Alma Mater Studiorum · Universitá di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Il Problema di Ulam-Hammersley

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Fabrizio Caselli

Presentata da:
Olivia Carpeggiani

Anno Accademico 2023/2024

A mio nonno Gigi.

Introduzione

Lo studio asintotico della lunghezza massima delle sottosequenze crescenti di una permutazione aleatoria è noto, in letteratura, come il problema di Ulam-Hammersley. Questo per rendere onore al matematico polacco-americano Staniław Ulam, che fu il primo a menzionare la questione, e a John Hammersley, primo ad analizzare più seriamente il problema. Oggi, abbiamo una risposta molto soddisfacente ed elegante, grazie al lavoro dei matematici Anatoly Vershik e Sergei Kerov (1977) e Benjamin Logan e Lawrence Shepp (1977), che sono giunti in maniera indipendente allo stesso risultato. Per trovare il comportamento asintotico cercato, si è dovuto affrontare un problema di carattere più generale che unisce diverse discipline matematiche quali l'algebra, la combinatoria, la probabilità, il calcolo delle variazioni... La sua interdisciplinarietà, in particolare, lo rende un argomento piuttosto complicato. Per questo, nel corso della tesi non riusciremo a vedere nel dettaglio ogni aspetto, ma ci dedicheremo con maggiore cura alla parte combinatoria del problema. Noi vogliamo studiare l'andamento asintotico di ℓ_n per n che va all'infinito. Con ℓ_n intendiamo il valore atteso della lunghezza massima delle sottosequenze crescenti di una permutazione aleatoria di ordine n. Di preciso, il nostro obiettivo è dimostrare che il limite $\Lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\ell_n}{\sqrt{n}}$ è uguale a 2. Per mostrare questo fatto, dobbiamo passare attraverso un problema più generale che riguarda la forma limite di un tableaux di Young. Ma cosa c'entrano i tableaux di Young con la lunghezza massima delle sottosequenze crescenti di una permutazione? In che modo e in che senso, parlare di forma limite risolve il nostro problema iniziale? Come si è anticipato, la risposta a queste domande attraversa diverse materie. Noi cominciamo lo studio da un punto di vista combinatorio. Come prima cosa, cerchiamo di riformulare il problema in termini più comodi e dimostriamo la corrispondenza di Robinson-Schensted, grazie alla quale spostiamo lo studio delle sottosequenze crescenti di lunghezza massima, su quello dei tableau di Young e della loro forma. Con il concetto di forma limite si intende che, al crescere della dimensione, i diagrammi di Young associati a una permutazione aleatoria, tendono, con alta probabilità, ad assumere una forma sempre più vicina a una determinata Ω. Volendo andare in questa direzione, è necessario introdurre una misura

di probabilità sullo spazio dei tableaux di Young che costruiamo grazie a un corollario della corrispondenza di Robinson-Schensted. Questa misura è detta di Plancherel e per calcolare i pesi dati da essa, proviamo l'elegante formula dell'uncino, seguendo un approccio che unisce combinatoria e probabilità. Una volta terminato questo lavoro, siamo pronti per passare al livello successivo. Volendo effettuare uno studio asintotico, dobbiamo costruire uno spazio di funzioni che rappresentano le forme e fornire una versione asintotica della formula degli uncini. Per ottenere la forma limite dobbiamo risolvere un problema variazionale: vogliamo massimizzare la probabilità di un diagramma. Questo risulta equivalente a minimizzare un certo funzionale J. Per semplificare queste operazioni, si modifica lo spazio delle funzioni considerato inizialmente, ruotando il sistema di coordinate. In questo modo si giunge al teorema della forma limite, grazie al quale riusciamo a dimostrare che $\Lambda \geq 2$. Per la disuguaglianza opposta, si usano idee diverse che ricordano le argomentazioni usate nella dimostrazione della formula degli uncini. In particolare, si usa una seconda volta il teorema della probabilità totale ed entrano in campo i processi stocastici. Infine, dove possibile, riportiamo, a grandi linee, alcuni collegamenti con la teoria delle rappresentazioni. Nello specifico, accenniamo alla decomposizione della rappresentazione regolare del gruppo simmetrico come dimostrazione alternativa di un corollario della corrispondenza di Robinson-Schensted e vediamo un'applicazione del teorema della forma limite nella ricerca della dimensione massima delle rappresentazioni irriducibili del gruppo simmetrico.

Indice

Introduzione **i**

1 Preliminari e notazioni **1**

1.1 Permutazioni, sottosuccessioni e tableaux di Young 1

1.2 Spazi di probabilità e passeggiata aleatoria 3

1.3 Elementi di teoria delle rappresentazioni 5

2 La corrispondenza di Robinson-Schensted **11**

2.1 L'algoritmo di Robinson-Schensted 12

2.2 La misura di Plancherel 21

2.3 La formula dell'uncino 22

2.4 La decomposizione della rappresentazione regolare 28

3 Il Comportamento Asintotico di ℓ_n **31**

3.1 Il processo di crescita di Plancherel 32

3.2 La forma limite 35

3.3 Le rappresentazioni irriducibili di dimensione massima di S_n 41

Bibliografia **43**

Capitolo 1

Preliminari e notazioni

In questo primo capitolo ricordiamo alcune nozioni basilari sulle permutazioni e introduciamo notazioni e strumenti utili per il lavoro combinatorio che ci aspetta. In particolare parliamo di sottosequenze crescenti di lunghezza massima $L(\sigma)$ e introduciamo i diagrammi e i tableaux di Young. Il motivo per cui li presentiamo sarà più chiaro dopo il capitolo 2. In secondo luogo, ci soffermiamo su alcuni concetti di teoria della probabilità che è importante tenere a mente nella loro definizione generale, in quanto noi li adattiamo al campo di studio su cui lavoriamo. Un esempio è la passeggiata aleatoria lungo gli uncini, che sfruttiamo nella sezione 2.3. Infine, enunciamo alcuni risultati di teoria delle rappresentazioni dei gruppi finiti che ci servono per fornire un'interpretazione da un punto di vista diverso ad alcuni concetti introdotti in chiave combinatoria.

1.1 Permutazioni, sottosuccessioni e tableaux di Young

Consideriamo il gruppo simmetrico S_n. Sia $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n))$ una permutazione scritta in notazione a una riga. Allora, definiamo una sua sottosequenza come una sequenza $\pi = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), ..., \sigma(i_k))$ con $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$. Essa si dice crescente se $\sigma(i_1) < \sigma(i_2) < ... < \sigma(i_k)$, decrescente se $\sigma(i_1) > \sigma(i_2) > ... > \sigma(i_k)$, monotona se è decrescente o crescente. La lunghezza massima di una sottosequenza crescente/decrescente di σ, rispettivamente, è

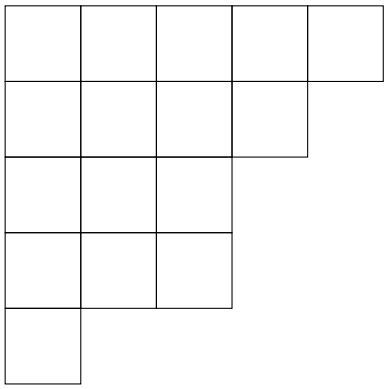
$$L(\sigma) = \max\{k : \sigma \text{ ha una sottosequenza crescente di lunghezza } k\}$$
$$D(\sigma) = \max\{k : \sigma \text{ ha una sottosequenza decrescente di lunghezza } k\}$$

Inoltre definiamo

$$\ell_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} L(\sigma), \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{1.1}$$

Notiamo che ℓ_n è la media di $L(\sigma)$, al variare di tutte le permutazioni di ordine n. Noi siamo interessati a studiare il comportamento asintotico di ℓ_n per n che va all'infinito. Prima di poter analizzare ℓ_n, però, dobbiamo attraversare una strada che permea varie discipline della matematica e ci semplifica i conti. Come prima cosa, introduciamo i diagrammi e tableau di Young. Dato $n \in \mathbb{N}$, una sua partizione intera, denotata $\lambda \vdash n$, è un vettore $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$, dove $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k$ e $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$. Sia $\mathcal{P}(n)$ l'insieme delle partizioni di n. Denotiamo, infine, con $|\lambda| = n$ il *peso* di λ. Un modo pratico di rappresentare una partizione intera è attraverso i diagrammi di Young. Data $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k) \vdash n$, definiamo il diagramma di Young di forma λ come un insieme di "scatole", dette celle, disposte in righe in modo che nella $i-$esima riga ci siano λ_i celle. Noi seguiamo la notazione inglese allineando le righe a sinistra e disegnandole dall'alto al basso.

Esempio 1.1. Sia $\lambda = (5, 4, 3, 3, 1) \vdash 16$, il diagramma di Young di forma λ è :



Dato un diagramma di Young di forma λ, è possibile riempire le sue celle con gli interi da 1 a n mantenendoli in ordine crescente sia sulle righe che sulle colonne. Un diagramma etichettato in questo modo si chiama tableaux di Young Standard di forma λ. Esistono più modi per compilare uno stesso diagramma di Young seguendo le regole appena descritte:

Esempio 1.2. I tableaux di Young di forma $\lambda = (2, 2) \vdash 4$ sono i seguenti:

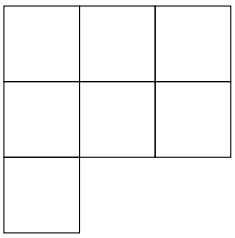
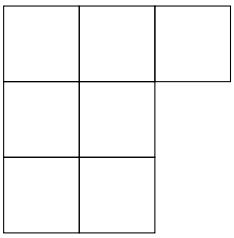
1	2
3	4

1	3
2	4

Denotiamo con d_λ il numero di tableaux di Young di forma λ. Allora, posto $SYT(\lambda) = \{\text{tableaux di Young Standard di forma } \lambda\}$, abbiamo che $|SYT(\lambda)| = d_\lambda$. Nell'esempio 1.2, $d_\lambda = 2$.

Data una partizione λ di n, definiamo la sua partizione coniugata λ' come la partizione ottenuta leggendo la lunghezza delle colonne del diagramma di Young di forma λ. Allora se P è il diagramma di Young di forma λ, quello di forma λ' si ottiene da P trasponendo righe e colonne e si indica con P^T.

Esempio 1.3. Sia $\lambda = (3, 3, 1)$, allora $\lambda' = (3, 2, 2)$ e i diagrammi di Young corrispondenti P e P^T sono rispettivamente a sinistra e a destra:

$P =$  $P^T =$ 

Infine, dato un diagramma di Young di forma λ, denotiamo con λ_1 la sua prima riga e con $|\lambda_1|$ la lunghezza della prima riga. Con queste notazioni, allora, $|\lambda'_1|$ è la lunghezza della prima colonna.

1.2 Spazi di probabilità e passeggiata aleatoria

Volendo studiare l'andamento asintotico di ℓ_n per $n \to \infty$, dobbiamo costruire uno spazio di probabilità apposito su cui studiare la forma limite, per questo è utile ricordare alcune definizioni e risultati di base. Innanzitutto, uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è il dato di un insieme non vuoto Ω detto spazio campionario, una σ-algebra $\mathcal{F}$ (cioè una famiglia di insiemi contenente il vuoto, chiusa per unioni numerabili e rispetto al complementare) e, infine, una misura di probabilità P, ossia una mappa $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ tale che $P(\emptyset) = 0, P$ è σ-additiva [1] e $P(\Omega) = 1$. Gli elementi $\omega \in \Omega$ sono gli esiti, mentre gli elementi di $A \in \mathcal{F}$ si chiamano eventi. Se lo spazio campionario ha cardinalità finita o numerabile, lo spazio di probabilità si dice discreto.

Osservazione 1.4. Definire una misura di probabilità su uno spazio discreto è equivalente ad assegnare a ogni esito una probabilità $p \in [0, 1]$. Infatti, supponiamo di prendere $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ discreto e mettiamo come σ-algebra $\mathcal{F}$ l'insieme delle parti di Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$. Dunque se $A \in \mathcal{F}$, allora $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$, con $p_\omega \in [0, 1]$. Viceversa se numero lo spazio campionario $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$ e ho una successione di numeri reali $p_n \geq 0$ tali che $\sum_{n \geq 1} p_n = 1$, allora posso definire una misura di probabilità su Ω nel seguente modo: preso $A \subset \Omega, P(A) = \sum_{\omega_n \in A} p_n$.

[1] Una misura μ è σ-additiva se, data una famiglia di eventi $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ disgiunti a due a due, allora $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n$

Dato un evento $B \in \mathcal{F}$ con $P(B) \neq \emptyset$, si può definire la probabilità condizionata.

Definizione 1.5. *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità. Sia $B \in \mathcal{F}$ con $P(B) \neq \emptyset$. Allora per ogni $A \in \mathcal{F}$, definisco la probabilità di A condizionata a B come segue:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Passiamo dunque a ricordare il seguente:

Teorema 1.6 (Teorema della Probabilità Totale)**.** *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità. Sia $(B_n)_{n\geq 1}$ una partizione di Ω finita o numerabile, cioè $B_n \in \mathcal{F}$ tale che $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Allora per ogni $A \in \mathcal{F}$,*

$$P(A) = \sum_{n\geq 1} P(A \cap B_n)P(B_n).$$

Inoltre, sugli spazi di probabilità è possibile definire le variabili aleatorie, con l'introduzione delle quali si possono formalizzare matematicamente diversi fenomeni reali. Un esempio è la **passeggiata aleatoria** come modello del moto casuale di una particella. Il caso più semplice è quello unidimensionale in cui la particella si muove avanti o indietro a intervalli unitari e con passi indipendenti l'uno dall'altro. Definiamo per ogni istante $n = 1, 2, 3, ...$ la variabile aleatoria X_n che assume il valore $+1$ con probabilità p e -1 con probabilità $1 - p$.

$$\begin{cases} P(X_n = 1) = p \\ P(X_n = -1) = 1 - p \end{cases}$$

Supponiamo che le X_n siano indipendenti per ogni n. Allora la variabile ottenuta sommando i vari passi $X_1 + X_2 + ... + X_n + ...$ è il modello probabilistico che rappresenta il moto casuale unidimensionale di una particella.

In termini aleatori, possiamo riscrivere la (1.1) tramite il valore atteso. Ridefiniamo

$$\ell_n = \mathbb{E}[L(\sigma_n)], \tag{1.2}$$

dove σ_n è una permutazione aleatoria in S_n secondo la distribuzione uniforme. Allora, il nostro studio si sposta sul comportamento asintotico dell'aspettazione della variabile aleatoria dalla lunghezza di σ_n. Perciò, è utile tenere a mente la definizione di limite in probabilità.

Definizione 1.7. *Siano $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}, X$ variabili aleatorie su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Diciamo che la successione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tende in probabilità a X se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X_n - X| > \varepsilon) \longrightarrow 0. \tag{1.3}$$

In tal caso, scriviamo $X_n \xrightarrow{P} X$.

Infine, diamo la definizione di processo stocastico.

Definizione 1.8. *Sia $m\mathcal{F}$ l'insieme di tutte le variabili aleatorie a valori in $\mathbb{R}^d$ definite su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Un processo stocastico X è una funzione a valori aleatori d-dimensionali*

$$X : I \to m\mathcal{F} \tag{1.4}$$

$$t \mapsto X_t \tag{1.5}$$

Se $d = 1$, parliamo di processo stocastico reale. Se I è finito o numerabile, parliamo di processo stocastico discreto. Se $I = \mathbb{N}$, possiamo scrivere il processo sotto forma di successione di variabili aleatorie:

$$X = (X_n)_{n=1}^{\infty}.$$

1.3 Elementi di teoria delle rappresentazioni

Le rappresentazioni sono un modo di vedere i gruppi astratti attraverso le matrici. Prima di darne la definizione precisa, ricordiamo cos'è un'algebra.

Definizione 1.9. *Sia $\mathbb{K}$ un campo. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Se per ogni $x, y, z \in V, a, b \in \mathbb{K}$, è ben definita un'operazione binaria*

$$* : V \times V \to V$$

che verifica le seguenti proprietà:

1. $(x + y) * z = x * z + y * z$;
2. $x + (y * z) = x * y + x * z$;
3. $(ax) * y = a(x * y)$;
4. $x * (by) = b(x * y)$;

*allora V è un'**algebra** su $\mathbb{K}$.*

Definizione 1.10. *Sia dato un gruppo finito G. Una **rappresentazione** di G è un omomorfismo di gruppi*

$$\rho : G \longrightarrow GL(V), \tag{1.6}$$

dove V è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione d e $GL(V)$ è l'insieme degli endomorfismi invertibili di V. Chiamiamo d la dimensione o grado della rappresentazione.

	g	g^2	g^3	ε
ρ_1	1	1	1	1
ρ_2	i	-1	$-i$	1
ρ_3	-1	1	-1	1
ρ_4	$-i$	-1	i	1

Tabella 1.1: Tabella dei caratteri

Alla luce di questa definizione, possiamo vedere ogni elemento del gruppo come matrice invertibile $d \times d$. In particolare, poichè ρ è omomorfismo di gruppi, valgono

$$\rho(\varepsilon) = Id_d \tag{1.7}$$

$$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h) \quad \forall g, h \in G. \tag{1.8}$$

Osserviamo che in questo modo la definizione è ben posta perchè la (1.7) e la (1.8) implicano che, per ogni g in G, $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$ e quindi effettivamente $\rho(g) \in GL(V)$ per ogni g.

Facciamo qualche esempio di rappresentazioni di grado uno.

Esempio 1.11. Consideriamo

$$\forall g \in G, \quad \rho(g) = (1).$$

Osserviamo che questa è una rappresentazione, infatti ρ soddisfa le proprietà (1.7) e (1.8). Questa rappresentazione è detta **rappresentazione banale**.

Esempio 1.12 (Rappresentazione di grado uno del gruppo ciclico C_n). Consideriamo $C_n = \{g, g^2, g^3, ..., g^n = \varepsilon\}$ il gruppo ciclico di ordine n. Per avere una rappresentazione di dimensione uno, vogliamo $\rho(g) = (c)$ con c scalare. Per essere un omomorfismo di gruppi deve valere

$$(1) = \rho(\varepsilon) = \rho(g^n) = (c^n).$$

Dunque c deve essere una radice $n-$esima dell'unità e, di conseguenza, esistono esattamente n rappresentazioni di grado 1 del gruppo ciclico di ordine n, una corrispondente a ogni radice. Vediamo il caso $n = 4$, disponendo i valori delle quattro rappresentazioni sulla tabella 1.1. Chiamiamo $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ le rappresentazioni associate rispettivamente a $1, i, -1, -i$.

Esempio 1.13 (Rappresentazioni di grado 1 di S_n). Vediamo ora le rappresentazioni di dimensione uno del gruppo simmetrico di ordine n. Si può dimostrare che le rappresentazioni irriducibili di un gruppo finito sono tante quante le classi di coniugio del gruppo.

Nel caso del gruppo simmetrico, a ogni partizione intera $\lambda \vdash n$ corrisponde una rappresentazione irriducibile V_λ. In dimensione uno, $V = \mathbb{C}$ e abbiamo due rappresentazioni possibili

$$\pi \to (1) \qquad\qquad \pi \to (\mathrm{sgn}(\pi))$$

La prima è la rappresentazione banale, la seconda è detta **rappresentazione segno** e corrispondono rispettivamente ai diagrammi:

Si noti che in entrambi i casi $1 = |SYT(\lambda)| = d_\lambda = f_\lambda = \dim(V_\lambda) = \dim(\mathbb{C})$.

Esempio 1.14. Consideriamo il gruppo simmetrico di ordine n. Definiamo la *rappresentazione fondamentale* di S_n come segue,

$$\forall \pi \in S_n, \quad \rho(\pi) = (x_{i,j})_{n\times n}, \text{ dove } x_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ se } \pi(j) = i; \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Osserviamo che questa rappresentazione ha grado n. Le colonne della matrice sono i vettori della base canonica disposti in ordine in base alla permutazione che rappresenta.

Ora vediamo un' altra struttura algebrica che fornisce una definizione equivalente di rappresentazione di un gruppo.

Definizione 1.15 (G-modulo)**.** *Siano V uno spazio vettoriale e G un gruppo finito. V è un G-modulo se esiste un omomorfismo di gruppi $\rho : G \to GL(V)$ o, equivalentemente, se esiste una moltiplicazione tra gli elementi di V e quelli di G tale che:*

1. $g\boldsymbol{v} \in V$;
2. $g(c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}) = c(g\boldsymbol{v}) + d(g\boldsymbol{w})$;
3. $(gh)\boldsymbol{v} = g(h\boldsymbol{v})$;
4. $\varepsilon\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

Osservazione 1.16. Osserviamo che con la definizione di questa moltiplicazione stiamo dando un modo conciso di scrivere l'omomorfismo della definizione 1.10. Infatti, con $g\mathbf{v}$ indichiamo l'applicazione della matrice $\rho(g)$ al vettore $\mathbf{v}$. Le 4 proprietà elencate sopra ci permettono di interpretare g come applicazione da V in sè, lineare e invertibile. Possiamo passare facilmente da una nozione all'altra di rappresentazione. Infatti, data una rappresentazione ρ di grado d, sia $V = \mathbb{C}^d$ su cui mettiamo la moltiplicazione data da

$$g\mathbf{v} := \rho(g)\mathbf{v},$$

dove l'operazione a destra è il prodotto matrice per vettore. Viceversa, se abbiamo un G-modulo V, prendiamo una base $\mathcal{B}$ di V e scriviamo $\rho(g)$ come la matrice associata alla trasformazione lineare g rispetto a questa base.

Se su un insieme S esiste un prodotto con gli elementi di G che verifica le proprietà $1, 3$ e 4, allora l'omomorfismo di gruppi da cui deriva quel prodotto è un'azione di G su S.

Data un'azione di gruppi di G su S, è sempre possibile trasformarla in un G-modulo. Definiamo $\mathbb{C}S$ come lo spazio vettoriale generato da S su $\mathbb{C}$. L'azione di G su S può essere estesa a $\mathbb{C}S$ per linearità e in questo modo otteniamo che $\mathbb{C}S$ è un G-modulo di grado $|S|$. Chiamiamo la rappresentazione associata *rappresentazione di permutazione*. Vediamo il motivo di questa terminologia con un esempio.

Esempio 1.17. Sia $S = \{1, ..., n\}$ e S_n il gruppo simmetrico con la sua naturale azione su S. Allora abbiamo $\mathbb{C}S = \{c_1\mathbf{1} + ... + c_n\mathbf{n},\ c_i \in \mathbb{C} \quad \forall i\}$ con l'azione

$$\pi(c_1\mathbf{1} + ... + c_n\mathbf{n}) = c_1\pi(\mathbf{1}) + ... + c_n\pi(\mathbf{n}).$$

Per fare un esempio concreto prendiamo $n = 3$. Se vogliamo determinare la matrice associata a $\pi = (1, 2)$ consideriamo la base $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ di $\mathbb{C}S$ e calcoliamo π su tale base:

$$\pi(\mathbf{1}) = \mathbf{2}; \pi(\mathbf{2}) = \mathbf{1}; \pi(\mathbf{3}) = \mathbf{3}$$

Allora la matrice rispetto a questa base è

$$\rho(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolando tutte le matrici si ottiene la *rappresentazione fondamentale* di S_3.

Esempio 1.18 (**Rappresentazione Regolare**). Un gruppo G agisce su se stesso per moltiplicazione, le proprietà 1,3,4 sono verificate per definizione di operazione di gruppo.

Allora, in questo caso chiamiamo

$$\mathbb{C}[G] = \{c_1\mathbf{g_1} + ... + c_n\mathbf{g_n} \quad : c_i \in \mathbb{C}\}$$

l'algebra di gruppo di G. Chiamiamo la **rappresentazione regolare** di G quella data da $V = \mathbb{C}[G]$ e dalla moltiplicazione

$$g \cdot (\sum_{h \in G} c_h \mathbf{h}) := \sum_{h \in G} c_h(\mathbf{gh}).$$

Osservazione 1.19. La rappresentazione regolare del gruppo simmetrico di ordine n S_n ha grado $n!$ perchè è un tipo particolare di rappresentazione di permutazione con $S = S_n$ e $\mathbb{C}S = \mathbb{C}[S_n] = \{\sum_{\pi \in S_n} c_\pi \pi, c_\pi \in \mathbb{C}\}$.

Vogliamo arrivare ad enunciare un importante teorema di teoria delle rappresentazioni che ci permette di spezzare una rappresentazione di grado d nella somma diretta di rappresentazioni irriducibili. Ma procediamo per step e prima definiamo cos'è una rappresentazione irriducibile e cosa intendiamo per somma diretta di rappresentazioni.

Definizione 1.20. *Una **sottorappresentazione** di una rappresentazione (V, ρ) è un sottospazio vettoriale W di V che sia stabile rispetto all'azione di G, cioè tale che per ogni $g \in G$, si abbia $g\mathbf{w} \in W$ per ogni $\mathbf{w} \in W$. Allora W è una rappresentazione di G rispetto alla restrizione*

$$\rho_{|W}(g) = \rho(g)_{|W}.$$

*Chiamiamo una rappresentazione **irriducibile** se ha solo sottorappresentazioni banali, ossia $W = \{0\}, W = V$.*

Definizione 1.21. *Siano V_1, V_2 due rappresentazioni di G.*

La somma diretta di V_1 e V_2 è la rappresentazione corrispondente allo spazio $V_1 \bigoplus V_2$ su cui vale

$$g \cdot (\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) = g \cdot \mathbf{v_1} + g \cdot \mathbf{v_2}$$

Un morfismo tra le due rappresentazioni è un'applicazione lineare $\phi : V_1 \to V_2$ tale che

$$g \cdot \phi(\mathbf{v}) = \phi(g \cdot \mathbf{v})$$

per ogni $g \in G$, per ogni $\mathbf{v} \in V_1$. Allora, per ogni elemento del gruppo, il seguente diagramma è commutativo.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\rho_1(g)"] \arrow[d, "\phi"'] & V_1 \arrow[d, "\phi"] \\ V_2 \arrow[r, "\rho_2(g)"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

Con queste definizioni, possiamo enunciare il seguente importante:

Teorema 1.22 (Teorema di Maschke)**.** *Sia G un gruppo finito e V una rappresentazione di dimensione finita di G. Allora:*

(1): *Esiste una decomposizione di V come somma diretta di rappresentazioni irriducibili V_i.*

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i.$$

(2): *Data una rappresentazione irriducibile I, il numero di componenti della somma diretta isomorfe a I non dipende dalla decomposizione.*

(3): *La decomposizione della rappresentazione regolare $\mathbb{C}[G]$ di G ha esattamente $\dim I$ componenti isomorfe a I.*

Osservazione 1.23. Dal punto ***(3)*** del teorema sopra, segue che, se V è la rappresentazione regolare,

$$V = \bigoplus_{i} V_i^{\dim(V_i)}.$$

E dunque si ha:

$$\dim(V) = \sum_{i} (\dim(V_i))^2 \tag{1.9}$$

dove la somma è estesa a tutte le rappresentazioni irriducibili di G.

Capitolo 2

La corrispondenza di Robinson-Schensted

In questo capitolo facciamo un passo indietro ed entriamo nel vivo della parte combinatoria di questa tesi. Prima di studiare il comportamento asintotico di $L(\sigma_n)$ come variabile aleatoria, consideriamo la sua definizione discreta (1.1) e partiamo da una domanda: presa $\sigma \in S_n$ secondo la distribuzione uniforme, quanto ci aspettiamo sia grande $L(\sigma)$? Volendo far crescere sempre di più la dimensione, ci riconduciamo ad oggetti che ci permettono di visualizzare effettivamente il problema: i diagrammi di Young. Tutto ciò è possibile grazie alla corrispondenza di Robinson-Schensted, che mette in relazione biunivoca le permutazioni e le coppie di tableaux di Young della stessa forma. Infatti, da questa, otteniamo anche la formula $n! = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2$. Successivamente, iniziamo a spostarci in una dimensione più aleatoria e cerchiamo una distribuzione sui diagrammi di Young che sia equivalente a quella uniforme considerata sulle permutazioni. Così, sempre sfruttando la corrispondenza di Robinson-Schensted, arriviamo alla misura di Plancherel. In seguito, continuiamo la nostra "semplificazione" del problema, dimostrando la formula dell'uncino, che ci consente di calcolare i pesi dati dalla misura di Plancherel e fornisce un algoritmo per generare in maniera aleatoria un tableaux di Young standard, una volta assegnata la forma. La dimostrazione della formula dell'uncino testimonia l'interdisciplinarietà di questa tesi, infatti coinvolge combinatoria, algebra e probabilità. Infine, vediamo un collegamento con le rappresentazioni del gruppo simmetrico e diamo una dimostrazione alternativa della formula $n! = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2$, che, oltre ad avere un'interpretazione in chiave combinatoria, è un importante risultato di teoria delle rappresentazioni.

2.1 L'algoritmo di Robinson-Schensted

Dovendo considerare dimensioni grandi, non è sempre immediato, data una permutazione, determinare la lunghezza massima delle sue sottosequenze crescenti esaminandole singolarmente. Dunque cerchiamo un modo per rappresentare $\sigma \in S_n$ che ci semplifichi il conto. L'algoritmo di Robinson-Schensted fornisce una risposta visiva a questo problema. Consiste nel riordinare gli elementi di una permutazione disponendoli su un tableaux di Young. Il motivo per cui risolve la questione in maniera grafica sarà più chiaro tra qualche riga. Per adesso, concentriamoci sull'algoritmo. Prendiamo $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \in S_n$. Al passo (1) scriviamo σ_1 e consideriamo σ_2. Se $\sigma_2 > \sigma_1$, mettiamo σ_2 a destra di σ_1, altrimenti σ_2 "spinge giù" σ_1 e dunque crea una seconda riga. Similmente, al passo (i), consideriamo σ_{i+1}. Se è maggiore dell'ultimo numero che compare sulla prima riga, lo scriviamo in fondo ad essa; altrimenti se esiste un σ_j nella prima riga con $\sigma_{i+1} < \sigma_j$, consideriamo il minimo σ_j tale che $\sigma_{i+1} < \sigma_j$, allora σ_{i+1} "spinge giù " σ_j e, se non esiste già una seconda riga, la creiamo allineandola a sinistra con la prima. Altrimenti, eseguiamo lo stesso controllo nella seconda riga per capire dove posizionare σ_j. Se esiste un σ_l nella seconda riga con $\sigma_j < \sigma_l$, allora scriviamo σ_j al posto del minore tra questi σ_l e poi procediamo in questo modo nelle righe inferiori. Una volta inseriti tutti gli elementi di σ, abbiamo ottenuto, per costruzione, un tableaux di Young standard, detto *tableaux di inserimento*. Durante questo procedimento è possibile generare un secondo tableaux: inserendo a ogni passo (i) la cella che è stata aggiunta nel tableaux di inserimento, questa volta, con etichetta i. Q è detto *tableaux di registrazione* e, per costruzione, ha la stessa forma di P. Ma facciamo un esempio numerico esplicito per comprendere meglio l'algoritmo.

Esempio 2.1. Sia $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 7 & 9 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in S_9$. Vediamo i passi per ottenere il tableaux di inserimento che denotiamo P. Alla fine riportiamo anche il tableaux di registrazione Q.

$$\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3\\\hline 2 \\\cline{1-1}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5\\\hline 2 \\\cline{1-1}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 & 7\\\hline 2 \\\cline{1-1}\end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 & 7 & 9\\\hline 2 \\\cline{1-1}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 & 6 & 9\\\hline 2 & 7 \\\cline{1-2}\end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 & 6 & 9\\\hline 2 & 5 \\\cline{1-2} 7 \\\cline{1-1}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 & 6 & 8\\\hline 2 & 5 & 9 \\\cline{1-3} 7 \\\cline{1-1}\end{array}$$

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 & 6 & 8\\\hline 2 & 5 & 9 \\\cline{1-3} 7 \\\cline{1-1}\end{array} \qquad Q = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 & 5 & 6\\\hline 3 & 7 & 9 \\\cline{1-3} 8 \\\cline{1-1}\end{array}$$

L'esempio ci suggerisce quello che sarà il contenuto della corrispondenza di Robinson-Schensted, tuttavia manca ancora qualche passaggio prima di poterla enunciare. Innanzitutto, l'algoritmo visto sopra, grazie al tableaux di registrazione, è reversibile. A partire dai due tableaux di Young, infatti, è possibile risalire alla permutazione da cui si era partiti; per fare ciò, si usa l'algoritmo di Robinson-Schensted inverso. Guardando il tableaux di registrazione si vede qual è l'ultima cella aggiunta, considerando quella casella nel tableaux di inserimento, posta x la sua etichetta, la si "porta su" eliminando quella cella e scambiando x con il maggiore tra gli elementi minori di x contenuti nella riga sopra. Si continua così finché un elemento non "salta fuori" dalla prima riga. Tale numero è l'immagine di n tramite la permutazione. Si procede in questo modo fino a che non si è cancellato tutto il tableaux di inserimento. Anche in questo caso, risulterà tutto più chiaro dopo un esempio.

Esempio 2.2. Siano P e Q i tableaux di inserimento e di registrazione dell'esempio precedente. Vediamo che applicando l'algoritmo di Robinson-Schensted inverso si arriva alla permutazione σ da cui eravamo partiti nell'esempio 2.1.

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 & 6 & 8 \\ \hline 2 & 5 & 9 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-3} 7 & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad Q = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 7 & 9 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-3} 8 & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

La cella verde in Q indica che l'ultima cella ad essere stata aggiunta in P, è quella gialla, che contiene il nove. Se guardo nella prima riga, il numero maggiore tra quelli minori di nove è otto. Dunque sostituisco l'otto con il nove e l'otto salta fuori dalla prima riga.

$$P' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \multicolumn{4}{c}{} & 8 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 6 & 9 \\ \hline 2 & 5 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-2} 7 & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} & & & & 8 \end{pmatrix}$$

Ora guardo la penultima cella aggiunta in P, è quella contenente il sette. Allora portandolo su, spinge in alto il cinque, che va al posto del 4 che salta fuori.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 & 6 & 9 \\ \hline 2 & 5 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-2} 7 & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 & 6 & 9 \\ \hline 2 & 7 & 5 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-3}\end{array}$$

$$P'' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \multicolumn{2}{c}{} & 4 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \hline 1 & 3 & 5 & 6 & 9 \\ \hline 2 & 7 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} & & & & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Ora è il turno della cella che, nel nuovo tableaux P'' contiene il sette, che butta fuori il sei. Dunque $\sigma = \begin{pmatrix} & & & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$. Poi abbiamo il nove nella prima riga, il sette e successivamente il cinque, per cui $\sigma = \begin{pmatrix} & & 5 & 7 & 9 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ e il tableaux rimanente è

$$\tilde{P} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Il due spinge fuori l'uno e infine escono prima il tre poi il due. Abbiamo ottenuto quindi

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 7 & 9 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Il tassello mancante per giungere al nucleo di questa sezione è un lemma che spiega il motivo per cui abbiamo introdotto i tableaux di Young per trovare una risposta visiva alla nostra domanda iniziale: come possiamo determinare $L(\sigma)$?

Lemma 2.3. *Sia $\sigma \in S_n$. Allora $L(\sigma) = |\lambda_1|$, ove λ_1 è la prima riga del diagramma di Young associato a σ tramite l'algoritmo di Robinson-Schensted.*

Dimostrazione. Per dimostrare che $L(\sigma) = |\lambda_1|$, procediamo provando le due disuguaglianze.

[Primo:] $L(\sigma) \leq |\lambda_1|$. Sia $\sigma \in S_n$ e siano P e Q i tableaux di Young associati a σ tramite l'algoritmo di Robinson-Schensted. Consideriamo $(\sigma(i_1), \sigma(i_2), ..., \sigma(i_k))$ una sottosequenza crescente di σ di lunghezza massima, dunque $L(\sigma) = k$. Dal momento che $\sigma(i_1) > \sigma(i_2) > ... > \sigma(i_k)$, ogni volta che viene inserito uno di questi elementi, nel tableaux P, deve posizionarsi più a destra destra dell'elemento precedente contenuto nella sottosequenza. Quindi, se denotiamo la lunghezza della prima riga con $s = |\lambda_1|$, abbiamo che $k \leq s$.

[Secondo:] $L(\sigma) \geq |\lambda_1|$. Consideriamo la prima riga di P,

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & \cdots & x_s \\ \hline \end{array}.$$

Vogliamo dimostrare che è possibile estrarre una sottosequenza crescente a partire dal diagramma. Sicuramente $x_s > x_{s-1}, ..., x_1$, per cui è un buon candidato per essere l'ultimo elemento di una sottosequenza crescente di σ. Nella colonna $s-1$, prendiamo l'elemento che era nella prima riga quando x_s è stato aggiunto e lo scriviamo come penultimo elemento della sottosequenza. Procedendo in questo modo su ogni colonna di P otteniamo a una sottosequanza di σ crescente di lunghezza s. Per definizione di $L(\sigma)$, di sicuro vale: $s \leq k$.

□

Esempio 2.4. Sia $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 7 & 9 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in S_9$, come nell'esempio 2.1. Allora il tableaux di inserimento associato è:

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 6 & 8 \\ \hline 2 & 5 & 9 \\ \cline{1-3} 7 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Osserviamo che $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ è una sottosequenza crescente di σ e che non esistono sottosequenze crescenti di σ di lunghezza sei. Per cui $L(\sigma) = 5$, che è proprio la lunghezza della prima riga del tableaux P.

Siamo ora pronti per enunciare l'importante teorema già anticipato più volte nelle sezioni precedenti.

Teorema 2.5 (Corrispondenza di Robinson-Schensted)**.** *Per ogni permutazione $\sigma \in S_n$ esiste un'unica tripla (λ, P, Q) dove P e Q sono i due tableaux di Young di forma λ di inserimento e di registrazione determinati dall'algoritmo di Robinson-Schensted. Questa corrispondenza è biunivoca e inoltre*

$$L(\sigma) = |\lambda_1| \tag{2.1}$$

Dimostrazione. Il fatto che sia una corrispondenza biunivoca è una conseguenza diretta dell'algoritmo di Robinson-Schensted inverso, per cui, data una tripla (λ, P, Q), esiste un'unica permutazione σ corrispondente. La relazione (2.1) segue dal Lemma 2.3 □

Corollario 2.6. *Per ogni $n \geq 1$, si ha:*

$$\sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2 = n! \tag{2.2}$$

Dimostrazione. Per il Teorema 2.5, esiste una corrispondenza biunivoca tra le permutazioni e le coppie di tableaux di Young standard della stessa forma, al variare della forma. Dunque

$$n! = |S_n| = \sum_{\lambda \vdash n} |SYT(\lambda)|^2 = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2$$

□

Osservazione 2.7. Questa dimostrazione fornisce un'interpretazione combinatoria della relazione (2.2), che, in realtà, è un importante risultato di teoria delle rappresentazioni[1].

Osservazione 2.8. Grazie al Teorema 2.5, la parte dell'algoritmo più rilevante per il nostro studio è semplicemente la forma λ dei due tableaux. In particolare, la prima riga del diagramma di Young di forma λ.

[1] si veda la sezione 2.4

Osserviamo che l'algoritmo di Robinson-Schensted non è affatto simmetrico, infatti P e Q giocano due ruoli completamente diversi e, inoltre, la procedura descritta tratta in modo decisamente diverso righe e colonne. Per questo risulta particolarmente sorprendente il seguente fatto.

Teorema 2.9. *Sia $\sigma = (x_1, x_2, ..., x_n) \in S_n$, sia (λ, P, Q) la tripla associata a σ tramite il Teorema 2.5. Allora valgono i seguenti:*

(1) : *Se (μ, P', Q') è la tripla associata alla permutazione "capovolta" $\bar{\sigma} = (x_n, x_{n-1}, ..., x_1)$, allora $P' = P^T$ e $\mu = \lambda'$.*

(2) : *Se (μ, P', Q') è la tripla associata alla permutazione inversa σ^{-1}, allora $P' = Q, Q' = P$ e $\mu = \lambda$.*

Prima di procedere con la dimostrazione, abbiamo bisogno di alcuni strumenti. Per prima cosa, osserviamo che attraverso l'algoritmo di Robinson-Schensted possiamo definire degli operatori che inseriscono un elemento in un tableau. Precisamente, l'algoritmo genera una successione crescente di tableaux parziali che parte dal vuoto e, aggiungendo una cella a ogni passo, arriva al tableaux di inserimento P. Consideriamo un tableaux parziale $\tilde{P}$ e x un elemento non appartenente a $\tilde{P}$. Allora per inserire per riga x in $\tilde{P}$, procediamo seguendo le regole dell'algoritmo di Robinson-Schensted. Chiamiamo r_x l'operatore di inserimento per riga che svolge il lavoro appena descritto. Dunque, se $\sigma = (x_1, x_2, ..., x_n)$, il suo tableaux di inserimento associato tramite la corrispondenza di Robinson-Schensted, con queste nuove notazioni è: $P = r_{x_n} \circ r_{x_{n-1}} \circ \cdots \circ r_{x_2} \circ r_{x_1}(\emptyset)$. In maniera simile possiamo definire operatori di inserimento per colonne, c_y, sostituendo la parola "riga" con "colonna" ogni volta che compare nell'algoritmo di Robinson-Schensted.

Esempio 2.10. Consideriamo un tableaux parziale P come nel disegno sotto, vogliamo inserire il tre per colonne e per righe.

$$P = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad r_3(P) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 7 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1} 6 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad c_3(P) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 \\ \cline{1-2} 3 & 6 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

Osserviamo che:

$c_3(P^T) =$

1	2	5	6
3	4		
5			

$r_3(P^T) =$

1	2	3
4	5	6
7		

Dunque, $c_3(P^T) = r_3(P)^T$ e $r_3(P^T) = c_3(P)^T$.

Adesso, vogliamo dimostrare che i due operatori di inserimento per righe e per colonne commutano.

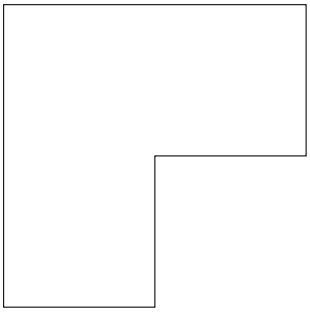
Osservazione 2.11. Siano P un tableaux parziale e $x \notin P$. Supponiamo che, quando x viene inserito per righe, certi elementi $x', x'', x''', \cdots$, collocati rispettivamente nella prima, nella seconda, nella terza riga, eccetera, vengano spinti giù. Allora, necessariamente si ha $x' < x'' < x''' < ... < \bar{x}$. Ognuno di questi va a posizionarsi in colonne con indice minore o uguale a quello della colonna occupata inizialmente da x', cioè più a sinistra. Inoltre $\bar{x}$ è l'ultimo elemento che viene buttato giù una volta che si inserisce x per righe e si posiziona nella cella aggiunta al tableaux in quel passo dell'algoritmo. Riformulando, r_x modifica solo le colonne a destra di $\bar{x}$. Un'osservazione analoga si può fare simmetricamente per l'operatore c_y.

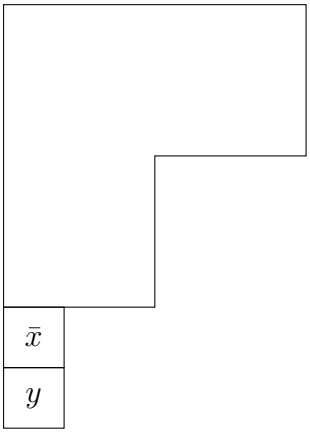
Lemma 2.12. *Sia P un tableaux di Young parziale non contenente nè x, nè y. Allora:*

$$r_x c_y(P) = c_y r_x(P) \tag{2.3}$$

Dimostrazione del lemma. Poniamo m il massimo tra gli elementi in $P \cup \{x, y\}$. La dimostrazione si divide in più casi a seconda di dove è collocato m. Osserviamo che, inserendo m, sia per righe che per colonne, non spostiamo nessun numero già contenuto in P.

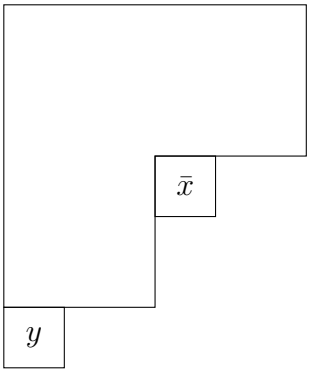
Primo Caso: $m = y$. Dal momento che y è il massimo, applicare c_y a P o a $r_x(P)$ aggiunge un elemento in fondo alla prima colonna in entrambi i casi. Chiamiamo $\bar{x}$ l'ultimo elemento a fermarsi quando applichiamo r_x e supponiamo che $\bar{x}$ occupi la cella u. Se u è nella prima colonna, allora applicare c_y a $r_x P$ aggiunge una cella sotto a u. Viceversa, se applichiamo r_x a $c_y(P)$, otteniamo che $\bar{x}$ si ferma più in alto della cella occupata da y, in quanto $y > \bar{x}$, dunque abbiamo lo stesso risultato. Schematicamente possiamo rappresentare questo caso così:

$P =$ 

$r_x c_y P =$ 

$= c_y r_x P$

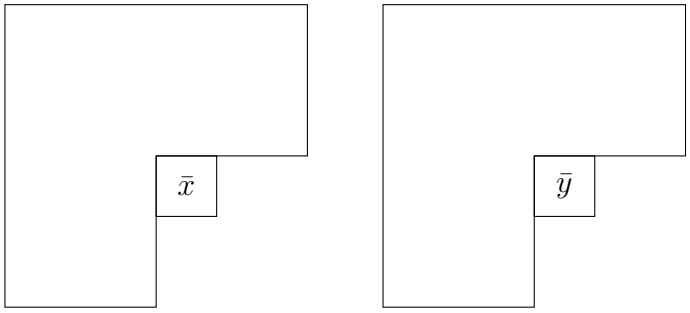
Invece, se u non è nella prima colonna, allora sia $c_y r_x P$, che $r_x c_y P$ sono uguali al seguente schema:



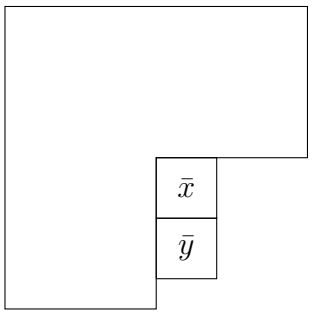
Il caso $m = x$ è analogo.

Secondo Caso: $m \in P$. Facciamo un'induzione sul numero degli elementi di P. Sia, ora, $\bar{P}$ il tableaux parziale ottenuto togliendo m da P. Allora $c_y r_x(\bar{P}) \subset c_y r_x(P)$ e $r_x c_y(\bar{P}) \subset r_x c_y(P)$. Allora per induzione $c_y r_x(\bar{P}) = r_x c_y(\bar{P})$. Allora l'unica cella in cui possono differire $c_y r_x(P)$ e $r_x c_y(P)$ è quella occupata da m. Se mostriamo che m occupa la stessa posizione in entrambi i casi, abbiamo finito. Similmente a prima, sia $\bar{x}$ l'ultimo elemento a fermarsi quando facciamo $r_x(\bar{P})$ e chiamiamo u la cella occupata da $\bar{x}$. In maniera analoga, definiamo $\bar{y}$ e v rispetto a $c_y(\bar{P})$. Adesso dobbiamo studiare due sottocasi dati da $u = v$ e $u \neq v$.

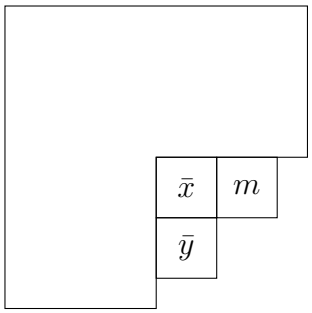
(a): Caso $u = v$. Rappresentiamo $\bar{P}$ nello stesso modo schematico usato anche sopra per P. Rappresentiamo $r_x \bar{P}$ e $c_y \bar{P}$ rispettivamente come nei disegni sottostanti.



Per l'osservazione 2.11, r_x modifica solo le colonne a destra di $\bar{x}$ e dunque applicarlo a $\bar{P}$ o a $c_y\bar{P}$ fa muovere gli stessi elementi. Inoltre l'operatore c_y, seguendo un ragionamento analogo, modifica solo le righe sotto a $\bar{y}$, quindi se applichiamo c_y a $\bar{P}$ o a $r_x\bar{P}$ seguiamo lo stesso percorso in entrambi i casi. Perciò $c_y r_x \bar{P} = r_x c_y \bar{P}$ e, supponendo $\bar{x} < \bar{y}$, possiamo rappresentarli come segue:



Ora, aggiungendo m, se m non occupa in P la cella $u = v$, allora nessun inserimento può spostarlo e quindi $c_y r_x P = r_x c_y P$. Se, invece, m si trova proprio in $u = v$, allora r_x applicato a P sposta m nella cella a destra di u, e poi c_y applicato a $r_x P$, come nel caso sopra con $\bar{x} < \bar{y}$, si ferma con $\bar{y}$ sotto u. Viceversa se applichiamo c_y a P, $\bar{y}$ sposta m nella cella a destra di u e poi $r_x c_y P = c_y r_x P$:



(b): Caso $u \neq v$. Denotiamo con $\bar{\lambda}$ la forma di $\bar{P}$ e con λ la forma di $c_y r_x \bar{P} = r_x c_y \bar{P}$. Siano u e v le celle rispettivamente tramite r_x e c_y. Allora vale:

$$\lambda = \bar{\lambda} \cup \{u, v\}.$$

Dal momento che gli inserimenti $r_x\bar{P}$ e $c_y\bar{P}$ potrebbero coinvolgere alcune celle in comune, u e v potrebbero non contenere $\bar{x}$ e $\bar{y}$ in $c_y r_x \bar{P} = r_x c_y \bar{P}$. Tuttavia si può comunque

verificare che fare $r_x(c_y\bar{P})$ aggiunge u e $c_y(r_x\bar{P})$ aggiunge v. In maniera simile al caso **(a)**, considerare tutte le possibili posizioni che può occupare m conclude la prova. □

Dimostrazione del teorema 2.9. Dimostriamo solo il punto (1) dell'enunciato. Procediamo per induzione su n.

[P.B.] Se $n = 1$, il risulato è ovvio il tableaux associato è composto da una signola la cella e dunque la trasposizione è banale.

[P.I.] Supponiamo che gli operatori commutino fino a $n-1$ e proviamolo per n. Abbiamo che il tableaux di Young associato a σ capovolta, per definizione, è:

$$\begin{aligned}
P(\bar{\sigma}) &= r_{x_1} r_{x_2} \cdots r_{x_n}(\emptyset) && \text{(definizione di } P(\bar{\sigma}));\\
&= r_{x_1} r_{x_2} \cdots c_{x_n}(\emptyset) && \text{(Lemma 2.12);}\\
&= c_{x_n} r_{x_1} \cdots r_{x_{n-1}}(\emptyset) && \text{(ipotesi induttiva);}\\
&= c_{x_n} c_{x_{n-1}} \cdots c_{x_1}(\emptyset) && \text{(per definizione di inserimeno per colonna);}\\
&= P^T
\end{aligned}$$

Dunque, il tableaux ottenuto è la trasposizione di P, ovvero $P' = P^T$, e la forma ottenuta è λ', come volevamo dimostrare. □

Grazie a questo teorema, unito alla corrispondenza di Robinson-Schensted e alla relazione (2.1), otteniamo che la lunghezza massima di una sottosequenza decrescente di una permutazione coincide con la lunghezza della prima colonna del diagramma di Young associato. Precisamente, si ha il seguente:

Corollario 2.13. *Sia σ una permutazione. Poniamo (λ, P, Q) la tripla associata a σ tramite il Teorema 2.5. Allora*

$$D(\sigma) = |\lambda'_1| \tag{2.4}$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue dal fatto che, se denotiamo $\bar{\sigma} = (\sigma_n, \sigma_{n-1}, ..., \sigma_1)$, allora $L(\bar{\sigma}) = D(\sigma)$. Se applichiamo il punto (1) del Teorema 2.9 e la relazione (2.1) a $\bar{\sigma}$, abbiamo la tesi. □

2.2 La misura di Plancherel

Con la corrispondenza di Robinson-Schensted, abbiamo ottenuto un modo pratico di visualizzare $L(\sigma)$ che ci permette di lavorare con le triple (λ, P, Q) invece che con le permutazioni. In realtà, volendo studiare il comportamento asintotico di $L(\sigma)$, come

abbiamo anticipato nell'osservazione 2.8, è sufficiente guardare l'andamento per $n \to \infty$ del diagramma di Young λ_n associato alla permutazione aleatoria σ_n. Se su S_n mettiamo la probabilità uniforme, che misura dobbiamo considerare sullo spazio delle partizioni di n? Fissiamo una forma λ, la probabilità che il diagramma aleatorio λ_n abbia forma λ è $\frac{1}{n!}$ moltiplicato per il numero di permutazioni $\sigma \in S_n$ la cui forma dopo l'algoritmo di Robinson-Schensted è λ. Allora, abbiamo che:

$$\mathbb{P}(\lambda_n = \lambda) = \frac{d_\lambda^2}{n!}. \tag{2.5}$$

In particolare, per il corollario 2.6, questa è una misura di probabilità sull'insieme delle partizioni di n, detta misura di Plancherel (di ordine n). Storicamente deriva dal lavoro del matematico svizzero Michel Plancherel in teoria delle rappresentazioni, tuttavia in questa tesi ne vediamo un'applicazione per fini puramente combinatorici: per capire l'andamento asintotico di $L(\sigma_n)$, dove σ_n è una permutazione in S_n, presa secondo la distribuzione uniforme, possiamo studiare il comportamento della variabile aleatoria $|\lambda_1^{(n)}|$, che corrisponde alla lunghezza della prima riga di un diagramma di Young $\lambda^{(n)}$ pesato tramite la misura di Plancherel. Il Teorema 2.5, con la relazione (2.1) e l'equazione (2.5) implicano che le due variabili aleatorie $L(\sigma_n)$ e $|\lambda_1^{(n)}|$ sono uguali in distribuzione.

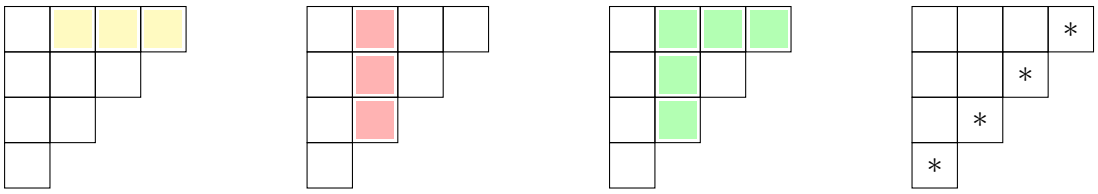
2.3 La formula dell'uncino

Per poter calcolare facilmente i pesi dati dalla misura di Plancherel, adesso, cerchiamo una maniera esplicita per determinare d_λ senza dover trovare a mano tutti i tableaux di Young con quella forma, cosa che diventerebbe troppo lunga per dimensioni grandi. A questo scopo, ci viene in aiuto la formula dell'uncino. Prima di procedere però abbiamo bisogno di introdurre alcune notazioni nuove.

Definizione 2.14. *Dato un diagramma di Young λ, se (i, j) è una sua cella, definiamo:*
*il **braccio** di (i, j) come l'insieme delle celle di λ della forma (i, y), con $j \leq y \leq |\lambda_i|$;*
*la **gamba** di (i, j) come l'insieme delle celle di λ della forma (x, j), con $i \leq x \leq |\lambda'_j|$;*
*l'**uncino** di (i, j) $H_\lambda(i, j)$ come l'insieme delle celle di λ della forma (x, y) con $i \leq x \leq |\lambda'_j|, j \leq y \leq |\lambda_i|$;*
*le **celle d'angolo** di λ come le celle il cui uncino è banalmente composto da loro stesse. Questi si chiamano anche gli angoli interni, per distinguerli dagli angoli esterni della sezione 3.1*

Denotiamo con $h_\lambda(i, j) = |H_\lambda(i, j)|$ il numero di celle nell'uncino. Segue da una facile verifica che $h_\lambda(i, j) = |\lambda_i| - j + |\lambda'_j| - i + 1$. Facciamo un esempio grafico:

Esempio 2.15. Evidenziamo in giallo il braccio della cella $(1, 2)$, in rosa la gamba della cella $(1, 2)$, in verde l'uncino $H_\lambda(1, 2)$ e con la stellina le quattro celle d'angolo.



Notiamo che vale $h_\lambda(i, j) = |\lambda_i| - j + |\lambda'_j| - i + 1 = 4 - 1 + 3 - 2 + 1 = 5$ e, infatti, abbiamo colorato di verde esattamente cinque celle.

A questo punto, per gli stessi motivi per cui abbiamo introdotto i tableaux di Young come risposta visiva nel determinare $L(\sigma)$, cerchiamo una formula che ci consenta di calcolare d_λ anche per dimensioni grandi, senza dover riempire il diagramma in tutti i modi possibili per ottenere un tableaux standard. Siamo pronti per enunciare il teorema seguente:

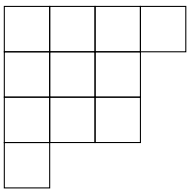
Teorema 2.16 (Formula dell'uncino)**.** *Sia $\lambda \vdash n$. Allora vale:*

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j)} h_\lambda(i, j)},$$

dove la produttoria è lungo tutte le celle del diagramma di Young di forma λ.

Vediamo subito un esempio esplicito con $n = 11$.

Esempio 2.17. Consideriamo $\lambda = (4, 3, 3, 1)$. Il diagramma di Young di forma λ è:



Scriviamo in ogni cella la lunghezza del suo uncino, otteniamo un oggetto che chiamiamo *tableaux degli uncini (hook-length tableaux)*. In questo caso:

7	5	4	1
5	3	2	
4	2	1	
1			

A questo punto è semplice calcolare

$$d_\lambda = \frac{11!}{7 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3 \cdot 2^2} = 1188.$$

Esistono diverse dimostrazioni per provare questo risultato, noi ne presentiamo una di approccio probabilistico seguendo il lavoro di Greene, Nijenhuis, e Wilf. Grazie a questa dimostrazione, otteniamo un algoritmo efficiente per generare un tableaux di Young aleatorio di forma λ con probabilità uniforme. Ma andiamo con ordine e prima vediamo nel dettaglio la dimostrazione.

Dimostrazione. Se costruiamo una misura di probabilità uniforme su $SYT(\lambda)$ in maniera che

$$prob(P) = \frac{\prod_{(i,j)} h_\lambda(i,j)}{n!},$$

dove P è u tableau di Young di forma λ, allora abbiamo finito. Infatti, per definizione di misura di probabilità,

$$1 = \sum_{P \in SYT(\lambda)} prob(P) = \sum_{P \in SYT(\lambda)} \frac{\prod_{(i,j)} h_\lambda(i,j)}{n!} = \frac{\prod_{(i,j)} h_\lambda(i,j)}{n!} \cdot d_\lambda.$$

E quindi si ottiene la formula cercata: $d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j)} h_\lambda(i,j)}$. Perciò, la dimostrazione si riduce a trovare una distribuzione uniforme su $SYT(\lambda)$. A questo scopo, introduciamo la passeggiata aleatoria sull'uncino, in inglese *"hook walk"*. Una volta scelta una cella tra le n possibili contenute nel diagramma di Young, possiamo spostarci solo lungo l'uncino di quella cella, senza la possibilità di rimanere fermi in quella cella. Precisamente: al passo (0) scegliamo una cella (i,j) con probabilità $\frac{1}{n}$. Al passo (1) possiamo muoverci solo nelle celle di $H_\lambda(i,j) \setminus \{(i,j)\}$. Quindi, la probabilità di finire in una determinata cella è $\frac{1}{h_\lambda(i,j)-1}$. Chiamiamo (i_1, j_1) la cella in cui arriviamo dopo il primo step; se si tratta di una cella d'angolo, il processo termina in quanto non avremmo più caselle in cui andare (se (i_1, j_1) è una cella d'angolo, $h_\lambda(i_1, j_1) \setminus \{(i_1, j_1)\} = \emptyset$). Altrimenti, procediamo come prima su $H_\lambda(i_1, j_1)$ e ci collochiamo in una cella (i_2, j_2) con probabilità $\frac{1}{h_\lambda(i_1,j_1)-1}$. Il processo termina quando arriviamo in una cella d'angolo (a,b), su cui scriviamo n. Se ripetiamo la passeggiata sul diagramma μ, ottenuto da λ togliendo la cella (a,b), scriviamo $n-1$ sulla cella d'angolo in cui termina la camminata e continuiamo in questo modo fino a scrivere l'uno, otteniamo un tableaux di Young di forma λ $P^{(n)}$. Vogliamo dimostrare che, fissato $P \in SYT(\lambda)$,

$$\mathbb{P}(P^{(n)} = P) = \frac{\prod_{(i,j)} h_\lambda(i,j)}{n!}. \tag{2.6}$$

Osserviamo che, se esiste una tale misura, essa non dipende dalla scelta del tableaux P. Dunque è effettivamente uniforme. Procediamo per induzione:

[P.B.]: $n = 1$. Abbiamo un'unica possibilità, la verifica diventa banale.

[P. I.]: $n > 1$. Supponiamo che, fino a $n-1$, valga la formula (2.6). Denotiamo con c la cella finale della camminata svolta per inserire n in $P^{(n)}$, fissiamo una cella d'angolo (a,b) e consideriamo $\bar{P}$ il tableaux ottenuto da P eliminando la cella (a,b) di forma μ e $P^{(n-1)}$ il tableaux ottenuto con la passeggiata sugli uncini sul diagramma di forma μ partendo da $n-1$. Allora, se supponiamo ogni passeggiata indipendente dalle altre, possiamo scrivere:

$$\mathbb{P}\left(P^{(n)} = P\right) = \mathbb{P}\left(c = (a,b)\right) \cdot \mathbb{P}\left(P^{(n-1)} = \bar{P}\right). \tag{2.7}$$

Usando l'ipotesi induttiva ci siamo ricondotti a dover dimostrare che:

$$\mathbb{P}(c = (a,b)) = \frac{(n-1)!}{\prod_{(i,j)\in\mu} h_\mu(i,j)} \cdot \frac{\prod_{(i,j)\in\lambda} h_\lambda(i,j)}{n!}. \tag{2.8}$$

Osserviamo che gli uncini in λ e μ coincidono ogni volta che li calcoliamo fuori dalla riga a o dalla colonna b. Mentre, se $i = a$ oppure $j = b$, $h_\mu(i,j) = h_\lambda(i,j) - 1$. Allora, possiamo riscrivere la (2.8) come segue:

$$\frac{1}{n}\prod_{i=1}^{a-1}\frac{h_\lambda(1,b)}{h_\lambda(i,b)-1} \cdot \prod_{j=1}^{b-1}\frac{h_\lambda(a,j)}{h_\lambda(a,j)-1} \tag{2.9}$$

$$= \frac{1}{n}\prod_{i=1}^{a-1}\left(1 + \frac{1}{h_\lambda(i,b)-1}\right) \cdot \prod_{j=1}^{b-1}\left(1 + \frac{1}{h_\lambda(a,j)-1}\right) \tag{2.10}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{A\subseteq\{1,\cdots,a-1\}}\sum_{B\subseteq\{1,\cdots,b-1\}}\prod_{i\in A}\frac{1}{h_\lambda(i,b)-1} \cdot \prod_{j\in B}\frac{1}{h_\lambda(a,j)-1}. \tag{2.11}$$

Per passare dalla (2.10) alla (2.11) abbiamo applicato due volte la formula generale [2] :

$$\prod_{i}^{a-1}(1 + x_i) = \sum_{A\subseteq\{1,\cdots,a-1\}}\prod_{i\in A} x_i$$

con $x_i = \frac{1}{h_\lambda(i,b)-1}$ per la prima produttoria e, rinominando gli indici, con $x_j = \frac{1}{h_\lambda(a,j)-1}$ per la seconda. Dunque dobbiamo dimostrare che

$$\mathbb{P}(c = (a,b)) = \frac{1}{n}\sum_{A\subseteq\{1,\cdots,a-1\}}\sum_{B\subseteq\{1,\cdots,b-1\}}\prod_{i\in A}\frac{1}{h_\lambda(i,b)-1} \cdot \prod_{j\in B}\frac{1}{h_\lambda(a,j)-1}. \tag{2.12}$$

Chiamiamo $Q(A,B) = \prod_{i\in A}\frac{1}{h_\lambda(i,b)-1} \cdot \prod_{j\in B}\frac{1}{h_\lambda(a,j)-1}$, dove $A \subseteq \{1,\cdots,a-1\}$ e $B \subseteq \{1,\cdots,b-1\}$ e diamo un'interpretazione probabilistica anche a questa quantità. Consideriamo una sequenza di celle $(x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)$ come possibile percorso di una passeggiata aleatoria lungo un uncino. Definiamo le sue proiezioni orizzontale e verticale,

[2] che si può facilmente provare per induzione.

rispettivamente come $H = \{y_1, ...; y_k\}$, $V = \{x_1, ..., x_k\}$. Ora per gli insiemi A, B descritti sopra denotiamo con $P(A, B)$ la probabilità di raggiungere, con una passeggiata aleatoria sull'uncino, la cella finale (a, b), condizionata a cominciare dalla cella iniziale $(\min A \cup \{a\}, \min B \cup \{b\})$ e a seguire una traiettoria $(x_1, y_1), \cdots, (x_k, y_k) = (a, b)$ che abbia come proiezione verticale $A \cup \{a\}$ e come proiezione orizzontale $B \cup \{b\}$. Se proviamo che

$$Q(A, B) = P(A, B) \tag{2.13}$$

allora possiamo concludere la dimostrazione. Infatti, grazie al teorema della probabilità totale, possiamo riscrivere $\mathbb{P}(c = (a, b))$ come sommatoria, su tutte le possibili celle iniziali (x, y), della probabilità di avere una certa cella iniziale (x, y), moltiplicata per la probabilità di arrivare ad (a, b) partendo da (x, y):

$$\mathbb{P}(c = (a, b)) = \sum_{(x,y)} \frac{1}{n} \cdot \mathbb{P}(c = (a, b) | \text{partendo da } (x, y)).$$

La probabilità condizionata che compare a destra si può riscrivere come la somma su tutte le possibili proiezioni orizzontali e verticali, sfruttando la misura di probabilità condizionata P descritta sopra, e di conseguenza anche la sommatoria sulle posizioni iniziali si può spezzare nelle due coordinate x e y. Otteniamo quindi la seguente espressione:

$$\mathbb{P}(c = (a, b)) = \frac{1}{n} \sum_{x_1=1}^{a} \sum_{y_1=1}^{b} \sum_{\substack{\emptyset \subseteq H \subseteq \{y_1,...,b\}, \\ \min(H)=y_1, \max(H)=b}} \sum_{\substack{\emptyset \subseteq V \subseteq \{x_1,...,a\}, \\ \min(V)=x_1, \max(V)=a}} P\left(V \setminus \{a\}, H \setminus \{b\}\right).$$

Se vale il claim (2.13), allora questa appena scritta è uguale a:

$$\frac{1}{n} \sum_{x_1=1}^{a} \sum_{y_1=1}^{b} \sum_{\substack{\emptyset \subseteq H \subseteq \{y_1,...,b\}, \\ \min(H)=y_1, \max(H)=b}} \sum_{\substack{\emptyset \subseteq V \subseteq \{x_1,...,a\}, \\ \min(V)=x_1, \max(V)=a}} Q\left(V \setminus \{a\}, H \setminus \{b\}\right)$$

che è facilmente riconducibile al lato destro di (2.12) e dunque si ha la tesi. Resta da mostrare che $Q(A, B) = P(A, B)$. Procediamo con un'altra induzione, questa volta su k, il numero di passi della passeggiata.

P.B.: se $k = 1$, allora $A = B = \emptyset$ e il risultato è banale.

P. I.: se $k > 1$, assumiamo che entrambi A e B siano non vuoti,il caso in cui solo uno dei due è vuoto è simile. Chiamiamo $i_1 = \min A$ e $j_1 = \min B$. Per come è definita la *hook walk*, abbiamo che:

$$P(A, B) = \frac{1}{h_\lambda(i_1, j_1) - 1}(P(A \setminus \{i_1\}, B) + P(A, B \setminus \{j_1\})).$$

Per induzione, questo è uguale a:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h_\lambda(i_1,j_1)-1}(Q(A\setminus\{i_1\},B)+Q(A,B\setminus\{j_1\}))\\
&=\frac{1}{h_\lambda(i_1,j_1)-1}\left(\prod_{i\in A\setminus\{i_1\}}\frac{1}{h_\lambda(i,b)-1}\cdot\prod_{j\in B}\frac{1}{h_\lambda(a,j)-1}+\prod_{i\in A}\frac{1}{h_\lambda(i,b)-1}\cdot\prod_{j\in B\setminus\{j_1\}}\frac{1}{h_\lambda(a,j)-1}\right)\\
&=\frac{(h_\lambda(i_1,b)-1)+(h_\lambda(a,j_1)-1)}{(h_\lambda(i_1,j_1)-1)}\cdot\left(\prod_{i\in A}\frac{1}{h_\lambda(i,b)-1}\prod_{j\in B}\frac{1}{h_\lambda(a,j)-1}\right)\\
&=1\cdot Q(A,B)=Q(A,B).
\end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza segue da un semplice calcolo che verifica che

$$(h_\lambda(i_1,b)-1)+(h_\lambda(a,j_1)-1)=h_\lambda(i_1,j_1)-1.$$

Abbiamo provato il passaggio (2.12) e così concludiamo la prova. □

Per rendere le notazioni più sintetiche, scriviamo che $\mu \nearrow \lambda$ ogni volta che μ è ottenuto da λ eliminando una singola cella. Inoltre definiamo $e_\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j)} h_\lambda(i,j)}$. Allora possiamo riscrivere la (2.8) come segue:

$$\mathbb{P}(c=(a,b))=\frac{e_\mu}{e_\lambda}. \tag{2.14}$$

Alla luce di questa nuova terminologia e della dimostrazione appena conclusa, la frazione $\frac{e_\mu}{e_\lambda}$, è la probabilità di finire in una certa cella d'angolo dopo una passeggiata aleatoria lungo gli uncini di λ. Osserviamo che, se $\mu \nearrow \lambda$, allora valgono:

$$d_\lambda=\sum_{\mu\nearrow\lambda} d_\mu \qquad\qquad e_\lambda=\sum_{\mu\nearrow\lambda} e_\mu \tag{2.15}$$

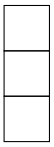
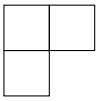
Grazie alla formula dell'uncino, abbiamo $\frac{e_\mu}{e_\lambda}=\frac{d_\mu}{d_\lambda}$, tuttavia la frazione $\frac{d_\mu}{d_\lambda}$ ha una diversa interpretazione probabilistica rispetto alla prima. Corrisponde alla probabilità che un tableaux di forma λ abbia la sua massima entrata nella cella d'angolo che manca in μ rispetto a λ. Inoltre possiamo osservare che, nella dimostrazione, è contenuto un algoritmo per generare un tableaux di Young aleatorio di forma λ. Consiste nel compiere $n=|\lambda|$ passeggiate aleatorie; la prima camminata, che si svolge sul diagramma di Young di forma λ, termina in una certa cella d'angolo (a,b), dove scriviamo n. Per la seconda *hook walk*, consideriamo il diagramma di forma μ, ottenuto da λ togliendo la cella (a,b). Alla fine della seconda passeggiata scriviamo $n-1$ nella cella d'angolo in cui finiamo e continuiamo in questo modo fino a scrivere l'uno. Così facendo, otteniamo un tableau du Young standard di forma λ.

2.4 La decomposizione della rappresentazione regolare

Fin'ora, ci siamo soffermati soprattutto sul carattere combinatorio dei risultati affrontati. Tuttavia, come anticipato nell'osservazione 2.7, certi aspetti degli argomenti visti possono essere letti anche attraverso la teoria delle rappresentazioni. Vogliamo fornire una dimostrazione diversa, o almeno l'idea, della formula (2.2). Per fare ciò ci spostiamo in teoria delle rappresentazioni. In particolare, vogliamo sfruttare il risultato (1.9) ottenuto grazie al Teorema di Maschke, nel caso specifico della rappresentazione regolare del gruppo simmetrico. In primo luogo, si può dimostrare che le rappresentazioni irriducibili del gruppo simmetrico sono tante quante le classi di coniugio del gruppo G. Nel caso del gruppo simmetrico, due permutazioni appartengono alla stessa classe di coniugio se hanno la stessa struttura ciclica. Dal momento che la struttura ciclica di una permutazione si può rappresentare attraverso le partizioni intere, ad ogni $\lambda \vdash n$ corrisponde una rappresentazione irriducibile V_λ del gruppo simmetrico S_n.

Vediamo degli esempi nel caso $n = 3$.

Esempio 2.18 (Rappresentazioni irriducibili di S_3). Consideriamo le partizioni di 3, associate ai seguenti diagrammi di Young:

$\lambda_1 =$ $\lambda_2 =$  $\lambda_3 =$ 

Nel caso

1. La rappresentazione corrispondente a λ_1 è la rappresentazione banale.

2. La rappresentazione associata a λ_2 è la rappresentazione segno.

3. La rappresentazione associata a λ_3 è di dimensione 2, infatti $d_{\lambda_3} = 2$. Per capire come è fatta dobbiamo guardare l'azione di S_3 sul sottospazio

$$T = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = \text{span}\{v_1, v_2\} \subseteq \mathbb{C}^3$$

Dove $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cioè dobbiamo vedere come ogni permutazione di S_3 permuta le coordinate x_1, x_2, x_3 e in particolare, come spiegato nell'osservazione 1.16, calcolare la matrice 2×2 associata all'endomorfismo $\rho(\sigma)$ rispetto alla base

v_1, v_2, per ogni $\sigma \in S_3$. Per esempio, la permutazione $\sigma = (1,2)$ manda v_1 in $-v_1$ e v_2 in $v_1 + v_2$, per cui la rappresentazione di σ è la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Chiamiamo f_λ la dimensione di V_λ.

Allora, tenendo per buono che le partizioni intere indicizzano le rappre irrid di S_n, applicando l'osservazione 1.23 al gruppo simmetrico di ordine n, abbiamo:

$$\mathbb{C}[S_n] = \bigoplus_{\lambda \vdash n} V_\lambda^{f_\lambda}.$$

Se calcoliamo le dimensioni, otteniamo la stessa relazione (2.2) che avevamo provato grazie alla corrispondenza di Robinson-Schensted. Infatti, la dimensione della rappresentazione regolare del gruppo simmetrico di ordine n è $|S_n| = n!$ e la relazione (1.9) nel caso del gruppo simmetrico diventa una sommatoria sulle partizioni intere di n , per cui si ha:

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} f_\lambda^2$$

Non è affatto banale dimostrare che

$$|SYT(\lambda)| = d_\lambda = f_\lambda = \dim(V_\lambda). \tag{2.16}$$

Per non correre il rischio di distrazione dall'argomento principale di questa tesi, assumiamo il fatto (2.16). Così, concludiamo una prova alternativa (e non molto rigorosa) della relazione (2.2).

Capitolo 3

Il Comportamento Asintotico di ℓ_n

Con questo capitolo giungiamo al termine del nostro lavoro. Come anticipato nell'introduzione, fu il matematico John Hammersley il primo a studiare seriamente l'andamento asintotico della lunghezza massima delle sottosequenze crescenti di una permutazione aleatoria e a trovare i primi risultati. Egli, in particolare, dimostrò il seguente:

Teorema 3.1 (di Hammersley)**.** *Esiste il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ell_n}{\sqrt{n}} = \Lambda.$$

Inoltre, se consideriamo una permutazione aleatoria secondo la distribuzione uniforme $\sigma_n \in S_n$*, allora* $\frac{L(\sigma_n)}{\sqrt{n}}$ *converge in probabiltà a* Λ*, per* n *che va all'infinito.*

Il nostro obiettivo è dimostrare che $\Lambda = 2$. In questo modo otteniamo una stima del comportamento asintotico di ℓ_n:

$$\ell_n \approx 2\sqrt{n}.$$

Per mostrare che $\Lambda \leq 2$ è sufficiente rimanere nel campo della probabilità combinatoria introducendo il Processo di Crescita di Plancherel. Invece, per dimostrare l'altra disuguaglianza, nelle sezioni seguenti entriamo nel campo del calcolo delle variazioni e dell'analisi funzionale. Questo sottolinea ulteriormente l'interdisciplinarietà di questa tesi. Purtroppo, non riusciamo a vedere nel dettaglio ogni aspetto dal punto di vista analitico, ma ci limitiamo ad enunciare le idee e i ragionamenti che conducono a una risposta finale completa. In particolare, spieghiamo i passi necessari ad enunciare il teorema della forma limite di Vershik e Kerov e Logan e Shepp. Questo teorema risolve un problema più generale rispetto alla nostra domanda iniziale "quanto grande ci aspettiamo $L(\sigma_n)$?" infatti, determina precisamente la forma limite di una partizione aleatoria secondo la misura di Plancherel. Grazie a questo risultato riusciamo a dimostrare che $\Lambda \geq 2$.

3.1 Il processo di crescita di Plancherel

In questa sezione, vogliamo dimostrare che $\Lambda \leq 2$. Se facciamo vedere che

$$\ell_n - \ell_{n-1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall n \geq 1 \tag{3.1}$$

allora, per induzione, abbiamo:

$$\ell_n \leq 2\sqrt{n} \quad \forall n \geq 1.$$

Mandando al limite entrambi i membri di quest'ultima espressione, otteniamo la disuguaglianza cercata. Notiamo che il membro di sinistra della relazione (3.1) corrisponde alla differenza dei valori attesi delle variabili aleatorie $|\lambda_1^{(n)}|$ e $|\lambda_1^{(n-1)}|$. Per alleggerire le notazioni, da ora in poi omettiamo i moduli e per indicare la lunghezza della prima riga di un diagramma λ scriviamo semplicemente λ_1. Con questa accortezza possiamo scrivere:

$$\ell_n - \ell_{n-1} = \mathbb{E}[\lambda_1^{(n)}] - \mathbb{E}[\lambda_1^{(n-1)}].$$

Fin'ora abbiamo considerato le partizioni aleatorie $\lambda^{(n)}$ come esistenti su spazi di probabilità diversi. Tuttavia, in questo modo non possiamo sfruttare la linearità del valore atteso, dunque l'idea è quella di dare alla sequenza di partizioni aleatorie una struttura di processo stocastico $(\lambda^{(n)})_{n=1}^{\infty}$. Un modo naturale di vedere simultaneamente ogni partizione aleatoria sul medesimo spazio emerge dalla corrispondenza di Robinson-Schensted. Come prima cosa, dobbiamo dare una struttura di processo stocastico alla successione delle permutazioni aleatorie distribuite uniformemente in S_n. Un approccio sfrutta le idee di Hammersley, usate nella dimostrazione del Teorema 3.1. Il ragionamento è il seguente. Per ottenere una permutazione aleatoria, scegliamo, uniformemente in una regione rettangolare di piano, dei punti aleatori, sui quali definiamo una relazione d'ordine parziale. Dati due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2), scriviamo $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$ se $x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$. Più precisamente, per generare una permutazione aleatoria σ_n partiamo da una sequenza di variabili aleatorie $X_1, .., X_n$ indipendenti e identicamente distribuite, ognuna con legge uniforme $\mathcal{U}_{[a,b]}$, su un certo intervallo $[a, b]$. Allora definiamo σ_n in modo che codifichi l'ordine parziale delle variabili $X_1, ..., X_n$. In particolare, per $1 \leq j \leq n$, sia $\sigma_n(j)$ l'intero k tale che, disponendo in ordine crescente le variabili aleatorie, X_j occupa la k-esima posizione. Questa definizione è ben posta ogni volta che le X_j assumono valori diversi e questo accade quasi-certamente. È semplice verificare che questo procedimento genera una permutazione aleatoria secondo la distribuzione uniforme. Un metodo alternativo prevede lo sviluppo di un algoritmo che, data una permutazione aleatoria $\sigma_n \in S_n$, la modifica e restituisce una permutazione $\sigma_{n+1} \in S_{n+1}$ distribuita ancora uniformemente.

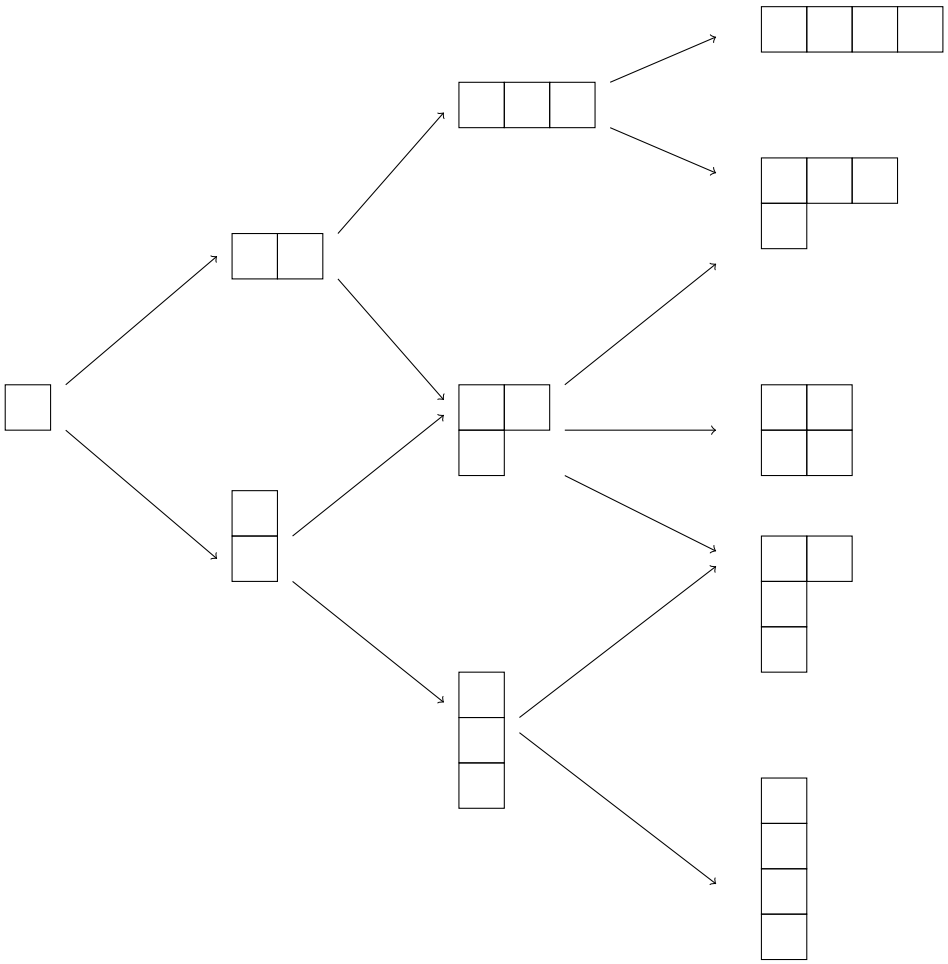


Figura 3.1

L'algoritmo sceglie un intero k in maniera uniforme tra $\{1, 2, ..., n+1\}$. La permutazione σ_{n+1} è costruita come segue:

$$\sigma_{n+1}(j) = \begin{cases} \sigma_n(j) & j \leq n \text{ e } \sigma_n(j) < k \\ \sigma_n(j) + 1 & j \leq n \text{ e } \sigma_n(j) \geq k \\ k & j = n + 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

Anche in questo caso, è facile vedere che questo algoritmo produce una permutazione aleatoria distribuita uniformemente. Ora, applicando l'algoritmo di Robinson-Schensted a ogni elemento del processo stocastico $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$, ottenuto in uno dei modi precedenti, abbiamo come risultato un processo di partizioni aleatorie $(\lambda^{(n)})_{n=1}^{\infty}$, detto **processo di crescita di Plancherel**. Per capire bene come funziona, osserviamo che, per costruzione, la forma $\lambda^{(n)}$, generata applicando l'algoritmo di Robinson-Schensted alla permutazione aleatoria $\sigma_n \in S_n$, si ottiene da $\lambda^{(n-1)}$ aggiungendo una cella in uno degli angoli esterni. Dunque, usando le notazioni introdotte alla fine della sezione 2.3, $\lambda^{(n-1)} \nearrow \lambda^{(n)}$.

Sulla base di queste osservazioni, definiamo il **grafo di Young** come un grafo i cui vertici sono gli elementi dell'insieme di tutte le partizioni intere $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(n)$ e i cui lati sono coppie ordinate (μ, λ) con $\mu \nearrow \lambda$. Rappresentiamo i primi livelli del grafo di Young in figura 3.1. Con questi nuovi strumenti, possiamo descrivere il processo di crescita di Plancherel come una specie di passeggiata aleatoria lungo il grafo di Young. Si noti che ogni passo ha un peso diverso, in quanto certe forme sono più probabili di altre. In questo senso si può interpretare il processo di crescita di Plancherel come una catena di Markov. Ora studiamo la probabilità di passare da una forma alla successiva del processo. Vogliamo dimostrare il seguente lemma che useremo per concludere la prova di (3.1).

Lemma 3.2. *Per ogni $\mu \in \mathcal{P}(n-1)$ e per ogni $\lambda \in \mathcal{P}(n)$ tali che $\mu \nearrow \lambda$, abbiamo:*

$$\mathbb{P}(\lambda^{(n)} = \lambda | \lambda^{(n-1)} = \mu) = \frac{d_\lambda}{n d_\mu}.$$

Dimostrazione. Per definizione di probabilità condizionata,

$$\mathbb{P}(\lambda^{(n)} = \lambda | \lambda^{(n-1)} = \mu) = \frac{\mathbb{P}(\{\lambda^{(n)} = \lambda\} \cap \{\lambda^{(n-1)} = \mu\})}{\mathbb{P}(\lambda^{(n-1)} = \mu)} \tag{3.3}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\{\lambda^{(n)} = \lambda\} \cap \{\lambda^{(n-1)} = \mu\})}{\frac{d_\mu^2}{(n-1)!}}. \tag{3.4}$$

Il numeratore coincide con $\frac{1}{n!}$ per il numero di permutazioni $\sigma \in S_n$ che, dopo i primi $n-1$ passi dell'algoritmo di Robinson-Schensted sulla sequenza $(\sigma(1), ..., \sigma(n-1))$, corrispondono a due tableau di Young di forma μ e dopo l'inserimento di $\sigma(n)$, danno come risultato un tableau di forma λ. Osserviamo che il tableau di registrazione Q, associato a una tale permutazione tramite l'algoritmo di Robinson-Schensted, ha la sua massima entrata nella cella d'angolo $\boldsymbol{c}$, con $\{\boldsymbol{c}\} = \lambda \setminus \mu$, dal momento che, prima di inserire $\sigma(n)$, la forma era μ. Il numero di tableaux di Young standard di forma λ, la cui massima entrata è nella cella $\boldsymbol{c}$ è banalmente d_μ. Dunque il numero di permutazioni cercate è esattamente $d_\mu d_\lambda$. Perciò, possiamo riscrivere

$$(3.4) = \frac{1}{n} \cdot \frac{d_\lambda}{d\mu}.$$

□

Ci resta da mostrare la (3.1). Ora che possiamo considerare le partizioni aleatorie sullo stesso spazio, sfruttiamo la linearità del valore atteso e studiamo

$$\mathbb{E}[\lambda_1^{(n)} - \lambda_1^{(n-1)}],$$

dove $\lambda_1^{(n)}$ e $\lambda_1^{(n-1)}$ sono in relazione tramite il processo di crescita di Plancherel. Con queste notazioni, la variabile aleatoria $\lambda_1^{(n)} - \lambda_1^{(n-1)}$ coincide con l'indicatrice dell'evento

$$E_n = \{\lambda^{(n)} = grow_1(\lambda^{(n-1)})\},$$

dove, se $\mu \in \mathcal{P}(n-1)$, denotiamo con $grow_1(\mu)$ il diagramma ottenuto da μ aggiungendo una cella in fondo alla prima riga. Per maggiorare dall'alto la quantità $\mathbb{P}(E_n)$ usiamo il lemma precedente e il teorema della probabilità totale.

$$\mathbb{P}(E_n) = \sum_{\mu \vdash n-1} \frac{d_\mu^2}{(n-1)!} \mathbb{P}(E_n | \lambda^{(n-1)} = \mu) \tag{3.5}$$

$$= \sum_{\mu \vdash n-1} \frac{d_\mu^2}{(n-1)!} \mathbb{P}(\lambda^{(n)} = grow_1(\mu) | \lambda^{(n-1)} = \mu) \tag{3.6}$$

$$= \sum_{\mu \vdash n-1} \frac{d_\mu^2}{(n-1)!} \frac{d_{grow_1(\mu)}}{n d_\mu}. \tag{3.7}$$

Abbiamo ottenuto una media pesata di $\frac{d_{grow_1(\mu)}}{n d_\mu}$. Usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha:

$$\mathbb{P}(E_n) \leq \left[\sum_{\mu \vdash n-1} \frac{d_\mu^2}{(n-1)!} \left(\frac{d_{grow_1(\mu)}}{n d_\mu} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{\mu \vdash n-1} \frac{d_{grow_1(\mu)}^2}{n!} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

In quest'ultima espressione, la sommatoria dentro la radice quadrata esprime la probabilità che un diagramma $\lambda^{(n)}$ sia della forma $grow_1(\mu)$ per un certo $\mu \in \mathcal{P}(n-1)$ e quindi è al piú 1. Perciò abbiamo mostrato:

$$\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{E}[\lambda_1^{(n)} - \lambda_1^{(n-1)}] = \ell_n - \ell_{n-1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{3.8}$$

Questo, per quanto detto all'inizio della sezione, conclude la prova che $\Lambda \leq 2$.

3.2 La forma limite

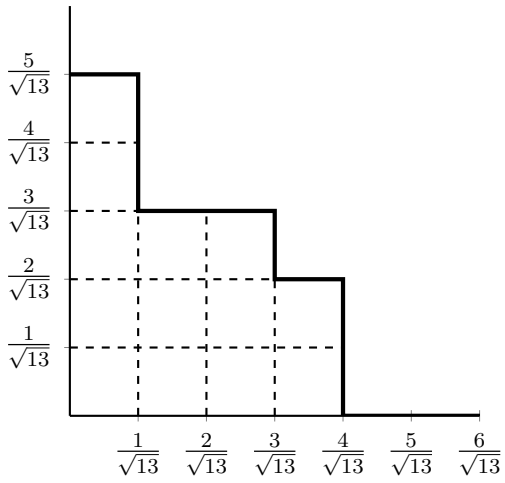
Per dimostrare la disuguaglianza opposta, bisogna affrontare un percorso più generale e analitico che ci porta al Teorema della forma limite. Come prima cosa, dobbiamo definire lo spazio delle forme su cui avverrà l'analisi. Dal momento che le partizioni intere sono descritte da una sequenza non crescente di interi positivi la cui somma dà n, possiamo definire i corrispondenti oggetti limite come funzioni non crescenti, non negative e il cui integrale è un numero reale assegnato. Più precisamente, definiamo

$$\mathcal{F} = \left\{ f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) \quad : \quad \begin{array}{ll} 1) & f \text{ è non crescente;} \\ 2) & \displaystyle\int_0^\infty f(x)dx = 1; \\ 3) & f \text{ ha supporto compatto.} \end{array} \right\}$$

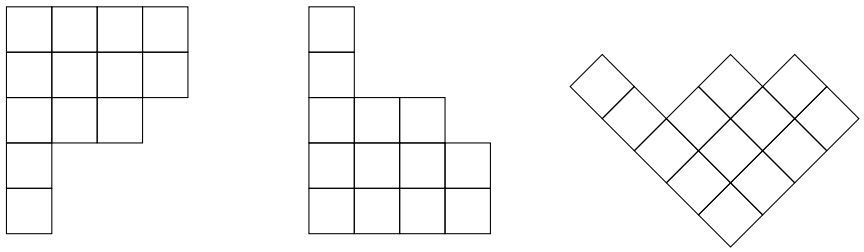
Gli elementi di $\mathcal{F}$ sono detti **diagrammi di Young continui**. È sempre possibile associare a una partizione $\lambda \in \mathcal{P}(n)$, una funzione $\phi_\lambda \in \mathcal{F}$. L'idea è di rappresentare il bordo di un diagramma di Young come una funzione a gradini riscalando entrambi gli assi dividendo per $\sqrt{n}$, in modo da ottenere l'integrale uguale a uno. Definiamo ϕ_λ come segue:

$$\phi_\lambda(x) = n^{-\frac{1}{2}} \lambda'_{\lfloor \sqrt{n}x \rfloor + 1}. \tag{3.9}$$

Esempio 3.3. Sia $\lambda = (4, 4, 3, 1, 1)$. Allora rappresentiamo ϕ_λ come segue:



Osserviamo che il grafico corrisponde al diagramma di Young di forma λ in notazione francese, che si ottiene allineando le righe a sinistra dal basso verso l'alto. Anticipiamo che esiste una terza notazione per i diagrammi di Young, seguendo la letteratura russa, che consiste nel ruotare di 45 gradi il diagramma in notazione francese. Graficamente, se $\lambda = (4, 4, 3, 1, 1)$ come prima, abbiamo:



Notazione Inglese Notazione Francese Notazione Russa

È importante tenere a mente che in $\mathcal{F}$ ci sono anche altre funzioni oltre a quelle associate alle partizioni. Un diagramma di Young continuo è rappresentato nell'esempio 3.7. Inoltre, ricordiamo che, per $n \to \infty$, data una partizione aleatoria $\lambda^{(n)}$ di ordine n, pesata secondo la misura di Plancherel, ci aspettiamo che la corrispondente ϕ_n tenda in probabilità a una certa $f \in \mathcal{F}$ non aleatoria. Per procedere in quest'ottica, dobbiamo riadattare

i risultati visti nel capitolo 2 per le partizioni, al caso delle funzioni in $\mathcal{F}$. Innanzitutto, ridefiniamo gli uncini. Consideriamo $f \in \mathcal{F}$ e un punto $(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ sottostante al grafico di f. Notiamo che, se pensiamo a f come a una nozione limite del diagramma di Young, il punto (x, y) diventa la generalizzazione di una cella. Con queste idee in mente, possiamo fornire la seguente:

Definizione 3.4. *Dato un diagramma di Young continuo f, se (x, y) è come sopra, definiamo:*

*il **braccio** di (x, y) come l'insieme $\{(x', y)|x \leq x' \leq f^{-1}(y)\}$, dove $f^{-1}(y)$ è definito da*

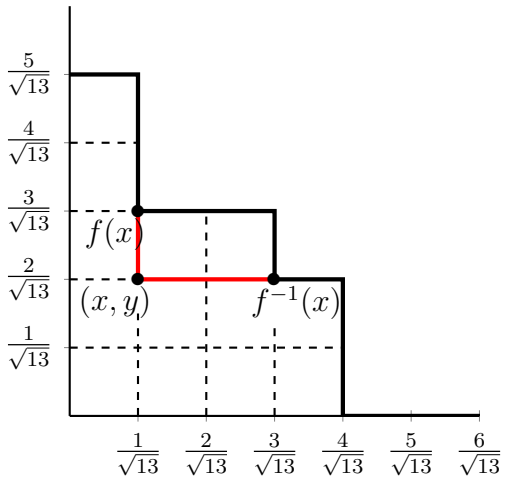
$$f^{-1}(y) = \inf\{x \geq 0 : f(x) \leq y\}$$

*la **gamba** di (x, y) come l'insieme $\{(x, y')|y \leq y' \leq f(x)\}$;*

*l'**uncino** di (x, y) $H_f(x, y)$ come l'unione del braccio e della gamba di (x, y);*

Denotiamo con $h_f(x, y) = |H_f(x, y)|$ il numero di celle nell'uncino. Segue da una facile verifica che $h_f(x, y) = f(x) - y + f^{-1}(y) - x$.

Esempio 3.5. Riprendiamo l'esempio 3.3 e prendiamo $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$.



In rosso abbiamo l'uncino di (x, y); le due linee rosse orizzontale e verticale sono, rispettivamente, il braccio e la gamba di (x, y).

Alla luce di queste nuove notazioni, vogliamo trovare una variante asintotica della formula dell'uncino che ci permetta di calcolare i pesi dati dalla misura di Plancherel. A questo scopo, definiamo l'integrale lungo l'uncino.

$$I_{hook}(f) = \int_0^\infty \int_0^{f(x)} \log h_f(x, y) dx dy. \tag{3.10}$$

Si può mostrare che questo integrale converge assolutamente. Con questi nuovi strumenti possiamo enunciare un primo importante risultato.

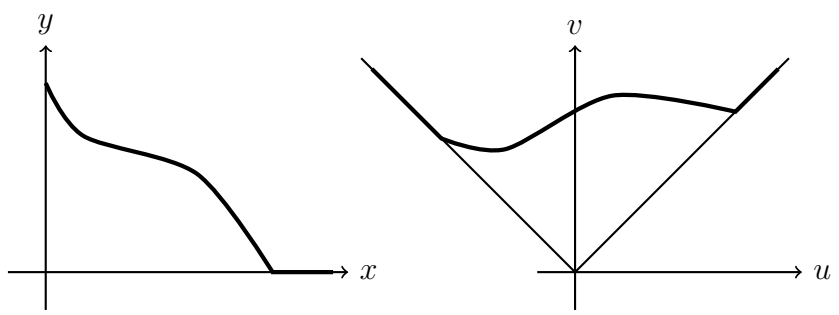
Teorema 3.6. *Per $n \to \infty$, abbiamo, uniformemente su tutte le partizioni $\lambda \in \mathcal{P}(n)$:*

$$\frac{d_\lambda^2}{n!} = \exp\left[-n\left(1 + 2I_{hook}(\phi_\lambda) + O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)\right)\right].$$

Ora, la probabilità $\frac{d_\lambda^2}{n!}$ di avere una forma è massima quando $I_{hook}(\phi_\lambda)$ è minimo. Per cercare la forma limite cerchiamo, quindi, una f che minimizza $I_{hook}(f)$. Si tratta di un problema variazionale. Per prima cosa, cambiamo sistema di coordinate passando dalla notazione inglese (x, y) alla versione russa. Definiamo $\mathcal{G}$ come l'insieme delle funzioni di $\mathcal{F}$ nelle nuove coordinate $(u = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, v = \frac{x+y}{\sqrt{2}})$. Per ogni $f \in \mathcal{F}$ esiste un'unica $g \in \mathcal{G}$ il cui grafico è lo stesso ma ruotato nel nuovo sistema di coordinate. Il nuovo insieme di forme $\mathcal{G}$ è costituito dalle funzioni $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ tali che:

1. g è 1-Lipschitz cioè $|g(s) - g(t)| \leq |s - t|$ per ogni $s, t \in \mathbb{R}$;
2. $g(u) \geq |u|$ per ogni $u, v \in \mathbb{R}$;
3. $\int_{-\infty}^{\infty}(g(u) - |u|)du = 1$;
4. $g(u) - |u|$ ha supporto compatto.

Esempio 3.7. A sinistra abbiamo un diagramma di Young continuo in coordinate standard; a destra lo stesso ma in coordinate ruotate.



Osserviamo che, in questo nuovo sistema di coordinate, le funzioni $g \in \mathcal{G}$ sono, in quanto Lipschitziane, continue e differenziabili quasi ovunque e dunque migliori candidate per la forma limite. Inoltre, con questo cambio di variabili, anche l'integrale sull'uncino si modifica. In particolare, se fissiamo $f \in \mathcal{F}$ e consideriamo g la funzione in $\mathcal{G}$ corrispondente a f, allora il dominio di integrazione di $I_{hook}(f)$ cioè la regione limitata dal grafico di f, passando nelle coordinate ruotate u, v, diventa la regione compresa tra il grafico di g e il grafico di $v = |u|$. Ora, per semplificare i calcoli di I_{hook} si compie un nuovo cambio di variabili, passando alle cosiddette variabili uncino (t, s), grazie alle quali riusciamo a scrivere una versione "trasformata" di g che denotiamo con $h(u) = g(u) - |u|$. Denotiamo con $\mathcal{H}$ lo spazio delle funzioni $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ tali che:

1. h è assolutamente continua, ossia differenziabile quasi ovunque e che soddisfa $h(x) = h(0) + \int_0^x h(u)du$;

2. $\int_{-\infty}^{\infty} h(u)du = 1$;

3. $\text{sgn}(u)h'(u) \in [-2, 0]$, dove h' è ben definita;

4. h ha supporto compatto.

Inoltre, vale:

$$2I_{hook}(f) = \log(2) + Q(h) + L(h),$$

dove Q è una forma quadratica e L è un funzionale lineare. In questo modo, se chiamiamo $J(h) := Q(h) + L(h) + \log(2)$, abbiamo riformulato il problema di minimizzare $I_{hook}(f)$ sullo spazio delle funzioni $\mathcal{F}$ nella ricerca di una $h \in \mathcal{H}$ che minimizzi J. Esiste un criterio per verificare se una funzione h_0 minimizza il funzionale J, grazie al quale si può scrivere il seguente:

Teorema 3.8. *La funzione*

$$h_0(u) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(u \arcsin(\frac{u}{\sqrt{2}}) + \sqrt{2-u^2}) - |u| & se |u| \leq \sqrt{2} \\ 0 & se |u| > \sqrt{2} \end{cases}$$

è l'unica funzione in $\mathcal{H}$ che minimizza il funzionale $J(\cdot)$.

Sulla base di questi risultati, possiamo definire la forma limite

$$\Omega(u) = h_0(u) + |u| = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(u \arcsin(\frac{u}{\sqrt{2}}) + \sqrt{2-u^2}) & se |u| \leq \sqrt{2} \\ |u| & se |u| > \sqrt{2} \end{cases}$$

Ora, consideriamo una partizione aleatoria secondo la misura di Plancherel $\lambda^{(n)}$ e chiamiamo $\phi_n(x)$ la funzione corrispondente in $\mathcal{F}$ come in (3.9). Dal momento che l'analisi appena conclusa è stata svolta nelle coordinate ruotate, ha senso enunciare anche i risultati seguenti in notazione russa. Sia ψ_n la funzione in $\mathcal{G}$ corrispondente a ϕ_n secondo le relazioni già descritte nelle pagine precedenti. Con questa terminologia insieme ai fatti descritti fin'ora, siamo pronti per enunciare il Teorema della forma limite.

Teorema 3.9 (Vershik-Kerov-Logan-Shepp)**.** *Sia Ω la forma limite scritta sopra. Allora, per $n \to \infty$, ψ_n tende in probabilità nella norma del sup a Ω. Cioè per ogni $\varepsilon > 0$, si ha*

$$\mathbb{P}(||\psi_n - \Omega||_\infty > \varepsilon) = \mathbb{P}(\sup_{u \in \mathbb{R}} |\psi_n(u) - \Omega(u)|) \to 0$$

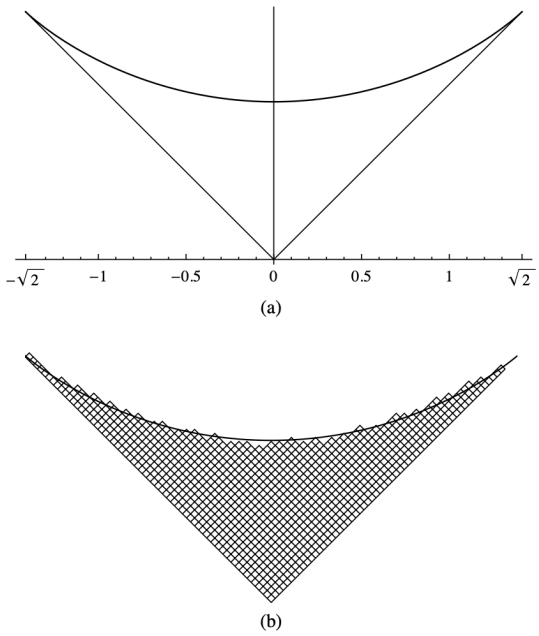


Figura 3.2: *La forma limite.*

Il Teorema 3.9 è un grande risultato nello studio delle sottosequenze crescenti di lunghezza massima. Infatti, oltre a risolvere direttamente il problema di Ulam-Hammersley, ha un importante impatto per la ricerca in questo campo. La potenza del Teorema 3.9 è osservabile nella figura [1]3.2 in cui è riportata, in alto, la forma limite di Logan-Shepp-Vershik-Kerov e, in basso, una simulazione di un diagramma di Young aleatorio di ordine $n = 1000$.

Teorema 3.10. *Sia Λ come sopra. Allora $\Lambda \geq 2$.*

Dimostrazione. Come abbiamo visto nel capitolo 2, l'algoritmo di Robinson-Schensted implica che la distribuzione della variabile aleatoria $L(\sigma_n)$, dove σ_n è una permutazione aleatoria in S_n secondo la distribuzione uniforme, è equivalente a quella della lunghezza della prima riga di una partizione aleatoria secondo la misura di Plancherel $\lambda_1^{(n)}$. Il Teorema 3.9 implica che, asintoticamente, con alta probabilità, $\lambda^{(n)}$ deve avere una prima riga lunga almeno $(2 - O(1))\sqrt{n}$. Infatti, se così non fosse, per infiniti valori di n la funzione ψ_n, che rappresenta il diagramma $\lambda^{(n)}$ nel sistema di coordinate russo, coinciderebbe con la funzione $|u|$ su un intervallo $[-\sqrt{2}, -\sqrt{2} + \varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$. Ma questo è assurdo perchè in tal caso non si avrebbe la convergenza uniforme alla forma limite Ω. $\square$

Per minorare dal basso Λ, questo ragionamento non conduce a nessuna conclusione. Infatti, assumere $\Lambda > 2$ implica che la funzione ψ_n differisce dalla funzione valore assoluto

[1]È stata riportata la figura presente in [1] a pagina 61.

(e quindi dalla forma limite) in un intervallo $[-\sqrt{2}-\varepsilon, -\sqrt{2}]$. Tuttavia, questo non è in contraddizione con il Teorema 3.9, nè implica che $J(\psi_n - |u|) > J(h_0) + \delta$ per un certo $\delta > 0$ (che è la contraddizione principale che abbiamo sfruttato nella dimostrazione precedente). Per questo, nella sezione 3.1, per minorare dal basso abbiamo usato un'idea diversa.

Per concludere, accenniamo a un'applicazione del teorema della forma limite in teoria delle rappresentazioni.

3.3 Le rappresentazioni irriducibili di dimensione massima di S_n

La questione che vogliamo risolvere è identificare le rappresentazioni irriducibili del gruppo simmetrico di dimensione massima. Anche in questo caso, una domanda semplice accompagnata da una risposta piuttosto complicata. Consideriamo un diagramma di Young di forma λ. Dal momento che la rappresentazione irriducibile di S_n associata a λ ha dimensione $d_\lambda = |SYT(\lambda)|$, il problema è equivalente a trovare il diagramma di Young $\lambda \in \mathcal{P}(n)$ che massimizza d_λ. Grazie al Teorema 3.6 e all'analisi svolta nella sezione 3.2, si riesce a verificare che la forma del diagramma di Young, corrispondente alla rappresentazione irriducibile di dimensione massima di S_n, tende alla forma limite del teorema 3.9, che parla di forma limite per le partizioni aleatorie secondo la misura di Plancherel. Possiamo riassumere quanto detto nel seguente risultato.

Teorema 3.11. *Per ogni $n \geq 1$, sia $\mu^{(n)} \in \mathcal{P}(n)$ il diagramma di Young associato alla rappresentazione irriducibile di S_n di dimensione massima (se ne esiste piú di uno, denotiamo con $\mu^{(n)}$ una scelta arbitraria tra essi). Sia ϕ_n la funzione in $\mathcal{F}$ associata a $\mu^{(n)}$. Sia ψ_n l'elemento di $\mathcal{G}$ corrispondente a ϕ_n nel sistema di coordinate ruotato. Allora abbiamo:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{u\in\mathbb{R}} |\psi_n(u) - \Omega(u)| = 0.$$

Osserviamo che il teorema fornisce solo un risultato approssimativo, per n grande. Difatti, rimangono aperte diverse questioni sull'argomento. Ad esempio, per cercare risposte più precise e meno asintotiche, oppure indagini sull'unicità della forma limite.

Bibliografia

[1] Dan Romik: *The Surprinsing Mathematics of Longest Increasing Subsequences*, Cambridge University Press, 2015.

[2] Bruce Eli Sagan: *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions*, Pacific Growe, CA : Wadsworth and Brooks/Cole, 1991.

[3] Bruce Eli Sagan: *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions*, Springer Verlag, 2001.

[4] Pierre-Loic Méliot: *Representation Theory of Symmetric Groups*, Chapman and Hall/CRC, 2017.

[5] Andrea Pascucci: *Teoria della Probabilità: Processi e Calcolo Stocastico*, Springer Nature, 2024.

Ringraziamenti

Giunta al termine di questo percorso, voglio ringraziare le persone che mi sono state accanto. Primo fra tutti, ringrazio il mio relatore, il professor Caselli, che mi ha permesso di scoprire nuovi argomenti ed allargare il mio bagaglio conoscitivo e mi ha guidato trasmettendomi passione e serenità e credendo nelle mie capacità. Ringrazio anche tutti gli altri professori per i preziosi insegnamenti e per le bocciature, senza le quali non avrei imparato a studiare matematica. Un ringraziamento speciale va al professor Petracci che, probabilmente senza nemmeno rendersene conto, mi ha ridato autostima in un momento di difficoltà.

Un grande grazie, poi, va a mia mamma che, tra nottate, consigli e risate, mi sostiene sempre. A mio babbo e a mia sorella che mi danno leggerezza ogni volta che penso troppo. Al mio nonno Gigi che mi ha insegnato a dare il massimo in ogni occasione. A tutta la mia famiglia che fa sempre il tifo per me.

Grazie a Simo che ha riacceso la mia determinazione credendo in me da subito e dandomi, senza saperlo, lo stimolo di cui avevo bisogno.

Grazie ai miei compagni di avventura di matematica per i bei ricordi di questi anni, il sostegno e il legame che si è creato.

Grazie a tutti i miei amici che mi ascoltano, sopportano i miei sbalzi d'umore e mi vogliono bene lo stesso.

E infine un grande grazie alla Matematica che continua ad affascinarmi sempre di più e che mi ricorda sempre quante cose non so.