

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

**CARATTERIZZAZIONE DELLA
STABILITÀ E AGILITÀ IN FREQUENZA
DELLE SORGENTI LASER PER UN
ESPERIMENTO DI ATOMI FREDDI**

Relatore:
Prof. Marco Prevedelli

Presentata da:
Valentino Cecconi

Anno Accademico 2024/2025

Sommario

L'attività svolta nella tesi si colloca nel contesto di un apparato sperimentale con l'obiettivo di realizzare un sensore atomico in fibra ottica cava. L'esperimento si basa su alcune tecniche di raffreddamento atomico applicate a dei vapori di Rubidio.

Lo scopo della tesi è caratterizzare sperimentalmente la stabilità delle sorgenti laser impiegate nell'esperimento e analizzarne l'agilità in frequenza, ovvero la capacità di variare velocemente la frequenza a cui i laser si stabilizzano. Il documento è suddiviso nei seguenti capitoli: una introduzione, una trattazione teorica, una descrizione dell'apparato sperimentale e la discussione dei risultati.

Indice

1	Introduzione	2
2	Tecniche di Laser Cooling e cenni di Teoria del Controllo	3
2.1	Laser Cooling	3
2.1.1	Struttura Iperfine	3
2.1.2	Larghezza di Riga	5
2.1.3	Melassa Ottica, MOT e $\sigma^+ - \sigma^-$	6
2.2	Cenni di Teoria del Controllo	11
3	Apparato Sperimentale	15
3.1	Collegamenti in fibra ottica	16
3.2	Stabilizzazione	17
3.2.1	Phase-Locked Loop	18
3.2.2	Funzione di Trasferimento	20
3.3	Stabilità e agilità in frequenza	21
4	Discussione dei risultati	23
4.1	Stabilità	23
4.2	Larghezza di Banda	26
A	Generatore di Seconda Armonica	29

Capitolo 1

Introduzione

Questo lavoro di tesi si inserisce nel contesto del Laser Cooling, un insieme di tecniche per rallentare degli atomi grazie all'applicazione di campi elettromagnetici dati da laser. Le principali scoperte in questi ambiti sono avvenute negli anni Novanta e hanno portato a numerose applicazioni, che vanno dalla realizzazione di orologi atomici, ai qubit, ai sensori atomici.

Nell'ambito del progetto europeo CRYST3, viene realizzato un esperimento che consiste nel raffreddare dei vapori di Rubidio per poi inserirli in delle fibre ottiche cave: lo scopo è quello di avere dei sensori quantistici in cui gli atomi freddi possono essere maneggiati con una maggiore praticità.

L'esperienza della tesi consiste nel verificare che i fasci laser usati nell'esperimento siano stabilizzati in modo sufficientemente preciso e che possano cambiare velocemente la frequenza di stabilizzazione. La caratteristica di poter variare velocemente frequenza è chiamata agilità in frequenza.

Nel primo capitolo della tesi verrà fatta prima una descrizione di carattere generale e introduttivo su alcune nozioni di fisica atomica, come la struttura iperfine e la larghezza di una riga spettrale. Successivamente verranno discusse le tecniche di Laser Cooling impiegate nell'esperimento. In seguito verranno introdotte alcune nozioni di teoria del controllo e si parlerà del sistema di retroazione impiegato per stabilizzare i fasci laser e delle sue caratteristiche.

Nel capitolo riguardante l'apparato sperimentale si descriveranno le caratteristiche dell'apparato, gli strumenti principali e l'implementazione pratica. Inoltre si discuterà da un punto di vista più pratico del sistema di controllo impiegato e dell'impostazione sperimentale ai fini dell'esperienza della tesi.

Nel capitolo riguardante la discussione dei risultati si mostreranno le misure effettuate e i risultati ottenuti dalle analisi.

È presente un'appendice in cui vengono discusse le proprietà del generatore di seconda armonica, uno strumento impiegato nell'esperimento.

Capitolo 2

Tecniche di Laser Cooling e cenni di Teoria del Controllo

In questo capitolo verrà fatta una descrizione di carattere generale di ciò che viene sfruttato nell'esperimento: nella prima parte si parlerà di alcune tecniche di raffreddamento atomico introducendo delle nozioni di fisica atomica dove necessario, nella seconda parte si tratteranno alcuni argomenti di teoria del controllo utili alle analisi successive, in particolare verranno spiegate le caratteristiche dei sistemi di controllo proporzionali-integrali (PI).

2.1 Laser Cooling

Il Laser Cooling è un insieme di tecniche che sfrutta le proprietà quantistiche della materia per raffreddare gli atomi attraverso dei campi elettromagnetici.

Tra gli elementi chimici che vengono usati per il Laser Cooling si hanno i metalli alcalini, ovvero gli elementi appartenenti al primo gruppo, che hanno un solo elettrone di valenza. Alcuni di questi elementi, come il Cesio e il Rubidio, consentono una maggiore praticità nella realizzazione sperimentale.

I metalli alcalini allo stato fondamentale sono caratterizzati da un momento angolare orbitale $L = 0$, un momento angolare di spin $S = 1/2$ e un momento angolare totale $J = 1/2$. Verranno trattate nello specifico le caratteristiche del ^{87}Rb , l'elemento chimico usato nell'esperimento.

2.1.1 Struttura Iperfine

In questo tipo di esperimento è necessario trattare la struttura iperfine dell'atomo, che tiene in considerazione le interazioni del nucleo con gli elettroni attraverso il momento angolare di spin del nucleo I . Il testo di riferimento per questa sezione è [1]. A causa

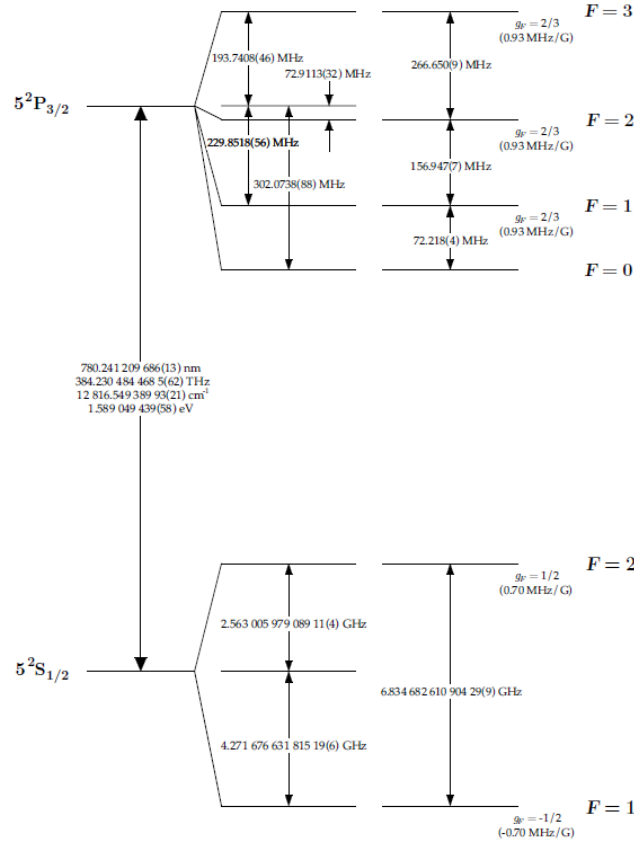


Figura 2.1: Struttura iperfine della transizione D2 nell'atomo di ^{87}Rb ([2])

della presenza del momento angolare di spin del nucleo, il momento angolare totale J non è più sufficiente per descrivere l'atomo; quindi si ha bisogno di un ulteriore numero quantico F corrispondente allo spin atomico totale, dato da $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I} = \vec{L} + \vec{S} + \vec{I}$. Il numero quantico F varia quindi nell'intervallo $|J - I| \leq F \leq |J + I|$. Per una trattazione più chiara, si indicherà con F il numero quantico di spin atomico totale di un atomo allo stato fondamentale, mentre si indicherà con F' il numero quantico di spin atomico totale di un atomo in uno stato eccitato. Nel caso del Rubidio si ha $I = 3/2$, di conseguenza allo stato fondamentale, con $L = 0$ e $S = 1/2$ si ha che $F = 1, 2$. Il primo stato eccitato è dato da $I = 3/2$, $L = 1$, $S = 1/2$, $J = 1/2, 3/2$. Si indicano le transizioni dallo stato fondamentale a $J = 1/2$ con D1, quelle dallo stato fondamentale a $J = 3/2$ con D2. Nelle transizioni D1, allo stato eccitato F' assume i valori $F' = 1, 2$, mentre nelle transizioni D2, F' allo stato eccitato assume i valori di $F' = 0, 1, 2, 3$. In figura 2.1 è riportata la struttura iperfine dell'atomo di ^{87}Rb nella transizione D2.

È noto (si consulti [3]) che se un'onda elettromagnetica è polarizzata, i fotoni appartenenti all'onda possiedono un momento angolare di spin. Indicando con q la componente

del momento angolare di spin di un fotone lungo il vettore d'onda della radiazione elettromagnetica, si ha che se una radiazione elettromagnetica ha polarizzazione circolare positiva σ^+ ogni suo fotone ha un momento angolare di spin $q = +1$, invece una polarizzazione σ^- corrisponde a $q = -1$ nei rispettivi fotoni. Se la radiazione non è polarizzata lungo l'asse di quantizzazione il momento angolare di spin dei fotoni $q = 0$.

Per le regole di selezione in approssimazione di dipolo elettrico si ha che $|\Delta F| \leq 1$, inoltre è proibita la transizione da $F = 0$ a $F' = 0$. Indicando con m_F la proiezione di F lungo l'asse di quantizzazione, in caso di assorbimento di un fotone, per la conservazione del momento angolare si ha $m'_F = m_F + q$.

La seconda regola di selezione inoltre impone $|\Delta m_F| \leq 1$.

Si consideri un atomo di ^{87}Rb sottoposto a radiazione elettromagnetica con polarizzazione circolare positiva di frequenza ω . Si indichi con ω_0 la frequenza di transizione da $F = 2$ a $F' = 3$ nella transizione D2. In questa sottosezione per semplicità si considera il caso in cui la frequenza $\omega = \omega_0$, successivamente si considererà il caso con $\omega < \omega_0$. L'atomo sottoposto alla radiazione elettromagnetica con polarizzazione positiva effettua la transizione da $F = 2$ a $F' = 3$ con $m'_F = m_F + 1$.

Successivamente l'atomo torna allo stato fondamentale con $F = 2$. La proiezione m_F può aumentare di un'unità, diminuire di un'unità o rimanere invariata secondo le regole di selezione, pur rimanendo nell'intervallo $-F \leq m_F \leq F$. Dopo un numero sufficiente di cicli in cui l'atomo viene eccitato aumentando m_F di un'unità e successivamente si diseccita, si trova in una configurazione in cui può effettuare una transizione solo dallo stato fondamentale $F = 2$, $m_F = 2$ allo stato eccitato $F' = 3$, $m'_F = 3$ e viceversa. Questo tipo di transizione è detta transizione chiusa e permette di trattare l'atomo come un sistema a due livelli.

2.1.2 Larghezza di Riga

Se si sottopone un atomo a radiazione elettromagnetica, a seguito dell'emissione spontanea si può osservare una radiazione proveniente dall'atomo in alcune frequenze che formano delle linee spettrali. Queste linee non sono monocromatiche ma presentano un allargamento in un intorno delle frequenze di transizione dovuto a vari effetti.

A causa del principio di indeterminazione classico, la linea spettrale presenta un allargamento che viene detto allargamento naturale e segue un profilo Lorentziano:

$$P(\omega) \propto \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2/4} \quad (2.1)$$

dove con ω si indica il valore della frequenza e con ω_0 la frequenza di transizione. Con Γ è stata indicata la larghezza a metà altezza della curva, che viene detta larghezza naturale di riga. Inoltre Γ corrisponde all'inverso della vita media dello stato eccitato dell'atomo.

Si possono avere ulteriori allargamenti di riga: principalmente in questo tipo di esperimenti sono presenti l'allargamento per potenza, dipendente dall'intensità della radia-

zione, e l'allargamento per collisione, dato dagli urti tra gli atomi e dipendente dalla pressione. Si veda [4] per una trattazione più accurata.

Nel caso della transizione D2 del ^{87}Rb la larghezza naturale di riga è data da $\Gamma = 6.065(9)\text{MHz}$ ([2]).

2.1.3 Melassa Ottica, MOT e $\sigma^+ - \sigma^-$

In questa sezione viene fatta una trattazione vera e propria delle tecniche di Laser Cooling impiegate nell'esperimento sfruttando i concetti introdotti in precedenza. Per una descrizione più completa sulle varie tecniche di Laser Cooling si consiglia di consultare [5].

Melassa Ottica

La melassa ottica è un apparato sperimentale costituito da una camera a vuoto contenente un gas di atomi (nell'esperimento sono vapori di Rubidio) sottoposto a dei fasci laser. Verrà trattato per semplicità il caso unidimensionale in cui si usano due fasci, nel caso tridimensionale il numero di fasci deve aumentare fino a sei, ovvero due per ogni asse cartesiano.

Si consideri un sistema unidimensionale composto da un atomo con una frequenza di transizione al primo stato eccitato data da ω_0 , sottoposto a due campi elettromagnetici contropropaganti con frequenza $\omega < \omega_0$. Si indichi con il termine "detuning" la differenza $\Delta = \omega - \omega_0$. Nel sistema di riferimento solidale con il moto dell'atomo per effetto Doppler il fascio contropropagante alla sua direzione del moto ha una frequenza più vicina a ω_0 rispetto al fascio copropagante, di conseguenza l'atomo tende ad assorbire principalmente dal fascio contropropagante.

La diseccitazione dell'atomo può avvenire per emissione stimolata o spontanea: l'emissione stimolata non ha effetto sulla velocità dell'atomo. Se invece un atomo, dopo essersi eccitato assorbendo un fotone, si diseccita per emissione spontanea, dato che la direzione di emissione dei fotoni è casuale, tenderà mediamente ad assorbire una quantità di moto pari a $\hbar\vec{k}$.

La forza media risultante sull'atomo sarà di tipo viscoso e porta a una diminuzione progressiva della velocità dell'atomo.

A causa della forza di tipo viscoso diminuisce la temperatura del gas finché la forza viscosa sugli atomi non viene controbilanciata dai moti casuali dati dall'emissione spontanea. Indicando con h la costante di Planck e con k_B la costante di Boltzmann, si ha che la temperatura limite, detta temperatura Doppler, è data da:

$$T_D = \frac{h\Gamma}{2k_B} \quad (2.2)$$

Nel caso del raffreddamento di vapori di ^{87}Rb la temperatura Doppler prevista dovrebbe essere dell'ordine di $\sim 150\mu\text{K}$: storicamente, i risultati sperimentali hanno contraddetto

questo risultato rilevando temperature dell'ordine del μK , quindi più piccole di due ordini di grandezza. Il risultato è dato dal fatto che il modello è troppo semplificato e non tiene in conto del caso in cui i fasci contropropaganti sono polarizzati. Un modello più accurato verrà trattato nella sottosezione sulle melasse $\sigma^+ - \sigma^-$.

Inoltre, dato che la probabilità di assorbimento in presenza di detuning è di tipo lorentziano, nel caso di atomi di ^{87}Rb per la transizione D2 e di un detuning di $\Delta \simeq -20\text{MHz}$, da $F = 2$ l'atomo ha una probabilità circa del 99% di andare nello stato eccitato $F' = 3$, circa dell'1% di andare nello stato eccitato $F' = 2$ e una probabilità trascurabile di andare nello stato eccitato con $F' = 1$. Da $F' = 3$ l'atomo può decadere solamente in $F = 2$, mentre da $F' = 2$ può decadere sia in $F = 2$ che in $F = 1$ con un rapporto di ramificazione circa di $10 : 1$. Di conseguenza ogni circa 1000 transizioni un atomo decade nello stato $F = 1$, molto distante in frequenza (circa 6.835GHz , si veda la figura 2.1), da cui non può assorbire di nuovo la radiazione. Nella prossima sottosezione, che tratta la trappola magneto-ottica, viene discusso anche come riportare gli atomi di nuovo in $F = 2$.

Trappola Magneto-Ottica

Un altro apparato sperimentale per raffreddare gli atomi è la trappola magneto-ottica (MOT). A differenza della melassa, la MOT consente di confinare spazialmente gli atomi, quindi oltre a raffreddare il campione fa sì che questo raggiunga una densità maggiore. L'apparato sperimentale è analogo a quello della melassa ottica, però attraverso due bobine viene applicato un gradiente di campo magnetico al campione.

In un sistema unidimensionale si realizza una MOT attraverso due fasci contropropaganti con polarizzazione circolare opposta σ^+ e σ^- , uniti a un campo magnetico dipendente dalla coordinata spaziale z secondo la relazione $B(z) = B'z$, con $z = 0$ al centro della trappola. Con B' si indica un termine moltiplicativo costante dato dal gradiente del campo magnetico. Il campo magnetico induce l'effetto Zeeman, che è descritto per la struttura iperfine attraverso la formula $\Delta E_B^{(hfs)} = \mu_B g_F m_F B$. Maggiori informazioni possono essere trovate in [3]. Nella formula si indica con $\Delta E_B^{(hfs)}$ lo spostamento di energia dal livello originario nella struttura iperfine in seguito all'applicazione di un campo magnetico, si indica con μ_B il magnetone di Bohr, con g_F il fattore di Landé generalizzato al caso in cui si considera il momento angolare totale di un atomo e con m_F la proiezione dello spin atomico totale F . Dato che l'effetto Zeeman induce uno spostamento dei livelli energetici dipendente dal campo magnetico B , che a sua volta dipende dalla posizione z , si ha che un atomo a destra dello zero subisce un abbassamento dipendente dalla posizione dell'energia dei sottolivelli con $m_F < 0$. Di conseguenza varia anche la frequenza di transizione dallo stato fondamentale a uno dei sottolivelli nello stato eccitato e anche il detuning Δ dipende dalla posizione spaziale dell'atomo. A causa del profilo lorentziano della probabilità di assorbimento un atomo a destra dello zero ha una probabilità di assorbire da un fascio σ^- che aumenta con la distanza dal centro della trappola. Allo

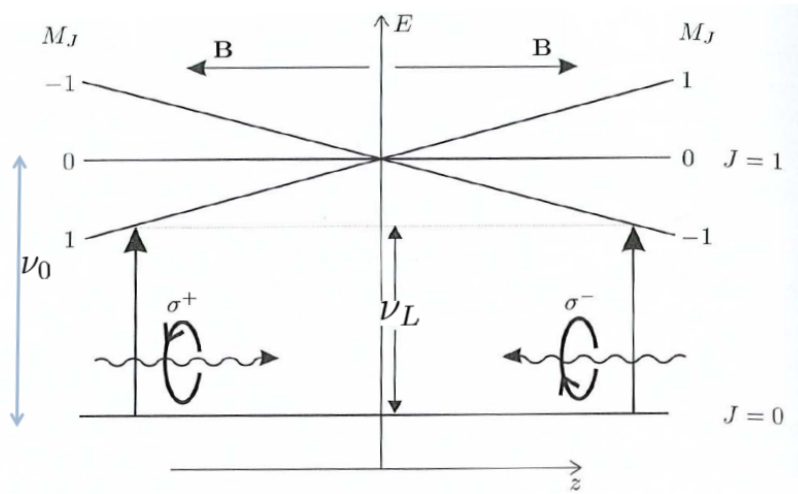


Figura 2.2: Rappresentazione schematica della dipendenza dei livelli energetici dalla posizione in una MOT. L'immagine non tiene conto della struttura iperfine.

stesso modo un atomo a sinistra dello zero ha i sottolivelli con $m_F > 0$ che si spostano verso il basso al variare della distanza ed ha una probabilità di assorbimento dal fascio σ^+ crescente al variare della distanza. In figura 2.2 è riportato uno schema dei livelli energetici in funzione della posizione in un caso semplificato, in cui non si tiene conto della struttura iperfine degli atomi e si ha $J = 0$ allo stato fondamentale e $J' = 1$ nello stato eccitato.

La forza risultante da questa configurazione è di tipo armonico e, unita alla forza viscosa, dà la forza risultante di un oscillatore armonico sovrasmorzato.

Per realizzare una MOT servono due tipi di laser che sono caratterizzati da frequenze diverse: il primo tipo è detto Cooler e il secondo Repumper. Indicando con ω_0 la frequenza di transizione dallo stato fondamentale con $F = 2$ allo stato eccitato con $F' = 3$, la frequenza ω_C del fascio Cooler è data da $\omega_C = \omega_0 - |\Delta|$, con $|\Delta|$ che corrisponde a un detuning di circa 15 – 20MHz.

Come si può notare dalle differenze in frequenza dei livelli energetici in figura 2.1, i livelli della struttura iperfine $F' = 2$ e $F' = 3$ nello stato eccitato sono vicini tra loro (circa 267MHz) in frequenza.

Come discusso nella sottosezione sulla melassa ottica, ogni circa 1000 transizioni un atomo nello stato $F = 2$, a seguito di una eccitazione si diseccita nello stato $F = 1$, invece che $F = 2$.

Un atomo in $F = 1$ non risente del campo elettromagnetico di frequenza ω e di conseguenza non è più soggetto alle forze della MOT, quindi, dato che i processi di assorbimento ed emissione avvengono di continuo nella trappola, in breve tempo gli atomi si troverebbero tutti nel livello $F = 1$.

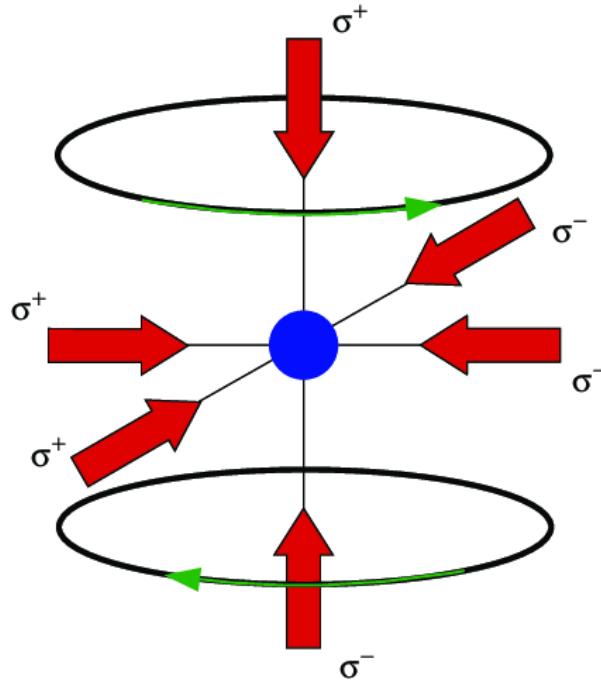


Figura 2.3: Rappresentazione schematica dell'apparato sperimentale per una MOT in tre dimensioni

Per risolvere questo problema si introduce il fascio Repumper, che ha una frequenza ω_R tale da portare l'atomo dallo stato fondamentale con $F = 1$ allo stato eccitato con $F' = 2$.

Dallo stato eccitato l'atomo può tornare nello stato fondamentale con $F = 1$ e riiniziare il ciclo oppure può andare nello stato fondamentale con $F = 2$ per poter essere di nuovo soggetto alla trappola magneto-ottica.

Per calcolare la differenza in frequenza tra i fasci Cooler e Repumper bisogna sommare la frequenza del detuning alla frequenza del fascio Cooler per raggiungere la frequenza ω_0 . Successivamente bisogna sottrarre la differenza fra i due stati eccitati $F = 2$ ed $F = 3$ e sottrarre la differenza fra i due stati fondamentali $F = 2$ ed $F = 1$, ottenendo una differenza $\Delta\omega_{RC} \simeq (6835 - 267 + 20)\text{MHz} \simeq 6.59\text{GHz}$.

Nel caso tridimensionale si ha bisogno di sei fasci Cooler. Inoltre, per il campo magnetico deve essere valida l'equazione di Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, per cui il campo dipendente dalla posizione viene realizzato attraverso un quadrupolo magnetico, dato da due bobine con l'asse parallelo all'asse z attraversate da correnti contropropaganti. Il campo magnetico risultante del quadrupolo è dato in coordinate cilindriche da: $\vec{B} = \frac{B'}{2}|r| \cdot \hat{r} - B'z \cdot \hat{z}$. In figura 2.3 è rappresentato lo schema di una MOT in tre dimensioni.

Melassa $\sigma^+ - \sigma^-$

Un'ulteriore tecnica di raffreddamento può essere ottenuta sfruttando i fasci contropropaganti σ^+ e σ^- per eseguire una melassa ottica, detta melassa $\sigma^+ - \sigma^-$, che permette di raggiungere temperature inferiori, dette sub-Doppler. La sovrapposizione dei due fasci contropropaganti dà origine a un campo risultante polarizzato linearmente che ruota in funzione di z con un periodo dipendente dalla lunghezza d'onda λ . Un atomo in moto con velocità v percepisce una rotazione della polarizzazione lineare con velocità angolare $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$. Spostandosi in un sistema di riferimento solidale con la rotazione della polarizzazione lineare, si ha un campo magnetico apparente che causa uno spostamento dei sottolivelli energetici dell'atomo dipendente dalla direzione del moto. Se l'atomo allo stato fondamentale ha una molteplicità ≥ 3 , a causa dello spostamento dei sottolivelli l'atomo ha una maggiore probabilità di assorbimento dal fascio contropropagante rispetto alla direzione del moto. Di conseguenza si genera una forza di tipo viscoso che permette di raggiungere temperature molto inferiori di quelle raggiunte con una melassa ottica o con una MOT. Dato che a differenza della MOT non è presente una forza di tipo armonico ma solamente il contributo viscoso, la densità raggiunta con questo tipo di melassa è minore di quella raggiunta con una MOT.

La temperatura sub-Doppler T_{sD} ha una dipendenza dall'intensità del fascio laser I e dal detuning del tipo $T_{sD} \propto \frac{I}{|\Delta|}$, quindi si può diminuire la temperatura raggiunta diminuendo l'intensità del laser e la sua frequenza (ovvero aumentando il detuning). Si raggiunge il limite inferiore della temperatura quando la forza viscosa viene controbilanciata dalla forza dovuta al rinculo data dall'emissione spontanea dei fotoni dell'atomo e corrisponde alla temperatura di rinculo T_r . Una trattazione più approfondita dell'argomento può essere trovata in [6].

Fasi dell'esperimento

L'esperimento consiste nel raffreddamento dei vapori di ^{87}Rb attraverso una fase iniziale di MOT della durata di $\sim 1\text{s}$, in cui tipicamente il campione raggiunge una densità di 10^{10}atomi/cm^3 e una temperatura T_D dell'ordine di grandezza delle centinaia di μK .

Successivamente viene annullato il campo magnetico e i fasci Cooler variano la frequenza per attuare la fase di melassa $\sigma^+ - \sigma^-$. È importante che la variazione di intensità e frequenza avvenga in tempi brevi, dimodoché la temperatura possa decrescere velocemente senza far diminuire troppo la densità.

In tutto la fase di melassa $\sigma^+ - \sigma^-$ ha una durata di alcuni ms e si raggiunge un detuning di $\Delta \simeq -100\text{MHz}$.

In questa tesi si studia la caratterizzazione della stabilità dei laser intorno alla frequenza desiderata e l'agilità in frequenza per eseguire correttamente le varie fasi dell'esperimento.

2.2 Cenni di Teoria del Controllo

In questa sezione verrà fatta una piccola trattazione della teoria del controllo, funzionale ai capitoli successivi della tesi. Il testo di riferimento per questa sezione è [7].

Si consideri un generico sistema dinamico a una variabile dato dalle equazioni:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.3)$$

$$y = g(x, u) \quad (2.4)$$

con x che rappresenta lo stato di un sistema, u che rappresenta l'input del sistema, y che corrisponde all'output del sistema. Si ha che la funzione f rappresenta la dinamica del sistema e la funzione g converte l'input nell'output.

Questo particolare tipo di sistema dinamico è detto SISO (Single-Input-Single-Output) ed è quello che viene studiato nella tesi, più generalmente i sistemi dinamici possono essere multivariabili e vengono detti MIMO (Multiple-Input-Multiple-Output) e in quel caso le quantità x , y , $f(x, u)$ e $g(x, u)$ devono essere sostituite con delle quantità vettoriali.

Per comprendere la dinamica di questi sistemi spesso è conveniente trattarli nel dominio delle frequenze: questo viene fatto con la trasformata di Fourier o la trasformata di Laplace.

In questa trattazione verrà sfruttata la trasformata di Laplace, definita dall'equazione:

$$\mathcal{L}[y(t)] = \hat{y}(s) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt \quad (2.5)$$

dove la variabile s è una variabile a valori complessi e con $\hat{y}(s)$ si indica la trasformata della funzione $y(t)$.

Questa trasformata, a differenza di quella di Fourier, può trattare sistemi causali, dati da funzioni definite con $y(t < 0) = 0$. Inoltre rispetto alla trasformata di Fourier presenta alcuni vantaggi: si può trattare più facilmente un problema che parte da specifiche condizioni iniziali, mentre la trasformata di Fourier è più adatta a situazioni stazionarie; inoltre, a causa della funzione esponenziale decrescente che moltiplica $y(t)$, si possono trasformare più facilmente funzioni che divergono più lentamente di un esponenziale con t tendente a infinito.

Valgono per la trasformata di Laplace proprietà simili alla trasformata di Fourier; in particolare saranno utili le proprietà di derivazione, integrazione e convoluzione che vengono riportate in seguito.

$$\mathcal{L}[d^n y/dt^n] = s^n \hat{y}(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}}(0^-) \quad (2.6)$$

$$\mathcal{L}\left[\int y(t) dt\right] = \frac{1}{s} \hat{y}(s) \quad (2.7)$$

$$\mathcal{L}[f * g](t) = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)] \quad (2.8)$$

Si definisce inoltre la funzione di trasferimento nello spazio di Laplace come:

$$\hat{G}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} \quad (2.9)$$

ovvero il rapporto fra la trasformata dell'output e dell'input. La funzione è di variabile complessa e presenta dei poli e degli zeri. Si può dimostrare che un polo in corrispondenza di un valore di s reale e negativo corrisponde nel dominio temporale a un andamento esponenziale decrescente in funzione del tempo, viceversa un polo in corrispondenza di un valore s reale e positivo corrisponde a un andamento crescente nel dominio temporale. Se il denominatore presenta dei poli complessi coniugati si ha un comportamento di tipo oscillante, in cui la parte immaginaria indica la frequenza di oscillazione.

Spesso si sfruttano i diagrammi di Bode per rappresentare graficamente la funzione di trasferimento, costituiti da un grafico in scala semi-logaritmica dell'ampiezza (rappresentata in deciBel) della funzione, dato da $|\hat{G}(i\omega)|_{dB}$ e un grafico in scala semi-logaritmica della fase della funzione, dato da $\arg \hat{G}(i\omega)$. Nel lavoro della tesi verrà presentato il diagramma di Bode dell'ampiezza della funzione di trasferimento, dove l'ampiezza è convertita in dB, definiti come:

$$|\hat{G}(i\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |\hat{G}(i\omega)| \quad (2.10)$$

Un sistema in cui l'input è immesso in un elemento $\hat{H}(s)$ e il suo output è immesso in input di un elemento $\hat{I}(s)$ può essere modellizzato attraverso una convoluzione delle funzioni, che nel dominio delle frequenze corrisponde a $\mathcal{L}[H(t) * I(t)] = \hat{H}(s) \cdot \hat{I}(s)$.

Feedback

Si consideri un sistema dinamico il cui output è dato da $y(t)$. Sia $r(t)$ un controllo che viene applicato e sia $e(t) = y(t) - r(t)$ una funzione di errore. Si può progettare un sistema in modo che possa essere applicata una funzione generica K a $e(t)$. Indicando con $g(t)$ la dinamica del sistema, nel dominio delle frequenze il sistema è descritto dall'equazione:

$$\hat{y}(s) = \hat{K}(s)\hat{G}(s)\hat{e}(s) = \hat{K}(s)\hat{G}(s)[\hat{y}(s) - \hat{r}(s)] \quad (2.11)$$

Si può raccogliere $\hat{y}(s)$ per avere l'equazione:

$$\hat{y}(s) = \frac{\hat{K}(s)\hat{G}(s)}{1 + \hat{K}(s)\hat{G}(s)}\hat{r}(s) \quad (2.12)$$

Viene definito il guadagno del loop $\hat{L}(s) = \hat{K}(s)\hat{G}(s)$.

Questa configurazione è detta di feedback negativo ed ha lo scopo di stabilizzare un sistema. Si ha una configurazione di feedback positivo nel caso in cui $e(t) = y(t) + r(t)$ e porta a una dinamica instabile del sistema.

Si consideri un sistema di feedback negativo con $K = K_p$ costante: questo sistema è detto di tipo proporzionale, in quanto l'input è proporzionale alla funzione di errore secondo la relazione: $u(t) = K_p e(t)$.

Una proprietà caratteristica dei sistemi di controllo proporzionale è che possono portare un sistema a diminuire il segnale di errore, ma non possono rendere l'errore nullo in un tempo finito, in quanto via a via che diminuisce l'errore, diminuisce proporzionalmente anche il controllo applicato.

Un sistema di controllo più efficace è il controllo proporzionale-integrale (PI), che è dato da $K(t) = K_p + K_i \int_{-\infty}^t e(t') dt'$.

Rispetto al precedente, la componente integrale permette al sistema di avere una risposta che non diminuisce proporzionalmente alla funzione di errore, quindi il segnale di errore può essere reso nullo nel limite di $t \rightarrow \infty$.

Lo svantaggio principale della componente integrale è che nel dominio delle frequenze comporta la presenza di s al denominatore: quindi con un guadagno $\hat{L}(s) = \frac{K_V}{s} + K_P$ si ha che la funzione di trasferimento della forma $\hat{G}(s) = \frac{\hat{L}(s)}{1 + \hat{L}(s)}$ presenta s al denominatore e quindi si ha almeno un polo nella funzione di trasferimento. Il controller PI in un intorno del polo s_0 avrà quindi grandi variazioni in ampiezza della risposta in frequenza.

Nell'implementazione reale di un controller PI, in base alla sua funzione di trasferimento e in base alla larghezza di banda dei suoi elementi, questo avrà una larghezza di banda finita, ovvero con frequenze molto alte (corrispondenti a variazioni in tempi molto brevi), il sistema non riuscirà a controbilanciare le perturbazioni.

Instabilità

Una generica funzione di trasferimento data da $\hat{T}(s) = \frac{\hat{L}(s)}{1 + \hat{L}(s)}$ presenta un polo quando $\hat{L}(s) = -1$, ovvero quando il modulo $|\hat{L}(s)| = 1$ e la sua fase è π .

Generalmente in un sistema fisico $|\hat{L}(s)|$ tende a decrescere all'aumentare della frequenza ω , di conseguenza si avrà un punto in cui $|\hat{L}(s)| = 1$, ovvero un polo in prossimità di s_0 reale e positivo. Per non avere instabilità, è importante che in quel punto si abbia un $\arg \hat{L}(s_0)$ diverso da π .

Ogni sistema fisico presenta un ritardo temporale Δt nella trasmissione del segnale che può essere rappresentato nel dominio delle frequenze dalla funzione $\hat{H}(s) = e^{-s\Delta t}$. Il guadagno $\hat{L}(s)$ è quindi dato da $\hat{L}(s) = \hat{K}(s)\hat{G}(s)\hat{H}(s)$ e il ritardo causa una sfasatura che si somma alla fase di $\hat{K}(s)\hat{G}(s)$.

Controller PI nell'esperimento di atomi freddi

Durante l'esperimento si ha bisogno di stabilizzare le frequenze dei fasci laser usati per la trappola magneto-ottica e per la melassa $\sigma^+ - \sigma^-$. Per questo scopo si impiega un controller PI, più precisamente un Phase-Locked Loop, che agisce sul sistema dinamico dato da un circuito elettrico, che ha come input una corrente $I(t)$ e come output una tensione $V(t)$. In questo caso il sistema di controllo proporzionale corrisponde a una resistenza, mentre il sistema di controllo integrale è dato da un condensatore.

Capitolo 3

Apparato Sperimentale

L'esperimento vero e proprio di Laser Cooling viene fatto utilizzando tre tipi di fasci laser: il fascio Master, il fascio Cooler e il fascio Repumper. Il fascio Master viene impiegato per dare una frequenza di riferimento in base alla quale gli altri due fasci possono stabilizzarsi ed eseguire il Laser Cooling.

I fasci Cooler e Repumper inizialmente sono propagati in fibra ottica, come descritto nella sezione 3.1. Il fascio Master, propagato in aria, viene stabilizzato grazie a una spettroscopia in assorbimento dell'isotopo ^{85}Rb .

Successivamente i fasci Cooler e Repumper vengono propagati in aria e grazie a un beam splitter una porzione viene sfruttata per la stabilizzazione e l'altra viene impiegata per il raffreddamento atomico. Il campione di atomi che viene raffreddato (diverso dal campione sfruttato dal Master) è in una camera a vuoto ed è costituito da vapori di Rubidio, in particolare il raffreddamento è eseguito sull'isotopo ^{87}Rb .

Nell'uscita del beam splitter finalizzata alla stabilizzazione, i fasci Cooler e Repumper sono uniti al fascio Master e vengono convertiti in un segnale elettrico dipendente dalla differenza in frequenza dei segnali. Questa porzione di apparato è trattata nella sezione 3.2. Degli apparecchi elettronici stabilizzano i fasci Cooler e Repumper in base alle differenze in frequenza con il Master. Vengono analizzati gli apparecchi nello specifico e la relativa funzione di trasferimento.

Nella sezione 3.3 si descrive l'impostazione sperimentale per la presa dati, in cui si misura la stabilità e l'agilità in frequenza delle sorgenti laser.

Si noti che i fasci Cooler e Repumper e il fascio Master agiscono su due diversi isotopi dello stesso elemento chimico: il raffreddamento atomico è eseguito sull'isotopo ^{87}Rb , che è presente in una percentuale circa del 30% dei campioni; mentre il fascio Master viene stabilizzato sfruttando l'isotopo ^{85}Rb , presente in una percentuale circa del 70% dei campioni.

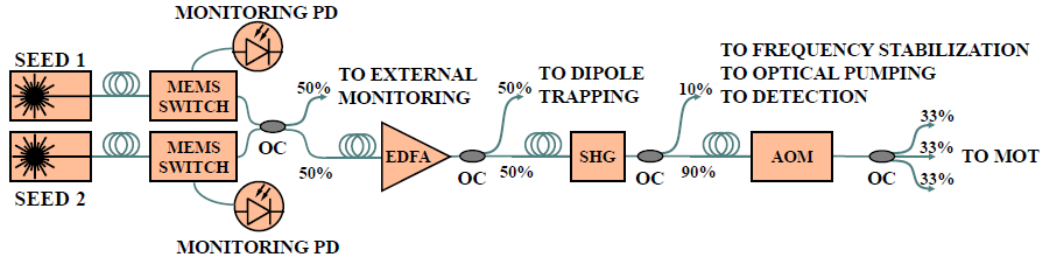


Figura 3.1: Schema dei collegamenti in fibra ottica con i vari strumenti. [8]

3.1 Collegamenti in fibra ottica

In questo esperimento, per la realizzazione dell'apparato riguardante i fasci Cooler e Repumper, sono stati usati dispositivi e collegamenti che solitamente vengono impiegati per le fibre ottiche. In questo modo si possono usare dispositivi elettronici di uso comune ed è più pratico gestire i fasci laser. Le fibre ottiche in SiO_2 hanno una attenuazione minima a $1.55\mu m$, quindi generalmente nelle telecomunicazioni si impiegano onde elettromagnetiche a questa frequenza.

Nell'esperimento si ha bisogno della luce a $0.78\mu m$, di conseguenza vengono usate le onde elettromagnetiche a lunghezza d'onda doppia, vicine a $1.55\mu m$, per poi alla fine del processo dimezzare la lunghezza d'onda (raddoppiando la frequenza) grazie a un generatore di seconda armonica (Second Harmonic Generator, SHG).

In figura 3.1 si ha uno schema dei vari collegamenti in fibra con gli strumenti impiegati. Per i fasci Cooler e Repumper si utilizzano due diodi laser (Eblana EP-1550-0-NLW) a $1560nm$ con una potenza nominale di $5mW$. Per ogni laser, attraverso dei controlli via software viene eseguito un loop di feedback che agisce sulla corrente e sulla temperatura per variarne la frequenza. Questi loop hanno la capacità di agire efficientemente su un range di frequenze ampio ma sono caratterizzati da una bassa precisione e da tempi di stabilizzazione della temperatura lunghi. Lo scopo è quello di portare i laser in un range di frequenze in cui ulteriori dispositivi (i Phase-Locked Loop) possano stabilizzarli alla frequenza voluta in modo più preciso e veloce.

I diodi laser sono collegati a un amplificatore EDFA (erbium-doped fiber amplifier) con un guadagno di $30dB$ e una potenza massima in uscita di $5W$ (Keopsys CEFA-C-PB-HP). Nell'esperimento viene usato a $500mW$.

In uscita dall'amplificatore i fasci vengono portati al SHG (NTT WH-0780-000-F-B-C). Si possono trovare informazioni sul principio di funzionamento di un generatore di seconda armonica in Appendice A.

Nel lavoro di tesi per semplicità i fasci Cooler e Repumper vengono collegati uno per volta al SHG e in uscita sarà presente un campo elettrico oscillante con la frequenza corrispondente alla seconda armonica del fascio. Nell'esperimento di raffreddamento

vero e proprio i fasci vengono collegati contemporaneamente, quindi per le proprietà del SHG si avranno anche contributi dipendenti dalla somma e dalla differenza delle frequenze dei due fasci, oltre a quello di tipo statico e quelli dipendenti dalle seconde armoniche dei singoli fasci.

In uscita dal SHG il campo risultante a 780nm ha una potenza che è corrispondente a più del 50% della potenza in entrata e corrisponde circa a 300mW. I fasci vengono inviati in un beam splitter polarizzatore $1 \times 2, 10/90$ (OF-Link FPMC-780-12-10-PM-L-10-FA-B), che divide il campo risultante in due fasci: uno con il 90% della potenza originaria e uno con il 10%.

L'uscita con il 90% della potenza viene portata a un modulatore acusto-ottico (Aerodiode 780AOM-1) (si veda [4] per un approfondimento), il cui output viene diviso in tre fasci di uguale potenza con un power splitter 1×3 (OF-Link FPMC-780-13-333-PM-L-10-FA-B): i fasci risultanti verranno usati per la MOT.

L'uscita con il 10% della potenza viene confrontata con il Master per la stabilizzazione. Per avere un approfondimento maggiore sulla realizzazione del sistema attraverso le strumentazioni per la fibra ottica si consiglia di consultare [8].

3.2 Stabilizzazione

In uscita dal capo del beam splitter polarizzatore con il 10% della potenza si ha un campo risultante dato dalle seconde armoniche dei due fasci e dai vari termini aggiuntivi che devono essere stabilizzati. A questo scopo viene utilizzato un fascio chiamato Master, dato da un diodo laser a 780nm (TOPTICA EYP-DFB-0780-00040-1500-BFW11-0005), che a differenza degli altri due fasci non si propaga in fibra ma in aria (attraverso lenti, specchi eccetera).

Il fascio esegue una spettroscopia in assorbimento su una cella di vapori di Rubidio (diversa dal campione di atomi su cui viene eseguito il Laser Cooling) e si stabilizza su un cross-over, cioè una frequenza intermedia fra due transizioni iperfini, del ^{85}Rb . Viene scelto questo isotopo poiché è più abbondante e si può eseguire la stabilizzazione in maniera più semplice. Il laser è stabile in una frazione della larghezza naturale della transizione fine dell'isotopo, ha quindi un'incertezza dell'ordine del MHz e di conseguenza una stabilità dell'ordine di $\frac{\Delta f}{f} \sim 3 \cdot 10^{-9}$.

Attraverso un combinatore di potenza in fibra (Thorlabs PN780R2A1) il fascio Master è unito alla fibra contenente l'uscita al 10% del beam splitter, al cui interno sono presenti i fasci Cooler e Repumper.

Il campo risultante dalla somma dei tre fasci viene inviato a un fotorivelatore al silicio (Hamamatsu G4176-03), che è alimentato con una batteria a 9V, ha una banda di $\sim 10\text{GHz}$ ed è accoppiato ai dispositivi elettronici successivi in AC in modo da eliminare i segnali in DC.

Il fotorivelatore usato svolge la funzione di rivelatore quadratico, ovvero riceve il campo dato dalla somma dei tre segnali e restituisce una fotocorrente proporzionale al quadrato della somma dei tre campi.

Nella fotocorrente si hanno quindi vari segnali: nell'esperimento verranno sfruttati quelli corrispondenti ai battimenti tra le varie coppie di segnali per la stabilizzazione. Si può quindi individuare il battimento tra Master e Cooler dipendente da $\omega_M - 2\omega_C$, quello tra Master e Repumper dipendente da $\omega_M - 2\omega_R$ e quello tra Master e la somma dei segnali dipendente da $\omega_M - (\omega_R + \omega_C)$.

Si noti che il segnale somma si trova esattamente a metà del battimento con il Cooler ed il battimento con il Repumper, in quanto $\omega_M - (\omega_R + \omega_C) = \frac{1}{2}(\omega_M - 2\omega_C + \omega_M - 2\omega_R)$.

Per poter avere i fasci alle giuste frequenze per realizzare una MOT si deve avere che la differenza tra le frequenze del Cooler e del Master sia di -1042MHz , mentre quella tra Repumper e Master sia di $+5540\text{MHz}$.

Dato che attraverso il fotorivelatore viene convertito il campo dato dalla somma in un segnale elettrico contenente i vari battimenti, il problema della stabilizzazione a questo punto può essere trattato attraverso dispositivi elettronici che possono identificare le varie note di battimento e stabilizzarle attraverso dei Phase-Locked Loop (PLL) per riportarle ai valori desiderati con maggiore precisione.

Il segnale del fotodiodo viene amplificato e viene portato in due uscite: in una delle due attraverso un filtro passa-basso si seleziona il battimento con il Cooler scartando il segnale di somma ed il battimento con il Repumper, mentre nell'altra uscita con un passa-alto si seleziona il battimento con il Repumper.

Le due uscite del circuito sono poi collegate ognuna al rispettivo PLL (ADF4157) che ha lo scopo di stabilizzare i segnali alla frequenza voluta.

3.2.1 Phase-Locked Loop

Nella fase dell'esperimento di Laser Cooling in cui si attiva la melassa $\sigma^+ - \sigma^-$ il Cooler deve poter cambiare frequenza velocemente in modo controllato, quindi si ha bisogno di dispositivi che non solo possano stabilizzare con precisione il laser, ma che possano variare velocemente la frequenza a cui lo stabilizzano. Questo compito è svolto da un Phase-Locked Loop, che è un sistema di controllo proporzionale-integrale (PI). Attraverso la retroazione negativa compara la frequenza misurata con la frequenza che deve essere raggiunta e restituisce un segnale di correzione che viene applicato alla corrente del laser. Possono essere trovate ulteriori informazioni in [9].

Nei laser a diodo la frequenza fondamentale dipende dalla corrente con un coefficiente lineare di $\sim -3\text{GHz/mA}$; quindi, ricordando che i fasci laser sfruttano la seconda armonica, si ha un coefficiente di dipendenza doppio rispetto al precedente. Il segnale di correzione in output del PLL è una tensione che viene immessa nel driver del laser, che ha una sensibilità di 0.1mA/V . Di conseguenza una variazione nel segnale di cor-

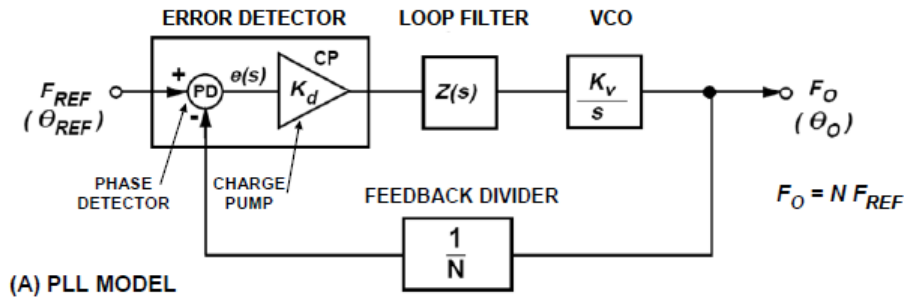


Figura 3.2: Uno schema di un generico modello di Phase-Locked Loop ([9])

reazione porta a una variazione in frequenza delle note di battimento dipendente da un coefficiente di $\sim -700\text{MHz/V}$.

Un PLL è composto da: un rivelatore di errori costituito da un comparatore di fase e frequenza (PFD) e da una pompa di carica, il filtro del loop corrispondente al controller PI, un Voltage Controlled Oscillator (VCO) e un divisore di frequenza. In figura 3.2 si ha un diagramma a blocchi del circuito.

Il VCO è un oscillatore che genera un segnale sinusoidale a una certa frequenza in base alla tensione che viene applicata. Nel PLL usato nell'esperimento il VCO è costituito dal laser. La sua nota di battimento è confrontata attraverso il rivelatore di errore con un segnale di riferimento dato da un oscillatore. Il segnale deve essere stabilizzato a una frequenza dell'ordine del GHz, ma un oscillatore che possa raggiungere frequenze simili tende a essere costoso. Per risolvere il problema si divide la frequenza di battimento del segnale del VCO attraverso un divisore di frequenza per un numero intero N scelto appositamente affinché sia confrontata con un segnale di riferimento dato da un oscillatore (TTi TG1010) alla frequenza più comoda di 10MHz. Quando nella melassa $\sigma^+ - \sigma^-$ si ha la necessità che il laser cambi la frequenza, viene semplicemente cambiato il valore della frequenza dell'oscillatore di riferimento. Dato che la fase di melassa ha una durata di pochi millisecondi è necessario misurare l'agilità in frequenza del laser.

In uscita dal rivelatore di errore si ha una tensione che viene inviata al filtro che costituisce il regolatore PI del loop. Successivamente la tensione è reimmessa nel VCO, modificandone la frequenza.

Phase and Frequency Detector e Pompa di Carica

Il rivelatore di errori del PLL è costituito da un Phase and Frequency Detector (PFD) e una pompa di carica, illustrati in modo schematico in figura 3.3.

Il PFD è un dispositivo composto da due flip-flop di tipo D: il primo con un output chiamato UP e il secondo con un output chiamato DOWN. L'output è dato dai segnali UP e DOWN ed è connesso a una pompa di carica, che emette una quantità fissa di corrente I quando è attivo il segnale UP ed assorbe una quantità fissa di corrente I

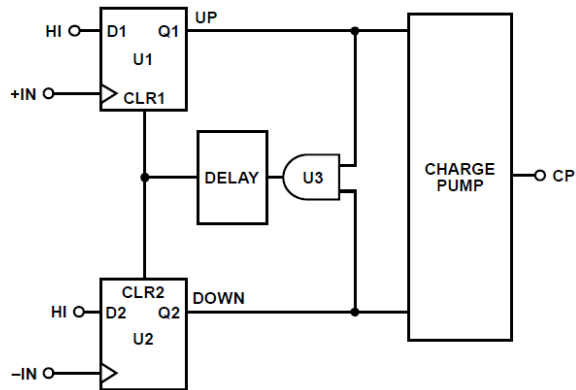


Figura 3.3: Schema circuitale semplificato del rivelatore di errori utilizzato, reperito da [10]

quando è attivo il segnale DOWN. Il segnale di riferimento ed il segnale da stabilizzare sono connessi rispettivamente ai due flip-flop: si osserva che se il segnale in input del flip-flop che ha UP come segnale di uscita oscilla più velocemente dell'altro, il segnale in uscita dalla pompa di carica avrà in output un segnale con media positiva, mentre nel caso opposto avrà una media con valore negativo. Attraverso un software si può programmare la quantità di corrente I che può essere emessa/assorbita fra 16 valori disponibili.

La pompa di carica è connessa a un condensatore di capacità C , in questo modo la tensione ai capi del condensatore è proporzionale all'integrale nel tempo del segnale in uscita della pompa di carica.

3.2.2 Funzione di Trasferimento

Si consideri il diagramma a blocchi in figura 3.2.

Attraverso la teoria del controllo introdotta nel capitolo 2.2 si possono identificare nel PLL le varie componenti che costituiscono un controller PI.

- Il PFD svolge il ruolo di restituire la funzione di errore di feedback negativo del loop, data da $e(t) = y(t) - r(t)$.
- La pompa di carica corrisponde nella funzione di trasferimento a una costante moltiplicativa K_d , che può essere modificata fra i 16 valori possibili che può assumere la corrente emessa/assorbita dalla pompa di carica.
- Il filtro del loop costituisce un controllo identificato con $\hat{Z}(s)$, dato da un circuito RC in serie; di conseguenza il filtro è dato dall'impedenza $\hat{Z}(s) = R + \frac{1}{sC}$. I valori ottimali delle componenti vengono calcolati via software e successivamente le componenti sono saldate nel circuito.

- Il VCO nel PLL ha una trasformata di Laplace data da $\frac{K_V}{s}$. Infatti l'errore $e(t)$ restituito dal PFD è sulla fase, mentre il sistema di controllo agisce modificando la frequenza del VCO, di conseguenza nel loop c'è una integrazione implicita.
- L'ultimo componente è costituito dal divisore programmabile, presente solo nella parte di chiusura del loop, che nella funzione di trasferimento è dato dalla costante $\frac{1}{N}$.

Di conseguenza con tutti questi componenti la relazione fra l'input e l'output del sistema nel dominio delle frequenze è data da:

$$\hat{y}(s) = \frac{K_d \cdot \frac{1+sRC}{sC} \cdot \frac{K_V}{s}}{1 + K_d \cdot \frac{1+sRC}{sC} \cdot \frac{K_V}{s} \cdot \frac{1}{N}} \hat{r}(s) = \frac{N \cdot K_d \cdot K_V \cdot (1 + sRC)}{N \cdot s^2 \cdot C + K_d \cdot K_V \cdot (1 + sRC)} \cdot \hat{r}(s) \quad (3.1)$$

La funzione presenta quindi uno zero in $s = -1/RC$ e due poli che possono essere reali o complessi coniugati a seconda dei valori dei vari parametri.

Per mettere in evidenza i parametri che vengono modificati durante l'esperienza per la tesi si indica $\hat{L}(s) = \frac{1+sRC}{sC} \cdot \frac{K_V}{s}$, per cui la funzione di trasferimento risulta essere:

$$\hat{T}(s) = \frac{K_d \cdot \hat{L}(s)}{1 + K_d \cdot \frac{1}{N} \cdot \hat{L}(s)} \quad (3.2)$$

3.3 Stabilità e agilità in frequenza

In questa sezione verrà descritto il setup sperimentale utilizzato per la fase di presa dati della tesi, nella parte di caratterizzazione della stabilità e nella parte di caratterizzazione dell'agilità in frequenza dei fasci laser.

Per la fase di presa dati per l'analisi viene connesso un fascio per volta, in modo da poter rendere più pratica l'acquisizione.

Attraverso i loop di feedback via software si imposta la corrente iniettata nel diodo laser corrispondente ai fasci Cooler a $I_C = 222.5\text{mA}$ e la temperatura a $T_C = 12.4^\circ\text{C}$, mentre si imposta la corrente dei fasci Repumper a $I_R = 201.5\text{mA}$ e la temperatura a $T_R = 10.6^\circ\text{C}$.

I valori delle componenti circuitali da saldare sui PLL del Repumper e del Cooler sono stati determinati attraverso un software apposito che ne calcola i valori ottimali (si veda [11]). Successivamente si imposta la frequenza del battimento tra Master e Cooler e tra Master e Repumper su cui devono essere stabilizzati i laser attraverso i PLL, con i valori rispettivamente di 1GHz e 6GHz (questi valori non sono quelli che saranno usati nell'esperimento ma sono stati scelti per una maggiore praticità). Per impostare la frequenza, dato che il segnale di riferimento oscilla a 10MHz, viene scelto N nel divisore programmabile con $N_C = 100$ e $N_R = 600$.

Le misure per ogni fascio in entrambe le configurazioni sono prese al variare del parametro Gain del PLL, programmabile via software, che corrisponde ai 16 valori di I che possono essere impostati nella pompa di carica. A un guadagno uguale a zero corrisponde un valore di 0.3125mA, a un guadagno uguale a 15 corrisponde un valore di 5mA.

Nella funzione di trasferimento il guadagno corrisponde a K_d .

- Nella fase in cui si caratterizza la stabilità, il segnale corrispondente all'input del PLL viene connesso a un analizzatore di spettro digitale (Rigol DSA875) in modo da poter determinare la semilarghezza a metà altezza della lorentziana corrispondente allo spettro dei segnali.
- L'apparato sperimentale riguardante la caratterizzazione dell'agilità in frequenza è diverso dal precedente: il segnale di riferimento del PLL non è più dato da un oscillatore a 10MHz, ma da un oscillatore (Rigol DSG800) controllabile da un computer che possa eseguire una modulazione di frequenza.

La frequenza di riferimento è data da una componente costante $f_0 = 10\text{MHz}$ sommata a una componente oscillante nel tempo $A \cos \omega t$. Un voltmetro (Siglent SDM3055) rileva la tensione in ingresso alla modulazione di corrente del laser. Attraverso un programma Python viene variato il parametro ω in scala logaritmica, ad ogni nuovo valore il voltmetro acquisisce il valore di tensione 10 volte e il programma restituisce la media e la deviazione standard dei valori. La frequenza di modulazione ω cresce in un intervallo da 10Hz a 100kHz. L'ampiezza della componente oscillante A ha un valore di 20kHz. Si considera l'equazione che descrive la dinamica del sistema nella forma:

$$\hat{y}(s) = \hat{L}(s) \cdot \hat{e}(s) \quad (3.3)$$

dove il guadagno del controller PI varia con s come $\hat{L}(s) \propto 1/s$.

Nel limite di $s \rightarrow 0$ il guadagno diverge, di conseguenza il segnale di errore $\hat{e}(s)$ deve tendere a zero, ovvero $\hat{r}(s) = \frac{1}{N} \cdot \hat{y}(s)$. Si sfrutta questa caratteristica per approssimare il valore in ampiezza del segnale di controllo $\hat{r}(s)$ con il valore in ampiezza del segnale in output alla frequenza più piccola misurata, ovvero 10Hz, scalato per la costante moltiplicativa N . L'ampiezza della funzione di trasferimento è quindi data da:

$$|\hat{G}(i\omega)|_{\text{dB}} = \left| \frac{\hat{y}(s)}{N \cdot \hat{r}(s)} \right|_{\text{dB}} \simeq \left| \frac{V(\omega)}{V(10\text{Hz})} \right|_{\text{dB}} \quad (3.4)$$

I valori in funzione della frequenza sono inseriti in un grafico per ottenere il diagramma di Bode dell'ampiezza.

Capitolo 4

Discussione dei risultati

In questo capitolo vengono analizzati i principali risultati dell'esperienza per la tesi sulla stabilità e l'agilità in frequenza dei fasci laser nelle configurazioni sperimentali descritte nella sezione 3.3.

4.1 Stabilità

Per analizzare lo spettro si sfrutta la funzione Power Average dello Spectrum Analyzer: questa permette di acquisire 100 volte lo spettro del segnale e, per ogni punto, eseguire una media del valore di tensione misurato. Viene quindi eseguito un fit con una lorentziana della distribuzione risultante e ne viene calcolata la semilarghezza a metà altezza.

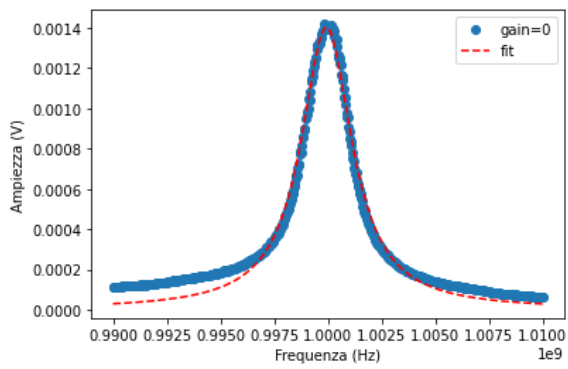
Si può sfruttare come termine comparativo della misura della precisione dei fasci laser il valore di $\Gamma = 6.065(9)$ MHz: infatti, dato che questo valore corrisponde alla larghezza naturale di riga, un valore con una differenza in frequenza minore di Γ dal valore della frequenza scelta risulta comunque sufficientemente preciso.

Nella seguente tabella sono riportati i valori di HWHM corrispondenti ai fasci Cooler e Repumper al variare del parametro Gain, che assume i valori 0,8,14:

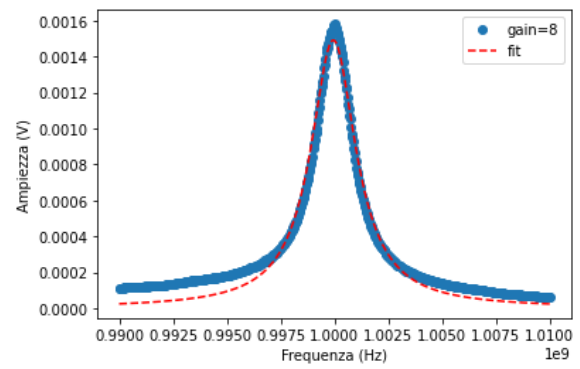
Gain	Cooler (MHz)	Repumper(MHz)
0	1.443	1.330
8	1.275	1.330
14	1.355	1.338

Si nota che la stabilità dei due fasci non sembra essere correlata alla variazione del guadagno.

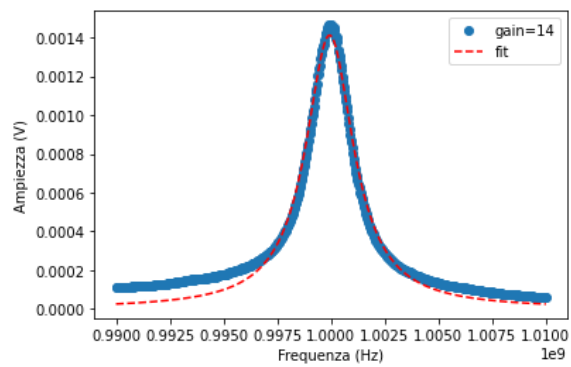
Di seguito sono riportati i grafici con i fit delle varie misure di Cooler (figura 4.1) e Repumper (figura 4.2) al variare del Gain.



(a) Gain=0

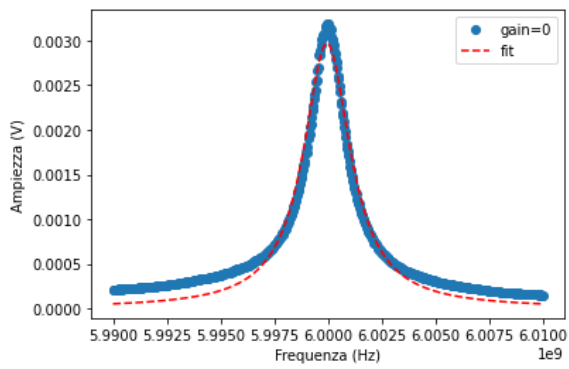


(b) Gain=8

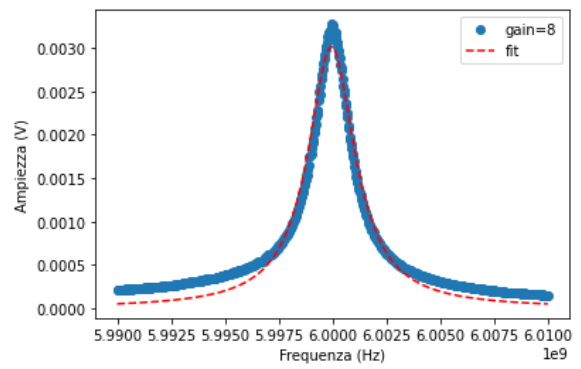


(c) Gain=14

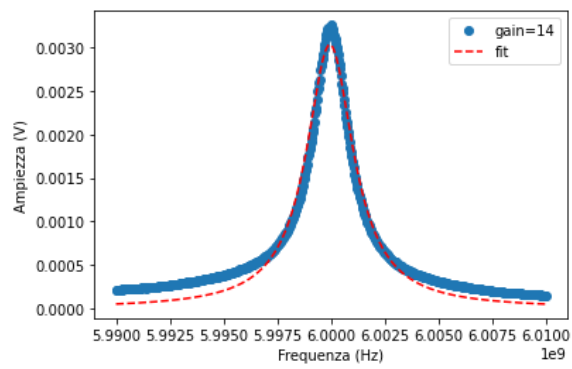
Figura 4.1: Stabilità del PLL per il Cooler



(a) Gain=0



(b) Gain=8



(c) Gain=14

Figura 4.2: Stabilità del PLL per il Repumper

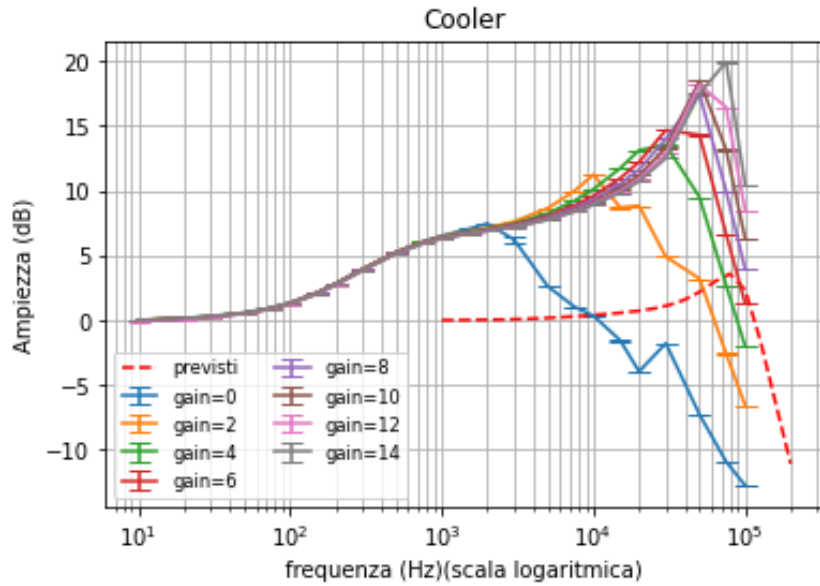


Figura 4.3: Ampiezza della funzione di risposta del PLL del Cooler

Indicando con γ il valore di HWHM si ha che il rapporto fra i valori di HWHM e Γ è compreso in un intervallo:

$$0.21 \leq \frac{\gamma}{\Gamma} \leq 0.24 \quad (4.1)$$

Si nota quindi che i fasci sono stabilizzati in modo preciso alla frequenza scelta. Si noti anche che Γ rappresenta l'allargamento minimo teorico della linea spettrale; dato che a causa di altri effetti già accennati in precedenza le linee spettrali saranno soggette ad ulteriori allargamenti, i fasci hanno una precisione effettiva ancora maggiore.

In figure 4.1 e 4.2 sono riportati i grafici delle varie curve con fit per il PLL del Cooler e per il PLL del Repumper ai valori di Gain di 0,8,14.

4.2 Larghezza di Banda

La larghezza di banda del PLL permette di caratterizzare l'agilità in frequenza del sistema. La fase di melassa $\sigma^+ - \sigma^-$ ha una durata nell'ordine di grandezza dei ms, quindi è necessario che i fasci possano modificare la propria frequenza in tempi inferiori: nel dominio delle frequenze questo corrisponde a una modulazione con frequenza maggiore del kHz.

Nelle figure 4.3 e 4.4 sono stati presi i diagrammi di Bode dell'ampiezza corrispondenti ai PLL dei fasci Cooler e Repumper al variare del guadagno, dove i punti corrispondono alla media dei dieci valori di tensione acquisiti e l'errore corrisponde alla deviazione standard.

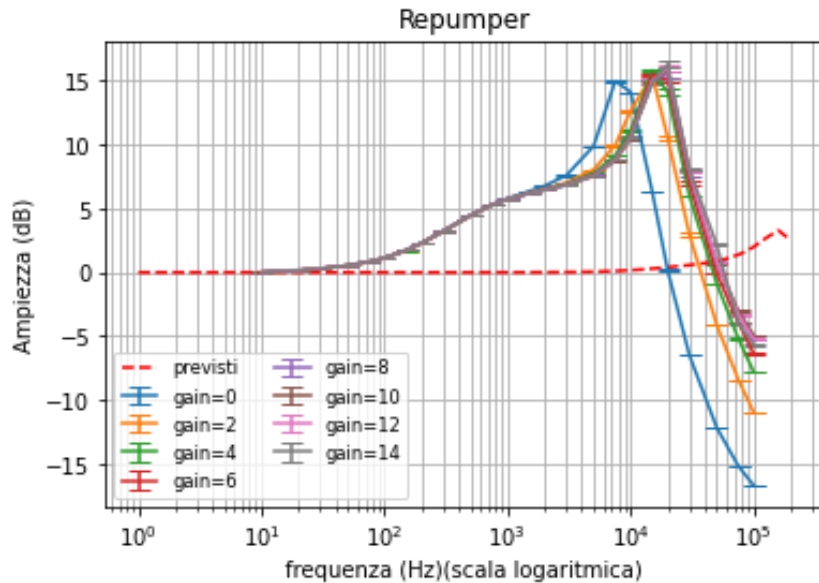


Figura 4.4: Ampiezza della funzione di risposta del PLL del Repumper

Con una linea tratteggiata è indicato il diagramma di Bode che è previsto teoricamente, calcolato mediante un software.

In entrambi i diagrammi si nota che la curva, che parte da un valore iniziale nullo, cresce discostandosi velocemente dal valore teorico calcolato. Questa crescita, fino a un valore di circa 1kHz, non varia in modo apprezzabile al variare del parametro Gain, quindi non dipende da esso.

In entrambi i diagrammi si nota che la curva presenta un massimo in un valore di frequenza ν compreso fra $10\text{kHz} \leq \nu \leq 100\text{kHz}$: il picco varia insieme al guadagno: al crescere del Gain il picco tende a crescere in ampiezza e in frequenza. Questo comportamento è accentuato molto nel PLL corrispondente al Cooler, ma è visibile in misura minore anche nel PLL del Repumper.

A frequenze maggiori di quella del picco termina la larghezza di banda del sistema di controllo e la curva decresce bruscamente.

La larghezza di banda, per tutti i valori di guadagno del Repumper e per valori di guadagno del Cooler ≥ 2 , è compresa fra i 10kHz e i 100kHz, quindi, dato che la durata complessiva della melassa è dell'ordine del ms, i PLL permettono ai fasci di modificare la propria frequenza in un tempo minimo dalle ~ 10 alle ~ 100 volte più piccolo della durata della fase di melassa ottica.

Il parametro del Gain aumenta la larghezza di banda; d'altra parte si può mostrare che aumentando il guadagno si ha anche un'amplificazione del rumore. Inoltre si nota nei diagrammi di Bode che un guadagno alto tende ad amplificare l'instabilità del sistema, in quanto il picco della curva ha valori di ampiezza più alti con un guadagno più alto.

Di conseguenza è conveniente aumentare il valore del guadagno se è necessario avere una larghezza di banda maggiore e quindi una maggiore agilità in frequenza, ma evitare di aumentarlo quando questo non è necessario.

Appendice A

Generatore di Seconda Armonica

Di seguito verrà data una trattazione su alcune proprietà dei cristalli non lineari che vengono sfruttate dal dispositivo SHG per generare la seconda armonica di un campo elettromagnetico. Maggiori informazioni possono essere trovate in [12].

Questo tipo di materiali se viene sottoposto a radiazioni di intensità sufficientemente grande i.e. dei laser, presenta una polarizzazione $P(t)$ che può essere sviluppata come serie di potenze data da:

$$P(t) = \epsilon_0[\chi^{(1)}E(t) + \chi^{(2)}E^2(t) + \chi^{(3)}E^3(t) + \dots] = P^{(1)}(t) + P^{(2)}(t) + P^{(3)}(t) + \dots \quad (\text{A.1})$$

in cui $P^{(1)}$ corrisponde alla polarizzazione lineare, mentre gli altri termini appartengono all'ottica non lineare.

Il termine $P^{(2)}$ è quello sfruttato da SHG e corrisponde a una suscettività di secondo ordine che nella materia condensata ha un ordine di grandezza di $\chi^{(2)} \sim 10^{-12}\text{m/V}$ ([12]). Applicando un campo elettrico del tipo $E(t) = E_1e^{-i\omega_1t} + E_2e^{-i\omega_2t} + c.c.*$, il termine di polarizzazione di secondo ordine del cristallo darà un contributo del tipo:

$$\begin{aligned} P^{(2)}(t) &= \epsilon_0\chi^{(2)}E^2(t) = \\ &= \epsilon_0\chi^{(2)}[E_1^2e^{-2i\omega_1t} + E_2^2e^{-2i\omega_2t} + 2E_1E_2e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} + 2E_1E_2^*e^{-i(\omega_1-\omega_2)t} + c.c.] + \\ &\quad + 2\epsilon_0\chi^{(2)}[E_1E_1^* + E_2E_2^*] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

in cui nella parte a destra dell'ultima uguaglianza (tralasciando i complessi coniugati della prima parentesi quadra) avremo rispettivamente:

- due campi elettrici che dipendono dalla seconda armonica $2\omega_i$
- un termine dato dalla somma delle frequenze $(\omega_1 + \omega_2)$
- un termine dato dalla differenza delle frequenze $(\omega_1 - \omega_2)$

*complessi coniugati

- un termine statico che crea il fenomeno della rettificazione ottica dato da $[E_1 E_1^* + E_2 E_2^*]$

Applicando invece un campo elettrico dato da un solo contributo del tipo $E(t) = E e^{-i\omega_1 t} + c.c.$ la polarizzazione di secondo ordine restituirà un contributo del tipo

$$P^{(2)}(t) = 2\epsilon_0 \chi^{(2)} E E^* + \epsilon_0 \chi^{(2)} (E^2 e^{-i2\omega t} + c.c.) \quad (\text{A.3})$$

e quindi presenterà solamente un contributo di tipo statico corrispondente alla rettificazione ottica e uno oscillante corrispondente alla generazione della seconda armonica. Nell'esperimento si useranno entrambi i fasci Cooler e Repumper con il SHG contemporaneamente e si avrà a che fare con molti contributi, nel lavoro di tesi i fasci saranno collegati uno per volta e si lavorerà solamente con la singola seconda armonica del fascio.

Bibliografia

- [1] B.H.Bransden e C. Joachain, *Physics of Atoms and Molecules* (Longman Scientific e Technical, 1983).
- [2] D. A. Steck, “Rubidium 87 D Line Data”, Los Alamos National Laboratory (2001).
- [3] D. A. Steck, *Quantum and Atom Optics* (Department of Physics, University of Oregon, 2007).
- [4] F. D. Masi, “Modulazione e Demodulazione in Spettroscopia di Saturazione”, Tesi triennale (Alma Mater Studiorum Università di Bologna, 2022/2023).
- [5] M. Prevedelli, *Note del corso di Elementi di Ottica Quantistica* (Alma Mater Studiorum Università di Bologna, 2023).
- [6] J. Dalibard e C. Cohen-Tannoudji, “Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients: simple theoretical models”, *JOSA B* **6**, 2023–2045 (1989).
- [7] J. Bechhoefer, “Feedback for physicists: A tutorial essay on control”, *Reviews of Modern Physics* **77**, 783–836 (2005).
- [8] M. Marchesini, M. Dondi, L. Rossi, G. Bolognini, M. Prevedelli e F. Minardi, “All-fiber, near-infrared, laser system at 780 nm for atom cooling”, *Optics Continuum* **3.10**, 1868–1879 (2024).
- [9] *Fundamentals of Phase Locked Loops (PLLs)*, Analog Devices ().
- [10] *High Resolution 6GHz Fractional-N Frequency Synthesizer*, Analog Devices ().
- [11] *ADIsimPLL*.
- [12] R. Boyd, *Nonlinear Optics* (Academic Press, 2008).

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare il professor Marco Prevedelli per la sua disponibilità e per l'interesse che riesce a trasmettere negli argomenti che tratta.

Vorrei ringraziare inoltre la mia famiglia che mi ha sostenuto nelle mie scelte. Vorrei ringraziare Iris per essere stata presente in tutto questo tempo. Vorrei ringraziare Marco e Andrea che mi hanno ascoltato e mi sono stati accanto. Vorrei ringraziare il Supergruppo per il Supertempo che abbiamo passato insieme. Vorrei ringraziare i miei amici di Pistoia che mi hanno fatto diventare la persona che sono in questo momento, è stato veramente un buon viaggio. Ringrazio anche tutte le altre persone che non ho nominato direttamente ma che mi hanno aiutato negli anni.