

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”
Corso di Laurea in Fisica

**La Metrica di Rindler e la Near-Horizon
Approximation della Metrica di
Schwarzschild**

Relatore:
Prof. Roberto Balbinot

Presentata da:
Alice Ronconi

Anno Accademico 2024/2025

Sommario

In questa tesi, partendo dal principio di equivalenza tra forze inerziali e forze gravitazionali, viene esaminato nell'ambito della Relatività Ristretta il moto di un oggetto uniformemente accelerato, arrivando alla sua descrizione tramite la metrica di Rindler. In seguito si introduce la soluzione di Schwarzschild, tramite la teoria della Relatività Generale, col fine di vedere che in prossimità dell'orizzonte di un buco nero la sezione bidimensionale dello spazio-tempo è piatta, e descritta tramite metrica di Rindler. Si prosegue con uno studio dello spazio di Rindler esaminando vettori di Killing e geodetiche.

Indice

1	Principio di equivalenza	3
1.1	Dimostrazione dell'equivalenza	3
1.2	Sistema Inerziale	5
1.3	Riformulazione generale del principio	5
2	Relatività Ristretta	7
2.1	I principi della relatività	7
2.2	Trasformazioni di Lorentz	8
2.3	Spazio-tempo di Minkowski	9
2.4	Tensori	11
2.5	Cinematica Relativistica	12
2.5.1	Coordinate di Rindler	16
3	Introduzione alla Relatività Generale	17
3.1	Metrica dello spazio-tempo	17
3.2	Equazione delle geodetiche	18
3.3	Campo Gravitazionale	19
3.3.1	Limite Newtoniano	20
3.3.2	Equazioni di Einstein	20
3.4	Soluzione di Schwarzschild	21
4	Near Horizon Approximation	23
4.1	Spazio di Rindler	23
4.2	Principio di Equivalenza	24
4.3	Simmetrie e Vettori di Killing	27
4.4	Geodetiche di Rindler	29

Introduzione

L'approssimazione vicino all'orizzonte, o *Near-Horizon Approximation*, permette di trattare lo spazio in prossimità di un buco nero come bidimensionalmente piatto. Questa visione del problema ha alla base il principio di equivalenza tra forze inerziali e gravitazionali [4]. Tramite il principio di equivalenza si può vedere che un osservatore uniformemente accelerato non può distinguere la forza che produce la sua traiettoria non inerziale dalla forza gravitazionale. In particolare, nella riformulazione generale più completa, il principio afferma che in un punto qualsiasi posto all'interno di un campo gravitazionale, un osservatore posto in un intorno sufficientemente piccolo di tale punto per cui il campo gravitazionale risulti costante, percepirebbe di trovarsi in un sistema non accelerato e in assenza di gravitazione. Per tale riformulazione è necessario l'utilizzo della teoria della Relatività. Si procede la trattazione quindi introducendo la Relatività Speciale[4] [2], partendo dai principi e proseguendo con le trasformazioni di Lorentz e i tensori, per infine andare a descrivere il moto di un osservatore, prima con velocità uniforme e poi con accelerazione uniforme. Quest'ultimo descrive una traiettoria iperbolica, a differenza della descrizione parabolica Newtoniana. Si introduce quindi la metrica di Rindler che descrive in particolare l'osservatore in moto uniformemente accelerato, anche detto osservatore di Rindler, come a riposo nel sistema di coordinate di Rindler. In questa tesi si esaminano inoltre i principi della Relatività Generale [4] [2] al fine di completare la descrizione del campo gravitazionale, e in particolare della soluzione di Schwarzschild alle equazioni di campo di Einstein. Tali soluzioni sono il punto di partenza per la trattazione della Near-Horizon Aproximation [1], tramite cui ridursi in spazio piatto di Rindler. Si esaminano infine i vettori di Killing di tale metrica, e le geodetiche, verificando inoltre che lungo esse si conservi l'energia di Killing[3].

Capitolo 1

Principio di equivalenza

Il principio di equivalenza di gravitazione e inerzia [4] descrive come un sistema fisico arbitrario risponde a un campo gravitazionale esterno. Come dimostrato da Galileo, Hyugens, Newton, Bessel e Eötvös, la massa gravitazionale e inerziale sono eguali, e ciò sta alla base di tale principio. Einstein osserva che, di conseguenza, nessun campo gravitazionale esterno che sia statico e omogeneo può essere osservato in un ascensore in caduta libera, dato che l'osservatore, gli oggetti soggetti ad esperimento e l'ascensore stesso rispondono al campo con la stessa accelerazione.

1.1 Dimostrazione dell'equivalenza

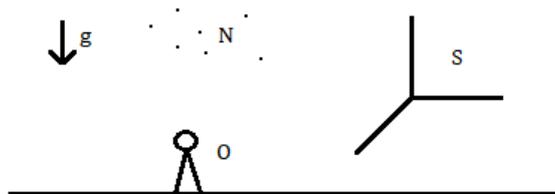


Figura 1.1: Sistema di riferimento inerziale S

Quanto affermato da Einstein è facilmente dimostrabile per un sistema di N particelle con velocità non relativistiche, soggette a forze del tipo $\vec{F}(\vec{x}_N - \vec{x}_M)$, e un campo gravitazionale esterno \vec{g} . Si considerano quindi le equazioni del moto, usando la seconda legge di Newton, nel sistema di riferimento inerziale S :

$$m_N^{(i)} \frac{d^2 \vec{x}_N}{dt^2} = m_N^{(g)} \vec{g} + \sum_M \vec{F}(\vec{x}_N - \vec{x}_M) \quad (1.1)$$

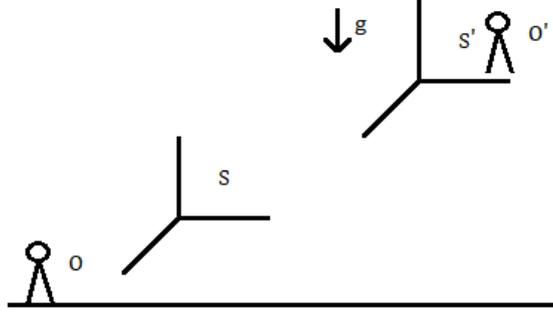


Figura 1.2: sistema di riferimento S e S'

Volendo porsi in un sistema di riferimento S' non inerziale posto in caduta libera (quindi con accelerazione \vec{g}) rispetto al sistema di partenza S , si applicano le trasformazioni non Galileiane delle coordinate dello spazio tempo:

$$x' = x - \frac{1}{2}gt^2 \qquad t' = t \qquad (1.2)$$

Per cui l'espressione dell'accelerazione diventa:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{x}'}{dt^2} + \vec{g} \qquad (1.3)$$

Ricavando infine le equazioni del moto (1.1) in S' :

$$m_N^{(i)} \frac{d^2\vec{x}'_N}{dt^2} + m_N^{(i)}\vec{g} = m_N^{(g)}\vec{g} + \sum_M \vec{F}(\vec{x}'_N - \vec{x}'_M) \qquad (1.4)$$

Si noti che la forza inerziale, ovvero $m_N^{(i)}\vec{g}$, che dipende solamente dal cambio di sistema di riferimento, va ad elidere la forza gravitazionale $m_N^{(g)}\vec{g}$; ovviamente mantenendo valida la considerazione iniziale che la massa inerziale e gravitazionale siano eguali, rendendo tali anche le due forze. Quindi le equazioni del moto in S' diventano:

$$m_N \frac{d^2\vec{x}'_N}{dt^2} = \sum_M \vec{F}(\vec{x}'_N - \vec{x}'_M) \qquad (1.5)$$

Da ciò si può concludere che l'osservatore O in S sente il campo gravitazionale, mentre l'osservatore O' in S' non sente alcuna accelerazione gravitazionale. Il principio di equivalenza inoltre afferma che la cancellazione della componente gravitazionale si riscontra per tutti i sistemi in caduta libera, a prescindere dalla formulazione delle rispettive equazioni del moto.

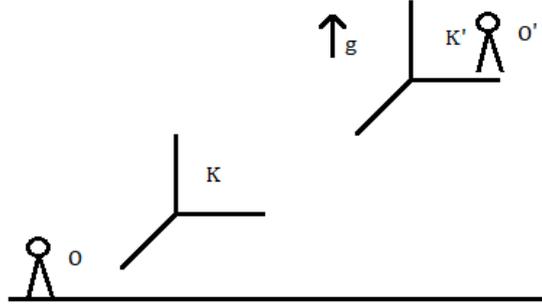


Figura 1.3: sistema di riferimento K e K'

1.2 Sistema Inerziale

Si supponga ora di avere un sistema di riferimento inerziale K in ambiente privo di gravità, e un sistema non inerziale K' in moto accelerato rispetto a K . Si applicano le trasformazioni di coordinate non galileiane per passare da K a K' :

$$\vec{x} = \vec{x}' + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \qquad t = t' \qquad (1.6)$$

Considerando un oggetto comovente con K , quindi con \vec{x} costante, è visto da un osservatore in K' con accelerazione:

$$\frac{d^2\vec{x}'}{dt^2} = -\vec{g} \qquad (1.7)$$

che in questo caso è evidente sia rivolta verso il basso, ma con pari modulo. In entrambi i sistemi un oggetto in quiete, visto dall'altro sistema risulta soggetto a una forza inerziale equivalente all'accelerazione del moto del sistema stesso.

$$m^{(i)}\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m^{(i)}\frac{d^2\vec{x}'}{dt^2} = -m^{(i)}\vec{g} \qquad (1.8)$$

È lecito allora chiedersi se S possa effettivamente essere considerato come un sistema inerziale, e di fatto ciò non risulta vero. Infatti S è equivalente a K' e S' è equivalente a K , ovvero in S' non sarà presente influenza del campo gravitazionale. Quindi S' è inerziale e in esso vale il principio di inerzia.

1.3 Riformulazione generale del principio

La formulazione del principio di equivalenza finora utilizzata è valida solamente per campi gravitazionali omogenei e statici. Infatti se \vec{g} dipendesse da posizione e tempo, come

in effetti accade, la forza gravitazionale non si eliderebbe dalle equazioni del moto con la forza inerziale. Tuttavia la cancellazione può avvenire localmente, permettendo una riformulazione del principio più completa:

”Per ogni punto nello spazio tempo in un campo gravitazionale arbitrario è possibile scegliere un sistema di coordinate inerziali tali che, in un intorno sufficientemente piccolo del punto tale per cui il campo gravitazionale appare costante al suo interno, le leggi della natura hanno forma come se il punto si trovasse in un sistema S' non accelerato e in assenza di gravitazione”

Nella nuova formulazione la fisica di S' , il sistema di riferimento in caduta libera, è quindi descritta dalla Relatività Speciale.

Capitolo 2

Relatività Ristretta

La teoria della Relatività [2][4] tratta il rapporto tra descrizioni di fenomeni fisici svolte da diversi osservatori. Tale teoria si divide in Relatività Speciale (o Ristretta) e Relatività Generale. La prima considera in particolare gli osservatori inerziali, la seconda include nello studio anche gli osservatori accelerati o soggetti a campi gravitazionali. Un'ulteriore differenza risiede nella geometria dello spazio-tempo, che nella Relatività Ristretta è piatto, mentre nella Generale è curvo. In questo capitolo si tratterà nello specifico la teoria della Relatività Speciale, che introduce una nuova cinematica e dinamica, rispetto alle quali il caso Newtoniano è visto come caso limite. Tale limite altro non è che il cosiddetto caso "non relativistico", ovvero con valore della velocità dei corpi in moto posto molto inferiore alla velocità della luce nel vuoto c . Quando ciò avviene la meccanica newtoniana rappresenta un'ottima approssimazione della meccanica relativistica. Le fondamenta della teoria vengono poste da Albert Einstein nel 1905 con la pubblicazione dell'articolo "Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento".

2.1 I principi della relatività

Per definire il primo dei due principi alla base della Relatività Speciale si assume l'esistenza di particolari sistemi di riferimento, detti inerziali, in cui i corpi liberi si muovono di moto rettilineo uniforme. Dati quindi due sistemi inerziali si vuole determinare se le leggi fisiche rimangano le medesime in entrambi i sistemi, o se cambino passando da uno all'altro. Se per assurdo quanto affermato non fosse vero, ciò porterebbe ad infinite descrizioni diverse del mondo, che per quanto sia un'eventualità non escludibile a priori, non si verifica, per cui è ragionevole pensare le leggi fisiche rimangano le medesime. Tale considerazione corrisponde al contenuto del *Principio di relatività*:

"Le leggi fisiche hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali"

Tutti i sistemi inerziali risultano quindi fisicamente equivalenti, e i risultati degli esperimenti non dipendono dal sistema di riferimento in cui vengono svolti. Il secondo principio invece riguarda la velocità della luce, in particolare corregge l'assunzione classica che la velocità con cui si propaga un segnale possa raggiungere anche valori infinitamente grandi, che dipendono dalle coordinate spaziali dei corpi coinvolti. Tale affermazione non è però congruente con l'evidenza sperimentale data dalla velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto, che risulta costante a prescindere dal sistema di riferimento preso in considerazione e con valore pari a $c=299\,792\,458\text{ m/s}$. Per cui la teoria propone un secondo principio, il *Principio di costanza della velocità della luce*:

"La velocità della luce nel vuoto è costante e ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali"

2.2 Trasformazioni di Lorentz

Nella meccanica newtoniana i diversi sistemi di riferimento inerziali, sono collegati dalle trasformazioni di Galilei:

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \qquad t' = t \qquad (2.1)$$

dove \vec{v} è la velocità con cui un generico sistema di riferimento S' si muove rispetto a un altro sistema di riferimento S .

Il *Principio di relatività Galileiano* afferma: *"le leggi fisiche sono invarianti in forma rispetto alle trasformazioni Galileiane"*. Tale principio è soddisfatto dalle leggi della meccanica classica, ma violato da quelle dell'elettromagnetismo, che non sono invarianti rispetto alle trasformazioni. Per preservare l'elettromagnetismo di Maxwell e rimanere coerenti con il principio di relatività per tutte le leggi fisiche è necessario abbandonare le trasformazioni Galileiane. Einstein allora propone di sostituire tali trasformazioni con le *trasformazioni di Lorentz*: esse sono trasformazioni dello spazio-tempo a 6 parametri, che mantengono le leggi dell'elettromagnetismo invariate e preservano la costanza della velocità della luce.

Le trasformazioni di Lorentz da un sistema di coordinate $\{x^\alpha\}$, rappresentato da un quadrivettore nello spazio-tempo di Minkowski, a un altro $\{x'^\alpha\}$ sono descritte da:

$$x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta \qquad (2.2)$$

in cui il sistema di coordinate x^α (con $\alpha=0,1,2,3$), è definito come:

$$x^\alpha = (ct, \vec{x}) \qquad (2.3)$$

e la matrice di trasformazione Λ^α_β ha componenti:

$$\Lambda^0_0 = \gamma \quad (2.4)$$

$$\Lambda^0_i = \Lambda^i_0 = -\beta_i \gamma \quad (2.5)$$

$$\Lambda^i_j = \delta_{ij} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} \beta_i \beta_j \quad (2.6)$$

in cui i e $j=1,2,3$, $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ e δ_{ij} è una delta di Kronecker. Una trasformazione di Lorentz con velocità \vec{v} parallela ad un asse cartesiano è detta boost di Lorentz lungo tale asse. Rispetto alle trasformazioni Galileiane presentano due differenze principali: la dipendenza dallo scorrere del tempo dal sistema di riferimento (t' non è uguale a t); e la presenza del fattore lorentziano γ . Si può facilmente vedere che la velocità c è il limite superiore della velocità, e che per $v \ll c$ si ritorna al limite newtoniano. Si considera ora la quantità ds^2 che definisce le distanze nello spazio-tempo di Minkowski:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (2.7)$$

similmente per ds' si ha:

$$ds'^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = \eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta \quad (2.8)$$

in cui $\eta_{\alpha\beta}$ è la metrica dello spazio-tempo di Minkowski.

$$\eta_{00} = 1$$

$$\eta_{\alpha\beta} = 0$$

$$\eta_{\alpha\alpha} = -1 \quad (2.9)$$

Essendo le trasformazioni di Lorentz definite con la seguente proprietà:

$$\eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu = \eta_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

si vede facilmente che:

$$ds'^2 = \eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ds^2 \quad (2.11)$$

ovvero ds^2 è un invariante per Lorentz.

2.3 Spazio-tempo di Minkowski

In Relatività Ristretta il tempo non è un parametro indipendente dal sistema di riferimento. Un evento mette in relazione i punti nello spazio con gli istanti di tempo, rendendo inseparabili le dimensioni spaziali e temporali. La rappresentazione grafica di

questo legame si svolge tramite diagramma di Minkowski, ovvero un piano (ct, \vec{x}) , in cui le coordinate sono relative a un sistema di riferimento inerziale e un evento è un punto su tale piano, mentre un fenomeno fisico, ovvero una successione di eventi, è in generale una linea detta linea di universo. Si noti che l'ortogonalità degli assi principali è una scelta puramente arbitraria per comodità.

Prendendo un punto lungo la linea di universo la tangente a tale punto forma sempre con l'asse ct un angolo θ minore di 45° . Infatti la tangente di tale angolo θ è il rapporto tra \vec{v} e c , ovvero β , e deve necessariamente essere minore di 1, e uguale a 1 solo se si tratta d un raggio di luce, la cui linea di universo è la bisettrice degli assi. Gli eventi nel quadrante superiore tra le bisettrici possono essere raggiunti da un segnale inviato dall'origine, di cui sono il *futuro assoluto*, nel cosiddetto cono futuro, e sono successivi ad O in ogni sistema di riferimento. In particolare si può vedere che $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 > 0$, e gli eventi sono separati da distanze di tipo tempo. Al di fuori del cono non c'è nessun evento accessibile tramite segnale dall'origine. Nel semipiano inferiore tra le bisettrici, analogamente, si parla di passato assoluto e cono passato, i cui eventi sono connessi in maniera causale ad O . Le due bisettrici formano invece i *coni-luce*, su cui sono presenti eventi futuri o passati connessi da segnali luminosi. In questo caso si ha $ds^2 = 0$, con distanze di tipo null. All'infuori dei coni si parla di presente, senza relazione causale e senza moto fisico associabile, con $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 < 0$, gli eventi sono separati da intervalli di tipo spazio.

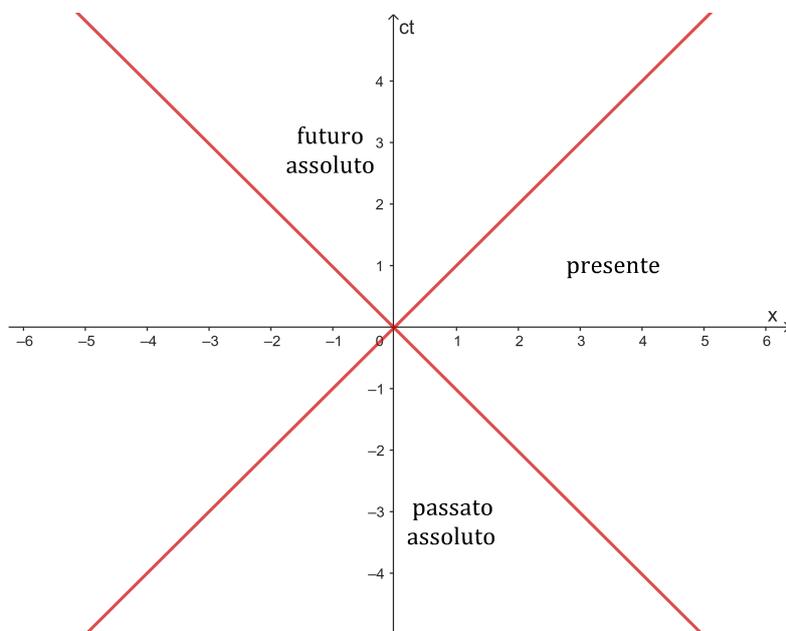


Figura 2.1: Diagramma di Minkowski

Tale ragionamento svolto per O vale per ogni evento, a cui sono associati un cono del futuro e del passato. Ciò si vede facilmente considerando due eventi A e B in un sistema di riferimento K :

$$A = (ct_A, x_A, y_A, z_A) \qquad B = (ct_B, x_B, y_B, z_B)$$

la cui distanza:

$$\Delta s_{AB}^2 = c^2 \Delta t_{AB}^2 - \Delta x_{AB}^2 - \Delta y_{AB}^2 - \Delta z_{AB}^2 \quad (2.12)$$

Passando ora in K' :

$$A' = (ct'_A, x'_A, y'_A, z'_A) \qquad B' = (ct'_B, x'_B, y'_B, z'_B)$$

la cui distanza:

$$\Delta s'_{AB}{}^2 = c^2 \Delta t'_{AB}{}^2 - \Delta x'_{AB}{}^2 - \Delta y'_{AB}{}^2 - \Delta z'_{AB}{}^2 \quad (2.13)$$

Ma per (2.11), se gli eventi sono separati da una distanza di tempo ($\Delta s_{AB}^2 > 0$) ciò si mantiene in ogni altro sistema di riferimento ($\Delta s'_{AB}{}^2 > 0$), e non potrà esistere un sistema K' in cui gli eventi diventano simultanei $\Delta t'_{AB} = 0$.

2.4 Tensori

Si esamina ora la notazione tensoriale che rende le proprietà delle trasformazioni di Lorentz sulle quantità fisiche più evidenti. Per farlo è conveniente però vedere le trasformazioni di coordinate da S a S' e viceversa anche nella forma:

$$\Lambda^\alpha_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \qquad (\Lambda^{-1})^\alpha_\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} \quad (2.14)$$

e definire la seguente proprietà:

$$\Lambda^\alpha_\beta \Lambda^\beta_\gamma = \delta^\alpha_\gamma \quad (2.15)$$

Per iniziare si definiscono gli **scalari**, ovvero tensori (0,0) che rappresentano quantità che rimangono invariate in seguito a trasformazioni:

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x') = \Phi(x) \quad (2.16)$$

un esempio è ds^2 . Si definiscono ora i **quadrivettori**, distinguendo i due oggetti in *controvarianti* e *covarianti*:

- Quadrivettori controvarianti: sono tensori di tipo (1,0), e definiti come $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$, e si trasforma in maniera analoga a come già visto per x^μ :

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) \quad (2.17)$$

un esempio è il quadrivettore momento $P^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$

- **Quadrivettori covarianti:** sono tensori di tipo (0,1), e definiti come $V_\mu = (V_0, V_1, V_2, V_3)$, che si trasforma tramite matrice inversa trasposta:

$$V_\mu(x) \rightarrow V'_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\nu V_\nu(x) \quad (2.18)$$

Si definisce il prodotto tra quadrivettore covariante e controvariante, anche noto come prodotto scalare come:

$$A_\alpha B^\alpha = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 \quad (2.19)$$

e che è effettivamente invariante per le trasformazioni di coordinate grazie alla (2.15). La maggior parte delle quantità fisiche non sono descritte da scalari e vettori ma da oggetti più complessi detti **tensori** essi sono composti da n componenti controvarianti e n covarianti e sono soggetti a trasformazioni di coordinate conseguentemente:

$$T_\gamma^{\alpha\beta} \rightarrow T'_\gamma{}^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \Lambda_\gamma{}^\delta T_\delta^{\mu\nu} \quad (2.20)$$

con $T_\gamma^{\alpha\beta}$ tensore di tipo (2,1). Infine si definiscono i tensori simmetrici e antisimmetrici rispettivamente come:

$$S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu} \quad L_{\mu\nu} = -L_{\nu\mu} \quad (2.21)$$

2.5 Cinematica Relativistica

Le leggi della meccanica newtoniana non sono però invarianti per trasformazioni di Lorentz, e necessitano una riformulazione nella Relatività Speciale. Per fare ciò si usano i quadrivettori, definendo innanzitutto il quadrivettore velocità, o quadrivelocità:

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} = \gamma \left(1; \frac{\vec{v}}{c} \right) \quad (2.22)$$

che viene trasformato tramite Lorentz, in quella che è una nuova legge di composizione della velocità passando in diversi sistemi di riferimento:

$$u^\alpha \rightarrow u'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta u^\beta \quad (2.23)$$

Inoltre il quadrivettore velocità ha norma 1, e ciò è facile da vedere partendo da ds^2 :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Rightarrow 1 = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = u_\mu u^\mu \quad (2.24)$$

Si definisce ora il quadrivettore accelerazione, o quadriaccelerazione:

$$\omega^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds} = \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} \quad (2.25)$$

che data la definizione classica dell'accelerazione \vec{a} :

$$\omega^0 = \frac{\gamma^4}{c^3} \vec{v} \cdot \vec{a} \quad \omega^i = \frac{\gamma^2}{c^2} \left[a^i + \frac{\gamma^2}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{a}) v^i \right] \quad (2.26)$$

La norma della quadriaccelerazione è data da:

$$\omega_\alpha \omega^\alpha = (\omega^0)^2 - |\omega^\alpha|^2 \quad (2.27)$$

e si dimostra essere negativa. Tale norma è l'accelerazione propria ovvero l'accelerazione misurata in un sistema di riferimento S' rispetto a cui un corpo in movimento, supposto puntiforme è in quiete, che per semplicità nella trattazione successiva sarà indicata con g . L'accelerazione propria è invariante per Lorentz.

Inoltre partendo da (2.24) si può vedere che quadriaccelerazione e quadrivelocità sono perpendicolari:

$$\frac{d}{ds}(u^\mu u_\mu) = 0 \Rightarrow \omega^\mu u_\mu = 0 \quad (2.28)$$

Queste definizioni sono utili al fine di descrivere un sistema di riferimento in moto uniformemente accelerato. Si considera quindi un sistema di riferimento inerziale in quiete S , e un corpo in moto uniformemente accelerato, con accelerazione costante lungo un'unica direzione spaziale. Le componenti del moto rispetto al sistema sono quindi:

$$\omega^\alpha = (\omega^0, \omega^1, 0, 0) \quad u^\alpha = (u^0, u^1, 0, 0)$$

e sfruttando le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \omega_\alpha \omega^\alpha = -g^2 \\ u_\alpha u^\alpha = 1 \\ u_\alpha \omega^\alpha = 0 \end{cases}$$

si vede che:

$$\omega^0 u^0 - \omega^1 u^1 = 0 \rightarrow \omega^0 = \frac{\omega^1 u^1}{u^0}$$

$$\omega_\alpha \omega^\alpha = -g^2 = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 = \frac{(\omega^1)^2 (u^1)^2}{(u^0)^2} - (\omega^1)^2$$

che raccogliendo:

$$\frac{(\omega^1)^2}{(u^0)^2} [(u^1)^2 - (u^0)^2] = \frac{(\omega^1)^2}{(u^0)^2} (-1) = -g^2$$

e quindi si ottiene:

$$\omega^0 = \frac{du^0}{ds} = gu^1 \qquad \omega^1 = \frac{du^1}{ds} = gu^0 \qquad (2.29)$$

differenziando per ds si sfrutta nuovamente la (2.29):

$$\frac{d^2u^0}{ds^2} = g \frac{du^1}{ds} = g^2u^0 \qquad (2.30)$$

e integrando si ottiene:

$$u^0 = C_1e^{gs} + C_2e^{-gs} \qquad (2.31)$$

Si prosegue in maniera analoga per ω^1 ottenendo:

$$u^1 = C_3e^{gs} + C_4e^{-gs} \qquad (2.32)$$

Ma, sfruttando sempre la (2.29) risulta che:

$$gC_3e^{gs} - gC_4e^{-gs} = gC_1e^{gs} + gC_2e^{-gs} \Rightarrow \quad C_1 = C_3 \quad C_2 = -C_4 \qquad (2.33)$$

Da cui:

$$u^0 = C_3e^{gs} - C_4e^{-gs} \qquad u^1 = C_3e^{gs} + C_4e^{-gs} \qquad (2.34)$$

Considerando la seguente condizione iniziale $s = 0$ si ottiene:

$$s = 0 \Rightarrow \vec{v} = 0 \Rightarrow u^\alpha = (\gamma; \gamma \frac{\vec{v}}{c}) = (1; 0) \qquad (2.35)$$

e quindi:

$$1 = C_3 - C_4 \quad 0 = C_3 + C_4 \quad \Rightarrow \quad C_3 = \frac{1}{2} \quad C_4 = -\frac{1}{2} \qquad (2.36)$$

Per cui, usando seno e coseno iperbolici:

$$u^0 = \cosh(gs) \qquad u^1 = \sinh(gs) \qquad (2.37)$$

Da cui si ricavano facilmente le equazioni del moto:

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} \Rightarrow x^0 = \frac{1}{g} \sinh(gs) \qquad (2.38)$$

$$u^1 = \frac{dx^1}{ds} \Rightarrow x^1 = \frac{1}{g} \cosh(gs) \qquad (2.39)$$

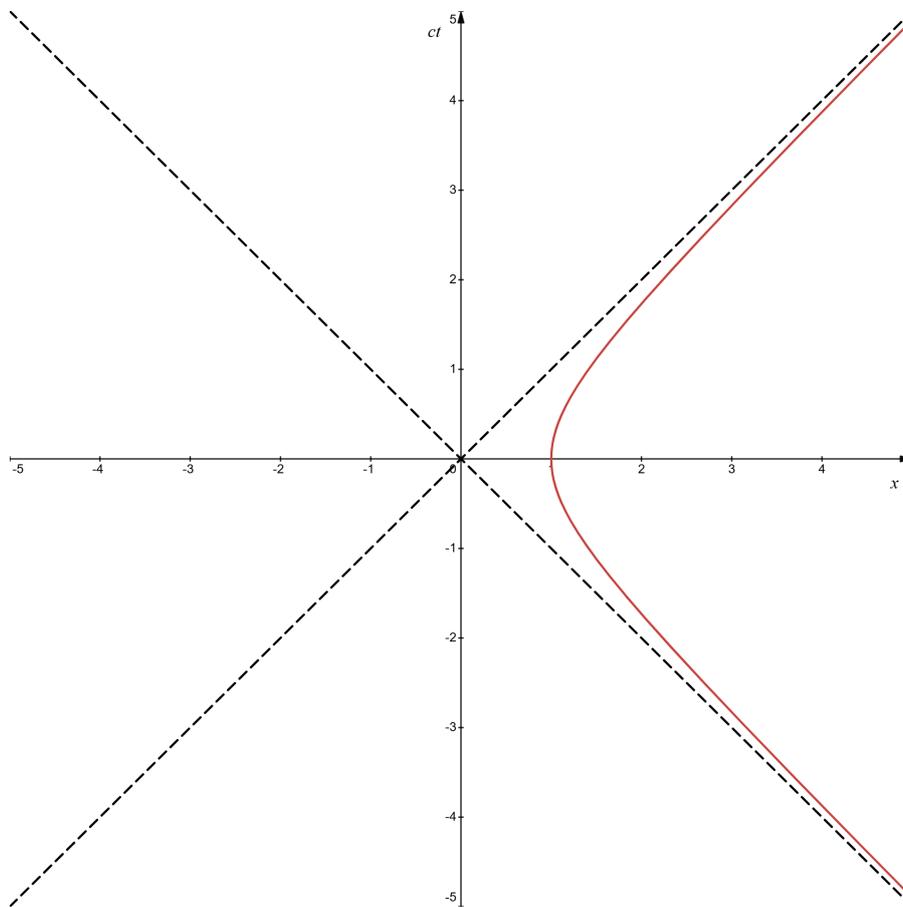


Figura 2.2: Iperbole dell'equazione del moto, posti $c = 1$ e $g = 1$

Svolgendo la norma $x_\mu x^\mu$ si può vedere con facilità che il moto uniformemente accelerato descrive un'iperbole (si veda la *Figura 2.2*) sul piano ct, \vec{x} :

$$(x^1)^2 - (x^0)^2 = +\frac{1}{g^2} \quad (2.40)$$

A differenza del moto accelerato newtoniano che è parabolico. Le coordinate sono definite per $0 < x < +\infty$ e $-x < ct < x$. Si noti che è presente una singolarità in $x^1 = x^0$, dove l'accelerazione tende a divergere, con asintoti di conseguenza in $ct = \pm x$. Infatti nessun osservatore accelerato può ricevere segnali luminosi da eventi posti in $ct \geq x$ e $ct \leq -x$, ovvero all'infuori del limite posto dagli asintoti, creando a tutti gli effetti un orizzonte degli eventi.

2.5.1 Coordinate di Rindler

Le coordinate di Rindler sono usate per la descrizione di un osservatore in moto uniformemente accelerato. In particolare tale osservatore, detto osservatore di Rindler, come descritto dalle omonime coordinate, risulta a riposo. Ovvero con coordinate spaziali costanti, e coordinata temporale che invece è variabile. La metrica di Rindler è così definita:

$$ds^2 = (\kappa\xi)^2 d\eta^2 - d\xi^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.41)$$

Si vede facilmente che le coordinate sono definite in relazione alla trattazione in coordinate di Minkowski vista nel paragrafo precedente:

$$\begin{aligned} ct &= \xi \sinh(\kappa\eta) \\ x &= \xi \cosh(\kappa\eta) \end{aligned}$$

tale per cui:

$$x^2 - c^2t^2 = \xi^2$$

Un ramo di iperbole nel piano di Minkowski (ovvero la traiettoria del moto uniformemente accelerato), corrisponde a un osservatore di Rindler con ξ^2 costante, e quindi si dimostra l'osservatore sia a riposo.

Capitolo 3

Introduzione alla Relatività Generale

La Relatività Ristretta presentata nel Capitolo 2 presenta due grandi limiti: privilegia i sistemi di riferimento inerziali; non tratta i fenomeni gravitazionali. Diviene quindi necessaria una teoria che consideri ugualmente sia osservatori inerziali che accelerati, e che incorpori la gravitazione.[4] [2] A tale scopo Einstein nel 1916 pubblica la *Teoria Generale della Relatività*.

La chiave per risolvere entrambi i problemi sta nei sistemi non inerziali stessi, dato che non è possibile trattare i fenomeni gravitazionali senza considerare tali sistemi di riferimento. In particolare è da considerarsi come punto di partenza l'uguaglianza tra massa inerziale e gravitazionale, e conseguentemente tra forza inerziale e gravitazionale (Capitolo 1) che la Relatività Generale vuole formalizzare. Un altro elemento fondamentale è l'intuizione di Einstein di come gli oggetti agiscano sullo spazio-tempo, che necessita quindi di una dinamica, descritta da un campo che interagisce con materia ed energia. La gravità geometricamente è una curvatura di tale spazio, in una nuova concezione tra geometria e fisica.

3.1 Metrica dello spazio-tempo

Lo spazio-tempo nella Relatività Generale è una varietà differenziabile quadridimensionale in cui ogni suo punto ha associata tramite carte una quaterna di coordinate. Dove due carte si sovrappongono l'applicazione che le collega si richiede sia differenziabile, e il passaggio tra carte corrisponde a una trasformazione di coordinate, come visto per le trasformazioni di Lorentz nel Capitolo 2. La varietà dello spazio-tempo ha struttura riemanniana, ovvero la distanza ds tra eventi è data dalla metrica:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (3.1)$$

In cui $g_{\mu\nu}(x)$ è il tensore metrico covariante, simmetrico. Il principio di equivalenza (Capitolo 1) formalizzandolo matematicamente afferma che considerando l'intorno di un evento, esiste una carta inerziale, in cui la metrica considerata corrisponde alla metrica Minkowskiana, con tensore metrico $\eta_{\mu\nu}$ usato anche nella Relatività Speciale (2.9). Tuttavia, dato che lo spazio-tempo è curvo, il tensore metrico può ridursi a quello di Minkowski solo localmente, tenendo conto che lo spazio di Minkowski è piatto. La varietà dello spazio-tempo di Minkowski è ricoperta completamente da carte inerziali collegate proprio dalle trasformazioni di coordinate di Lorentz. Nella Relatività Generale inoltre tutte le grandezze fisiche sono tensori, per cui dato che le leggi fisiche si scrivono in forma tensoriale ciò garantisce che la forma rimanga la medesima in ogni sistema di coordinate. Infine è necessario precisare che la coordinata x^0 non è più necessariamente il tempo fisico. L'intervallo di tempo fisico tra eventi è invece l'intervallo di tempo proprio:

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}(x)} dx^0 \quad (3.2)$$

Ma dato che g_{00} dipende dalla posizione il tempo proprio di diversi osservatori in diversi punti dello spazio-tempo è diverso.

3.2 Equazione delle geodetiche

Dati due punti A e B , la curva che li congiunge ha lunghezza:

$$s_{AB} = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu} \quad (3.3)$$

Le geodetiche sono per definizione le curve per cui l'integrale ha valore estremale. L'equazione delle geodetiche si ottiene imponendo che la lunghezza abbia valore stazionario rispetto a variazioni infinitesime delle coordinate x^μ :

$$\begin{aligned} \delta \int_A^B ds &= \delta \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu} = \int_A^B \frac{\delta \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}}{2ds} = \\ &= \int_A^B \left(\frac{1}{2} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{d\delta x^\nu}{ds} \right) ds = \\ &= \int_A^B \left(\frac{1}{2} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma - \frac{d}{ds} \left(g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \delta x^\sigma \right) ds \end{aligned} \quad (3.4)$$

in cui $\delta x_A^\mu = \delta x_B^\mu = 0$. Inoltre nell'ultimo passaggio si è integrato per parti tenendo conto che agli estremi la variazione si annulla. Avendo richiesto la stazionarietà $\delta \int ds = 0$, si ha:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{d}{ds} \left(g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \right) = \\ & \frac{1}{2} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} - \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

in cui si è sfruttato che δx^σ è arbitrario. Il terzo termine di (3.5) si può scrivere come:

$$\frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{2} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \right) \quad (3.6)$$

Per cui la (3.5) diventa:

$$g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (3.7)$$

Moltiplicando ora per $g^{\rho\sigma}$, e usando i simboli di Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ definiti come:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (3.8)$$

si ottiene l'equazione delle geodetiche nella varietà dello spazio-tempo:

$$\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (3.9)$$

Nel caso di uno spazio localmente inerziale, o semplicemente dello spazio di Minkowski i simboli di Christoffel sono nulli, e l'equazione delle geodetiche si riduce a:

$$\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} = 0 \quad (3.10)$$

che geometricamente corrisponde a una retta 3+1 dimensionale.

3.3 Campo Gravitazionale

Ora si vuole identificare il campo gravitazionale partendo dall'equazione delle geodetiche (3.9), che descrive il moto dei corpi liberi. Nella teoria della Relatività Generale il campo gravitazionale è rappresentato dalla metrica dello spazio-tempo, che corrisponde al potenziale gravitazionale. Il termine che quindi è di interesse è il secondo dato che $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ contiene essenzialmente le derivate della metrica (3.8). Il primo termine invece corrisponde alla parte inerziale. È interessante notare che dato che i due termini non presentano carattere tensoriale, essi si trasformano l'uno nell'altro col variare dei sistemi di coordinate, provando ulteriormente il principio di equivalenza, con inerzia e gravità localmente indistinguibili.

3.3.1 Limite Newtoniano

La metrica dello spazio-tempo in condizioni normali differisce di poco da quella di Minkowski, dato che gli effetti della curvatura sono piccoli tranne che in condizioni di oggetti ad altissima densità. Si pone quindi:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.11)$$

con deviazione dovuta dalla perturbazione $h_{\mu\nu}$ trascurabile rispetto a η : $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Inoltre il campo gravitazionale è quasi statico, ovvero:

$$\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} \simeq 0 \quad (3.12)$$

Nel caso non relativistico la quadrivelocità ha chiaramente componenti spaziali trascurabili rispetto a u^0 , che ha valore circa unitario. Per cui l'equazione delle geodetiche (3.9) diventa:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = -\Gamma_{00}^i \quad (3.13)$$

in cui:

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{i\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\sigma}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} \right) \simeq -\frac{1}{2} g^{i\sigma} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} \simeq -\frac{1}{2} \eta^{i\sigma} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\sigma} \simeq -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x_i} \quad (3.14)$$

Scrivendo ora l'equazione del potenziale gravitazionale Newtoniano:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (3.15)$$

per cui, ricordando anche che $ds \simeq cdt$ nel limite non relativistico:

$$V = \frac{1}{2} h_{00} c^2 = -\frac{GM}{r} \quad (3.16)$$

da cui

$$g_{00} = 1 + h_{00} = 1 - \frac{2GM}{rc^2} \quad (3.17)$$

Si può quindi affermare che la componente g_{00} del tensore metrico sia legata al potenziale gravitazionale newtoniano.

3.3.2 Equazioni di Einstein

La relazione nella fisica classica che lega il potenziale gravitazionale newtoniano alla massa, o più precisamente alla densità di massa ρ è l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 V = 4\pi G\rho \quad (3.18)$$

Si richiede allora che le equazioni del campo gravitazionale siano equazioni di derivate parziali del secondo ordine e lineari, dato che devono ridursi nel limite newtoniano nella (3.18). Gli unici tensori di rango 2 che sono formati dal tensore $g_{\mu\nu}$ fino alle derivate seconde sono il tensore di Riemann R_{ijkl} e le sue contrazioni, in particolare il tensore di Einstein. Si definiscono ora il tensore di Riemann e alcune contrazioni utili alla definizione delle equazioni di campo:

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x_i \partial x_l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} \right) + g_{iz} (\Gamma_{\nu l}^z \Gamma_{jk}^\nu - \Gamma_{\nu k}^z \Gamma_{jl}^\nu) \quad (\text{Tensore di Riemann}) \quad (3.19)$$

$$R_{ij} = R_{ikj}^k \quad (\text{Tensore di Ricci}) \quad (3.20)$$

$$R = R_k^k \quad (\text{Scalare di curvatura}) \quad (3.21)$$

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \quad (\text{Tensore di Einstein}) \quad (3.22)$$

Volendo mantenere la composizione della (3.18) la forma finale di tali equazioni sarà del tipo $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, in cui κ è una costante e $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-momento. Valutando le costanti, anche per far tornare dimensionalmente l'espressione si ottiene l'espressione finale delle equazioni di campo di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.23)$$

in cui G_N è la costante gravitazionale di Newton.

Data la sorgente di materia rappresentata da $T_{\mu\nu}$, le equazioni di Einstein permettono di calcolare la metrica, e quindi la geometria dello spazio tempo, e come vari la sua curvatura. Il campo è quindi generato da una distribuzione di energia e momento, che può essere quindi anche la classica massa, o il campo gravitazionale stesso. Tuttavia solo densità molto elevate di energia portano curvature dello spazio-tempo apprezzabili.

3.4 Soluzione di Schwarzschild

La soluzione alle equazioni di campo di Einstein in caso di simmetria sferica risale al 1916, ed è la metrica di Schwarzschild. Si considera un corpo sferico di massa M , ponendosi nel suo intorno, dato che lo spazio tempo è vuoto e il tensore di energia-momento risulta $T_{\mu\nu} = 0$, a differenza dell'interno di un oggetto astrofisico. La metrica di Schwarzschild è quindi definita come:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.24)$$

avendo utilizzato le coordinate sferico-polari. Inoltre la metrica è singolare in:

$$r = \frac{2GM}{c^2} \equiv R_S \quad (3.25)$$

in cui R_S è detto *raggio di Schwarzschild*. Nella maggior parte dei casi tale condizione non risulta un problema dato che il raggio del corpo sferico è in genere maggiore del proprio raggio di Schwarzschild. La singolarità non è propriamente fisica, dato che con un opportuno riscalamento di coordinate può essere eliminata. Un corpo con raggio uguale a R_S è un *buco nero*. Si vogliono ora specificare le componenti del tensore metrico:

$$\begin{aligned} g_{00} &= \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) & g_{11} &= -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \\ g_{22} &= -r^2 & g_{33} &= -r^2 \sin^2\theta \end{aligned} \quad (3.26)$$

Si vede facilmente che la componente 00 combacia con il risultato già trovato nel limite newtoniano (3.17).

Capitolo 4

Near Horizon Approximation

Partendo dalla metrica di Schwarzschild applicando l'approssimazione vicino l'orizzonte (*Near Horizon Approximation*) [1], si può fare la descrizione dello spazio di Rindler.

4.1 Spazio di Rindler

L'uso della geometria di Rindler, già introdotta nel Capitolo 2, è spiegabile a livello fisico notando che la metrica di Schwarzschild (3.24) è ben approssimata in prossimità dell'orizzonte da uno spazio piatto. Si introduce allora la coordinata $0 < x \ll 2M$, in cui si considerano G e c come costanti a valore unitario per semplificare la trattazione, x è allora definita come:

$$r = 2M + \frac{x^2}{8M} \quad (4.1)$$

sostituendo:

$$1 - \frac{2M}{r} = 1 - \frac{2M}{2M + \frac{x^2}{8M}} = 1 - \frac{16M^2}{16M^2 + x^2} = \frac{x^2}{16M^2 + x^2} \simeq \frac{x^2}{16M^2} = (\kappa x)^2 \quad (4.2)$$

in cui $\kappa = \frac{1}{4M}$. Definendo ora dx^2 :

$$dr = \frac{x}{4M} dx \rightarrow dr^2 = \frac{x^2}{16M^2} dx^2$$

per cui, usando la (4.2):

$$dx^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} \quad (4.3)$$

Infine risostituendo nella (3.24) si ottiene la metrica:

$$ds^2 \simeq (\kappa x)^2 dx^2 - dt^2 - (2M)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.4)$$

I primi due termini definiscono uno spazio-tempo bidimensionale piatto (essendo descritto da coordinate di Rindler), detto spazio di Rindler, l'ultimo termine invece è una due-sfera di raggio $2M$.

Si considera ora un osservatore statico (ovvero con $x = cost.$, $\theta = cost.$, $\phi = cost.$), e per quanto visto nel Capitolo 3, si possono scrivere quadriaccelerazione e quadrivelocità come:

$$\omega^\alpha = \frac{Du^\alpha}{Ds} = \frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu \quad (4.5)$$

$$u^\alpha = (u^0, \vec{0}) = \left(\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}, \vec{0} \right) \quad (4.6)$$

$$u_\alpha u^\alpha = 1 \quad (4.7)$$

con $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ definito dalla (3.8). Si prosegue sostituendo le condizioni poste sulla quadrivelocità da (4.6):

$$\omega^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{00}^\alpha (u^0)^2 \quad (4.8)$$

in cui Γ_{00}^α :

$$\Gamma_{00}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \left(\frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu} \right) = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \left(- \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu} \right) \quad (4.9)$$

Si calcola ora la componente 1 della quadriaccelerazione (le altre componenti sono nulle):

$$\omega^1 = \Gamma_{00}^1 (u^0)^2 = \frac{k^2 x}{k^2 x^2} = \frac{1}{x} \quad (4.10)$$

in cui si è usato:

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(- \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2} (-1) (-2k^2 x) = k^2 x \quad (4.11)$$

Infine si calcola il valore della norma della quadriaccelerazione:

$$\omega_\alpha \omega^\alpha = g_{11} (\omega^1)^2 = -x^{-2} \quad (4.12)$$

4.2 Principio di Equivalenza

Per ottenere una rappresentazione grafica si sfrutta nuovamente lo spazio di Minkowski in maniera analoga a quanto visto nel paragrafo 2.5, usando la parte di metrica che descrive lo spazio di Rindler:

$$ds^2 = (\kappa x)^2 dt^2 - dx^2 \quad (4.13)$$

Si utilizzano le già viste coordinate di Rindler, rifacendosi al paragrafo 2.5, e ponendosi nel caso bidimensionale. Data la metrica di Minkowski bidimensionale:

$$ds^2 = dT^2 - dX^2 \quad (4.14)$$

si ha:

$$T = x \sinh(\kappa t) \quad X = x \cosh(\kappa t) \quad (4.15)$$

in cui (x, t) sono le coordinate di Rindler. Per cui è facile vedere che:

$$X^2 - T^2 = x^2 \quad (4.16)$$

$$\frac{T}{X} = \tanh(\kappa t) \quad (4.17)$$

Per la trattazione sulle equazioni del moto svolta nel paragrafo 2.5, risulta che:

$$u^0 = \cosh(gs) = \frac{dT}{ds} \Rightarrow T = \frac{1}{g} \sinh(gs) \quad (4.18)$$

$$u^1 = \sinh(gs) = \frac{dX}{ds} \Rightarrow X = \frac{1}{g} \cosh(gs) \quad (4.19)$$

da cui conseguentemente risulta che:

$$X^2 - T^2 = \frac{1}{g^2} \quad (4.20)$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{1}{g} \Rightarrow x = \text{cost.}$$

essendo il moto uniformemente accelerato. Per cui l'accelerazione g va come $\frac{1}{x}$. Si introduce ora una nuova coordinata σ , definito da $x = \frac{1}{\kappa} e^{\kappa\sigma}$, da cui la metrica in (t, σ) :

$$ds^2 = e^{2\kappa\sigma} (dt^2 - d\sigma^2) \quad (4.21)$$

Le coordinate nulle associate per Rindler sono:

$$u \equiv t - \sigma, \quad v \equiv t + \sigma \quad (4.22)$$

per cui la metrica diventa:

$$ds^2 = e^{2\kappa\sigma} du dv \quad (4.23)$$

Esse sono in relazione con le coordinate nulle di Minkowski $U = T - X$ e $V = T + X$:

$$U = -\frac{1}{\kappa} e^{-\kappa u}, \quad V = \frac{1}{\kappa} e^{\kappa v} \quad (4.24)$$

La (4.24) vale per il ramo destro dell'iperbole di Rindler, mentre per il ramo sinistro il segno di $\frac{1}{\kappa}$ è invertito, mantenendo ds^2 invariato. U e V così definite sono dette coordinate di Kruskal. Le coordinate di Kruskal rappresentano un'estensione massimale globale dello spazio-tempo di Schwarzschild, in maniera del tutto analoga in cui le coordinate di Minkowski lo sono per quelle di Rindler. Per cui nell'approssimazione vicino all'orizzonte sono le coordinate inerziali globali della geometria piatta, e non più solo locale. Ponendosi sul piano, si può osservare che lo spazio di Rindler è solo il quadrante destro dello spazio di Minkowski, con $U < 0$ e $V > 0$, mentre il quadrante sinistro dello spazio di Minkowski è a esso isomorfo.

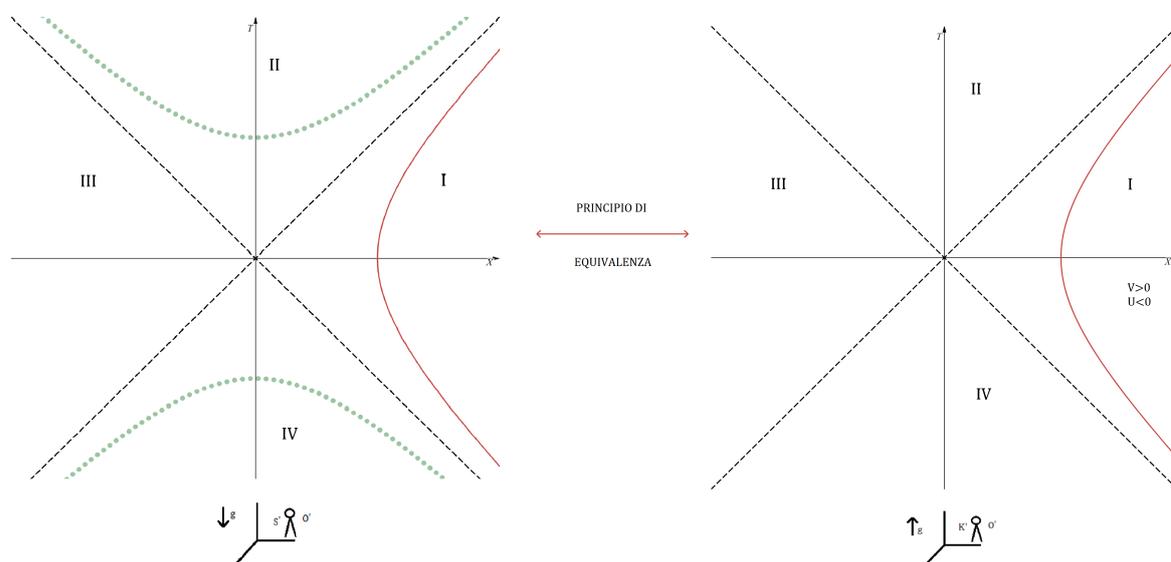


Figura 4.1: Rappresentazioni grafiche delle metriche e del principio di equivalenza, a sinistra si è usata Schwarzschild e a destra Minkowski

In *Figura 4.1* si vede chiaramente la traiettoria dell'osservatore uniformemente accelerato, definita da (4.16), con accelerazione propria \vec{g} . L'accelerazione dell'osservatore a x , o u , fissato è necessaria per controbilanciare il campo gravitazionale, mantenendo la posizione dell'osservatore costante. Ciò è chiaramente una manifestazione del principio di equivalenza, che è possibile solo per $x > 0$, dato che in $x = 0$, in corrispondenza dell'orizzonte, l'accelerazione propria diventa divergente.

4.3 Simmetrie e Vettori di Killing

É di particolare interesse studiare le simmetrie, in particolare gli spazi metrici simmetrici, e la teoria matematica che le definisce in maniera generale, a prescindere dalle coordinate. Si usa quindi il linguaggio covariante, nello specifico si parte dal concetto di vettori di Killing.

Data una metrica $g_{\mu\nu}$, essa è detta invariante in forma se, una volta effettuato un cambio di coordinate, la metrica $g'_{\mu\nu}$ è la medesima funzione per la coordinata x'^{μ} , come $g_{\mu\nu}$ lo è per x^{μ} . Ovvero:

$$g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(y) \quad (4.25)$$

è vero per ogni y . In ogni punto la metrica trasformata è definibile tramite trasformazioni di coordinate:

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} g_{\alpha\beta}(x') \quad (4.26)$$

Per cui ogni trasformazione da x a x' che soddisfa la (4.26) è detta *isometria*. Un esempio della relatività ristretta sono le trasformazioni di Lorentz applicate alla metrica di Minkowski. Semplificando il concetto si può considerare una trasformazione di coordinate infinitesima:

$$x'^{\mu} = (\delta^{\mu}_{\nu} + \varepsilon^{\mu}_{\nu})x^{\nu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) \quad (4.27)$$

con ε^{μ}_{ν} dalle componenti dal valore infinitesimo. Applicando tale trasformazione alla (4.26) si ottiene:

$$0 = \frac{\partial \xi^{\mu}(x)}{\partial x^{\rho}} g_{\mu\sigma}(x) + \frac{\partial \xi^{\nu}(x)}{\partial x^{\sigma}} g_{\rho\nu}(x) + \xi^{\mu}(x) \frac{\partial g_{\rho\sigma}(x)}{\partial x^{\mu}} \quad (4.28)$$

che diventa:

$$\frac{\partial \xi_{\sigma}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial \xi_{\rho}}{\partial x^{\sigma}} - 2\xi_{\mu} \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} = \frac{\partial \xi_{\sigma}}{\partial x^{\rho}} - \xi_{\mu} \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} + \frac{\partial \xi_{\rho}}{\partial x^{\sigma}} - \xi_{\mu} \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} = 0 \quad (4.29)$$

Ogni quadrivettore che soddisfi tale condizione è detto *Vettore di Killing* della metrica. Per cui identificare le isometrie si riduce al trovare i vettori di Killing della metrica, con annesse combinazioni lineari. I vettori di Killing sono quindi i generatori infinitesimali delle isometrie. L'equazione (4.29) è detta equazione di Killing.

I vettori di Killing permettono di trovare le costanti associate lungo il moto lungo le geodetiche [3]. Si considera quindi il quadrivettore velocità u^{α} :

$$u^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{ds} = \left(\frac{dt}{ds}; \frac{dx}{ds} \right) = (u^0; u^1)$$

che si suppone tangente alla geodetica parametrizzata tramite parametro affine s . Allora utilizzando il vettore di Killing generico ξ^{α} , tenendo a mente che la quantità $u^{\alpha} \xi_{\alpha}$ è uno scalare:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(u^\alpha \xi_\alpha) &= \frac{D}{Ds}(u^\alpha \xi_\alpha) = \frac{D}{Ds}(u^\alpha) \xi_\alpha + u^\alpha \frac{D}{Ds}(\xi_\alpha) = \\ &= \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha u^\mu \right) \frac{dx^\beta}{ds} \xi_\alpha + u^\alpha \left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} - \xi_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \right) \frac{dx^\beta}{ds}\end{aligned}$$

in cui il primo termine si annulla per l'equazione delle geodetiche (4.40) lasciando:

$$u^\alpha \left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} - \xi_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \right) \frac{dx^\beta}{ds} = u^\alpha \left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} - \xi_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \right) u^\beta = 0$$

che risulta a sua volta nullo essendo il prodotto di un tensore antisimmetrico (membro tra parentesi) con un tensore simmetrico ($u^\alpha u^\beta$). In conclusione si ha:

$$\frac{d}{ds}(u^\alpha \xi_\alpha) = 0 \quad (4.30)$$

Si è quindi dimostrato che la grandezza $u^\alpha \xi_\alpha$ è costante lungo la geodetica parametrizzata in s .

Si considera ora la metrica in discussione in questo capitolo, ovvero la metrica di Rindler, per determinarne le simmetrie. Si vogliono quindi ricavare i corrispondenti vettori di Killing in relazione alla metrica di Minkowski. L'invarianza da considerare è un'invarianza di tipo tempo, data l'indipendenza temporale della metrica:

$$\begin{aligned}ds^2 &= (\kappa x)^2 dt^2 - dx^2 \\ t &\rightarrow t + \varepsilon\end{aligned}$$

il vettore di Killing per Rindler sarà quindi di tipo tempo:

$$\xi_{(R)}^\alpha = (1; 0) \quad (4.31)$$

che ponendosi con le coordinate di Minkowski:

$$\xi_{(M)}^\alpha = \frac{\partial x_{(M)}^\alpha}{\partial x_{(R)}^\mu} \xi_{(R)}^\mu = \frac{\partial x_{(M)}^\alpha}{\partial t} \quad (4.32)$$

Per cui le componenti di tipo tempo e spazio T e X :

$$\begin{aligned}\xi_{(M)}^T &= \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa x \cos(\kappa t) = \kappa X \\ \xi_{(M)}^X &= \frac{\partial X}{\partial t} = \kappa x \sin(\kappa t) = \kappa T \\ &\Rightarrow \xi_{(M)}^\alpha = \kappa(X; T)\end{aligned} \quad (4.33)$$

Trovato il vettore di Killing corrispondente in metrica di Minkowski, si verifica che è il generatore per il boost di Lorentz lungo l'asse X . Usando ancora la trasformazione di coordinate infinitesima (4.27):

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = (\delta^{\mu}_{\nu} + \varepsilon^{\mu}_{\nu}) x^{\nu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$$

e applicandola alla metrica di Minkowski:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dT^2 - dX^2 \\ \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} \eta_{\mu\nu} &= \eta_{\alpha\beta} \\ \rightarrow (\delta^{\mu}_{\alpha} + \varepsilon^{\mu}_{\alpha})(\delta^{\nu}_{\beta} + \varepsilon^{\nu}_{\beta}) \eta_{\mu\nu} &= \eta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.34)$$

che diventa:

$$\delta^{\mu}_{\alpha} \varepsilon^{\nu}_{\beta} \eta_{\mu\nu} + \delta^{\nu}_{\beta} \varepsilon^{\mu}_{\alpha} \eta_{\mu\nu} = \varepsilon^{\nu}_{\beta} \eta_{\alpha\nu} + \varepsilon^{\mu}_{\alpha} \eta_{\mu\beta} = 0 \quad (4.35)$$

quindi:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{10} = -\varepsilon_{01} = \varepsilon \quad (4.36)$$

ricavando quindi il vettore di Killing risulta che:

$$\xi^{\alpha} = \varepsilon_{\beta}^{\alpha} x^{\beta} \Rightarrow \xi^T = \varepsilon_{\beta}^0 x^{\beta} = \varepsilon_1^0 X = \varepsilon_{01} X = \varepsilon X \quad (4.37)$$

$$\xi^X = \varepsilon_{\beta}^1 x^{\beta} = \varepsilon_0^1 T = -\varepsilon_{10} T = \varepsilon T \quad (4.38)$$

ovvero:

$$\xi_{(M)}^{\alpha} = \varepsilon(X; T) \quad (4.39)$$

ottenendo quindi il Killing del boost di Lorentz come vettore di Killing in metrica di Minkowski, corrispondente a un'invarianza temporale in metrica di Rindler.

4.4 Geodetiche di Rindler

Il passo successivo è ora quello di trovare le geodetiche per la metrica di Rindler:

$$ds^2 = (\kappa x)^2 dt^2 - dx^2$$

si ricorda che l'equazione delle geodetiche, come visto nel paragrafo 3.2, è:

$$\frac{d^2 x^{\rho}}{ds^2} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0 \quad (4.40)$$

in cui il simbolo di Christoffel si ricorda essere definito come:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right)$$

con $g_{\alpha\beta}$ è il tensore della metrica utilizzata. Nel caso della metrica di Rindler quindi il tensore metrico avrà componenti:

$$g_{00} = (\kappa x)^2, \quad g_{11} = -1, \quad g_{01} = g_{10} = 0 \quad (4.41)$$

É facile vedere che gli unici simboli di Christoffel non nulli siano Γ_{00}^1 , Γ_{10}^0 e Γ_{01}^0 :

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) = -\frac{1}{2} \left(0 + 0 - \frac{\partial(\kappa x)^2}{\partial x^1} \right) = \kappa^2 x \quad (4.42)$$

$$\Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2}g^{00} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{(\kappa x)^2} \left(0 + \frac{\partial(\kappa x)^2}{\partial x^1} - 0 \right) = \frac{1}{x} \quad (4.43)$$

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2}g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{(\kappa x)^2} \left(\frac{\partial(\kappa x)^2}{\partial x^1} + 0 - 0 \right) = \frac{1}{x} \quad (4.44)$$

Si prosegue trovando le equazioni delle geodetiche sostituendo quanto appena trovato nell'equazione delle geodetiche (4.40):

$$\frac{d^2 x^1}{ds^2} + \Gamma_{00}^1 \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} = \frac{d^2 x^1}{ds^2} + (\kappa^2 x) \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2 x^0}{ds^2} + \Gamma_{10}^0 \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^0}{ds} + \Gamma_{01}^0 \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^1}{ds} = \frac{d^2 x^0}{ds^2} + \frac{2}{x} \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^1}{ds} = 0$$

per cui, sostituendo a x^0 e x^1 le rispettive coordinate di Rindler, le equazioni delle geodetiche ottenute sono:

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + (\kappa^2 x) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0 \quad (4.45)$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{2}{x} \frac{dt}{ds} \frac{dx}{ds} = 0 \quad (4.46)$$

Prima di procedere con l'integrazione è opportuno individuare eventuali costanti lungo le geodetiche.

Per la metrica di Rindler, come visto nel paragrafo 4.3, è presente un vettore di Killing di tipo tempo:

$$\xi^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} = (1; 0)$$

per cui la quantità che rimane costante è l'energia di Killing, che è definita come:

$$\tilde{E} = -u_\alpha \xi^\alpha = -u_0 \xi^0 - u_1 \xi^1 = -u_0 \quad (4.47)$$

ciò permette di concludere che la componente u_0 sia costante lungo la geodetica.

Si procede ora con soluzione delle equazioni delle geodetiche. Si sfrutta per l'integrazione la relazione 2.24:

$$u_\alpha u^\alpha = 1 = g_{\beta\alpha} u^\beta u^\alpha$$

per cui:

$$g_{\beta\alpha} u^\beta u^\alpha = (\kappa x)^2 \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 = 1 \quad (4.48)$$

e per quanto visto con l'energia di Killing (4.47):

$$(\kappa x)^2 \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = \frac{\tilde{E}^2}{(\kappa x)^2} \quad (4.49)$$

che è integrale primo di di (4.45). Si prosegue sostituendo:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}^2}{(\kappa x)^2} - \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 &= 1 \\ \rightarrow \frac{\tilde{E}^2 - (\kappa x)^2}{(\kappa x)^2} &= \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

per cui l'integrale sarà:

$$\int ds = \pm \int \frac{\kappa x}{\sqrt{\tilde{E}^2 - (\kappa x)^2}} dx$$

la cui soluzione, tenendo conto delle costanti \tilde{E} κ , è:

$$\begin{aligned} s + C &= \mp \left(\frac{\sqrt{\tilde{E}^2 - (\kappa x)^2}}{\kappa} \right) \\ \Rightarrow x(s) &= \pm \sqrt{\frac{\tilde{E}^2}{\kappa^2} - (s + C)^2} \end{aligned} \quad (4.51)$$

A questo punto si prosegue trovando $t(s)$ e si sfrutta la relazione $x(s)$ appena trovata:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{-\tilde{E}}{(\kappa x)^2} = \frac{-\tilde{E}}{\left(\tilde{E}^2 - (s + C)^2 \kappa^2 \right)} \quad (4.52)$$

integrando si ha:

$$\int dt = \int \frac{-\tilde{E}}{\left(\tilde{E}^2 - (s + C)^2 \kappa^2 \right)} ds$$

ottenendo infine anche la seconda equazione geodetica:

$$t(s) = \frac{1}{\tilde{E}} \operatorname{arctanh} \left(\frac{(s+C)\kappa}{\tilde{E}} \right) + D \quad (4.53)$$

in cui C e D sono costanti di integrazione.

Bibliografia

- [1] Jose Navarro-Salas Alessandro Fabbri. *Modeling Black Hole Evaporation*. Imperial College Pr, 2005.
- [2] Vincenzo Barone. *Relatività, principi e applicazioni*. Bollati Boringhieri, 2004.
- [3] Eric Poisson. *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, 2004.
- [4] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Jhon Wiley e Sons, 1972.