazio $E = \{(x, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in x\}$ e $p(x, v) = x$, le trivializzazioni locali sono ancora una volta le proiezioni ortogonali. Un line bundle canonico complesso su $\mathbb{C}P^n$ può essere definito in maniera equivalente, e nelle successive sezioni si rivelerà fondamentale nei nostri studi.

Esempio 6. Come si definisce il VB normale sulla sfera, così si definisce anche sul piano proiettivo il fibrato normale di dimensione n prendendo per spazio base $E = \{(x, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \perp x\}$, $p(x, v) = x$, le trivializzazioni locali sono ancora proiezioni ortogonali.

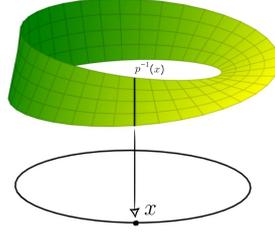


Figura 1.1: Fibrato di Möbius.

È di interesse anche definire varie operazioni tra fibrati vettoriali, quali la restrizione, la somma e il prodotto così da poter (presto) studiarli da un punto di vista algebrico. Descriveremo queste costruzioni per fibrati reali, ma le definizioni sono del tutto analoghe per un campo generico.

Definizione 2 (Restrizione e sottofibrato). *Dato un fibrato $p : E \rightarrow X$, preso $A \subset X$ diremo restrizione ad A del fibrato E il fibrato $p : p^{-1}(A) \rightarrow A$. Un sottofibrato di un fibrato vettoriale $p : E \rightarrow X$ è un sottospazio $E_0 \subset E$ che interseca ogni fibra di E in un sottospazio vettoriale e tale che la restrizione $p : E_0 \rightarrow X$ è un fibrato vettoriale.*

Definizione 3 (Somma diretta). *Sarà somma diretta dei fibrati $p_1 : E_1 \rightarrow X, p_2 : E_2 \rightarrow X$ il fibrato vettoriale con spazio totale $E_1 \oplus E_2 := \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 \mid p_1(e_1) = p_2(e_2)\}$ e mappa $p(e_1, e_2) = p_1(e_1) = p_2(e_2)$ con fibre $p^{-1}(x) = p_1^{-1}(x) \oplus p_2^{-1}(x)$.*

Proposizione 1. *La somma diretta di due fibrati di dimensioni n, m è un fibrato vettoriale di dimensione $n + m$.*

Dimostrazione. Diamo le trivializzazioni locali partendo da quelle dei due VB iniziali. Dati i ricoprimenti $\{U_a\}_a$, e $\{U_b\}_b$ e le trivializzazioni

$$h_a : p_1^{-1}(U_a) \rightarrow U_a \times \mathbb{R}^n$$

$$h_b : p_2^{-1}(U_b) \rightarrow U_b \times \mathbb{R}^m$$

le trivializzazioni locali del fibrato somma sono date dal ricoprimento $\{U_a \cap U_b\}_{a,b}$ e le funzioni saranno $h_{a,b} : p^{-1}(U_{a,b}) \rightarrow U_{a,b} \times \mathbb{R}^{n+m}$, tali che per $h_a(e_1) = (x, v)$ e $h_b(e_2) = (x, w)$ abbiamo $h_{a,b}(e_1, e_2) = (x, (v, w))$, si nota facilmente che questa è una famiglia di omeomorfismi, infatti se h_a, h_b sono omeomorfismi allora anche $h_a \times h_b$ lo è, quindi anche $h_a \times h_b|_D$ sarà un omeomorfismo se restringiamo il

codominio alla immagine $h_a \times h_b|_D(D)$, ciò vale per qualsiasi D ma noi cerchiamo D tale che $h_a \times h_b|_D(D) = h_{a,b}$ e ciò è ottenuto per $D = \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 : p_1(e_1) = p_2(e_2)\}$ che è esattamente il nostro spazio totale. \square

Ora, prima di parlare di prodotto di fibrati, spendiamo alcune righe per parlare di uno strumento molto potente nello studio dei VB.

Definizione 4 (Funzioni di transizione). *Dato il fibrato $p : E \rightarrow X$, di dimensione n e un suo ricoprimento trivializzante $\{U_a\}_a$, definiamo una famiglia di funzioni continue $g_{a,b} : U_a \cap U_b \rightarrow GL_n(\mathbb{R}^n)$ tali che $g_{a,b}(x)(v) = h_a h_b^{-1}(x, v)$.*

Osservazione 1. *Una famiglia di funzioni di transizione come l'abbiamo definita rispetta le condizioni di cociclo:*

$$1 \quad g_{a,a} = \mathbb{1}.$$

$$2 \quad g_{a,b} g_{b,c} = g_{a,c} \text{ su } U_a \cap U_b \cap U_c.$$

Se questa proprietà è rispettata da una famiglia di funzioni $g_{a,b} : U_a \cap U_b \rightarrow GL_n(\mathbb{R}^n)$, con $\{U_a\}_a$ ricoprimento aperto di X , allora possiamo usarle per costruire un fibrato vettoriale su X . Per farlo definiamo $E = \bigsqcup_{a \in A} U_a \times \mathbb{R}^n / \sim$ con la relazione di equivalenza $(x, v) \sim h_b h_a^{-1}(x, v)$; la proiezione $p : E \rightarrow X$ è data da $p([x, v]) = x$. La topologia su E sarà la topologia quoziente della topologia su $\bigsqcup_{a \in A} U_a \times \mathbb{R}^n$.

Definizione 5 (Prodotto tensoriale di fibrati). *Sarà detto prodotto tensoriale dei fibrati $p_1 : E_1 \rightarrow X, p_2 : E_2 \rightarrow X$ il fibrato vettoriale con spazio totale*

$$E_1 \otimes E_2 := \bigsqcup_{x \in X} p_1^{-1}(x) \otimes p_2^{-1}(x)$$

dove \otimes denota il prodotto tensoriale tra gli spazi $p_1^{-1}(x)$ e $p_2^{-1}(x)$, e definiamo p tramite le sue fibre $p(p_1^{-1}(x) \otimes p_2^{-1}(x)) = x$. La topologia τ è la topologia che rende (per un ricoprimento trivializzante di entrambi i VB) le funzioni $h_1 \otimes h_2 : p_1^{-1}(U) \otimes p_2^{-1}(U) \rightarrow U \times (\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2})$ omeomorfismi.

Osservazione 2. *La topologia τ è indipendente dalla scelta delle trivializzazioni locali, infatti tramite le funzioni di transizione ogni scelta di trivializzazioni su un fibrato può essere ottenuta per composizione con un omeomorfismo su $U \times \mathbb{R}^{n_i}$ che è l'identità su U e un isomorfismo sulla parte vettoriale; ovvero le funzioni di transizione di $E_1 \otimes E_2$, agiscono sulla parte vettoriale di $h_1 \otimes h_2$ per composizione con un l'isomorfismo di $\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2}$ associato al prodotto tensoriale tra le matrici che rappresentano $g_{a,b}^1$ e $g_{a,b}^2$.*

Proposizione 1. *Il prodotto tensoriale di due fibrati vettoriali è un fibrato vettoriale.*

Dimostrazione. In questa dimostrazione poco formale facciamo lo sforzo in più di definire l'elemento $e_1 \otimes e_2$ per avere una descrizione facilmente tangibile del fibrato prodotto. Presi $e_1 \in p_1^{-1}(x)$ e $e_2 \in p_2^{-1}(x)$ allora $e_1 \otimes e_2 \in p_1^{-1}(x) \otimes p_2^{-1}(x)$ è il vettore tale che $\forall B$ bilineare ad input in $E_1 \times E_2$ esiste unica $L : E_1 \otimes E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ lineare tale che $B(e_1, e_2) = L(e_1 \otimes e_2)$; ciò che abbiamo fatto è stato sfruttare la struttura di spazio vettoriale delle fibre e la definizione che fa uso di unioni DISGIUNTE delle fibre. Ora possiamo esplicitare $p(e_1 \otimes e_2) = p_1(e_1) = p_2(e_2)$ e avremo $p^{-1}(x) = p_1^{-1}(x) \otimes p_2^{-1}(x)$.

Procedendo in maniera analoga alla somma prendiamo per ricoprimento trivializzante l'intersezione dei ricoprimenti trivializzanti per il primo e il secondo VB e successivamente definiamo $h_{a,b}(e_1 \otimes e_2) = h_a(e_1) \otimes h_b(e_2)$ quindi per $h_a(e_1) = (x, v)$ e $h_b(e_2) = (x, w)$ avremo $h_{a,b}(e_1 \otimes e_2) = (x, v \otimes w)$. \square

Riportiamo anche un approccio alternativo (e più rigoroso):

Dimostrazione. Riprendiamo le funzioni di transizione, preso un ricoprimento trivializzante per entrambi i VB, ad esempio l'intersezione dei ricoprimenti del primo e del secondo VB, cioè, $\{U_{a,b}\} := \{U_a \cap U_b\}_{a,b}$ allora avremo $g_{a,b}^1$ funzioni di transizione per E_1 e per E_2 avremo $g_{a,b}^2$. Costruiamo $E_1 \otimes E_2$ tramite il prodotto tensoriale delle funzioni di transizione $g_{a,b}^1 \otimes g_{a,b}^2 : U_{a,b} \rightarrow GL_n(\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2})$. \square

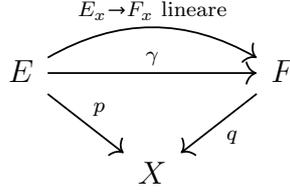
Questi sono i fibrati vettoriali e le loro operazioni, nella successiva sezione inizieremo a classificarli.

1.2 Classificazione dei fibrati vettoriali

Ora che sappiamo cos'è un fibrato vettoriale, volgiamo la nostra attenzione alla loro classificazione; seguiremo un ordine di complessità decrescente, partendo da un risultato di classificazione molto astratto, per poi passare, nella sezione seguente ad un teorema di classificazione dei fibrati sulle sfere, per le quali il nostro interesse sarà, come vedremo, tutt'altro che arbitrario.

Definizione 6. *Dati due fibrati vettoriali $p : E \rightarrow X$ e $q : F \rightarrow X$ questi sono detti isomorfi se esiste un omeomorfismo γ tra i due spazi totali che sia lineare tra le fibre retroimmagini di uno stesso punto in X , ovvero il seguente diagramma è*

commutativo:



Indicheremo l'isomorfismo tra fibrati con il simbolo \approx .

Definizione 7. Scriviamo $\text{Vect}^n(X)$ per indicare l'insieme delle classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali di dimensione n su X , oppure $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^n(X)$ se è necessario specificare il campo su cui stiamo lavorando.

Un risultato molto utile a verificare che una funzione tra fibrati vettoriali sia un isomorfismo è il seguente.

Lemma 1. Sia $h : E_1 \rightarrow E_2$ una mappa continua, con E_1 e E_2 spazi totali di due fibrati (E_i, p_i) su uno stesso spazio X . Se h porta ogni fibra $p_1^{-1}(x)$ in maniera isomorfa su $p_2^{-1}(x)$ allora h è un isomorfismo tra i due VB.

Dimostrazione. Dalle ipotesi risulta ovvio che h sia biettiva, l'unica cosa che dobbiamo dimostrare è che h^{-1} sia continua; studiamo a livello locale h , sia U un aperto trivializzante per entrambi i fibrati vettoriali, tramite le trivializzazioni possiamo allora leggere localmente h come una mappa $U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ con $h(x, v) = (x, g_x(v))$ per una certa $g_x \in GL_n(\mathbb{R})$ che dipende con continuità da x . Se guardiamo g_x come una matrice anche le sue n^2 entrate dipendono in maniera continua da x ; le entrate della matrice inversa possono essere ricavate algebricamente dalle entrate della matrice di g_x quindi anche g_x^{-1} dipende con continuità da x , da cui segue che $h^{-1}(x, w) = (x, g_x^{-1}(w))$ è continua. \square

Mostriamo subito l'utilità di questo lemma presentando le sezioni.

Definizione 8. Chiamiamo sezione di un fibrato vettoriale $p : E \rightarrow X$ una mappa $s : X \rightarrow E$ tale che $s(x) \in p^{-1}(x)$ per ogni $x \in X$.

Osservazione 3. Se n è la dimensione del fibrato allora possiamo definire n sezioni linearmente indipendenti se e solo se $p : E \rightarrow X$ è isomorfo al fibrato banale; il "se" è immediato da provare; il solo se si dimostra costruendo $h : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$ con $h(x, t_1, \dots, t_n) = \sum_i t_i s_i(x)$ dove s_1, \dots, s_n sono le n sezioni linearmente indipendenti; la mappa è continua ed è un isomorfismo sulle fibre e quindi un isomorfismo tra VB per il Lemma 1.

Ora presentiamo il concetto di pullback, che sarà il fulcro dei nostri studi di classificazione.

Proposizione 2. Dato un fibrato vettoriale $p : E \rightarrow X$ e una funzione $f : X' \rightarrow X$ esiste un unico, a meno di isomorfismo, fibrato vettoriale (E^*, p^*) , detto pullback di (E, p) tramite f e una mappa f^* , tali che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} E^* & \xrightarrow{f^*} & E \\ \downarrow p^* & & \downarrow p \\ X' & \xrightarrow{f} & X. \end{array}$$

A volte, indicheremo lo spazio totale del pullback con $f^*(E)$.

Dimostrazione. Per quanto riguarda la sua esistenza esiste una costruzione standard del pullback come segue

$$\begin{aligned} E^* &:= \{(x', v) \in X' \times E \mid f(x') = p(v)\} \\ p^*(x', v) &= x' \\ f^*(x', v) &= v. \end{aligned}$$

Si nota subito facilmente che il diagramma commuta

$$p(f^*(x', v)) = p(v) \stackrel{\text{def}}{=} f(x') = f(p^*(x', v)).$$

Ora mostriamo che (E^*, p^*) è un fibrato vettoriale su X' :

- Verifichiamo che le fibre hanno struttura di spazio vettoriale:

$$E_{x'}^* = \{v \in E \mid p(v) = f(x')\} = p^{-1}(f(x')).$$

- Costruiamo le trivializzazioni locali:

prese $\{(U_a, h_a)\}_a$ trivializzazioni di X , costruiamo il ricoprimento trivializzante di X' come la retroimmagine $\{U'_a\}_a = \{f^{-1}(U_a)\}_a$ tramite f del ricoprimento trivializzante di X (costruzione garantita dalla continuità di f); quindi data una trivializzazione h_a e la proiezione $\pi : U_a \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiamo $h_a^*(x', v) = (x', \pi(h_a(v)))$. Mostriamo che, sì definite, le h_a^* sono omeomorfismi: essendo h_a omeomorfismi e π continua basta mostrare che h_a^* è una biezione; è evidentemente suriettiva, quindi mostriamo che è iniettiva: $h_a^*(x', v_1) = h_a^*(x', v_2) \Rightarrow \pi(h_a(v_1)) = \pi(h_a(v_2)) \Rightarrow v_1 = v_2$. Inoltre è immediato osservare che la restrizione di h_a^* alle fibre è un isomorfismo.

Ora mostriamo l'unicità del pullback: Sia (E', p') un VB su X' e sia $f' : E' \rightarrow E$ che fa commutare il diagramma come richiesto, allora costruiamo l'isomorfismo $E' \rightarrow E^*$ mandando $e' \mapsto (p'(e'), f'(e'))$, le fibre $E'_{x'}$ vengono mandate isomorficamente sulle fibre $E_{x'}^*$ e quindi per il Lemma 1 i due fibrati sono isomorfi. \square

Presentiamo le proprietà principali del pullback:

- $(fg)^*(E) \approx g^*(f^*(E))$.
- $\mathbb{1}^*(E) \approx E$.
- $f^*(E_1 \oplus E_2) \approx f^*(E_1) \oplus f^*(E_2)$.
- $f^*(E_1 \otimes E_2) \approx f^*(E_1) \otimes f^*(E_2)$.

Prima di procedere definiamo il concetto di spazio paracompatto e di Hausdorff, non ci soffermeremo sul loro studio, ma conoscerli ci permetterà di generalizzare molti dei risultati che andremo a studiare.

Definizione 9. *Dato X spazio topologico, diciamo che è paracompatto e Hausdorff se, dato un suo ricoprimento aperto $\{U_a\}_a$, esiste sempre una partizione dell'unità ad esso subordinata, cioè esiste una collezione di mappe $\{\varphi_a : X \rightarrow [0, 1]\}_a$ tali che:*

- *il supporto di $\varphi_a : X \rightarrow [0, 1]$ è contenuto in U_a*
- *per ogni $x \in X$ esiste un intorno U_x di x tale che solo un numero finito di φ_a sono non nulle su U_x e la loro somma è costante uguale a 1 su ogni punto di U_x .*

Ora presentiamo un risultato di grande importanza nella classificazione dei fibrati vettoriali, intuitivamente: dato un VB e due funzioni, se queste “si comportano alla stessa maniera” allora i pullback che producono non saranno molto diversi; in termini formali ciò si esprime nel seguente risultato.

Lemma 2. *Dato il fibrato vettoriale $p : E \rightarrow B$ se le funzioni $f_0, f_1 : X \rightarrow B$ sono omotope¹ e X è paracompatto e Hausdorff, allora i pullback $f_0^*(E), f_1^*(E)$ sono isomorfi.*

Dimostrazione. Per provare il lemma dimostriamo il seguente risultato: dato un fibrato vettoriale $q : Q \rightarrow X \times [0, 1]$ con X paracompatto, le restrizioni su $X \times \{0\}$ e $X \times \{1\}$ sono isomorfe; questo ci basta a concludere perché nel nostro caso avremo che data $F : X \times [0, 1] \rightarrow B$ omotopia tra f_0 e f_1 , considerando $F^*(E) = Q$, le sue restrizioni a $X \times \{0\}$ e $X \times \{1\}$ sono esattamente $f_0^*(E)$ e $f_1^*(E)$.

Riportiamo due passi essenziali alla dimostrazione:

¹Si dice omotopia tra due funzioni $f_0, f_1 : A \rightarrow B$ una mappa continua $F : A \times [0, 1] \rightarrow B$ tale che $F(a, 0) = f_0(a)$ e $F(a, 1) = f_1(a)$.

- (1) Se abbiamo un fibrato $u : Q \rightarrow X \times [a, b]$ che è banale su $X \times [a, c]$ e $X \times [c, b]$, per un certo $c \in (a, b)$ allora tutto il fibrato è banale; le due trivializzazioni potrebbero non combaciare su $u^{-1}(X \times \{c\})$, risolviamo facendo combaciare le due trivializzazioni h_1 e h_2 tramite $h_1 h_2^{-1}$.
- (2) Dato un fibrato $u : Q \rightarrow X \times I$ con $I = [0, 1]$, esiste un ricoprimento $\{U_a\}_a$ di X tale che $\{U_a \times I\}_a$ è un ricoprimento trivializzante; per vederlo basta osservare che $\forall x \in X$ abbiamo degli intorno aperti $U_{x,1}, \dots, U_{x,k}$ e una partizione $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, tali che $U_{x,i} \times [t_{i-1}, t_i]$ sia banalizzante; applichiamo (1) e avremo che per $U_\alpha = \bigcap_{i=1}^{i=k} U_{x,i}$ l'aperto $U_\alpha \times [0, 1]$ è trivializzante.

Lavoriamo prima nel caso di X compatto e Hausdorff, che è più semplice. A meno di passare ad un sottoricoprimento, per (2) possiamo assumere che esista un ricoprimento finito $\{U_i\}_{i=1, \dots, k}$ di X tale che $\{U_i \times I\}$ sia trivializzante per Q . Prendiamo una partizione dell'unità $\{\varphi_i : X \rightarrow I\}_i$ subordinata a $\{U_i\}_i$. Definiamo $\psi_i = \sum_{j=0}^i \varphi_j$, e chiamiamo $X_i = \{(x, \psi_i(x)) \mid x \in X\} \subset X \times I$. Abbiamo una restrizione del nostro VB iniziale $q_i : Q_i \rightarrow X_i$ che sarà banale per costruzione, abbiamo poi una naturale proiezione $X_i \rightarrow X_{i-1}$, e quindi definiamo gli omeomorfismi $h_i : Q_i \rightarrow Q_{i-1}$ come $h_i(x, \psi_i(x), v) = (x, \psi_{i-1}(x), v)$ e tali che siano l'identità fuori da $p^{-1}(U_i \times I)$; h_i è un omeomorfismo e sulle fibre è un isomorfismo. La composizione $h = h_1 h_2 \dots h_k$ è quindi l'isomorfismo cercato. Ora lavoriamo sul caso in cui X sia solo paracompatto: il ricoprimento aperto non è più finito, ma è numerabile, quindi anche le φ_i sono numerabili; tuttavia abbiamo che nell'intorno di un qualsiasi $x \in X$ solo un numero finito di mappe φ_i sono non nulle, quindi possiamo ugualmente definire la composizione $h_1 h_2 \dots$ che, ragionando analogamente al caso precedente, costituisce l'isomorfismo che cercavamo. \square

Osservazione 4. *I fibrati sugli spazi contraibili paracompatti e Hausdorff sono banali, dato che i fibrati vettoriali su un punto sono banali.*

Presentiamo brevemente gli oggetti protagonisti dei successivi teoremi:

Definizione 10. *Definiamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^\infty := \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}\}$.*

Definizione 11. *Sono dette varietà di Stiefel*

$$V_n(\mathbb{R}^k) = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \dots \times \mathbb{R}^k \mid v_i \perp v_j \forall i \neq j, \|v_i\| = 1\}.$$

La topologia di $V_n(\mathbb{R}^k)$ si ottiene identificando $V_n(\mathbb{R}^k)$ come sottoinsieme di $S^{k-1} \times S^{k-1} \dots \times S^{k-1}$.

Definizione 12. Chiamiamo Grassmaniana lo spazio

$$G_n(\mathbb{R}^k) = \{W \subset \mathbb{R}^k \mid \dim(W) = n\}.$$

Per costruire la loro topologia prendiamo la topologia quoziente della suriezione $V_n(\mathbb{R}^k) \rightarrow G_n(\mathbb{R}^k)$ che a ogni n -upla assegna il suo span. Indichiamo $G_n = G_n(\mathbb{R}^\infty) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_n(\mathbb{R}^k)$ con la topologia limite.²

Definizione 13. Definiamo $E_n(\mathbb{R}^k) = \{(l, v) \in G_n(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k \mid v \in l\}$ e indichiamo $E_n = E_n(\mathbb{R}^\infty)$ costruito similmente a E_n con la topologia limite.

Osservazione 5. Abbiamo per ogni k , (∞ compreso) che $E_n(\mathbb{R}^k)$ è un fibrato su $G_n(\mathbb{R}^k)$ con la mappa p data da $p(l, v) = l$; avremo quindi $p^{-1}(l)$ è uno spazio vettoriale di dimensione n con $n = \dim(l)$.

Prendiamo come aperti gli intorno U_l di elementi $l \in G_n(\mathbb{R}^k)$, definiti come

$$U_l = \{l' \in G_n(\mathbb{R}^k) \mid \dim(\pi_l(l')) = n\},$$

con π_l proiezioni ortogonali. Costruiamo $h_l : p^{-1}(U_l) \rightarrow U_l \times \mathbb{R}^n$ con $h_l(l', v) = (l', \pi_l(v))$. Verifichiamo che U_l sia effettivamente aperto, per esserlo abbiamo bisogno che la sua pre-immagine sia aperta in $V_n(\mathbb{R}^k)$, questa pre-immagine è una n -upla $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tale che i vettori $\pi_l(v_1), \dots, \pi_l(v_n)$ siano linearmente indipendenti; per provare che questo insieme è aperto costruiamo una matrice con colonne (v_1, \dots, v_n) , il determinante della matrice è una funzione che dipende con continuità dalle entrate v_1, \dots, v_n , segue che la pre-immagine di U_l è aperta essendo coincidente con $\det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

È evidente che h_l sia biettiva e che sulle fibre è un isomorfismo $h_l : p^{-1}(l) \rightarrow p^{-1}(l) \times \mathbb{R}^n$, dobbiamo solo mostrare che l'inversa di h_l è continua. Sia $l' \in U_l$, esplicitiamo $h_l^{-1}(l', w) = (l', v)$, con $w = L_{l'}(v)$, dobbiamo quindi mostrare che la funzione lineare $L_{l'}$ varia con continuità rispetto a l' .

La matrice di $L_{l'} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ sarà la proiezione π_l su $\pi_l(v_1), \dots, \pi_l(v_n)$, quindi possiamo scriverla come un prodotto tra matrici AB^{-1} con $A(e_1, \dots, e_k) = (v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_k)$ e $B(e_1, \dots, e_k) = (\pi_l(v_1), \dots, \pi_l(v_n), v_{n+1}, \dots, v_k)$ dove i $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono una base ortonormale di l' e $\{v_{n+1}, \dots, v_k\}$ sono una base per l'^\perp . Il prodotto tra matrici e la inversione sono operazioni continue, quindi $L_{l'}$ varia con continuità al variare di v_1, \dots, v_n , però sappiamo che $L_{l'}$ non dipende dalla base di l' , quindi varia con continuità con l' . Per $k = \infty$ prendiamo come aperto trivializzante l'unione degli aperti U_l al crescere di k finito. Le mappe di trivializzazione costruite sopra per k finito si incollano a dare una mappa di trivializzazione che è automaticamente continua per come è definita la topologia su E_n e G_n .

²Data una successione di spazi topologici $\dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$ convergente a uno spazio A chiamiamo su A topologia limite la topologia che rende le inclusioni continue.

Definizione 14. Dati due spazi topologici A e B indichiamo con $[A, B]$ l'insieme delle classi di omotopia delle mappe $f : A \rightarrow B$.

Ora possiamo presentare il primo risultato di classificazione dei fibrati vettoriali, come anticipato è un teorema di natura molto astratta, la sua forza non sarà quella di computare in maniera esplicita i VB ma bensì scremarli e farci realizzare che i fibrati interessanti sono meno vari di quel che temevamo.

Teorema 1 (Primo Teorema di Biettività). Dato X spazio topologico paracompatto e Hausdorff esiste una biezione

$$[X, G_n] \rightarrow \text{Vect}^n(X)$$

definita da $f \mapsto f^*(E_n)$.

Dimostrazione. Teniamo a mente questo bellissimo diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & g = \pi \circ \tilde{f} & & \\
 & & & & \curvearrowright & & \\
 V & \xrightarrow{\approx} & f^*(E_n) & \xrightarrow{\tilde{f}} & E_n & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^\infty \\
 & \searrow p & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & X & \xrightarrow{f} & G_n & &
 \end{array}$$

L'idea fondamentale della dimostrazione è che g e f sono intercambiabili essendo la definizione di \tilde{f} già vincolata da $f : X \rightarrow G_n$, quindi trovare f o g equivale ad ottenere l'altra, tramite $f(x) = g(p^{-1}(x))$.

Mostriamo la suriettività, cioè mostriamo che a ogni fibrato vettoriale $V \rightarrow X$ corrisponde una g .

Ricopriamo X con aperti $\{U_\alpha\}_\alpha$ trivializzanti per X ; dato che X è paracompatto e Hausdorff esistono un sottoricoprimento numerabile $\{U_\alpha\}_\alpha$, sui quali aperti il VB è ancora banale, e una partizione di unità $\{\phi_\alpha\}_\alpha$ con i supporti sugli U_α , tale che in un intorno di un punto x solo un numero finito di ϕ_α sono non nulle, ma sempre almeno una è non nulla. Definiamo $g_\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ composizione della trivializzazione $h_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ con la proiezione su \mathbb{R}^n .

$$\begin{array}{ccc}
 U_\alpha \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^\infty \\
 h_\alpha \uparrow & & \nearrow g_\alpha \\
 p^{-1}(U_\alpha) \subset V & &
 \end{array}$$

La mappa $v \rightarrow \phi_\alpha(p(v))g_\alpha(v)$ si estende a una mappa $V \rightarrow \mathbb{R}^n$ che è uguale a zero fuori da U_α . Dato che le g_α sono numerabili, le possiamo concatenare usandole come coordinate di una funzione $g : V \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ data da $g(v) = (g_1(v), g_2(v), \dots)$ che è ancora iniettiva e lineare sulle fibre.

Mostriamo l'iniettività della mappa $[X, G_n] \rightarrow \text{Vect}^n(X)$ provando $f_0^*(E_n) = f_1^*(E_n) \Rightarrow f_0 \sim f_1$ dove \sim indica la relazione di omotopia. Dati $f_0^*(E_n)$ e $f_1^*(E_n)$ isomorfi abbiamo le mappe g_0 e g_1 che sono lineari e iniettive sulle fibre.

Ricordando che $f_i(x) = g_i(p^{-1}(x))$, l'omotopia che cerchiamo tra le f_i si ottiene da un'omotopia g_t tra le g_i tramite $f_t(x) = g_t(p^{-1}(x))$. Ora cerchiamo una omotopia tra le g_i che sia iniettiva e lineare sulle fibre. Costruiamo l'omotopia $L_t(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (1-t)(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) + t(0, x_0, 0, x_1, 0, \dots)$; componiamo adesso L_t con g_0 in modo da mandare l'immagine di g_0 sulle coordinate pari e con un processo simile mandiamo l'immagine di g_1 sulle coordinate dispari, chiamiamo queste nuove funzioni sempre g_0 e g_1 e costruiamo l'omotopia tra di esse tramite $g_t = (1-t)g_0 + tg_1$, questa è lineare e iniettiva sulle fibre poiché lo sono g_0 e g_1 . □

1.3 Clutching functions o funzioni di incastro

Il nostro obiettivo ora è classificare i VB su una sfera di dimensione k . Iniziamo descrivendo il VB su una sfera, partendo dall'osservazione fatta, nella sezione precedente, che se uno spazio X è contraibile allora i fibrati vettoriali su di esso sono banali.

Una sfera S^k può essere scomposta come $S^k = D_+^k \cup D_-^k$, con D_\pm^k due emisferi individuati dalla scelta di un equatore, cioè di una circonferenza massima S^{k-1} su S^k . Dato che i dischi D_\pm^k sono contraibili, si può immaginare che la parte che ci interessa osservare per capire veramente come è fatto un fibrato su S^k sia quello che accade sull'intersezione S^{k-1} . Usando questa osservazione, possiamo provare a definire un fibrato vettoriale complesso partendo da una funzione con dominio l'equatore S^{k-1} .

Sia $f : S^{k-1} \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ una mappa che a ogni punto dell'equatore associa una funzione lineare e invertibile su \mathbb{C}^n , definiamo il fibrato $E_f := \frac{D_+^k \times \mathbb{C}^n \cup D_-^k \times \mathbb{C}^n}{\sim}$ con la relazione $(x, v) \sim (x, f(x)(v)) \in \partial D_+^k \times \mathbb{C}^n$ per $(x, v) \in \partial D_-^k \times \mathbb{C}^n$ e con la proiezione $p : E \rightarrow S^k$ data da $p(x, v) = x$. Non è difficile convincersi che la costruzione dia proprio un fibrato vettoriale. Intuitivamente ciò che abbiamo fatto

è stato poggiare sui due emisferi D_{\pm}^k della sfera due fibrati banali e poi li abbiamo incastrati lungo l'equatore tramite la funzione f .

Osservazione 6. *Analogamente a quanto dimostrato nella Proposizione 2, è possibile mostrare che se $f, g : S^{k-1} \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ sono due funzioni omotope, allora i fibrati E_f e E_g su S^k associategli nella maniera sopra descritta sono isomorfi.*

Questa costruzione è semplice e soprattutto generale, procediamo nel dimostrare che tutti i fibrati di S^k possono essere descritti con questo metodo.

Teorema 2 (Secondo Teorema di Biettività). *La mappa Φ che manda la classe di omotopia di una mappa $f : S^{k-1} \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ nella classe di isomorfismo del fibrato E_f è una biezione.*

Dimostrazione. Proviamo l'invertibilità di $\Phi : [S^{k-1}, GL_n(\mathbb{C})] \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{C}}^n(S^k)$ trovando la sua inversa $\Psi : \text{Vect}_{\mathbb{C}}^n(S^k) \rightarrow [S^{k-1}, GL_n(\mathbb{C})]$.

Preso un fibrato $E \rightarrow S^k$ le sue restrizioni ai fibrati E_+ e E_- , sulla calotta superiore D_+^k e sulla inferiore D_-^k , sono banali per contraibilità dei dischi; siano h_+, h_- rispettive trivializzazioni; definiamo $\Psi(E)$ come la classe di omotopia della funzione $S^{k-1} \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ che manda $x \rightarrow h_+h_-^{-1}(x, \cdot)$. Verifichiamo che $\Psi(E)$ è ben definita, cioè non dipende dalla scelta delle trivializzazioni e dalla scelta di E a meno di isomorfismo. Ogni scelta di h_{\pm} differisce da un'altra per una mappa $D_{\pm} \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$, che quindi è omotopa alla mappa costante per la contraibilità dei dischi; inoltre $GL_n(\mathbb{C})$ è connesso per archi infatti: ogni matrice può essere resa diagonale mediante l'operazione di aggiungere a una riga un multiplo di un'altra riga, che determina un cammino in $GL_n(\mathbb{C})$ e lo spazio delle matrici diagonali invertibili, essendo omeomorfo al prodotto cartesiano di n copie di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ è connesso per archi. Quindi la definizione di h_{\pm} , e di conseguenza della loro composizione, è unica a meno di omotopia, da cui ψ è ben definita. Si vede che $\Psi\Phi = \mathbb{1}$ dal fatto che la classe di omotopia di f che definisce E_f deve, per definizione, essere la stessa di $h_+h_-^{-1}$. Analogamente è facile vedere che anche $\Phi\Psi = \mathbb{1}$, da cui l'enunciato. \square

La seguente osservazione ci mostra la potenza di questo teorema, ovvero semplificare di molto le operazioni tra i fibrati vettoriali.

Osservazione 7 (Somma di fibrati tramite Clutching Functions). *Vale $E_f \oplus E_g \approx E_h$ con $h : S^{k-1} \rightarrow GL_{n+m}(\mathbb{C})$ data da $h(x) = \begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & g(x) \end{pmatrix}$.*

1.3.1 Il line bundle canonico: H

Chiudiamo questa sezione e questo capitolo, analizzando, mediante clutching functions, un particolare fibrato vettoriale che sarà molto utile nel resto della tesi.

Identificando $\mathbb{C}P^1$ con S^2 possiamo definire il line bundle canonico complesso (si veda Esempio 5); mostriamo che il line bundle canonico su $\mathbb{C}P^1$, che indicheremo con H , è il VB associato alla mappa $f : S^1 \rightarrow GL_1(\mathbb{C})$ data da $f(z) = m_z$, con m_z moltiplicazione per z .

Consideriamo $\mathbb{C}P^1$ come $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mediante $[z_0, z_1] \rightarrow z_0/z_1 = z$ se $z_1 \neq 0$ e $[z_0, 0] \rightarrow \infty$ e identifichiamo $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con S^2 mediante proiezione stereografica dal polo nord della sfera (facendo corrispondere quindi il polo nord a ∞); i punti sull'emisfero inferiore D_-^2 sono identificati con quelli aventi coordinate $[z, 1]$ con $|z| \leq 1$ e quelli sull'emisfero superiore D_+^2 sono identificati con quelli con $[1, 1/z]$ con $|1/z| \leq 1$; il cambio di carta (da nord a sud) sul bordo comune S^1 è dato dalla moltiplicazione per z , quindi la clutching function $f : S^1 \rightarrow GL_1(\mathbb{C})$ è data da $f(z) = m_z$. Scambiando il ruolo dei sottoinsiemi di $\mathbb{C}P^1$ identificati con D_- con D_+ avremmo avuto invece $f(z) = m_{1/z}$.

Il nostro interesse per questo specifico fibrato potrà sembrare arbitrario a primo impatto, ma ora che sappiamo fare operazioni tra i fibrati vettoriali e abbiamo introdotto diversi risultati, siamo pronti a parlarne in termini algebrici nei prossimi capitoli: H sarà proprio il nostro blocco di partenza; concludiamo questo capitolo con una semplice identità che ritornerà utile molto presto.

Proposizione 3. *Vale $H^2 + 1 = 2H$, dove H^2 denota $H \otimes H$, $2H$ denota $H \oplus H$, $+$ indica la somma connessa di fibrati e 1 indica $\epsilon_{\mathbb{C}}^1$ il fibrato banale complesso di dimensione 1, come definito nell'Esempio 1.*

Dimostrazione. Iniziamo facendo vedere che la funzione di incastro di H^2 è $f(z) = m_{z^2}$. Riflettiamo sul fatto che il prodotto tensoriale $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ è isomorfo a \mathbb{C} , quindi gli elementi $v \otimes w$ non sono altro che i comuni prodotti tra i numeri complessi v e w ; cerchiamo f per cui $H \otimes H \approx E_f$ cioè per cui per cui $\partial D_+^2 \times \mathbb{C} \ni (z, v \otimes w) \sim (z, f(z)(v \otimes w)) \in \partial D_-^2 \times \mathbb{C}$; per H avevamo $(z, v) \sim (z, zv)$, quindi abbiamo $(z, v) \otimes (z, w) \sim (z, (zv) \otimes (zw)) = (z, z^2(v \otimes w))$ quindi la funzione di incastro è proprio $f(z) = m_{z^2}$. Per quanto visto nell'Osservazione 7 si ha che la funzione di incastro di $(H \otimes H) \oplus 1$ è

$$z \rightarrow \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo vedere che tale funzione è omotopa alla funzione

$$z \rightarrow \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

che corrisponde alla funzione di incastro di $H \oplus H$. Un'omotopia esplicita è data da

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} z^{2-t} & 0 \\ 0 & z^t \end{pmatrix}.$$

□

Se dimentichiamo per un attimo che H è un fibrato vettoriale l'identità $H^2 + 1 = 2H$ può essere in modo formale anche scritta come $(H - 1)^2 = 0$: nei prossimi capitoli introdurremo una struttura di gruppi e anelli sui fibrati vettoriali e vedremo che possiamo descriverla in maniera efficace sfruttando la struttura di H di fibrato vettoriale e la relazione appena dimostrata.

Capitolo 2

La K -teoria

La K -teoria è uno studio astratto e totalmente algebrico dei VB che ha prodotto risultati di grande interesse negli ambiti della geometria, dell'algebra, e ha permesso di costruire alcuni dei modelli matematici della teoria delle stringhe. Lavoreremo nello specifico sulla K -teoria complessa (anelli di VB su campo complesso) e, in questo capitolo, vogliamo definire, seguendo [Hat03], i suoi oggetti fondamentali, gli anelli K e \tilde{K} .

Per usare i risultati del precedente capitolo d'ora in poi prenderemo per buono che gli spazi base X siano compatti e Hausdorff, inoltre non lavoreremo più su fibrati vettoriali su campo generico, bensì, sul campo complesso. Per trattare la K teoria ci serve una definizione un po' più generale di VB in cui si richiede che la dimensione delle fibre sia localmente costante. Questa definizione coincide con quella data nel capitolo precedente quando X è connesso.

Definizione 15. *Richiamiamo e definiamo gli oggetti protagonisti di questo capitolo:*

- ricordiamo che con ϵ^n indichiamo il VB banale di dimensione n come definito nell'Esempio 1, che d'ora in avanti sarà sempre sul campo complesso, che \approx indica la relazione l'isomorfismo tra fibrati vettoriali e che $\text{Vect}^n(X)$ indica le classi di isomorfismo, come da Definizione 6, di spazi vettoriali di dimensione n , su \mathbb{C} .
- Diremo che due fibrati vettoriali E_1, E_2 sono stabilmente isomorfi se $\exists n \in \mathbb{N} : E_1 \oplus \epsilon^n \approx E_2 \oplus \epsilon^n$, indichiamo tale relazione di equivalenza col simbolo \approx_s .
- Definiamo anche un'altra relazione di equivalenza, che indicheremo con \sim , se, dati due fibrati E_1, E_2 , si ha che $\exists n, m \in \mathbb{N} : E_1 \oplus \epsilon^n \approx E_2 \oplus \epsilon^m$; si noti che

questa è una relazione meno stringente della precedente, cioè chiaramente se $E_1 \approx_s E_2$ allora $E_1 \sim E_2$.

- Indicheremo con $K(X)$, o semplicemente con K quando non sia necessario esplicitare lo spazio base X , l'insieme $\text{Vect}^n(X)/\approx_s$ con una struttura di anello che descriveremo nella prossima sezione.
- Indicheremo con $\tilde{K}(X)$, o semplicemente con \tilde{K} , l'anello (dimostreremo che è tale) ottenuto dal quoziente $\text{Vect}^n(X)/\sim$. L'anello $\tilde{K}(X)$ viene chiamato anello K ridotto, vedremo fra un paio di sezioni il perché di questo nome.

2.1 La struttura di anello su K e \tilde{K}

2.1.1 Il gruppo \tilde{K}

\tilde{K} è l'oggetto più semplice da studiare, ha una naturale struttura di gruppo, che ora esplicheremo. Per farlo dobbiamo avvalerci del seguente lemma.

Lemma 3. *Dato X abbiamo che $\forall E \in \text{Vect}^n(X), \exists F \in \text{Vect}^n(X) : E \oplus F \approx \epsilon^m$.*

Dimostrazione. Supponiamo che le fibre di X abbiano tutte la stessa dimensione. Sia $\{U_a\}_a$ ricoprimento di aperti e h_a le trivializzazioni locali del fibrato E e $\pi_a : U_a \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ proiezione sul secondo fattore. Per il Lemma di Urysohn¹, per ogni $x \in X$, esiste un U_a che contiene x e una mappa $\phi_{a,x} : X \rightarrow [0, 1]$ che non si annulla su x e ha il supporto contenuto in U_a . Consideriamo il ricoprimento aperto trivializzante $\{\phi_a^{-1}((0, 1])\}_{a,x}$, ed estraiamone, per la compattezza di X , un sottoricoprimento finito $\{\phi_i^{-1}((0, 1])\}_{i=1,\dots,k}$. Definiamo $g_i : E \rightarrow \mathbb{C}^n$ come $g_i(v) := \phi_i(p(v))\pi_i(h_i(v))$, con $p : E \rightarrow X$ se $v \in p^{-1}(U_i)$ e zero altrimenti. Tali mappe sono lineari e iniettive sulle fibre sopra $\phi_i^{-1}((0, 1])$, quindi se le concateniamo come coordinate di una mappa $g : E \rightarrow \mathbb{R}^N$ con $N = nk$ otteniamo una mappa lineare e iniettiva su tutte le fibre. La mappa $(p, g) : E \rightarrow X \times \mathbb{R}^n$ determina un isomorfismo tra E e il sottofibrato E' del VB banale immagine di (p, g) .

Dobbiamo mostrare, a questo punto, che esiste un sottofibrato che, sommato a E' , ha come risultato $X \times \mathbb{R}^N$: questo fibrato “complementare” altro non è che un fibrato le cui fibre sono tutte perpendicolari a quelle di E' . Più in generale dato E' sottofibrato di F , esiste un sottofibrato G di F tale che $E' \oplus G \approx F$. Vediamo qui a grandi linee come è possibile farlo, rimandando per i dettagli al libro di Hatcher [Hat03, Proposizioni 1.2 e 1.3]. Se n e $n + m$ sono rispettivamente le dimensioni di E' e F , p e q le loro mappe di proiezione su X , avremo

¹Lemma di Urysohn: Se X è uno spazio normale (o $T4$, cioè uno spazio in cui i chiusi disgiunti possono essere separati da aperti) allora per ogni coppia di chiusi A, B esiste una funzione continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ che fa 0 su B e 1 su A (si veda [Man08, pag.139]).

che $\forall x \in X$ si ha $p^{-1}(x) \subset_{ssv} q^{-1}(x)$. È possibile fissare su F un prodotto interno, cioè una mappa $F \oplus F \rightarrow \mathbb{C}$ che si restringe ad un prodotto interno su ogni fibra e determina un prodotto interno sul sottofibrato; possiamo allora, tramite Gram-Schmidt estendere il sottospazio vettoriale $p^{-1}(x)$, fino a ottenere $q^{-1}(x)$, e ripetere questo processo su tutte le fibre con continuità; poiché localmente ogni fibrato è banale, costruiamo quindi una trivializzazione h dell'intorno di x e la estendiamo con i nuovi vettori ortogonali (da \mathbb{C}^n a \mathbb{C}^{n+m}) e così restringendoci su \mathbb{C}^m abbiamo le trivializzazioni locali di un certo fibrato G complementare al primo.

Nel caso generale prendiamo $X_i = \{x \in X \mid \dim(p^{-1}(x)) = i\}$, questi X_i sono disgiunti e aperti in X e quindi sono in numero finito per la compattezza. Aggiungendo ad E un VB che sopra ogni X_i è banale e di una dimensione opportuna possiamo costruire un fibrato le cui fibre hanno tutte la stessa dimensione riconducendoci al caso precedente. \square

Ora possiamo dimostrare che \tilde{K} ridotto è un gruppo.

Teorema 3. *L'insieme $\tilde{K}(X)$ con l'operazione di somma di fibrati è un gruppo commutativo.*

Dimostrazione. Per quanto visto nel capitolo precedente, lavorando a meno di isomorfismo, la somma è commutativa e associativa quindi è ben posta come operazione sulle classi di \tilde{K} e rimane associativa e commutativa. L'elemento neutro è chiaramente $[\epsilon^0]$, la classe contenente i fibrati banali di dimensione qualsiasi. L'esistenza dell'inverso segue dal lemma precedente. \square

2.1.2 Il gruppo K

Lo studio di K richiede un po' di lavoro in più, infatti non è un gruppo perché non tutti gli elementi sono dotati di inverso: $[E_1] \oplus [E_2] = [0] \Rightarrow E_1 \oplus E_2 \oplus \epsilon^n \approx \epsilon^n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, quindi E_1 ed E_2 hanno dimensione 0. Possiamo però rendere K un gruppo tramite un processo (detto di simmetrizzazione o di Grothendieck) che si può applicare a qualsiasi monoide commutativo dotato della regola di cancellazione: chiaramente $\text{Vect}^n(X)/\approx_s$, con la somma di fibrati, è un monoide commutativo inoltre vale la legge di cancellazione come dimostriamo nella seguente proposizione.

Proposizione 2. *Vale la legge di cancellazione per la somma diretta di fibrati vettoriali su $\text{Vect}^n(X)/\approx_s$.*

Dimostrazione. Dati $E_1 \oplus F \approx E_2 \oplus F$ si osserva che $\dim(E_1) = \dim(E_2)$ e abbiamo poi un isomorfismo lineare tra le fibre $q_1^{-1}(x) \rightarrow q_2^{-1}(x)$ con $q_1 : E_1 \oplus F \rightarrow X$,

$q_2 : E_2 \oplus F \rightarrow X$; allora tramite una restrizione otteniamo gli isomorfismi tra le fibre $p_1^{-1}(x) \rightarrow p_2^{-1}(x)$, con $p_1 : E_1 \rightarrow X$ e $p_2 : E_2 \rightarrow X$ e quindi $E_1 \approx E_2$ per il Lemma 1. Alternativamente (facendo riferimento al Lemma 3), sia G il fibrato tale che $F \oplus G \approx \epsilon^m$, se lo aggiungiamo da ambo i lati otteniamo $E_1 \approx_s E_2$ come voluto. \square

Vediamo ora come funziona il processo di Grothendieck. Consideriamo il prodotto cartesiano di $K(X)$ con se stesso, l'idea della costruzione è di pensare agli elementi $(E, F) \in K(X) \times K(X)$ come differenze formali $E - F$; più precisamente, definiamo la somma in $K(X) \times K(X)$ come $(E_1, F_1) + (E_2, F_2) = (E_1 \oplus E_2, F_1 \oplus F_2)$, e per rendere questa struttura un gruppo, definiamo una relazione di equivalenza, data da $(E_1, F_1) \cong (E_2, F_2)$ se $E_1 \oplus F_2 \approx_s E_2 \oplus F_1$; in altre parole vogliamo che due differenze formali siano equivalenti se vien fatta una somma ambo i lati per lo stesso termine, ossia:

$$E_1 - F_1 \cong E_2 - F_2 \Leftrightarrow E_1 - F_1 \oplus G \approx_s E_2 - F_2 \oplus G.$$

L'operazione di somma scende alle classi di equivalenza e se consideriamo il quoziente

$$G(K(X)) := \frac{K(X) \times K(X)}{\cong} \\ (E_1, F_1) \cong (E_2, F_2) \Leftrightarrow \exists G : E_1 \oplus F_2 \oplus G = E_2 \oplus F_1 \oplus G$$

questo ha la struttura di gruppo commutativo. In particolare avremo per elemento nullo la classe dell'elemento $E - E$ e l'inverso di un elemento $E - E'$ è $E' - E$; infine osserviamo che si può rappresentare la classe di equivalenza di un qualsiasi elemento come $E - \epsilon^n$ per il Lemma 3. D'ora in poi indicheremo con $K(X)$ ciò che in realtà sarebbe il gruppo di Grothendieck $G(K(X))$.

2.1.3 Gli anelli K e \tilde{K}

Possiamo utilizzare il prodotto tensoriale per rendere i due gruppi degli anelli. Per $K(X)$ la moltiplicazione di due differenze formali si sviluppa esattamente come ci insegna l'algebra:

$$(E_1 - F_1)(E_2 - F_2) = E_1 \otimes E_2 - E_1 \otimes F_2 - F_1 \otimes E_2 + F_1 \otimes F_2.$$

Non è difficile verificare che il prodotto è ben definito e dota $K(X)$ di una struttura di anello unitario con identità ϵ^1 .

Osservazione 8. *Se indichiamo ϵ^n semplicemente con n possiamo vedere che, ad esempio, nE ossia $\epsilon^n \otimes E$ è isomorfo alla somma $E \oplus \dots \oplus E$ di n copie di E . Infatti le dimensioni di nE e $\epsilon^n \otimes E$ coincidono, esplicitiamo $\epsilon^n \otimes E = \bigsqcup_{x \in X} \mathbb{C}^n \otimes p^{-1}(x)$; costruiamo l'isomorfismo tra i due fibrati mandando ogni fibra $nE_x = p^{-1}(x) \oplus p^{-1}(x) \oplus \dots \oplus p^{-1}(x)$ in maniera isomorfa su $\mathbb{C}^n \otimes p^{-1}(x)$.*

Abbiamo una struttura di anello anche su \tilde{K} , per definire un prodotto però dobbiamo fare un po' di lavoro extra, che renderà evidente però per quale motivo \tilde{K} si chiama anello ridotto. Partiamo con le seguenti osservazioni.

Osservazione 9. *Poiché a caratterizzare un VB su un punto basta la sua dimensione abbiamo $K(\{x_0\}) \approx \mathbb{Z}$. Inoltre la mappa $r : K(X) \rightarrow K(\{x_0\})$, indotta dalla restrizione di un fibrato alla fibra sopra un punto fissato $x_0 \in X$ è un omomorfismo di anelli.*

Osservazione 10. *La funzione $\phi : K(X) \rightarrow \tilde{K}(X)$ data da $\phi(E - n) = E$ è ben definita in quanto se $E - n = E' - m$ in $K(X)$ allora $E \oplus \epsilon^m \approx E' \oplus \epsilon^n$, quindi $E \sim E'$. La mappa ϕ è un omomorfismo suriettivo di gruppi e $\ker(\phi) = \{\epsilon^n - \epsilon^m\}_{n,m \in \mathbb{N}}$. Questo gruppo è isomorfo a \mathbb{Z} dato che la restrizione di $r : K(X) \rightarrow K(\{x_0\})$ a $\ker(\phi)$ è un isomorfismo; come conseguenza $K(X)$ è isomorfo, come gruppo a $\tilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$ per il lemma di spezzamento². In particolare $\tilde{K}(\{x_0\}) = \{0\}$, cosa che segue facilmente anche dalla definizione di \tilde{K} .*

Dalle osservazioni precedenti abbiamo che $\ker(K(X) \rightarrow K(\{x_0\}))$ può essere identificato con $\tilde{K}(X)$: questo induce quindi su $\tilde{K}(X)$ una struttura di ideale e quindi di anello (anche se non necessariamente unitario) che dipende però dalla scelta di un punto base $x_0 \in X$.

2.2 K e \tilde{K} come funtori

K e \tilde{K} possono essere visti anche come funtori. Partiamo da K .

$$\text{Top} \xrightarrow{K} \text{Ring}$$

$$X \xrightarrow{K} K(X)$$

$$f \in \text{Mor}(X, Y) \xrightarrow{K} f^* \in \text{Mor}(K(Y), K(X))$$

Definiamo K come funtore passo passo:

- a ogni oggetto (spazio topologico) in Top viene naturalmente associato il suo anello $K(X)$ in Ring

²Per rendere scorrevole la lettura abbiamo lasciato alla intuizione del lettore l'uso della sequenza esatta $0 \rightarrow \ker(\phi) \rightarrow K(X) \rightarrow \tilde{K}(X) \rightarrow 0$ e del lemma di spezzamento che asserisce che data una sequenza esatta corta $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ tale che esiste $r : B \rightarrow A$ inversa sinistra di $A \rightarrow B$ si ha l'isomorfismo $B \approx A \oplus C$.

- a ogni morfismo $f : X \rightarrow Y$ viene associato un morfismo $f^* : K(Y) \rightarrow K(X)$ definito da $f^*(E - E') = f^*(E) - f^*(E')$ dove $f^*(E)$ è il pullback di $p : E \rightarrow Y$ tramite f .
- l'identità $\mathbb{1}$, viene ovviamente mandata nella identità tra anelli $\mathbb{1}^*$ essendo questa l'unica maniera di realizzare il pullback di una identità.

Il fatto che questo sia un funtore deriva dalle proprietà del pullback di fibrati.

Il funtore \tilde{K} si comporta in tutto e per tutto alla medesima maniera del funtore K con la sola differenza che non parte da Top ma da Top_{x_0} ovvero gli spazi topologici con un punto base, ciò è necessario a rendere f^* un morfismo di anelli perché, come visto, la struttura di anello di \tilde{K} dipende dalla scelta di un punto base.

2.3 Sequenze di spezzamento

Introduciamo un concetto di algebra utile a manipolare i gruppi K e \tilde{K} . Dati n gruppi G_i e $n - 1$ funzioni $f_i : G_{i-1} \rightarrow G_i$, la sequenza

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-1}} G_{i-1} \xrightarrow{f_i} G_i \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

è detta esatta se $\text{im}(f_i) = \text{ker}(f_{i+1})$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Teorema 4. *Dato $A \subset X$ chiuso, il diagramma*

$$A \xhookrightarrow{i} X \xrightarrow{q} X/A$$

induce la sequenza esatta

$$\tilde{K}(X/A) \xrightarrow{q^*} \tilde{K}(X) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(A).$$

Dimostrazione. Osserviamo che essendo X un compatto Hausdorff e A chiuso abbiamo che A è un compatto Hausdorff. Anche X/A è un compatto Hausdorff dato che, essendo gli spazi Hausdorff compatti anche spazi normali, avremo che per $x \notin A$ sono separabili x e A quindi nel quoziente lo saranno i punti $[x]$ e $[A]$.

Mostriamo che $\text{im}(q^*) \subset \text{ker}(i^*)$. Essendo $\tilde{K}([A]) = \{0\}$, si ha che $(q \circ i)^* = i^* \circ q^*$ è la mappa nulla e quindi $\text{im}(q^*) \subset \text{ker}(i^*)$.

Mostriamo che $\text{ker}(i^*) \subset \text{im}(q^*)$. Sia $E \in \text{ker}(i^*)$, cerchiamo un VB, $E' \in \tilde{K}(X/A)$ che venga mandato in E tramite q^* . Per fare ciò, osserviamo che se $E \in \text{ker}(i^*)$ allora, a meno di sommare ad E un fibrato banale, possiamo assumere che E sia banale su A . Ora prendiamo $h : p^{-1}(A) \rightarrow A \times \mathbb{C}^n$ trivializzazione

locale e definiamo la relazione $h^{-1}(x_1, z) \sim h^{-1}(x_2, z) \forall x_1, x_2 \in A, z \in \mathbb{C}^n$. Il fibrato E' che cerchiamo lo costruiamo come $E' := E/\sim$. Per concludere dobbiamo vedere che $E' \rightarrow X/A$ è un fibrato e questo richiede di provare che esiste una trivializzazione locale intorno al punto $[A]$. Se dimostriamo che E è banale su un intorno U di A allora la trivializzazione locale induce proprio una trivializzazione di E' su U/A e quindi E' è un fibrato su X/A . Nel caso in cui A sia retratto per deformazione di un suo intorno U , la restrizione di E ad U è banale perché è isomorfo a $p^{-1}(A)$ mediante il pullback della retrazione. Nel caso la retrazione non esista procediamo così: essendo il fibrato su A banale esistono n sezioni $s_j : A \rightarrow E$ tali che $s_i(a) \in p^{-1}(a)$, con $\{s_1(a), \dots, s_n(a)\}$ base della fibra (si veda Osservazione 3). Scegliamo un ricoprimento $\{U_j\}_j$ di A tale che E sia banale su U_j , poi prendiamo una partizione di unità $\{\varphi_j\}_j$ relativa al ricoprimento di X fatto dagli aperti $\{U_j\}_j$ e da $X \setminus A$. Ora, tramite le trivializzazioni locali, possiamo leggere le sezioni s_i come mappe da $A \cap U_j$ verso una singola fibra; possiamo definire, per il teorema di estensione di Tietze³, una sezione $s_{ij} : U_j \rightarrow E$ che estende s_i ; tramite $\sum_j \varphi_j s_{ij}$ estendiamo le s_i a una sezione su tutto X ; poiché le sezioni ci danno una base in ogni fibra su A la loro estensione ci dà ancora una base per le fibre in un intorno di A (usando il fatto che il determinante di una matrice è una funzione continua rispetto agli ingressi della matrice, quindi se è non zero in un punto, lo è in un intorno del punto). Possiamo quindi concludere che $E' \rightarrow X/A$ è un fibrato vettoriale. Rimane da mostrare che E è isomorfo a $q^*(E')$: usando il diagramma commutativo la proiezione a quoziente $E \rightarrow E'$ è un isomorfismo sulle fibre, quindi questa mappa e p ci danno l'isomorfismo $q^*(E') \approx E$.

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E' \\ \downarrow p & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{q} & X/A \end{array}$$

□

Riportiamo ora un ultimo lemma prima di passare al prossimo capitolo.

Lemma 4. *Se abbiamo $A \subset X$ contraibile allora la proiezione $q : X \rightarrow X/A$ induce una biezione $q^* : \text{Vect}^n(X/A) \rightarrow \text{Vect}^n(X)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Dato che A è contraibile la restrizione ad A di un fibrato $E \rightarrow X$ è banale. Scegliendo una trivializzazione h come nella dimostrazione precedente possiamo costruire il fibrato vettoriale $E' \rightarrow X/A$; il nostro intento è provare che

³Teorema di estensione di Tietze: Sia X uno spazio normale e $A \subset X$ chiuso; sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua; possiamo definire una estensione $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F|_A = f$ e possiamo anche far sì che, se f è limitata, allora F è limitata dallo stesso limite di f .

E' non dipende da h . Date due trivializzazioni h_0 e h_1 , indichiamo con E/h_0 e E/h_1 i fibrati associati; possiamo scrivere $h_1 = (h_1 h_0^{-1})h_0$, quindi le due funzioni differiscono per una certa $g_x \in GL_n(\mathbb{C})$ in ogni punto $x \in X$. La mappa $g : A \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ è omotopa (per contraibilità di A) a una mappa costante $g(x) = \alpha \in GL_n(\mathbb{C})$; possiamo a questo punto scrivere $h_1 = (h_1 h_0^{-1} \alpha^{-1})(\alpha h_0)$, ciò mostra che, comporre h_0 e α in ogni fibra non modifica E/h_0 , quindi possiamo assumere che α sia l'identità. L'omotopia che manda g nella identità ci da una omotopia H tra h_0 e h_1 , quindi se, analogamente a quanto fatto per E' , costruiamo un fibrato vettoriale $E \times [0, 1]/H \rightarrow (X/A) \times [0, 1]$ che si restringa a E/h_0 sopra 0 e E/h_1 sopra 1, abbiamo, per il Lemma 2, l'isomorfismo $E/h_0 \approx E/h_1$. \square

Capitolo 3

Il Teorema di Bott

Ora che abbiamo gli strumenti necessari a manipolare i gruppi K e \tilde{K} ci avviciniamo al risultato più interessante di questa tesi, un teorema tramite il quale calcoleremo effettivamente i gruppi K . Essendo gli strumenti da usare molto vari non riporteremo molte delle dimostrazioni per le quali si rimanda, dove non esplicitamente detto, a [Hat03]. Anche in questo capitolo assumeremo che X sia sempre uno spazio compatto, connesso e Hausdorff.

3.1 Preliminari: incollamenti, prodotti e sospensioni

Presentiamo brevemente alcune definizioni di operatori geometrici e le loro proprietà principali che serviranno nelle prossime sezioni.

Definizione 16. *Dati due spazi topologici X, Y e fissati due punti $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ chiamiamo “bouquet” di (X, x_0) e (Y, y_0) , oppure wedge sum, lo spazio topologico $X \vee Y := X \sqcup Y / \sim$ con $x_0 \sim y_0$, ottenuto quindi incollando X e Y mediante l'identificazione di x_0 e y_0 .*

Definizione 17. *Definiamo lo smash-product di due spazi topologici puntati (X, x_0) e (Y, y_0) come $X \wedge Y := \frac{X \times Y}{X \vee Y}$.*

Un risultato che ci servirà è il seguente, di cui si può trovare una dimostrazione in [Hat02, pag.10].

Proposizione 4. *Lo smash product di due sfere è una sfera che ha per dimensione la somma delle dimensioni delle due sfere iniziali, $S^n \wedge S^m = S^{n+m}$.*

Definizione 18. *Chiamiamo cono di uno spazio topologico X l'oggetto $CX := \frac{X \times [0,1]}{X \times \{0\}}$*

Definizione 19. È detta *sospensione* di uno spazio X lo spazio $SX := \frac{X \times [0,1]}{X \times \{0\} \cup X \times \{1\}}$, cioè lo spazio ottenuto da $X \times [0,1]$ collassando $X \times \{0\}$ e $X \times \{1\}$ ad un punto.

Definizione 20. Fissato $x_0 \in X$ è detta *sospensione ridotta* di X lo spazio $\Sigma X := \frac{X \times [0,1]}{X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times [0,1]}$.

Osservazione 11. Usando la definizione è immediato verificare che $\Sigma(X \vee Y) = \Sigma X \vee \Sigma Y$.

Osservazione 12. Si ha che ΣX è omeomorfo a $S^1 \wedge X$ [Hat02, pag.12]. Infatti entrambi gli spazi sono quozienti di $X \times [0,1]$ dove facciamo collassare $X \times \{\{0\}, \{1\}\} \cup \{x_0\} \times [0,1]$. Più in generale vale che $\Sigma^n X$ è omeomorfo a $S^n \wedge X$: ciò discende dal fatto che $S^n \wedge S^m = S^{n+m}$, procedendo per induzione e usando l'associatività di \wedge e Σ :

$$\Sigma^n X = \Sigma(\Sigma^{n-1} X) \cong \Sigma(S^{n-1} \wedge X) \cong S^1 \wedge (S^{n-1} \wedge X) \cong (S^1 \wedge S^{n-1}) \wedge X \cong S^n \wedge X.$$

Facciamo un po' di osservazioni su come si comportano queste costruzioni rispetto al funtore \tilde{K} .

Osservazione 13. Vale $\tilde{K}(X \vee Y) \approx \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y)$. Infatti, se nella sequenza esatta del Teorema 4, al posto di X , prendiamo $X \vee Y$, e per A prendiamo X , avremo $X \vee Y / X = Y$ e dalla sequenza otteniamo un isomorfismo $\tilde{K}(X \vee Y) \rightarrow \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y)$ dato dalla restrizione a X e Y .

Osservazione 14. Essendo ΣX ottenuto da SX quozientando per $x_0 \times [0,1]$ che è contraibile, dal Lemma 4 segue $\tilde{K}(SX) \approx \tilde{K}(\Sigma X)$.

3.2 Il prodotto esterno

Ora definiamo un nuovo operatore, un prodotto tra elementi di $K(X)$ e $K(Y)$ che abbia come risultato un elemento di $K(X \times Y)$ nel modo seguente

$$\mu : K(X) \otimes K(Y) \rightarrow K(X \times Y)$$

$$\mu(a \otimes b) = p_X^*(a)p_Y^*(b)$$

dove p_X e p_Y sono le proiezioni su, rispettivamente, x e Y , e $p_X^*(a)p_Y^*(b)$ è il prodotto tra due elementi di $K(X \times Y)$.

Ora prima di procedere ci soffermiamo su $K(S^2)$ e sulla relazione $(H - 1)^2 = 0$ che abbiamo provato nella Proposizione 3; viene quindi naturale definire un omeomorfismo $\tilde{\mu} : \mathbb{Z}[H]/(H - 1)^2 \rightarrow K(S^2)$, e, fatta questa osservazione, possiamo enunciare il seguente teorema.

Teorema 5 (Teorema fondamentale del prodotto). *La mappa*

$$\xi : K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2 \rightarrow K(X \times S^2)$$

è un isomorfismo.

Corollario 1. *Prendendo per X un punto abbiamo che l'omomorfismo è un isomorfismo.*

3.3 Il prodotto esterno ridotto

Manca un ultimo concetto da analizzare, mettiamo sul tavolo alcuni risultati ottenuti nelle sezioni passate e combiniamoli; usiamo l'unico teorema che abbiamo dimostrato nella sezione sulle sequenze di spezzamento e le osservazioni fatte nella Sezione 3.1.

Vogliamo passare dal prodotto $K(X) \otimes K(Y) \rightarrow K(X \times Y)$ a un prodotto $\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \rightarrow \tilde{K}(X \wedge Y)$, per farlo esaminiamo questa sequenza esatta:

$$\tilde{K}(X \wedge Y) \xrightarrow{q^*} \tilde{K}(X \times Y) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(X \vee Y).$$

La prima freccia è il pullback di una proiezione a quoziente (ricordando che $X \wedge Y = \frac{X \times Y}{X \vee Y}$) e la seconda freccia invece è il pullback della inclusione $i : X \vee Y \rightarrow X \times Y$. Tenendo a mente l'isomorfismo $\tilde{K}(X \vee Y) \approx \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y)$ (si veda Osservazione 13) e prendendo p_X e p_Y proiezioni da $X \times Y$ a X o Y , siamo pronti per definire il prodotto esterno ridotto

$$\tilde{\mu} : \tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \rightarrow \tilde{K}(X \wedge Y).$$

Sia (x_0, y_0) il punto di incollamento per $X \vee Y$, presi $a \in \tilde{K}(X) = \ker(K(X) \rightarrow K(\{x_0\}))$ e $b \in \tilde{K}(Y) = \ker(K(Y) \rightarrow K(\{y_0\}))$, abbiamo che $p_X^*(a)$ si restringe a zero su $K(x_0 \times Y)$ e $p_Y^*(b)$ si restringe a zero in $K(X \times y_0)$, quindi il prodotto $p_X^*(a)p_Y^*(b)$ in $K(X \times Y)$ si annulla sia su $K(X \times y_0)$ che su $K(x_0 \times Y)$ e quindi in $\tilde{K}(X \wedge Y)$. In particolare, $p_X^*(a)p_Y^*(b) \in \tilde{K}(X \times Y)$ e usando la sequenza esatta sopra determina un solo elemento in $\tilde{K}(X \vee Y)$.

Un altro modo per descrivere il prodotto è usare il fatto, che la sequenza esatta si spezza attraverso $\tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y) \rightarrow \tilde{K}(X \times Y)$ data da $(a, b) \rightarrow p_X^*(a) + p_Y^*(b)$. Di conseguenza, $\tilde{K}(X \times Y) \approx \tilde{K}(X \wedge Y) \oplus \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y)$ e il prodotto definito su \tilde{K} può essere pensato come una riduzione di quello definito su K come mostrato

nel diagramma seguente:

$$\begin{array}{ccc}
K(X) \otimes K(Y) \approx (\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y)) \oplus \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y) \oplus \mathbb{Z} & & \\
\downarrow \mu & & \downarrow \star \\
K(X \times Y) \approx \tilde{K}(X \wedge Y) \oplus \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y) \oplus \mathbb{Z} & &
\end{array}$$

dove μ indica il prodotto esterno e \star indica il prodotto ridotto. Concludiamo notando che da questo diagramma si evince che anche il prodotto ridotto è un isomorfismo.

3.4 Il Teorema di Bott

Ora che abbiamo terminato “la linea” possiamo assemblare tutti gli ingredienti per enunciare il Teorema di Bott. La potenza del teorema sta nella possibilità di computare in maniera diretta i fibrati vettoriali e soprattutto mostrerà una sorta di periodicità nel computare i gruppi K delle sfere.

Partiamo dalla Osservazione 12 e ricordiamo anche che per la Osservazione 14 abbiamo $\tilde{K}(SX) = \tilde{K}(\Sigma X)$ e $S^n \wedge X \cong \Sigma^n X$, quindi $\tilde{K}(\Sigma^n X) \approx \tilde{K}(S^n X) \approx \tilde{K}(S^n \wedge X)$.

Teorema 6 (Teorema di Bott). *Sia H il fibrato canonico su S^2 e indichiamo con \star il prodotto esterno ridotto, allora l'omeomorfismo*

$$B : \tilde{K}(X) \rightarrow \tilde{K}(S^2 X)$$

$$B(E) = (H - 1) \star E$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Ora osserviamo che la mappa B è la composizione delle mappe

$$\tilde{K}(X) \rightarrow \tilde{K}(S^2) \otimes \tilde{K}(X) \rightarrow \tilde{K}(S^2 X).$$

La prima mappa associa a E l'elemento $(H - 1) \otimes E$. Per ciò che abbiamo visto nel Corollario 1 vale che $K(S^2) \approx \mathbb{Z}[H]/(H - 1)^2$, inoltre $\tilde{K}(S^2) = \ker(K(S^2) \xrightarrow{r} K(x_0) \approx \mathbb{Z})$ con $r(H) = 1$, per cui $\tilde{K}(S^2)$ è ciclico generato da $H - 1$. Di conseguenza la mappa $\tilde{K}(X) \rightarrow \tilde{K}(S^2) \otimes \tilde{K}(X)$ è un isomorfismo. La seconda mappa è un prodotto esterno ridotto ed è un isomorfismo per il Teorema fondamentale del prodotto 5 e l'osservazione fatta alla fine della sezione precedente. \square

Ora abbiamo uno strumento che ci permette di descrivere gli anelli $K(X)$ e $\tilde{K}(X)$, il primo risultato concerne (prevedibilmente) le sfere n -dimensionali.

Corollario 2. $\tilde{K}(S^{2n+1}) = \{0\}$ e $\tilde{K}(S^{2n}) \approx \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Iniziamo ricordando che $S^n \wedge S^m$ è omeomorfo a S^{n+m} , per il teorema di Bott 6 abbiamo quindi che $\tilde{K}(S^n)$ è determinato solo dall'essere pari o dispari di n . Ora quindi abbiamo bisogno di calcolare $\tilde{K}(S^1)$ e $\tilde{K}(S^2)$.

Richiamando il secondo Teorema di Biettività 2 abbiamo che i VB di dimensione m su S^1 sono in biezione con le classi di omotopia mappe $S^0 \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$; dato che $GL_m(\mathbb{C})$ è connesso per archi, tutte le mappa $S^0 \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$ sono omotope tra loro. I fibrati su S^1 sono quindi tutti banali da cui $0 = \tilde{K}(S^1) = \tilde{K}(S^{2n+1})$.

Il caso S^2 è ancora più semplice, infatti essendo la doppia sospensione di punti distinti omeomorfa a una sfera il teorema regge anche per S^0 i cui fibrati altro non sono che la somma di due fibrati uno su un punto, l'altro sul secondo, ed essendo i fibrati su un punto banali (caratterizzati solo dalla loro dimensione) che $\tilde{K}(S^0) \approx \mathbb{Z}$. \square

Concludiamo con un esempio.

Esempio 7. Calcoliamo l'anello \tilde{K} del toro $\tilde{K}(S^1 \times S^1) = \tilde{K}(S^1 \wedge S^1) \oplus \tilde{K}(S^1) \oplus \tilde{K}(S^1) = \tilde{K}(S^2) \oplus 0 \oplus 0 = \mathbb{Z}$; nel penultima uguaglianza abbiamo sfruttato la Proposizione 4.

Fonti

- [Hus66] Dale Husemoller. *Fibre Bundles*. Springer, 1966.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Hat03] Allen Hatcher. *Vector Bundles and K-Theory*. 2003. URL: <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html>.
- [Man08] Marco Manetti. *Topologia*. Springer, 2008.
- [Gil] Matthew Gills. *Topological K-theory and Bott Periodicity*. URL: <https://uu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1103965/FULLTEXT01.pdf>.

Ringraziamenti

Ringrazio i miei genitori. In particolare mia madre, che ha fatto di tutto per la mia felicità.

Ringrazio la prof.ssa Alessia Cattabriga che, con molta pazienza, mi ha accompagnato nella stesura di questa tesi e quindi alla conclusione di questo magnifico capitolo della mia vita.

Ringrazio Dio e tutte le persone magnifiche che ha messo sulla mia strada perché mi rendessero felice e mi facessero crescere.

Ringrazio la comunità di Villa San Giacomo, che è stata per 3 anni una casa piena di gioia, e le persone magnifiche che vi ho conosciuto: Caterina, Costantinos, Mariedda, Mattia, Totta, Giovanni, Giada, Stefano, Matteo, Martina Z. e Martina R., Filippo P., Gabriele, Flavio, Naeem, Marco, Don Marco, Eleonora, Olia, Zuzanna S. e Zuzanna R., Giulia, Edoardo, Tommaso B, Luca, Emanuele, Letizia.

Ringrazio i miei coinquilini che mi hanno sopportato in questo lungo ultimo anno: Tommaso Za. e Tommaso Zo., Benedetta B. e Benedetta S., Federica, Federico, Lucia e Joseph.

Ringrazio la comunità dei gesuiti e in particolare Loris, Cristiano e Franz per avermi accolto al Poggeschi.

Ringrazio i miei amici e compagni di avventure e risate interminabili: Chiara, Filippo C., Teo, Riccardo C., Luigi, Marta, Raffaele, Davide

Ringrazio coi loro nomi di battaglia tutti i ragazzi della Rainbow team per la serenità e le lezioni che mi hanno insegnato, e che continueranno a darmi: Steve, Mimmo, Colla, Pietro, Carroziere, Beppe, Ninni, Ciro e Teso.

E ringrazio i moltissimi che mi hanno aiutato senza che io lo sapessi o li ricordassi...