Alma Mater Studiorum Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Augusto Righi"
Corso di Laurea in Fisica

Algebre di Clifford e rappresentazioni spinoriali

Relatore:
Prof. Emauele Latini

Presentata da:
Pietro Pacetti

Anno Accademico 2024/2025

Sommario

Le algebre di Clifford sono strutture incredibilmente utili in molteplici branche scientifiche, tra cui la geometria, l'elaborazione numerica dei segnali e, ovviamente, la fisica. Permettono di costruire il gruppo di Spin, che ha un ruolo chiave nella descrizione relativistica di particelle fermioniche: è infatti strettamente collegato al gruppo di Lorentz e costituisce l'insieme secondo cui trasformano le loro parti interne di spin. La tesi si propone di descrivere e studiare le caratteristiche dell'algebra di Clifford e del gruppo di Spin per spazi vettoriali quadratici non degeneri, approfondendo la teoria matematica necessaria per poi trovarne un'applicazione fisica nell'equazione di Dirac. Questo approccio algebrico e geometrico trova un ottimo ambito di applicazione in fisica teorica, come nello studio delle supersimmetrie quantistiche, poiché offre un quadro matematico estremamente versatile che consente di analizzare le simmetrie interne di campi quantistici in qualsiasi dimensione.

Indice

Introduzione

W. K. Clifford fu un brillante matematico e filosofo: introdusse le algebre di Clifford nel 1878, partendo dal lavoro di Grassmann, e fu il primo a suggerire l'idea che la gravità potesse alterare la geometria dello spazio, quarant'anni prima della famosa pubblicazione di Einstein del 1915. Originariamente utilizzate nel contesto della relatività ristretta e della meccanica quantistica nello spazio di Minkowski, negli ultimi decenni il formalismo delle algebre di Clifford ha svolto un ruolo fondamentale nelle teorie moderne di fisica teorica, ad esempio nel contesto delle supersimmetrie, fornendo strumenti potenti per rappresentare le trasformazioni spazio-temporali in dimensioni arbitrarie.
Nello studio delle rappresentazioni del gruppo di Spin emerge la distinzione tra le particelle quantistiche dei fermioni, a cui è associato uno spin semi-intero, e dei bosoni, con spin intero. In particolare il teorema di Spin-statistica, chiamato così perché mette in relazione lo spin di una particella con la statistica che deve seguire, afferma che queste particelle devono essere antisimmetriche (nel caso dei fermioni) o simmetriche (nel caso dei bosoni) rispetto allo scambio. Tale proprietà è strettamente legata alle rappresentazioni spinoriali e si riflette nelle condizioni delle Algebre di Clifford. Questa tesi si propone di esaminare la costruzione delle rappresentazioni spinoriali, concentrandosi soprattutto al caso dello spazio di Minkowski ma dando comunque un quadro generale in grado di inglobare in parte anche il loro utilizzo in dimensioni maggiori. Nel primo capitolo verranno introdotti gli strumenti matematici necessari per gettare le basi per il proseguimento della trattazione; nello specifico vedremo le definizioni di diverse strutture algebriche in un senso generale, per poi introdurre i concetti di algebre tensori, moduli e spazi quozienti; essi sono i mattoni con cui costruiremo e definiremo le algebre Tensoriali e di Grassmann, entrambe fondamentali nello studio prepostoci. Concluderemo il capitolo definendo i gruppi e le algebre di Lie, riportando alcuni utili risultati teorici. Il secondo capitolo tratta proprio dell'algebra di Clifford, introducendola con una definizione formale e poi mostrando come costruirla. Verrà esposto qui, dopo una breve esposizione delle sue proprietà, il metodo di classificazione per casi finito-dimensionali, a partire dai suoi generatori. L'algebra di Clifford ci permette di costruire un gruppo particolarmente utile nel descrivere le simmetrie dei fermioni: è il gruppo di Spin, al cui studio è dedicato il terzo capitolo. Ci soffermeremo in particolare sulla relazione tra questo gruppo e quello di Lorentz, anche nell'ambito delle loro rispettive algebre di

Lie, e affronteremo il tema delle loro rappresentazioni, che prendono il nome di spinori. L'ultimo capitolo concerne le applicazioni fisiche: seguendo un percorso storico partiremo dall'equazione di Schrödinger, per poi cercarne una forma relativistica, trovandola nell'equazione di Klein-Gordon. Ci accorgeremo delle problematiche che hanno spinto Dirac a formulare l'equazione, appunto, di Dirac e ritroveremo così il collegamento con la trattazione matematica degli spinori. Concluderemo accennando all'utilità della teoria dei gruppi di Spin e delle algebre di Clifford in dimensioni superiori.

Capitolo 1

Elementi matematici

In questo primo capitolo andremo ad introdurre i concetti e le strutture matematiche necessarie per gettare le basi con cui introdurre e costruire l'Algebra di Clifford, e affrontare più in generale la trattazione dei capitoli successivi. Definiremo innanzitutto le strutture algebriche, concentrandoci su Spazi Vettoriali e Algebre e delineandone alcune tipologie e proprietà. Successivamente ci concentreremo su Algebre Tensoriali e di Grassmann, discutendo infine brevemente i gruppi di Lie e le loro rappresentazioni.

1.1 Strutture Algebriche

Iniziamo la trattazione di questa tesi definendo le strutture principali dell'Algebra Astratta, quindi Gruppi, Campi, Spazi Vettoriali e Algebre.

Definizione 1.1 (Gruppo)**.** Sia G un insieme e sia $+$ un'operazione binaria, $+ : G \times G \to G$. La coppia $(G, +)$ si definisce *Gruppo* se valgono le seguenti proprietà:

- Associativa: $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in G$;
- Esiste l'elemento neutro: $\exists g_1 \in G \mid g_1 + x = x + g_1 = x$;
- Esiste l'inverso: $\forall x \in G\ \exists x' \mid x' + x = x + x' = g_1$;

In particolare, un gruppo si dice abeliano se vale la proprietà commutativa, e quindi:

- $x + y = y + x, \forall\ x, y \in G$;

Definizione 1.2 (Campo)**.** Sia $(\mathbb{K}, +)$ un gruppo abeliano, con elemento neutro 0_k, su cui è definita una seconda operazione binaria $* : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, tale per cui la coppia $(\mathbb{K}/\left\{0_k\right\}, *)$ è a sua volta un gruppo abeliano con elemento neutro 1_k. Se vale la proprietà distributiva di $*$ su $+$:

- $x * (y + z) = (x * z) + (y * z), \forall\, x, y, z \in \mathbb{K}$;

Allora $(\mathbb{K}, +, *)$, spesso indicato solamente come $\mathbb{K}$, viene detto *campo*.

Definizione 1.3 (Spazio Vettoriale)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo e V un gruppo abeliano. Sia $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$; un operatore che gode delle seguenti proprietà ($\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $\forall\, \lambda, \gamma \in \mathbb{K}$):

- $\lambda \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda \cdot \boldsymbol{x} + \lambda \cdot \boldsymbol{y}$;
- $(\lambda + \gamma) \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \cdot \boldsymbol{x} + \gamma \cdot \boldsymbol{x}$;
- $(\lambda * \gamma) \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \cdot (\gamma \cdot \boldsymbol{x})$;
- Sia 1_K l'unità di $\mathbb{K}$, allora: $\boldsymbol{x} \cdot 1_K = 1_K \cdot$

Si dice che V è uno *spazio vettoriale* su $\mathbb{K}$. Gli elementi di V vengono detti *vettori* e quelli di $\mathbb{K}$ *scalari*.
Un sottoinsieme W di uno spazio vettoriale V è definito *sottospazio vettoriale* se è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per uno scalare. Queste sono le caratteristiche necessarie e sufficienti per far sì che W stesso acquisisca la struttura di Spazio Vettoriale.
Se l'insieme sottostante assume tutte le proprietà di un campo eccetto la commutatività, allora è comunque possibile definire uno spazio vettoriale, ma bisogna fare una distinzione tra spazio destro, quando la moltiplicazione per lo scalare è definita alla destra del vettore, e sinistro nel caso opposto.

Definizione 1.4 (Algebra)**.** Sia A uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, con un'operazione binaria $* : A \times A \to A$, tale che $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in A$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

- $\boldsymbol{x} * (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} * \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} * \boldsymbol{z}$;
- $(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} * \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} * \boldsymbol{x}$;
- $(\lambda \cdot \boldsymbol{x}) * \boldsymbol{y} = \lambda \cdot (\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y})$;
- $\boldsymbol{x} * (\lambda \cdot \boldsymbol{y}) = \lambda \cdot (\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y})$;

Allora A viene detta *algebra* su $\mathbb{K}$.
Inoltre, l'algebra può essere:

- *Commutativa*, se $\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} * \boldsymbol{x}$,
- *Unitaria*, se $\exists 1_A \mid \boldsymbol{x} * 1_A = 1_A * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$,
- *Associativa*, se $\boldsymbol{x} * (\boldsymbol{y} * \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}) * \boldsymbol{z}$

Risulta infine utile, per la trattazione successiva, definire certi tipi di mappe tra queste strutture algebriche che ritroviamo molto spesso.

Definizione 1.5 (Omomorfismo e isomorfismo)**.** Un *omomorfismo* è una mappa tra due strutture algebriche dello stesso tipo che ne preserva le operazioni. In particolare, un omomorfismo tra due algebre (A e B, entrambe definite sul campo $\mathbb{K}$), è una funzione $f : A \to B$ tale che:

- $f(a * b) = f(a) * f(b)$
- $f(a + b) = f(a) + f(b)$

Dove non è stata usata una differenza nella notazione dei prodotti interni di A e B, in quanto facilmente intuibile dal contesto.

Se l'omomorfismo è invertibile e il suo inverso è ancora un omomorfismo, allora si parla di *isomorfismo*.

Definizione 1.6 (Forma Bilineare)**.** Una *forma bilineare* tra due spazi vettoriali V e W su $\mathbb{K}$ è una mappa $\phi : V \times W \to \mathbb{K}$, che associa ad ogni $\boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W$ uno scalare $\phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \mathbb{K}$, tale che, fissato ognuno dei due componenti, la funzione sia lineare nell'altro:

$$\phi(\lambda\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{v'}, \boldsymbol{w}) = \lambda(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \gamma(\boldsymbol{v'}, \boldsymbol{w})$$

$$\phi(\boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{w} + \gamma\boldsymbol{w'}) = \lambda(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \gamma(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w'})$$

1.2 Algebra Tensoriale

Introduciamo ora gli Ideali e gli Spazi Quozienti, che ci permettono di costruire delle algebre con caratteristiche interessanti (in quanto grazie a essi possiamo "forzare" delle relazioni tra i vettori) e arriviamo poi alla definizione di Algebra Tensoriale, una costruzione algebrica di grande importanza.

Definizione 1.7 (Somma Diretta)**.** Siano V e U due spazi vettoriali. Si dice che a $W = V \oplus U$, W è la *somma diretta* di U e V, se $\forall \boldsymbol{w} \in W$ $\exists!$ $\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{v} \in V$ tale che $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.
Le immediate conseguenze di questa definizione sono le seguenti:

- se U e V sono finito dimensionali, $dim(W) = dim(U) + dim(V)$
- $W = V \oplus U \iff \begin{cases} U \cap V = \{0\} \\ W = U + V, \text{cioè } W \text{ è generato dalla somma degli elementi di } U \text{ e } V. \end{cases}$

Definizione 1.8 (Algebra Graduata)**.** Un'algebra A viene detta *graduata* se A in quanto spazio vettoriale è scomponibile come:

$$A = \bigoplus_k A_k \tag{1.1}$$

$$A_i A_j \subseteq A_{i+j} \tag{1.2}$$

Dove nella seconda equazione il prodotto tra gli spazi vettoriali è da intendersi come lo spazio risultante dal prodotto dei singoli vettori di A_i, A_j.

Distinguiamo ora tra vettori omogenei, se $\boldsymbol{v} \in A_k$, per cui diremo che il vettore ha grado k, e vettori non omogenei, tali cioè per cui $\boldsymbol{v} = \sum_k \boldsymbol{v_k}$, e in questo caso assegneremo al grado del vettore $\boldsymbol{v}$ il grado maggiore tra quelli dei vettori che lo compongono.

Definizione 1.9 (Spazio Quoziente)**.** Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e U un suo sottospazio. Definiamo lo *spazio quoziente* come l'insieme formato dalle classi d'equivalenza indotte dalla seguente relazione:

$$\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{v'} \iff \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v'} \in U \tag{1.3}$$

É facilmente verificabile che la relazione sia ben posta secondo le proprietà esposte in Appendice A.2.

Ogni elemento di V/U è dunque una classe del tipo $[\boldsymbol{v}]_\sim = \{\boldsymbol{v'} \mid \boldsymbol{v'} - \boldsymbol{v} \in U\}$, e sull'insieme costruiamo la somma e il prodotto per scalare nel modo seguente:

- $[\boldsymbol{v}]_\sim + [\boldsymbol{u}]_\sim = [\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}]_\sim$
- $\lambda \cdot [\boldsymbol{v}]_\sim = [\lambda \cdot \boldsymbol{v}]_\sim$

Le operazioni sono definite correttamente, infatti:

- $\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{v}', \boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{u}' \to (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})-(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}') = (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')+(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}') \in U \to (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}) \sim (\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}')$.
- $\lambda(\boldsymbol{v}) - \lambda(\boldsymbol{v}') = \lambda(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') \in U \to \lambda\boldsymbol{v} \sim \lambda\boldsymbol{v}'$

In questo modo si può verificare che l'insieme V/U definisce uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Chiamiamo *proiezione canonica* la funzione $\pi : V \to V/U$, $v \in V \to \pi(v) = [v]_\sim$, che risulta essere un'applicazione lineare e suriettiva.
É interessante infine notare che ogni elemento $\boldsymbol{x} \in U$ si traduce nello spazio quoziente nell'elemento nullo, $\mathbf{0}_{V/U}$.

Definizione 1.10 (Ideale)**.** Sia A un'algebra e I un suo sottospazio vettoriale. Si dice che I è un *ideale sinistro* di A se $\forall i \in I, \forall a \in A$:

$$i * a \in I \tag{1.4}$$

Un ideale viene detto *destro* se rispetta la stessa proprietà a fattori invertiti, cioè se $a * i \in I$. Se un ideale è sia sinistro che destro viene definito bilatero, e risulta quindi ovvio che nel caso di un'algebra commutativa queste tre definizioni sono tutte equivalenti.

Se abbiamo a che fare con un'algebra, gli ideali risultano particolarmente utili per costruire spazi quozienti che conservano le caratteristiche algebriche.
Sia A un'algebra e B un suo generico sottoinsieme. É possibile allora costruire l'ideale bilatero generato da B nel modo seguente:

$$I_B = \{a_i \cdot b_i \cdot a'_i \mid a_i, a'_i \in A; b_i \in B; n \in \mathbb{N}\} \tag{1.5}$$

Risulta evidente che I_B rispetta la definizione di ideale.
Possiamo quindi costruire lo spazio vettoriale A/I_B, a cui aggiungiamo l'operazione $[x] \cdot [y] = [x \cdot y]$, definendo così un'algebra.

Teorema 1.1 (Proprietà universale)**.** Siano V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Esistono uno spazio vettoriale, denominato $V \bigotimes W$, e un'applicazione bilineare, $\phi : V \times W \to V \bigotimes W$, tali che:
Per ogni spazio vettoriale L e funzione bilineare $g : V \times W \to L$, esiste un'unica mappa bilineare $g' : V \bigotimes W \to L$, tale che $g = g' o\ \phi$.

Dimostrazione. Costruiamo intanto $V \bigotimes W$ e ϕ:
Prendiamo lo spazio vettoriale F, formato dalla combinazione lineare formale di tutte le possibili coppie $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$, con $\boldsymbol{v} \in V$ e $\boldsymbol{w} \in W$. Sia R un suo sottospazio generato da tutti i vettori del tipo:

$$(\lambda \boldsymbol{v} + \beta \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}) - \lambda(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) - \beta(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w})$$

$$(v, \lambda \boldsymbol{w} + \beta \boldsymbol{w}') - \lambda(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) - \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}')$$

Allora identifichiamo $V \bigotimes W$ con lo spazio quoziente F/R. Definiamo ora l'applicazione $\phi : V \times W \to V \bigotimes W$ come:

$$\phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = [(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})].$$

Per definizione dello spazio quoziente, ϕ è bilineare. Prendiamo ora un generico spazio vettoriale L e una funzione bilineare $g : V \times W \to L$, e definiamo g' su $V \bigotimes W$ ponendo:

$$g'([(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})]) = g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}).$$

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "g"'] & V \otimes W \arrow[d, "g'"] \\ & L \end{tikzcd}$$

Dalla bilinearità di g e ϕ otteniamo che anche g' deve essere bilineare. Dato che ogni elemento di $V \bigotimes W$ è una combinazione lineare degli elementi della forma $\phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$, la linearità impone l'unicità di g'. $\square$

Si chiamano scomponibili i tensori che sono elementi del codominio di ϕ, cioè tali per cui è possibile scriverli nella forma $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$, con $\boldsymbol{v} \in V$ e $\boldsymbol{w} \in W$.

Siano A, B algebre su $\mathbb{K}$. Possiamo dare una struttura di algebra al loro prodotto tensoriale definendo il prodotto interno $*$ di $A \bigotimes B$ nel modo seguente:

$$(a_1 \otimes b_1) * (a_2 \otimes b_2) = (a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2)$$

E allargando per bilinearità la definizione ai vettori non scomponibili.

Definizione 1.11 (Algebra tensoriale)**.** Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. L'*algebra tensoriale* di V, denotata da $T(V)$, è definita come

$$T(V) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} T^n(V),$$

dove:

$$T^0(V) = \mathbb{K}, \quad T^n(V) = V^{\otimes n} = V \otimes V \otimes ... \otimes V \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

La moltiplicazione in $T(V)$ è data dal prodotto tensoriale; in particolare, se

$$u \in T^m(V) \quad \text{e} \quad v \in T^n(V),$$

allora il loro prodotto è definito come

$$u \cdot v = u \otimes v \in T^{m+n}(V).$$

L'algebra tensoriale risulta naturalmente graduata, associativa e unitaria, con l'unità data da $1 \in \mathbb{K}$.

Teorema 1.2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $T(V)$ la sua algebra tensoriale. Per ogni algebra unitaria e associativa A e per ogni mappa lineare $\phi : V \to A$ esiste un unico omomorfismo d'algebre, $\phi^{\sim} : T(V) \to A$, che estende ϕ da $V \subset T(V)$ a tutto $T(V)$.

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto l'esistenza della mappa $\phi^\sim$.
Ogni elemento che appartiene a $T(V)$ può essere scritto come la somma finita di termini appartenenti ognuno a $V^{\otimes n}$. Un elemento omogeneo di grado k è rappresentabile come:

$$\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2 \otimes ... \otimes \boldsymbol{v_k} \quad \boldsymbol{v}_i \in V$$

Definiamo allora la mappa $\phi^\sim$ come

$$\phi^\sim(\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2 \otimes ... \otimes \boldsymbol{v_k}) = \phi(\boldsymbol{v_1}) \cdot \phi(\boldsymbol{v_2}) \cdot ... \cdot \phi(\boldsymbol{v}_n) \in A,$$

e allarghiamo per linearità a tutto $T(V)$. In particolare, se $k = 0$, definiamo $\phi^\sim(\lambda) = \lambda{\cdot}1_A$, con 1_A che rappresenta l'unità di A, per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$.
La mappa così definita è omogenea, in quanto preserva la moltiplicazione e l'unità ($\phi^\sim(1) = 1_A$). Inoltre è immediato verificare che per ogni $\boldsymbol{v} \in V$ abbiamo che $\phi^\sim(\boldsymbol{v}) = \phi(\boldsymbol{v})$, dunque $\phi^\sim$ è effettivamente un'estensione di ϕ.
Prendiamo ora un altro omomorfismo, γ, che sia un'estensione di ϕ. Allora:

$$\gamma(\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2 \otimes ... \otimes \boldsymbol{v_k}) = \gamma(\boldsymbol{v_1}) \cdot \gamma(\boldsymbol{v_2}) \cdot ... \cdot \gamma(\boldsymbol{v}_n) = \phi(\boldsymbol{v_1}) \cdot \phi(\boldsymbol{v_2}) \cdot ... \cdot \phi(\boldsymbol{v}_n) = \phi^\sim(\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2 \otimes ... \otimes \boldsymbol{v_k}),$$

Dimostrando così l'unicità di $\phi^\sim$. □

Possiamo costruire la mappa $i : V \to T(V)$ che associa ad ogni elemento $\boldsymbol{v} \in V$ lo stesso elemento $\boldsymbol{v} \in V^{\otimes 1}$; così definita, la mappa è naturalmente iniettiva.

1.3 Algebra di Grassmann

Definizione 1.12. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. L'*algebra di Grassmann* di V è definita come

$$\Lambda(V) = T(V)/I,$$

dove I è l'ideale bilaterale in $T(V)$ generato dagli elementi della forma

$$v \otimes v, \quad \text{per ogni } v \in V.$$

Il prodotto di quest'algebra è solitamente indicato con $\wedge$.

Risulta immediato che gli elementi dell'algebra di Grassmann rispettano le seguenti proprietà $\forall v \in V$

$$v \wedge v = 0, \quad v \wedge w = -w \wedge v.$$

L'algebra di Grassmann risulta anch'essa un'algebra graduata:

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{0}^{k=\infty} \Lambda^k(V),$$

dove

$$\Lambda^k(V) = V^{\otimes k}/I^k, \quad I^k = I \cap V^{\otimes k}.$$

Si può dimostrare che, se $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ è base di V, allora la base di $\Lambda^k(V)$ è data da:

$$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_k}\} \quad 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k \leq n.$$

Per cui la dimensione di Λ^k è $\binom{n}{k}$, e conseguentemente otteniamo la dimensione di $\Lambda(V)$, $dim(\Lambda(V)) = 2^n$.
Notiamo inoltre che una caratteristica di $\Lambda(V)$ è di essere un'*algebra supercommutativa*, ovvero presi due elementi $u, v \in \Lambda(V)$, rispettivamente di grado a e b, allora: $u \wedge v = (-1)^{deg(u) \cdot deg(v)} v \wedge u$.

Definizione 1.13 (Superalgebra)**.** Sia A un'algebra su $\mathbb{K}$. Si dice che A è una *superalgebra*, o equivalentemente, una $\mathbb{Z}_2$-*algebra graduata*, se è scomponibile in sottospazi tramite somma diretta come:

$$A = A_0 \oplus A_1,$$

tale che il prodotto di A soddisfi:

$$A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j \,(\mathrm{mod}\, 2)}, \quad \forall i, j \in \{0, 1\} \tag{1.6}$$

Dove $i + j \,(\mathrm{mod}\, 2)$ rappresenta il resto della divisione euclidea tra $(i + j)$ e 2.
Gli elementi di A_0 sono detti *pari*, mentre quelli di A_1 *dispari*.

Possiamo quindi notare come sia possibile effettuare una "$\mathbb{Z}_2$-graduazione" in un'algebra di Grassmann:

$$\Lambda(V) = \Lambda_0(V) \oplus \Lambda_1(V)$$

con

$$\Lambda_0(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^{2k} \quad \Lambda_1(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^{2k+1}$$

1.4 Gruppi di Lie e rappresentazioni

Gli ultimi elementi che definiamo in questo capitolo sono i Gruppi e le Algebre di Lie, di utilità incredibile nella teoria delle Rappresentazioni.

Definizione 1.14 (Varietà liscia)**.** Una *varietà liscia* è uno spazio topologico di Hausdorff, completamente separabile e che possiede un atlante. Si può dunque affermare che una varietà liscia si comporta localmente come $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.15 (Gruppo di Lie)**.** Un *gruppo di Lie* $(G, *)$ è un insieme che è contemporaneamente un gruppo e una varietà differenziabile su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Questo significa che:

- l'operazione $* : G \times G \to G$,
- l'operazione d'inversione $\mu : G \to G, \quad g \to \mu(g) = g^{-1}$

sono entrambe mappe lisce.

Ad ogni Gruppo di Lie è possibile associare un'algebra, chiamata Algebra di Lie, che ne preserva la struttura locale. In particolare due gruppi diversi possono avere algebre isomorfe (e quindi equivalenti) se i gruppi sono localmente isomorfi.

Definizione 1.16 (Algebra di Lie)**.** Un'*algebra di Lie* è uno spazio vettoriale $\mathfrak{g}$ su un campo $\mathbb{K}$ (tipicamente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) con un operatore binario, detto *prodotto di Lie*:

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},$$

che soddisfa le seguenti proprietà $\forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:

1. Nilpotenza: $[X, X] = 0$.
2. Identità di Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.
3. Bilinearità: vedi Definizione 1.6

Risulta subito evidente che la prima e la terza proprietà comportano l'*antisimmetria* dell'algebra di Lie: $[X, Y] = -[Y, X]$

Corollario 1.3. Ogni algebra associativa A può essere resa un'algebra di Lie definendo il prodotto di Lie come il commutatore, ossia:

$$[X, Y] = XY - YX \quad \forall X, Y \in A$$

Ad ogni gruppo di Lie si può associare un'algebra di Lie costruendo lo spazio tangente del gruppo nell'identità (ricordiamo che un gruppo di Lie è una varietà differenziabile liscia) e costruendo su questo spazio vettoriale un'algebra di Lie, in modo tale che ne esprima completamente la struttura locale (vedi Appendice A.7).
Il gruppo generale lineare, indicato con $GL(n, \mathbb{K})$, è il gruppo di tutte le matrici $n \times n$ invertibili a valori in $\mathbb{K}$, con l'operazione di gruppo data dal prodotto di matrici, definita come sotto. $GL(n, \mathbb{K})$ è a sua volta un gruppo di Lie, in quanto le operazioni di inversione e di moltiplicazione sono entrambe differenziabili di classe C^∞. Ogni sottogruppo di $GL(n, \mathbb{K})$ è a sua volta un gruppo di Lie, in quanto eredita le operazioni e la struttura dal gruppo. In questo elaborato consideriamo solamente gruppi e algebre di Lie di matrici.

Notiamo inoltre che lo spazio delle matrici $M(n, \mathbb{K})$, cioè delle matrici $n \times n$ a valori in $\mathbb{K}$, è un'algebra associativa e unitaria sotto le operazioni di:

- Somma tra matrici, $A + B$: $\{A + B\}_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$,
- Prodotto tra matrici $A \cdot B$: $\{A + B\}_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{ki}$,
- Prodotto scalare $\lambda \cdot A$: $\{\lambda \cdot A\}_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

L'algebra appena definita è associativa, ragion per cui, grazie al Corollario 1.3, possiamo ricavarne un'algebra di Lie.
Ogni endomorfismo in uno spazio vettoriale V di dimensione n è rappresentabile con una matrice $M(n, \mathbb{K})$.

Definizione 1.17 (Rappresentazione)**.** Sia G un gruppo (o un'algebra di Lie) e V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$. Sia ϕ un omomorfismo che manda ogni elemento $g \in G$ in un endomorfismo di V, $\phi(g) : V \to V$.
Possiamo dunque rappresentare $\phi(g)$ come una matrice $n \times n$. Lo spazio vettoriale V è allora detto la *rappresentazione* del gruppo (o dell'algebra di Lie) G.

Notiamo che se G è un gruppo di Lie, allora l'omomorfismo ϕ è un omomorfismo tra gruppi, $\phi : G \to GL(V)$, che rappresenta G in un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{K})$; se $\mathfrak{g}$ è la corrispettiva algebra di Lie, allora $D\phi$, che per ogni $X \in \mathfrak{g}$ è definito come

$$D\phi(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi(e^{tX}))$$

manda $\mathfrak{g}$ in una sottoalgebra di Lie di $M(n, \mathbb{K})$.
Un sottospazio vettoriale W di V è definito *sottorappresentazione* se per ogni $g \in G$ e per ogni $\boldsymbol{w} \in W$ si ha che $\phi(g)(\boldsymbol{w}) \in W$, e W è quindi "invariante" rispetto alle azioni di G. Se le uniche sottorappresentazioni di V sono quelle banali, ovvero il vettore nullo e V stesso, allora si parla di rappresentazione *irriducibile*, in caso contrario *riducibile*.

Lemma 1.4 (Lemma di Schur)**.** Sia G un gruppo, siano $\psi : G \to GL(V)$ e $\phi : G \to GL(V)$ due sue rappresentazioni irriducibili su campo $\mathbb{C}$, e sia $T : V \to V$ una trasformazione lineare tale che $\forall g \in G, \forall \boldsymbol{v} \in V$

$$T(\psi(g)\boldsymbol{v}) = \psi(g)T(\boldsymbol{v}) \quad \text{con } T \neq 0.$$

Allora T è un isomorfismo e, se $\psi = \phi$, l'operatore è proporzionale all'identità.

Capitolo 2

Algebra di Clifford

Abbiamo ora tutti gli strumenti necessari per poter definire l'Algebra di Clifford e discuterne proprietà e caratteristiche.

Definizione 2.1 (Forma quadratica)**.** Una *forma quadratica* su uno spazio vettoriale V n-dimensionale su campo $\mathbb{K}$ è un polinomio omogeneo di secondo grado in n variabili:

$$q : V \to \mathbb{K} \qquad \boldsymbol{v} \to q(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{i=n}(\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}v_iv_j)$$

Definizione 2.2 (Spazio vettoriale quadratico)**.** Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $B : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica. A partire da B possiamo costruire una forma quadratica Q, $Q(\boldsymbol{v}) = B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$. Possiamo ricavarci B da Q tramite la seguente *formula di polarizzazione*:

$$B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}(Q(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) - Q(\boldsymbol{v}) - Q(\boldsymbol{w})) \tag{2.1}$$

La coppia (V, Q) è detta *spazio vettoriale quadratico.*

Come evidente dalla formula di polarizzazione le forme quadratiche non sono lineari.

Definizione 2.3 (Algebra di Clifford)**.** Prendiamo uno spazio vettoriale quadratico (V, Q) e un'algebra associativa A, con unità 1_A, entrambi definiti sul campo $\mathbb{K}$. Una mappa lineare $\phi : V \to A$ tale per cui:

$$\forall\, \boldsymbol{v} \in V \quad \phi(\boldsymbol{v})^2 = -Q(\boldsymbol{v}) \cdot 1_A$$

è detta *mappa di Clifford.*
Sia C un'algebra legata a (V, Q) con la mappa di Clifford ϕ_C. Allora C è detta *algebra di Clifford*, ed indicata con $C\ell(V, Q)$, se per ogni mappa di Clifford $\phi_{A'}$ in A' esiste un solo omomorfismo $\gamma : C\ell(V, Q) \to A'$ che fattorizza $\phi_{A'}$ tramite ϕ_C, ovvero per cui $\gamma \circ \phi_C = \phi_{A'}$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\phi_C"] \arrow[dr, "\phi_{A'}"'] & C\ell(V,Q) \arrow[d, "\gamma"] \\
& A'
\end{tikzcd}$$

Teorema 2.1 (Unicità)**.** L'algebra di Clifford, se esiste, è unica a meno di isomorfismi.

Dimostrazione. Siano C_1 e C_2 due algebre di Clifford su (V, Q), rispettivamente con mappe di Clifford ϕ_1 e ϕ_2. Ne segue immediatamente che esiste un unico omomorfismo $f : C_1 \to C_2$ tale che $\phi_2 = f \circ \phi_1$ e un unico omomorfismo $f' : C_2 \to C_1$ tale che $\phi_1 = f' \circ \phi_2$. Di conseguenza la mappa composta $f' \circ f : C_1 \to C_1$ è tale che $\phi_1 = (f' \circ f) \circ \phi_1$, proprio come fa la mappa identitaria. Essendo tale composizione unica, possiamo identificare $f' \circ f$ con 1_{C_1}. Operando lo stesso ragionamento con $f \circ f'$, che quindi risulta uguale a 1_{C_2}, otteniamo che $f : C_1 \to C_2$ è un isomorfismo. $\square$

2.1 Costruzione dell'algebra

Sia (V, Q) uno spazio vettoriale quadratico su $\mathbb{K}$, e $T(V)$ la sua algebra tensoriale. Definiamo I come l'ideale bilatero generato da:

$$S = \{\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} + Q(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in V\} \tag{2.2}$$

É immediato verificare che $S \subset T(V)$.
Sia ora ϕ una mappa di Clifford da V a una generica algebra associativa e unitaria A, e $\phi^{\sim}$ la sua estensione su $T(V)$ (Vedi Teorema 1.2). Se $\boldsymbol{\pi}$ e $\boldsymbol{\mu}$ sono elementi di $T(V)$, e $\boldsymbol{v}$ appartiene a V, allora:

$$\phi^{\sim}(\boldsymbol{\pi} \otimes (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} + Q(\boldsymbol{v})) \otimes \boldsymbol{\mu}) = \phi^{\sim}(\boldsymbol{\pi}) \cdot [\phi(\boldsymbol{v}) \cdot \phi(\boldsymbol{v}) + Q(\boldsymbol{v}) \cdot 1_A] \cdot \phi^{\sim}(\boldsymbol{\mu}) = 0$$

In sostanza l'omomorfismo $\phi^{\sim}$ manda a zero ogni elemento di I. Esiste quindi (vedi Appendice A.8) un omomorfismo unico, $\overline{\phi^{\sim}} : T(V)/I \to A$, definito come $\overline{\phi^{\sim}}([\boldsymbol{\pi}]) = \phi^{\sim}(\boldsymbol{\pi})$, che fattorizza $\phi^{\sim}$ tramite la proiezione canonica.
Identifichiamo dunque in $T(V)/I$ l'Algebra di Clifford, $C\ell(V, Q)$, e chiamiamo $k : V \to C\ell(V, Q)$ la mappa di Clifford data da $k = \pi \circ i$ (Vedi Figura 2.1).

Delineiamo subito una proprietà di quest'algebra:

$$\boldsymbol{v} \in V \to k(\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{v}] \in C\ell(Q, V) \quad \boldsymbol{w} \in V \to k(\boldsymbol{w}) = [\boldsymbol{w}] \in C\ell(Q, V)$$

$$[\boldsymbol{v}] \cdot [\boldsymbol{w}] + [\boldsymbol{w}] \cdot [\boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} + Q(\boldsymbol{v})1_{C\ell} + \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{w} + Q(\boldsymbol{w})1_{C\ell}] =$$

$$= [(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \otimes (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) + Q(\boldsymbol{v})1_{C\ell} + Q(\boldsymbol{w})1_{C\ell}] = 2B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

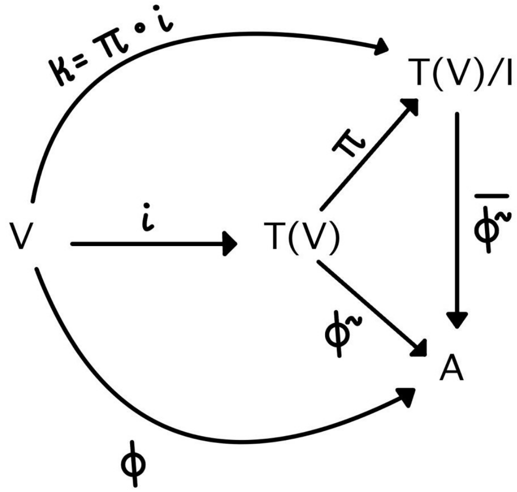

Figura 2.1

Dove nel primo passaggio abbiamo aggiunto due elementi di I, quindi nulli nello spazio quoziente, e successivamente abbiamo raccolto a fattori e utilizzato la formula di polarizzazione, con B la forma bilineare simmetrica associata a Q. Riassumendo in un'unica equazione questo risultato:

$$[\boldsymbol{v}] \cdot [\boldsymbol{w}] + [\boldsymbol{w}] \cdot [\boldsymbol{v}] = 2B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \tag{2.3}$$

Notiamo che, a differenza dell'algebra di Grassmann, l'algebra di Clifford non è graduata: l'ideale generato dall'Equazione 2.2 non è graduato.
Possiamo però dotare un'algebra di Clifford di una struttura $\mathbb{Z}_2$-graduata,

$$C\ell(V,Q) = C\ell(V,Q)_{pari} \oplus C\ell(V,Q)_{dispari},$$

utilizzando l'operatore riflessione $r : V \to V$, che manda $r(\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{v}$, esteso a tutto $C\ell(V,Q)$. Dato che r è un endomorfismo e che $r^2 = id$, i suoi autovalori possibili sono soltanto $+1$ e -1. Dal Teorema Spettrale segue che (vedi Appendice A.9) $C\ell(V,Q)$ è scomponibile negli autospazi corrispondenti agli autovalori $+1$ e -1:

$$C\ell(V,Q)_{pari} = \{[\boldsymbol{\pi}] \in C\ell(V,Q) \mid r([\boldsymbol{\pi}]) = [\boldsymbol{\pi}]\}$$

$$C\ell(V,Q)_{dispari} = \{[\boldsymbol{\pi}] \in C\ell(V,Q) \mid r([\boldsymbol{\pi}]) = -[\boldsymbol{\pi}]\}$$

Se $[\boldsymbol{\pi}], [\boldsymbol{\mu}] \in C\ell(V,Q)$ sono vettori omogenei di grado i, e j rispettivamente, allora

$$r([\boldsymbol{\pi}]) = r([\boldsymbol{v_1}] \cdot ... \cdot [\boldsymbol{v_i}]) = r([\boldsymbol{v_1}]) \cdot ... \cdot r([\boldsymbol{v_i}]) = (-1)^i \cdot ([\boldsymbol{v_1}] \cdot ... \cdot [\boldsymbol{v_i}]) = (-1)^i [\boldsymbol{\pi}]$$

$$r([\boldsymbol{\pi\mu})] = (-1)^{i+j} [\boldsymbol{\pi\mu}],$$

e viene quindi rispettata la regola della moltiplicazione dell'Equazione 1.6.

Notiamo infine come, ponendo la forma quadratica $Q = 0$, otteniamo subito un isomorfismo tra $C\ell(V,Q)$ e l'Algebra di Grassmann $\Lambda(V)$. La relazione tra queste due algebre è interessante e verrà affrontata in forma più generale nelle pagine successive.

2.2 Classificazione

Abbiamo visto, nella Definizione 2.2, che ad una forma quadratica Q è associata univocamente una forma bilineare B tramite la formula di polarizzazione (Equazione 2.1). Se abbiamo uno spazio quadratico (V,Q) n-dimensionale possiamo dunque costruire una base di V, $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n}\}$, tale che $B(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j}) \equiv B_{ij} = B(\boldsymbol{e_j}, \boldsymbol{e_i}) \equiv B_{ji}$. Sia k la mappa definita nella costruzione dell'algebra di Clifford, mostrata in Figura 2.1, con $i : V \to C\ell(V,Q)$ con cui costruiamo le immagini della base nell'algebra di Clifford, denotando $k(\boldsymbol{e_i}) = \Gamma_i$. Le Γ_i sono i generatori dell'algebra e, come visto nell'Equazione 2.3, soddisfano la relazione:

$$\Gamma_i\Gamma_j + \Gamma_j\Gamma_i = -2B_{ij}1_{C\ell} \tag{2.4}$$

I generatori di un'algebra A sono un insieme di elementi dell'algebra tali che, combinandoli tramite le operazioni definite su A (prodotto, somma e moltiplicazione per scalare), è possibile ottenere ogni suo elemento.
Da cui possiamo ricavarci il prodotto tra due generatori, denominando $\frac{1}{2}[\Gamma_i\Gamma_j - \Gamma_j\Gamma_i] = \Gamma_{ij}$:

$$\Gamma_i\Gamma_j = \Gamma_{ij} + B_{ij}1_{C\ell}$$

Continuando a ragionare in questo modo possiamo poi computare il prodotto di tre generatori, che dipenderà da Γ_{ijk} e così via. In generale vediamo che un generico elemento di $C\ell(V,Q)$ è dato dalla combinazione lineare di $1_{C\ell}, \Gamma_{ij}, \Gamma_{ijk}...$ e quindi possiamo ricavarci $dim(C\ell(V,Q)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Notiamo immediatamente che la dimensione è la stessa dell'algebra di Grassmann su V, e infatti possiamo vedremo più avanti come costruire una mappa per collegare queste due algebre.
Prima di andare avanti risulta utile definire un insieme molto utilizzato in svariati campi e utile anche nella classificazione delle algebre di Clifford. Lo denominiamo $\mathbb{H}$, l'insieme dei quaternioni.

Definizione 2.4 (Quaternioni)**.** Un quaternione è un elemento esprimibile come:

$$a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

dove valgono le seguenti relazioni tra i simboli $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$:

- $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1$;
- $1\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}1 = \boldsymbol{i}, \quad 1\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}1 = \boldsymbol{j}, \quad 1\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}1 = \boldsymbol{k}$;
- $\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}$;

L'insieme dei quaternioni non forma un campo, in quanto non vale la proprietà commutativa del prodotto. Si può però verificare che l'insieme forma uno spazio vettoriale di dimensione 4 su $\mathbb{R}$.
Prendiamo uno spazio vettoriale quadratico (V, Q), di dimensione n, sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$. Dal teorema spettrale (si veda l'Appendice A.10), sappiamo che possiamo scegliere una base ortonormale di V per cui la forma bilineare simmetrica B associata a Q è diagonale e della forma:

$$\begin{pmatrix} 0_r & & \\ & 1_s & \\ & & -(1_t) \end{pmatrix}$$

Con $n = r+s+t$, 1_k che rappresenta la matrice identità $k \times k$ e 0_k la matrice nulla $k \times k$. Concentrandoci al caso non degenere, per cui $r = 0$, indichiamo l'algebra di Clifford corrispondente con $C\ell(s,t)$. Ricordando che due algebre sono isomorfe se generate dallo stesso insieme con le medesime relazioni, possiamo ora analizzare alcuni semplici casi utilizzando l'Equazione 2.4.

- $C\ell(0,0)$. Si tratta di un'algebra associativa senza generatori. Risulta quindi isomorfa a $\mathbb{R}$ tramite $x1_{C\ell} \leftrightarrow x$.
- $C\ell(1,0)$. É generata da Γ che rispetta la proprietà $\Gamma^2 = -1$. Ogni elemento può essere scritto come combinazione lineare di Γ e $1_{C\ell}$ e risulta perciò isomorfa all'algebra reale associativa $\mathbb{C}$.
- $C\ell(2,0)$. Dove i generatori Γ_1 e Γ_2 devono sottostare alle relazioni $\Gamma_1^2 = -1 = \Gamma_2^2$ e $\Gamma_1\Gamma_2 = -\Gamma_2\Gamma_1$. Risulta dunque isomorfa all'algebra dei quaternioni, $\mathbb{H}$.
- $C\ell(1,1)$. Γ_1 e Γ_2 rispettano le relazioni $\Gamma_1^2 = -1$ e $\Gamma_2^2 = 1$, sempre con $\Gamma_1\Gamma_2 = -\Gamma_2\Gamma_1$. L'algebra risulta isomorfa a quella delle matrici Reali 2×2, con isomorfismo dato esplicitamente da:

$$x1_{C\ell} + y\Gamma_1 + z\Gamma_2 + k\Gamma_1\Gamma_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} x+z & y+k \\ -y+k & x-z \end{pmatrix}$$

- $C\ell(3,1)$. Questo caso risulta troppo complicato da risolvere immediatamente soltanto conoscendo le proprietà dei generatori, per cui ci avvaliamo dei seguenti risultati:

Teorema 2.2. Abbiamo denotato con $M(n, \mathbb{K})$ l'algebra delle matrici $n \times n$ a valori in $\mathbb{K}$. Per $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ vale il seguente isomorfismo:

$$M(n, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{K} \cong M(n, \mathbb{K})$$

In sostanza ogni matrice A a valori reali diventa una matrice con coefficienti in $\mathbb{K}$ se moltiplichiamo ogni sua entrata per un elemento di $\mathbb{K}$.

Teorema 2.3. Per ogni $s, t \in \mathbb{N}$, vale l'isomorfismo

$$C\ell(s, t) \otimes C\ell(1, 1) \cong C\ell(s + 1, t + 1).$$

Dimostrazione. Chiamiamo i generatori di $C\ell(s, t)$: $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s, \Xi_1, \ldots, \Xi_t\}$, di $C\ell(1, 1)$: u e v e costruiamo quelli di $C\ell(s+1, t+1)$ prendendo il set di $C\ell(s, t)$ e aggiungendoci Γ_{s+1}, Ξ_{t+1}.

Definiamo una mappa lineare $\Phi : C\ell(s, t) \otimes C\ell(1, 1) \to C\ell(s+1, t+1)$, nei generatori come:

$$\Phi(\Gamma_i \otimes 1) = \Gamma_i, \quad \Phi(\Xi_j \otimes 1) = \Xi_j,$$
$$\Phi(1 \otimes u) = \Gamma_{s+1}, \quad \Phi(1 \otimes v) = \Xi_{t+1}$$

che estendiamo poi per linearità a tutto $C\ell(s, t) \otimes C\ell(1, 1)$.É facile verificare che le relazioni dei generatori sono preservate dalla mappa, che quindi risulta essere un omomorfismo tra algebre, e siccome le dimensioni di $C\ell(s, t) \otimes C\ell(1, 1)$ e $C\ell(s + 1, t + 1)$ coincidono abbiamo trovato l'isomorfismo.

□

Avendo già classificato le algebre $C\ell(1, 1)$ e $C\ell(2, 0)$, possiamo subito dire che:

$$C\ell(3, 1) \cong \mathbb{H} \otimes M(2, \mathbb{R}) \cong M(2, \mathbb{H}) \tag{2.5}$$

I generatori di $C\ell(3, 1)$, che seguono la regola di anticommutazione:

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = -2\eta_{ij}1_{C\ell},$$

sono detti *matrici di Dirac.*

Per motivi che diventeranno chiari nel prossimo capitolo, siamo molto interessati alla classificazione dell'algebra di Clifford pari, soprattutto nel caso di uno spazio vettoriale con segnatura $(3, 1)$. Il seguente teorema è incredibilmente utile per classificare la costruzione pari dell'algebra in quanto ci permette di legarla alla classificazione dell'algebra stessa.

Teorema 2.4.

$$C\ell(s, t) \cong C\ell_{pari}(s + 1, t)$$

Possiamo classificare anche $C\ell_{pari}(3, 1)$ combinando tutto lo studio che abbiamo affrontato in questa sezione:

$$C\ell_{pari}(3, 1) \cong C\ell(2, 1) \cong C\ell(1, 0) \otimes C\ell(1, 1) \cong \mathbb{C} \otimes M(2, \mathbb{R}) \cong M(2, \mathbb{C}).$$

2.3 Relazione con l'algebra di Grassmann

L'algebra di Grassmann, $\Lambda(V)$, è naturalmente *filtrata* (rimandiamo all'Appendice A.1 per la definizione), tramite l'insieme $\{F_i\}$ dato da:

$$F_i = \sum_{j \leq i} V^{\otimes j},$$

che rispetta la proprietà $F_i \otimes F_j \subseteq F_{i+j}$. Possiamo ottenere una filtrazione per $C\ell(V,Q)$ utilizzando la proiezione canonica $\pi : T(V) \to T(V)/I \cong C\ell(V,Q)$, π: $F_i \to k(F_i) \equiv F_i^{\sim}$, che rispetta naturalmente $F_i^{\sim} \cdot F_j^{\sim} \subseteq F_{i+j}^{\sim}$, rendendo così $C\ell(V,Q)$ un'algebra filtrata. Definiamo l'*algebra graduata associata* di $C\ell(V,Q)$:

$$gr(C\ell(V,Q)) = \bigoplus_{i \in I} G_i, \quad G_i = F_i^{\sim}/F_{i-1}^{\sim},, \quad G_0 = F_0^{\sim}.$$

con il prodotto dato da $G_i \times G_j = G_{i+j}$.
Vediamo allora che due elementi generici $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ di V, mappati in $gr(C\ell(V,Q))$, sono tali per cui vale che $([\boldsymbol{v}] \times [\boldsymbol{w}]) + ([\boldsymbol{w}] \times [\boldsymbol{v}]) = 0$, perché la forma quadratica appartiene a G_0 e viene dunque "filtrata" via dallo spazio quoziente. Più in generale, se ho due elementi rispettivamente di grado i e j, $g_i \in G_i$ e $g_j \in G_j$, allora varrà: $(g_1 \times g_2) = (-1)^{i \cdot j}(g_2 \times g_1)$, per cui $gr(C\ell(V,Q))$ è un'algebra supercommutativa. In questo modo possiamo affermare che esiste un isomorfismo tra $gr(C\ell(V,Q))$ e $\Lambda(V)$ (per una dimostrazione più completa rimandiamo il lettore al primo capitolo del libro [2]).

Capitolo 3

Gruppo di Spin

Durante il corso di questo capitolo andremo a costruire il gruppo di Spin, passando per il gruppo di Pin, e ne studieremo alcune proprietà. Arriveremo infine a costruire una relazione molto importante tra tale gruppo e quello delle matrici ortogonali speciali.

3.1 Gruppo di Pin

D'ora in avanti considereremo (V, Q) essere uno spazio vettoriale quadratico *non degenere* n-dimensionale. Renderemo inoltre implicita, quando possibile, l'applicazione $k : V \to C\ell(V, Q))$, identificando in $k(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$, $V \subset C\ell(V, Q)$. Allora ogni vettore $\boldsymbol{v} \in V \subset C\ell(V, Q)$ è invertibile in tale algebra, con inverso dato da $\boldsymbol{v}^{-1} = -\boldsymbol{v}/Q(\boldsymbol{v})$. Notiamo che, non essendo vuoto il sottoinsieme invertibile di un'algebra di Clifford, possiamo affermare che tale sottoinsieme è un gruppo con l'operazione binaria data dal prodotto dell'algebra, e lo denotiamo con $C\ell(V, Q)^*$.

Teorema 3.1. Ogni algebra di Clifford $C\ell(V, Q)$ ha una mappa lineare unica $\rho : C\ell(V, Q) \to C\ell(V, Q)$ tale che, per ogni $\pi \in C\ell(V, Q)$:

- $\rho(\pi) = -\pi$,
- $\rho(\rho(\pi)) = \pi$.

Dimostrazione. La dimostrazione discende direttamente dalla definizione di Algebra di Clifford. Infatti definendo la mappa lineare: $\phi : V \to C\ell(V, Q)$, definita con $\phi(\boldsymbol{v}) = -k(\boldsymbol{v})$, di conseguenza tale per cui $\phi(-\boldsymbol{v}) = k(\boldsymbol{v})$, sappiamo che esiste un unico omomorfismo che manda $k(\boldsymbol{v})$ in $-k(\boldsymbol{v})$. Ogni elemento di $C\ell(V, Q)$ è esprimibile come combinazione lineare di elementi di V e questo conclude la nostra dimostrazione. $\square$

Utilizzeremo per comodità la notazione $\bar{\pi}$ per riferirci a $\rho(\pi)$.

Definizione 3.1 (Gruppo di Pin)**.** Il *gruppo di Pin*, $\text{Pin}(V, Q)$, è definito come il sottogruppo di $C\ell(V, Q)^*$ generato dai vettori $\boldsymbol{v} \in V$ tali per cui $Q(\boldsymbol{v}) = \pm 1$. In maniera più esplicita:

$$\text{Pin}(V, Q) = \{\boldsymbol{v_1} \cdot ... \cdot \boldsymbol{v_k} \mid Q(\boldsymbol{v_i}) = \pm 1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \boldsymbol{v} \in V\}$$

Costruiamo ora l'*azione aggiunta*, $Ad_v : V \to V$, come la mappa che manda $\boldsymbol{w} \in V$ in $Ad_v(\boldsymbol{w}) = \bar{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w}\boldsymbol{v}^{-1}$.
In uno spazio vettoriale quadratico, l'operazione di riflessione di un vettore $\boldsymbol{x}$ su un iperpiano ortogonale a $\boldsymbol{y}$ è data da

$$R_v(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2\frac{B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{Q(\boldsymbol{y})} \cdot \boldsymbol{y}.$$

Dove l'iperpiano ortogonale a $\boldsymbol{y}$ è dato dall'insieme di vettori per cui il prodotto scalare con $\boldsymbol{y}$ è nullo.
Possiamo dunque vedere che l'azione aggiunta rappresenta la riflessione di $\boldsymbol{w}$ sull'iperpiano tangente a $\boldsymbol{v}$:

$$Ad_v(\boldsymbol{w}) = \bar{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w}\boldsymbol{v}^{-1} = \frac{1}{Q(\boldsymbol{v})}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}\boldsymbol{v} = \frac{1}{Q(\boldsymbol{v})}[\boldsymbol{w}\boldsymbol{v} - 2B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})] = R_v\boldsymbol{w}$$

Teorema 3.2 (Cartan-Dieudonné)**.** Sia $O(V)$ il gruppo degli automorfismi lineari che agiscono su (V, Q) lasciando invariata la forma bilineare. Ogni elemento g del gruppo è una composizione di al più n riflessioni.

Ne segue che estendendo l'operatore di azione aggiunta Ad_v al gruppo di Pin, $Ad_a(\boldsymbol{x}) = \bar{a}\boldsymbol{x}a^{-1}$, con $a \in \text{Pin}(V, Q)$ e quindi esprimibile come $a = \boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2} \cdot ... \cdot \boldsymbol{v_k}$ con $Q(\boldsymbol{v_i}) = \pm 1$, otteniamo una composizione di riflessioni, $Ad_a = R_{u_1} \circ \cdots \circ R_{u_k}$, che si traduce in un omomorfismo *suriettivo* tra gruppi, $Ad : \text{Pin}(V, Q) \to O(V)$.
Costruiamo ora il nucleo dell'azione.
Se $a \in Ker(Ad)$ allora per ogni $\boldsymbol{v} \in V$ abbiamo che $\bar{a}\boldsymbol{v}a^{-1} = \boldsymbol{v}$, $\bar{a}\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v}$. Dividendo a nelle sue parti pari e dispari, $a = a_p + a_d$, vediamo che $\bar{a} = a_p - a_d$, ognuno dei quali deve soddisfare la coppia di equazioni:

$$a_p\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}a_p \qquad a_d\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}a_d$$

Ne consegue che nessuno dei due elementi dipende dalla base ortonormale di B, per cui a_p e a_d devono essere entrambi coefficienti in $\mathbb{K}$ moltiplicati per $1_{C\ell}$, ma gli scalari fanno parte della componente pari di $C\ell(V, Q)$, ragion per cui otteniamo: $a_d = 0, \quad a_0 = \alpha 1_{C\ell}$.
Per studiare il coefficiente α notiamo infine che:

$$\alpha Q(1_{C\ell}) = Q(a_0) = Q(u_1) \cdot \ldots \cdot Q(u_n) = \pm 1_{C\ell} \Rightarrow \alpha = \pm 1$$

Ne concludiamo che il nucleo di $Ad : \text{Pin}(V, Q) \to O(V, Q)$ è $\{\pm 1_{C\ell}\}$.
Per ogni trasformazione ortogonale in $O(V)$ abbiamo quindi esattamente due pre-immagini in $\text{Pin}(V, Q)$, una l'opposto dell'altra, come mostrato in Figura 3.1.

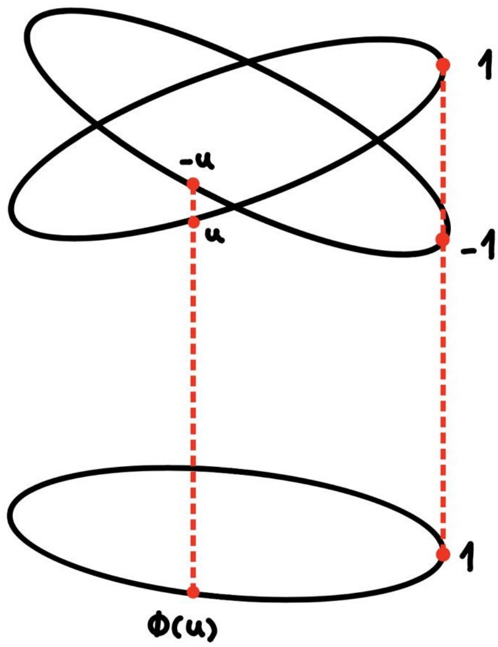

Figura 3.1

3.2 Gruppo di Spin e rivestimento universale

Siamo finalmente pronti a dare una definizione per il Gruppo di Spin, che denotiamo come $\mathrm{Spin}(V,Q)$. Indicheremo con $\mathrm{Spin}(s,t)$ il gruppo costruito dall'algebra di Clifford sul campo reale con forma bilineare di segnatura (s,t).

Definizione 3.2. Definiamo il *Gruppo di Spin* come l'intersezione tra il gruppo $\mathrm{Pin}(V,Q)$ e l'algebra di Clifford pari su (V,Q). In maniera equivalente possiamo dire:

$$\mathrm{Spin}(V,Q) = \{\boldsymbol{u_1}, ..., \boldsymbol{u_{2k}} \mid Q(\boldsymbol{u_i}) = \pm 1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \boldsymbol{u_i} \in V\}$$

Ogni riflessione R_v ha determinante -1, dunque restringendo il dominio dell'azione al gruppo di Spin, vediamo che $det(Ad_a) = det(R_{v_1} \cdot ... \cdot R_{v_{2k}}) = (-1)^{2k} = +1$, con $a \in \mathrm{Spin}(V,Q)$. Osserviamo infine che $\{\pm 1_{C\ell}\}$ appartiene al gruppo di Spin. Con ragionamenti analoghi al caso del gruppo di Pin possiamo quindi dire che:

$$Ad : \mathrm{Spin}(V,Q) \to SO(V) \tag{3.1}$$

è un omomorfismo suriettivo con nucleo $\{\pm 1_{C\ell}\}$.

Ci concentriamo ora sul caso particolare con V definita sul campo $\mathbb{R}$, $\dim(V) = 4$ con segno $(3,1)$, dove $\mathrm{SO}(3,1)$ è il *gruppo di Lorentz*. Come mostrato in Appendice C.2, $SO(3,1)$ ha due componenti connesse; chiamiamo $\mathrm{SO}^+(3,1)$ quella che preserva l'orientamento temporale e chiamiamo $\text{Spin}^+(3,1)$ la sua retroimmagine tramite Ad. Un risultato classico mostra che

$$\text{Spin}^+(3,1) \;\cong\; \text{SL}(2,\mathbb{C}),$$

Dove $\text{SL}(2,\mathbb{C})$ è il gruppo di Lie delle matrici 2×2 a valori in $\mathbb{C}$ con determinante $= 1$. Cerchiamo ora di capire l'utilità della costruzione di $\text{Spin}^+(3,1)$ caratterizzando la relazione tra $\text{Spin}^+(3,1)$ e $SO^+(3,1)$.
Sia X uno spazio topologico. Il suo *gruppo fondamentale* $\pi_1(X)$ è definito intuitivamente come il gruppo delle classi di equivalenza di *lacci* omotopi centrati in un punto $p \in X$. Un *laccio* è una mappa continua

$$\gamma : [0,1] \to X$$

tale che

$$\gamma(0) = \gamma(1) = p.$$

Due lacci γ e γ' si dicono omotopi se possono essere deformati l'uno nell'altro in modo continuo, lasciando fissi gli estremi.

È un risultato classico che il gruppo fondamentale di $SO^+(3,1)$ è

$$\pi_1(SO^+(3,1)) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Ciò significa che esiste un laccio non contrattile che rappresenta un elemento non banale di $\mathbb{Z}_2$. Questo laccio può essere identificato con una rotazione di 2π attorno a un asse, tuttavia una rotazione di 4π è invece contrattile a un punto. Fisicamente questo implica che ruotando un sistema di $360°$ lo stato può modificarsi in un modo non banale: è proprio quello che succede nel caso di particelle con spin $1/2$, che rispondono a una rotazione di 2π cambiando segno.

Di conseguenza, ogni laccio in $SO^+(3,1)$ che non può essere omotopicamente ridotto a un punto viene "sollevato", grazie alle proprietà date dal nucleo dell'omomorfismo tra questi due gruppi, $Ker(Ad) = \{+1,-1\}$, a un percorso continuo in $\text{Spin}^+(3,1)$: corrisponde a un cammino da 0 a 2π nel rivestimento. Perché il cammino diventi un laccio deve andare fino a 4π nel rivestimento. In questo modo il gruppo fondamentale $\pi_1(\text{Spin}^+(3,1)) \cong 0$, per cui risulta semplicemente connesso e la mappa $Ad : \text{Spin}^+(3,1) \to SO^+(3,1)$ rappresenta il *rivestimento universale* di $SO^+(3,1)$. Un rivestimento universale è una mappa continua e suriettiva tra spazi topologici che collega un insieme semplicemente connesso a un insieme connesso.

3.3 Algebra di Lie del gruppo

Consideriamo la base ortonormale di (V,Q), $\{e_1,...,e_n\}$ e prendiamo gli elementi di $C\ell(V,Q)$ della forma

$$E_{ij} = [e_i, e_j] = e_i e_j - e_j e_i,$$

che chiamiamo *bivettori*. Essi rispettano la proprietà di antisimmetria ($E_{ij} = -E_{ji}$) e l'identità di Jacobi. Utilizzando le proprietà dell'algebra di Clifford, incluso il fatto che $\forall e_i, e_j$ con $j \neq i$ si ha che $e_i e_j = -e_j e_i$, si può dimostrare con semplici calcoli che per ogni due bivettori il loro commutatore è ancora esprimibile come combinazione lineare degli elementi $[e_i, e_j]$. Costruiamo allora lo spazio vettoriale dallo span di

$$\{[e_i, e_j] \mid i < j, \quad j = 1, \ldots, n\},$$

che è naturalmente dotato, come abbiamo visto, di una struttura algebrica di Lie.

Teorema 3.3.

$$\mathfrak{spin}(s,t) = Lie(\mathrm{Spin}(s,t)) = span\,\{[e_i, e_j] \mid i < j, \quad j = 1, \ldots, s+t = n\}$$

Dimostrazione. Per prima cosa notiamo che

$$e_i e_j = \frac{1}{2}([e_i, e_j] - \{e_i, e_j\})$$

dove $\{e_i, e_j\} = e_i e_j + e_j e_i$ è l'anticommutatore, che risulta essere uno scalare e quindi che non contribuisce in quanto generatore. Verifichiamo allora che $\mathrm{span}\{e_i e_j \mid i < j\} \subset \mathfrak{spin}(s,t)$.

Sia $e_i^2 = e_j^2$. Definiamo la curva $\gamma(\theta) = \cos\theta + e_i e_j \sin\theta$. Questa curva passa per l'identità: $\gamma(0) = \cos(0) + e_i e_j \sin(0) = 1$, ed è contenuta in $\mathrm{Spin}(s,t)$, infatti appartiene alla componente pari di $C\ell(s,t)$ (è formata da uno scalare e un vettore di grado 2).

Si ha che:

$$Q(\gamma(\theta)) = \gamma(\theta)\gamma(\theta)^*.$$

Sviluppiamo:

$$(\cos\theta + e_i e_j \sin\theta)(\cos\theta - e_i e_j \sin\theta) = \cos^2\theta - e_i e_j \sin\theta e_i e_j \sin\theta.$$

Poiché e_i e e_j anticommutano:

$$e_i e_j \sin\theta e_i e_j \sin\theta = \sin^2\theta.$$

Otteniamo quindi:

$$Q(\gamma(\theta)) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Dunque $\gamma(\theta) \in \mathrm{Pin}(s,t)$ e quindi appartiene a $\mathrm{Spin}(s,t)$.

Calcoliamo ora il vettore tangente alla curva:

$$\frac{d}{d\theta}\gamma(\theta) = -\sin\theta + e_i e_j \cos\theta = e_i e_j,$$

Se $e_j^2 \neq e_i^2$, definiamo la curva $\gamma(\theta) = \cosh\theta + e_i e_k \sinh\theta$, e otteniamo risultati analoghi a quelli sopra. In entrambi i casi quindi la composizione $e_i e_j$ appartiene allo spazio tangente ad un elemento del gruppo in zero. Segue che ogni elemento della forma $e_i e_j$ appartiene a $\mathfrak{spin}(s,t)$.

Inoltre, essendo $\mathrm{Spin}(s,t)$ il doppio ricoprimento di $SO(s,t)$, è noto dalla teoria che le loro algebre di Lie devono avere la stessa dimensione, cioè:

$$\dim \mathfrak{spin}(s,t) = \binom{s+t}{2}$$

ed è ovvio che questa è anche la dimensione di $span\{e_i e_j \mid i < j < s+t\}$. Possiamo quindi identificare le due algebre. □

Teorema 3.4. Esiste un isomorfismo tra le algebre di Lie $\mathfrak{spin}(s,t)$ e $\mathfrak{so}(s,t)$,

$$\mathfrak{spin}(s,t) \cong \mathfrak{so}(s,t).$$

Dimostrazione. Definiamo una mappa lineare, $\phi : \mathfrak{spin}(s,t) \to \mathfrak{so}(s,t)$ tramite l'azione sullo spazio vettoriale V:

$$\phi(E)(v) = [E,v] = E\,v - v\,E, \quad \text{per ogni } v \in V,\ E \in \mathfrak{spin}(s,t).$$

Per definizione, le trasformazioni ottenute in questo modo sono trasformazioni che preservano la forma quadratica definita da B; dunque $\phi(E) \in \mathfrak{so}(s,t)$. Usando l'associatività di $Cl(s,t)$ e le proprietà del commutatore, si verifica facilmente che per ogni $E, F \in \mathfrak{spin}(s,t)$ e per ogni $v \in V$

$$\phi([E,F])(v) = [E,F]\,v - v\,[E,F] = [\phi(E), \phi(F)](v).$$

Pertanto, ϕ preserva il commutatore e dunque la struttura di Lie. Supponiamo che per un certo $F \in \mathfrak{spin}(s,t)$ si abbia

$$\phi(F)(v) = F\,v - v\,F = 0 \quad \forall\, v \in V.$$

ciò implica che F deve essere l'elemento nullo, da cui segue che ϕ è iniettiva. Abbiamo infine già osservato che le loro dimensioni coincidono, dunque la mappa ϕ è un isomorfismo, e pertanto, le algebre $\mathfrak{spin}(s,t)$ e $\mathfrak{so}(s,t)$ sono isomorfe. □

3.4 Spinori

Siamo finalmente pronti a definire e studiare le rappresentazioni irriducibili dei gruppi di Spin.

Definizione 3.3 (Rappresentazione pinoriale e spinoriale)**.** Una rappresentazione di $\mathrm{Pin}(V,Q)$ è la restrizione al gruppo di una rappresentazione irriducibile di $C\ell(V,Q)$. Allo stesso modo una *rappresentazione spinoriale* è una rappresentazione irriducibile di $C\ell(V,Q)_{pari}$ ristretta al gruppo di Spin.

Gli spinori e i pinori sono quindi definiti come gli elementi dello spazio in cui agiscono le rappresentazioni irriducibili rispettivamente di $\mathrm{Spin}(V,Q)$ e $\mathrm{Pin}(V,Q)$.

Teorema 3.5. Ogni rappresentazione irriducibile dell'algebra reale $M(n,\mathbb{K})$ è isomorfa a $\mathbb{K}^n$, con $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$, dove nel caso dei quaternioni $\mathbb{H}^n$ è da intendersi come spazio vettoriale destro su $\mathbb{H}$.

La dimostrazione del teorema è piuttosto articolata; si veda il libro [1]. La struttura di spazio vettoriale destro è utilizzata per via del fatto che i quaternioni non sono commutativi. Grazie ai ragionamenti del capitolo precedente, possiamo subito dichiarare che una rappresentazione irriducibile per un'algebra di Clifford $C\ell(3,1)$ è isomorfa a $\mathbb{H}^2$.

Un pinore per $\mathrm{Pin}(3,1)$ è quindi esprimibile come un elemento di $\mathbb{H}^2$, cioè un vettore della forma:

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}\lambda\\ \gamma\end{pmatrix}\qquad \text{con } \lambda,\gamma\in\mathbb{H}.$$

Tutti i quaternioni ($\lambda=a+\hat{\boldsymbol{i}}b+\hat{\boldsymbol{j}}c+\hat{k}d$) possono essere rappresentati attraverso matrici quadrate in campo Complesso nel seguente modo:

$$\lambda\to Q(\lambda)=\begin{pmatrix}a+\hat{\boldsymbol{i}}b & c+\hat{\boldsymbol{i}}d\\ -c+\hat{\boldsymbol{i}}d & a-\hat{\boldsymbol{i}}b\end{pmatrix}\in M(2,\mathbb{C})\cong\mathbb{C}^4. \tag{3.2}$$

Con le seguenti proprietà:

- L'addizione corrisponde alla somma tra matrici
$$Q(\lambda_1+\lambda_2)=Q(\lambda_1)+Q(\lambda_2).$$
- Il prodotto corrisponde al prodotto matriciale riga per colonna:
$$Q(\lambda_1\,\lambda_2)=Q(\lambda_1)\,Q(\lambda_2).$$
- La norma è data dal determinante:
$$\det Q(\lambda)=a^2+b^2+c^2+d^2=||\lambda||^2,$$
- Il quaternione λ è invertibile se e solo se $\det Q(\lambda)\neq 0$, quindi se $\lambda\neq 0$).

Concludiamo dicendo che un altro modo possibile per scrivere un pinore per $\mathrm{Pin}(3,1)$ è attraverso un vettore complesso quadri-dimensionale, perché le matrici 2×2 a valori complessi sono isomorfe a $\mathbb{C}^4$.

In modo analogo a quanto visto sopra, ogni rappresentazione irriducibile per $C\ell_{pari}(3,1)$ è isomorfa a $\mathbb{C}^2$, quindi uno spinore è un vettore complesso bidimensionale che trasforma sotto il gruppo $\mathrm{Spin}(3,1)$.

Capitolo 4

Equazione di Dirac

Nel corso di questo capitolo applicheremo finalmente le strutture studiate precedentemente alla teoria fisica. Seguendo un percorso storico partiremo dall'equazione di Schrödinger e l'adatteremo fino a riuscire a inglobare le particelle di spin $\frac{1}{2}$ nella trattazione.

4.1 Spinore di Pauli

Nella meccanica classica l'energia totale di un punto materiale in un campo centrale è data dalla somma dell'energia cinetica, $K = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}$, e dell'energia potenziale, $V(\boldsymbol{r})$. Per ottenere una descrizione quantomeccanica di questo sistema e descrivere il moto dell'elettrone, inseriamo gli operatori differenziali per energia e quantità di moto, ottenendo l'*Equazione di Schrödinger*:

$$i\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2\psi + V\,\psi$$

Dove $\psi = \psi(\boldsymbol{r}, t)$ è una funzione d'onda complessa il cui modulo quadro integrato su un intervallo spaziale rappresenta l'ampiezza di probabilità di trovare l'elettrone in tale regione. Tale equazione fu formulata dal fisico da cui prende il nome nel 1926, ottenendo un immediato successo e aprendo la strada alla meccanica ondulatoria, in grado di spiegare innumerevoli fenomeni: l'equazione permise di dare una forma completamente quantistica al modello atomico, raffinando il modello semi-classico di Bohr. Tuttavia nel 1927 i fisici T.E. Phipps e J.B. Taylor riprodussero l'esperimento di Stern-Gerlach utilizzando atomi d'idrogeno; ottennero, a differenza di quanto predetto dalla teoria di Schrödinger, un momento magnetico per l'atomo non nullo. Questo problema era già emerso nello studio di atomi d'argento e nel 1925 Uhlenbeck e Goudsmit avevano proposto l'esistenza di un momento angolare intrinseco, chiamato *spin*, interagente col campo magnetico in modo analogo al momento angolare. L'equazione di Schrödinger per un elettrone in campo elettromagnetico, con potenziali $\mathbf{A}$ e Φ, è:

$$i\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\,\nabla - e\,\mathbf{A}\right)^2\psi + e\,\Phi\,\psi \tag{4.1}$$

Definiamo l'operatore di momento generalizzato,

$$\boldsymbol{\pi} = (-i\hbar\,\nabla - e\,\mathbf{A}), \quad \text{che verifica:} \quad \pi_i\pi_j - \pi_j\pi_i = \epsilon_{ijk} i\hbar e B_k$$

Nel 1927 Pauli ha introdotto lo spin nella meccanica quantistica aggiungendo le matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

che soddisfano:

$$\sigma_i\sigma_j = i\,\epsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}I$$

e sostituendo $\boldsymbol{\pi}$ con $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}) = \sum_i(\sigma_i\pi_i)$ nel termine quadrato dell'equazione 4.1. Otteniamo:

$$i\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}(\pi^2 - \hbar e(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}))\psi + q\,\Phi\,\psi \tag{4.2}$$

Il termine di Spin è descritto proprio dal termine $\dfrac{\hbar e}{2m}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})$.
Come mostrato in Appendice B, le matrici di Pauli generano un'algebra di Lie, $\mathfrak{su}(2)$, isomorfa a $\mathfrak{spin}(3)$; $\psi \in \mathbb{C}^2$ è uno spinore che denominiamo *spinore di Pauli*. Le matrici di Pauli agiscono sullo spinore come rotazioni in $\mathbb{C}^2$, con la caratteristica che un giro completo è ottenuto dopo una rotazione di 720°. Notiamo che, sempre seguendo i ragionamenti dell'appendice, questa rappresentazione è classificata dalla sua dimensione: $2j+1 = dim(\mathbb{C}^2) = 2$, quindi $j = 1/2$. L'autovalore massimo, anche chiamato *peso*, che classifica la rappresentazione è proprio quello che in fisica è definito *spin*. Per descrivere una particella quantistica con un certo spin intrinseco s dovremo quindi cercare una rappresentazione di dimensione $2s+1$.

4.2 Spinore di Dirac

L'Equazione 4.2 non tiene conto della relatività ristretta: per costruirci un'equazione di Schrödinger relativistica ci avvaliamo della relazione di Einstein tra energia e quantità di moto:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4,$$

da cui otteniamo, scrivendo i termini in forma operatoriale:

$$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2})\psi = 0$$

Effettivamente, l'equazione così scritta, formulata per la prima volta nel 1925, ancora da Schrödinger è relativisticamente invariante, ma ci troviamo di fronte ad alcune problematiche. Il termine quadrato di derivata nel tempo comporta l'esistenza di densità di probabilità energetiche negative, cozzando con l'interpretazione fisica che veniva data alla funzione d'onda.

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left\{\psi^*(\boldsymbol{r}, t)\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} - \psi(\boldsymbol{r}, t)\frac{\partial\psi^*(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}\right\}$$

Come si può notare, la densità ρ dipende dalle derivate prime della funzione d'onda nel tempo, che però sono completamente arbitrarie e dipendono dalle condizioni iniziali del sistema. A causa di questo e dell'incongruenza con i dati sperimentali nel descrivere l'atomo di idrogeno, Schrödinger scelse di non pubblicarla. Diversi fisici poi arrivarono indipendentemente e quasi contemporaneamente alla stessa equazione, che vide la luce nel 1926. Per eliminare la derivata seconda nel tempo, nel 1927 Paul Dirac adottò un procedimento simile a quello che abbiamo visto fare da Pauli nel capitolo scorso. Iniziamo scrivendo l'equazione di Klein-Gordon in forma covariante utilizzando la notazione di Einstein

$$\left\{\partial^\mu\partial_\mu + (\frac{mc}{\hbar})^2\right\}\psi = 0$$

Moltiplicando per un segno meno e fattorizzando la differenza di quadrati otteniamo due fattori

$$i\sqrt{\partial^\mu\partial_\mu} \pm \frac{mc}{\hbar}$$

e cerchiamo di linearizzare il primo termine scrivendolo come:

$$\sqrt{\partial^\mu\partial_\mu} = \gamma_t\partial^t + \gamma_x\partial^x + \gamma_y\partial^y + \gamma_z\partial^z$$

Otteniamo l'equazione di Dirac, un'equazione d'onda relativistica per un campo spinoriale

$$(i\hbar\gamma_\mu\partial^\mu - mc)\psi = 0 \tag{4.3}$$

Dove gli elementi γ rispettano le seguenti proprietà:

$$\gamma_t^2 = -1, \quad \gamma_x^2 = \gamma_y^2 = \gamma_z^2 = +1, \quad \gamma_\mu\gamma_\nu = -\gamma_\nu\gamma_\mu$$

Queste sono proprio le proprietà studiate nel Capitolo 2 per gli elementi dell'algebra di Clifford $C\ell(3,1)$; abbiamo visto che possiamo rappresentarle come matrici bidimensionali di quaternioni, che a loro volta possono essere complessificati e espressi tramite matrici complesse bidimensionali, come visto nell'Equazione 3.2. Si possono scrivere allora le matrici *Gamma di Dirac* in funzione delle matrici di Pauli:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0_2 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0_2. \end{pmatrix}$$

Queste sono matrici complesse 4×4, rappresentano $C\ell(3,1)$ in $\mathbb{C}^4$. Come abbiamo visto nel Teorema 3.3, l'algebra di Lie $\mathfrak{spin}(3,1)$ è generata dallo span dei bivettori, costruiti con i vettori della base di $C\ell(3,1)$, in questo caso:

$$\mathfrak{spin}(3,1) = span\,\{[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \mid \mu < \nu\}$$

e definiamo i generatori della rappresentazione spinoriale come segue:

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu].$$

Tramite il Teorema 3.4, che ci dice che esiste un isomorfismo ϕ tra le algebre $\mathfrak{spin}(3,1)$ e $\mathfrak{so}(3,1)$, e grazie allo studio delle rappresentazioni di $SO(3,1)$ in Appendice B, possiamo dire che un elemento Λ di $SO^+(3,1)$ è esprimibile come:

$$\Lambda = \exp \sum_{\mu<\nu} x_{\mu\nu}\phi(\Sigma^{\mu\nu})$$

e un elemento del gruppo $\mathrm{Spin}(3,1)$, $S(\Lambda)$:

$$S(\Lambda) = \exp \sum_{\mu<\nu} x_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}$$

L'equazione di Dirac è scritta in forma covariante. Questo significa che applicando una trasformazione di Lorentz

$$x \to x' \quad x' = \Lambda x$$

le $\psi(x)$ devono trasformare lasciando invariata la forma dell'equazione, e si può mostrare che questo comporta che varino come:

$$\psi(x) \to \psi'(x') \quad \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$$

Concludiamo che le ψ sono proprio gli spinori che abbiamo definito nello scorso capitolo! Un ulteriore passaggio utile è definire l'operatore di *chiralità*:

$$\gamma^5 \equiv i\,\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (\gamma^5)^2 = I_4,$$

che anticommuta con ciascuna delle γ^μ:

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0.$$

Vediamo quindi che γ^5 commuta con ogni membro della parte pari di $C\ell(3,1)$, $\forall c \in C\ell_{pari}(3,1)$:

$$\gamma^5(c(\psi)) = c(\gamma^5(\psi))$$

Grazie al Lemma di Schur (1.4) possiamo dire che $\gamma^5 = \lambda I$, per cui è diagonale e può essere scomposta in autospazi tali che :

$$\mathbb{C}^4 = \bigoplus_\lambda S_\lambda$$

Sappiamo che gli autovalori di γ sono $\{+1, -1\}$, quindi abbiamo due autospazi, S^+, S^-, ottenuti tramite i seguenti proiettori *chirali*:

$$P_L = \frac{1}{2}(I_4 - \gamma^5), \quad P_R = \frac{1}{2}(I_4 + \gamma^5).$$

che ci permettono di decomporre lo spinore di Dirac:

$$\psi(x) = \psi_L(x) + \psi_R(x), \quad \text{con } \psi_{L,R}(x) = P_{L,R}\psi(x),$$

Chiamiamo ψ_L e ψ_R *spinori di Weyl.* Questa decomposizione è di importanza centrale nella teoria dei campi, soprattutto in relazione all'interazione debole, dove solo una delle componenti interagisce con il campo d'interazione.

4.3 Spinori in dimensioni superiori

I contributi maggiori delle algebre di Clifford alla fisica teorica compaiono nell'ambito di teorie delle stringhe. Queste teorie infatti aumentano le dimensioni dello spazio tempo, portandoci a cercare delle rappresentazioni spinoriali per spazi d-dimensionali, quindi con gruppi di Spin del tipo Spin$(d-1,1)$. Risulta allora più evidente l'utilità della trattazione formale da noi affrontata nel corso della tesi: le strutture studiate e i risultati ottenuti sono spesso validi in un senso completamente generale, non vincolato a una singola dimensione con cui costruire l'algebra.

Le algebre di Clifford $C\ell(s,t)$ sono completamente classificate, e la loro classificazione dipende solo dalla dimensione totale, $s+t=d$, e da $(s-t) \mod 8$, come mostrato nella tabella qui sotto.

$(s-t) \mod 8$	$\mathrm{C}\ell(s,t)$	$(s-t) \mod 8$	$\mathrm{C}\ell, s, t)$
0	$M(2^{d/2}, \mathbb{R})$	4	$M(2^{(d-2)/2}, \mathbb{H})$
1	$M(2^{(d-1)/2}, \mathbb{C})$	5	$M(2^{(d-1)/2}, \mathbb{C})$
2	$M(2^{(d-2)/2}, \mathbb{H})$	6	$M(2^{d/2}, \mathbb{R})$
3	$M(2^{(d-3)/2}, \mathbb{H}) \oplus M(2^{(d-3)/2}, \mathbb{H})$	7	$M(2^{(d-1)/2}, \mathbb{R}) \oplus M(2^{(d-1)/2}, \mathbb{R})$

Tabella 4.1Classificazione delle algebre di Clifford $\mathrm{C}\ell(s,t)$ in funzione di $s-t \mod 8$, dove $d=s+t$.

Facciamo notare che questo risultato è in accordo con l'isomorfismo che abbiamo trovato in 2.2: $C\ell(3,1) \cong M(2,\mathbb{H})$.
Riportiamo infine la tabella di classificazione delle algebre di Clifford pari, che coincide con quella del gruppo di Spin:

$(s-t) \mod 8$	$\mathrm{C}\ell_{pari}(s,t)$	$(s-t) \mod 8$	$\mathrm{C}\ell_{pari}(s,t)$
0	$M(2^{(d-2)/2}, \mathbb{R}) \oplus M(2^{(d-2)/2}, \mathbb{R})$	4	$M(2^{(d-4)/2}, \mathbb{H}) \oplus M(2^{(d-4)/2}, \mathbb{H})$
1	$M(2^{(d-1)/2}, \mathbb{R})$)	5	$M(2^{(d-3)/2}, \mathbb{H})$
2	$M(2^{(d-2)/2}, \mathbb{C})$	6	$M(2^{(d-2)/2}, \mathbb{C})$
3	$M(2^{(d-3)/2}, \mathbb{H})$	7	$M(2^{(d-1)/2}, \mathbb{R})$

Tabella 4.2Classificazione delle algebre di Clifford pari $\mathrm{C}\ell(s,t)$ in funzione di $s-t \mod 8$, dove $d=s+t$.

E quindi, utilizzando il Teorema 3.5, siamo in grado di trovare la rappresentazione spinoriale fondamentale a partire da uno spazio vettoriale reale non degenere qualsiasi.

Appendice A

Strumenti matematici

Definizione A.1 (Algebra Filtrata)**.** Sia $(A, \cdot)$ un'algebra sul campo $\mathbb{K}$. Si dice che A è un'*algebra filtrata* se esiste una famiglia di sottoalgebre, $\{S_i\}_{i \in I}$ dove I è un insieme di indici, tali che:

$$\{0\} \subseteq S_0 \subseteq S_1 \subseteq ... \subseteq A, \quad A = \bigcup_{i \in I} S_i,$$

$$\forall m, n \in I \quad S_m \cdot S_n \subseteq S_{m+n}$$

Definizione A.2 (Relazione di equivalenza)**.** La relazione di equivalenza è una relazione binaria tra elementi di un insieme A, indicata con $\sim$ che rispetta le proprietà:

1. *Riflessiva*: $x \sim x \quad \forall x \in A$,
2. *Simmetrica*: $x \sim y \Rightarrow y \sim x \quad \forall x, y \in A$,
3. *Transitiva*: $x \sim y \quad$ e $\quad x \sim z \Rightarrow y \sim z \quad \forall x, y, z \in A$

Definizione A.3 (Omeomorfismo)**.** Sia ϕ una corrispondenza biunivoca tra due spazi topologici X e Y, cioè una relazione binaria che associa ad ogni elemento di X uno e un solo elemento di Y, e viceversa ad ogni elemento di Y uno e un solo elemento di X. Diciamo che ϕ è un *omeomorfismo* se, $\forall A \in X$:

$$A \text{ é un aperto in } X \iff \phi(A) \text{ é un aperto in } Y$$

Definizione A.4 (Carta)**.** Sia M uno spazio topologico di dimensione n. Una *carta* è una coppia (U, ϕ), con $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, tale che:

- $\phi : U \to \phi(U)$ è un omeomorfismo,
- U è un sottoinsieme aperto di M.

Definizione A.5 (Atlante)**.** Un *atlante* su M è una collezione di carte $\{(U_i, \phi_i)\}$ tale che:

- $\bigcup_i U_i = M$,
- La mappa di transizione, definita ogni qual volta $U_i \cap U_a \neq \{0\}$ come $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_j \cap U_i) \to \phi_i(U_j \cap U_i)$, è un omeomorfismo differenziabile di classe C^∞, con inverso ancora di classe C^∞.

Definizione A.6 (Funzione tra varietà lisce)**.** Siano M e N due varietà differenziabili, e sia $f : M \to N$ una mappa che ad ogni punto $p \in M$ associa un punto $f(p) = q \in N$. Si dice che f è una funzione liscia tra le varietà se, per ogni carta (U, ϕ) di M, (V, ψ) di N, tali che $p \in U$ e $f(U) \subset V$, la mappa composta

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$$

è differenziabile di classe C^∞.

Definizione A.7 (Spazio tangente)**.** Sia M una varietà liscia di dimensione n, con atlante (ϕ_i, U_i) e sia $p \in M$. Lo *spazio tangente* a M in p, denominato T_pM, è definito come l'insieme delle classi di equivalenza di curve differenziabili $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \in \mathbb{R} \to M$ tali che $\gamma(0) = p$, dove la relazione di equivalenza è data da:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi_i \circ \gamma_1)(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi_i \circ \gamma_2)(t).$$

Una definizione equivalente è data da:

$$T_p = \{D_p : C^\infty \to \mathbb{R} \mid D_p \text{ é lineare}, \quad D_p(gf) = D_p(g)f(p) + g(p)D_p(f) \quad \forall f, g \in C^\infty\}$$

Si può dimostrare che T_pM ha la struttura di uno spazio vettoriale reale, e rappresenta l'insieme delle direzioni in cui è possibile muoversi dal punto p rimanendo nella varietà.

L'esponenziale di una matrice è una funzione matriciale su matrici quadrate che è soluzione della seguente equazione differenziale, dove $A \in M_n(\mathbb{K})$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$):

$$\frac{d}{dt} e^{Xt} = X e^{Xt},$$

o equivalentemente definita come:

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k.$$

Sia allora G un sottogruppo chiuso di $GL(n, \mathbb{K})$, con $\mathbb{K}$ come campo $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$. L'algebra di Lie associata a G può essere definita come segue:

$$\mathfrak{g} = Lie(G) = \left\{ A \in M_n(\mathbb{K}) \mid e^{tA} \in G \quad \forall t \in \mathbb{R} \right\}$$

Teorema A.8 (Proprietà universale delle algebre quozienti)**.** Sia A un'algebra su $\mathbb{K}$ e sia I un ideale in A. Indichiamo con $\pi : A \to A/I$ la proiezione canonica. Allora, per ogni algebra B e per ogni omomorfismo d'algebre

$$f : A \to B$$

tale che

$$f(I) = \{0\},$$

esiste un unico omomorfismo $\tilde{f} : A/I \to B$ tale che $f = \tilde{f} \circ \pi$.

Teorema A.9 (Teorema Spettrale)**.** Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ una matrice simmetrica, ossia $A = A^T$. Allora esiste una matrice ortogonale Q tale che

$$Q^T AQ = D,$$

dove D è una matrice diagonale i cui elementi sono gli autovalori reali di A.

Ne segue direttamente che se A è una matrice simmetrica in uno spazio vettoriale V in campo $\mathbb{R}$ di dimensione n, allora esiste una base ortonormale di V costituita dagli autovettori di A.

Teorema A.10 (Teorema di Sylvester)**.** Siano B e C due matrici reali simmetriche $n \times n$: le due matrici hanno lo stesso numero di autovalori positivi, negativi e nulli se e solo se esiste una matrice invertibile, P, tale che

$$B = P^{-1}CP, \quad \text{si dice che sono } \textit{congruenti}.$$

La tripletta di interi che rappresenta il numero di autovalori positivi, negativi e nulli è chiamata *segnatura*.

Corollario A.11. Sia V uno spazio vettoriale reale su cui è definita una forma bilineare ϕ. Allora:

- Esiste una base ortogonale rispetto a ϕ di V;
- La segnatura di B non dipende dalla scelta di base ortogonale.

Sia ora B una forma bilineare simmetrica su V. Abbiamo visto che questo comporta l'esistenza di una base ortogonale di autovettori di B, $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n\}$, per lo spazio vettoriale. Sia λ un autovalore, a cui possono corrispondere più autovettori e definiamo l'autospazio corrispondente a λ:

$$V_\lambda = \{\boldsymbol{v} \in V \mid A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}\}.$$

Abbiamo che:

$$V = \bigotimes_\lambda V_\lambda$$

Appendice B

Gruppo Speciale Unitario

Definiamo il gruppo $SU(n)$ come l'insieme di matrici unitarie $n \times n$ con determinante $= 1$:

$$\mathrm{SU}(n) = \{U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid U^\dagger U = I,\ \det U = 1\}.$$

Osserviamo subito che il gruppo è un sottogruppo di $GL(n)$, quindi è un gruppo di Lie. Ci interessa allora calcolarci l'algebra di Lie associata al gruppo. Consideriamo una curva differenziabile $U(t)$ in $\mathrm{SU}(n)$ tale che

$$U(0) = I \quad \text{e} \quad U(t) = I + tX + o(t), \quad \text{dove } X = \frac{d}{dt}U(t)\bigg|_{t=0}$$

Implementando le condizioni di unità: $\frac{d}{dt}\Big(U(t)^\dagger U(t)\Big)\Big|_{t=0} = 0$, e sul determinante, $\det U(t) = 1$, otteniamo:

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X^\dagger = -X,\ \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

Concentriamoci ora al caso con $n = 2$, a causa della sua relazione con il gruppo Spin(3). Allora:

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

e

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ia & -\overline{\gamma} \\ \gamma & -ia \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

I generatori di quest'algebra sono:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

con:
$$J_i J_j = \epsilon_{ijk} J_k - \delta_{ij} I$$
Possiamo notare che questa è, a meno di alcune costanti, la relazione caratteristica delle matrici di Pauli, e quindi la rappresentazione normale dell'algebra avviene scrivendo i J_i in funzione di queste.

Definiamo ora gli *operatori ladder*, $J_{\pm}$,
$$J_{\pm} = \frac{1}{2i}(J_1 \pm iJ_2) \quad J_z = \frac{J_3}{i} \quad [J_z, J_{\pm}] = \pm 2J_{\pm} \quad [J_+, J_-] = J_z$$

La terna $\{J_z, J_{\pm}\}$ rappresenta i generatori dell'algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. In questo contesto, sia $\boldsymbol{v}_m$ un autovettore di J_z, a cui corrisponde l'autovalore m:
$$J_z \boldsymbol{v}_m = m\boldsymbol{v}_m$$
quindi
$$J_z J_{\pm} \boldsymbol{v}_m = (J_{\pm} J_z + [J_z, J_{\pm}])\boldsymbol{v}_m = (J_{\pm} J_z \pm J_{\pm})\boldsymbol{v}_m = (m \pm 1)J_{\pm}\boldsymbol{v}_m.$$
Chiamiamo J_+ l'operatore di *innalzamento* e J_- quello di *abbassamento*. Se V è una rappresentazione irriducibile e finito dimensionale, gli autovalori di J_z devono avere un massimo e un minimo. Sia λ l'autovalore massimo e $\boldsymbol{v}_0$ il corrispettivo autovettore. Allora
$$J_+ \boldsymbol{v}_0 = 0$$
Definiamo una catena di vettori:
$$\boldsymbol{v}_k = J_-^k \boldsymbol{v}_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$
$$J_+ \boldsymbol{v}_0 = 0$$
$$J_+ \boldsymbol{v}_1 = J_+ J_- \boldsymbol{v}_0 = (J_z + J_- J_+)\boldsymbol{v}_0 = \lambda \boldsymbol{v}_0$$
Per induzione possiamo mostrare che, con $k \geq 1$:
$$J_+ \, \boldsymbol{v}_k = k \left(\lambda - (k-1)\right) \boldsymbol{v}_{k-1}. \tag{B.1}$$
Poiché la rappresentazione è finito-dimensionale esiste un intero $m \geq 0$ tale che
$$\boldsymbol{v}_m \neq 0 \quad \text{ma} \quad \boldsymbol{v}_{m+1} = 0.$$
Applicando (B.1) con $k = m + 1$ otteniamo
$$0 = J_+ \, \boldsymbol{v}_{m+1} = (m+1)(\lambda - m) \, \boldsymbol{v}_m.$$
Dato che $\boldsymbol{v}_m \neq 0$ e $m + 1 \neq 0$, ne segue che
$$\lambda = m.$$

Pertanto, l'autovalore massimo è un intero non negativo, che possiamo identificare con m. Gli autovalori di J_z per i vettori $\boldsymbol{v}_k$ si ottengono applicando la relazione

$$J_z\,\boldsymbol{v}_k = (J_z\,J_-^k)\,\boldsymbol{v}_0 = (\lambda - 2k)\,\boldsymbol{v}_k,$$

quindi i pesi presenti nella rappresentazione sono: $\{\lambda, \lambda-2, \lambda-4, \ldots, -\lambda\}$ Essendo $\lambda = m$, il numero totale di pesi (e quindi la dimensione della rappresentazione) è $m+1$.

È consuetudine definire

$$j = \frac{m}{2},$$

cosicché la dimensione della rappresentazione diventa $2j+1$ e gli autovalori sono dati da: $\{-j, -j+1, \ldots, j-1, j\}$.
Si può dimostrare che per ogni autovalore esiste un'unica trasformazione irriducibile dell'algebra.

Quanto abbiamo detto è parte di una teoria algebrica molto più articolata, che per scopi di chiarezza abbiamo qui notevolmente semplificato. Il discorso è valido anche per $SL(2,\mathbb{C}) \cong \mathrm{Spin}^+(3,1)$, le cui rappresentazioni possono essere classificate in un modo simile attraverso una coppia di numeri positivi semi-interi (j,k).

Teorema B.1. Si ha che:

$$\mathfrak{spin}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$$

Dimostrazione. In analogia al procedimento della dimostrazione del Teorema 3.4, si costruisce una mappa lineare sui generatori di $\mathfrak{spin}(3)$ che va in quelli di $\mathfrak{su}(2)$, e si osserva che mantiene invariate le relazioni di commutazione. Infine si caratterizza la mappa come isomorfismo notando che le due algebre hanno la stessa dimensione, $n = 3$. $\square$

Appendice C

Gruppo di Lorentz

Definizione C.1 (Gruppo Ortogonale)**.** Sia (V, Q) uno spazio vettoriale quadratico non degenere su $\mathbb{K}$, di dimensione n. Definiamo il Gruppo Ortogonale su V come il gruppo delle trasformazioni lineari invertibili che lasciano invariata la forma quadratica. Esplicitamente diciamo che:

$$O(V) = \{g : V \to V \mid B(g(\boldsymbol{v}), g(\boldsymbol{w})) = B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \quad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V\}.$$

In particolare, il gruppo ortogonale speciale $SO(V)$ è il sottogruppo formato da tutte le trasformazioni con determinante $= +1$.

Il gruppo è identificabile con il sottoinsieme di $M(n, \mathbb{K})$ composto dalle matrici, G che lasciano invariata la forma quadratica, ovvero tali per cui:

$$G^T Q G = Q. \tag{C.1}$$

$O(V)$ è effettivamente un gruppo, in quanto verifica:

1. L'esistenza dell'elemento neutro nell'insieme, che identifichiamo con la matrice identità: rispetta infatti l'Equazione C.1;
2. L'esistenza dell'inverso nell'insieme:
$$(G^{-1})^T G^T Q (G^{-1} G) = (G^{-1})^T Q (G^{-1}) = Q;$$
3. L'associatività, che discende dalla proprietà del prodotto di matrici;
4. La chiusura rispetto al prodotto:
$$(G_2 G_1)^T Q (G_2 G_1) = G_1^T (G_2^T Q G_2) G_1 = Q$$

Notiamo che $O(V)$ e $SO(V)$ sono sottogruppi di $GL(n, \mathbb{K})$, e in quanto tali formano gruppi di Lie. L'algebra di Lie di $SO(V, Q)$ è quindi definita come segue.

$$\mathfrak{so}(V) = Lie(SO(V)) = \left\{ X \in \mathfrak{gl}(V) \mid B(e^{tX}\boldsymbol{v}, e^{tX}\boldsymbol{w}) = B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \right\} \tag{C.2}$$

Espandendo al primo ordine l'esponenziale otteniamo:

$$B(X\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = B(\boldsymbol{v}, X\boldsymbol{w})$$

Quindi, in una base ortonormale rispetto a B, l'algebra $\mathfrak{so}(V)$ è data dall'insieme delle trasformazioni antisimmetriche rispetto alla forma bilineare ($X^T B = -BX$).

Teorema C.2. Sia V uno spazio reale n-dimensionale dotato di una forma bilineare simmetrica non degenere B, associata alla forma quadratica Q. Allora:

1. Se B è definita positiva (o negativa) allora $\mathrm{SO}(V, Q)$ è connesso.
2. Se B è indefinita allora $\mathrm{SO}(V, Q)$ ha due componenti connesse.

Spiegazione intuitiva:

1. Se B è definita positiva (o negativa), allora $V \cong \mathbb{R}^n$ con una metrica euclidea (o il suo opposto). Allora ogni rotazione può essere decomposta in rotazioni elementari su singoli piani, e i relativi angoli possono essere fatti variare con continuità fino allo zero, collegandola all'identità.
2. Se B è indefinita allora esistono invarianti discreti, legati alla struttura della forma quadratica, che non possono essere collegati con deformazioni continue. Prendiamo come esempio lo spaziotempo di Minkowski, in cui le trasformazioni possono invertire o preservare l'orientamento temporale. Questa distinzione è "discreta", nel senso che non è possibile passare da una trasformazione che lo preserva a una che lo inverte attraverso una deformazione continua. Di conseguenza, il gruppo $SO(V)$ si divide in due componenti connesse, una che preserva e l'altra che inverte questo orientamento.

Il gruppo di Lorentz $O(3,1)$ è definito come il gruppo che conserva la forma quadratica in $\mathbb{R}^4$ costituita da $t^2 - \vec{x}^2$, con associata la matrice

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi, per $\Lambda \in O(3,1)$, si deve avere

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta.$$

Notiamo che un generico $\Lambda \in O(3,1)$ soddisfa $\det(\Lambda) = \pm 1$. Per restringerci al gruppo di Lorentz *proprio* $SO(3,1)$, imponiamo $\det(\Lambda) = +1$. Utilizzando l'Equazione C.1 otteniamo il seguente risultato:

$$\Lambda_{00} = \pm\sqrt{1 + \Lambda_{01}^2 + \Lambda_{02}^2 + \Lambda_{03}^2},$$

e come detto nel Teorema C.2 il gruppo non è connesso, infatti Λ_{00} non può assumere i valori compresi tra -1 e $+1$. Restringiamo dunque il gruppo imponendo $\Lambda_{00} \geq 1$. Combinando entrambe le condizioni otteniamo il gruppo di Lorentz *proprio* e *ortocrono* $SO^+(3,1)$. Abbiamo visto che è un gruppo di Lie, quindi costruiamo l'algebra di Lie associata utilizzando C.2:

$$\mathrm{Lie}(SO(3,1)) = \{X \in M(4,\mathbb{R}) \mid X^T \eta + \eta X = 0\}$$

$SO(3,1)$ consiste quindi in matrici della forma:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & d & e \\ b & -d & 0 & f \\ c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

e indichiamo l'elemento in colonna μ e riga ν con $x_{\mu\nu}$. Notiamo subito che l'algebra ha dimensione 6.

I gruppi $O(3,1)$, $SO(3,1)$ e $SO^+(3,1)$ condividono tutti la stessa algebra di Lie, $\mathfrak{so}(3,1)$.

Introduciamo i sei generatori dell'algebra, ovvero le matrici ottenute prendendo X e scegliendo ogni volta uno dei valori $a, ..., f$, ponendolo uguale a 1 e portando tutti gli altri a 0. Le indichiamo con $M^{\mu\nu}$ e sono tali per cui:

$$\Lambda = I + \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu} x_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$$

Distinguiamo ora tra i generatori delle *rotazioni*, J_i, e quelli dei *boost*, K_i:

$$J_i \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk} \quad K_i \equiv M^{0i} \quad \text{con } 1 \leq i, j, k \leq 3.$$

ϵ_{ijk} è il simbolo di Levi-Civita, definito come segue:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{se } (i,j,k) \text{ é una permutazione pari} \\ -1, & \text{se } (i,j,k) \text{ é una permutazione dispari} \\ 0, & \text{se due indici coincidono} \end{cases}$$

Essi soddisfano:

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk}J_k$$
$$[J_i, K_j] = \epsilon_{ijk}K_k$$
$$[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk}J_k$$

Bibliografia

[1] Petti Lounesto, *Clifford Algebra and Spinors*, Cambridge University Press, 2001.

[2] H. Blaine Lawson Jr, Marie-Louise Michelson, *Spin Geometry*, Princeton University Press, 1989.

[3] Ioseph L. Buchbinder e Surgei M. Kuzenko *Ideas and Methods of Supersimmetry and Supergravity or a Walk through Superspace*, Taylor & Francis, 1998.

[4] Brian Hall *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*, Springer, 2003.