ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Ingegneria – Sede di Forlì
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica - Classe LM33

Tesi di laurea in:
Termofluidodinamica
S0104 - Crediti Nel Settore Ing-ind/10

EFFETTO DELLA SCABREZZA DI PARETE SULLA CONVEZIONE FORZATA CON DISSIPAZIONE VISCOSA IN UN MICROCANALE RETTANGOLARE

CANDIDATO:
Gabriele Volpi

RELATORE:
Prof. Antonio Barletta

CORRELATORI:
Prof. Michele Celli
Prof. Pedro Vayssiere Brandão

Appello V
Anno accademico 2023-2024

Indice

Introduzione

La microfluidica è un campo di ricerca con applicazioni rilevanti e attuali in diversi settori, tra cui i sistemi di raffreddamento per la microelettronica, i dispositivi biomedici, la lavorazione chimica e i sistemi energetici. In questa tesi viene presentata un'analisi approfondita dei trasferimenti di calore e massa in microcanali. Particolare attenzione è stata dedicata all'influenza della rugosità sulle prestazioni di scambio termico. In particolare, l'attenzione è rivolta ai risultati riguardanti il trasferimento di calore in flussi completamente sviluppati, sia idrodinamicamente che termicamente, con dissipazione viscosa all'interno di microcanali con sezione rettangolare caratterizzata da una scabrezza delle pareti di entità e forma stocastiche. L'analisi evidenzia che, rispetto ai microcanali lisci, la presenza di rugosità sulle superfici tende, generalmente, a peggiorare le prestazioni dello scambio termico. L'aspetto fondamentale che è stato tenuto in considerazione nella scelta della forma dell'equazione di bilancio locale dell'energia è la dissipazione viscosa. Essa può diventare un fenomeno rilevante nella microfluidica a causa degli elevati gradienti di velocità che si sviluppano all'interno del canale, dovuti alle ridotte dimensioni caratteristiche delle geometrie. Questo effetto risulta significativo e incide sulla distribuzione della temperatura, della pressione e della velocità del flusso. Nei flussi incomprimibili e in regime stazionario, la dissipazione viscosa può influenzare il numero di Nusselt, determinandone un aumento o una diminuzione a seconda della configurazione termica adottata imposta dalle condizioni al contorno.
Le condizioni al contorno scelte sono quelle di tipo T, H1 ed H2. Queste impongono rispettivamente: temperatura costante della parete del canale, temperatura uniforme lungo il perimetro del canale e flusso di calore entrante a parete dall'esterno imposto indipendente dalla coordinata assiale e, infine, flusso di calore entrante a parete dall'esterno costante su tutta la parete del canale. Per quanto riguarda il campo di velocità è stata imposta una classica condizione di no-slip al perimetro bagnato, considerando trascurabile la rarefazione. Per ogni condizione al contorno è stata condotta un'analisi statistica che restituisce i risultati di: numero di Poiseuille, numero di Brinkman per la condizione T e numero di Nusselt per le condizioni T, H1 ed H2.

Capitolo 1: I microcanali

1.1 Generalità sui microcanali

I microcanali oggi costituiscono una branca fondamentale della termofluidodinamica applicata allo scambio di calore, giocando un ruolo cruciale nelle moderne tecnologie, in particolare nella microelettronica. Lo sviluppo dei microcanali può essere ricondotto all'espansione della microelettronica, iniziata negli anni Cinquanta del Novecento. Con la nascita dei primi circuiti integrati e la continua miniaturizzazione dei componenti elettronici, si è reso necessario trovare metodi sempre più sofisticati per dissipare il calore generato durante il funzionamento di questi dispositivi. Da questo impulso è nata la microfluidica, il settore della fluidodinamica che studia il comportamento dei fluidi in volumi estremamente piccoli, spesso dell'ordine dei picolitri. Questo settore di studi è diventato, nel tempo, essenziale per affrontare le sfide legate alla gestione del calore nei dispositivi elettronici su scala ridotta, esigenza che è diventata sempre più impellente con l'incremento delle prestazioni richieste dai microprocessori e dai microchip.
In tale contesto si collocano i cosiddetti MFC (Micro Flow Devices), dispositivi pensati per la gestione della dissipazione termica nei circuiti elettronici avanzati. La funzione primaria di questi dispositivi è quella di regolare e ottimizzare il flusso di calore, mantenendo stabili le temperature operative e garantendo così un funzionamento sicuro e affidabile dei microcomponenti. A titolo di esempio, negli ultimi vent'anni la potenza elettrica richiesta dai microchip è aumentata considerevolmente: si è passati da circa 15 W a 80 W, portando con sé una produzione proporzionale di potenza termica per effetto Joule. Di conseguenza, la necessità di efficienti sistemi di dissipazione del calore è cresciuta notevolmente, poiché un accumulo eccessivo di calore potrebbe compromettere le prestazioni e la durata di vita dei dispositivi.
I microcanali, con la loro struttura su scala micrometrica, permettono una gestione del calore molto più accurata rispetto alle tecniche tradizionali, poiché offrono un'elevata superficie di scambio termico rispetto al volume del fluido utilizzato. Ciò significa che possono dissipare il calore in maniera più uniforme ed efficace, garantendo una distribuzione ottimale della temperatura all'interno dei dispositivi. Grazie alla loro diffusione capillare nel mercato mondiale e al loro crescente utilizzo in una varietà di applicazioni tecnologiche, i microcanali stanno diventando oggetto di studi termofluidodinamici sempre più approfonditi. Tali studi si concentrano sulla comprensione dei meccanismi di trasferimento di calore in microambienti e

sull'ottimizzazione delle geometrie e dei materiali utilizzati per migliorare ulteriormente l'efficienza di dissipazione.
In sintesi, lo sviluppo e la diffusione dei microcanali rappresentano una risposta tecnologica indispensabile all'aumento della densità di potenza nei dispositivi elettronici moderni. Grazie alla microfluidica e ai progressi nel campo della termofluidodinamica, questi dispositivi possono operare a temperature ottimali, preservando l'integrità e la funzionalità dei microcomponenti. Con l'avanzamento della ricerca e l'innovazione continua, l'applicazione dei microcanali e dei dispositivi MFC è destinata a espandersi, rispondendo alle sfide sempre più complesse della dissipazione termica su scala micrometrica.
Questi microdissipatori progettati per i componenti elettronici consentono il passaggio di flussi sia monofase, in cui il fluido è presente solo in forma liquida o gassosa, sia bifase, in cui liquido e gas coesistono. La convezione di un fluido bifase all'interno di microcanali offre il vantaggio di un incremento sostanziale del coefficiente di scambio termico rispetto a un flusso di aria equivalente. Questo avviene perché la natura del flusso bifase promuove una maggiore turbolenza e un trasferimento di calore più efficiente, aumentando la capacità di raffreddamento necessaria per mantenere i componenti elettronici entro limiti termici sicuri e stabili. Uno degli aspetti problematici che meriterebbe attenzione, sebbene non affrontato in questo studio, riguarda la movimentazione di tali microflussi attraverso micropompe. La gestione di questi flussi solleva infatti questioni tecniche legate alla validità delle leggi dei macroflussi in contesti microscopici. Poiché i microflussi presentano proprietà specifiche delle scale ridotte, le equazioni e i modelli comunemente usati per i macroflussi possono richiedere modifiche per adattarsi a queste dimensioni. La sfida sta nell'applicare le leggi macroscopiche su scala micro, dove effetti come l'interazione molecolare, la viscosità e la geometria del canale influenzano il comportamento del fluido.
In particolare, quando si utilizzano flussi gassosi come mezzi per l'asportazione del calore, entra in gioco l'effetto della rarefazione, fenomeno rilevante per fluidi in microcanali. Il parametro chiave che descrive questa condizione è il Numero di Knudsen (Kn), che si definisce come il rapporto tra il libero cammino medio delle molecole (λ) e il diametro idraulico del microcanale (D_h); quest'ultimo rappresenta una misura caratteristica del volume di controllo in esame. Quando il valore di Kn è vicino a zero, il libero cammino medio delle molecole risulta trascurabile rispetto al diametro del canale. In altre parole, le molecole del gas interagiscono tra loro in modo continuo, e il flusso può essere trattato con le equazioni di Navier-Stokes, valide per descrivere i comportamenti dei fluidi su scala continua.
La variazione di questo rapporto tra libero cammino medio e diametro idraulico determina l'ambito di applicabilità delle equazioni del moto e del trasferimento di energia. In effetti, come verrà discusso in dettaglio più avanti, le equazioni per flussi continui possono essere utilizzate in condizioni di microflussi gassosi se il valore di Kn rientra nell'intervallo $10^{-3} < Kn < 10^{-1}$. Questo intervallo è tipico dei flussi gassosi in microcanali e implica che, pur rimanendo valide le equazioni del continuo, sia necessario apportare modifiche alle condizioni al contorno per tenere conto della discontinuità di temperatura e velocità sulla parete. Pertanto, a parete, le ipotesi di

continuità e aderenza devono essere adattate per garantire che il modello rappresenti accuratamente il comportamento del flusso reale.
Per valori di Kn inferiori a 1, le equazioni del continuo perdono progressivamente validità. In questa situazione, il sistema assume una natura sempre più discreta, in cui gli effetti delle dimensioni microscopiche non possono essere trascurati. Le interazioni molecolari diventano rilevanti, e bisogna considerare altri fattori caratteristici delle scale micrometriche, come la rugosità delle superfici dei microcanali, la dissipazione di energia dovuta alla viscosità, la conduzione assiale e le proprietà termofisiche del fluido, che possono variare in funzione della temperatura. Questi fattori giocano un ruolo cruciale nel determinare l'efficacia del trasferimento di calore e devono essere inclusi nei modelli per una rappresentazione accurata e affidabile dei microflussi.
Per quanto riguarda la classificazione dei microcanali se ne sono diffusamente affermate alcune fondate sulle loro dimensioni.
Kandlikar-Grande (2003):

- Canali convenzionali: $D_h > 3\ mm$
- Microcanali: $200\mu m < D_h < 3\ mm$
- Minicanali: $10\mu m < D_h < 200\mu m$

Mehendale (2000):

- Passaggi convenzionali: $D_h > 6\ mm$
- Passaggi compatti: $1\ mm < D_h < 6\ mm$
- Mesocanali: $100\ \mu m < D_h < 1\ mm$
- Microcanali: $1\ \mu m < D_h < 100\ \mu m$

1.2 Materiali e tecniche di costruzione dei microcanali

Oltre al settore dell'elettronica, già ampiamente citato, i microcanali trovano applicazioni in vari altri ambiti, come il settore biomedico, quello chimico e in numerose applicazioni meccaniche. La loro versatilità li rende adattabili a una vasta gamma di materiali, ciascuno dei quali presenta proprietà specifiche che rispondono a diverse esigenze applicative. Questi materiali includono:

- **Substrati polimerici e di vetro**: tra i materiali polimerici, il polimetilmetacrilato (PMMA) e il polidimetilsilossano (PDMS) sono due dei più utilizzati. Il PMMA, per esempio, si caratterizza per un aspetto trasparente, che lo rende molto adatto per applicazioni in cui è richiesta la visibilità interna del dispositivo. Inoltre, possiede una buona biocompatibilità e una lavorabilità elevata, aspetti che facilitano il suo impiego in ambiti biomedicali e di microfluidica. Il PDMS, invece, viene scelto soprattutto per il suo costo contenuto. Entrambi i materiali offrono un'elevata resistenza chimica, il che li rende idonei anche per applicazioni che implicano il contatto con sostanze chimiche potenzialmente aggressive. Nonostante i polimeri presentino generalmente una minore resistenza termica rispetto ai metalli, possiedono ottime proprietà ottiche e una bassa rugosità superficiale, caratteristiche che li rendono interessanti per molte applicazioni di precisione. D'altro canto, il vetro, sebbene più costoso da produrre per via dei processi produttivi non convenzionali richiesti, è insostituibile in applicazioni che necessitano di un materiale inerte e in grado di sopportare alte temperature, oltre a offrire una trasparenza ideale per il monitoraggio di fluidi e sostanze chimiche all'interno dei microcanali.

- **Substrati metallici**: i metalli sono tra i materiali più utilizzati per la realizzazione di microcanali destinati al raffreddamento di dispositivi elettronici e meccanici, grazie alla loro elevata conducibilità termica e resistenza alle alte temperature. Tra i metalli impiegati, spicca il NiAl, in grado di resistere a temperature fino a 650 °C. Tuttavia, per temperature più moderate, nell'ordine di alcune centinaia di gradi, si preferisce spesso l'uso di acciaio e alluminio, materiali più facili da lavorare e di ampia disponibilità. Questi metalli, oltre a presentare una buona capacità di dissipazione del calore, si distinguono per una bassa resistenza termica, rendendoli particolarmente adatti al raffreddamento rapido e alla gestione termica di componenti elettronici e meccanici. La loro robustezza e durabilità li rendono inoltre molto efficaci in applicazioni che richiedono stabilità meccanica e una notevole resistenza strutturale.
- **Semiconduttori, ceramici e materiali compositi**: nell'ambito dell'elettronica, una delle tendenze più innovative è l'integrazione diretta di microcanali nei substrati di silicio, al fine di facilitare la dissipazione del calore generato per effetto Joule nei circuiti sovrastanti. Questa tecnica si è dimostrata molto efficace e ha aperto la strada a nuove possibilità nel campo del raffreddamento miniaturizzato. Il quarzo è un altro materiale frequentemente utilizzato in queste applicazioni per la sua economicità, trasparenza e inerzia chimica, caratteristiche che lo rendono idoneo a operare in ambienti elettronici senza compromettere la purezza dei segnali e senza subire alterazioni chimiche. I materiali ceramici e i compositi, pur essendo attualmente in fase di sviluppo, sono al centro dell'interesse scientifico e tecnologico per le loro proprietà avanzate e per le potenziali applicazioni future. Le tecnologie di produzione per questi materiali devono ancora essere ottimizzate per ridurre i costi e rendere più conveniente il loro impiego su larga scala. Le loro proprietà meccaniche e termiche avanzate, infatti, li rendono candidati ideali per applicazioni ad alte prestazioni, dove la resistenza termica e meccanica è essenziale.

In sintesi, l'impiego dei microcanali in settori che spaziano dall'elettronica alla biomedicina evidenzia una forte interdisciplinarità, grazie alla possibilità di scegliere materiali specifici per rispondere a esigenze particolari, in termini di resistenza chimica, conducibilità termica e durabilità.

Le principali tecniche di produzione dei microcanali includono sia tecnologie tradizionali che moderne, ognuna con caratteristiche e applicazioni specifiche in base ai materiali e alle dimensioni richieste. Tra le tecniche più diffuse si distinguono:

- **Tecnologie convenzionali**: queste includono processi come la micro-deformazione, la micro-segatura e la micro-fresatura, utilizzati per la realizzazione di canali con sezioni rettangolari di dimensioni che vanno da 0,1 mm a 1 mm. La micro-segatura, in particolare, è ampiamente adottata per la sua convenienza economica e la sua semplicità. Permette di ottenere risultati accettabili a costi contenuti, rendendola una delle tecniche più competitive in termini di rapporto qualità-prezzo. La micro-fresatura e la micro-deformazione, d'altro canto, offrono maggiore precisione e sono più adatte a lavorazioni che richiedono una finitura accurata. Tuttavia, queste tecnologie convenzionali non permettono di ottenere canali di dimensioni estremamente ridotte e precise come le moderne tecniche di microlavorazione.
- **Tecnologie avanzate e moderne**: in questa categoria rientrano i sistemi MEMS (Micro Electro Mechanical Systems), la microlavorazione laser, il micro-stampaggio e l'elettroerosione. Le tecniche MEMS, in particolare, rappresentano una soluzione innovativa, poiché combinano componenti meccaniche e elettroniche su scala microscopica, consentendo una realizzazione altamente precisa dei micr ocanali, ideale per applicazioni complesse. La microlavorazione laser è un'altra tecnica moderna particolarmente efficace, che permette la realizzazione di microcanali con precisione sia dimensionale che geometrica molto elevate, grazie alla capacità di creare diametri che possono raggiungere l'ordine dei nanometri. Tuttavia, il processo laser ha un costo di produzione elevato e una produttività relativamente bassa, limitandone l'uso a contesti in cui la precisione estrema è prioritaria rispetto alla rapidità di produzione.
- **Incisione fotochimica**: una delle tecniche moderne più ampiamente utilizzate, l'incisione fotochimica è apprezzata per la sua versatilità, poiché consente la realizzazione di microcanali con diverse geometrie, come forme circolari, trapezoidali e triangolari, e dimensioni che spaziano dai millimetri fino ai nanometri. Questa tecnica può essere applicata a un'ampia gamma di materiali, inclusi metalli, silicio e vetro, rendendola adattabile a numerose esigenze industriali e sperimentali. A differenza della microlavorazione laser, l'incisione fotochimica riesce a garantire un'elevata precisione su scala nanometrica, pur mantenendo una buona produttività, e può essere impiegata in diversi settori, dall'elettronica alla biomedicina. L'incisione fotochimica si basa su processi chimici che modellano il materiale esposto alla luce, creando microstrutture precise e raffinate senza alterare le caratteristiche del substrato di base.

Capitolo 2:

Modelli di convezione forzata interna in regime laminare

2.1 Equazioni di bilancio locale

Le equazioni di bilancio scritte in forma locale derivano direttamente da applicazioni del teorema del trasporto di Reynolds a grandezze proprie del flusso in esame, come la massa, l'i-esima componente della quantità di moto e l'energia dell'elemento di fluido infinitesimo. Attraverso il teorema di localizzazione e sotto la validità di diverse ipotesi semplificative, tra le quali le più notevoli sono, a titolo d'esempio, quelle di flusso laminare e fluido newtoniano, si ottiene il seguente sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali reggente il moto del fluido:

Equazione di continuità
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \left(\rho \underline{u}\right) = 0 \tag{2.1}$$

Equazioni di Navier - Stokes
$$\rho \frac{D\underline{u}}{Dt} = \rho \underline{g} - \underline{\nabla} p + \mu \nabla^2 \underline{u} \tag{2.2}$$

Equazione dell'energia
$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \underline{\nabla} \cdot \left(k \underline{\nabla} T\right) + \mu \Phi \tag{2.3}$$

Dove:
- ρ è la densità locale del flusso fluido $(\mathrm{kg \cdot m^{-3}})$
- $\underline{\nabla}$ è il simbolo di gradiente, un operatore differenziale che scritto per esteso pone: $\underline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}}$
- $\underline{u}$ è il vettore velocità locale del flusso. Ogni sua componente è, in generale, una funzione di tutte le variabili di dominio $(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$
- $\underline{g}$ è il vettore accelerazione di gravità, canonicamente: $\underline{g} = (0,0,g)$
- p è il valore locale di pressione $(\mathrm{N \cdot m^{-2}})$
- μ è la viscosità dinamica del fluido $(\mathrm{Pa \cdot s})$
- ∇^2 è il simbolo laplaciano, un operatore differenziale che scritto per esteso pone: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

- c_p calore specifico a pressione costante $(\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}})$
- $\frac{D}{Dt}$ è il simbolo di derivata sostanziale fatta rispetto al tempo t. Scritta in forma estesa vale: $\frac{D}{Dt}(\dots) = \frac{\partial}{\partial t}(\dots) + \underline{u} \cdot \underline{\nabla}(\dots)$
- T è la temperatura locale del fluido (K)
- k è la conducibilità termica del fluido $(\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}})$
- Φ è la funzione scalare di dissipazione viscosa.

Introducendo alcune ulteriori ipotesi semplificative e una definizione di comodo:

- Flusso incomprimibile, che implica: $\rho = cost.$
- $P = p - \rho \underline{g} \cdot \underline{r}$, con $\underline{r}$ vettore posizione e P carico piezometrico
- Proprietà termofisiche costanti, in questo caso: $k = cost.$,

le equazioni (2.1) - (2.3) si possono riscrivere nella seguente forma semplificata e fondante per la trattazione futura:

Equazione di continuità
$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \tag{2.4}$$

Equazioni di Navier - Stokes
$$\rho \frac{D\underline{u}}{Dt} = \underline{\nabla} P + \mu \nabla^2 \underline{u} \tag{2.5}$$

Equazione dell'energia
$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \mu \Phi \tag{2.6}$$

in coordinate cartesiane esse prendono la forma:

Equazione di continuità
$$\frac{\partial u_x}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{2.7}$$

Equazioni di Navier - Stokes
$$\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial \mathrm{t}} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial \mathrm{x}} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial \mathrm{y}} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial \mathrm{z}}\right) \\
&\qquad = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) \\
&\rho\left(\frac{\partial u_y}{\partial \mathrm{t}} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial \mathrm{x}} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial \mathrm{y}} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial \mathrm{z}}\right) \\
&\qquad = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) \\
&\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial \mathrm{t}} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial \mathrm{x}} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial \mathrm{y}} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial \mathrm{z}}\right) \\
&\qquad = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Equazione dell'energia

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial \mathrm{t}}+u_x\frac{\partial T}{\partial \mathrm{x}}+u_y\frac{\partial T}{\partial \mathrm{y}}+u_z\frac{\partial T}{\partial \mathrm{z}}\right) = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + 2\mu\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial \mathrm{x}}\right)^2+\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right] + \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial u_y}{\partial \mathrm{x}}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial u_y}{\partial \mathrm{z}}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial u_x}{\partial \mathrm{z}}\right)^2 \tag{2.9}$$

La quantità scalare $\mu\Phi = 2\mu\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial \mathrm{x}}\right)^2+\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right]+\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial u_y}{\partial \mathrm{x}}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial u_y}{\partial \mathrm{z}}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial u_x}{\partial \mathrm{z}}\right)^2$, calcolata considerando l'incomprimibilità del flusso, rappresenta l'energia generata dalla dissipazione viscosa. Per come è scritta è sempre positiva sottolineando il carattere generativo di questo fenomeno che si presenta quindi come un termine sorgente nell'equazione (2.9).

Le equazioni di continuità e di Navier-Stokes non dipendono dal campo di temperatura T, possono quindi essere risolte autonomamente per determinare i campi di velocità $\underline{u}$ e carico piezometrico P. L'equazione dell'energia (2.9), al contrario, dipende fortemente dal campo di velocità $\underline{u}$. Il procedimento che caratterizza quindi la risoluzione di un problema di convezione forzata prevede di risolvere prima le equazioni (2.7) e (2.8) determinando i campi $\underline{u}$ e P, poi con queste informazioni risolvere l'equazione (2.9) per determinare il campo T nelle ipotesi semplificative di ρ, μ, k, c_p e $\alpha = k/\rho c_p$ costanti in senso assoluto, dello spazio e del tempo.

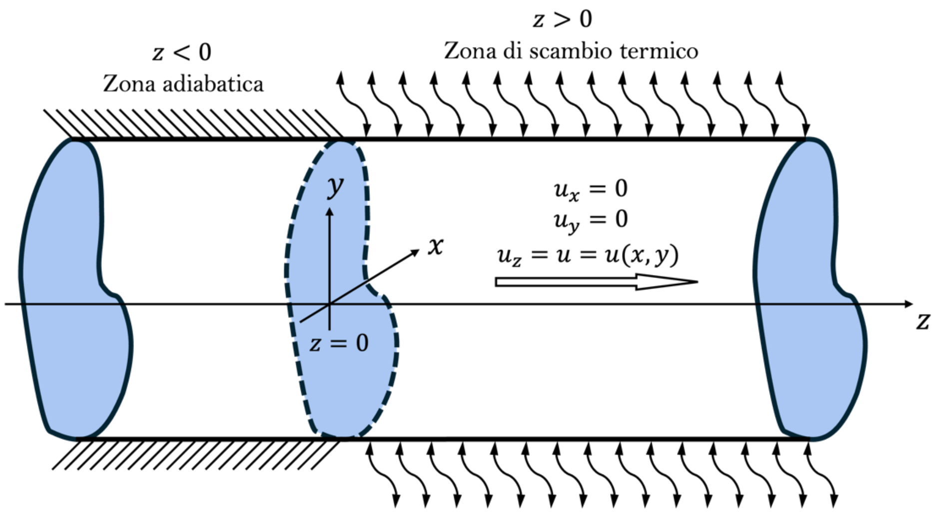


Figura 2.1: Condotto di sezione generica soggetto dello studio di convezione forzata interna. Il verso di u è imposto a destra.

Il dominio geometrico del problema, scevro da qualsiasi specifica ipotesi su forma e dimensioni del condotto, seguirà lo schema introduttivo di Figura (2.1). Lo sviluppo longitudinale del condotto è collocato sulla direzione z della terna destrorsa di riferimento, mentre la sezione generica del condotto, in azzurro, giace su un piano parallelo al piano xy.

2.2 Condizione di flusso idrodinamicamente sviluppato e ulteriori ipotesi semplificative

Le equazioni (2.4) – (2.6) necessitano di ulteriori ipotesi semplificative per essere più facilmente integrate in forma chiusa. Dapprima si suppone stazionario il campo di velocità, vale a dire:

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = 0 \tag{2.10}$$

Successivamente viene introdotta l'ipotesi di flusso idrodinamicamente sviluppato, secondo la quale ad una sufficiente distanza dalla sezione di ingresso vengono persi gli effetti distorcenti sul campo di velocità generati dalla regione di imbocco. Il campo di velocità risulta quindi monodirezionale su z e dipendente unicamente dalle coordinate x ed y.

2.2.1 Equazioni di continuità e quantità di moto

Come riportato in Figura 2.1, in virtù dell'ipotesi di flusso idrodinamicamente sviluppato e della relazione espressa dall'equazione (2.4) si ha:

$$\begin{gathered} u_x = 0 \\ u_y = 0 \\ u_z = u = u(x, y) > 0 \end{gathered} \tag{2.11}$$

Come diretta conseguenza le equazioni di Navier – Stokes per flusso idrodinamicamente sviluppato si possono riscrivere nella forma semplificata:

$$\begin{gathered}\frac{\partial P}{\partial x}=0\\ \frac{\partial P}{\partial y}=0\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z}\end{gathered} \tag{2.12}$$

Questa forma del bilancio di quantità di moto evidenzia l'indipendenza del carico piezometrico P dalle coordinate di giacenza della generica sezione del condotto, risulta quindi che: $P = P(z)$ con un valore costante per ogni sezione del condotto.
L'equazione che governa la velocità locale del flusso in questo caso è quindi l'ultima delle (2.12), riscritta nella forma compatta come:

$$\nabla_{\perp}^2 u = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z} \tag{2.13}$$

dove $\nabla_{\perp}^2$ è l'operatore laplaciano nel piano xy. Dato che il lato sinistro di quest'ultima equazione è indipendente da z, lo sarà anche il destro. Perciò:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = cost(z) = cost = \nabla_{\perp}^2 u \tag{2.14}$$

equazione che permette, una volta determinato il campo di velocità $u(x, y)$ dalla (2.13), di determinare $P(z)$, fornendo al problema un'adeguata condizione al contorno (in questo caso si potrebbe dire "iniziale") su $z = 0$ per quanto riguarda il carico piezometrico.

Sulla base della generica sezione del condotto di riferimento in Figura 2.2 vengono date alcune definizioni di comodo per quanto riguarda il moto del fluido.

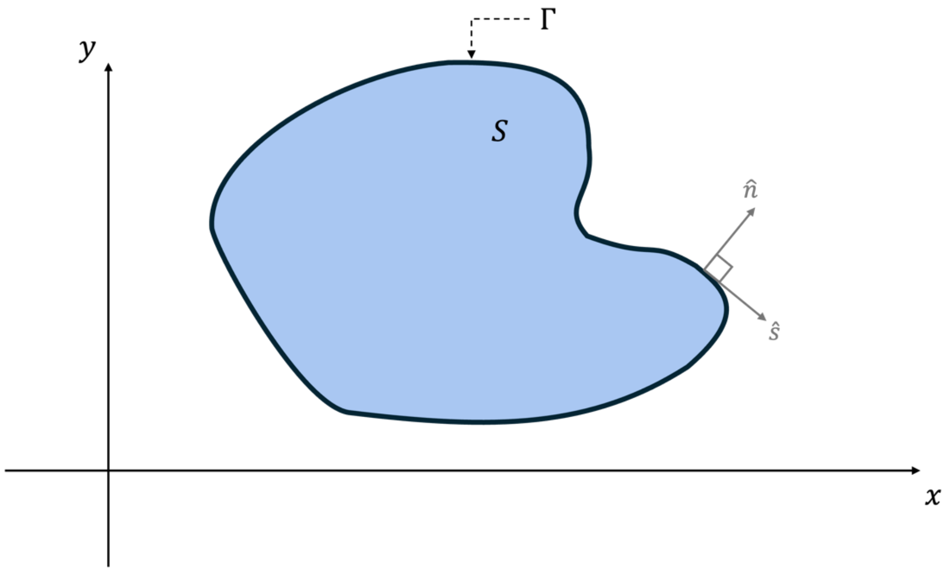


Figura 2.2: Generica sezione del condotto di riferimento, definizioni idrodinamiche

Vengono definiti:

Area e perimetro della sezione del condotto	S e Γ	(2.15)
Versore normale uscente e tangenziale della sezione del condotto	$\hat{n}$ ed $\hat{s}$	(2.16)
Velocità media su una sezione del condotto	$u_m = \frac{1}{S}\int_S u\, dS$	(2.17)
Sforzo tangenziale medio alla parete della sezione del condotto	$\tau_w = -\frac{\mu}{\Gamma}\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\, d\Gamma$	(2.18)
Diametro idraulico della sezione del condotto	$D_h = \frac{4S}{\Gamma}$	(2.19)
Fattore d'attrito di Fanning	$f = \frac{2\tau_w}{\rho {u_m}^2}$	(2.20)
Numero di Reynolds	$Re = \frac{\rho u_m D_h}{\mu}$	(2.21)
Numero di Poiseuille	$fRe = \sigma = -\frac{{D_h}^2}{2\mu u_m}\frac{\partial P}{\partial z}$	(2.22)

Dove sono stati sfruttati l'equazione (2.13) e il teorema della divergenza di Gauss per ottenere la relazione (2.22).

2.2.2 Equazione dell'energia

L'equazione dell'energia (2.6), sotto la condizione di flusso idrodinamicamente sviluppato assume una forma più semplice, vale a dire:

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial \mathrm{t}} + u\frac{\partial T}{\partial \mathrm{z}}\right) = k\left(\nabla_\perp^2 T + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \underbrace{\mu\left(\frac{\partial u}{\partial \mathrm{x}}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial \mathrm{y}}\right)^2}_{\mu\Phi} \tag{2.23}$$

Considerando, inoltre, il campo di temperatura come stazionario si ottiene:

$$\rho c_p u\frac{\partial T}{\partial \mathrm{z}} = k\left(\nabla_\perp^2 T + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \mu\Phi \tag{2.24}$$

Questa forma dell'equazione dell'energia rientra nell'insieme delle PDE cosiddette ellittiche: attributo ben noto secondo il quale per raggiungere la soluzione risulta

necessario definire le condizioni al contorno su tutti i lati del dominio d'integrazione; in questo caso quindi anche sulla sezione d'uscita del condotto.
Da un punto di vista matematico ciò non rappresenta un problema concettuale, viceversa, da un punto di vista fisico questo si scontra con l'impossibilità di conoscere aprioristicamente le condizioni di energia del flusso per una sezione d'uscita del condotto in quanto proprio queste sono oggetto dello studio della convezione forzata interna. L'idea è quindi quella di semplificare ulteriormente l'equazione dell'energia (2.24) per farle assumere una forma di tipo parabolico, struttura secondo la quale una condizione iniziale, in questo caso la distribuzione di temperatura $T(x, y, 0)$ sulla sezione d'imbocco, viene fatta evolvere lungo una direzione di sviluppo, in questo caso z. Questa condizione particolare è ottenibile trascurando il termine $k\partial^2\mathrm{T}/\partial z^2$. Dal punto di vista fisico quali conseguenze comporta questa semplificazione?

Il termine $k\partial^2 T/\partial z^2$, deriva dalla legge di Fourier per la conduzione; rappresenta quindi la conduzione termica del fluido lungo la direzione assiale.
Assumendo che a cavallo di una distanza assiale dell'ordine del diametro idraulico D_h la differenza di temperatura lungo la stessa direzione sia ΔT, si può scrivere, per gli ordini di grandezza, che:

$$\begin{gathered} u\frac{\partial T}{\partial z} \sim \frac{u_m \Delta T}{D_h} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \sim \frac{\Delta T}{{D_h}^2} \end{gathered} \tag{2.25}$$

perciò, trascurare il termine conduttivo $k\partial^2 T/\partial z^2$ rispetto al termine convettivo $\rho c_p u\, \partial T/\partial z$ implica:

$$1 \ll \frac{\rho c_p u_m D_h}{k} = Pe = Re \cdot Pr \tag{2.26}$$

dove sono stati definiti i numeri adimensionali di Peclét e Prandtl ($Pr = \mu c_p/k$). Negli studi di convezione forzata interna questa condizione è spesso raggiunta, Pe risulta, invece, dell'ordine dell'unità solo nei casi in cui il liquido trattato sia un metallo fuso, che infatti ha bassa viscosità μ e alta conducibilità termica k (basso Pr). Nella trattazione futura verrà quindi assunto $Pe \gg 1$, perciò l'equazione (2.24) si può riscrivere nella forma:

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial \mathrm{z}} = k\nabla_{\perp}^2 T + \mu\Phi \tag{2.27}$$

2.3 Condizione di flusso termicamente sviluppato

Sulla base della generica sezione del condotto di riferimento in Figura 2.3 vengono date alcune definizioni di comodo per quanto riguarda l'aspetto termico del flusso.

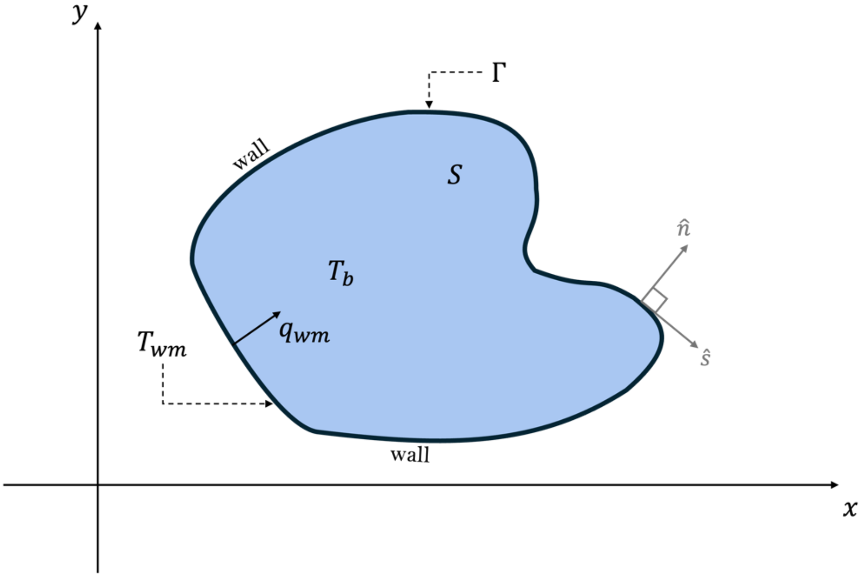


Figura 2.3: Generica sezione del condotto di riferimento, definizioni termodinamiche

Si definiscono alcune grandezze integrali legate allo scambio termico. Esse possiedono valore costante per ogni sezione S del condotto ma diverso per sezioni a z diverse:

Temperatura di mescolamento (bulk temperature)
$$T_b(z) = \frac{1}{Su_m}\int_S T\,u\,dS \tag{2.28}$$

Temperatura media della parete
$$T_{wm}(z) = \frac{1}{\Gamma}\int_\Gamma T\,d\Gamma \tag{2.29}$$

Flusso termico medio a parete entrante
$$q_{wm}(z) = \frac{k}{\Gamma}\int_\Gamma \frac{\partial T}{\partial n}\,d\Gamma \tag{2.30}$$

Coefficiente di scambio termico convettivo
$$h(z) = \frac{q_{wm}(z)}{T_{wm}(z) - T_b(z)} \tag{2.31}$$

Numero di Nusselt
$$Nu(z) = \frac{h(z)D_h}{k} \tag{2.32}$$

Numero di Brinkman
$$Br(z) = \frac{\mu {u_m}^2}{q_{wm}(z)D_h} \tag{2.33}$$

Dissipazione viscosa media $$\Phi_m = \frac{1}{S}\int_S \Phi \, dS \tag{2.34}$$

Integrando su S l'equazione (2.27), utilizzando alcune delle definizioni appena riportate ed in ultimo il teorema della divergenza di Gauss, si ottiene la seguente relazione per la variazione assiale della temperatura di mescolamento:

$$\frac{\partial T_b(z)}{\partial z} = \frac{4q_{wm}(z)}{\rho c_p D_h u_m} + \frac{\mu \Phi_m}{\rho c_p u_m} \tag{2.35}$$

essa mette in luce il legame esistente tra la variazione della temperatura di mescolamento, il flusso termico entrante medio a parete e la dissipazione viscosa media su una sezione S del condotto.

Dopo aver definito le quantità d'interesse per quanto riguarda la parte termica del flusso, si può introdurre un'ulteriore semplificazione del sistema risolvente imponendo l'ipotesi di flusso termicamente sviluppato, secondo la quale la differenza di temperatura tra due punti fissati appartenenti ad una generica sezione S del condotto tende a diventare indipendente da z, ossia:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\underline{\nabla}_{\perp} T(x,y,z)\right) = 0 \tag{2.36}$$

Sotto l'ipotesi di una certa regolarità della funzione T, questa relazione si può riscrivere come segue:

$$\underline{\nabla}_{\perp} \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z} = 0 \tag{2.37}$$

Questa versione dell'ipotesi di flusso termicamente sviluppato impone che la variazione di T in direzione assiale non dipenda da x e y, che abbia, cioè, un valore costante su una generica sezione S del condotto.
Sotto tale ipotesi, ricordando che $\partial T/\partial n = \underline{\nabla}_{\perp} T \cdot \hat{n}$, si ottengono una serie di relazioni semplificatorie:

$$\frac{\partial q_{wm}(z)}{\partial z} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_{wm} = cost. \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial T_{wm}(z)}{\partial z} = \frac{\partial T_b(z)}{\partial z} = \frac{4q_{wm}}{\rho c_p D_h u_m} + \frac{\mu \Phi_m}{\rho c_p u_m} = cost. \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial h(z)}{\partial z} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad h = cost. \tag{2.40}$$

$$\frac{\partial Nu(z)}{\partial z} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad Nu = cost. \tag{2.41}$$

Per ottenere la relazione (2.39) è stata utilizzata la (2.35). Questa relazione mostra che $\partial T/\partial z = cost.$, informazione che permette di risolvere l'equazione dell'energia (2.27) per una sezione generica S del condotto e poi, in un secondo momento, determinare l'evoluzione di $T(x, y)$ su z. Non è quindi necessario risolvere contemporaneamente su tutte e tre le variabili di dominio l'equazione (2.27).

2.4 Condizioni al contorno

Il sistema risolutivo per lo studio della convezione forzata interna è quindi costituito dalle equazioni (2.13) e (2.27):

$$\begin{cases} \nabla^2_{\perp} u = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial P}{\partial z} \\ \rho c_p u \dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{z}} = k\nabla^2_{\perp} T + \mu\Phi \end{cases} \tag{2.42}$$

Queste equazioni necessitano per la loro risoluzione in forma chiusa di condizioni al contorno. Le relazioni da imporre per i campi di velocità e temperatura sono da definire su:

- Sezione d'imbocco a $z = 0$ (condizione "iniziale") ⟶ solo su T
- Contorni del condotto per $z \gtreqless 0$ (condizioni al contorno) ⟶ su T e su u

2.4.1 Campo di velocità

Con riferimento alla Figura 2.2, la condizione al contorno imposta è quella di no-slip. Il campo di velocità viene quindi imposto nullo in corrispondenza del perimetro bagnato Γ della sezione, vale a dire:

$$u(x, y)|_{(x,y)\,\in\,\Gamma} = 0 \tag{2.43}$$

Una volta determinato il campo di velocità $u(x, y)$, indipendente da z quindi valido per ogni sezione del condotto, si può procedere con la risoluzione dell'equazione dell'energia.

2.4.2 Campo di temperatura

Con riferimento alla Figura 2.1, la condizione al contorno imposta per la temperatura a $z = 0$, cioè nella cosiddetta "Regione d'ingresso termico", è:

$$T(x, y, 0) = f(x, y) \tag{2.44}$$

Lo scambio termico cui è soggetto il condotto non è in generale esteso a tutta la sua lunghezza. La regione entro la quale si considera presente lo scambio termico alla parete è detta "Zona di scambio termico" e viene fatta coincidere con la regione $z > 0$ in Figura 2.1. Viceversa, il dominio a $z < 0$ viene detto "Zona adiabatica" e non presenta alcuno scambio termico alla parete. Per la zona di scambio termico si possono definire, per quanto riguarda la temperatura $T(x, y, z)$, varie condizioni al contorno. Le principali sono:

(T)	$T(x,y,z)\vert_{(x,y)\in\Gamma} = T_w = cost.$	Il valore costante T_w è imposto su tutta la parete, perciò vale anche: $\begin{cases} \frac{\partial T(x,y,z)\vert_{(x,y)\in\Gamma}}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial T(x,y,z)\vert_{(x,y)\in\Gamma}}{\partial z} = 0 \end{cases}$
(H1)	$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z}\left[k\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial n}\right]\Big\vert_{(x,y)\in\Gamma} = 0 \\ \frac{\partial T(x,y,z)\vert_{(x,y)\in\Gamma}}{\partial s} = 0 \end{cases}$	Il flusso di calore entrante a parete dall'esterno è imposto indipendente da z e, inoltre, la temperatura è imposta uniforme lungo il perimetro Γ
(H2)	$\left[k\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial n}\right]\Big\vert_{(x,y)\in\Gamma} = q_w = cost.$	Il valore costante q_w è imposto su tutta la parete, perciò vale anche: $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s}\left[k\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial n}\right]\Big\vert_{(x,y)\in\Gamma} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}\left[k\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial n}\right]\Big\vert_{(x,y)\in\Gamma} = 0 \end{cases}$

Tabella 2.1: Condizioni al contorno termiche

La condizione di tipo (H1) è un ibrido tra una condizione di tipo Dirichlet e una di tipo Neumann. Risulta appropriata in tutti quei casi in cui il materiale della parete del condotto possiede un'elevata conducibilità termica k. Viceversa, la condizione (H2) è utile nei casi in cui la conducibilità termica k della parete sia bassa.

Infine, un'ulteriore particolarità dell'equazione semplificata della temperatura (2.42) è che questo modello esclude fenomeni di retroazione di T in direzione opposta a quella del flusso (verso z negative). In particolare, la distribuzione di temperatura imposta a $z = 0$ influenzerà il campo di T solo nella regione a $z > 0$.
Concettualmente, questo si verifica perché, avendo eliminato la conduzione assiale $k\partial^2\mathrm{T}/\partial z^2$, si affida l'evoluzione di T su z solo ai fenomeni di trasporto dovuti al campo di velocità u che possono avvenire solo verso z positive data l'ipotesi fondante $u > 0$ di convezione forzata imposta verso destra (Figura 2.1).

Ulteriori considerazioni sulla condizione al contorno termico di tipo (T)
Dalla relazione (2.29), avendo imposto $T(x,y,z)|_{(x,y)\,\in\,\Gamma} = T_w$, ricordando la relazione (2.39) si ha che:

$$\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial T_{wm}(z)}{\partial z} = \frac{\partial T_w}{\partial z} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z} = 0 \tag{2.45}$$

Inoltre, si può facilmente dimostrare dalla definizione (2.29) che T_{wm} risulta pari a T_w, imposta dalla condizione al contorno termico (H1). La grandezza T_{wm} dovrà perciò considerarsi come una quantità prescritta.

Ulteriori considerazioni sulla condizione al contorno termico di tipo (H1)
La prima delle due relazioni coincide con la proiezione su $\hat{n}$ dell'equazione (2.38). Da quest'ultima si evince che il flusso termico medio a parete entrante q_{wm} è da considerarsi come una costante il cui valore deve venire assegnato all'atto dell'imposizione della condizione al contorno (H1): $q_{wm} = cost.$.

Scrivendo sul bordo Γ e derivando rispetto ad s la prima uguaglianza della (2.39):

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial T(x,y,z)|_{(x,y)\,\in\,\Gamma}}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial T_{wm}(z)}{\partial z}\right) \tag{2.46}$$

supponendo una certa regolarità della funzione $T(x,y,z)|_{(x,y)\,\in\,\Gamma}$ ed utilizzando la seconda relazione imponibile per la condizione al contorno termico di tipo (H1):

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T(x,y,z)|_{(x,y)\,\in\,\Gamma}}{\partial s}\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T_{wm}(z)}{\partial s}\right) = 0 \tag{2.47}$$

Infine, risulta $\partial T(x,y,z)/\partial z \neq 0$. In particolare, uguale ad una $cost.$ come riportato in equazione (2.39).

Ulteriori considerazioni sulla condizione al contorno termico di tipo (H2)

L'equazione dell'energia (2.42) e la condizione al contorno termico (H2) contengono solo derivate della funzione incognita $T(x, y, z)$. Per questo la soluzione non è unica, ma dipende da una costante arbitraria. Questa costante può essere individuata aggiungendo una relazione che $T(x, y, z)$ deve rispettare. La relazione in questione si può ottenere rimaneggiando la definizione (2.29) di T_{wm}:

$$\int_{\Gamma} (T - T_{wm})\, d\Gamma = 0 \tag{2.48}$$

Inoltre, si può facilmente dimostrare dalla definizione (2.30) che q_{wm} risulta pari a q_w, imposto dalla condizione al contorno termico (H1). La grandezza q_{wm} dovrà perciò considerarsi come una quantità prescritta.

Infine, risulta $\partial T(x, y, z)/\partial z \neq 0$. In particolare, uguale ad una $cost.$ come riportato in equazione (2.39).

2.5 Adimensionalizzazione delle equazioni

Il sistema risolutivo per lo studio della convezione forzata interna (2.42) necessita di una adimensionalizzazione per essere risolto in maniera generale, senza prescrivere, cioè, valori specifici delle grandezze del flusso.

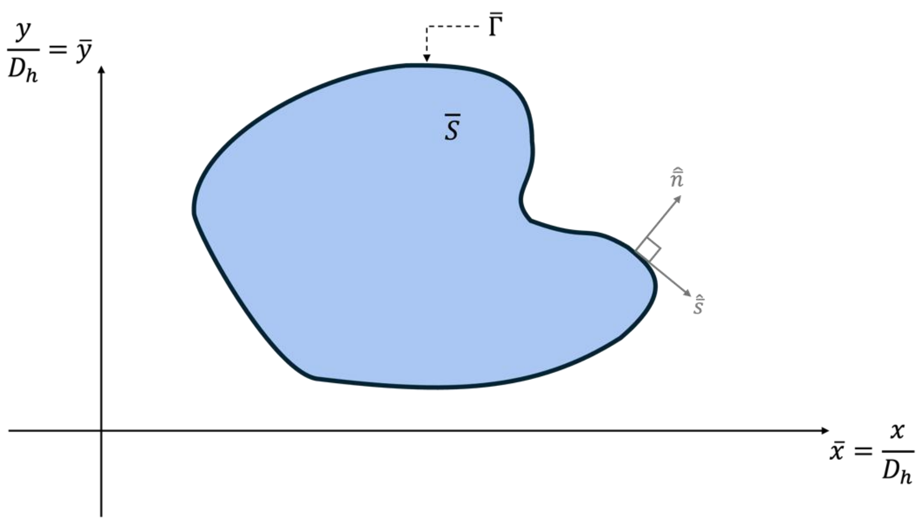


Figura 2.4: Generica sezione adimensionalizzata del condotto di riferimento

L'adimensionalizzazione si basa sulla divisione delle grandezze in gioco per una quantità di pari dimensioni, il quoziente risulterà quindi una misura adimensionale della grandezza in questione. Si vanno a definire queste quantità adimensionali (con soprassegno) come segue:

$$\bar{x} = \frac{x}{D_h} \tag{2.49}$$

$$\bar{y} = \frac{y}{D_h} \tag{2.50}$$

$$\bar{z} = \frac{z}{D_h\, Pe} \tag{2.51}$$

$$\bar{\nabla}^2_\perp = D_h{}^2\, \nabla^2_\perp \tag{2.52}$$

$$\bar{u} = \frac{u}{u_0} \tag{2.53}$$

$$\bar{T} = k\frac{T - T_{wm}}{q_{wm} D_h} \tag{2.54}$$

$$\bar{a} = \frac{k D_h u_m}{q_{wm}\alpha} \cdot \underbrace{\frac{\partial T}{\partial z}}_{cost.} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \tag{2.55}$$

dove: $u_0 = -\frac{D_h{}^2}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial z}$ è una velocità di riferimento costante. Per come sono state date le definizioni si ha, inoltre:

$$\frac{u_0}{u_m} = fRe = \sigma \tag{2.56}$$

In questo contesto le quantità $\bar{S}$ e $\bar{\Gamma}$ denotano due oggetti geometrici adimensionali ottenuti dai canonici S e Γ riferiti però ad un sistema di coordinate scalato secondo le relazioni (2.49) e (2.50), si veda Figura 2.4.

Nel rispetto di queste definizioni, il sistema risolvente (2.42) può essere riscritto nella forma adimensionale:

$$\begin{cases} \bar{\nabla}^2_\perp \bar{u} + 2 = 0 \\ \bar{\nabla}^2_\perp \bar{T} - \underbrace{\sigma \bar{a} \bar{u}}_{\substack{\text{contributo} \\ \text{convettivo}}} + \underbrace{\sigma^2 Br\, \bar{\Phi}}_{\substack{\text{contributo} \\ \text{viscoso}}} = 0 \end{cases} \tag{2.57}$$

dove: $\bar{\Phi} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)^2$.

Le condizioni "iniziali" ed al contorno espresse nel capitolo precedente dalle equazioni (2.43), (2.44) e dalla Tabella 2.1 prendono ora la forma:

$$\bar{u}(\bar{x},\bar{y})|_{(\bar{x},\bar{y})\,\in\,\bar{\Gamma}} = 0 \tag{2.58}$$

$$\bar{T}(\bar{x},\bar{y},0) = f(\bar{x},\bar{y}) \tag{2.59}$$

(T)	$\bar{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\vert_{(\bar{x},\bar{y})\,\in\,\bar{\Gamma}} = 0$	Il valore costante T_w è imposto su tutta la parete, perciò vale anche: $\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\vert_{(\bar{x},\bar{y})\,\in\,\bar{\Gamma}}}{\partial s} = 0 \\ \dfrac{\partial \bar{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\vert_{(\bar{x},\bar{y})\,\in\,\bar{\Gamma}}}{\partial \bar{z}} = 0 \end{cases}$
(H1)	$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[k\dfrac{\partial \bar{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}{\partial n}\right]\Bigg\vert_{(\bar{x},\bar{y})\,\in\,\bar{\Gamma}} = 0 \\ \dfrac{\partial \bar{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\vert_{(\bar{x},\bar{y})\,\in\,\bar{\Gamma}}}{\partial s} = 0 \end{cases}$	Il flusso di calore entrante a parete dall'esterno è imposto indipendente da $\bar{z}$ e, inoltre, la temperatura è imposta uniforme lungo il perimetro $\bar{\Gamma}$
(H2)	$\left[\dfrac{\partial \bar{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}{\partial n}\right]\Bigg\vert_{(\bar{x},\bar{y})\,\in\,\bar{\Gamma}} = 1$	Il valore costante q_w è imposto su tutta la parete, perciò vale anche: $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s}\left[k\dfrac{\partial \bar{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}{\partial n}\right]\Bigg\vert_{(\bar{x},\bar{y})\,\in\,\bar{\Gamma}} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[k\dfrac{\partial \bar{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}{\partial n}\right]\Bigg\vert_{(\bar{x},\bar{y})\,\in\,\bar{\Gamma}} = 0 \end{cases}$

Tabella 2.2: Condizioni al contorno termiche in forma adimensionale

La prima relazione della condizione (H2) verrà dimostrata in seguito.

Ulteriori considerazioni sulla condizione al contorno termico di tipo (T)

La relazione riportata in tabella deriva dalle considerazioni scritte al capitolo precedente applicate alla definizione (2.54).

Inoltre, dalla relazione (2.45) deriva che:

$$\frac{\partial \bar{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{a} = 0 \tag{2.60}$$

Ulteriori considerazioni sulla condizione al contorno termico di tipo (H1)
Per questa condizione vale: $\partial T(x,y,z)|_{(x,y)\,\in\,\Gamma}/\partial s = 0$, perciò, $\forall z$, si può scrivere che:

$$T(x,y,z)|_{(x,y)\,\in\,\Gamma} \equiv T_{wm}(z) \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})|_{(\bar{x},\bar{y})\,\in\,\bar{\Gamma}} = 0 \tag{2.61}$$

Inoltre, in analogia con le considerazioni riportate in precedenza per la condizione (H1) dimensionale, risulta qui $\bar{a} \neq 0$. Un'elaborazione del suo valore verrà presentata nel paragrafo successivo.

Ulteriori considerazioni sulla condizione al contorno termico di tipo (H2)

Per quanto riportato in equazione (2.48) deve valere che:

$$\int_{\bar{\Gamma}} \bar{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\, d\bar{\Gamma} = 0 \tag{2.62}$$

Inoltre, integrando la (2.30) sul perimetro adimensionale $\bar{\Gamma}$ invece che su Γ, sostituendo la definizione invertita (2.54) scritta sul bordo $\bar{\Gamma}$, si ottiene:

$$\bar{\Gamma} = \int_{\bar{\Gamma}} D_h \frac{\partial \bar{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})|_{(\bar{x},\bar{y})\,\in\,\bar{\Gamma}}}{\partial n}\, d\bar{\Gamma} \;\; \Longrightarrow \;\; D_h \frac{\partial \bar{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})|_{(\bar{x},\bar{y})\,\in\,\bar{\Gamma}}}{\partial n} = 1 \tag{2.63}$$

da cui:

$$D_h\, \underline{\nabla}_{\perp} \bar{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})|_{(\bar{x},\bar{y})\,\in\,\bar{\Gamma}} \cdot \hat{n} = 1 \;\; \Longrightarrow \;\; \underline{\bar{\nabla}}_{\perp} \bar{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})|_{(\bar{x},\bar{y})\,\in\,\bar{\Gamma}} \cdot \hat{n} = 1 \tag{2.64}$$

Inoltre, in analogia con le considerazioni riportate in precedenza per la condizione (H1) dimensionale, risulta qui $\bar{a} \neq 0$. Un'elaborazione del suo valore verrà presentata nel paragrafo successivo.

2.5.1 Grandezze di riferimento per i risultati della convezione forzata interna

Le grandezze di interesse pratico nello studio della convezione forzata interna che sono state qui introdotte sono: $\sigma = fRe$, Nu e Br. Sono tutte grandezze che per un regime idrodinamicamente e termicamente sviluppato risultano $cost.$.
Nel contesto adimensionale che è stato precedentemente impostato, possono essere espresse mediante relazioni integrali.

Per quanto riguarda il numero di Poiseuille σ, la sua forma integrale per un condotto di sezione adimensionale $\bar{S}$ qualsiasi viene ottenuta dalla relazione (2.56) utilizzando la definizione di u_m (2.17). Si ottiene:

$$\sigma = \frac{\bar{S}}{\int_{\bar{S}} \bar{u}\, d\bar{S}} \tag{2.65}$$

Per quanto riguarda il numero di Nusselt Nu, la sua forma integrale per un condotto di sezione adimensionale $\bar{S}$ qualsiasi viene ottenuta considerando una interessante proprietà di $\bar{T}$:

$$\frac{1}{\bar{S}\, u_m} \int_{\bar{S}} \bar{T}\, u\, d\bar{S} = -\frac{1}{Nu} \qquad \Longrightarrow \qquad Nu = -\frac{\bar{S}}{\sigma \int_{\bar{S}} \bar{T}\, \bar{u}\, d\bar{S}} \tag{2.66}$$

Per quanto riguarda il numero di Brinkman Br, le considerazioni da fare sono più estese. Innanzitutto, è esplicitabile una relazione integrale tra $\bar{a}$, Br e σ. Attraverso le definizioni date e sfruttando il teorema della divergenza di Gauss, rimaneggiando l'equazione dell'energia adimensionale (2.57), si può ottenere che:

$$\bar{a} = \frac{\bar{\Gamma}}{\bar{S}} + \frac{\sigma^2\, Br}{\bar{S}} \int_{\bar{S}} \bar{\Phi}\, d\bar{S} \tag{2.67}$$

In presenza di condizioni al contorno termiche di tipo (T), come mostrato dalla (2.60), risulta $\bar{a} = 0$. Questo determina un valore univoco per Br, vale a dire:

$$Br_T = -\frac{\bar{\Gamma}}{\sigma^2 \int_{\bar{S}} \bar{\Phi}\, d\bar{S}} \tag{2.68}$$

Se le condizioni al contorno termiche sono di tipo (H1) o (H2) risulta $\bar{a} \neq 0$. La relazione (2.67) non è quindi chiusa e per determinare $\bar{a}$ da inserire nell'equazione dell'energia adimensionale (2.57) occorre assegnare un valore arbitrario a Br. Questa imposizione risulta necessaria in questa sede per ottenere dei risultati non parametrizzati in Br. All'atto di una ipotetica convalidazione pratica il valore di Br deve essere calibrato sulle proprietà del problema in esame considerando la definizione (2.33) e inserendolo nella (2.67).

Capitolo 3:

Microcanale rettangolare liscio

Il di caso studio introduttivo, da effettuare prima di inserire gli effetti della rugosità sulle pareti, prevede lo studio di un microcanale di sezione rettangolare, attraversato da un flusso laminare in regime idrodinamicamente e termicamente sviluppato. Il sistema descrivente il moto è il (2.57) con le condizioni al contorno (2.58), (2.59) e Tabella 2.2.

Le soluzioni indagate non prevedono la risoluzione del problema sulla direzione assiale: l'analisi verrà quindi condotta solo su una sezione generica $\bar{S}$ con lo scopo di determinare i tre parametri notevoli precedentemente introdotti σ, Nu e Br_T.

3.1 Configurazione geometrica del problema

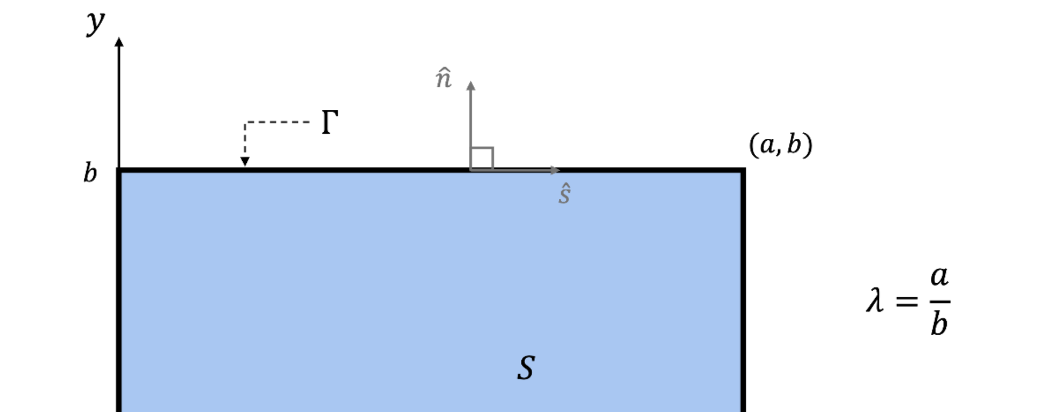


Figura 3.1: Configurazione geometrica della sezione rettangolare liscia

La geometria di riferimento è riportata in Figura 3.1. La sezione generica S è adagiata con lo spigolo inferiore sinistro all'origine. I lati orizzontale e verticale sono rispettivamente di lunghezze a e b. È sottinteso che la sezione generica S appartiene alla regione di completo sviluppo $z \gg 0$.

Il parametro fondante per lo studio sarà il rapporto di forma λ, definito come segue:

$$\lambda = \frac{a}{b} \tag{3.1}$$

Il diametro idraulico D_h assume quindi la forma:

$$D_h = \frac{4S}{\Gamma} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2a}{1+\lambda} = \frac{2b\lambda}{1+\lambda} \tag{3.2}$$

mentre la superficie S e il perimetro Γ divengono:

$$\begin{gathered} S = ab = \frac{a^2}{\lambda} = b^2\lambda \\ \Gamma = 2(a+b) = 2a\left(1+\frac{1}{\lambda}\right) = 2b(1+\lambda) \end{gathered} \tag{3.3}$$

Come mostrato in Figura 2.4, il problema deve venire adimensionalizzato anche dal punto di vista geometrico. La figura seguente mostra una sezione rettangolare liscia che, nel rispetto delle ipotesi (3.2), subisce un processo di adimensionalizzazione attraverso una scalatura per ${D_h}^{-1}$ degli assi di riferimento:

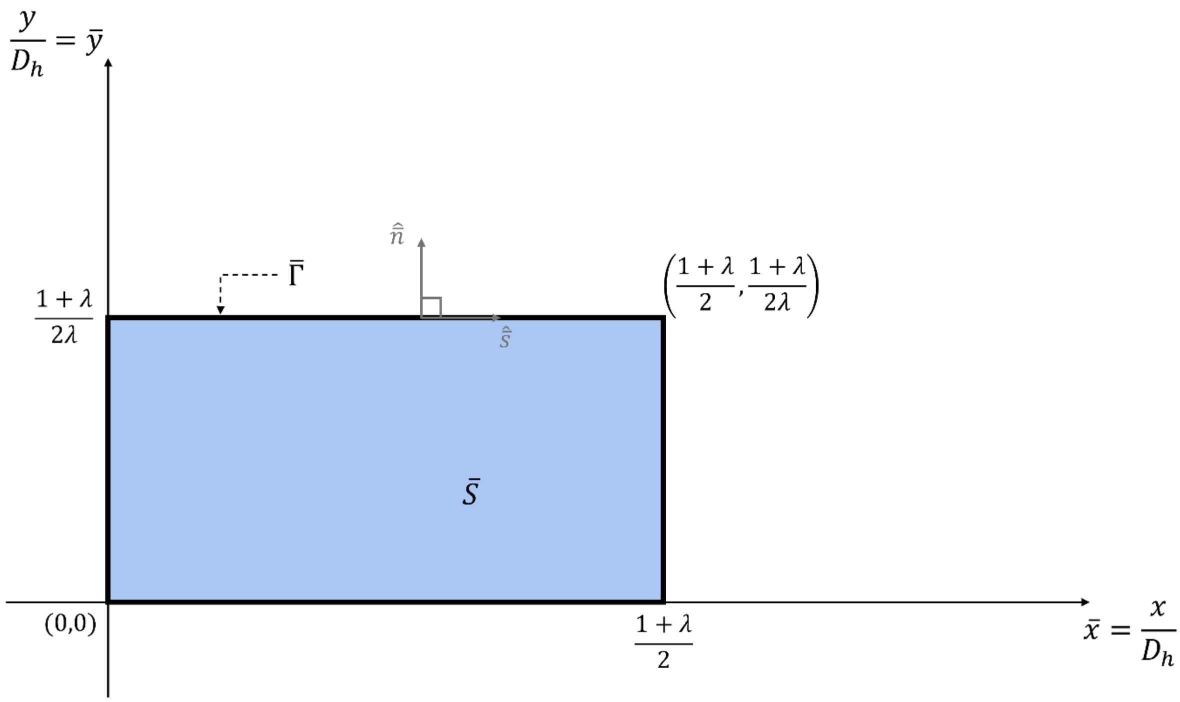


Figura 3.2: Configurazione geometrica della sezione rettangolare liscia adimensionalizzata

Il procedimento di risoluzione presentato ai capitoli precedenti è del tutto generale; è, cioè, impostato per la risoluzione del problema per qualsiasi sezione $\bar{S}$. In questo caso semplice, però, le grandezze adimensionali che caratterizzano la sezione sono esplicitabili in forma compatta, si possono scrivere infatti come segue:

$$\begin{gathered}
\frac{b}{D_h} = \frac{1+\lambda}{2\lambda} \\
\frac{a}{D_h} = \frac{1+\lambda}{2} \\
D_h = \frac{4\bar{S}}{\bar{\Gamma}} = 1 \\
\bar{S} = \frac{a}{D_h}\frac{b}{D_h} = \frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda} \\
\bar{\Gamma} = 2\left(\frac{a}{D_h} + \frac{b}{D_h}\right) = \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}
\end{gathered} \tag{3.4}$$

3.2 Metodo di risoluzione

La risoluzione del problema di convezione forzata interna prevede dapprima di risolvere l'equazione della quantità di moto presente nel sistema risolutivo (2.57) con le condizioni al contorno (2.58):

$$\begin{cases} \bar{\nabla}^2_{\perp}\bar{u} + 2 = 0 \\ \bar{u}(\bar{x},\bar{y})|_{(\bar{x},\bar{y})\,\in\,\bar{\Gamma}} = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Una volta determinato il campo di velocità adimensionale $\bar{u}$, utilizzando l'equazione (2.65), si calcola il valore di σ:

$$\sigma = \frac{\bar{S}}{\int_S \bar{u}\, d\bar{S}} \tag{3.6}$$

A questo punto si deve passare alla risoluzione del campo di temperatura adimensionale $\bar{T}$. L'equazione risolvente è la seconda del sistema (2.57):

$$\bar{\nabla}^2_{\perp}\bar{T} - \sigma\bar{a}\bar{u} + \sigma^2 Br\,\Phi = 0 \tag{3.7}$$

Le condizioni al contorno per quanto riguarda la sezione $\bar{S}$ sul piano $\bar{x}\bar{y}$ sono quelle riportate in Tabella 2.2 e considerazioni seguenti:

- (T): Vale che $\rightarrow$ $\bar{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})|_{(\bar{x},\bar{y})\,\in\,\bar{\Gamma}} = 0,\ \bar{a} = 0$
- (H1): Vale che $\rightarrow$ $\bar{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})|_{(\bar{x},\bar{y})\,\in\,\bar{\Gamma}} = 0,\ \bar{a} \neq 0$
- (H2): Vale che $\rightarrow$ $\underline{\bar{\nabla}}_{\perp}\bar{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})|_{(\bar{x},\bar{y})\,\in\,\bar{\Gamma}} \cdot \hat{n} = 1,\ \int_{\bar{\Gamma}} \bar{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\, d\bar{\Gamma} = 0,\ \bar{a} \neq 0$

Condizioni al contorno termico di tipo (T)
Il numero di Brinkman ha un valore univoco in quanto, come mostrato dalla (2.60), risulta $\bar{a} = 0$. Questo determina per Br il valore:

$$Br_T = -\frac{\bar{\Gamma}}{\sigma^2 \int_{\bar{S}} \bar{\Phi}\, d\bar{S}} \tag{3.8}$$

Condizioni al contorno termico di tipo (H1)
Il numero di Brinkman è un parametro di input da fornire al sistema. Inoltre, come detto in precedenza risulta $\bar{a} \neq 0$, in particolare:

$$\bar{a} = \frac{\bar{\Gamma}}{\bar{S}} + \frac{\sigma^2\, Br}{\bar{S}} \int_{\bar{S}} \bar{\Phi}\, d\bar{S} \tag{3.9}$$

Nelle computazioni numeriche verranno utilizzate come scelte arbitrarie i valori: $Br = -10, -1, 1, 10$.

Condizioni al contorno termico di tipo (H2)
Il numero di Brinkman è un parametro di input da fornire al sistema. Il parametro $\bar{a}$ si calcola ancora come per la espressione precedente.
Nelle computazioni numeriche verranno utilizzate come scelte arbitrarie i valori: $Br = -10, -1, 1, 10$.

Infine, una volta risolto il campo di temperatura adimensionale per una delle tre condizioni al contorno termiche, si procede con il calcolo del numero di Nusselt con l'espressione (2.66):

$$Nu = -\frac{\bar{S}}{\sigma \int_{\bar{S}} \bar{T}\, \bar{u}\, d\bar{S}} \tag{3.10}$$

3.3 Presentazione dei risultati

Il metodo risolutivo così impostato può essere applicato ad una sezione $\bar{S}$ di qualsiasi forma e dimensione. Fornisce per le condizioni (H1) e (H2), a meno della scelta arbitraria di Br, risultati univoci per σ, Nu e Br_T.
Per quanto riguarda la geometria, invece, l'unica grandezza in input con cui vene parametrizzata la sezione $\bar{S}$ di Figura 3.2 è λ. Appare quindi evidente che tutta l'analisi che avviene a valle della sua scelta risulti parametrizzata nei suoi confronti. Si ottengono, cioè, gli andamenti: $\sigma(\lambda)$, $Nu(\lambda)$ e $Br_T(\lambda)$.

Di seguito verranno presentati i risultati espressi con questa notazione: σ, Br_T, Nu_T, Nu_{H1}, Nu_{H2}. I pedici T, $H1$ e $H2$ riferiscono le grandezze cui sono sottoscritti alle rispettive condizioni al contorno. Nu può essere infatti esplicitato per tutte le condizioni, mentre Br solo per la condizione (T).

Si riportano ora le principali sezioni esaminate con i rispettivi rapporti di forma (le sezioni rappresentate non sono visualizzate alla stessa scala per questioni di spazio). Le sezioni a λ diversi presentano incorporata la mesh d'integrazione:

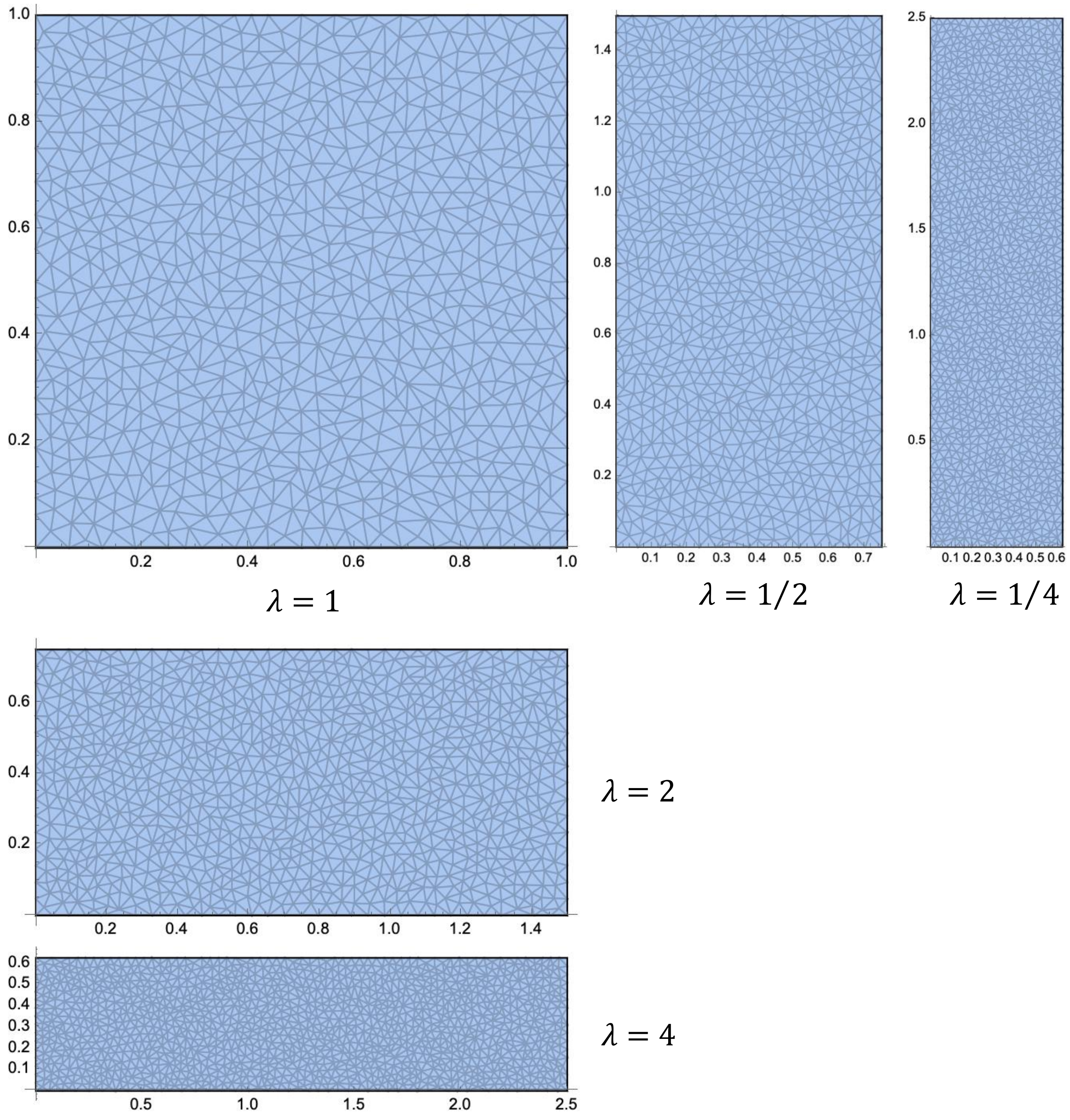


Figura 3.3: Sezioni adimensionalizzate per vari λ

Con riferimento alla Figura 3.2, la parametrizzazione in λ porta a sezioni adimensionalizzate che tra loro mantengono inalterato il diametro idraulico D_h. In

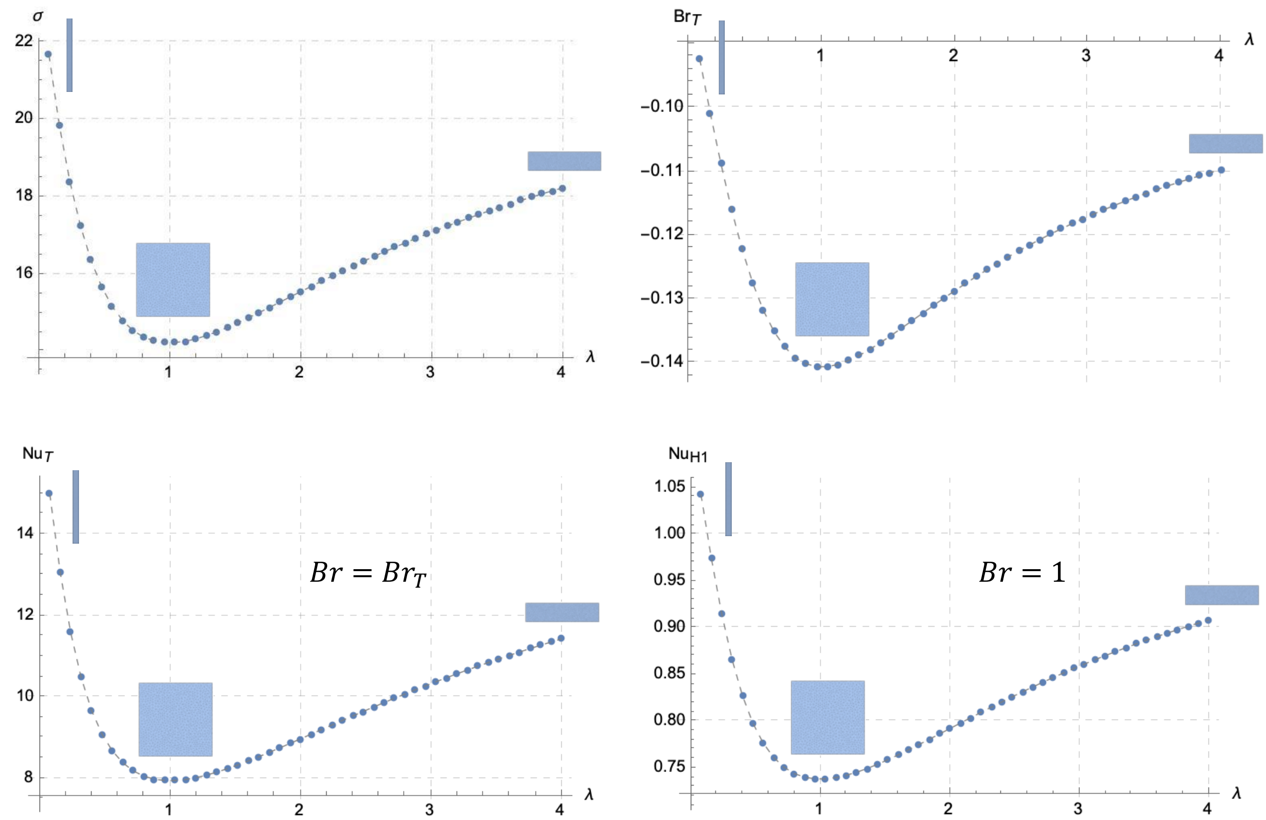
particolare, vale sempre che: $D_h = 1$ come mostrato dalla relazione (3.4). Da notare che le lunghezze dei lati orizzontale e verticale variano con la scelta di λ per mantenere inalterato il valore unitario del diametro idraulico.
Un'ultima considerazione da fare prima di mostrare i risultati è la seguente. Avendo introdotto nell'equazione (2.5) la nozione di carico piezometrico $P = p - \rho \underline{g} \cdot \underline{r}$ e avendo riferito tutte le grandezze pertinenti al moto ad esso, si svincola la risoluzione del problema dall'ingerenza del verso dell'accelerazione di gravità sui risultati. Vale a dire che condotti che presentano valori di λ reciproci non mostrano differenze nei risultati come verrà visualizzato più avanti in Figura 3.4.

A questo punto, come caso introduttivo, i risultati per $\sigma, Br_T, Nu_T, Nu_{H1}$ e Nu_{H2} sono di seguito riportati per alcuni rapporti di forma notevoli e con $Br = 1$:

	σ	Br_T	Nu_T	$Nu_{H1}(Br = 1)$	$Nu_{H2}(Br = 1)$
$\lambda = 1$	14.227	−0.141	7.952	0.738	0.713
$\lambda = 1/2$	15.548	−0.129	8.978	0.792	0.736
$\lambda = 1/4$	18.233	−0.110	11.434	0.909	0.795

Tabella 3.1: Risultati per alcuni dei principali rapporti di forma per sezione rettangolare liscia e $Br = 1$

e per ogni rapporto di forma da circa 0 a 4 (le sezioni rappresentate sui grafici non sono visualizzate alla stessa scala per questioni di spazio):



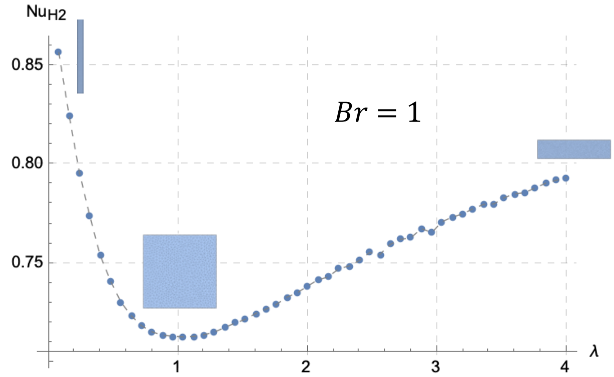


Figura 3.4: σ, Br_T, Nu_T, Nu_{H1} e Nu_{H2} come funzioni del rapporto di forma λ

Gli andamenti mostrano tutti lo stesso comportamento qualitativo: ogni grandezza presenta il proprio minimo in corrispondenza della sezione di forma quadrata ($\lambda = 1$). Per quanto riguarda il numero di Poiseuille, questo deriva qualitativamente dal fatto che una sezione dalla forma molto schiacciata (λ estremi) offre più resistenza al moto di una sezione quadrata.

Per quanto riguarda la condizione di tipo (T), questa configurazione impone una temperatura costante su tutto il bordo della sezione $\bar{S}$, il che implica che debba sussistere un bilancio netto tra la generazione viscosa interna e lo scambio termico a parete di tipo convettivo deducibile dalla relazione (2.39):

$$\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial T_{wm}(z)}{\partial z} = 0 = \frac{4q_{wm}}{\rho c_p D_h u_m} + \frac{\mu \Phi_m}{\rho c_p u_m} \tag{3.11}$$

cioè:

$$q_{wm} = -\frac{\mu\, D_h\, \Phi_m}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad Nu = \frac{D_h}{4} \frac{\mu \Phi_m}{-k \dfrac{T_{wm} - T_b}{D_h}} \tag{3.12}$$

L'importanza dello scambio termico per via convettiva è uguale a quella della generazione viscosa per bilanciare l'azione che ha quest'ultima sulla temperatura di parete, che deve rimanere costante.

Di seguito viene proposta un'estensione dei risultati di Figura 3.4 per Nu_{H1} e Nu_{H2}. Vengono qui considerati nuovi valori del numero di Brinkman, in particolare $-10, -1$ e 10, da inserire nelle espressioni (3.9) e (3.10):

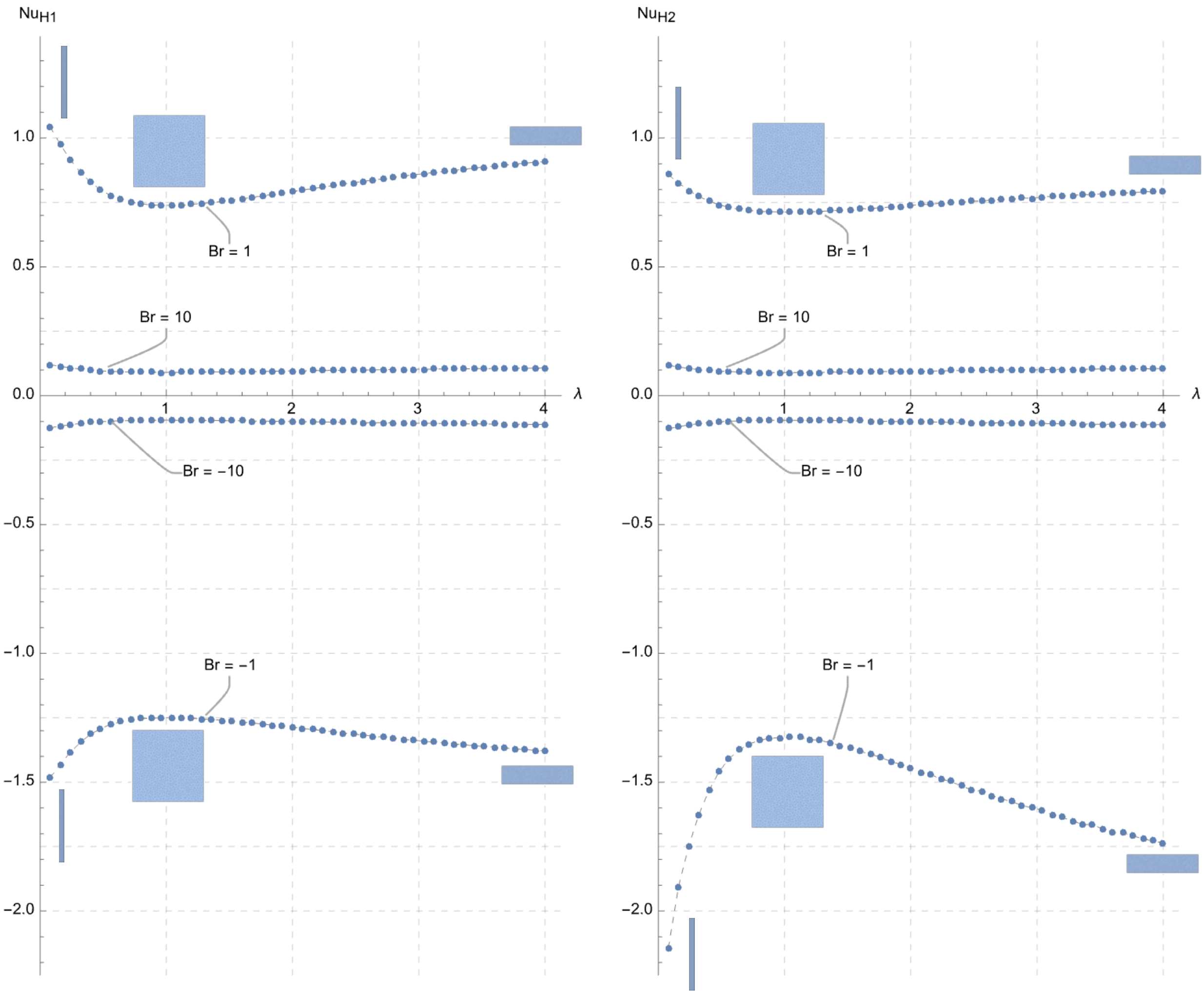


Figura 3.5: Nu_{H1} e Nu_{H2} come funzioni del rapporto di forma λ per $Br = -10, -1, 1, 10$

Osservando la figura precedente si nota che all'aumentare di $|Br|$ si ha una diminuzione di $|Nu_{H1,H2}|$.

L'ultima considerazione che si può fare riguardo ai risultati numerici è la seguente: estremizzando il rapporto di forma, per esempio da $\lambda > 40$ in poi, appare subito evidente che i risultati ottenuti approssimano quelli per lastre piane parallele lambite internamente da un flusso laminare. Di seguito il confronto tra i risultati per $\lambda = 50$ e lastre piane parallele:

Lastre piane parallele (Shah – London)	$\boldsymbol{\lambda = 50}$
$\sigma = 24$	$\sigma = 23.363$
$Br_T = -0.08333$	$Br_T = -0.0856071$
$Nu_T = 17.5$	$Nu_T = 16.8089$
$Nu_{H1} = 1.12$	$Nu_{H1} = 1.0003$
$Nu_{H2} = 1.12$	$Nu_{H2} = 0.886857$

Tabella 3.2: Risultati a confronto: lastre piane parallele - $\lambda = 50$

Capitolo 4:

Microcanale rettangolare scabro

L'attività di studio si può concentrare ora sugli effetti della rugosità delle pareti. Quest'applicazione prevede lo studio di un microcanale la cui sezione di base rimane rettangolare ma viene ovunque resa scabra da un'idealizzazione grafica della rugosità superficiale. Il flusso rimane laminare, idrodinamicamente e termicamente sviluppato. Il sistema descrivente il moto è ancora il (2.57) con le condizioni al contorno (2.58), (2.59) e Tabella 2.2.

Le soluzioni indagate non prevedono la risoluzione del problema sulla direzione assiale: l'analisi verrà quindi condotta solo su una sezione generica $\bar{S}$ con lo scopo di determinare i tre parametri notevoli precedentemente introdotti σ, Nu e Br_T.

4.1 Configurazione geometrica del problema

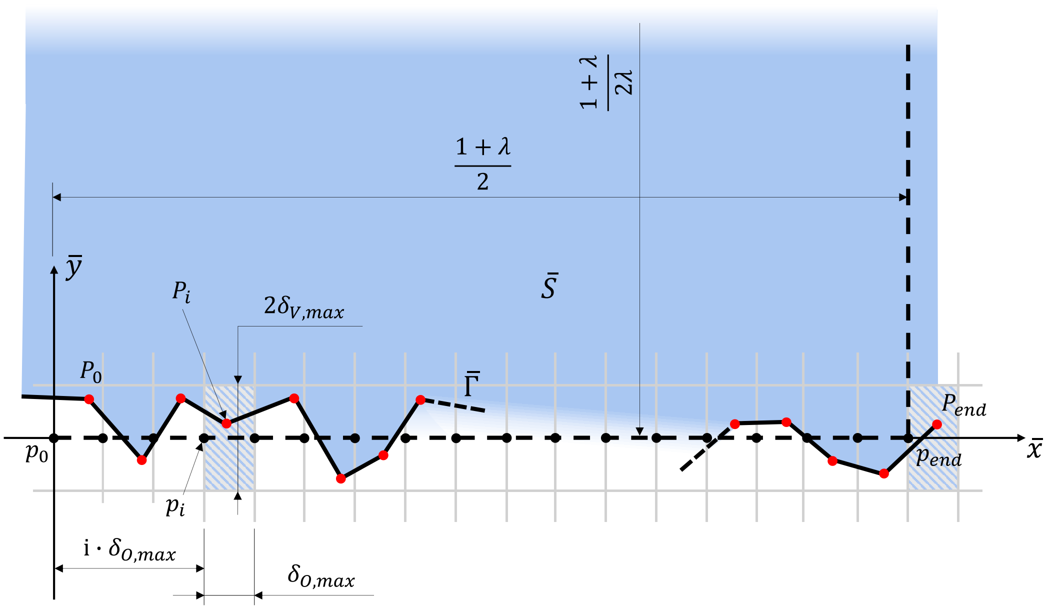


Figura 4.1: Configurazione geometrica della sezione rettangolare scabra adimensionalizzata

La geometria del problema in forma adimensionalizzata è riportata in Figura 4.1. Per quanto riguarda la sezione rettangolare liscia di riferimento, il suo spigolo inferiore sinistro è adagiato sull'origine e coincide con il punto p_0, i suoi lati orizzontale e verticale sono rispettivamente di lunghezze $(1+\lambda)/2$ e $(1+\lambda)/2\lambda$ e saranno utilizzati come riferimento per la costruzione della sezione scabra. È sottinteso, infine, che la sezione generica $\bar{S}$ appartiene alla regione di completo sviluppo.

La costruzione della nuova sezione integrante $\bar{S}$ è basata sulla sezione rettangolare liscia, in linea tratteggiata di Figura 3.2, che viene qui utilizzata come riferimento di base per la costruzione del perimetro scabro $\bar{\Gamma}$. Sulla base di essa un processo iterativo costruisce punto per punto le coppie di coordinate P_i formanti la poligonale chiusa del perimetro adimensionale $\bar{\Gamma}$.

Oltre che il già indagato rapporto di forma λ, la sezione scabra introduce nel problema una nuova grandezza con cui è possibile parametrizzare la soluzione finale: la scabrezza relativa di ogni parete $R \in]0,1]$. Quest'ultima risulta proporzionale a $2\delta_{V,max}$ in Figura 4.1. In particolare, si possono definire per la sezione rettangolare in esame:

$$\delta_{V,max} = \frac{b}{2} R_V = \frac{1}{2}\frac{1+\lambda}{2\lambda} R_V \qquad , \qquad \delta_{O,max} = \frac{a}{2} R_O = \frac{1}{2}\frac{1+\lambda}{2} R_O \tag{4.1}$$

I termini a primo membro rappresentano le semiampiezze delle scabrezze di parete rispettivamente delle pareti verticali e orizzontali della sezione rettangolare. Per evitare differenze di scabrezza tra pareti orizzontali e verticali si può imporre che:

$$\delta_{V,max} = \delta_{O,max} \qquad \Longrightarrow \qquad R_V = R_O = R \tag{4.2}$$

Definiti i parametri fondanti della scabrezza di parete, si può procedere con la generazione del perimetro adimensionale $\bar{\Gamma}$. La generazione della poligonale chiusa con cui coincide viene suddivisa nella generazione delle spezzate aperte relative ad ognuna delle quattro pareti. Ognuno dei quattro lati della sezione rettangolare scabra verrà quindi generato separatamente ed infine unito al precedente formando la poligonale chiusa $\bar{\Gamma}$ e la sezione adimensionale $\bar{S}$. In figura 4.1 è riportato lo schema di generazione del lato inferiore, il procedimento adotta i seguenti step:

1. Il lato liscio (tratteggiato) viene suddiviso in punti p_i equidistanti, posizionati ognuno a distanza $i \cdot \delta_{O,max}$ dall'origine con $i = 1,2,\dots,a/\delta_{O,max}$.
2. Davanti ad ogni punto p_i viene costruita immaginariamente l'area tratteggiata di Figura 4.1 entro la quale si impone in maniera stocastica che debba cadere il punto P_i. L'area misura in larghezza $\delta_{O,max}$ e in altezza $2\delta_{V,max}$.
3. Generato il punto P_{i+1}, questo viene unito a P_i per formare il lato scabro inferiore.

4. Il procedimento viene ripetuto per tutti i quattro lati della sezione ed essi vengono poi uniti in un'unica poligonale chiusa formante $\overline{\Gamma}$.

Adottando questo procedimento un esempio di sezione $\overline{\mathrm{S}}$ che si può ottenere è il seguente (sulla figura sono rappresentate anche la sezione di riferimento in linea tratteggiata e la mesh d'integrazione):

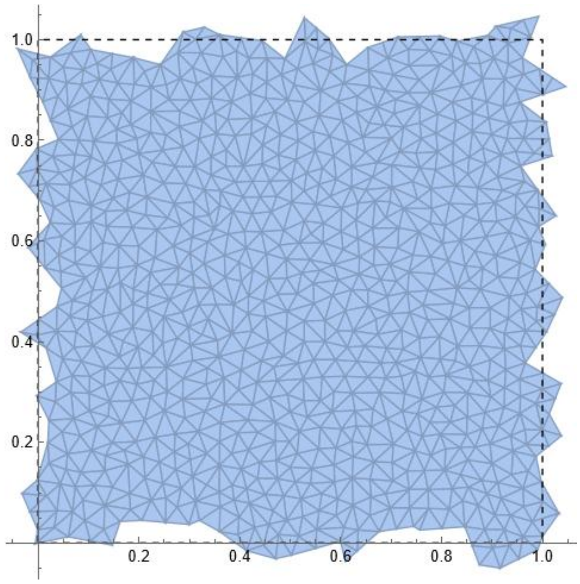
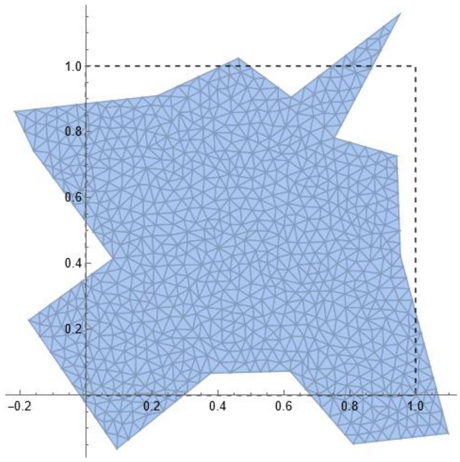
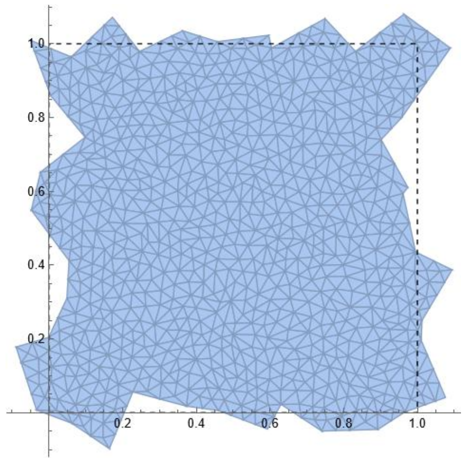


Figura 4.2: Sezione scabra adimensionalizzata ottenuta per $\lambda = 1$ e $R = 1/10$

Come immaginabile, la variazione di R in maniera arbitraria, non legata ad alcun parametro fisico, produce sezioni con scabrezze di parete che deformano anche di molto la sezione media rispetto a quella rettangolare di base. Un esempio di ciò è rappresentato nelle figure seguenti, ottenute tutte per $\lambda = 1$ ma con R variabile:



$R = 1/2$



$R = 1/5$

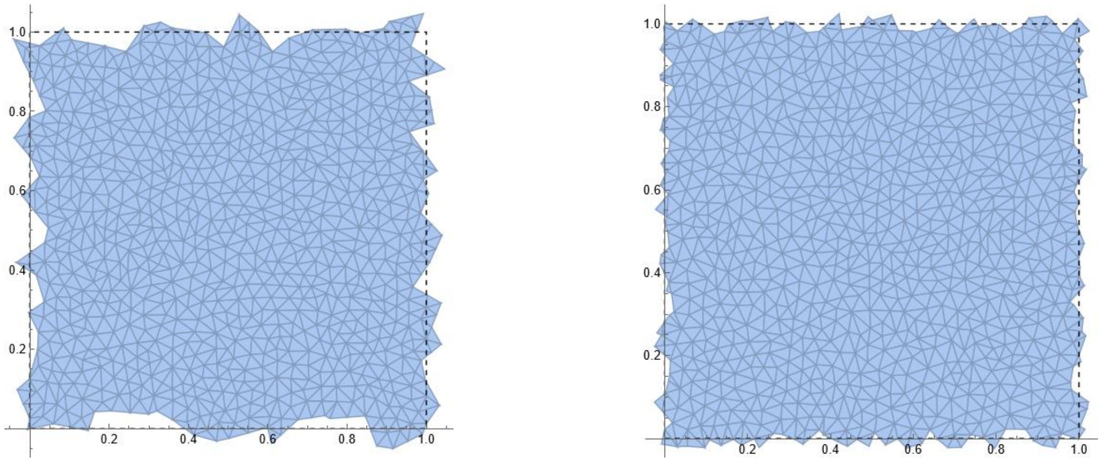

$R = 1/10$ $\qquad$ $R = 1/20$

Figura 4.3: Sezioni scabre adimensionalizzate ottenute per $\lambda = 1$ e R variabile

È evidente che per rugosità di parete R molto piccole, al limite $R \to 0$, la sezione approssima quella liscia del capitolo precedente, riconfermando i risultati già ottenuti. Viceversa, per $R \to 1$ la sezione differisce molto da quella liscia e di conseguenza i risultati divergono in maniera sostanziale da quelli già presentati.

4.2 Metodo di risoluzione e presentazione dei risultati

Il metodo risolutivo del problema e la notazione adottata per i risultati seguono in maniera identica le considerazioni riportate ai paragrafi 3.2 e 3.3, relative alla semplice sezione liscia di base.

Il carattere stocastico insito nel metodo di generazione del bordo della sezione adimensionale $\overline{\mathrm{S}}$ impone per la presentazione dei risultati un'analisi di tipo statistico. Verranno indagate 50 sezioni $\overline{\mathrm{S}}_i$ diverse con $i = 1, \dots, 50$, ognuna generata con il metodo esposto al paragrafo precedente e rappresentati i loro risultati come nuvole di punti dei casi studio ripetuti. Verrà utilizzata una rugosità di riferimento pari ad $R = 1/10$. Per i casi (H1) e (H2) viene scelto per una prima rappresentazione il valore $Br = 1$.

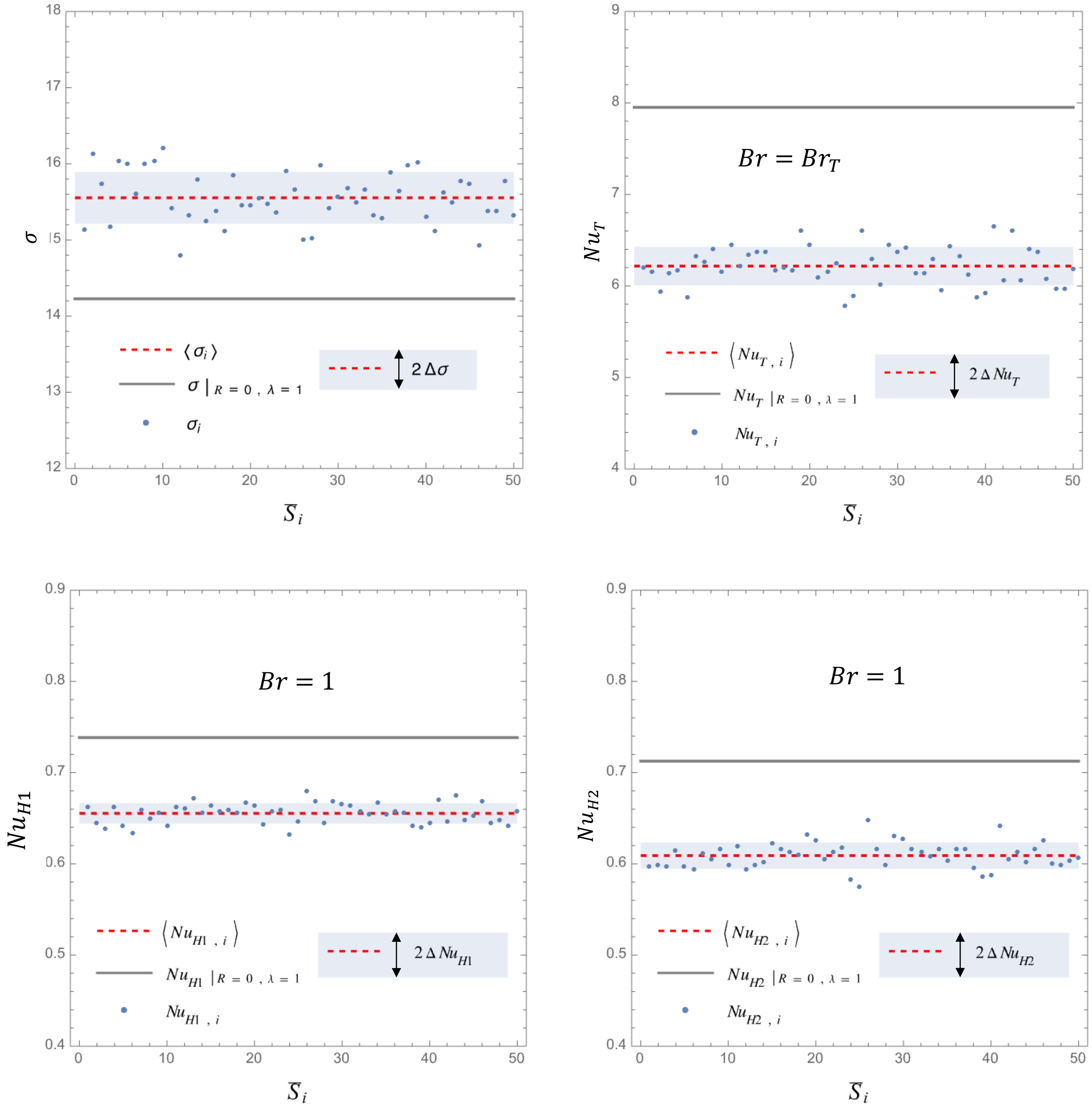


Figura 4.4: σ, Nu_T, Nu_{H1} e Nu_{H2} calcolati per 50 sezioni $\bar{S}_i$ diverse e per $\lambda = 1$, $R = 1/10$

Nella figura precedente è stato fatto uso delle grandezze statistiche di media e deviazione standard, definite come segue per N realizzazioni di una grandezza generica g:

$$\langle g_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} g_i \qquad \text{dove, in questo caso, vale: } N = 50 \tag{4.3}$$

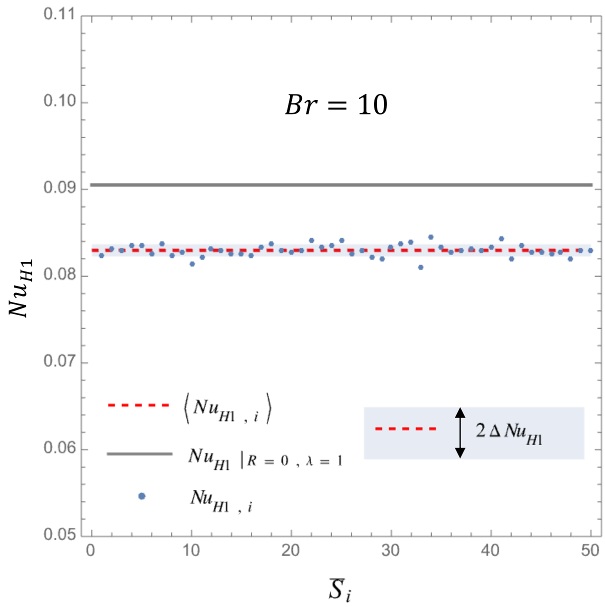
$$\Delta g = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (g_i - \langle g_i \rangle)^2} \tag{4.4}$$

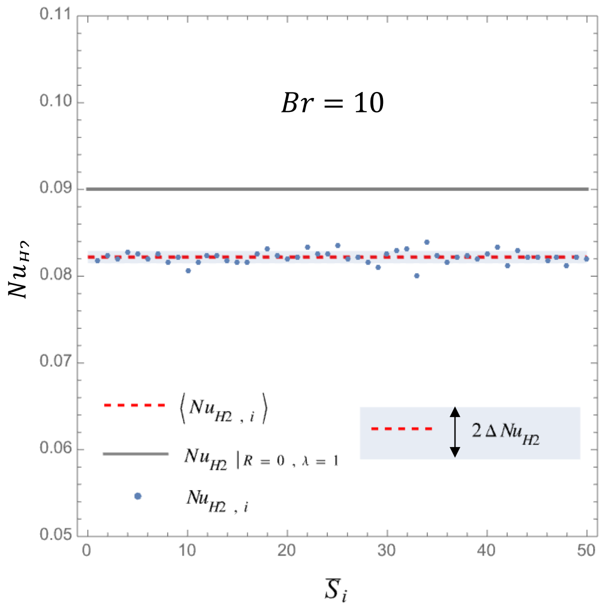
I punti color ciano rappresentano i 50 valori ottenuti per ogni grandezza in esame e le linee rosse tratteggiate le loro medie definite dalla (4.3). Contestualmente, calcolata tramite la (4.4), è raffigurata l'ampiezza della deviazione standard di ogni grandezza come una banda azzurra centrata sul valore medio. Essa ha un'ampiezza pari a $2\Delta g$ e valor medio coincidente con $\langle g_i \rangle$: rappresenta perciò la regione di spazio $\langle g_i \rangle \pm \Delta g$. Infine, le linee continue di color grigio illustrano i risultati già ottenuti per sezione quadrata liscia ($R = 0$) in Tabella 3.1.

Esaminando i grafici di Figura 4.4, si evince che, introducendo gli effetti della rugosità superficiale in un condotto quadrato ($\lambda = 1$):

- Il <u>numero di Poiseuille</u> σ, subisce un incremento di un paio di unità rispetto al caso di perimetro liscio. Da un punto di vista fisico, ciò è ascrivibile al maggior attrito a parete generato dalle asperità del condotto: aumenta il fattore d'attrito di Fanning f.
- I <u>numeri di Nusselt nei casi (T, H1, H2)</u> Nu_T, Nu_{H1} e Nu_{H2}, mostrano tutti una diminuzione rispetto al caso di bordo liscio. La geometria corrugata del perimetro, come già detto per il numero di Poiseuille, rallenta il fluido in prossimità della parete facendo contestualmente diminuire la conduttanza termica convettiva h e di conseguenza il numero di Nusselt. Questo fenomeno si verifica in misure diverse, ma per ogni tipo di condizione al contorno.

Anche in questo caso è proposta una generalizzazione dei risultati relativi a Nu_{H1} e Nu_{H2} ottenuti per valori di Br pari a $10, -1$ e -10:





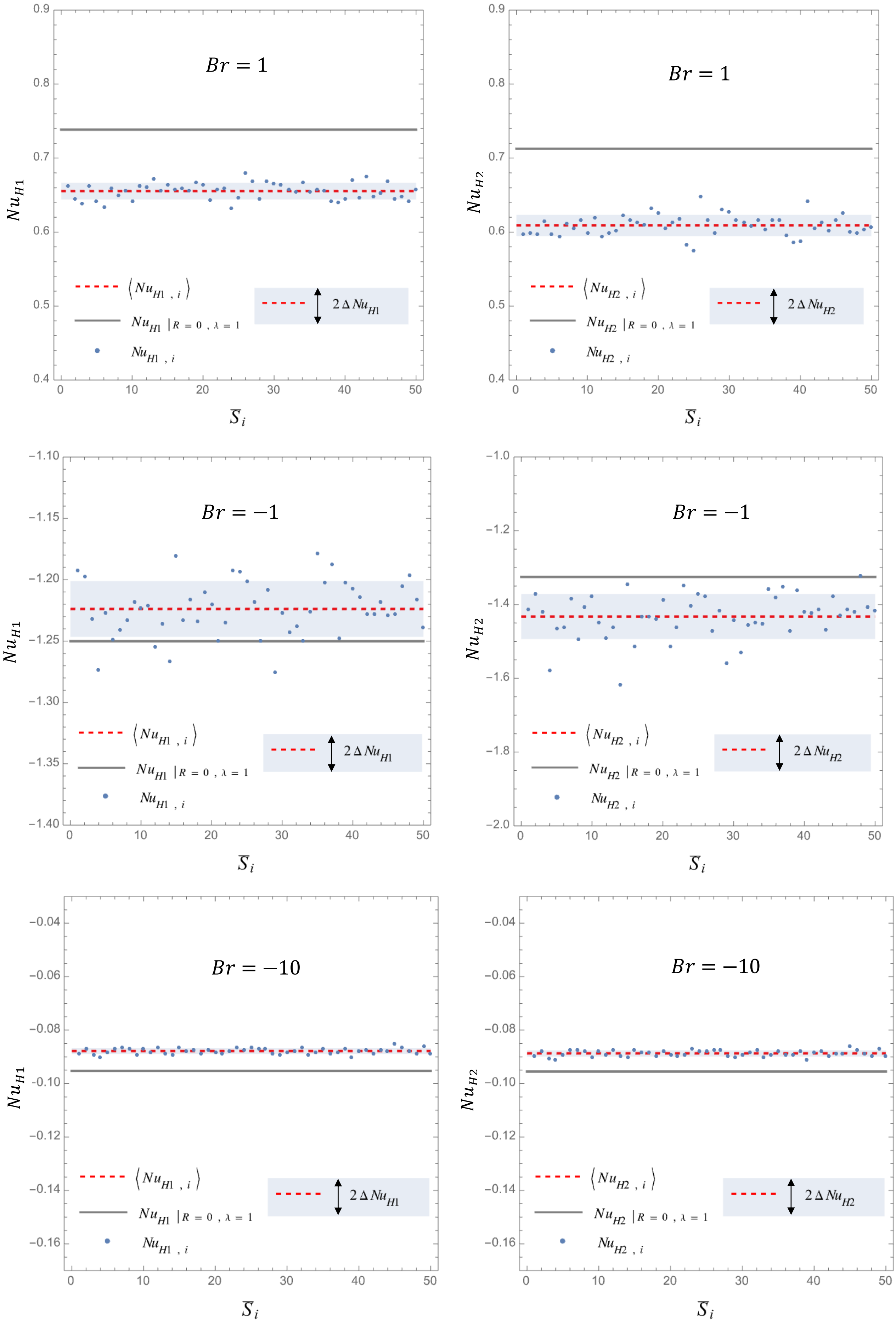
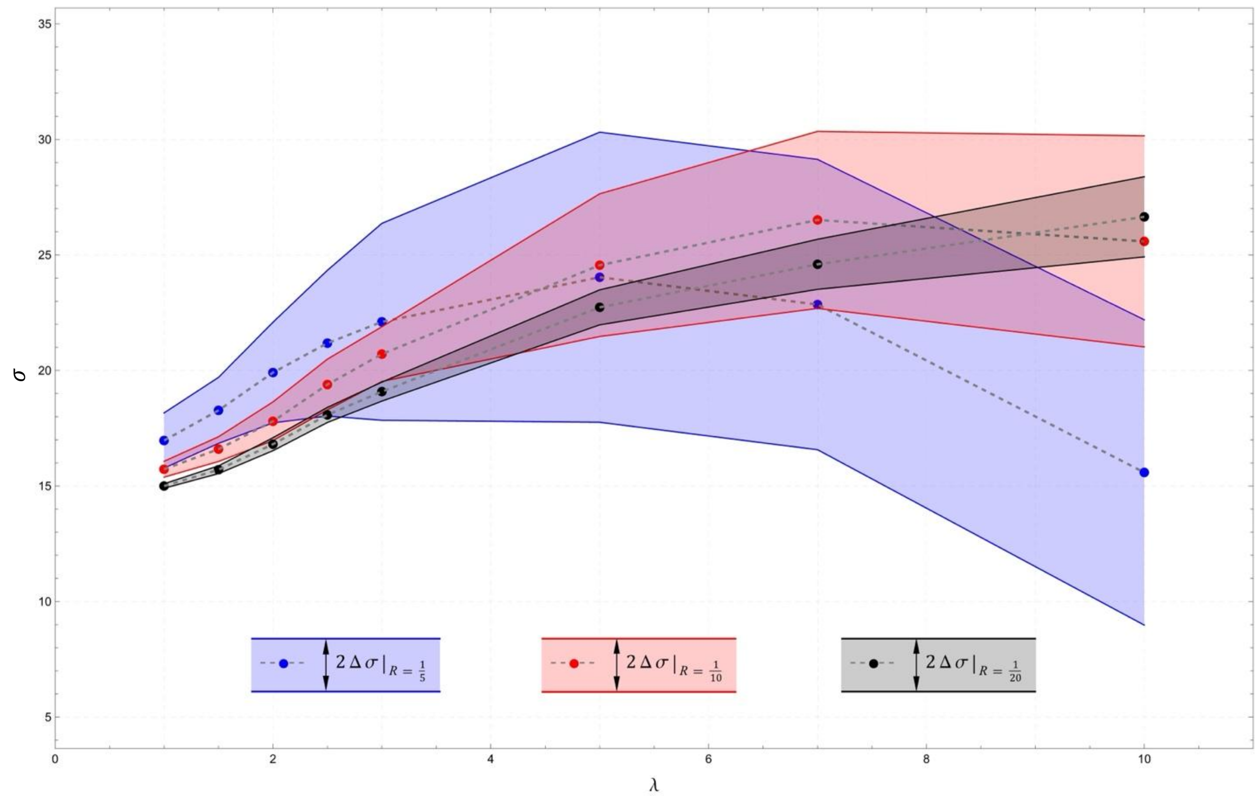


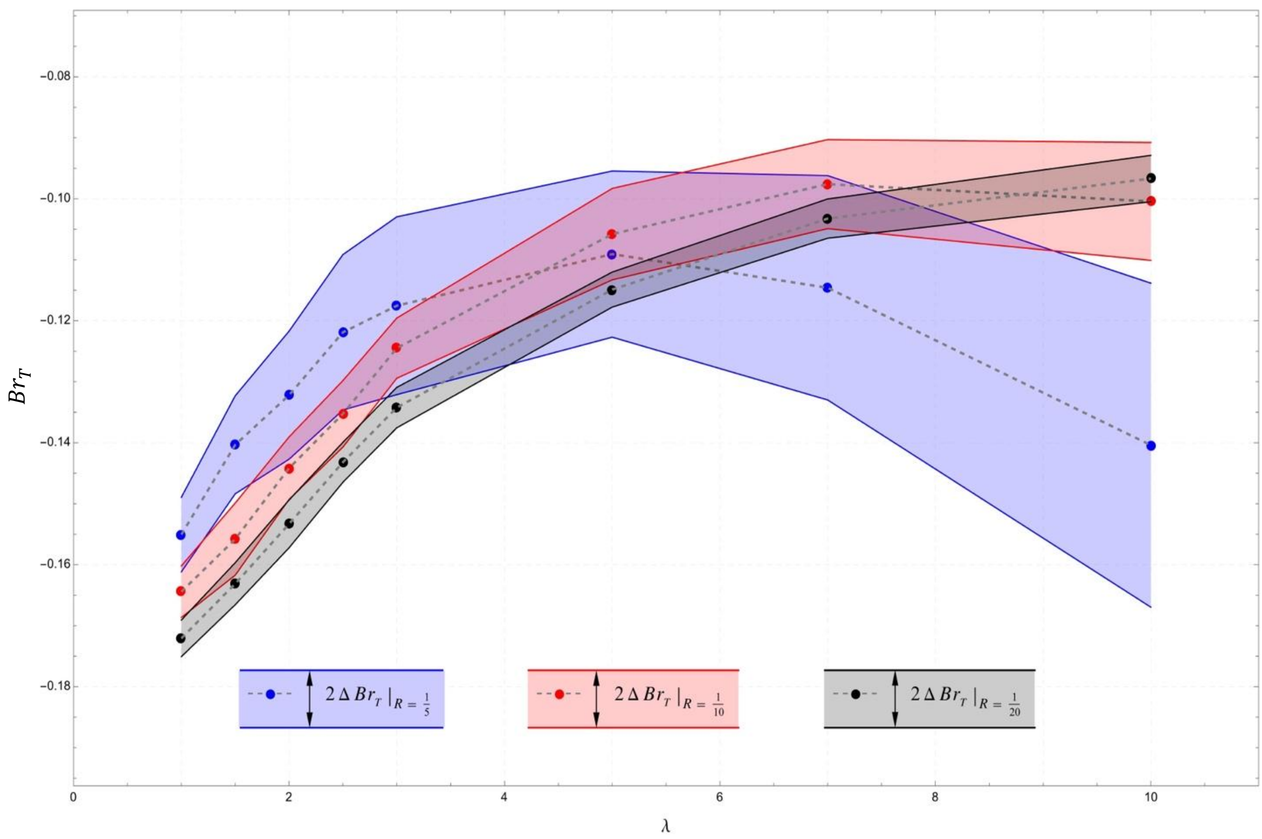
Figura 4.5: Nu_{H1} e Nu_{H2} calcolati per 50 sezioni $\bar{S}_i$ diverse e per $\lambda = 1$, $R = 1/10$ e $Br = -10, -1, 10$

I risultati fin qui ottenuti per $\sigma, Br_T, Nu_T, Nu_{H1}$ e Nu_{H2} possono essere ulteriormente descritti mediante una rappresentazione dei loro valori medi calcolati su 50 sezioni $\overline{S}_i$ diverse (linee rosse tratteggiate in Figura 4.5) al variare della terna di input (λ, R, Br). Questa raffigurazione fornisce un ulteriore e più esaustivo strumento che racchiude in sé più informazioni e mantiene al contempo una buona leggibilità del dato.
Per realizzare questo tipo di grafico vengono scelti i seguenti valori per la terna di dominio:

- $\lambda = 1\ , 1.5\ , 2\ , 2.5\ , 3\ , 5, 7\ , 10$;
- $R = \ 1/20\ , 1/10\ , 1/5$;
- $Br = -10\ , -1\ , 1\ , 10$ (influente solo sui parametri Nu_{H1} e Nu_{H2}).

L'idea è quella d'indagare la variabilità di uno dei 5 parametri d'interesse tra σ, Br_T, Nu_T, Nu_{H1} e Nu_{H2} su dominio λ fissando R e Br. Si possono così ottenere una moltitudine di rappresentazioni simili; di seguito viene dapprima proposta tale rappresentazione per σ, Br_T e Nu_T, per i quali i parametri di dipendenza sono solo (λ, R). Infine, vengono mostrati anche gli andamenti per Nu_{H1} e Nu_{H2}, per i quali la dipendenza da (λ, R, Br) è completa.
Come in Figura 4.5, anche per le figure seguenti i valori medi sono accompagnati dalle deviazioni standard dei 50 risultati calcolati su 50 sezioni $\overline{S}_i$ diverse. Nelle Figure 4.6, 4.7 e 4.8 vengono raffigurati gli andamenti dei valori medi in linea tratteggiata munita di punti (valori computati) e le ampiezze delle fasce di deviazione standard mediante regioni di colori diversi.


σ
λ
35
30
25
20
15
10
5
0
2
4
6
8
10
2 Δσ |R = 1/5
2 Δσ |R = 1/10
2 Δσ |R = 1/20


Br_T
λ
−0.08
−0.10
−0.12
−0.14
−0.16
−0.18
0
2
4
6
8
10
2 Δ Br_T |R = 1/5
2 Δ Br_T |R = 1/10
2 Δ Br_T |R = 1/20

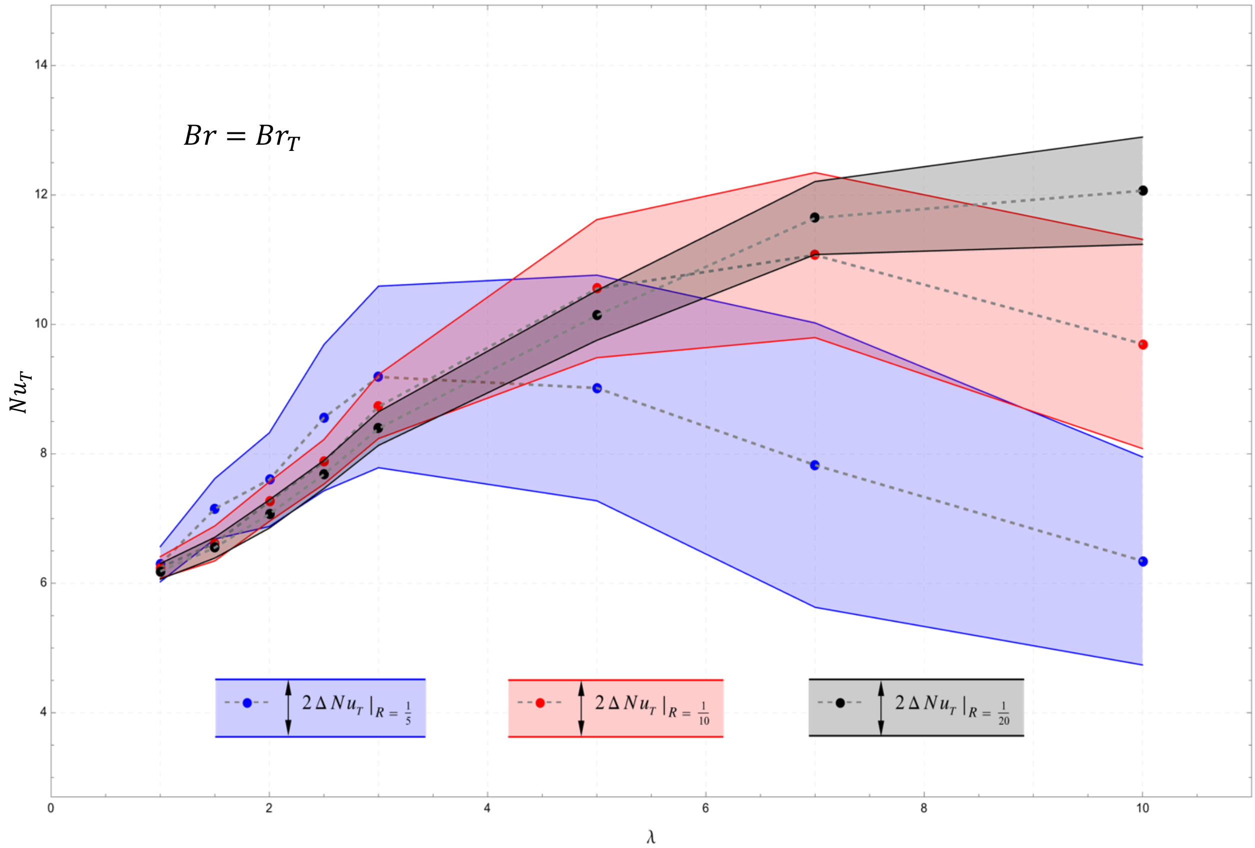


Figura 4.6: Valori medi di σ, Br_T e Nu_T (punti e linee tratteggiate) come funzioni di λ rappresentati insieme alla loro banda d'incertezza. Le grandezze vengono comparate per rugosità R diverse mediante i diversi colori.

Risulta subito evidente che per grandi R (casi blu), e per ogni λ, tutti gli andamenti presentano una maggiore variabilità quantificabile in fasce d'incertezza più ampie. Inoltre, la curva stessa (tratteggio e punti) subisce una deformazione al mutare di R maggiormente visibile per λ maggiori.

Per quanto riguarda Nu_{H1} e Nu_{H2} le rappresentazioni, come già detto, risultano più complesse perché influenzate anche dal parametro Br. Allo scopo di mostrare raffigurazioni il più semplici possibile, le seguenti figure includono i rami $Br = \pm 1$ e $Br = \pm 10$ nello stesso grafico.

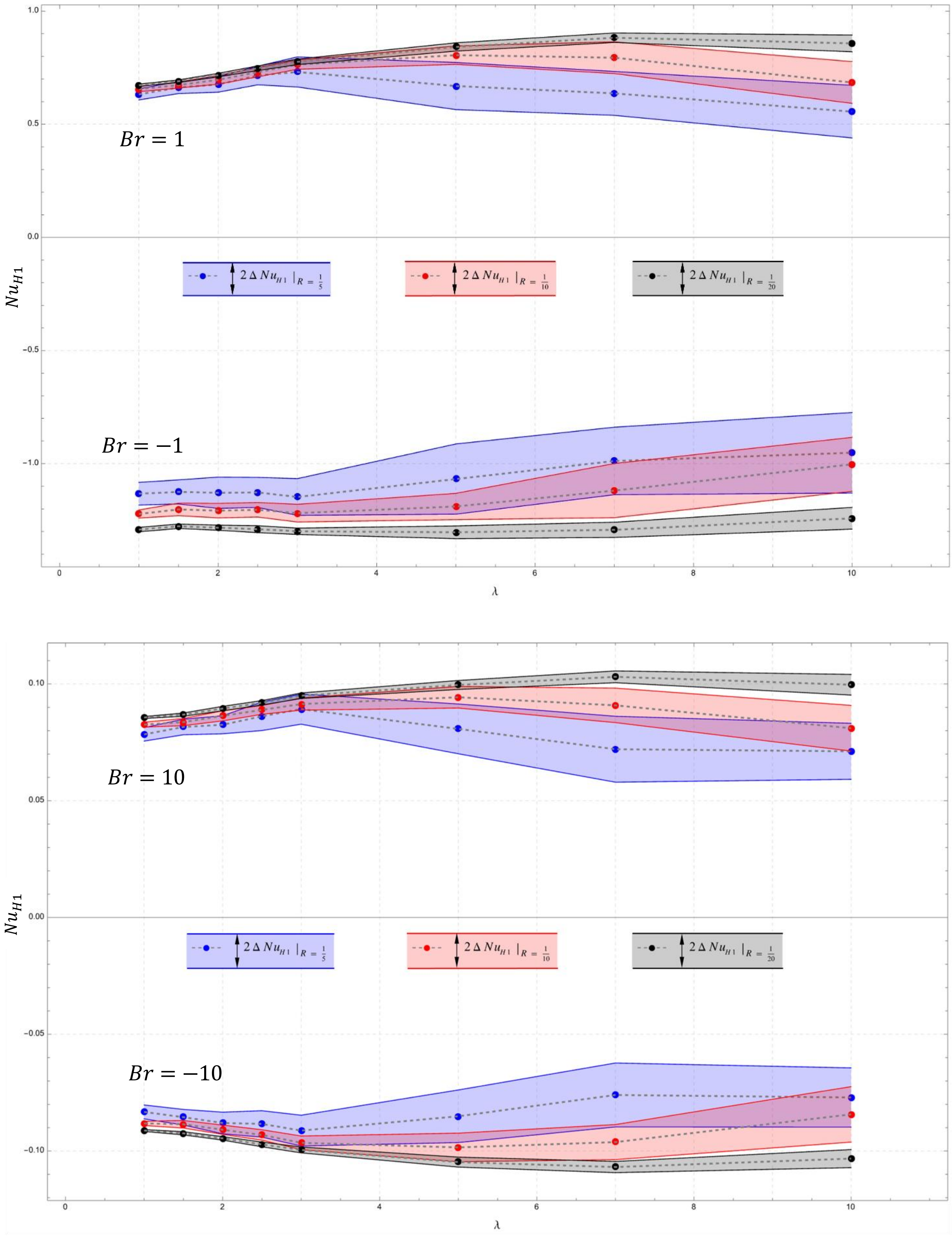


Figura 4.7: Valori medi di Nu_{H1} (punti e linee tratteggiate) come funzioni di λ rappresentati insieme alla loro banda d'incertezza. Le grandezze vengono comparate per rugosità R diverse mediante i diversi colori.

Osservando la Figura 4.7 si possono elencare alcuni comportamenti relativi a Nu_{H1}:

- I rami presentano una certa simmetria rispetto all'asse delle ascisse, eccezion fatta per il caso $Br = -1$. Più in basso verrà data una spiegazione qualitativa del perché.
- Se $|Br| \uparrow \implies |Nu_{H1}| \longrightarrow 0$, cioè i rami di Figura 4.7 tendono a schiacciarsi a ridosso dell'asse delle ascisse rimanendo però sempre simili tra di loro ed abbastanza simmetrici rispetto allo stesso asse. Aumentare $|Br|$, infatti, secondo la sua definizione (2.33), implica una diminuzione verso zero di q_{wm} e perciò, secondo le definizioni (2.31) e (2.32), una stessa diminuzione di Nu.
- Se $Br > 0$ e $R \uparrow \implies Nu_{H1} \downarrow \forall\lambda$, ciò è ascrivibile alla diminuzione di velocità nei dintorni del bordo canale dovuta all'incremento delle zone d'ansa che rallentano il fluido in prossimità della parete; questo fa contestualmente diminuire il coefficiente di scambio termico convettivo h e ciò favorisce lo scambio termico per via conduttiva con una diminuzione di Nu_{H1}.
- Se $Br < 0$ e $R \uparrow \implies Nu_{H1} \uparrow \forall\lambda$.

Infine, va condotta all'attenzione del lettore l'esistenza di una particolare zona del dominio (λ, R, Br), finora volutamente taciuta. All'interno di tale zona alcune considerazioni precedentemente riportate, come la quarta dell'elenco sopra, non valgono completamente o si complicano enormemente, per esempio, per via di problemi di natura numerica e di stabilità dei programmi di computazione utilizzati per ottenere i risultati. La zona in questione produce valori di Nu estremamente grandi in valore assoluto, ed è, $\forall(\lambda, R)$, ritenuta limitata all'intervallo di valori di Br pari a circa $[-0.4\,; -0.7]$. All'interno di questa zona Nu incontra una regione a Br cosiddetti singolari, che producono una vera e propria discontinuità di seconda specie nella curva $Nu = Nu(Br)$. Per ogni sezione a carattere stocastico presa in considerazione il Br singolare è ritenuto in prima analisi unico; l'ampiezza del range sopracitato scaturisce proprio dal fatto che le sezioni sono ogni volta diverse ed i Br imposti per la computazione non coincidono mai con il Br singolare per quella sezione.
Una tale complicazione non può venire affrontata in questa sede e per questo i valori di Br che comportano probabili singolarità sono stati esclusi dalle computazioni. Questo semplifica il problema e, inoltre, conferisce un più solido aspetto statistico ai risultati presentati.

Di simili problemi numerici si può parlare soprattutto per Nu_{H2}. In questo caso, come mostrato in Figura 4.8, i risultati ottenuti sono da ritenersi significativi solo per $\lambda \lesssim 7$ nel caso $Br = -10$. La computazione fallisce per rapporti di forma estremi e, parallelamente, perde di significato statistico per effetto delle maggiori scabrezze.
Nei casi a $Br < 0$, un approfondimento sulle rappresentazioni grafiche dei campi di temperatura adimensionale in gioco rivelerebbe una certa instabilità del codice di computazione. Ciò si riscontrerebbe, in pratica, nella presenza di linee isoterme che si aprono e chiudono su loro stesse in piccole curve chiuse, soprattutto in prossimità dei

bordi canale. Questo sarebbe dovuto al fatto che, in queste zone, coesistano due effetti che influenzano il campo di temperatura in maniera contrastante: il riscaldamento per dissipazione viscosa, fortemente presente ai bordi per via degli alti gradienti di velocità, e, di contro, il raffreddamento imposto dalla condizione H2. I due effetti in contrapposizione e l'elevato carattere locale del problema, dato dalla presenza di sezioni di forme complesse e ogni volta diverse, rendono instabile la computazione che incontra quindi più facilmente zone a Br singolari e problemi numerici locali.
Nel caso di Nu_{H2}, l'effetto della zona a Br singolari risulta maggiormente enfatizzato e, soprattutto nel caso $Br = -1$, i risultati perdono ben presto il loro significato statistico esibendo deviazioni standard addirittura fuori fondo scala, ragione per cui i rami a $Br = \pm 1$ non sono raffigurati.

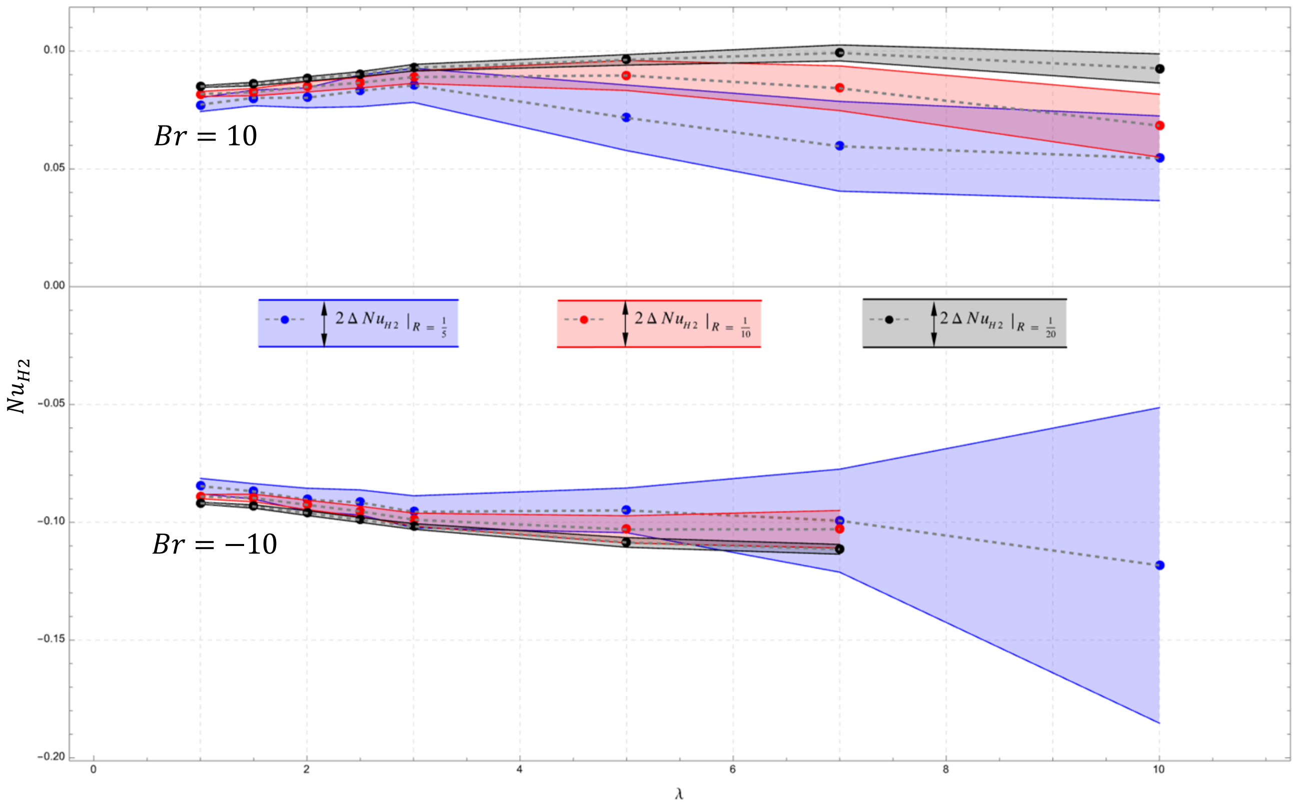


Figura 4.8: Valori medi di Nu_{H2} (punti e linee tratteggiate) come funzioni di λ rappresentati insieme alla loro banda d'incertezza. Le grandezze vengono comparate per rugosità R diverse mediante i diversi colori.

Capitolo 5:

Conclusioni e sviluppi futuri

L'analisi dei risultati di Nu_{H1} evidenzia alcune tendenze significative legate alla variazione dei parametri coinvolti, in particolare il numero di Brinkman Br e R, la scabrezza relativa di ogni lato della sezione del microcanale.
Un primo aspetto evidente è la simmetria dei rami di Nu_{H1} rispetto all'asse delle ascisse. In generale, questa simmetria si mantiene per la maggior parte dei casi analizzati, con l'unica eccezione del caso in cui $Br = -1$. Ciò suggerisce che il comportamento termico del sistema è bilanciato in condizioni normali, mentre per $Br = -1$ emergono effetti asimmetrici che potrebbero essere legati a un'inversione nei meccanismi dominanti di trasferimento del calore.
Quando si considera l'influenza del numero di Brinkman, si osserva che all'aumentare di $|Br|$, il valore assoluto di Nu_{H1} tende a ridursi progressivamente, avvicinandosi a zero. Questo fenomeno si riflette anche nella geometria dei rami, che appaiono sempre più schiacciati lungo l'asse delle ascisse, pur mantenendo una certa somiglianza tra loro.
Per comprendere questo comportamento, è fondamentale considerare il ruolo del parametro Br. Il numero di Brinkman è legato alla dissipazione viscosa e al trasferimento di calore nel fluido: un suo aumento implica una riduzione del flusso di calore alla parete (q_{wm}), riducendo di conseguenza il numero di Nusselt. In altre parole, un aumento di Br comporta una maggiore generazione di calore in seno al fluido, che tende a ridurre il gradiente termico tra la parete e il fluido stesso, limitando così l'efficacia dello scambio termico convettivo.
Se $Br > 0$, un incremento di R porta a una diminuzione del numero di Nusselt per ogni valore di λ. Questo comportamento può essere spiegato considerando l'influenza di R sulla dinamica del fluido. Un aumento di R si traduce in un rallentamento del fluido nelle regioni vicine al bordo del canale, dovuto all'intensificazione della presenza di zone d'ansa. Le zone d'ansa rappresentano regioni di ricircolo del fluido che ostacolano il trasporto convettivo del calore e favoriscono, invece, il trasferimento per conduzione. Poiché la conduzione è generalmente meno efficiente dello scambio termico per convezione, il coefficiente di scambio termico convettivo h si riduce, portando di conseguenza a una diminuzione del numero di Nusselt. Questo effetto suggerisce che, per valori positivi di Br, un incremento di R penalizza l'efficienza dello scambio termico.
Quando invece $Br < 0$, il comportamento si inverte: all'aumentare di R, il numero di Nusselt cresce per ogni valore di λ. In questo caso, la presenza di un Br negativo indica che il flusso di calore è tale da favorire il raffreddamento del fluido attraverso

la parete. Un aumento di R contribuisce a migliorare il trasporto di calore verso la parete, intensificando lo scambio termico complessivo.
Questo effetto può essere attribuito a un diverso equilibrio tra convezione e conduzione. Con $Br < 0$, il fluido tende a raffreddarsi più rapidamente vicino alla parete, e un aumento di R facilita la rimozione del calore attraverso il fluido in movimento. In questa configurazione, le zone d'ansa potrebbero avere un impatto meno negativo sul trasporto termico, favorendo un miglioramento complessivo dello scambio di calore.

Le problematiche riscontrate nell'analisi di Nu_{H2} derivano dalla combinazione di diversi fattori, tra cui effetti fisici contrastanti, instabilità numeriche e la natura locale del problema. La complessità delle sezioni geometriche e le condizioni ai bordi specifiche aggravano ulteriormente queste difficoltà, limitando la validità dei risultati computazionali a determinati intervalli di parametri. Di conseguenza, è necessario adottare un approccio prudente nella valutazione dei dati, escludendo scenari in cui le deviazioni statistiche risultano troppo elevate o in cui il codice numerico evidenzia instabilità significative. Questa selezione critica è essenziale per garantire l'affidabilità delle conclusioni tratte dallo studio e per evitare interpretazioni errate dovute a problemi computazionali.
I risultati ottenuti sono considerati affidabili solo per valori di λ inferiori a circa 7. Per rapporti di forma più estremi, la computazione risulta problematica, principalmente a causa dell'aumento delle scabrezze e delle irregolarità geometriche. Questi fattori complicano il problema numerico, rendendo difficile la convergenza delle soluzioni e portando a risultati meno attendibili. L'influenza di tali effetti diventa particolarmente evidente per $Br = -10$, dove il comportamento del sistema diventa più instabile e difficile da modellare con precisione.
Un altro aspetto critico riguarda l'analisi dei campi di temperatura adimensionale per valori negativi di Br. Le rappresentazioni grafiche, qui non riportate, mostrano chiaramente la presenza di instabilità nel codice di calcolo, che si manifestano attraverso comportamenti anomali delle isoterme. In particolare, si osserva la formazione di piccole curve chiuse nelle vicinanze dei bordi del canale, un fenomeno che suggerisce la presenza di effetti fisici contrastanti difficili da gestire numericamente. Le cause di queste anomalie risiedono in due meccanismi opposti: da un lato, il riscaldamento generato dalla dissipazione viscosa, che è particolarmente intenso nelle regioni dove il gradiente di velocità è elevato, cioè ai bordi della sezione; dall'altro, il raffreddamento imposto dalla condizione H2 con la complicità di $Br < 0$, che introduce una sottrazione di calore nelle stesse regioni. Questa combinazione di effetti opposti crea un'interazione complessa che il modello numerico fatica a rappresentare con precisione, portando a instabilità computazionali.
Un aspetto particolarmente significativo dell'analisi di Nu_{H2} è l'influenza di valori singolari di Br, che si manifestano in modo più marcato rispetto ad altri casi. In particolare, per $Br = -1$, i risultati diventano rapidamente inaffidabili poiché questo valore si avvicina alla soglia critica compresa tra circa $[-0.7; -0.4]$. Quando Br si avvicina a questa zona critica, le deviazioni standard dei risultati aumentano in modo

eccessivo, fino a uscire "fuori scala". Questo indica una perdita di affidabilità statistica delle simulazioni, rendendo i dati poco utilizzabili per un'analisi rigorosa. A causa di queste difficoltà, i rami relativi a $Br = \pm 1$ vengono esclusi dalle rappresentazioni grafiche, poiché i risultati ottenuti non sono considerati significativi.

Infine, uno sguardo più generale al dominio dei parametri in gioco (λ, Br, R) mette in evidenza l'esistenza di alcune regioni critiche in cui le tendenze generali del numero di Nusselt non sono più valide o diventano estremamente complesse da descrivere. Queste aree problematiche emergono in particolare per valori specifici di Br, dove si osservano discontinuità e comportamenti anomali che rendono difficile l'interpretazione dei risultati.
Uno degli aspetti più rilevanti riguarda l'intervallo $-0.7 \leq Br \leq -0.4$, all'interno del quale il comportamento di Nu diventa irregolare. In questa zona si registrano, per ogni sezione diversamente corrugata, valori molto elevati di Nu in valore assoluto, dovuti alla presenza di una discontinuità di seconda specie nella curva $Nu = Nu(Br)$ per la sezione considerata. Questo significa che, in prossimità di tali valori di Br, piccoli cambiamenti nei parametri di input possono causare variazioni improvvise e marcate nei risultati, complicando l'analisi del fenomeno fisico. Ogni sezione di dominio caratterizzata da una corrugazione di bordo stocastica presenta un valore specifico di Br in corrispondenza del quale il modello perde di significato statistico. In questi punti si verificano discontinuità nei risultati, rendendo difficile stabilire una tendenza chiara e coerente. L'intervallo $-0.7 \leq Br \leq -0.4$ è stato identificato come una fascia generale per queste singolarità.
Per garantire la solidità dei risultati e semplificare l'analisi del problema, i valori di Br associati alle singolarità sono stati esclusi dalle computazioni. Questa scelta metodologica è stata adottata per evitare instabilità numeriche e migliorare la significatività statistica dei risultati. L'eliminazione di queste zone problematiche consente di mantenere una maggiore coerenza nei dati ottenuti, riducendo il rischio di interpretazioni errate legate a discontinuità impreviste nel modello.

Bibliografia

[1] R. K. Shah, A. L. London, Laminar Flow Forced Convection in Ducts, in: Advances in Heat Transfer, Academic Press, 1978.

[2] A. Barletta, E. Magyari and B. Keller, Chair of Physics of Buildings, Institute of Building Technologies, Swiss Federal Institute of Technology (ETH), “Effect of Viscous Dissipation on Thermally Developing Forced Convection Duct Flows”, Zürich.

[3] A. Barletta: “Applicazioni della Fisica Termica – Argomenti Complementari di Fluidodinamica e Termocinetica”, Pitagora, 2002.

[4] A. Barletta, M. Celli, P. V. Brandão, S. Lazzari and E. Ghedini, “Shape uncertainty analysis of laminar forced convection in a round microchannel with viscous dissipation”, presented at 9h AIGE/IIETA International Conference and 19th AIGE Conference, 3-5 June 2024, Caserta, Italy.

[5] Michele Celli, Leandro Alcoforado Sphaier, Gabriele Volpi, Antonio Barletta and Pedro Vayssière Brandão, The effect of random roughness on the heat and mass transfer in microchannels: a review, submitted to Energies, Version February 27, 2025

[6] M. B. Turgay, A. G. Yazicioglu, Effect of surface roughness in parallel-plate microchannels on heat transfer, Numerical Heat Transfer, Part A: Applications 56 (2009) 497–514.

[7] G. Croce, P. D’Agaro, Numerical simulation of roughness effect on microchannel heat transfer and pressure drop in laminar flow, Journal of Physics D: Applied Physics 38 (2005) 1518–1530.

[8] A. Barletta, Fully developed laminar forced convection in circular ducts for power-law fluids with viscous dissipation, International Journal of Heat and Mass Transfer 40 (1996) 15–26.

[9] J. Koo, C. Kleinstreuer, Viscous dissipation effects in microtubes and microchannels, International Journal of Heat and Mass Transfer 47 (2004) 3159–3169.

[10] B. Xu, K. T. Ooi, C. Mavriplis, M. E. Zaghloul, Evaluation of viscous dissipation in liquid flow in microchannels, Journal of Micromechanics and Microengineering 13 (2002) 53.

[11] J. VanRij, T., T. Harman, The effect of viscous dissipation and rarefaction on rectangular microchannel convective heat transfer, International Journal of Thermal Sciences 48 (2009) 271–281.

[12] S. Mukherjee, P. Biswal, S. Chakraborty, S. DasGupta, Effects of viscous dissipation during forced convection of power-law fluids in microchannels, International Communications in Heat and Mass Transfer 89 (2017) 83–90.

[13] N. Pelevic´, T. H. van der Meer, Heat transfer and pressure drop in microchannels with random roughness, International Journal of Thermal Sciences 99 (2016) 125–135.

[14] Z. Akbari, M. A. Raoufi, S. Mirjalali, B. Aghajanloo, A review on inertial microfluidic fabrication methods, Biomicrofluidics 17 (2023).

[15] S. Prakash, S. Kumar, Fabrication of microchannels: a review, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture 229 (2015) 1273-1288.

[16] G. Croce, P. D'Agaro, Numerical analysis of roughness effect on microtube heat transfer, Superlattices and Microstructures 35 (2004) 601–616.

[17] H. Lu, M. Xu, L. Gong, X. Duan, J. C. Chai, Effects of surface roughness in microchannel with passive heat transfer enhancement structures, International Journal of Heat and Mass Transfer 148 (2020) 119070.

[18] Bruus, H. *Theoretical microfluidics*; Vol. 18, Oxford university press, 2007.

[19] Cotta, R.M.; Knupp, D.C.; Naveira-Cotta, C.P. *Analytical heat and fluid flow in microchannels and microsystems*; Vol. 164, Springer, 2016.

[20] Kandlikar, S.; Garimella, S.; Li, D.; Colin, S.; King, M.R. *Heat transfer and fluid flow in minichannels and microchannels*; elsevier, 2005.

[21] Karniadakis, G.; Beskok, A.; Aluru, N. *Microflows and nanoflows: fundamentals and simulation*; Vol. 29, Springer Science & Business Media, 2006.

[22] Park, H.S.; Punch, J. Friction factor and heat transfer in multiple microchannels with uniform flow distribution. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 2008, *51*, 4535–4543.

[23] Gunnasegaran, P.; Mohammed, H.; Shuaib, N.; Saidur, R. The effect of geometrical parameters on heat transfer characteristics of microchannels heat sink with different shapes. *International communications in heat and mass transfer* 2010, *37*, 1078–1086.

[24] Kumar, V.; Paraschivoiu, M.; Nigam, K. Single-phase fluid flow and mixing in microchannels. *Chemical Engineering Science* 2011, *66*, 1329–1373.

[25] Dixit, T.; Ghosh, I. Review of micro-and mini-channel heat sinks and heat exchangers for single phase fluids. *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 2015, *41*, 1298–1311.

[26] Khan, M.G.; Fartaj, A. A review on microchannel heat exchangers and potential applications. *International journal of energy research* 2011, *35*, 553–582.

[27] Yu, Z.Q.; Li, M.T.; Cao, B.Y. A comprehensive review on microchannel heat sinks for electronics cooling. *International Journal of Extreme Manufacturing* 2024, *6*, 022005.

[28] Jami F. Tullius, R.V.; Bayazitoglu, Y. A Review of Cooling in Microchannels. *Heat Transfer Engineering*, *32*, 527–541.

[29] Husain, A.; Kim, K.Y. Shape Optimization of Micro-Channel Heat Sink for Micro-Electronic Cooling. *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies* 2008, *31*, 322–330.

[30] Liang, G.; Mudawar, I. Review of single-phase and two-phase nanofluid heat transfer in macro-channels and micro-channels. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 2019, *136*, 324–354.

[31] Sterr, B.; Mahravan, E.; Kim, D. Uncertainty quantification of heat transfer in a microchannel heat sink with random surface roughness. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 2021, *174*, 121307.

[32] Joy, A.; Shiblemon, K.; Baby, B. Review on fabrication and experimental study of microchannel heat sinks for cooling of electronic components. *Materials Today: Proceedings* 2023, *72*, 2985–2991.

[33] Akbari, Z.; Raoufi, M.A.; Mirjalali, S.; Aghajanloo, B., A review on inertial microfluidic fabrication methods. *Biomicrofluidics* 2023, *17*.

[34] Niculescu, A.G.; Chircov, C.; Bîrca˘, A.C.; Grumezescu, A.M. Fabrication and applications of microfluidic devices: A review. *International Journal of Molecular Sciences* 2021, *22*, 2011.

[35] Maghrabie, H.M.; Olabi, A.; Sayed, E.T.; Wilberforce, T.; Elsaid, K.; Doranehgard, M.H.; Abdelkareem, M.A. Microchannel heat sinks with nanofluids for cooling electronic components: Performance enhancement, challenges, and limitations. *Thermal Science and Engineering Progress* 2023, *37*, 101608.

[36] Weaver, S.; Barringer, M.D.; Thole, K.A. Microchannels with manufacturing roughness levels 2011.

[37] Guo, L.; Xu, H.; Gong, L. Influence of wall roughness models on fluid flow and heat transfer in microchannels. *Applied Thermal Engineering* 2015, *84*, 399–408.

[38] Jia, J.; Song, Q.; Liu, Z.; Wang, B. Effect of wall roughness on performance of microchannel applied in microfluidic device. *Microsystem Technologies* 2019, *25*, 2385–2397.

[39] Sphaier, L.A.; Barletta, A.; Celli, M.; Brandão, P.V.; Ghedini, E. Laminar forced convection in circular microchannels with slip-flow: Analysis of randomly distributed roughness. *International Communications in Heat and Mass Transfer* 2025, *162*, 108615.