



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

**CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA MECCANICA
SEDE DI FORLÌ**

**INVESTIGAZIONE SPERIMENTALE DELLA
TURBOLENZA INCIPIENTE NELLA SCIA DI UN
PROFILO IDRODINAMICO CON VELOCIMETRIA AD
IMMAGINI**

**TESI DI LAUREA MAGISTRALE IN MECCANICA DEI FLUIDI E
CONTROLLI IDRAULICI LM**

Relatore

Prof. Massimo Guerrero

Presentata da

Leonardo Cecchini

Correlatore

Prof. Rui Aleixo

Sessione marzo 2025

Anno Accademico 2024/2025



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

**CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA MECCANICA
SEDE DI FORLÌ**

**INVESTIGAZIONE SPERIMENTALE DELLA
TURBOLENZA INCIPIENTE NELLA SCIA DI UN
PROFILO IDRODINAMICO CON VELOCIMETRIA AD
IMMAGINI**

**TESI DI LAUREA MAGISTRALE IN MECCANICA DEI FLUIDI E
CONTROLLI IDRAULICI LM**

Relatore

Prof. Massimo Guerrero

Presentata da

Leonardo Cecchini

Correlatore

Prof. Rui Aleixo

Sessione marzo 2025

Anno Accademico 2024/2025

1.	Introduzione	1
1.1	Sinossi.....	1
1.1.1	Contesto del lavoro di tesi.....	1
1.1.2	Obiettivi	2
1.1.3	Struttura dell'elaborato di tesi.....	2
1.2	Turbolenza: definizioni e lineamenti di base	3
1.2.1	Fluttuazioni di velocità e sforzi di Reynolds	4
1.2.2	Caratteristiche della turbolenza.....	6
	Vorticità.....	7
	Diffusività	7
	Strato limite.....	8
	Energia turbolenta.....	9
1.3	Turbolenza incipiente e instabilità	12
1.3.1	Instabilità inviscida: teorema del punto di inflessione di Rayleigh	15
1.3.2	Condizione di Fjortoft sulla vorticità.....	22
1.3.3	Instabilità viscosa: equazione di Orr-Sommerfeld.....	23
1.4	Velocimetria ad immagini	25
1.4.1	Particelle di Scattering	25
1.4.2	Sorgente luminosa.....	27
1.4.3	Tecniche di calibrazione	28
1.4.4	Processamento delle immagini	31
	Metodo PIV - Particle Image Velocimetry.....	31
	Metodo PTV - Particle Tracking Velocimetry	37
2.	Metodi.....	45
2.1	Struttura sperimentale e prove	45
2.2	Procedura per la determinazione del campo di moto.....	49
2.2.1	Identificazione delle particelle.....	49
2.2.2	Determinazione delle traiettorie.....	50

2.2.3	Calcolo delle velocità lagrangiane e euleriane.....	51
2.3	Caratteristiche del campo di moto medio	53
2.4	Campo di moto oscillatorio.....	54
2.4.1	Risoluzione spaziale e temporale dei valori istantanei	56
2.4.2	Analisi spaziale	58
	Fattore di amplificazione dell'oscillazione di velocità	59
	Ampiezza e numero d'onda dell'oscillazione di velocità	60
2.4.3	Analisi temporale	62
3.	Risultati.....	63
3.1	Campo di moto medio.....	63
3.2	Campo di moto oscillatorio, $Re = 6917$	65
3.3	Campo di moto oscillatorio, $Re = 12500$	67
4.	Discussione	71
4.1	Confronto delle prove effettuate a diverso numero di Reynolds	71
4.2	Confronto dei risultati sperimentali con le soluzioni analitiche	72
4.3	Limiti dell'apparato sperimentale	74
5.	Conclusioni	78
6.	Bibliografia	80

1. Introduzione

1.1 Sinossi

1.1.1 Contesto del lavoro di tesi

Il lavoro di tesi presentato in questo elaborato prende spunto dalle attività sperimentali condotte nel Laboratorio di Ingegneria Idraulica – LIDR dell’Università di Bologna per finalità didattiche e di ricerca.

Nell’ambito dell’insegnamento “Experimental Fluid Mechanics” tenuto dal Prof. Massimo Guerrero per il corso di Laurea Magistrale in “Ingegneria Meccanica” sono stato coinvolto nelle esercitazioni di laboratorio riguardanti moti turbolenti attorno ad ostacoli e turbolenza generata da correnti a pelo libero su fondo sabbioso. La prima tecnica di misura che ho conosciuto per determinare la velocità del fluido negli esperimenti condotti è quella ad ultrasuoni. Ho appreso, in particolare, le potenzialità di due strumenti: un profilatore, UVP (Ultrasonic Velocity Profiler) e un ADV (Acoustic Doppler Velocimeter). Entrambi si basano sul principio fisico dell’effetto Doppler. Un trasduttore invia con una determinata frequenza onde sonore nel mezzo fluido. Esse sono riflesse dalle particelle presenti nel fluido stesso e vengono ricevute da un secondo trasduttore (o dal medesimo), con un certo sfasamento. La misura di quest’ultimo consente allo strumento di determinare la velocità della particella. In particolare, l’UVP consente di determinare profili di velocità istantanei, mentre l’ADV permette di determinare l’andamento della velocità nel tempo in un piccolo volume di misura.

Proseguendo la mia esperienza al LIDR, come tirocinante e infine come tesista, ho potuto approfondire lo studio di una diversa tecnica di misura, ossia la velocimetria ad immagini. Quest’ultima mi è stata presentata dal Prof. Rui Aleixo nel corso di “Experimental Fluid Mechanics”. Il metodo di misura si basa sull’acquisizione di una sequenza di immagini di un determinato flusso mediante videocamera industriale. La regione di spazio indagata è illuminata mediante un piano di luce prodotto da un laser. Le immagini vengono processate con specifici algoritmi per identificare le particelle presenti nel fluido nei diversi frame e per determinare le traiettorie delle particelle attraverso una sequenza di immagini. Noto l’intervallo di tempo che intercorre fra un’immagine e la successiva, si determina il campo di moto. Nel corso del tirocinio, ho applicato questo metodo, in particolare la tecnica PTV (Particle Tracking Velocimetry), all’indagine della turbolenza generata in scia ad un profilo idrodinamico. Ho potuto così capire quali sono i suoi vantaggi rispetto alla tecnica ad ultrasuoni, qualora si vogliano indagare flussi a basso numero di Reynolds e le criticità che possono presentarsi nell’investigazione della turbolenza incipiente. È importante, infatti, che la frequenza di acquisizione della videocamera e la durata temporale della registrazione siano adeguate per poter osservare il fenomeno. Allo stesso

tempo, anche l'estensione spaziale della regione illuminata dal laser e la risoluzione spaziale del campo di moto devono essere adeguate.

Il percorso formativo nel suo complesso mi ha permesso di approfondire aspetti della meccanica dei fluidi solamente accennati nel corso di laurea che sono fondamentali in diverse applicazioni tipiche della ingegneria meccanica, quali l'aerodinamica dei veicoli e l'efficienza delle turbine. Inoltre, come già ho lasciato intuire, nel lavoro di tesi ho approfondito aspetti inerenti l'acquisizione e l'analisi dei dati, utili in qualsiasi contesto industriale.

1.1.2 Obiettivi

L'obiettivo della tesi è la caratterizzazione, tramite velocimetria ad immagini, della turbolenza incipiente in un flusso in galleria ad acqua attorno ad un profilo idrodinamico.

Essendo nota la soluzione analitica dell'equazione di Rayleigh, presentata al capitolo 1.3.1, si conduce un'analisi di stabilità. Basandosi su tecnica PTV, le evidenze sperimentali caratterizzate da numeri di Reynolds differenti fra loro vengono confrontate con le soluzioni analitiche da letteratura. Si stabilisce la frequenza caratteristica del fenomeno e il fattore di amplificazione dell'oscillazione di velocità per i due casi di studio. Si determinano, infine i limiti dello schema sperimentale, in relazione alla specifica applicazione, in particolare relativamente alla tecnica videografica: la frequenza di acquisizione, la durata dell'acquisizione e l'estensione della regione visibile nell'inquadratura.

1.1.3 Struttura dell'elaborato di tesi

La tesi è organizzata in 6 capitoli. In questa introduzione, oltre al piano sinottico del lavoro vengono presentati i lineamenti fondamentali della materia che sottende l'obiettivo, ovvero vengono proposti (i) lineamenti riguardanti i flussi turbolenti con particolare riguardo all'analisi linearizzata di stabilità delle strutture coerenti dovuta a *Rayleigh* (1880); (ii) i fondamenti della tecniche videografiche per la ricostruzione del campo di moto di un fluido con particolare riguardo a metodo lagrangiano che viene spesso indicato con l'acronimo PTV di derivazione anglosassone: Particle Tracking Velocimetry.

Nel capitolo 2 si descrive l'apparato sperimentale per l'acquisizione dei dati, le condizioni in cui si sono svolte le prove, in termini di velocità del flusso in ingresso alla galleria e numero di Reynolds e i parametri delle acquisizioni effettuate, fra cui frequenza di framing della videocamera, numero di immagini acquisite, tempo di acquisizione e ampiezza della regione illuminata dal laser.

Si entra in dettaglio nell'analisi dei dati. Si motiva la scelta della frequenza di campionamento e della risoluzione spaziale adottate, sulla base di considerazioni preliminari riguardanti il fenomeno di instabilità investigato.

Nel capitolo 3 si presentano, per i casi di studio indagati, i risultati delle analisi spaziale e temporale, ossia i parametri caratteristici della perturbazione di velocità nello spazio e nel tempo. Si discute, inoltre, la validità di analisi spaziale e temporale, considerando quanti periodi dell'oscillazione nel tempo e quante lunghezze d'onda nello spazio si è in grado di osservare e quanti campioni sono presenti in un periodo o lunghezza d'onda.

Nel capitolo 4 si confrontano direttamente fra loro i risultati e se ne conduce l'analisi critica in riferimento alle soluzioni analitiche presenti in letteratura e ai limiti dell'apparato sperimentale per la caratterizzazione dell'instabilità. In particolare, si evidenziano i problemi relativi al numero di particelle individuate per la ricostruzione lagrangiana delle traiettorie e all'estensione della regione di spazio illuminata dal laser.

Infine, il capitolo 5 è dedicato alle conclusioni. La lista bibliografica chiude il testo.

1.2 Turbolenza: definizioni e lineamenti di base

In fluidodinamica, un regime turbolento è un moto di un fluido in cui le forze viscosive non sono sufficienti a contrastare le forze di inerzia: il moto delle particelle del fluido che ne risulta avviene in maniera caotica, senza seguire traiettorie ordinate come accade, invece, nel caso di regime laminare. Questo si traduce nella formazione di vortici instabili di varie dimensioni, che interagiscono fra loro, e, più in generale, nel manifestarsi di fluttuazioni caotiche nei campi di velocità e pressione. Ad esempio, nel caso di moto in un condotto cilindrico, in caso di regime turbolento il fluido si muove in maniera disordinata, ma con una velocità media di avanzamento pressoché costante sulla sezione. Nel caso di moto laminare invece le traiettorie sono rettilinee ed il profilo di velocità parabolico o di Poiseuille.

Il parametro adimensionale che quantifica il rapporto tra le forze d'inerzia e le forze viscosive e permette di stabilire se un determinato flusso è laminare oppure turbolento è il numero di Reynolds. Esso è espresso come:

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} \quad (1.1)$$

U rappresenta la velocità caratteristica del campo di moto, L la scala di lunghezza caratteristica del flusso, μ e ρ rispettivamente viscosità dinamica e densità del fluido.

Nel caso di flussi incomprimibili, stante l'invarianza di ρ , solitamente viene utilizzata la viscosità cinematica, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Per l'acqua essa è circa $10^{-6} \frac{m^2}{s}$. Pertanto, si può esprimere il numero di Reynolds come:

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (1.2)$$

Per flussi in condotti cilindrici la transizione avviene per valori attorno a 3000, va considerato però che questo limite è tutt'altro rispetto ad una costante universale. Infatti, la transizione tra moto laminare e turbolento anche nel caso del moto alla Poiseuille in condotto cilindrico dipende da diverse variabili difficilmente controllabili che determinano ad esempio l'ampiezza dei disturbi presenti nel flusso prima della transizione al regime turbolento. Per cui alcuni ricercatori hanno ottenuto flussi laminari per valori più elevati del numero di Reynolds (*Pfenniger*, 1961; *Salwen & al.*, 1980; *Meseguen & Trefethen*, 2003).

1.2.1 Fluttuazioni di velocità e sforzi di Reynolds

Nella descrizione appena fornita di regime turbolento si è fatto riferimento alla fluttuazione di velocità che si origina in questo tipo di moto, ma non se ne è ancora data una definizione rigorosa. Essa è esprimibile nel seguente modo:

$$u' = u - \bar{u} \quad (1.3),$$

dove, facendo riferimento a figura 1.1, u rappresenta la velocità istantanea e \bar{u} la velocità media nel tempo.

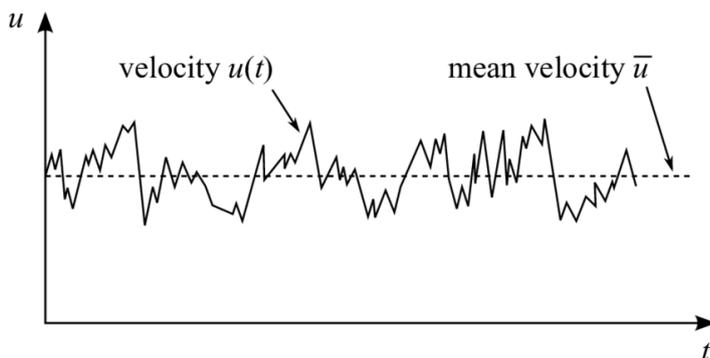


Figura 1.1. Fluttuazione di velocità in un flusso turbolento stazionario (*Versteeg & Malalsekera*, 2007)

Dal momento che le scale spaziali e temporali delle fluttuazioni di velocità sono piccole rispetto a quelle del moto medio, la risoluzione richiesta per risolvere, nel caso di regime turbolento le equazioni di Navier-Stokes, è elevatissima. Tali equazioni esprimono il bilancio della quantità di moto per un fluido. Se quest'ultimo è incomprimibile newtoniano, esse possono essere così espresse nel sistema di riferimento cartesiano ortogonale:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \nabla \vec{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (1.4)$$

dove ∇ rappresenta l'operatore gradiente, ossia $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, p la pressione e \vec{u} la velocità istantanea.

Il problema rappresentato dalla necessità di una elevata risoluzione spaziale e temporale per risolvere tali equazioni può essere superato derivando le cosiddette RANS (acronimo di Reynolds Averaged Navier-Stokes equations). Esse sono equazioni di Navier-Stokes dove le grandezze non risultano più istantanee, ma mediate in un certo periodo di tempo, sufficientemente piccolo rispetto ai fenomeni che si vogliono seguire e allo stesso tempo sufficientemente grande rispetto alle scale delle fluttuazioni turbolente. Per molte applicazioni pratiche, la sola conoscenza delle grandezze medie può essere sufficiente per la soluzione del problema. Questo approccio consente una notevole riduzione dei tempi di calcolo rispetto a simulazioni in cui vengono determinate tutte le scale della turbolenza risolvendo le equazioni di Navier-Stokes (Direct Numerical Simulation, DNS). Infatti le scale del moto medio sono molto più grandi di quelle delle fluttuazioni turbolente. Esprimendo le grandezze che compaiono nelle equazioni di Navier-Stokes, 1.4, come somma di componente media e fluttuazione e mediando nel suddetto periodo di tempo, si ottengono le RANS, così espresse in forma scalare:

$$\frac{\partial(\rho \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j}] \quad (1.5),$$

i pedici i e j rappresentano le direzioni ortogonali in un sistema di riferimento cartesiano e $\bar{\tau}_{ij}$ è il tensore degli sforzi viscosi medi, definito come segue:

$$\tau_{ij} = \mu \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} & 2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} & 2 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (1.6),$$

dove i pedici 1, 2 e 3 identificano ancora gli assi del sistema di riferimento cartesiano.

Rispetto alle equazioni di Navier-Stokes, 1.4, compare nelle equazioni 1.5 un termine aggiuntivo, ossia il tensore degli sforzi di Reynolds, preponderante in regime turbolento rispetto al tensore degli sforzi viscosi:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = -\rho \begin{bmatrix} \overline{u'_1 u'_1} & \overline{u'_1 u'_2} & \overline{u'_1 u'_3} \\ \overline{u'_2 u'_1} & \overline{u'_2 u'_2} & \overline{u'_2 u'_3} \\ \overline{u'_3 u'_1} & \overline{u'_3 u'_2} & \overline{u'_3 u'_3} \end{bmatrix} \quad (1.7).$$

Questo termine introduce nelle RANS sei nuove incognite e deve quindi essere modellato. Boussinesq (1877) ipotizza che il tensore degli sforzi di Reynolds sia proporzionale al tensore delle deformazioni, \bar{S}_{ij} , moltiplicato per una costante μ_t , detta viscosità turbolenta. \bar{S}_{ij} è così definito:

$$\bar{S}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (1.8).$$

Si riconduce così il problema della determinazione dei 6 elementi del tensore degli sforzi di Reynolds in quello del solo valore μ_t . Un modo per determinarlo è attraverso il modello k- ϵ , ossia un sistema di due equazioni alle derivate parziali per il trasporto di k, energia cinetica turbolenta ed ϵ , velocità di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta (Versteeg & Malalesekera, 2007).

1.2.2 Caratteristiche della turbolenza

Fino ad ora si è messo in evidenza come il regime turbolento sia caratterizzato da un moto caotico delle particelle di fluido e dia origine a fluttuazioni temporali della velocità e della pressione. Non sono solamente questi i tratti distintivi del moto turbolento, ma ne esistono altri importanti, come:

1. rotazionalità;
2. diffusività;
3. capacità di ridurre la resistenza di forma;
4. capacità di aumentare l'attrito in corrispondenza di una parete;
5. rapida dissipazione.

Vorticità

I flussi turbolenti, come anticipato, danno origine a vortici. Tali flussi sono infatti rotazionali, ossia possiedono una vorticità non nulla. Essa è definita come il rotore della velocità \vec{u} :

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \quad (1.9)$$

Nell'espressione 1.9, $\vec{\nabla}$ è l'operatore nabla, i.e., il vettore gradiente: $\frac{\partial}{\partial x_1} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{k}$, con \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} versori di una terna cartesiana. Il prodotto vettoriale con il campo di moto dà luogo a un terzo vettore perpendicolare ai primi due, ad esempio, per un flusso che si sviluppa sul piano x_1 - x_2 , la vorticità assume la seguente espressione:

$$\vec{\omega} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \hat{k} \quad (1.10)$$

Diffusività

La diffusività è responsabile dell'aumento della miscelazione e del tasso di trasporto di massa, quantità di moto ed energia in un flusso. L'ampia disponibilità di energia cinetica nei flussi turbolenti tende ad accelerare l'omogeneizzazione delle suddette caratteristiche. Infatti nel caso di moto turbolento le variazioni nel tempo sono governate dal termine convettivo della derivata sostanziale che compare nelle equazioni di Navier-Stokes 1.4:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim u \nabla u \quad (1.11)$$

Si può così definire la scala temporale T_t che caratterizza la diffusione turbolenta:

$$T_t \sim \frac{L}{u'} \quad (1.12)$$

In 1.12, L rappresenta la scala di lunghezza caratteristica, mentre u' è la fluttuazione di velocità. Diversamente, è la diffusività molecolare che dà luogo alle variazioni temporali osservabili nel regime laminare:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \nu \nabla^2 u \quad (1.13)$$

Si può così definire la scala temporale T_v che caratterizza la diffusione in regime laminare:

$$T_v \sim \frac{L^2}{\nu} \quad (1.14)$$

Come osservato da *Bailly & Comte-Bellot (2015)*, considerando L pari a 5 m, viscosità cinematica dell'aria ν pari a $1.5 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$ e la fluttuazione della velocità in regime turbolento u' di circa $5 \frac{cm}{s}$, si ottengono i seguenti valori delle scale temporali appena introdotte: $T_v \cong 500$ h e $T_t \cong \text{min.}$ Questo permette di capire quanto la diffusione turbolenta sia più rapida di quella molecolare. Per capire come un flusso turbolento possa portare ad un aumento dell'attrito in corrispondenza di una parete e alla riduzione della resistenza di forma, occorre introdurre la definizione di strato limite. Il caso più semplice, schematizzato in figura 1.2, fa riferimento al flusso uniforme che lambisce tangenzialmente una parete ferma di estensione infinita. Lo strato limite è il lugo di punti definiti dalle distanze dalla parete per cui la velocità uniforme passa dal valore indisturbato alla condizione di aderenza alla parete ferma (i.e., velocità nulla).

Strato limite

Il concetto di strato limite si applica al fine di limitare la regione in cui va considerata la rotazionalità del moto e per qualsiasi configurazione geometrica e valori di velocità alla frontiera (e.g., velocità indisturbate diverse tra due moti uniformi tangenti).

In figura 1.2 viene illustrato come, con il progredire del moto lungo la parete, possa verificarsi la transizione da strato limite laminare a turbolento. Le fluttuazioni di velocità che caratterizzano il moto turbolento fanno sì che strati di fluido a più alta velocità vengano portati in regioni a più bassa velocità, prossime alla parete. Questo fa sì che aumenti il gradiente di velocità in corrispondenza di essa e quindi aumentino gli sforzi di taglio, direttamente proporzionali a tale gradiente di velocità. Tale fenomeno spiega la capacità di un moto turbolento di aumentare l'attrito in corrispondenza di una parete.

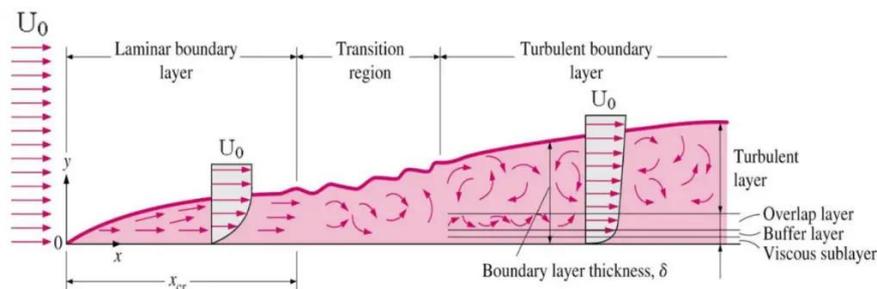


Figura 1.2. Illustrazione della transizione da strato limite laminare a strato limite turbolento in un flusso a parete (immagine da <https://www.thermal-engineering.org/what-is-boundary-layer-definition/>, febbraio 2025)

Si consideri, ora, lo strato limite che si genera nel moto di un fluido attorno ad un cilindro, schematizzato in figura 1.3. La capacità dei flussi turbolenti di promuovere lo scambio di quantità di moto fra strati di fluido contigui fa sì che lo spessore dello strato limite aumenti lungo lo sviluppo del cilindro. Tale strato limite, attorno al cilindro, è così in grado di mescolare regioni a più alta pressione anche in scia al cilindro riducendone il gradiente rispetto alla pressione del punto di ristagno. Di conseguenza diminuisce la resistenza di forma, dovuta alla differenza di pressione fra monte e valle dell'ostacolo. Lo sviluppo di uno strato limite completamente turbolento si ha per Re dell'ordine di 10^6 .

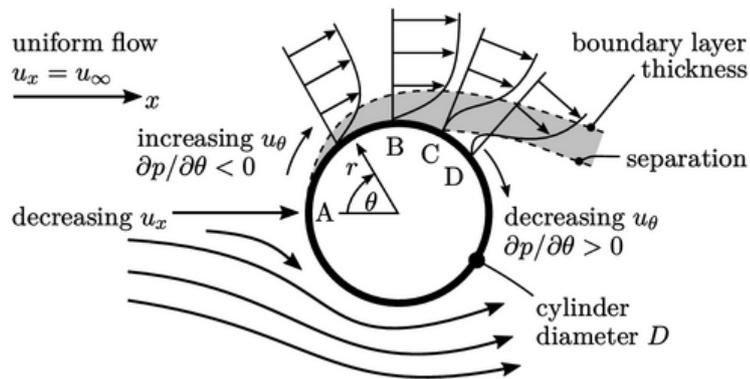


Figura 1.3. Illustrazione dello strato limite generato da un flusso attorno ad un cilindro (immagine da <https://doc.cfd.direct/notes/cfd-general-principles/boundary-layer-separation>, febbraio 2025)

Energia turbolenta

Un flusso turbolento è necessariamente alimentato da una fonte di energia eventualmente persistente e bilanciata dagli effetti dissipativi alle diverse scale e dovuti alla turbolenza stessa fino alla dissipazione viscosa che ha luogo a livello molecolare. La maggior parte dell'energia cinetica del moto turbolento è contenuta nei vortici più grandi, caratterizzati dalle più basse frequenze presenti. La loro taglia è determinata dalle dimensioni caratteristiche del dominio in cui si sviluppa la turbolenza. Tale scala è definita integrale. Nel dominio del tempo essa può essere così espressa:

$$T = \frac{\int_0^{\infty} \overline{u'u'(\tau)} d\tau}{\overline{u'u'}} \quad (1.15)$$

Nell'espressione 1.15, u' è la fluttuazione di velocità nel tempo, τ è un intervallo temporale. $\overline{u'u'(\tau)}$ è definita autocorrelazione della fluttuazione di velocità. Essa consente di quantificare la sovrapposizione del segnale di velocità u' con se stesso traslato nel tempo di τ . In figura 1.4 sono mostrati i grafici di due funzioni di autocorrelazione di u' in funzione dell'intervallo temporale τ , derivanti da segnali di velocità acquisiti con due diversi strumenti, una sonda ad ultrasuoni e un

misuratore di velocità elettromagnetico. Si osserva che la funzione di autocorrelazione ha un massimo per valore nullo di τ e decresce all'aumentare di tale intervallo temporale. Il valore che essa assume, per τ pari a 0, è 1 perché l'autocorrelazione è normalizzata rispetto al suo valore massimo ($\overline{u'u'(0)}$). La scala integrale, definita in 1.15, è l'integrale della funzione di autocorrelazione rappresentata in figura 1.4.

Nello spazio questa scala è definita in modo analogo, mediante la correlazione spaziale delle fluttuazioni in tal caso traslate di una certa distanza r :

$$L = \frac{\int_0^{\infty} \overline{u'u'(r)} dr}{\overline{u'u'}} \quad (1.16).$$

La dimensione massima che possono assumere i vortici è quella della regione di spazio in cui sono confinati. Il flusso, pertanto, è anisotropo, ossia le proprietà statistiche della turbolenza prodotta non sono invarianti rispetto a rotazioni del sistema di riferimento, su queste scale, qualora il dominio abbia dimensioni diverse nelle tre direzioni.

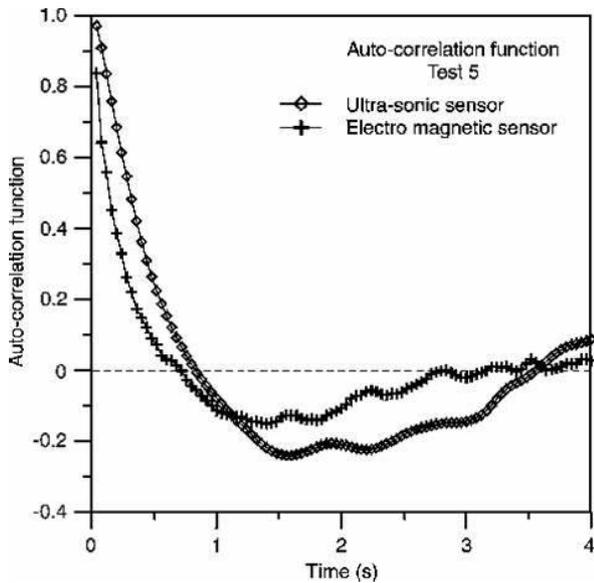


Figura 1.4. Funzione di autocorrelazione della fluttuazione di velocità u' (Rodriguez & al., 1999)

L'energia è trasferita senza essere dissipata dalle strutture appena descritte a vortici di più piccola dimensione, caratterizzati da frequenze maggiori, mediante un meccanismo dovuto a effetti puramente inerziali (Kolmogorov, 1941). Bailly & Comte-Bellot (2015) dimostrano che ciò è permesso dalla non linearità delle equazioni di Navier-Stokes. In particolare, il termine convettivo, $\vec{u}\nabla\vec{u}$, è responsabile delle diverse scale dei vortici prodotti.

La scala caratteristica delle strutture più piccole, che si originano a partire dai vortici di dimensioni maggiori, è detta scala di Taylor ed è indicata come r .

Il processo di trasferimento dell'energia continua fino a che i piccoli vortici prodotti sono dissipati per effetto della viscosità del fluido. La scala alla quale ciò accade è definita scala di Kolmogorov. Qui la turbolenza è tipicamente omogenea, ossia le sue proprietà statistiche non variano rispetto a traslazioni del sistema di riferimento, e isotropa. Di conseguenza, se la turbolenza è omogenea, la funzione di autocorrelazione nello spazio non dipende dai punti rispetto a cui è calcolata, ma solo dalla distanza fra essi.

Kolmogorov (1941), cui si deve la prima teoria statistica sulla turbolenza, postula che per numeri di Reynolds sufficientemente alti le statistiche dei fenomeni di piccola scala sono universalmente e univocamente determinate dalla viscosità cinematica ν e dal tasso di dissipazione di energia ϵ . Con solo questi due parametri, l'unica lunghezza che può essere ricavata utilizzando l'analisi dimensionale è:

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.17)$$

η , scala di lunghezza dei più piccoli vortici, rimane comunque più grande della media distanza fra le molecole del fluido, dell'ordine di 10^{-9} m per i liquidi fino a $10^{-6}/10^{-7}$ per i gas.

η e L , agli estremi dello spettro di energia turbolenta, possono differire di molti ordini di grandezza ad alti numeri di Reynolds.

La terza ipotesi di Kolmogorov è che, per un valore del numero di Reynolds sufficientemente elevato, il comportamento statistico delle scale nell'intervallo $\eta \ll r \ll L$ sia universalmente e univocamente determinato dalla scala r e dal tasso di dissipazione di energia ϵ .

I flussi turbolenti possono, quindi, essere visti come costituiti da diversi vortici, ciascuno con un diverso contenuto di energia e una propria scala spaziale e temporale. Il modo in cui l'energia cinetica viene distribuita su tutte le scale spaziali (e quindi temporali), nel caso di turbolenza omogenea e isotropa è determinato per mezzo della definizione dello spettro di energia cinetica turbolenta $E(k)$, rappresentato in figura 1.5. L'energia cinetica turbolenta k_t può essere infatti espressa come:

$$k_t = \int_k E(k) dk \quad (1.18)$$

dove k rappresenta il dominio dei numeri d'onda.

Dall'analisi dimensionale, l'unica possibile forma dello spettro di energia, che obbedisca alla terza ipotesi di Kolmogorov, è:

$$E(k) = k_0 k^3 \epsilon^{-\frac{5}{3}} \quad (1.19)$$

Dove $k_0 = 1.44$ è definita come una costante universale.

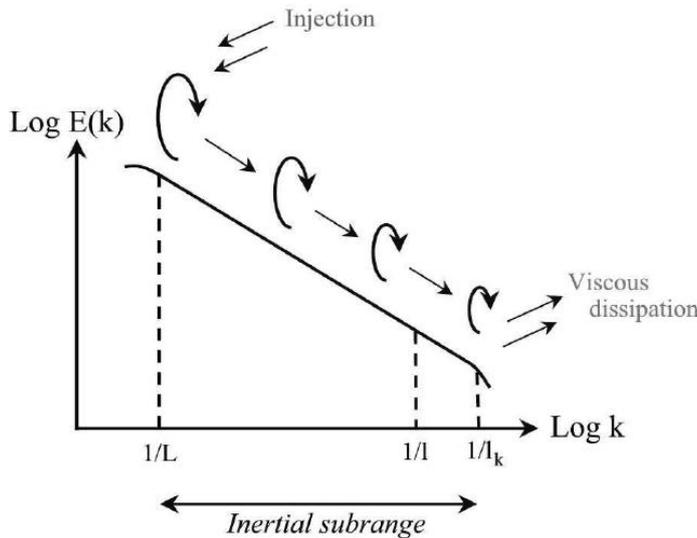


Figura 1.5. Spettro dell'energia cinetica turbolenta (Seuront, 2008)

1.3 Turbolenza incipiente e instabilità

La teoria della “energy casacde”, illustrata nel capitolo introduttivo sui flussi turbolenti, si può applicare all’evoluzione dello strato limite da laminare a turbolento lungo lo sviluppo di una parete solida, introdotta nello stesso capitolo. Generalmente tale evoluzione, che vede la produzione di grandi vortici e successivamente di strutture sempre più piccole, segue diverse fasi, illustrate in figura 1.6. Dopo la formazione dello strato limite laminare, quando il flusso appropria la parete solida (condizione 1 in figura 1.6), può nascere l’instabilità bidimensionale, nella forma di onde di Tollmien-Schlichting o di vortici di Görtler, illustrati in figura 1.7. Essi si originano quando le particelle di fluido nello strato limite che stanno al di sopra di quelle più prossime alla superficie hanno velocità maggiore e il raggio di curvatura della loro traiettoria è più piccolo. Sono soggette ad una maggiore forza centrifuga rispetto alle particelle più prossime alla superficie, penetrano quindi negli strati sottostanti, dando luogo alla perturbazione.

Al disturbo iniziale, che può essere studiato mediante la teoria della stabilità lineare che sarà introdotta nel capitolo 1.3.1, segue uno sviluppo tridimensionale dell’instabilità, caratterizzato da effetti non lineari (condizione 3 in figura 1.6). Si entra, quindi, nello spettro della turbolenza caratterizzato dalle scale di lunghezza maggiori: nascono fenomeni periodici in regioni ad alta

vorticità (condizione 4 in figura), fino ad arrivare allo sviluppo dello strato limite completamente turbolento, caratterizzato dai vortici più piccoli e dalle più alte frequenze (condizione 5 in figura). Alcune cause possono anticipare la transizione da strato limite laminare a strato limite turbolento: una di queste è la rugosità della superficie.

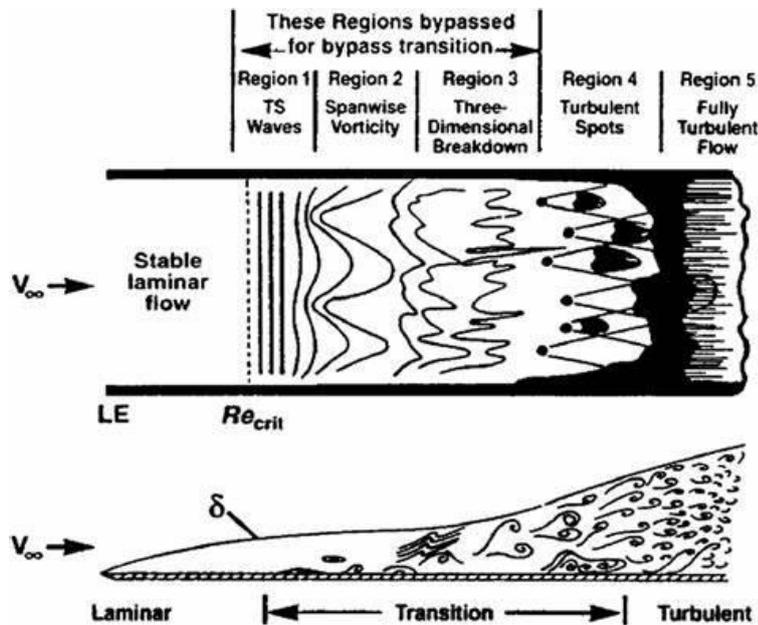


Figura 1.6. Illustrazione della transizione da strato limite laminare a strato limite turbolento (Lin & al., 2011)

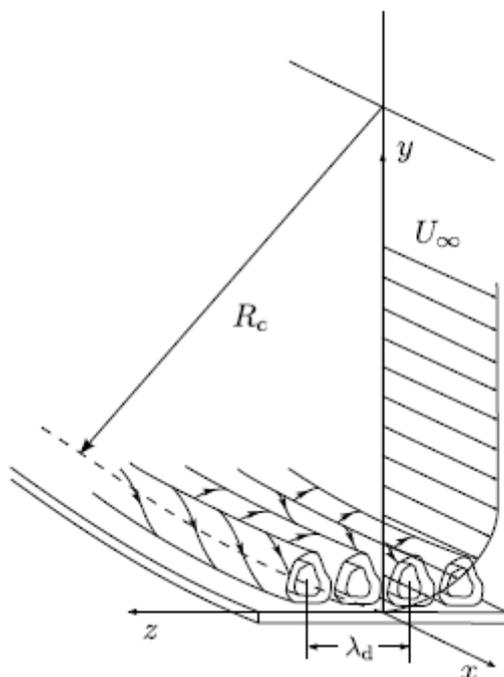
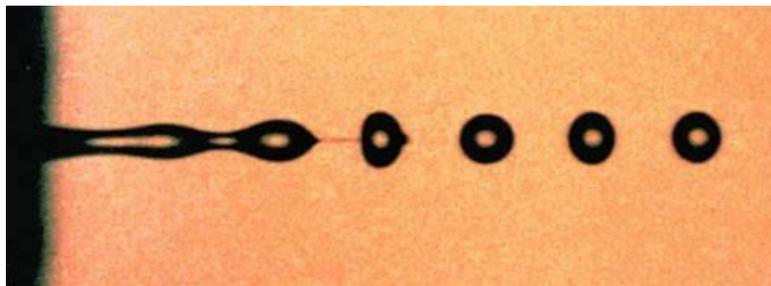


Figura 1.7. Illustrazione della formazione di vortici di Görtler nello strato limite

Nel caso di un getto in uscita da un ugello, in figura 1.8, oppure di scia generata a tergo di un ostacolo, si produce una zona di interferenza analoga allo strato limite, definita più propriamente

strato di mescolamento (*mixing layer*), essendo in presenza di strati di fluido caratterizzati da velocità diverse che scorrono gli uni sugli altri. Tali tipi di flusso, argomento di interesse di questa tesi, sono definiti *free boundary layers* o *shear layers*. L'instabilità che si genera in questi casi è stata studiata nel suo sviluppo incipiente tramite linearizzazione delle variabili e prende il nome di instabilità di Kelvin-Helmholtz. L'esempio più semplice che si può concepire, in due dimensioni, è quello di due fluidi ideali con interfaccia piana e differenza di velocità uniforme. Se l'interfaccia che separa le due regioni subisce una piccola perturbazione, particelle di fluido che erano a riposo, cioè con velocità nulla, si vengono a trovare in una regione dove regna una velocità finita, e viceversa. Questo scompenso crea un'instabilità: l'ampiezza della perturbazione diventa sempre più ampia e le particelle delle due diverse regioni si mescolano tra loro, formando dei vortici e facendo perdere definitivamente la configurazione che era presente all'inizio. La configurazione prodotta è sempre instabile, per quanto piccola possa essere la perturbazione iniziale.



1.8. Instabilità in un getto d'acqua uscente da ugello di diametro $50 \mu\text{m}$ (Cooley & al., 2001)

Un altro esempio di instabilità fluidodinamica è l'instabilità di Rayleigh-Taylor: essa si verifica all'interfaccia di due fluidi di diverse densità, quando il fluido più pesante si trova al di sopra di quello più leggero, oppure quando quest'ultimo è accelerato verso quello più denso. Se si considera il primo caso, ossia quello di un fluido denso supportato da uno più leggero, si verifica sempre instabilità a fronte di una perturbazione in corrispondenza dell'interfaccia. Se, a seguito di essa, un piccolo volume del fluido più pesante è spinto verso il basso e un ugual volume di quello più leggero è spinto verso l'alto, l'energia potenziale della nuova configurazione è minore di quella dello stato iniziale. La perturbazione così si sviluppa, inizialmente con una crescita esponenziale dell'ampiezza nel tempo e successivamente con una crescita in cui il moto del fluido non può più essere descritto, come in precedenza, da equazioni lineari. In questa seconda fase l'instabilità dipende dalla differenza di densità dei due fluidi.

Gli esempi proposti mettono in evidenza che esistono diversi tipi di instabilità, ciascuna con la propria origine fisica. L'analisi di stabilità consiste nello studio della risposta di un flusso laminare ai disturbi di piccola o moderatamente piccola ampiezza citati fin qui. L'obiettivo è stabilire se il

flusso è stabile o instabile e, nel secondo caso, analizzare come esso è soggetto a rottura evolvendo verso uno stato turbolento o un altro, spesso più complesso, stato laminare.

In un'analisi temporale, si studia l'evoluzione nel tempo della perturbazione iniziale: se questa decresce fino ad annullarsi (o comunque se la sua ampiezza rimane costante), la configurazione è stabile; se invece l'ampiezza della perturbazione cresce nel tempo, fino a tendere all'infinito, il sistema è instabile. In casi semplici, la perturbazione può essere considerata come un'onda, di lunghezza d'onda λ e numero d'onda $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$.

In un'analisi spaziale, invece, si vuole studiare l'evoluzione nello spazio di un disturbo imposto al sistema da una fonte collocata in una determinata posizione. Se a valle del disturbo la perturbazione cresce fino all'infinito, il sistema è instabile, se invece decresce e viene riassorbita dal sistema, la situazione è di stabilità. Anche in questo caso, per alcune configurazioni più semplici, il disturbo imposto può essere studiato in forma sinusoidale, con una pulsazione pari a ω e un periodo pari a $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Come osservato da *S. Chandrasekhar* (1981), i vantaggi di poter studiare perturbazioni come onde sono evidenti: l'analisi può essere condotta in tutta generalità, introducendo nel sistema perturbazioni proporzionali a $e^{i(\alpha x_1 - \omega t)}$, dove x_1 rappresenta la direzione nello spazio lungo cui l'onda si sviluppa. Una volta determinata la stabilità rispetto ad ogni singola onda con numero d'onda α , si può valutare la stabilità a fronte di ogni generica perturbazione semplicemente espandendo quest'ultima in serie di Fourier, o operando una trasformata di Fourier che la riconduca a perturbazioni sinusoidali.

1.3.1 Instabilità inviscida: teorema del punto di inflessione di Rayleigh

Nel precedente capitolo si è fatto riferimento, per lo studio della perturbazione iniziale, alla teoria inviscida e lineare della stabilità. Con il termine “lineare” si intende che i termini quadratici delle perturbazioni siano trascurabili, il che è plausibile per piccole perturbazioni rispetto al moto medio del flusso.

In questo capitolo, la teoria viene presentata in modo esteso, fino alla derivazione del teorema del punto di inflessione di Rayleigh.

Si considera la stabilità di un flusso piano non viscoso incomprimibile, caratterizzato da profilo medio di velocità $U_1 = U_1(x_2)$ e $U_2 = U_3 = 0$. In questa notazione i pedici 1, 2 e 3 indicano, rispettivamente la direzione del flusso, quella trasversale rispetto al flusso e la terza direzione non influente per il moto piano. Le equazioni che governano il problema, come messo in evidenza da *Bailly & Comte-Bellot* (2015), sono le equazioni di Eulero e di continuità linearizzate:

$$\frac{\partial u'_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p'}{\partial x_1} = 0 \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial u'_2}{\partial t} + U_1 \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} + \frac{\partial p'}{\partial x_2} = 0 \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_2}{\partial x_2} = 0 \quad (1.22)$$

In queste equazioni u'_1 e u'_2 sono le fluttuazioni di velocità nella direzione del flusso e in quella ortogonale ad essa, mentre p' è la fluttuazione di pressione.

Da 1.20 e 1.21, osservando che la perturbazione della vorticità si può esprimere come $\omega' = \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u'_1}{\partial x_2}$, si ottiene:

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \omega'}{\partial x_1} - \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} \frac{dU_1}{dx_2} - \frac{\partial u'_2}{\partial x_2} \frac{dU_1}{dx_2} - u'_2 \frac{d^2 U_1}{dx_2^2} = 0 \quad (1.23)$$

Si introduce ora la funzione di corrente ϕ , osservando che $u'_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}$, $u'_2 = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1}$ e $\omega' = -\nabla^2 \phi$.

Essendo valida l'equazione di continuità 1.22, la 1.23 può essere così riscritta:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \nabla^2 \phi - \frac{d^2 U_1}{dx_2^2} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0 \quad (1.24)$$

Come già introdotto nel capitolo 1.3, si cerca la soluzione in forma di esponenziale complesso:

$$\phi = \hat{\phi}(x_2) e^{i(\alpha x - ct)} + c. c. \quad (1.25)$$

dove c è la celerità della perturbazione, definita come $\frac{\omega}{\alpha}$, $\hat{\phi}(x_2)$ è l'ampiezza della perturbazione e $c. c.$ è il complesso coniugato di ϕ .

L'equazione 1.24 può quindi essere espressa nel seguente modo, ottenendo l'equazione di Rayleigh:

$$(U_1 - c)(D^2 - \alpha^2)\hat{\phi} - \frac{d^2 U_1}{dx_2^2} \hat{\phi} = 0 \quad (1.26).$$

In essa D^2 è $\frac{d^2 \hat{\phi}}{dx_2^2}$.

Le condizioni al contorno per l'equazione 1.26 sono:

- nel caso di flusso confinato da pareti $\hat{\phi}(x_2) = 0$ in corrispondenza delle pareti, poiché non si ha oscillazione di velocità;
- in caso di flusso non confinato da pareti $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \hat{\phi}(x_2) = 0$, che rappresenta il flusso uniforme inviscido lontano dalla perturbazione (i.e., flusso indisturbato).

L'equazione di Rayleigh, con tali condizioni al contorno, rappresenta un problema agli autovalori: è un'equazione spettrale, le cui soluzioni sono i modi, ossia le loro ampiezze e le loro frequenze. Nel caso di analisi temporale della stabilità per un dato numero d'onda reale e per una certa velocità $U_1(x_2)$, l'autovalore è la celerità c e le autofunzioni sono le corrispondenti ampiezze delle perturbazioni $\hat{\phi}(x_2)$. Si vuole determinare, per ogni possibile perturbazione, ovvero per ogni numero d'onda α , reale, il corrispondente valore di ω , numero complesso.

Nel caso, invece, di analisi spaziale della stabilità, gli autovalori dell'equazione di Rayleigh sono i numeri d'onda $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$, determinati per ciascuna pulsazione reale ω .

Se si moltiplicano tutti i termini di equazione 1.26 per $\frac{\hat{\phi}^*}{U_1 - c}$ e si integra sul dominio $D \in \mathbb{R}^2$, si ottiene la seguente equazione:

$$\int_D \hat{\phi}^* (D^2 - \alpha^2) \hat{\phi} dx_2 = \int_D \frac{d^2 U_1}{dx_2^2} \frac{|\hat{\phi}|^2}{U_1 - c} dx_2$$

Si integra per parti l'integrale a sinistra dell'uguale, assumendo che le condizioni al contorno siano compatibili con $\hat{\phi} = 0$ e $\frac{d\hat{\phi}}{dx_2} = 0$; il termine a destra viene moltiplicato e diviso per $U_1 - c^*$. Si ottiene così la seguente equazione:

$$-\int_D |D\hat{\phi}|^2 + \alpha^2 |\hat{\phi}|^2 dx_2 = \int_D \frac{\frac{d^2 U_1}{dx_2^2} (U_1 - c^*) |\hat{\phi}|^2}{|U_1 - c|^2} dx_2 \quad (1.27)$$

Esplicitando il numeratore del termine a destra dell'equazione 1.27, si ottiene:

$$-\int_D |D\hat{\phi}|^2 + \alpha^2 |\hat{\phi}|^2 dx_2 = \int_D \left[\frac{\frac{d^2 U_1}{dx_2^2} (U_1 - c_r)}{(U_1 - c_r)^2 + c_i^2} \right] |\hat{\phi}|^2 dx_2 + i \int_D \left[\frac{\frac{d^2 U_1}{dx_2^2} c_i}{(U_1 - c_r)^2 + c_i^2} \right] |\hat{\phi}|^2 dx_2 \quad (1.28)$$

A sinistra dell'uguale si ottiene un termine reale e negativo per ogni $\hat{\phi}$, mentre a destra un valore complesso: somma di parte reale e immaginaria. Perché sia vera l'uguaglianza il termine immaginario deve andare a zero. Affinché ciò avvenga c_i deve essere zero, e in tal caso il flusso è stabile; in caso contrario, se $c_i \neq 0$, il flusso è instabile.

Nella condizione di flusso instabile, essendo $c_i \neq 0$, il denominatore dell'integrando è positivo. Pertanto l'autofunzione $\hat{\phi}$ deve rispettare la seguente condizione:

$$\int_D \left[\frac{\frac{d^2 U_1}{dx_2^2}}{(U_1 - c_r)^2 + c_i^2} \right] |\hat{\phi}|^2 dx_2 = 0 \quad (1.29)$$

Perché sia rispettata la condizione imposta da equazione 1.29, e quindi perché ci sia instabilità, considerando c_i diverso da 0, $\frac{d^2 U_1}{dx_2^2}$ deve annullarsi in un determinato punto all'interno del dominio, o, in modo equivalente, il profilo di velocità $U_1(x_2)$ deve avere un punto di flesso. La vorticità relativa alla componente media della velocità, $\Omega = -\frac{dU_1}{dx_2}$, in tale punto ha un massimo.

Risolvendo il problema agli autovalori, nel caso di analisi spaziale della stabilità, si ottengono i numeri d'onda complessi associati a ciascuna pulsazione reale. Si può assumere che l'evoluzione spaziale del disturbo abbia la seguente forma:

$$\phi = \hat{\phi}(x_2) e^{-\alpha_i x_1} e^{i(\alpha_r x_1 - \omega t)} \quad (1.30).$$

Si noti che per valori di α_i negativi si ha un'amplificazione della perturbazione, mentre per valori positivi di α_i la perturbazione viene attenuata nello spazio. Pertanto α_i , parte immaginaria del numero d'onda, può essere assunto come fattore di amplificazione o attenuazione del disturbo.

Per tutti i tipi di flusso citati nel capitolo 1.3 la soluzione dell'equazione di Rayleigh è nota. *Betchov & Criminale* (1967), in particolare, hanno determinato tale soluzione per flusso in scia ad un ostacolo, schematizzato in figura 1.9.

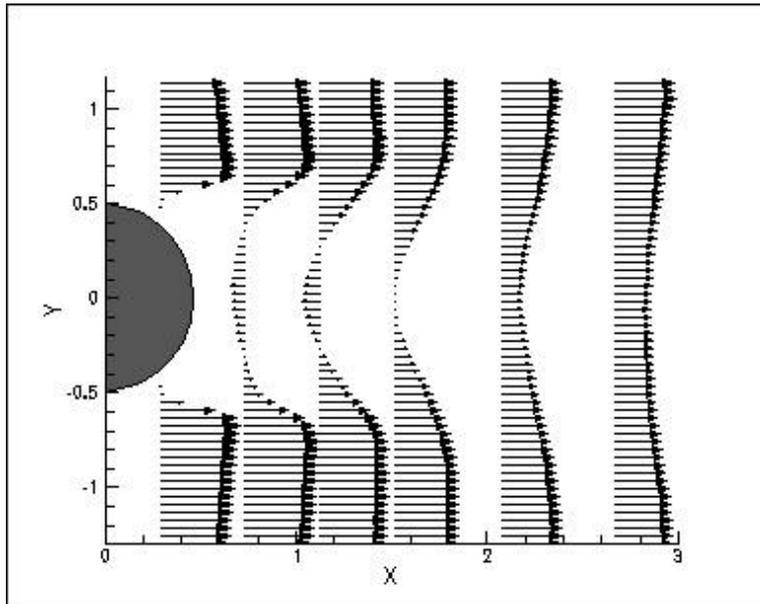


Figura 1.9. Profili della componente longitudinale della velocità media in scia ad un cilindro (immagine da <https://eng-web1.eng.famu.fsu.edu/~shih/succeed/cylinder/cylinder.htm#aerodynamic%20loadings>, febbraio 2025)

La funzione rappresentante il profilo di velocità media U_1 , in figura 1.10, è la seguente:

$$U_1 = 1 - Q \operatorname{sech}^2(x_2) \quad (1.31);$$

oppure:

$$U_1 = 1 - Q e^{-bx_2^2} \quad (1.32).$$

La soluzione riportata, in termini adimensionali e in funzione del parametro Q rappresentante il difetto di velocità, in figura 1.11, è valida per il modo simmetrico dell'oscillazione, mentre quella riportata in figura 1.12 è relativa al modo asimmetrico. Il modo simmetrico è caratterizzato da frequenze doppie rispetto a quello asimmetrico, che nell'applicazione pratica sono riconducibili alla dimensione dell'ostacolo. Tali soluzioni, in ogni caso, sono valide per regione della scia sufficientemente lontana dall'ostacolo. Quella determinata da *Papageorgiou & Smith* (1989), in figura 1.13, relativa alla scia prodotta da una lastra piana, può essere presa in considerazione per la regione prossima all'ostacolo, che si trovi ad una distanza fino ad $1/5$ della lunghezza dell'ostacolo, dallo stesso.

Il parametro adimensionale ξ , per cui sono riportate le varie curve, rappresenta la distanza della zona considerata dalla lastra ed è così calcolato:

$$\xi = x_1^{\frac{1}{3}} \quad (1.33);$$

$$x_1 = Re^{-\frac{1}{2}\alpha} X_1 \quad (1.34).$$

In 1.34, X_1 rappresenta il valore effettivo della coordinata orizzontale.

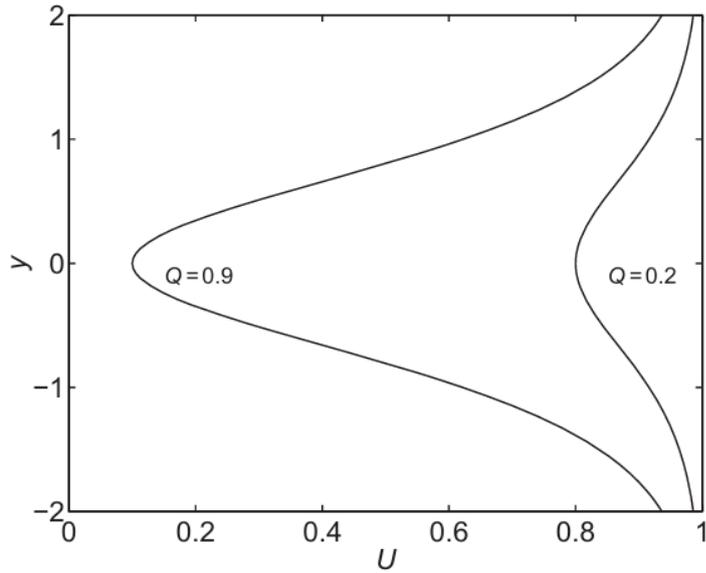


Figura 1.10. Profilo di velocità nella scia

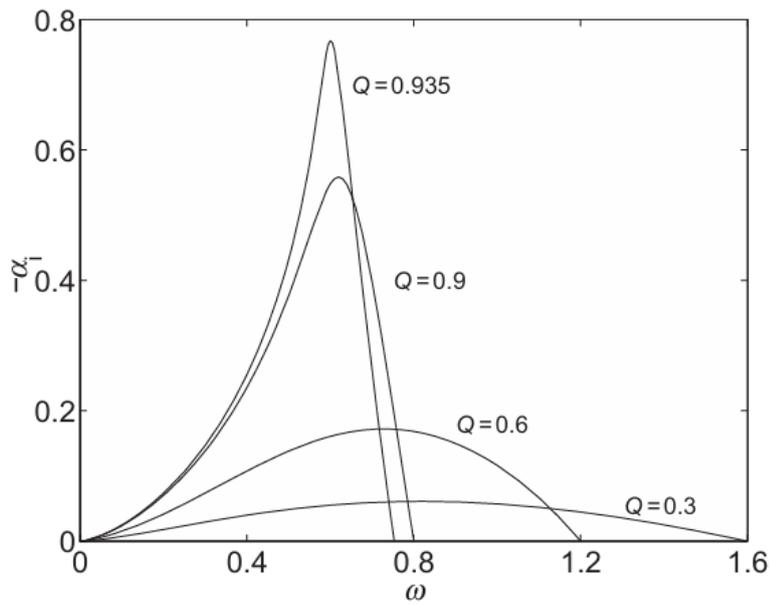


Figura 1.11. Fattore di amplificazione $-\alpha_i$ in funzione di ω per diversi valori di Q per modo simmetrico

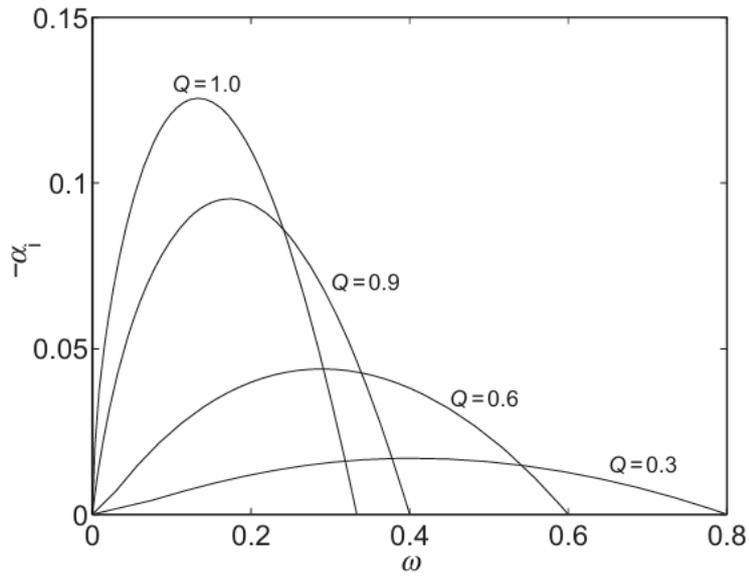


Figura 1.12. Fattore di amplificazione $-\alpha_i$ in funzione di ω per diversi valori di Q per modo asimmetrico

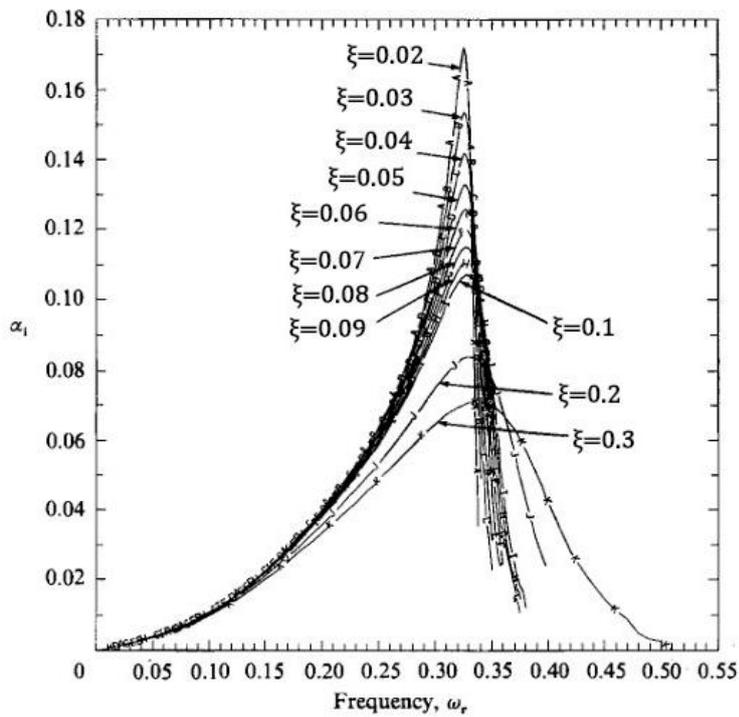


Figura 1.13. Soluzione dell'equazione di Rayleigh per scia prossima all'ostacolo

1.3.2 Condizione di Fjortoft sulla vorticità

La parte reale della relazione 1.28 è:

$$-\int_D |D\hat{\phi}|^2 + \alpha^2 |\hat{\phi}|^2 dx_2 = \int_D \left[\frac{\frac{d^2 U_1}{dx_2^2} (U_1 - c_r)}{(U_1 - c_r)^2 + c_i^2} \right] |\hat{\phi}|^2 dx_2 \quad (1.35)$$

In equazione 1.35 si sostituisce a U_1 a numeratore un particolare valore di velocità, ossia la velocità nel punto di flesso del profilo, U_{inf} , ottenendo:

$$\int_D \left[\frac{\frac{d^2 U_1}{dx_2^2} (U_{inf} - c_r)}{(U_1 - c_r)^2 + c_i^2} \right] |\hat{\phi}|^2 dx_2 = -\int_D |D\hat{\phi}|^2 + \alpha^2 |\hat{\phi}|^2 dx_2 < 0 \quad (1.36)$$

Dal momento che vale la proprietà dell'autofunzione $\hat{\phi}$ espressa in 1.29, il termine a sinistra nell'equazione 1.36 può essere così espresso:

$$\int_D \left[\frac{\frac{d^2 U_1}{dx_2^2} (U_{inf} - c_r)}{(U_1 - c_r)^2 + c_i^2} \right] |\hat{\phi}|^2 dx_2 = (U_{inf} - c_r) \int_D \frac{\frac{d^2 U_1}{dx_2^2} |\hat{\phi}|^2}{(U_1 - c_r)^2 + c_i^2} dx_2 = 0 \quad (1.37)$$

Sottraendo membro a membro fra loro le equazioni 1.35 e 1.37, si ottiene:

$$\int_D \left[\frac{\frac{d^2 U_1}{dx_2^2} (U - U_{inf})}{(U_1 - c_r)^2 + c_i^2} \right] |\hat{\phi}|^2 dx_2 = -\int_D |D\hat{\phi}|^2 + \alpha^2 |\hat{\phi}|^2 dx_2 \quad (1.38)$$

Da quest'ultima equazione deriva la condizione di Fjortoft per l'instabilità del flusso, come presentata da *Drazin* (2002):

$$\frac{d^2 U_1}{dx_2^2} (U - U_{inf}) < 0 \quad (1.39)$$

Scrivendo 1.39 in termini di vorticità $\Omega = -\frac{dU_1}{dx_2}$, si ottiene una nuova espressione della condizione di Fjortoft:

$$\frac{d\Omega}{dx_2}(U - U_{inf}) > 0 \quad (1.40)$$

In 1.40 si stabilisce che una condizione necessaria per l'instabilità è che, laddove la vorticità del flusso aumenta con lo sviluppo verticale, la velocità deve essere maggiore di quella che si ha nel punto di inflessione (dove si ha la massima vorticità); dove, invece la vorticità diminuisce, la velocità deve essere minore di quella che si ha nel punto di inflessione.

A partire dalla condizione di Fjortoft per l'instabilità si può arrivare a determinare che nel punto di flesso, la vorticità ha un massimo.

1.3.3 Instabilità viscosa: equazione di Orr-Sommerfeld

Si è fino ad ora studiata la stabilità di flussi in cui si trascura la viscosità. Per descrivere l'evoluzione delle perturbazioni lineari bidimensionali di un flusso piano viscoso, caratterizzato da un basso numero di Reynolds, si fa ricorso all'equazione di Orr-Sommerfeld:

$$\frac{\mu}{i\alpha\rho}(D^2 - \alpha^2)^2\hat{\phi} = (U - c)(D^2 - \alpha^2)\hat{\phi} - \frac{d^2U_1}{dx_2^2}\hat{\phi} = 0 \quad (1.41)$$

Essa è derivata, come l'equazione di Rayleigh, da una versione linearizzata dell'equazione di Navier-Stokes per la perturbazione del campo di velocità. La sola differenza è che ora il termine viscoso non è trascurato. ϕ può rappresentare la funzione di corrente o il potenziale. In questo secondo caso: $u'_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}$ e $u'_2 = \frac{\partial\phi}{\partial x_2}$.

L'equazione può essere scritta in forma adimensionale dividendo le velocità per velocità caratteristica U_0 e le lunghezze per una dimensione caratteristica h , assumendo questa forma:

$$\frac{1}{i\alpha Re}(D^2 - \alpha^2)^2\hat{\phi} = (U - c)(D^2 - \alpha^2)\hat{\phi} - \frac{d^2U_1}{dx_2^2}\hat{\phi} = 0 \quad (1.42)$$

Considerando un flusso confinato da pareti solide e ϕ funzione di corrente le condizioni al contorno sono date dall'annullamento delle velocità in direzione verticale e orizzontale in corrispondenza delle pareti, ossia:

$$\alpha \hat{\phi} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_1} = 0 \quad (1.43)$$

Partendo da tale equazione si può stabilire in maniera precisa quali siano le condizioni per la stabilità idrodinamica. Si tratta ancora di un problema agli autovalori, dove la velocità dell'onda c rappresenta l'autovalore e $\hat{\phi}$ l'autovettore. Se la parte immaginaria della velocità dell'onda c_i è positiva, allora il flusso è instabile e la piccola perturbazione introdotta nel sistema viene amplificata nel tempo. Le soluzioni sono generalmente calcolate per via numerica.

Per il moto alla Couette tra lastre piane e parallele, è stato dimostrato da Orszag (1971) che il flusso è instabile, cioè uno o più autovalori c hanno una parte immaginaria positiva, per alcuni numeri d'onda α quando $Re > Re_c = 5772$. Il modo neutralmente stabile, a $Re = Re_c$, è caratterizzato da $\alpha_c = 1.02056$ e $c_r = 0.264002$. Le proprietà di stabilità del sistema sono mostrate nella curva di dispersione, in figura 1.14, che riporta il fattore di amplificazione in funzione del numero d'onda per diversi numeri di Reynolds, fra cui quello per cui si ha modo neutralmente stabile.

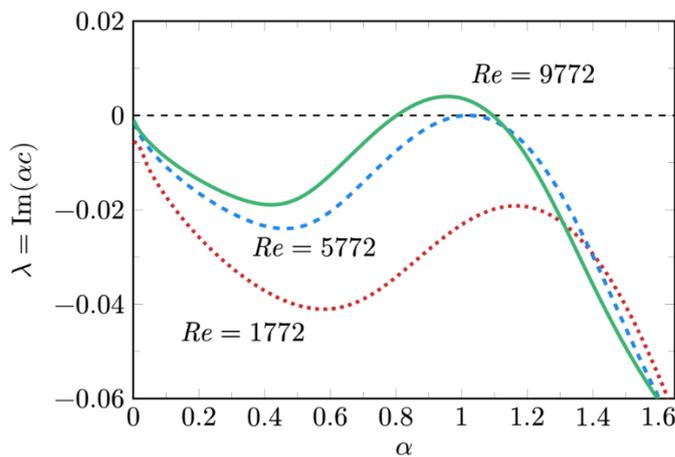


Figura 1.14. Soluzione dell'equazione di Orr-Sommerfeld per flusso alla Couette

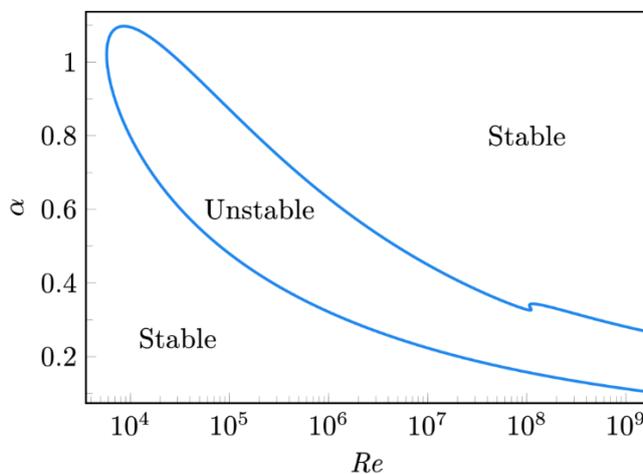


Figura 1.15. Regioni di stabilità e instabilità nel piano $Re-\alpha$

1.4 Velocimetria ad immagini

La velocimetria ad immagini è un metodo ottico non intrusivo, basato su acquisizione e processamento di una sequenza di immagini generalmente equidistanti nel tempo, per l'investigazione sperimentale del campo di moto di un fluido. Permettendo di determinare campi di velocità in due o tre dimensioni, questa tecnica si differenzia da metodi di misura che consentono di ottenere misure di velocità in un punto, come ad esempio la velocimetria laser basata su effetto Doppler o l'utilizzo di anemometro a filo caldo.

In figura 1.16 viene mostrato il setup tipico per la velocimetria ad immagini. Esso prevede l'utilizzo di un laser dotato di un sistema di lenti, solitamente cilindriche, per trasformare il raggio luminoso in un piano di luce. Tale laser può essere pulsato, qualora si vogliano acquisire due immagini con un intervallo di tempo brevissimo fra una e l'altra, sincronizzando le acquisizioni della telecamera con gli impulsi del laser. Il fluido è solitamente arricchito con particelle che riflettono la luce laser. Queste devono essere individuate nei fotogrammi successivi, così ne vengono stimati gli spostamenti ad intervalli temporali noti da cui deriva il campo di moto del fluido. La calibrazione dell'immagine, infine, consente di convertire le misure di lunghezza espresse in pixel nell'immagine in misure espresse nel sistema metrico. La calibrazione, tramite un modello della videocamera e l'immagine di un target di calibrazione, consente inoltre di eliminare eventuali distorsioni nell'immagine, come verrà meglio specificato in questo capitolo.

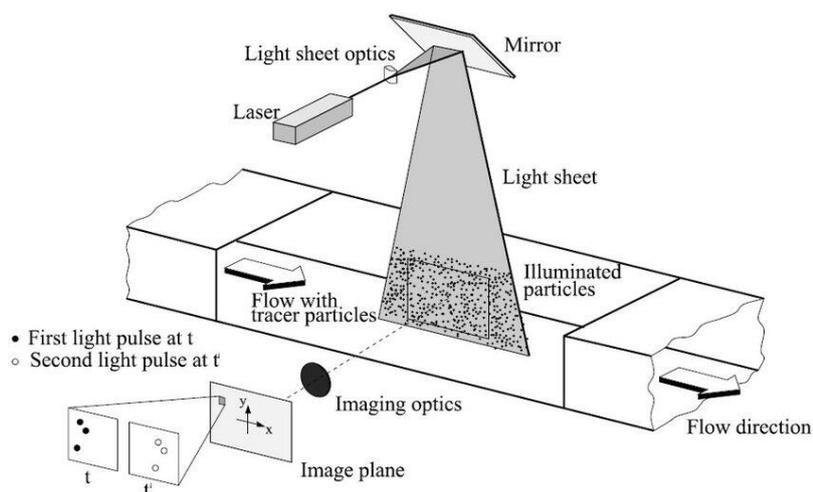


Figura 1.16. Schema di un setup tipico per velocimetria ad immagini (Raffel & al., 2007)

1.4.1 Particelle di Scattering

Le particelle che riflettano la luce laser in tutte le direzioni (i.e., Scattering) devono essere sufficientemente piccole per poter seguire fedelmente il moto del fluido. Merzkirch (1974) mette

in evidenza che la risposta della velocità della particella, u , ad un gradino di velocità U segue una legge esponenziale:

$$u(t) = U \left[1 - e^{-\frac{t}{t_s}} \right] \quad (1.44),$$

dove t_s , tempo di rilassamento, è pari a:

$$t_s = \frac{d^2 \rho}{18 \mu} \quad (1.45),$$

dove d è il diametro della particella, ρ la sua densità e μ la viscosità dinamica del fluido.

Pertanto, se si vuole rappresentare correttamente il moto del fluido le scale temporali più piccole devono essere maggiori del tempo di rilassamento (*Dabiri, 2007*). Allo stesso tempo le particelle devono essere abbastanza grandi da riflettere una quantità di luce tale da poter essere identificate nell'immagine. Esse generalmente riflettono la luce del laser secondo il fenomeno dello scattering di Mie, illustrato in figura 1.17. Ciò avviene nel caso in cui la loro dimensione sia comparabile con la lunghezza d'onda del laser, ossia se $\frac{2\pi a}{\lambda} \sim 1$, con a raggio equivalente della particella assunta come una sfera e λ lunghezza d'onda del laser. Il coefficiente di estinzione Q_e rappresenta la quantità di luce che passa attraverso la particella e viene trasmessa per lo più nella direzione del raggio incidente, cioè limitando la riflessione in tutte le altre direzioni (i.e., Rayleigh Scattering). Questo coefficiente è funzione del rapporto $\frac{a}{\lambda}$. In particolare:

$$Q_e \propto C + \cos\left(\frac{a}{\lambda}\right) e^{-k\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \quad (1.46).$$

All'aumentare del rapporto $\frac{a}{\lambda}$, quindi per un aumento della dimensione della particella, il coefficiente esponenziale in 1.46 aumenta in valore assoluto che corrisponde alla riduzione del coefficiente di estinzione. In tal caso la trasmissione attraverso la particella decresce e lo scattering aumenta (i.e., Mie Scattering) fino al regime geometrico per $\frac{2\pi a}{\lambda} \gg 1$, per cui il coefficiente di estinzione Q_e si assesta sul valore di minimo costante C .

Nel caso di liquidi si possono utilizzare particelle di ossido di titanio (TiO_2), ossido di alluminio (Al_2O_3), oppure bolle d'aria. La loro dimensione varia solitamente dai 10 ai 100 micrometri.

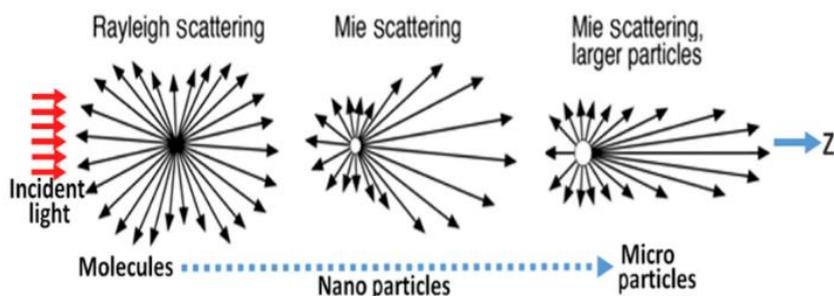


Figura 1.17. Modalità di riflessione della luce da parte di una particella in funzione della sua dimensione (immagine da <https://www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/1-difference-2-arrows-point-different-direction-3-arrows-long-short-length-q73997304>, febbraio 2025)

1.4.2 Sorgente luminosa

La sorgente luminosa utilizzata tipicamente nei sistemi moderni per l'applicazione del metodo ad immagini è il laser Nd:YAG. La lunghezza d'onda della radiazione luminosa è 532 nm, nel verde. La frequenza degli impulsi del laser può arrivare fino a 1 KHz (Dabiri, 2007).

In figura 1.18 è mostrato lo schema di un laser utilizzabile per velocimetria ad immagini. Esso presenta due cavità ottiche, all'interno delle quali si trova il mezzo attivo, che fa sì che il raggio di luce, riflesso continuamente dai due specchi alle estremità, aumenti la propria intensità ad ogni passaggio. Il mezzo attivo per il laser Nd:YAG è un cristallo di granato di ittrio e alluminio (YAG) drogato al neodimio. La cella di Pockel, posta fra uno dei due specchi e il mezzo attivo, funge da interruttore elettro-ottico. Solamente quando nel mezzo attivo si è raggiunto un livello sufficiente di energia, l'interruttore consente il passaggio dei fotoni. L'intensità luminosa aumenta così considerevolmente ad ogni passaggio della luce e si realizzano impulsi della durata di pochi nanosecondi.

L'utilizzo di due cavità permette di variare in un certo intervallo il tempo che intercorre fra due impulsi consecutivi, e quindi la risoluzione temporale. Quest'ultima può arrivare ad essere dell'ordine del microsecondo per seguire flussi molto rapidi (Gharib & Dabiri, 2000).

Più recentemente, soluzioni a costo relativamente contenuto si basano su telecamere veloci con sensore CCD o CMOS, con frame rate variabile fra 4.85 Hz fino ad 1 KHz e risoluzione fino a 2672 x 4008 pixel. In tal caso laser continui illuminano la zona d'interesse e un personal computer acquisisce le immagini direttamente sulla RAM via USB alla frequenza di framing della camera. La frequenza di acquisizione e la risoluzione spaziale ottimali sono strettamente legate al fenomeno che si vuole indagare. Il teorema di Shannon-Nyquist impone, per rappresentare correttamente un certo segnale, che esso sia campionato con una frequenza almeno doppia rispetto

alla massima frequenza del segnale stesso, sia nel tempo sia nello spazio. Inoltre, l'acquisizione deve essere sufficientemente lunga da poter osservare il fenomeno indagato.

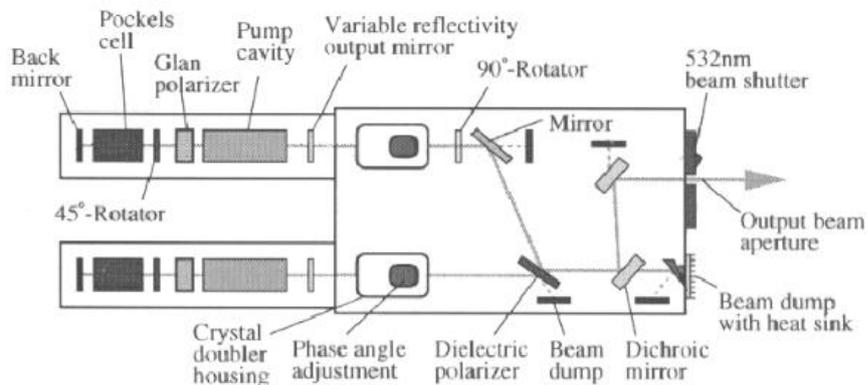


Figura 1.18. Schema di un laser con due cavità ottiche per velocimetria ad immagini (Raffel & al., 2007)

1.4.3 Tecniche di calibrazione

Qualunque tecnica basata su immagini per la determinazione di un campo vettoriale, come il campo di moto di un fluido, o scalare, richiede la calibrazione dell'immagine. Questa consente di convertire misure espresse in pixel nell'immagine in misure in unità di lunghezza, ed è necessaria per ottenere un'esatta corrispondenza fra le coordinate in pixel dell'immagine e la variabile spaziale rappresentata, come, ad esempio, la velocità.

La calibrazione può essere eseguita semplicemente utilizzando un'immagine di calibrazione che consente di stabilire il coefficiente per effettuare la suddetta conversione, oppure, in modo più articolato, tramite un modello della videocamera. Il più semplice è l'obiettivo stenopeico, schematizzato in figura 1.19. L'obiettivo della videocamera, considerato privo di lenti, è assunto come un punto (i. e., il punto O in figura 1.19).

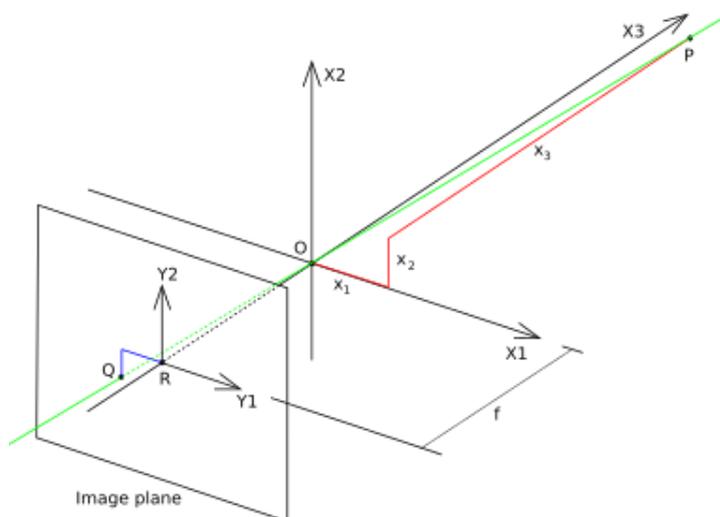


Figura 1.19. Rappresentazione di un punto nello spazio tramite obiettivo stenopeico

Note le coordinate di una serie di punti di un target di calibrazione, nello spazio tridimensionale, come ad esempio il punto P in figura 1.19, di coordinate (x_1, x_2, x_3) , e le loro coordinate nel piano dell'immagine (y_1, y_2) , l'obiettivo è determinare i parametri della funzione che permette di mappare le coordinate dei punti nello spazio nelle coordinate dei punti nell'immagine. Tale funzione è il suddetto modello della videocamera. La trasformazione fra i due sistemi di riferimento può essere così espressa:

$$w \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.47),$$

dove w rappresenta un fattore di scala e P è la matrice che rappresenta il modello della videocamera. Essa può essere come il prodotto di due matrici:

$$P = K[R \ t] \quad (1.48),$$

dove $[R \ t]$ è la matrice che consente la trasformazione dal sistema di riferimento del mondo esterno, di assi x_1, x_2, x_3 , al sistema di riferimento della videocamera. Essa comprende tre rotazioni nello spazio, contenute nella matrice R , e una traslazione, rappresentata dal vettore t . K è la matrice che consente la trasformazione dal sistema di riferimento della videocamera al sistema di riferimento dell'immagine, di assi y_1, y_2 . Quest'ultima può essere espressa come segue:

$$K = \begin{bmatrix} f_x & s & R_x \\ 0 & f_y & R_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.49),$$

dove R_x e R_y rappresentano le coordinate del centro dell'immagine, o punto principale, ossia il punto R in figura 1.19; $f_x = \frac{f}{p_x}$, $f_y = \frac{f}{p_y}$, con f distanza focale espressa nel sistema di riferimento $Ox_1x_2x_3$, ossia la distanza fra il centro ottico O e il piano dell'immagine in figura 1.19, mentre p_x e p_y rappresentano le dimensioni del singolo pixel dell'immagine, in unità di misura di lunghezza; s è il coefficiente di skew, diverso da zero qualora i due assi del sistema di riferimento dell'immagine non siano perfettamente perpendicolari fra loro. Facendo riferimento a figura 1.20, tale coefficiente può essere espresso come $f_x \tan \alpha$.

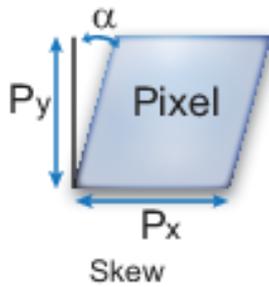


Figura 1.20. Illustrazione dello skew, ossia non esatta perpendicolarità degli assi dell'immagine (immagine da <https://it.mathworks.com/help/vision/ug/camera-calibration.html>, febbraio 2025)

I parametri nella matrice P, ossia le tre rotazioni e la traslazione che consentono di passare dal sistema di riferimento esterno a quello della videocamera e i parametri rappresentativi della trasformazione da sistema di riferimento della videocamera a quello dell'immagine, sono determinabili risolvendo un sistema di equazioni lineari in 11 incognite. Qualora si abbiano a disposizione le coordinate di 6 punti, ossia 12 equazioni, non esiste una soluzione esatta, ma se ne può trovare una approssimata con metodo dei minimi quadrati.

Questo modello non tiene conto della possibile distorsione dell'immagine perché l'obiettivo stenopeico non ha lenti. La distorsione dell'immagine, i cui possibili effetti sono mostrati in figura 1.21, è dovuta al fatto che i raggi luminosi, passando attraverso la lente, deviano maggiormente in corrispondenza del bordo esteso della lente rispetto al centro di quest'ultima.

Qualora si vogliano correggere distorsioni nell'immagine tramite questo modello, si devono introdurre equazioni aggiuntive:

$$x_{distorted} = x(1 + k_1r^2 + k_2r^4 + k_3r^6) \quad (1.50),$$

$$y_{distorted} = y(1 + k_1r^2 + k_2r^4 + k_3r^6) \quad (1.51),$$

dove $x_{distorted}$ e $y_{distorted}$ rappresentano le coordinate nell'immagine distorta, x e y quelle nell'immagine non distorta, $r^2 = x^2 + y^2$, mentre k_1 , k_2 e k_3 sono i coefficienti di distorsione.

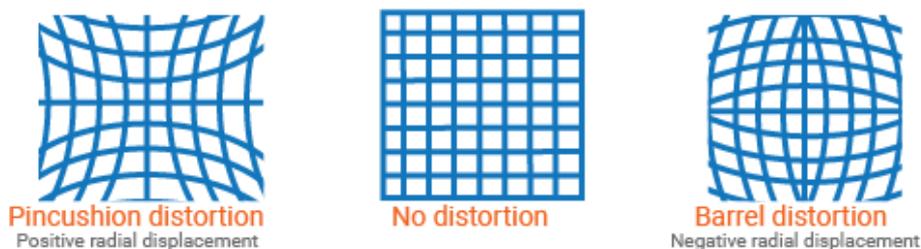


Figura 1.21. Possibili distorsioni dell'immagine (immagine da <https://it.mathworks.com/help/vision/ug/camera-calibration.html>, febbraio 2025)

1.4.4 Processamento delle immagini

In base al modo in cui vengono processate le immagini acquisite per ottenere il campo di moto si distinguono la tecnica PIV (Particle Image Velocimetry), basata su approccio euleriano, e tecniche PTV (Particle Tracking Velocimetry), basate su approccio lagrangiano.

Metodo PIV - *Particle Image Velocimetry*

La PIV, preferibile qualora la densità di particelle nel fluido sia alta e sia impossibile seguire lo spostamento delle singole particelle, si basa sulla costruzione di un campo con risoluzione corrispondente alle aree di interrogazione al cui interno si trovano gruppi di particelle che possono essere considerate in moto rigidamente le une rispetto alle altre. Al fine di determinare, con approccio euleriano, lo spostamento medio fra due immagini consecutive del gruppo di particelle, due aree di interrogazione, nelle due immagini successive, vengono cross-correlate, ottenendo la funzione di cross-correlazione $C(r, s)$ nel seguente modo:

$$R(r, s) = \frac{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [f(m, n) - \bar{f}] [g(m+r, n+s) - \bar{g}]}{\sqrt{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M [g(m+r, n+s) - \bar{g}]^2} \sqrt{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M [f(m, n) - \bar{f}]^2}} \quad (1.52),$$

dove $f(m, n)$ e $g(m, n)$ rappresentano le intensità luminose delle due aree di interrogazione rispettivamente in prima e seconda immagine, (r, s) le componenti dello spostamento nelle due dimensioni dell'immagine per cui la cross-correlazione è calcolata, \bar{f} e \bar{g} le intensità luminose medie nelle due aree di interrogazione.

Tale operazione viene eseguita diverse volte, facendo variare il valore dello spostamento in un certo intervallo: $-M < r < M$, $-N < s < N$. Le componenti dello spostamento nelle due dimensioni che consentono di ottenere il massimo della funzione di cross-correlazione, in figura 1.22, rappresentano lo spostamento medio lineare delle particelle nell'area di interrogazione considerata.

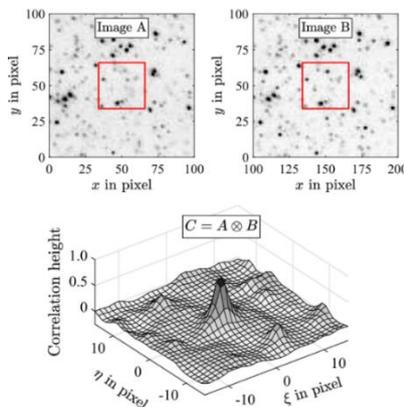


Figura 1.22. Picco della cross-correlazione fra due aree di interrogazione (Scharnowski & al., 2019)

Per rendere più veloce il calcolo della funzione di cross-correlazione, come mostrato in figura 1.23, si può calcolare la sua trasformata di Fourier. Essa per il teorema di convoluzione è equivalente alla cross-correlazione delle trasformate di Fourier delle funzioni rappresentati due aree di interrogazione dell'immagine. Il numero delle operazioni, come riportato da *Raffel & al.* (1998), si riduce da $O[N^2]$ a $O[N\log_2(N)]$.

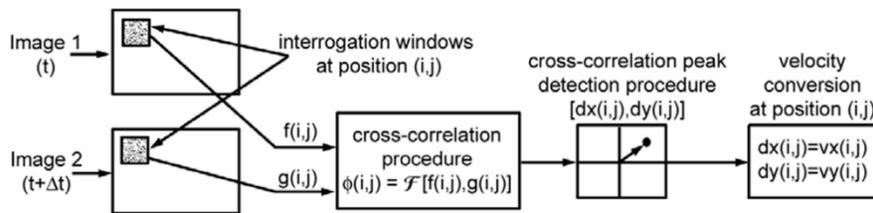


Figura 1.23. Operazione di cross-correlazione fra due aree di interrogazione mediante trasformata di Fourier (Dabiri, 2007)

Data la definizione di funzione di cross-correlazione in 1.52, è possibile definire un termine di perdita di correlazione, F_I , per via del movimento nel piano di luce delle particelle che ricadono all'interno dell'interrogation area:

$$F_I(r, s) = \left(1 - \frac{|r|}{M}\right) \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) \quad (1.53)$$

Questo coefficiente è tanto più basso quanto più piccolo è il numero di particelle di un certo pattern che rimane nell'area di interrogazione fra un frame e il successivo. Ciò si può verificare in presenza di elevati spostamenti delle particelle, come illustrato in figura 1.24, oppure per via di gradienti di velocità all'interno dell'IA, come può accadere nel caso di flussi a parete o shear flows. Il picco della funzione di cross-correlazione diventa meno evidente, la distribuzione diventa più ampia e nasce un errore di bias nella misura dello spostamento: essa si centra attorno ad un valore più basso, poiché le particelle del pattern che realizzano gli spostamenti più piccoli fra un'immagine e l'altra sono quelle che più probabilmente restano all'interno della finestra di interrogazione. Possono anche presentarsi più picchi di correlazione.



Figura 1.24. Riduzione del numero di coppie di particelle che rimangono all'interno dell'area di interrogazione, a seguito di elevati spostamenti (Dabiri, 2007)

L'effetto dello spostamento delle particelle nell'area di interrogazione sull'errore di bias appena descritto è stato quantificato da *Raffel & al.* (1998) per mezzo di simulazioni numeriche. I risultati sono riportati in figura 1.25. Si osserva che aree di interrogazione di dimensione maggiore limitano questo effetto.

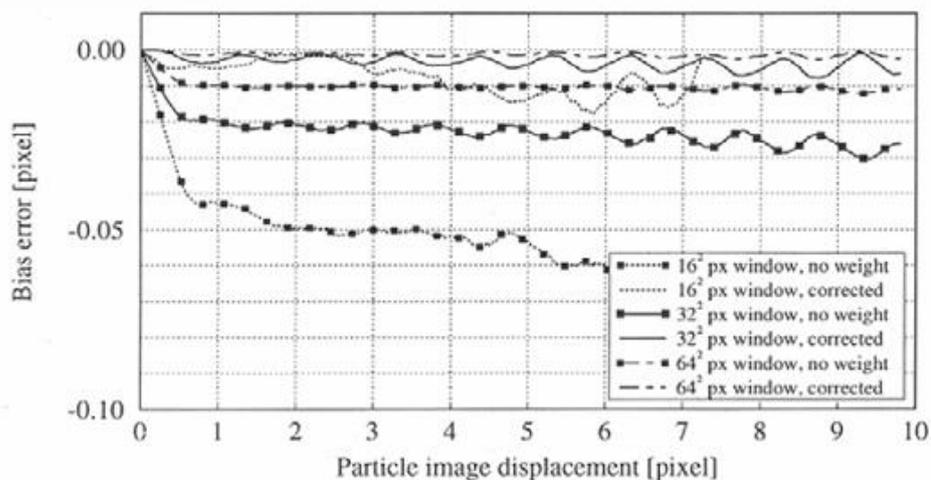


Figura 1.25. Effetto dello spostamento delle particelle nell'immagine su bias dello spostamento misurato per diverse dimensioni della finestra di interrogazione

L'effetto dello spostamento delle particelle sull'altro tipo di errore che caratterizza la misura, ossia quello casuale, è ancora stabilito da *Raffel & al.* tramite simulazioni. I risultati sono mostrati in figura 1.26.

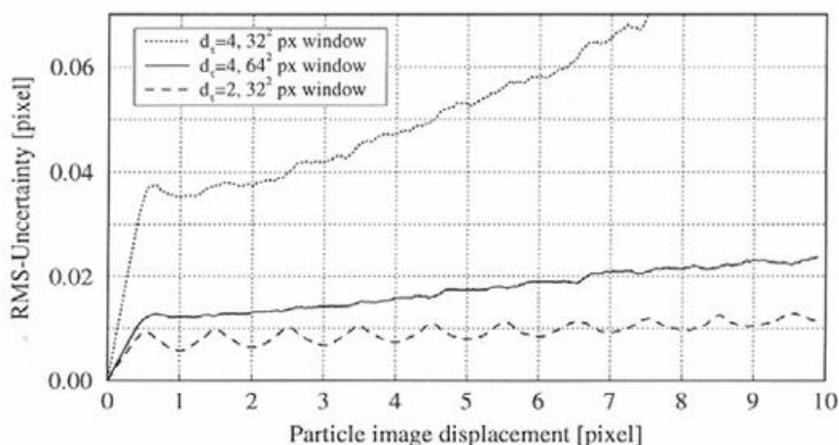


Figura 1.26. Effetto dello spostamento delle particelle sull'errore casuale di misura per diversi valori di diametro della particella nell'immagine e dimensione della finestra di interrogazione

La tecnica definita *Multiple pass PIV* trae vantaggio del fatto che per piccoli spostamenti, inferiori a 0.5 pixel, l'incertezza di misura è fortemente ridotta. Tale metodo prevede di: eseguire una prima correlazione fra due aree di interrogazione delle stesse dimensioni in due immagini successive; sulla base del risultato ottenuto si eliminano gli outlier nella finestra di interrogazione, sostituendoli con un'interpolazione dei dati vicini ad essi; si impone a questo punto un off-set fra le due finestre pari all'intero più vicino al valore di spostamento determinato, così che lo spostamento residuo sia una frazione di pixel; si cross-correlano le due aree di interrogazione, da cui si ottiene un nuovo valore dello spostamento, che viene assunto come nuovo off-set fra le due finestre. Si ripete questo processo fino a che il valore dello spostamento calcolato arriva a convergenza, ossia non ha variazioni superiori al pixel.

La tecnica appena illustrata si deve a *Westerweel & al. (1997)*, i quali considerano l'effetto del limitato numero di particelle presenti nella finestra di interrogazione e del numero di pixel presenti in tale area sull'errore casuale. I benefici della *Multiple pass PIV*, in termini di riduzione del rumore e possibilità di rendere più evidente il picco della funzione di cross-correlazione sono tanto più evidenti quanto più piccola è la fluttuazione dello spostamento, minore di 0.5 pixel, ossia quanto meno la turbolenza è intensa, definendo l'intensità della turbolenza come il rapporto fra la deviazione standard della velocità nel tempo e il suo valore medio. Sulla base di simulazioni, viene messo in evidenza da che lo spettro della fluttuazione di velocità è determinato correttamente su quasi tutto l'intervallo di numeri d'onda per intensità di turbolenza del 20 %, anche senza l'applicazione dello spostamento relativo fra le finestre. Per la più piccola intensità di turbolenza simulata, invece, pari al 2 %, lo spettro viene ricostruito correttamente solo per i più piccoli numeri d'onda.

La tecnica appena descritta, permettendo di mantenere sufficientemente alto il numero di particelle di un dato pattern che rimangono all'interno dell'IA fra un frame e il successivo, risulta utile anche per contrastare l'errore di bias sulla misura dello spostamento, dovuto alla riduzione del fattore F_I .

Particelle all'interno dell'interrogation area non distribuite omogeneamente, gli effetti della turbolenza e la variazione dell'intensità della luce del laser durante l'acquisizione possono portare alla presenza, come già accennato, di outlier nel campo di moto che devono essere eliminati. Un possibile metodo è il seguente: per ciascun vettore in ogni nodo della griglia regolare, in figura 1.27, si determina la media delle velocità negli 8 punti del campo di moto vicini a quello considerato $\mu_U(i, j)$ e la relativa varianza $\sigma_U(i, j)$:

$$\mu_U(i, j) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N U_{2D}(n) \quad (1.54);$$

$$\sigma_U^2(i, j) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\mu_U(i, j) - U_{2D}(n))^2 \quad (1.55).$$

Per il punto considerato, si valuta se è valida o meno la seguente condizione:

$$|\mu_U(i, j) - U_{2D}(i, j)| < \epsilon_{th} \quad (1.56),$$

con:

$$\epsilon_{th} = C_1 + C_2 \sigma_u(i, j) \quad (1.57),$$

dove C_1 e C_2 sono costanti determinate sperimentalmente.

Si osserva che il valore di soglia ϵ_{th} deve essere variato localmente in presenza di forti gradienti di velocità.

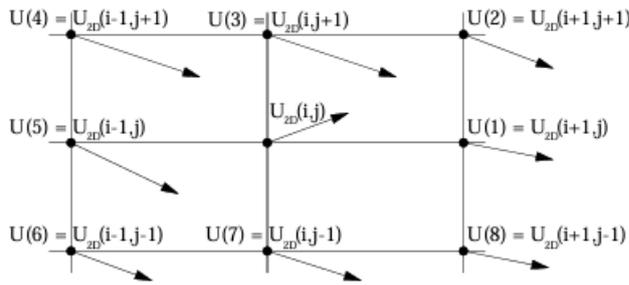


Figura 1.27. Griglia regolare con notazioni dei vettori velocità

Westerweel & Scarano (2005) propongono un metodo leggermente differente che consente di determinare un valore universale di soglia ϵ_{th} . Esso consiste nel determinare il valore di velocità mediano degli 8 punti vicini a quello considerato, in posizione (i, j) , $U_{2D}(med)$ e calcolare i residui r_i , con $i = 1, \dots, 8$, per ciascuno dei vicini come:

$$r_i = |U_i - U_{2D}(med)| \quad (1.58);$$

si calcola, quindi, il valore mediano di tali 8 residui, r_{med} .

Il criterio per stabilire se il vettore nel punto considerato è o meno outlier è il seguente:

$$\frac{|U_{2D}(i,j) - U_{2D}(med)|}{r_{med} + \epsilon_0} < \epsilon_{th} \quad (1.59).$$

ϵ_0 , sommato a denominatore, permette di tenere conto del fatto che per flussi laminari o con livelli molto bassi di turbolenza il termine a sinistra della disuguaglianza tenderebbe a valori molto grandi, poiché r_{med} tenderebbe a 0. ϵ_0 è un valore fra 0.1-0.2 pixel, corrispondente al rumore presente nei dati. *Westerweel & Scarano* individuano un valore di soglia universale ϵ_{th} pari a 2 per individuare il 90 % degli outlier nel campo di moto.

Dal momento che il campo di velocità euleriano ottenuto con metodo PIV è definito in corrispondenza di punti discreti, il modo per calcolare grandezze differenziali come la vorticità è ricorrere alle differenze finite. In tabella 1.1 si individuano alcuni possibili metodi, definendo per ciascuno l'errore di troncamento e l'incertezza, stabilita sulla base dell'incertezza della misura di velocità, ϵ_u . Fra gli ultimi due, si osserva che l'estrapolazione di Richardson vuole minimizzare l'errore di troncamento, mentre il metodo dei minimi quadrati vuole ridurre l'effetto dell'incertezza sulla misura della velocità. Qualora i vettori velocità del campo non fossero indipendenti gli uni dagli altri, ma fossero correlati, perché, per esempio, ottenuti con una parziale sovrapposizione delle finestre di interrogazione fra due frame successivi, le differenze finite in avanti, all'indietro, centrata e l'estrapolazione di Richardson sono meno efficaci rispetto al metodo dei minimi quadrati.

Metodo	Formula di calcolo	Errore di troncamento	Incetezza
Differenza finita in avanti	$\left(\frac{df}{dx}\right)_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$	$O(\Delta x)$	$\approx 1.41 \frac{\epsilon_u}{\Delta x}$
Differenza finita all'indietro	$\left(\frac{df}{dx}\right)_{i-\frac{1}{2}} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$	$O(\Delta x)$	$\approx 1.41 \frac{\epsilon_u}{\Delta x}$
Differenza centrata	$\left(\frac{df}{dx}\right)_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta x}$	$O(\Delta x^2)$	$\approx 0.7 \frac{\epsilon_u}{\Delta x}$
Estrapolazione di Richardson	$\left(\frac{df}{dx}\right)_i \approx \frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12\Delta x}$	$O(\Delta x^3)$	$\approx 0.95 \frac{\epsilon_u}{\Delta x}$
Minimi quadrati	$\left(\frac{df}{dx}\right)_i \approx \frac{2f_{i+2} + f_{i+1} - f_{i-1} - 2f_{i-2}}{10\Delta x}$	$O(\Delta x^2)$	$\approx 1.0 \frac{\epsilon_u}{\Delta x}$

Tabella 1.1. Schemi alle differenze finite per dati spaziatati uniformemente di un intervallo Δx lungo l'asse x

Metodo PTV - *Particle Tracking Velocimetry*

La tecnica PTV consiste nel seguire gli spostamenti di tutte le particelle individuate in una data immagine, ottenendo le velocità di singoli oggetti questo metodo è riconducibile quindi all'approccio lagrangiano. Rispetto alla PIV è possibile ottenere una maggiore risoluzione, ma il costo computazionale è generalmente maggiore. Inoltre, il campo di moto che si ottiene non è regolare, i vettori velocità sono distribuiti in modo casuale nello spazio e non è possibile applicare direttamente i metodi alle differenze finite per stimare le caratteristiche di campo (e.g., la vorticità).

In letteratura sono documentati diversi metodi di tracking, ciascuno offre vantaggi e svantaggi.

Minimo spostamento

Un semplice algoritmo che può essere implementato per determinare gli spostamenti delle singole particelle è quello che si basa sulla minimizzazione degli spostamenti fra frame consecutivi (*Guler & al.*, 1999). Ad ogni particella in una data immagine si associa quella che nell'immagine successiva rende minimo lo spostamento fra le due. Formalmente l'algoritmo è il seguente:

$$match(P_{i,1}) = \min_{P_{j,2}}(dist_P(P_{i,1}, P_{j,2})) \quad (1.60)$$

dove $P_{i,1}$ rappresenta un generico punto della prima immagine, $P_{j,2}$ un generico punto della seconda immagine e la distanza fra i due è calcolata come distanza euclidea:

$$dist_P(P_{i,1}, P_{j,2}) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (1.61).$$

Per evitare che più particelle siano associate ad una stessa nel frame successivo, si può rendere più robusto l'algoritmo nel modo seguente: si cerca il matching fra le particelle nelle due immagini che rende minima la somma degli spostamenti di tutte le particelle. Formalmente, si cercano gli accoppiamenti $\{i(k), j(k)\}$ che rendono minima la seguente sommatoria:

$$\sum_{k=1}^{\min(n_1, n_2)} dist_P(P_{i(k),1}, P_{j(k),2}) \quad (1.62),$$

con n_1 numero di particelle nella prima immagine e n_2 numero di particelle nella seconda immagine. Dal punto di vista computazionale, questo metodo non è ottimale e può cadere in errore qualora gli spostamenti delle particelle abbiano valori comparabili con la distanza media fra di

esse. *Capart* (2000) osserva che, affinché l’algoritmo possa essere considerato affidabile con un livello di confidenza del 90%, deve valere:

$$\Delta_r < 0.35\delta_r \quad (1.63),$$

dove δ_r è la media distanza fra le particelle e Δ_r il loro spostamento.

Per superare questi problemi, un possibile metodo di tracking è quello proposto da *Hassan & Cnaan* (1991). Come mostrato in figura 1.28, a partire dalla posizione di una particella individuata nella prima immagine si determinano delle aree di ricerca, nei tre frame successivi, in cui è più probabile che la particella seguita si venga a trovare. Fra le tante traiettorie possibili che possono essere generate a partire dalla particella presente nella prima immagine, viene stabilita come corretta la traiettoria più regolare, ossia, quella che minimizza la seguente quantità:

$$\sigma_{total} = \sqrt{\frac{\sigma_l^2}{\bar{l}^2} + \sigma_\theta^2} \quad (1.64),$$

dove \bar{l} è lo spostamento medio della particella nelle 4 immagini per la specifica traiettoria considerata, σ_l è la deviazione standard degli spostamenti rispetto al tale media e σ_θ è la deviazione standard degli angoli formati fra due vettori spostamento consecutivi.

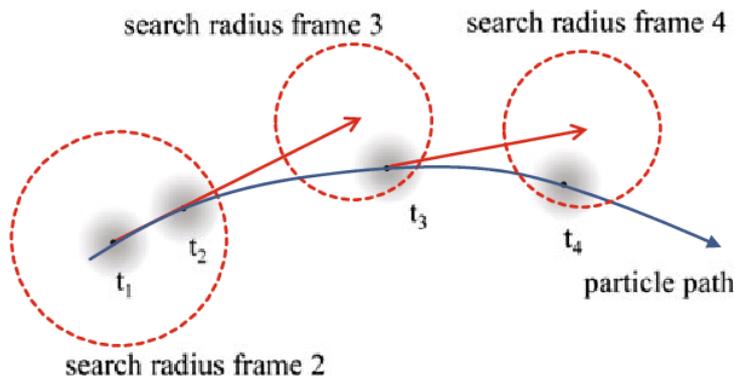


Figura 1.28. Determinazione della traiettoria di una particella mediante tecnica Four frames PTV (*Cirpka & al.*, 2013)

Questo metodo presenta problemi qualora la densità di particelle sia alta e in presenza di importanti gradienti di velocità, come osservato da *Capart & al.* (1997).

Stelle di Voronoi

Anziché porre l'attenzione sulla regolarità della traiettoria di una singola particella, si può osservare se sono presenti dei pattern di particelle riconoscibili in due immagini consecutive. Esistono, infatti, algoritmi basati sul riconoscimento di tali gruppi di particelle. Capart & al. (2002) ne propongono uno che utilizza le stelle di Voronoi. Prima di presentarlo, occorre capire cosa esse rappresentino geometricamente. Si consideri figura 1.29. I punti blu rappresentano i centri delle particelle individuate in una certa immagine, quelli rossi i centri delle particelle individuate nell'immagine successiva. I poligoni centrati in corrispondenza di ciascun punto sono le celle di Voronoi. Esse identificano il luogo dei punti più vicini al punto considerato rispetto ad ogni altro rappresentante il centro di una particella. Punti le cui celle di Voronoi hanno un lato in comune sono chiamati vicini naturali. I vicini naturali costituiscono i vertici della stella di Voronoi, come mostrato in figura 1.29.

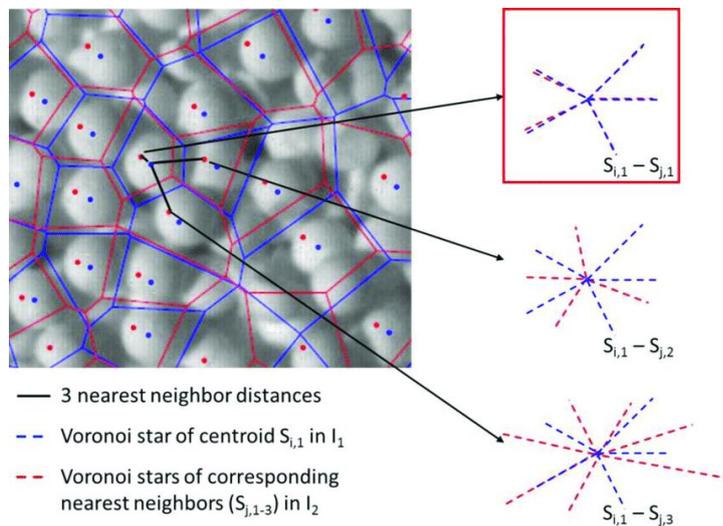


Figura 1.29. Utilizzo delle stelle di Voronoi per determinare lo spostamento di una particella in un letto fluidizzato ottenuto con passaggio di aria attraverso particelle di $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$ (Hagemeier & al., 2015)

Le stelle di Voronoi godono di alcune importanti proprietà: sono uniche per ogni punto; sono stabili a fronte di spostamenti dei punti che rappresentano le particelle fra un frame e il successivo; non sono influenzate da punti lontani e si adattano a variazioni locali di densità dei punti. Per questo motivo costituiscono pattern di particelle di cui si può facilmente determinare lo spostamento fra un frame e il successivo. L'algoritmo opera nel seguente modo: individuata una particella nel punto $P_{i,1}$ nella prima immagine si cerca la particella più vicina ad esso nella seconda immagine. Si chiami $P_{j,02}$ il punto dove si trova tale particella; si costruisce la stella di Voronoi $S_{j,02}$ a partire dal punto $P_{j,02}$. Ciascun vertice di tale stella rappresenta un possibile punto in cui si è spostata la particella individuata nella prima immagine; per ogni vertice della stella di Voronoi $S_{j,02}$ si determina la corrispondente stella di Voronoi. Si confronta ciascuna stella di Voronoi

generata con quella originata dal punto $P_{i,1}$, ossia $S_{i,1}$. La particella cercata nella seconda immagine, fra quelle candidate, è quella che soddisfa la seguente relazione:

$$match(P_{i,1}) = \min_{P_{j,2} \in S_{j,02}} (dist_S(S_{i,1}, S_{j,2})) \quad (1.65),$$

dove $dist_S(S_{i,1}, S_{j,2})$ è così definita:

$$dist_S(S_{i,1}, S_{j,2}) = \text{median} \left[\min_{k_1=1, \dots, m_1} \min_{k_2=1, \dots, m_2} (|(r_{k_1,1} - r_{0,1}) - (r_{k_2,2} - r_{0,2})|) \right] \quad (1.66)$$

In 1.66, m_1 e m_2 rappresentano il numero di vertici delle stelle $S_{i,1}$ e $S_{i,2}$, $k_1 = 0$ individua il centro della stella $S_{i,1}$, $k_2 = 0$ individua il centro della stella $S_{j,2}$. $r_{k_1,1}$ è il vettore che congiunge il k_1 -esimo vertice della stella $S_{i,1}$ con il primo e $r_{k_2,2}$ è il vettore che congiunge la il k_2 -esimo vertice della stella 2 con il secondo di tale stella. Il vettore $r_{0,1}$ congiunge il centro della stella 1 con il suo primo vertice e $r_{0,2}$ congiunge il centro della stella 2 con il suo secondo vertice. Pertanto il termine fra parentesi quadre in 1.66 non rappresenta altro che l'insieme delle minime distanze fra ciascun vertice della stella $S_{i,1}$ e il corrispondente vertice della stella $S_{j,2}$. Sostanzialmente l'equazione 1.66 rappresenta la seguente operazione: traslare la stella di Voronoi $S_{j,2}$ fino ad avere il suo centro corrispondente con il centro della stella $S_{i,1}$ (si veda figura 1.29 a destra); calcolare la mediana delle minime distanze fra i vertici delle due stelle. Si ripete questa operazione per tutte le stelle di Voronoi delle particelle individuate come candidate, ossia per tutti i vertici della stella 2. Quella per la quale la distanza è minima è la particella cercata nella seconda immagine.

Nell'algoritmo appena presentato le stelle di Voronoi sono utilizzate sia per ridurre il numero di particelle nella seconda immagine fra le quali cercare quella inseguita (operazione di screening), sia per selezionare la specifica particella fra queste.

Capart & al. (2002) modificano, rispetto all'algoritmo appena presentato, il metodo di screening. Si riduce il numero di particelle candidate al matching con una data particella dell'immagine precedente, a quelle che si trovano all'interno di un'ellisse di ricerca (figura 1.30). Devono essere quindi specificate, come parametri in ingresso all'algoritmo, le coordinate del centro dell'ellisse rispetto ad un sistema di riferimento centrato sulla particella considerata nella prima immagine, ossia una stima degli spostamenti orizzontale e verticale della particella, rispettivamente u_0 e v_0 , e la lunghezza dei due assi dell'ellisse, ossia la deviazione standard degli spostamenti orizzontale e verticale, w_1 e w_2 .

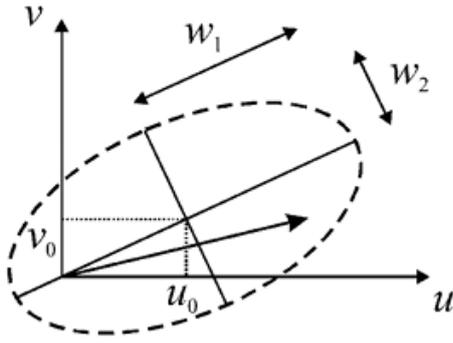


Figura 1.30. Ellisse di ricerca per operazione di selezione delle particelle candidate al matching (Capart & al., 2002)

Massima probabilità: “Relaxation method”

Un diverso approccio per seguire correttamente le traiettorie delle particelle fra due immagini successive è quello che prende il nome di *Relaxation method*. Tale tecnica è stata introdotta da Rosenfeld & al. (1976), applicata allo studio di flussi turbolenti da Baek & Lee (1996) e perfezionata da Ohmi & Li (2000).

Il metodo di tracking si basa sulla probabilità di eseguire il matching fra una particella nella prima immagine e una particella nella seconda immagine. Essendo tale algoritmo iterativo, deve essere inizializzata la probabilità che una particella in posizione x_i nella prima immagine ha di spostarsi nella posizione y_j di una particella nella seconda immagine. L’inizializzazione è eseguita in questo modo:

$$P_{ij(i)}^{(0)} = P_i^{*(0)} = \frac{1}{n_{i+1}} \quad (1.67),$$

dove $P_i^{*(0)}$ è la probabilità di non trovare alcun abbinamento fra la particella in x_i nella prima immagine e una particella y_j nella seconda immagine, n_i è il numero totale di particelle nella seconda immagine che sono candidate per il matching con la suddetta particella nella prima immagine. Tali particelle nei punti y_j sono quelle che si trovano all’interno dell’area di raggio pari al massimo possibile spostamento della particella in x_i , come mostrato in figura 1.31, dove i cerchi bianchi identificano le particelle nella prima immagine e i cerchi neri le particelle nella seconda immagine.

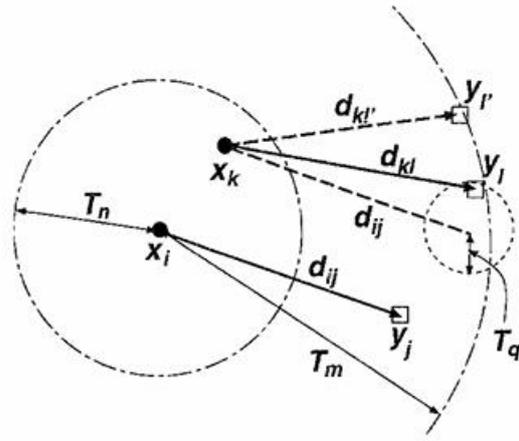


Figura 1.31. Determinazione dello spostamento di una particella fra due frame successivi tramite "relaxation method" (Baek & Lee, 1996)

Tale probabilità è normalizzata rispetto alla somma delle probabilità di tutti i possibili match per la particella i:

$$P_{ij}^{(n)} = \frac{\tilde{P}_{ij}^{(n)}}{\sum_j \tilde{P}_{ij}^{(n)} + P_i^{*(n-1)}} \quad (1.70).$$

La probabilità di non match $P_i^{*(n)}$ non viene aggiornata ad ogni step ma solo normalizzata, nello stesso modo in cui si normalizza $\tilde{P}_{ij}^{(n)}$.

Questo algoritmo è iterato 10-20 volte fino a che si ottiene che la probabilità di un dato abbinamento fra ogni particella nella prima immagine e una delle candidate ad essere abbinate ad essa nella seconda immagine è circa 1 e le altre possibilità di matching per quella data particella risultano avere probabilità circa nulla.

Ohmi & Li applicano due correzioni a questo metodo. Osservano che la probabilità che non ci sia matching $P_i^{*(n)}$ aumenta solamente qualora ci sia un forte calo della probabilità di tutti i possibili matching per una certa particella, e questo è raro che accada per flussi con alta densità di particelle. Essi suggeriscono quindi di modificare in questo modo la probabilità di non abbinamento:

$$\tilde{P}_i^{*(n)} = \sum_{m < C} \frac{DP_i^{*(n-1)}}{n_i} \quad (1.71),$$

dove C e D sono costanti pari a 0.1 e 5 e m è la frazione di spostamenti che soddisfano la condizione 1.68.

Inoltre viene proposto un raggio della relaxation area non costante ma variabile in funzione di variazioni locali della velocità:

$$R_c = E + F(|x_i - y_j|) \quad (1.72).$$

E dipende dall'immagine e può variare fra 1 e 4, F è pari a 0.05.

2. Metodi

2.1 Struttura sperimentale e prove

Le prove sono condotte nel laboratorio di Ingegneria Idraulica (LIDR) di Bologna. Uno schema del layout sperimentale è riportato in figura 2.1. La galleria utilizzata ha altezza di 18 cm, larghezza di 12 cm e si sviluppa longitudinalmente per 200 cm.

Il profilo idrodinamico simmetrico, posto al centro della sezione, ha lunghezza di corda, l_c , pari a 9.1 cm e spessore s di 1.5 cm.

Si conducono due prove: nella prima si fa fluire nella galleria una portata media di $0.83 \frac{L}{s}$. Il numero di Reynolds della galleria, calcolato assumendo come dimensione caratteristica la sua altezza, è 6917; per la seconda prova si realizza una portata di $1.5 \frac{L}{s}$. Il numero di Reynolds della galleria è 12500. La turbolenza prodotta in scia al profilo idrodinamico è indagata mediante tecnica ad immagini PTV. Il set-up sperimentale per applicazione del metodo PTV è costituito da: un laser a diodi ad onda continua; videocamera industriale IDS UI-3060CP-M-GL Rev.2 (sensore CMOS, risoluzione di 2.35 Mpix, frequenza di acquisizione di 166 fps, tempo di esposizione variabile fra 0.018 e 998 ms, memoria interna di 128 MB), supporto per la videocamera; computer (RAM di 28 GB e memoria disponibile su disco rigido di 2 TB).

L'accesso ottico del laser è ricavato nella parete superiore trasparente della galleria. Figura 2.2 mostra l'allestimento del laser per illuminare la regione della galleria immediatamente a valle del profilo. Un telo nero permette di realizzare la camera oscura attorno alla zona di interesse al fine di ottimizzare l'illuminazione delle particelle presenti nel flusso di acqua (figura 2.3). La videocamera inquadra lateralmente dal vetro della galleria il piano di luce generato dal laser ad una distanza ottimale per il fuoco del grandangolo utilizzato (figura 2.4). Come messo in evidenza in figura 2.1, la regione della scia illuminata dal piano di luce del laser è differente nei due casi. Per la prima prova, a basso Re , essa si estende, lungo l'asse orizzontale della galleria, da 1.5 cm dal bordo di uscita del profilo (distanza d pari a 1.5 cm in figura 2.1), fino a 8.5 cm da esso, mentre per la seconda prova la regione illuminata si estende a partire esattamente dal bordo di uscita del profilo (distanza d in figura 2.1 pari a 0), fino a 7.1 cm da esso.

Le condizioni sperimentali e i parametri di acquisizione per le due prove sono riassunti nelle tabelle 2.1 e 2.2.

	Prima prova	Seconda prova
Portata [m^3/s]	0.00083	0.0015
Velocità in ingresso [m/s]	0.038	0.069
$Re_{galleria}$	6917	12500
$Re_{profilo}$	3420	6210

Tabella 2.1. Condizioni sperimentali

	Prima prova	Seconda prova
Frequenza di acquisizione (fps)	162	162
Durata dell'acquisizione (s)	3.1	6.2
Numero di immagini acquisite	500	1000
Tempo di esposizione (ms)	4	0.5
Estensione della regione illuminata lungo asse orizzontale da bordo d'uscita del profilo	da 1.5 cm a 8.5 cm	da 0 cm a 7.1 cm
Ampiezza dell'inquadratura della videocamera lungo asse orizzontale da bordo d'uscita del profilo	da -6.5 cm a 12.8 cm	da -7.3 a 12 cm
Guadagno digitale di luminosità	30	100

Tabella 2.2. Parametri dell'acquisizione

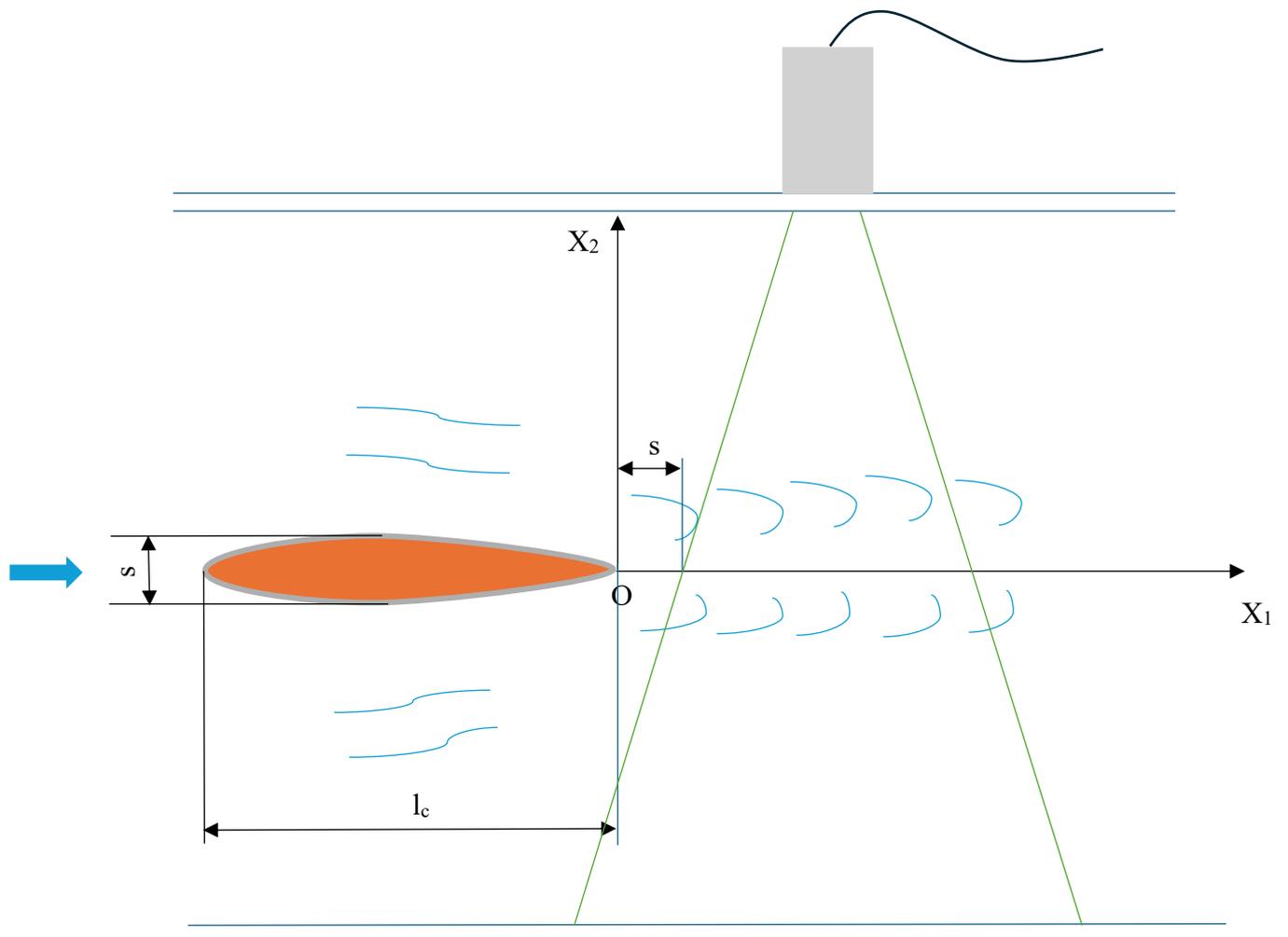


Figura 2.1. Schema del layout sperimentale per prima e seconda prova

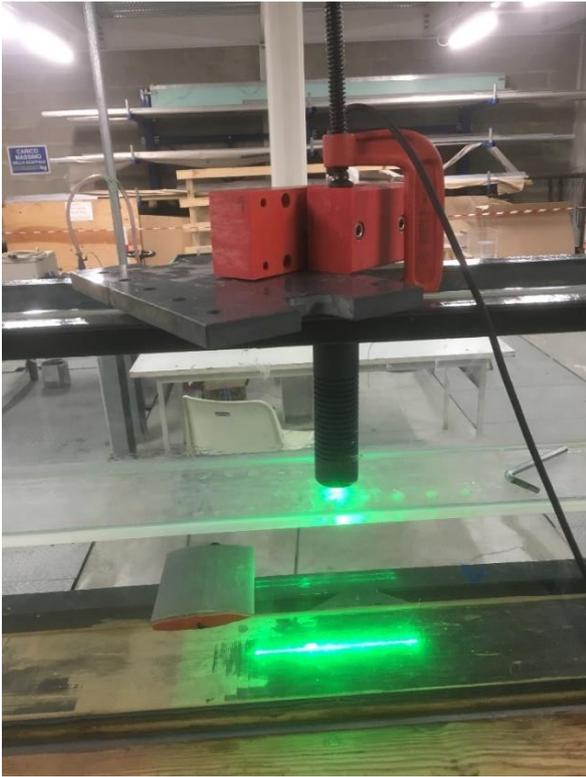


Figura 2.2. Illuminazione della desiderata area della galleria mediante laser

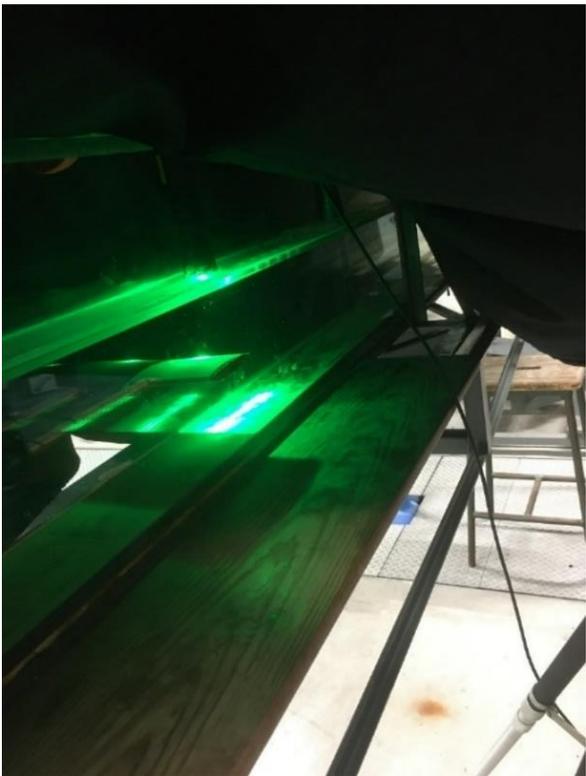


Figura 2.3. Camera oscura realizzata per poter visualizzare le particelle nel piano di luce del laser



Figura 2.4. Inquadratura della regione della scia con videocamera

La videocamera trasferisce in tempo reale le immagini acquisite al computer. La gestione di tali acquisizioni avviene tramite il software StreamPix. Fra i parametri che si possono modificare tramite l'interfaccia del programma, ci si concentra su: frequenza di clock, ossia la frequenza con cui i pixel dell'immagine sono letti; frequenza di acquisizione; tempo di esposizione alla luce del sensore della videocamera; memoria interna utilizzata dalla videocamera per immagazzinare temporaneamente le immagini, qualora la CPU del computer non sia pronta, a causa di un picco di utilizzo, durante l'acquisizione; un guadagno digitale per modificare la luminosità.

Le immagini acquisite possono essere salvate su disco oppure su RAM. Il salvataggio su disco permette di acquisire serie temporali lunghe vista l'elevata memoria messa a disposizione dal computer, ma può limitare il frame rate, mentre il salvataggio su RAM consente di acquisire alla massima frequenza tipicamente per un periodo breve; fino a saturazione della RAM. Dal momento che non si vuole correre il rischio di perdere immagini, volendo caratterizzare la turbolenza nella scia e non si prevedono acquisizioni di lunga durata, ma di alcuni secondi, si acquisisce su RAM. Si riduce al minimo la memoria interna allocata per la videocamera, poiché un suo aumento incide negativamente sulla capacità della RAM di immagazzinare immagini.

D'ora in avanti si assumerà, per l'analisi dei dati, un sistema di riferimento centrato in corrispondenza del bordo d'uscita del profilo idrodinamico, indicato con O in figura 2.1. Viene assunta come coordinata x_1 di tale sistema di riferimento quella longitudinale lungo l'asse di simmetria del canale, mentre la coordinata x_2 è quella verticale.

2.2 Procedura per la determinazione del campo di moto

La procedura seguita applica il metodo PTV con stelle di Voronoi. La figura 2.5 riporta un'immagine tra quelle acquisite per il flusso in galleria ad acqua, con portata di $1.5 \frac{L}{s}$ a valle del profilo idrodinamico. Le immagini sono scattate con un frame rate di 162 fps e un tempo di esposizione alla luce del sensore della fotocamera di 0.5 ms.

I passaggi che seguono la lettura delle immagini sono l'identificazione delle particelle nelle immagini stesse, la determinazione delle traiettorie delle singole particelle e, successivamente, del campo di moto lagrangiano. Infine si determina il campo di moto euleriano tramite discretizzazione del dominio mediante griglia regolare.



Figura 2.5. Immagine di un flusso d'acqua attorno a profilo idrodinamico

2.2.1 Identificazione delle particelle

L'algoritmo implementato per identificare le particelle nelle singole immagini necessita di una stima del loro diametro e la determinazione di un valore di soglia dell'intensità luminosa con cui segmentare l'immagine. I pixel con luminosità maggiore della soglia sono resi bianchi, gli altri neri.

La stima del diametro si basa sull'assunzione che l'intensità luminosa in corrispondenza di ogni particella dell'immagine si distribuisca secondo una gaussiana lungo entrambe le dimensioni,

come mostrato in figura 2.6, per una particella individuata in una delle immagini del set di cui sopra. Il picco della gaussiana consente di localizzare la particella. L'ampiezza della gaussiana a metà della sua altezza lungo ciascuna direzione fornisce una stima in pixel del diametro. Se le due sono differenti, si considera la più piccola come diametro, tenendo presente che se le particelle identificate sono troppo piccole il rischio è di cadere nel fenomeno del peak locking, ossia un bias degli spostamenti in corrispondenza di valori interi. Il diametro stimato in questo caso è 3 pixel. Non vi è un metodo universalmente valido per segmentare l'immagine. Il valore di soglia dell'intensità luminosa viene stabilito tramite prove successive. Se esso è eccessivamente alto, si potrebbero trascurare particelle valide. Imponendo un valore troppo basso, invece, il risultato potrebbe essere condizionato da riflessioni casuali (cioè rumore).

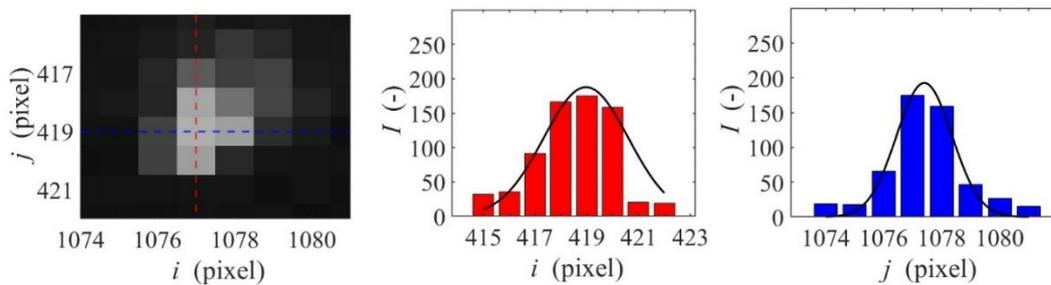


Figura 2.6. Distribuzione dell'intensità luminosa in corrispondenza di una particella

2.2.2 Determinazione delle traiettorie

Identificate le particelle, se ne devono seguire gli spostamenti in frame successive. Come già discusso al capitolo 1.4.1, esistono diversi algoritmi che consentono di ottenere ciò. Fra essi, si utilizza quello basato sulla costruzione delle stelle di Voronoi.

Sulla base degli spostamenti di un piccolo numero di particelle, per esempio 15, misurati nella regione della scia fra due immagini consecutive, si possono stimare gli spostamenti medi delle particelle, nelle due direzioni, u_0 e v_0 . Si determinano inoltre gli assi dell'ellisse, w_1 e w_2 , che consente di restringere l'area di ricerca della particella nel frame successivo a quello considerato. Essi sono calcolati come deviazioni standard associate agli spostamenti medi u_0 e v_0 . Segue la validazione dei parametri di tracking. Processando un piccolo numero di immagini consecutive si osserva se, con quelli impostati, il moto delle particelle è seguito correttamente. Con i parametri considerati come quelli ottimali per questo set di dati ($u_0=2$ pixel, $v_0=1$ pixel, $w_1=2$ pixel, $w_2=2$ pixel), processando le prime 10 immagini, si nota, da figura 2.7 che le traiettorie partono da una particella nel primo istante e arrivano in corrispondenza di una particella, che si presume essere la stessa, nell'ultimo istante. L'istogramma della lunghezza delle traiettorie, in figura 2.8, conferma che per quasi la totalità delle particelle, la loro traiettoria è seguita per almeno 4 frame

e più della metà delle traiettorie hanno lunghezza di 10 frame. Inoltre, esse sono coerenti con il moto turbolento che ci si può aspettare in scia all'ostacolo.

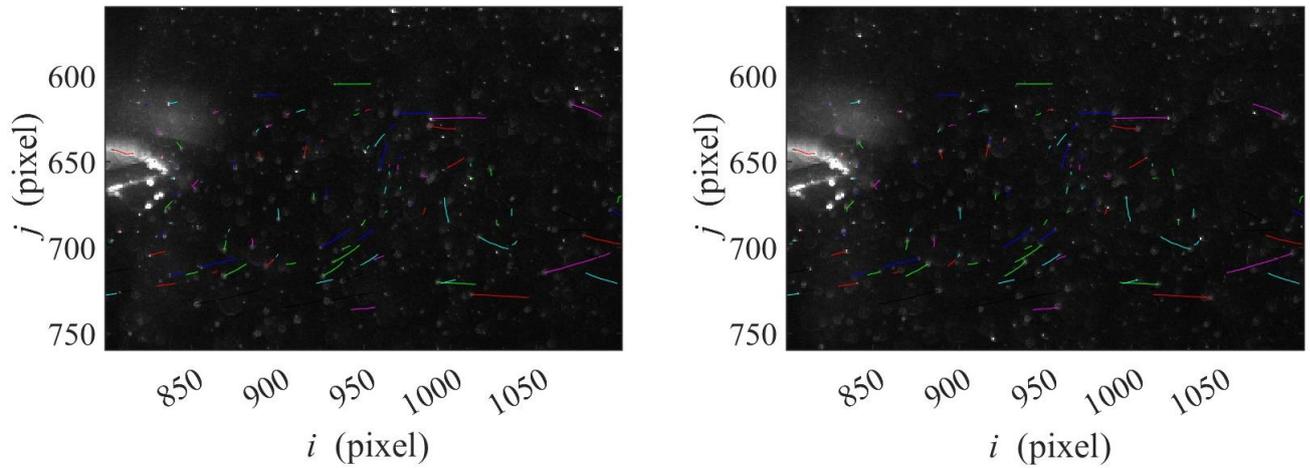


Figura 2.7. Traiettorie delle particelle lungo 10 immagini: a sinistra, sovrapposte alla prima immagine; a destra, sovrapposte alla decima immagine

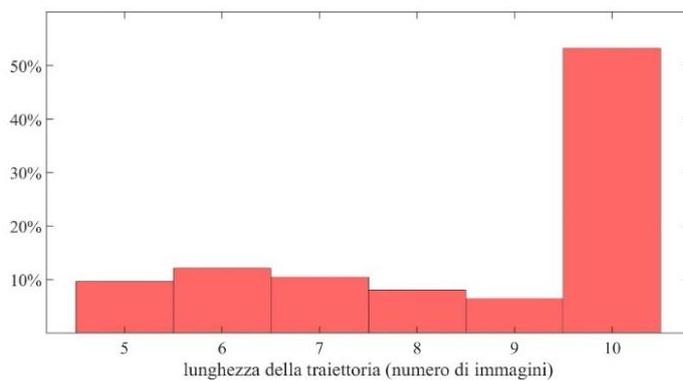


Figura 2.8. Distribuzione della lunghezza delle traiettorie a seguito del processamento di 10 immagini

2.2.3 Calcolo delle velocità lagrangiane e euleriane

Definiti i parametri per l'identificazione delle particelle e per il loro tracking, si determinano le velocità lungo le traiettorie individuate e quindi il campo di moto lagrangiano in figura 2.9.

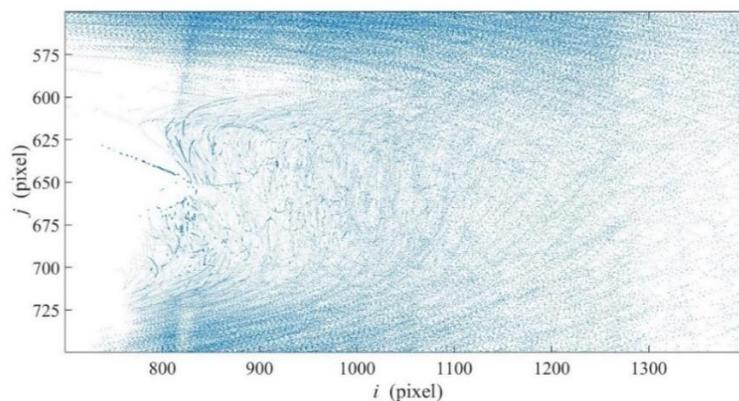


Figura 2.9. Campo di moto lagrangiano

Nel campo di moto lagrangiano i vettori velocità sono distribuiti in modo casuale nello spazio. A partire da esso, l'obiettivo è ottenere un campo di moto euleriano, i cui vettori sono definiti in corrispondenza dei punti di una griglia regolare. Un metodo per determinarlo, proposto da *Agui & Jimenez* (1987), prende il nome di "Adaptive gaussian window interpolation". La velocità in un generico punto x della griglia è stimata a partire dalle velocità note nei punti x_i del campo di moto lagrangiano, nel modo seguente:

$$u(x) = \frac{\sum_i \alpha_i u_i}{\sum_i \alpha_i} \quad (2.1),$$

con:

$$\alpha_i = \exp\left(\frac{-|x-x_i|^2}{H^2}\right) \quad (2.2).$$

H è la distanza fra i punti della griglia regolare.

Agui & Jimenez (1987), provando il metodo su un campo di velocità sinusoidale, osservano che il rapporto ottimale fra la dimensione di griglia H e la media distanza fra le posizioni dei punti x_i è 1.24.

Per questa tesi il campo di moto euleriano è ottenuto dividendo il dominio su una griglia di calcolo regolare; per ciascuna maglia viene calcolato il vettore velocità medio. In tale operazione di binning la risoluzione della griglia è un aspetto importante da tenere in considerazione: per maglie troppo grandi (scarsa risoluzione) si filtra troppo il campo di velocità, viceversa una risoluzione eccessiva può dar luogo a maglie vuote. In figura 2.10 si mostra il campo di moto che si ottiene con risoluzione di 30 pixel.

L'operazione di calibrazione è eseguita tramite un'immagine di calibrazione, da cui si determina il coefficiente che consente la conversione da pixel ad unità di misura di lunghezza. In questo caso 10 pixel corrispondono a circa 0.9 mm.

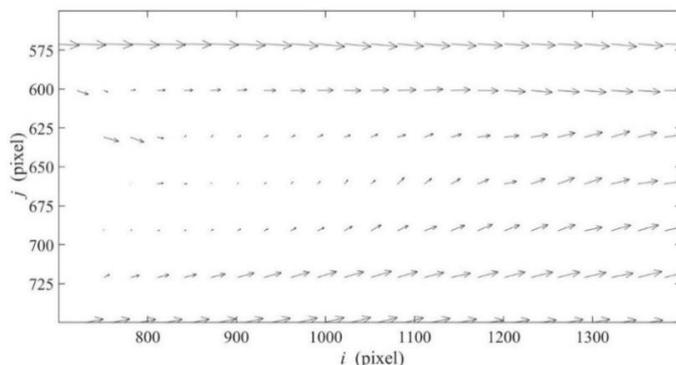


Figura 2.10. Campo di moto euleriano

2.3 Caratteristiche del campo di moto medio

A partire dai campi medi si determinano alcune grandezze medie caratteristiche dei due flussi, in particolare: coefficiente di variazione della componente orizzontale della velocità, u_1 , e della componente verticale, u_2 . Il primo è definito nel seguente modo:

$$CV_{u_1} = \frac{\sigma_{u_1}}{U_1} \quad (2.3),$$

dove σ_{u_1} rappresenta la deviazione standard nel tempo della componente orizzontale di velocità, determinata localmente in ogni cella della griglia con cui è discretizzato il dominio per ottenere il campo di moto euleriano; U_1 è la velocità media locale.

Analogamente, il coefficiente di variazione della componente verticale di velocità è così definito:

$$CV_{u_2} = \frac{\sigma_{u_2}}{U_2} \quad (2.4).$$

Altre quattro grandezze vengono determinate, a partire dal campo di moto medio, per una prima stima della turbolenza generata in scia all'ostacolo nei due casi. Esse sono le tre componenti del tensore degli sforzi di Reynolds, $\overline{u_1'^2}$, $\overline{u_2'^2}$, $\overline{u_1'u_2'}$ e la vorticità ω , introdotte nel capitolo 1.2.

In figura 2.11 sono mostrate, per i due casi di studio, le componenti longitudinale della velocità media, alla coordinata x_1 pari a 3 cm rispetto al bordo d'uscita del profilo, il quale è assunto come origine del sistema di riferimento. I valori di velocità sono interpolati con il seguente modello per il profilo di velocità media nella direzione di flusso, suggerito da *Betchov & Criminale* (1967):

$$U_1 = 1 - Qe^{-bx_2'^2} \quad (2.5);$$

in quest'ultima espressione x_2' rappresenta la coordinata verticale adimensionale, illustrata nello schema del layout sperimentale di figura 2.1. Essa è così derivata:

$$x_2' = \frac{x_2}{s} \quad (2.6);$$

dove s rappresenta lo spessore del profilo idrodinamico.

Q è un parametro adimensionale rappresentante il difetto di velocità nella regione della scia. Esso viene restituito dalla suddetta operazione di interpolazione. In particolare, esso vale 1 per il profilo in figura 2.11 (a), relativo al flusso a più basso numero di Reynolds, mentre per il profilo in figura

2.11 (b), relativa al caso con $Re=12500$, vale 0.6. L'altro dei due parametri di fitting, b , è 3.7 nel primo caso e 6.0 nel secondo.

La velocità media indisturbata, all'esterno della scia, U_{1ext} , è assunta pari a $0.051 \frac{m}{s}$ per flusso con Re pari 6917 e $0.084 \frac{m}{s}$ per flusso con Re pari a 12500.

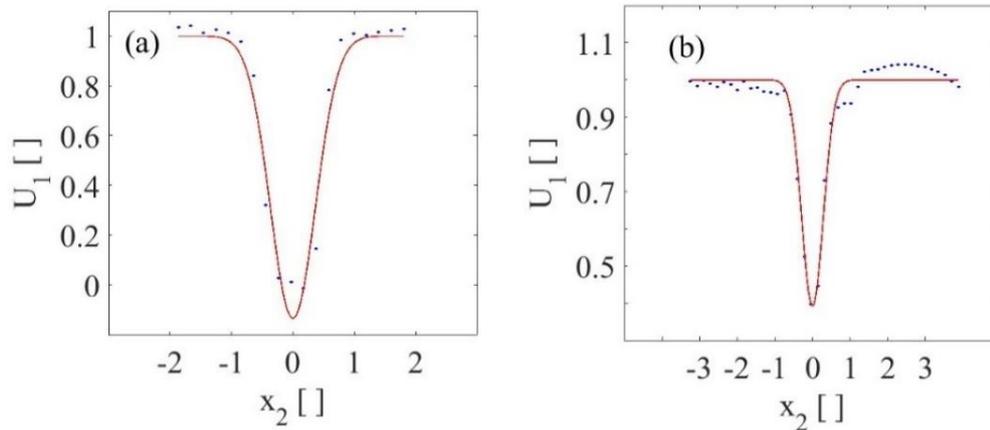


Figura 2.11. Profili interpolati della componente longitudinale della velocità media alla coordinata $x_1=3$ cm: (a) $Re=6917$; (b) $Re=12500$

2.4 Campo di moto oscillatorio

In entrambi i casi nel profilo interpolato si possono osservare due punti di flesso simmetrici. Essendo questa una condizione necessaria per la nascita dell'instabilità, per il teorema del punto di flesso di Rayleigh, ci si aspetta di osservare un'amplificazione dell'oscillazione nello spazio della componente verticale della velocità u'_2 , con la seguente espressione:

$$u'_2 = Ae^{-\alpha_i x_1} \cos(\alpha_r x_1 + x_0) \quad (2.7).$$

I parametri dell'onda che è la fluttuazione di velocità sono: parte reale del numero d'onda, ossia $\alpha_r = \frac{2\pi}{\lambda}$, con λ lunghezza d'onda della sinusoide, A , ampiezza iniziale dell'onda, parte immaginaria del numero d'onda, α_i , ossia il fattore di amplificazione dell'ampiezza dell'oscillazione e la fase iniziale x_0 , che si suppone essere uguale per tutti i punti dell'onda.

Se si riconosce nell'oscillazione di velocità una sinusoide del tipo di quella rappresentata dall'espressione 2.7, se ne possono determinare i suddetti parametri, tramite interpolazione dei dati sperimentali della fluttuazione di velocità con una curva definita sulla base dei parametri stessi.

Essendo interessati alla fluttuazione di velocità u'_2 , è necessario sottrarre, alla velocità istantanea u_2 , la componente media della velocità in direzione verticale, U_2 , sulla base di come è stata definita la fluttuazione di velocità al capitolo 1.2.

Dal processamento delle immagini acquisite si ottengono i campi di moto euleriani. A differenza del campo di velocità medio, determinato sulla base dell'intero campione di immagini, quelli istantanei sono ottenuti processando un numero ridotto di queste. Il numero di immagini che costituiscono i campioni dipende dalla frequenza di campionamento dei campi istantanei. Il campo di moto della fluttuazione di velocità, per quanto appena illustrato, è dato dalla differenza fra campo istantaneo e campo medio. All'interno del campo di moto dell'oscillazione di velocità, si valuta l'oscillazione in punti specifici, ossia in corrispondenza dei punti di flesso dei profili medi della componente longitudinale della velocità, U_1 .

Occorre, in ogni caso, stabilire una frequenza con cui campionare i campi di velocità istantanei. A tal fine, per il flusso a più basso Re , si stima preliminarmente dove esso si possa collocare nel grafico che presenta l'insieme delle soluzioni dell'equazione di Rayleigh, in figura 1.11, al capitolo 1.3.1. Ciò è possibile perché tale flusso, fino ad una distanza di 6 cm, cioè 4 volte la lunghezza caratteristica, presenta profili di velocità media longitudinale simili a quello di figura 2.11 (a), con un difetto di velocità Q variabile fra 0.9 e 1. Per Q pari a 0.935, ossia quello che più si avvicina al caso in esame fra quelli proposti nelle soluzioni, ci si attende una pulsazione adimensionale ω' compresa nell'intervallo fra 0 e 0.8, con un valore di circa 0.6 in risonanza. La pulsazione adimensionale è così definita, a partire dalla pulsazione ω , espressa in $\frac{rad}{s}$:

$$\omega' = \frac{\omega \cdot s}{U_{1ext}} \quad (2.8).$$

Si evince che il range di frequenze nel quale si può osservare l'amplificazione dell'oscillazione è compreso fra 0 e 0.43 Hz e in risonanza tale frequenza è 0.32 Hz (periodo di circa 3.1 s). Il dataset a disposizione, 500 immagini acquisite a 162 fps, corrisponde ad un campione della durata di 3.1 s, esattamente pari al periodo della perturbazione in risonanza. Tenendo presente che per il teorema di Shannon-Nyquist i campi di moto istantanei devono essere campionati con una frequenza almeno doppia di quella caratteristica del fenomeno, per poter ricostruire l'oscillazione di velocità sia nel tempo sia nello spazio, si deve utilizzare una frequenza di campionamento di almeno 1 Hz. Per essere sicuri di cogliere il fenomeno di amplificazione dell'oscillazione, si stabilisce che tale frequenza debba essere almeno 2 Hz.

La durata temporale del campione a disposizione potrebbe non essere sufficiente per cogliere la fluttuazione risonante, poiché, come già sottolineato, in tale condizione i dati campionati coprono solamente circa un periodo dell'oscillazione temporale di velocità.

Dal punto di vista spaziale, se si considera in prima approssimazione c , celerità dell'onda, circa uguale alla velocità media nella suddetta regione di scia, $0.009 \frac{m}{s}$, e $\omega = 0.6$, ossia una pulsazione dimensionale pari a $2.04 \frac{rad}{s}$, allora: $\alpha_r = \frac{\omega}{c} = 226.7 \frac{rad}{m}$. Ciò corrisponde ad una lunghezza d'onda attesa $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha_r} = 0.0277 \text{ m}$.

Nella stessa regione, ossia fino a 6 cm dall'origine del sistema di riferimento, nel caso della seconda prova, il difetto di velocità non è costante per i diversi profili medi di velocità lungo lo sviluppo orizzontale, ma varia da 0.95 per il primo a 0.1 per l'ultimo. Risulta difficile ipotizzare dove collocarsi fra le soluzioni note dell'equazione di Rayleigh. Rimane in ogni caso valida la limitazione sulla frequenza di campionamento minima stabilita considerando il flusso a più basso Re .

2.4.1 Risoluzione spaziale e temporale dei valori istantanei

La risoluzione della griglia con cui discretizzare il dominio è determinata dalla necessità di limitare il rumore che caratterizza l'acquisizione video e al contempo coprire tutta la zona d'interesse con continuità. Si deve, infatti, considerare il limite dell'estensione della regione di spazio in cui si hanno profili di velocità istantanei sufficientemente completi. Ciò può essere critico per larghezza di maglia troppo piccola e nel caso di poche particelle. L'estensione della regione in cui il campo di moto istantaneo è completo dipende, oltre che dalla risoluzione spaziale, anche dalla frequenza a cui i campi di moto istantanei sono campionati, ossia dal numero di immagini processate per ottenere il singolo campo istantaneo. Dall'analisi preliminare condotta si è stabilito che essa deve essere almeno pari a 2 Hz. In questo caso, per la prima prova, le possibili risoluzioni spaziali sono 2 o 3 mm. Con una larghezza di maglia inferiore a 2 mm, infatti, ci sono troppi vuoti all'interno del campo di moto, mentre con una superiore a 3 mm quest'ultimo appare troppo regolare nella zona della scia essendo cancellati i gradienti dall'operazione di media all'interno delle maglie. Sulla base di questi limiti, per determinare la frequenza di campionamento e risoluzione spaziale ottimali si conduce un'analisi. Si osservano gli effetti di campionamenti a 2, 3 e 4 Hz, in termini di percentuale di vettori mancanti nel campo di moto. I risultati sono mostrati in tabella 2.3.

Risoluzione spaziale [mm]	Frequenza di campionamento [Hz]	Percentuale di vettori mancanti (%)
2	2	15
3	2	5
2	3	23.4
3	3	9.1
2	4	30.6
3	4	13.8

Tabella 2.3. Influenza di diverse risoluzioni spaziali e frequenze di campionamento dei campi di moto istantanei sulla percentuale di vettori mancanti ($Re=6917$)

La risoluzione di 2 mm per tutte le frequenze di campionamento considerate, risulta inaccettabile, poiché porta ad una percentuale di vuoti troppo alta. Campionando a 3 Hz, per esempio, utilizzando una dimensione di maglia di 2 mm, si ottiene un campo di moto in scia sufficientemente completo per un'estensione di solamente 1 cm, da 2.5 a 3.5 cm a valle del profilo. Ciò corrisponderebbe ad avere al più 5 punti che non sembrano sufficienti a caratterizzare l'oscillazione di velocità.

La frequenza di campionamento di 4 Hz porta a percentuali di vettori mancanti alte, sia adottando una risoluzione nello spazio di 2 mm, sia quella di 3 mm.

Un campionamento a 2 o 3 Hz e una dimensione di griglia di 3 mm rappresentano due opzioni valide. Dal momento che la frequenza di 3 Hz consente di ottenere un maggior numero di campi istantanei, 9 rispetto a 6 campi che si ottengono campionando a 2 Hz, nel medesimo intervallo di tempo, si propende per il campionamento a 3 Hz. Questo consente di condurre una più attendibile analisi temporale dell'oscillazione di velocità.

Si conduce un'analisi analoga per la seconda prova. I risultati, in tabella 2.4, mettono in evidenza come, adottando ancora una risoluzione spaziale di 3 mm, sia possibile spingersi fino ad una frequenza di campionamento di 7 Hz, ottenendo una percentuale di vettori mancanti ancora accettabile. Questo è dovuto al fatto che, riuscendo ad individuare un maggior numero di particelle in ogni singola immagine, il campo di moto lagrangiano contiene molti più vettori rispetto a quello che si ottiene nella prima prova, a Re più basso.

Non potendo stabilire a priori dove collocare tale flusso all'interno delle soluzioni fornite da *Betchov & Criminale*, come già sottolineato al capitolo precedente, si sceglie di campionare i campi istantanei a 7 Hz. Tale frequenza è più di 3 volte la minima ammissibile stabilita, 2 Hz, e consente di avere 41 campioni all'interno della durata dell'acquisizione, pari a 6.2 s. Ciò rende l'analisi temporale potenzialmente attendibile.

Risoluzione spaziale [mm]	Frequenza di campionamento [Hz]	Percentuale di vettori mancanti (%)
2	3	11
3	3	5.1
2	5	12.1
3	5	8.3
2	7	17.8
3	7	11.4

Tabella 2.4. Influenza di diverse risoluzioni spaziali e frequenze di campionamento dei campi di moto istantanei sulla percentuale di vettori mancanti ($Re=12500$)

2.4.2 Analisi spaziale

Per la prima prova, la lunghezza d'onda in condizione di risonanza, stimata preliminarmente al capitolo 2.4, è di 0.0277 m, ossia 2.77 cm. Una dimensione di griglia di 3 mm, stabilita come quella ottimale a seguito dell'analisi condotta al capitolo precedente, 2.4.1, risulta quindi essere del tutto adeguata per poter osservare l'oscillazione di velocità nello spazio. Nello stesso capitolo si conclude che la frequenza di campionamento dei campi di moto istantanei che più soddisfa le esigenze è 3 Hz.

Tuttavia, campionando in questo modo, l'estensione della regione in cui il singolo campo istantaneo è completo è circa 2.7 cm, da 2.1 a 4.8 cm dall'origine del sistema di riferimento. Essa è a malapena sufficiente per osservare una lunghezza d'onda dell'oscillazione di velocità nello spazio. Pertanto, i 9 punti sperimentali che si hanno a disposizione nello spazio, considerando la risoluzione di 3 mm adottata, non sono sufficienti per estrarre, con fitting in Matlab sulla base di equazione 2.7 i corretti parametri dell'onda, ossia A , α_i , α_r e x_0 .

Nel caso della seconda prova, utilizzando frequenza di campionamento e risoluzione ottimali, 7 Hz e 3 mm, il campo di moto istantaneo risulta sufficientemente completo per un'estensione spaziale di 4 cm, a partire dall'origine del sistema di riferimento. Sebbene non si disponga di una stima a priori della lunghezza d'onda per questo secondo caso, non si riesce nella limitata regione di spazio a riconoscere una fluttuazione di velocità u'_2 con una determinata frequenza caratteristica. Ne consegue che l'interpolazione dei dati sperimentali sulla base di equazione 2.7 non è efficace.

Si decide, pertanto, di non limitarsi alla regione dove i campi sono sufficientemente completi, ma di considerare interamente quella in cui si hanno a disposizione dati. Essa si estende da 2.1 a 7.3

cm dall'origine del sistema di riferimento per la prima prova e dall'origine del sistema di riferimento fino a 6.6 cm da esso per la seconda prova.

Fattore di amplificazione dell'oscillazione di velocità

Come anticipato al capitolo 2.4.2, per la prova a Re più basso si ottengono 9 campi delle oscillazioni di velocità come differenza fra campi di velocità istantanea, campionati a 3 Hz, e campo della velocità media. Per la seconda prova si ottengono 41 campi delle oscillazioni di velocità. In corrispondenza dei punti di flesso del profilo medio di velocità U_1 , viene indagata l'oscillazione turbolenta dovuta alla scia, mostrata in termini di dati sperimentali in figura 2.13 per ciascuno dei due casi di studio. L'ampiezza dell'oscillazione in ogni punto è determinata come semi-differenza fra valore massimo e valore minimo. Tali ampiezze devono seguire una legge di crescita esponenziale nello spazio, come espresso da 2.7. Si realizza pertanto un'interpolazione in Matlab tramite funzione *fit* delle ampiezze dell'oscillazione in funzione della coordinata orizzontale adimensionale x'_1 , determinata come $\frac{x_1}{s}$. La legge è la seguente:

$$Ae^{\alpha_i x'_1} \quad (2.9)$$

A partire dal risultato dell'interpolazione, per flusso a basso Re si può ottenere una stima più precisa della pulsazione e della lunghezza d'onda della perturbazione, stimate preliminarmente al capitolo 2.4. Infatti, entrando nel grafico delle soluzioni dell'equazione di Rayleigh, in figura 1.6 con il valore di α_i ottenuto a seguito dell'interpolazione dei dati sperimentali, si risale alla pulsazione ω . Da questa, si ottiene una stima del numero d'onda α_r , calcolato come $\frac{\omega}{c}$, ed infine della lunghezza d'onda della fluttuazione di velocità.

La celerità è assunta come la velocità media nella regione della scia considerata per l'interpolazione con legge 2.9, mostrata in figura 2.12 (a).

Per la seconda prova, l'interpolazione con legge esponenziale dell'ampiezza dell'oscillazione è effettuata non considerando i primi due e gli ultimi cinque punti, come è evidente da figura 2.13 (b). In tali punti si osserva infatti un andamento costantemente decrescente dell'ampiezza, presumibilmente non legato al fenomeno di instabilità. La regione indagata pertanto si restringe, come mostrato in figura 2.12 (b), a quella compresa fra 0.007 m dall'origine fino a 0.053 m da essa. È tale regione, evidenziata in linea tratteggiata, che si considera per il calcolo della celerità di propagazione della perturbazione.

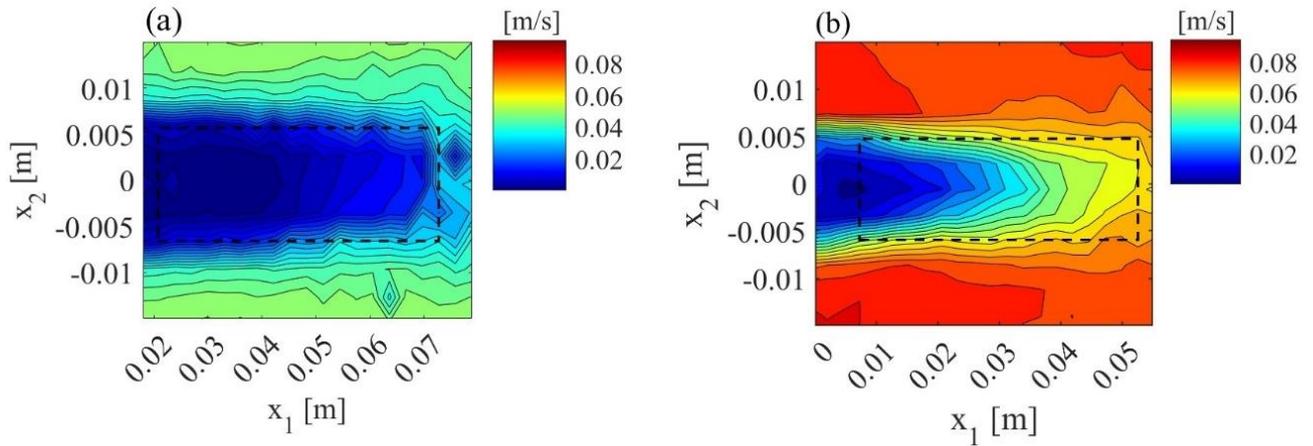


Figura 2.12. Isolinee del modulo della velocità media: (a) $Re=6917$; (b) $Re=12500$. In linea tratteggiata è mostrata la regione considerata per il calcolo della celerità

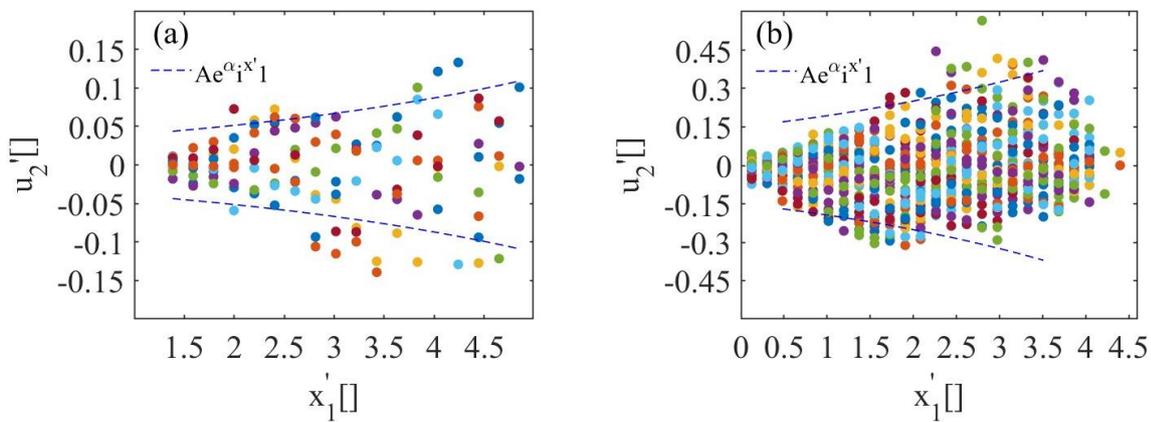


Figura 2.13. Fitting con legge esponenziale delle ampiezze delle oscillazioni nello spazio: (a) $Re=6917$; (b) $Re=12500$

Ampiezza e numero d'onda dell'oscillazione di velocità

Partendo dai risultati ottenuti, si approfondisce l'analisi spaziale considerando, per la prima prova, le oscillazioni di velocità più complete in termini di dati, ossia quelle che hanno lunghezza pari ad almeno l'80 % della lunghezza della regione indagata. Questa limitazione è dovuta al fatto che alcune oscillazioni spaziali presentano molti valori mancanti. Solo 5 delle 9 totali a disposizione soddisfano il suddetto criterio. Di esse si esegue un nuovo fitting, con l'espressione 2.7, avendo fissato il valore di α_i e considerando come parametri A , α_r e x_0 . I valori di ampiezza e numero d'onda derivanti dall'interpolazione dei dati sperimentali vengono registrati.

Si esegue un'operazione analoga per i dati ottenuti con la seconda prova, considerando tutte e 41 le oscillazioni spaziali nella regione indagata, poiché esse generalmente non presentano valori mancanti.

Per stabilire quanto l'interpolazione sia corretta, per ciascuna di esse si valuta il coefficiente di determinazione, R^2 , e la radice quadrata dell'errore quadratico medio. R^2 è un indice che misura

il legame tra la variabilità dei dati e la correttezza del modello con cui essi sono interpolati. Viene espressa come:

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} \quad (2.10),$$

dove RSS rappresenta la somma degli scarti quadrati fra ciascun dato sperimentale e il rispettivo valore interpolato, mentre TSS rappresenta la varianza dei dati sperimentali rispetto alla media. Pertanto RSS può essere così definita:

$$RSS = \sum_{i=1}^n u'_{2i} - \hat{u}'_{2i} \quad (2.11),$$

dove si assume che u'_{2i} sia l' i -esimo dato sperimentale di oscillazione di velocità e \hat{u}'_{2i} sia il valore interpolato; TSS, invece, è così espressa:

$$TSS = \sum_{i=1}^n u'_{2i} - \overline{u'_2} \quad (2.12),$$

con $\overline{u'_2}$ media dei dati osservati.

Data l'espressione di RSS , essa può essere interpretata come la frazione della varianza dei dati sperimentali non spiegata dal modello, e di conseguenza R^2 rappresenta la frazione della varianza che il modello riesce a spiegare. Esso può quindi variare fra 0 e 1, ed è tanto più elevato quanto più l'interpolazione rappresenta correttamente i dati. Un valore negativo di R^2 significa che la media dei dati sperimentali fornisce un'approssimazione migliore rispetto alla funzione interpolante utilizzata.

La radice quadrata degli scarti quadratici medi è esprimibile come:

$$RMSE = \frac{\sqrt{RSS}}{n-m} \quad (2.13),$$

dove n rappresenta il numero di dati sperimentali considerati per la singola operazione di interpolazione e m il numero di parametri del modello, in questo caso 3.

Si osservano i risultati ottenuti per capire effettivamente dove si collocano i casi di studio all'interno del grafico delle soluzioni dell'equazione di Rayleigh e quanto si è lontani dalla condizione di risonanza.

2.4.3 Analisi temporale

L'analisi temporale delle oscillazioni di velocità ha l'obiettivo di analizzare l'andamento dell'oscillazione nel tempo in corrispondenza di tutti i punti di flesso dei profili medi di velocità per estrarre una distribuzione statistica della pulsazione dell'oscillazione. In questo modo si può confermare o smentire i risultati cui si giunge con l'analisi spaziale.

L'analisi consiste nel registrare il valore medio della pulsazione caratterizzante ogni singola oscillazione temporale, ossia $\frac{2\pi}{T}$, con T periodo dell'oscillazione, e la sua deviazione standard. Si considera anche qual è il numero di passaggi per zero che l'oscillazione compie, ossia quanti periodi si osservano all'interno della durata dell'acquisizione, per capire quanto sono significative la media e la deviazione standard calcolate. Si ha una confidenza maggiore nei risultati che si ottengono per la seconda prova, dal momento che all'interno della durata dell'acquisizione, di 6.2 s si hanno 41 campioni, mentre per la prima prova 9 campioni nell'intervallo temporale di 3.1 s in cui si sono acquisite le 500 immagini.

3. Risultati

3.1 Campo di moto medio

I coefficienti di variazione di u_1 , in figura 3.2, e di u_2 , in figura 3.3, sono simili fra i due casi di studio. Il coefficiente di variazione della componente orizzontale di velocità raggiunge un massimo di 20 per il flusso con $Re=6917$ e di circa 7 per flusso con $Re=12500$, complice la più elevata velocità media per questo secondo flusso. I più alti valori del coefficiente di variazione della componente verticale della velocità u_2 , invece, in figura 3.3, sono fra 50 e 150 per entrambi i casi di studio. Per $Re=12500$, si tocca un picco di 240. Se si considera che la velocità media è maggiore per il flusso a più elevato numero di Reynolds, questi andamenti del coefficiente di variazione di u_2 sono indici di una più alta deviazione standard per il flusso con $Re=12500$, rispetto a quello caratterizzato da $Re=6917$, quindi una maggiore turbolenza generata. I valori più alti di deviazione standard di tale componente di velocità, $0.015-0.02 \frac{m}{s}$ per flusso con $Re=12500$, infatti, sono evidentemente superiori a quelli che si riscontrano per il flusso con $Re=6917$, $0.004-0.006 \frac{m}{s}$.

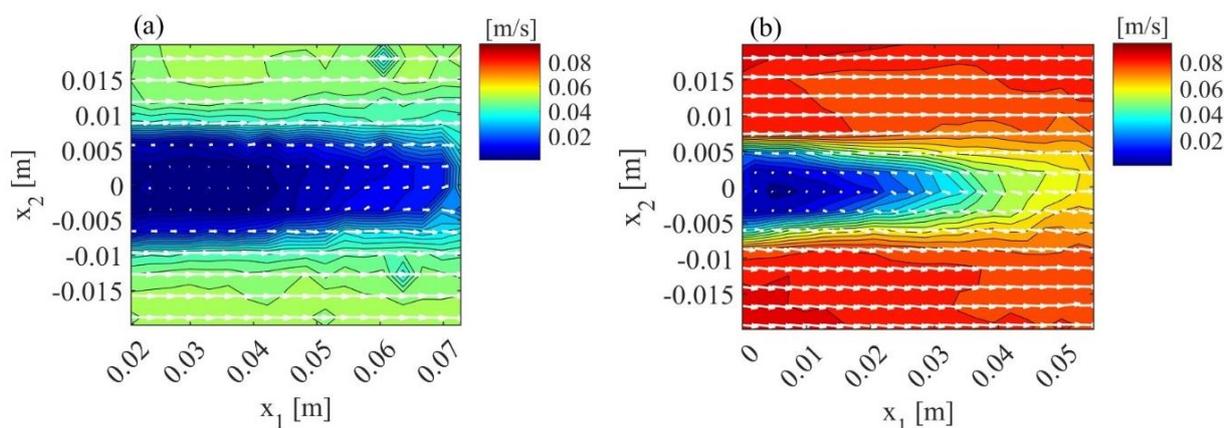


Figura 3.1. Campo di moto medio con isolinee del modulo della velocità: (a) flusso con $Re=6917$; (b) flusso con $Re=1250$

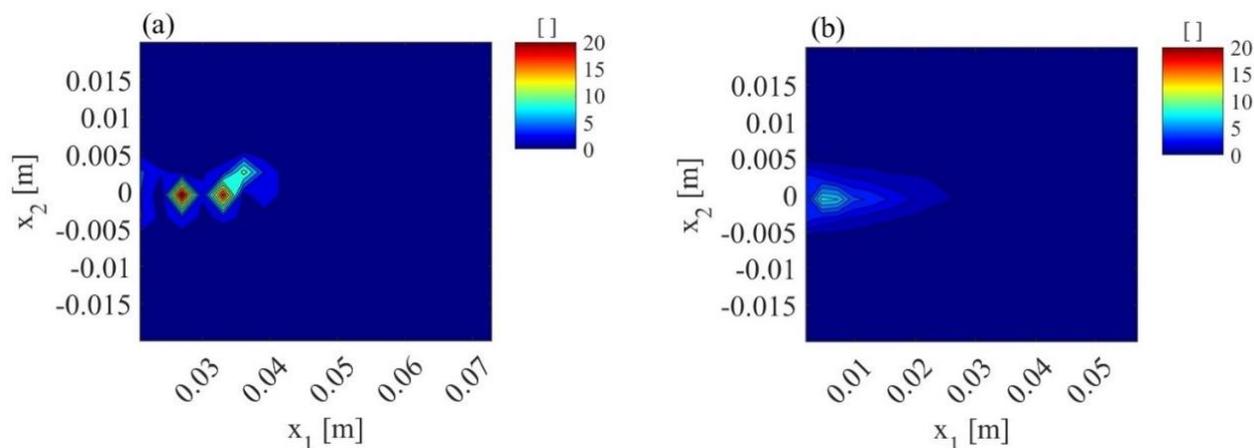


Figura 3.2. Coefficiente di variazione della componente orizzontale della velocità, u_1 : (a) $Re=6917$; (b) $Re=12500$

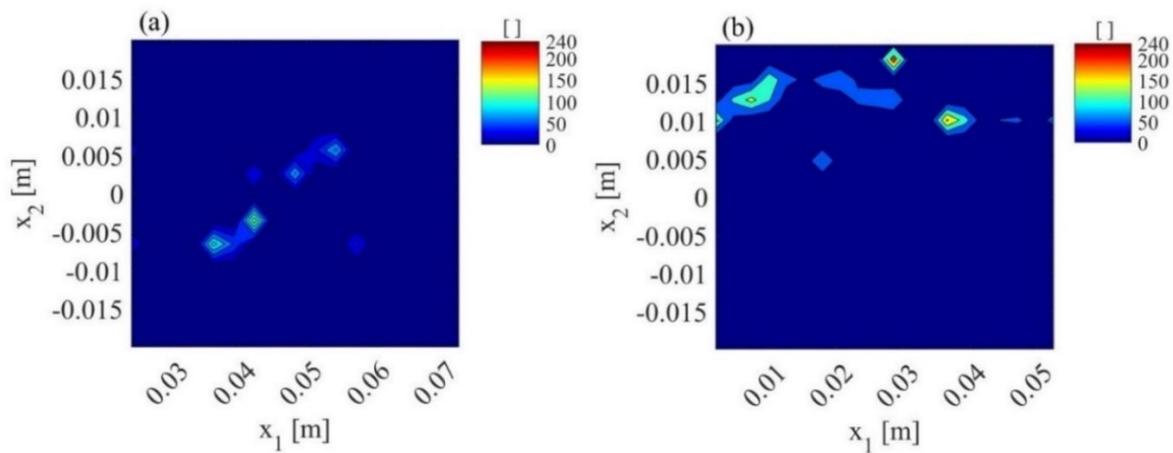


Figura 3.3. Coefficiente di variazione della componente verticale della velocità, u_2 : (a) $Re=6917$, (b) $Re=12500$

I prodotti delle fluttuazioni di velocità in figura 3.4 risultano più elevati, in modo particolare $\overline{u_2'^2}$ e $\overline{u_1'u_2'}$, per $Re=12500$, a conferma della maggiore turbolenza generata in scia. La vorticità calcolata sulla base del campo di moto medio, in figura 3.5, non mostra grandi differenze nei due casi, mostrando un intervallo di variazione leggermente più ampio per il flusso a più alto numero di Reynolds. Per il flusso con $Re=6917$, essa varia fra -10 e 10 s^{-1} lungo l'altezza del canale, invertendo il proprio segno in corrispondenza dell'asse orizzontale di quest'ultimo. Nel caso di $Re=12500$, invece, la vorticità varia fra -16 e 21 s^{-1} . Per il caso con Re più basso, la vorticità persiste fino a distanze superiori lungo lo sviluppo del canale.

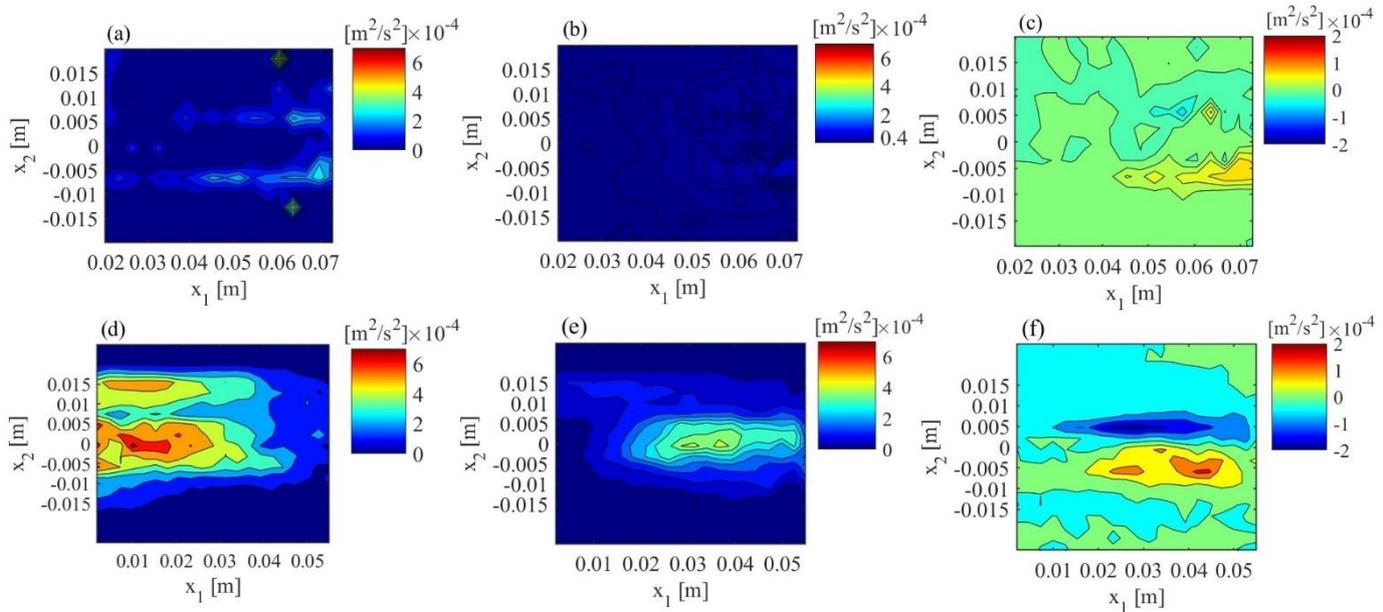


Figura 3.4. Componenti del tensore degli sforzi di Reynolds: (a) $\overline{u_1^2}$, (b) $\overline{u_2^2}$, (c) $\overline{u_1u_2}$ per $Re=6917$; (d) $\overline{u_1^2}$, (e) $\overline{u_2^2}$, (f) $\overline{u_1u_2}$ per $Re=12500$

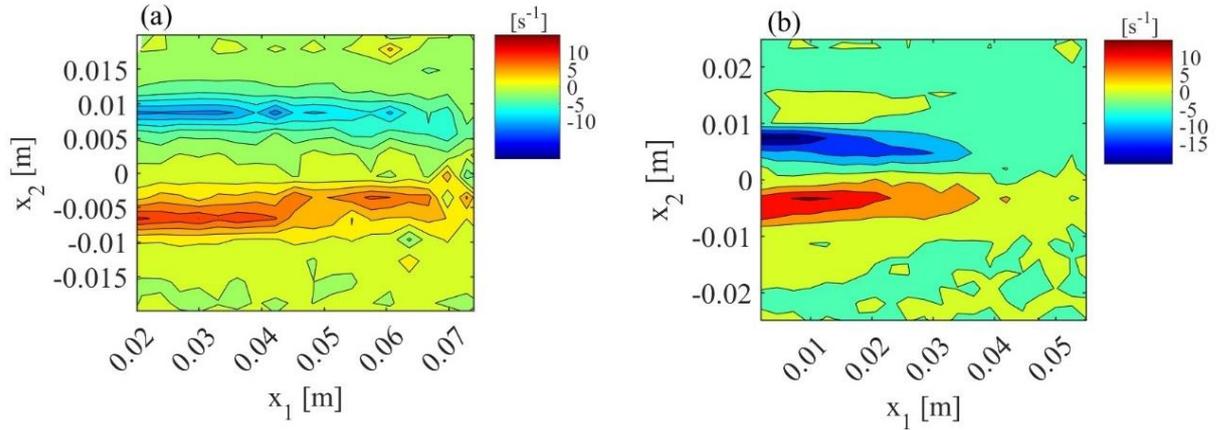


Figura 3.5. Vorticità per: (a) $Re=6917$, (b) $Re=12500$

3.2 Campo di moto oscillatorio, $Re = 6917$

Per la prima prova (dataset di 500 immagini acquisite a 162 fps, portata di $0.83 \frac{L}{s}$, $Re_{galleria}$ pari a 6917), il fattore di amplificazione restituito dalla funzione di fitting, sulla base della legge 2.9 è 0.26. La pulsazione stimata a partire dalla soluzione nota dell'equazione di Rayleigh, considerando $Q = 0.9$, è di $1.367 \frac{rad}{s}$. La celerità nella regione della scia indagata, valutata sul campo medio, è $0.0124 \frac{m}{s}$, il numero d'onda α_r calcolato come $\frac{\omega}{c}$ è $110.242 \frac{rad}{m}$, ossia la lunghezza d'onda λ , calcolata come $\frac{2\pi}{\alpha_r}$ è circa 0.057 m.

L'ampiezza e il numero d'onda, ottenuti a seguito dell'interpolazione dei dati sperimentali di ogni oscillazione di velocità nello spazio, sono riportati in tabella 3.1. Prendendo in considerazione le interpolazioni migliori, ossia quelle caratterizzate da un valore di R^2 pari o superiore a 0.6, si possono ricavare i parametri caratteristici dell'oscillazione di velocità, ossia: la lunghezza d'onda λ ; la pulsazione ω ; determinata come $c\alpha_r$, dove la celerità c è calcolata sul singolo campo di velocità istantaneo, come media della componente longitudinale della velocità nella regione della scia indagata, in figura 2.12 (a); la frequenza f come $\frac{\omega}{2\pi}$.

La perturbazione osservata ha un'ampiezza iniziale di $0.0010-0.0017 \frac{m}{s}$, una lunghezza d'onda nell'intervallo fra 0.04 e 0.05 m e una frequenza fra 0.3 e 0.4 Hz, cioè prossima a quella di risonanza, che corrisponde a un periodo compreso fra 2.5 e 3.3 s. Ciò significa che nella regione indagata, estesa per 5.2 cm si è limitati a vedere circa una lunghezza d'onda dell'oscillazione di velocità, mentre nella durata dell'acquisizione, di 3.1 s, si può osservare un periodo dell'oscillazione.

c [m/s]	A [m/s]	α_r [rad/m]	λ [m]	ω [rad/s]	f [Hz]	RMSE	R ²
0.0189	-0.0017	130	0.048	2.46	0.39	0.029	0.78
0.0153	0.0017	98				0.047	0.54
0.0116	0.0010	167.33	0.037	1.94	0.31	0.025	0.66
0.0107	-0.0012	152	0.041	1.63	0.26	0.029	0.70
0.0104	-0.0005	138.67				0.055	0.09

Tabella 3.1. Risultati dell'interpolazione delle singole oscillazioni di velocità campionate ($Re=6917$)

Dai risultati dell'analisi temporale, in tabella 3.2, si evince che per la maggior parte delle oscillazioni, si è limitati ad osservare 2 o 3 passaggi per zero della sinusoidale, ossia meno di un periodo. Nei tre casi in cui si osservano 4 passaggi per zero, le pulsazioni stimate, 4.71 ± 3.27 , 4.04 ± 0.91 e $5.65 \pm 3.63 \frac{rad}{s}$ sono più alte di quelle a cui si arriva attraverso l'analisi spaziale. Avendo a disposizione pochi campioni nel tempo, 9 in 3.1 s di acquisizione, l'affidabilità dei risultati ottenuti appare piuttosto bassa.

ω [rad/s]	σ_ω [rad/s]	Numero di passaggi per zero
3.14	0	2
4.71	3.27	4
4.04	0.91	4
4.71	4.44	3
4.71	0	2
4.71	0	3
4.71	4.44	3
9.42	0	2
1.88	0	2
4.71	0	3
3.14	0	2
4.71	0	2
4.71	4.44	3
5.65	3.63	4
3.14	0	2

Tabella 3.2. Distribuzione statistica della pulsazione dell'oscillazione di velocità ($Re=6917$)

3.3 Campo di moto oscillatorio, $Re = 12500$

Per il secondo caso di studio (1000 immagini acquisite a 162 fps, portata di $1.5 \frac{L}{s}$, $Re_{galleria}$ pari a 12500), l'interpolazione con legge esponenziale delle ampiezze della fluttuazione di velocità u'_2 , in figura 2.13 (b), fornisce un fattore di amplificazione α_i di 0.26, uguale a quello ottenuto per la prova a Re più basso.

I risultati dell'analisi spaziale sono mostrati nelle tabelle 3.3 e 3.4. 18 operazioni di interpolazione, su 41 totali, sono caratterizzate da R^2 pari o superiore a 0.6. Su di esse ci si basa per stimare i parametri dell'oscillazione di velocità. Dai risultati di 11 di questi fitting, ossia il 61 % del totale, si evince che l'ampiezza iniziale della perturbazione è nell'intervallo fra 0.0067 e $0.011 \frac{m}{s}$, la lunghezza d'onda λ è nell'intervallo fra 0.027 e 0.037 m, con valori più ricorrenti di 0.030, 0.031, 0.032 e 0.033 m. La pulsazione ω è fra 8.31 e $11.02 \frac{rad}{s}$, ossia la frequenza f è fra 1.32 e 1.75 Hz. Più in dettaglio, 4 degli 11 valori, ossia il 36 %, sono fra 9.36 e $9.96 \frac{rad}{s}$ (frequenze fra 1.49 e 1.59 Hz), 5 valori su 11, il 45 %, fra 10 e $10.54 \frac{rad}{s}$ (frequenze fra 1.59 e 1.68 Hz).

Altre 5 interpolazioni, diverse dalle 11 considerate ora, quindi il 27.8 % delle 18 totali, permettono di confermare i risultati ottenuti con le 11 interpolazioni di cui sopra in termini di ampiezza iniziale della perturbazione e di lunghezza d'onda, ma portano a determinare un intervallo diverso per la pulsazione, fra 6.95 e $8.11 \frac{rad}{s}$, quindi frequenza fra 1.11 e 1.29 Hz.

L'analisi spaziale permette di concludere che l'oscillazione di velocità ha un'ampiezza iniziale mediamente di $0.0084 \frac{m}{s}$ e una lunghezza d'onda probabilmente fra 0.030 e 0.033 m. Nella regione di spazio della scia che si considera, estesa per 4.6 cm, da 0.7 cm dall'origine a 5.3 cm da essa, si osserva poco più di una lunghezza d'onda (1.4 circa). La frequenza caratteristica non è individuata in modo univoco: il 61 % delle oscillazioni di velocità considerate ha frequenza nell'intervallo fra 1.49 e 1.68 Hz, quindi periodo fra 0.59 e 0.67 s, ma c'è una frazione non trascurabile di esse, il 27.8 %, che presenta frequenze nell'intervallo fra 1.11 e 1.29 Hz, ossia periodo fra 0.77 e 0.90 s.

c [m/s]	A [m/s]	α_r [rad/m]	λ [m]	ω [rad/s]	f [Hz]	RMSE	R ²
0.0506	-0.17	0.23				0.17	-0.002
0.0512	-0.55	0.47				0.12	0.30
0.0510	-0.40	0.07				0.10	0.0006
0.0501	-0.021	1.33				0.13	-0.004
0.0523	-0.0084	210.67	0.030	11.02	1.75	0.12	0.57
0.0542	0.0067	106.00				0.10	0.47
0.0518	-0.41	0.067				0.13	-0.002
0.0490	0.0084	196.00	0.032	9.60	1.53	0.08	0.71
0.0448	-0.0067	235.33	0.027	10.54	1.68	0.06	0.74
0.0448	-0.058	2.00				0.14	0.06
0.0475	0.11	0.00				0.20	-0.0006
0.0482	-0.17	2				0.19	0.28
0.0494	-0.0076	194.00	0.032	9.58	1.52	0.05	0.83
0.0512	0.029	0.2				0.16	-0.001
0.0493	-0.0092	168.67	0.037	8.31	1.32	0.08	0.74
0.0487	0.023	12.00				0.16	0.24
0.0489	0.0067	207.33	0.030	10.14	1.61	0.08	0.64
0.0495	0.0067	64.00				0.07	0.30
0.0515	0.010	190.67				0.16	0.47
0.0500	0.0092	200.00	0.031	10	1.59	0.07	0.81

Tabella 3.3. Risultati dell'interpolazione delle singole oscillazioni di velocità campionate ($Re=12500$)

c [m/s]	A [m/s]	α_r [rad/m]	λ [m]	ω [rad/s]	f [Hz]	RMSE	R ²
0.0504	0.091	1.33				0.14	0.11
0.0514	0.22	0.33				0.15	0.05
0.0528	-0.010	188.67	0.033	9.96	1.59	0.08	0.81
0.0527	-0.011	200	0.031	10.54	1.68	0.08	0.81
0.0517	0.0076	198	0.032	10.24	1.63	0.06	0.78
0.0506	-0.077	0.20				0.11	0.008
0.0491	0.0076	190.67	0.033	9.36	1.49	0.07	0.73
0.0489	0.0076	111.33	0.056	5.44	0.87	0.08	0.67
0.0475	-0.0034	80.67				0.06	0.16
0.0439	0.013	0.27				0.06	0.004
0.0430	0.76	0.60	10.47	0.03	0.005	0.10	0.65
0.0419	0.19	2.00	3.14	0.13	0.02	0.08	0.65
0.0424	0.0025	76.67				0.02	0.38
0.0444	0.0042	83.33				0.04	0.50
0.0414	0.0050	162.00				0.07	0.56
0.0417	0.0059	166.67	0.038	6.95	1.11	0.07	0.68
0.0415	0.0042	171.33	0.037	7.11	1.13	0.04	0.67
0.0394	0.0034	194.67	0.032	7.67	1.22	0.04	0.63
0.0411	0.0025	197.33	0.032	8.11	1.29	0.03	0.67
0.0384	0.0025	97.33				0.09	0.15
0.0366	-0.0059	188.67	0.033	6.90	1.10	0.07	0.66

Tabella 3.4. Risultati dell'interpolazione delle singole oscillazioni di velocità campionate ($Re=12500$)

I risultati dell'analisi temporale, in tabella 3.5, permettono di stabilire che 12 oscillazioni di velocità su 18 totali, ossia il 66.7 %, ha pulsazione media, stimata sulla base dei dati sperimentali, nell'intervallo fra 9.77 e $10.99 \frac{rad}{s}$; 3 su 18, ossia il 16.7 % ha pulsazione fra 11.28 e $11.57 \frac{rad}{s}$ e altre tre, ossia il restante 16.7 % nell'intervallo fra 7.54 e $9.02 \frac{rad}{s}$. Le deviazioni standard associate a ciascun valore medio di pulsazione sono estremamente alte e ciò è dovuto all'incertezza sulla stima del periodo, da cui la pulsazione viene ricavata.

I risultati dell'analisi spaziale sono confermati. La maggior parte delle oscillazioni ha pulsazione nell'intervallo fra 9.77 e $10.99 \frac{rad}{s}$, ossia frequenza nell'intervallo fra 1.55 e 1.75 Hz. Il periodo della perturbazione di velocità è fra 0.57 e 0.64 s. Nella durata dell'acquisizione si possono quindi osservare circa 10 periodi della fluttuazione di velocità.

ω [rad/s]	σ_ω [rad/s]	Numero di passaggi per zero
7.54	5.54	13
9.77	4.67	17
9.84	5.85	18
10.10	4.34	18
10.15	6.72	19
10.15	5	19
10.15	6.11	19
10.38	6.60	18
11.29	6.50	20
8.91	5.91	16
10.42	6.06	19
10.71	4.60	20
11.28	5.51	21
10.42	4.96	19
11.57	6.21	21
10.99	5.21	20
10.71	5.87	20
9.02	4.88	17

Tabella 3.5. Distribuzione statistica della pulsazione dell'oscillazione di velocità ($Re=12500$)

4. Discussione

4.1 Confronto delle prove effettuate a diverso numero di Reynolds

In tabella 4.1 viene proposto un confronto diretto dei risultati per le due condizioni investigate, considerando i risultati dell'analisi spaziale per il primo caso, laddove la durata dell'acquisizione è apparsa troppo corta per ottenere stime temporali attendibili, e quelli forniti da analisi spaziale e temporale per la seconda prova. La regione indagata è leggermente differente: per numero di Reynolds maggiore si considera la scia prodotta immediatamente a valle dell'ostacolo, fino a 5.3 cm da esso, mentre per quello più basso si indaga la regione della scia generata a partire da poco più di una lunghezza caratteristica dall'ostacolo, 2.1 cm, fino a 7.3 cm da esso. Il fattore di amplificazione della perturbazione nello spazio è uguale nei due casi. Ciò che cambia sono i valori delle ampiezze, iniziale e finale. Si passa da un'ampiezza iniziale di circa 0.001/0.002 m/s ad una finale di 0.005 m/s per basso numero di Reynolds. Per alto numero di Reynolds le ampiezze delle fluttuazioni sono decisamente più alte di quelle che si osservano per basso numero di Reynolds: si passa da 0.008 m/s come ampiezza iniziale a 0.03 m/s come ampiezza finale.

Il differente numero di Reynolds impatta in modo evidente sulla frequenza caratteristica dell'oscillazione di velocità. Essa è nell'intervallo 0.3-0.4 Hz per $Re_{galleria}=6917$, mentre si assesta su 1.5-1.7 Hz per $Re_{galleria}=12500$.

	Prima prova	Seconda prova
$Re_{galleria}$	6917	12500
$Re_{profilo}$	3420	6210
Durata dell'acquisizione [s]	3.1	6.2
Risoluzione spaziale [mm]	3	3
Regione indagata (rispetto a origine del sistema di riferimento)	Da 2.1 cm a 7.3 cm	da 0.7 cm a 5.3 cm
Risoluzione temporale [s]	0.33	0.14
Fattore di amplificazione dell'oscillazione ⁴⁷⁵ 8e	0.26	0.26
Frequenza dell'oscillazione [Hz]	0.3-0.4	1.5-1.7
Pulsazione dell'oscillazione [rad/s]	1.6-2.5	9.4-11.0
Periodo [s]	2.5-3.3	0.59-0.67
Lunghezza d'onda [m]	0.04-0.05	0.030-0.033
Intervallo di ampiezze (iniziale-finale) caratterizzanti l'oscillazione [m/s]	0.001/0.002-0.005	0.008-0.03

Tabella 4.1. Confronto fra i due casi di studio

4.2 Confronto dei risultati sperimentali con le soluzioni analitiche

I risultati sperimentali si collocano come mostrato in figura 4.1 all'interno delle soluzioni analitiche dell'equazione di Rayleigh, determinate da *Betchov & Criminale* (1967).

Per il flusso a basso numero di Reynolds, sulla curva di dispersione per Q pari a 0.9, ci si trova nell'intervallo di pulsazioni fra 1.63 (0.48 in termini adimensionali) e $2.46 \frac{rad}{s}$ (0.72 in termini adimensionali), centrato attorno alla pulsazione di risonanza, $2.04 \frac{rad}{s}$ (0.6 come pulsazione adimensionale). Osservando tale curva, che mostra l'andamento del fattore di amplificazione $-\alpha_i$ in funzione della pulsazione ω , si nota che $-\alpha_i$ pari a 0.26 è il valore che ci si aspetta agli estremi del suddetto intervallo di pulsazioni. In corrispondenza della pulsazione di risonanza, invece, il fattore di amplificazione dell'ampiezza della perturbazione è più alto, pari a 0.56.

Il flusso ad alto numero di Reynolds è caratterizzato da frequenze circa 3 volte più grandi di quelle del primo caso considerato. Esse sono nell'intervallo fra 9.4 (1.68 come pulsazione adimensionale) e $11 \frac{rad}{s}$ (1.96 come pulsazione adimensionale). Tale range è al di fuori dell'intervallo di frequenze per cui è valida la soluzione di *Betchov & Criminale* in figura 4.1.

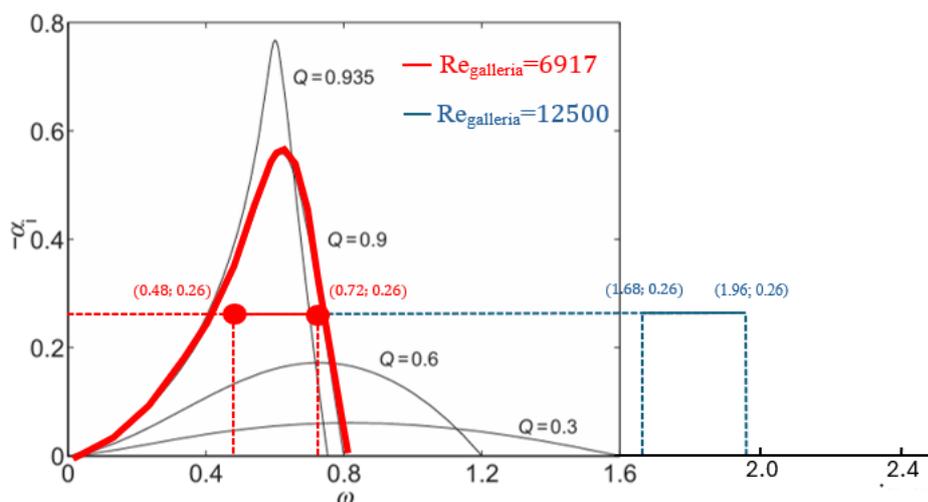


Figura 4.1. Rappresentazione dei risultati sperimentali nell'insieme delle soluzioni proposte da *Betchov & Criminale* (1967)

È importante osservare che in entrambi i casi si indaga una regione della scia prossima all'ostacolo. Nella prima prova, infatti, la scia è a circa una lunghezza caratteristica da esso, mentre per la seconda prova, a più alto numero di Reynolds, si considera la scia prodotta immediatamente a tergo del profilo idrodinamico. È pertanto comprensibile, soprattutto per questo secondo flusso, che la soluzione proposta da *Betchov & Criminale* non sia valida. Si confrontano, quindi, i risultati sperimentali relativi ad esso con la soluzione di *Papageorgiou & Smith* (1989), in figura 4.2. Sono

riportate diverse curve per diversi valori della coordinata adimensionale ξ , che rappresenta la distanza dall'ostacolo. Questa è minore di 0.02 (tendente a 0), dal momento che la scia è immediatamente a tergo dell'ostacolo.

In ascissa sono riportate frequenze adimensionali. La frequenza adimensionale f' è così definita a partire dalla frequenza f , espressa in Hz:

$$f' = \frac{f \cdot s}{U_{2ext}} \quad (4.1).$$

Il flusso indagato ha frequenze nel range fra 1.5 e 1.7 Hz, ossia fra 0.28 e 0.30 nelle soluzioni di *Papageorgiou & Smith*. Sebbene tale intervallo sia compatibile con la soluzione analitica in figura 4.2, il fattore di amplificazione $-\alpha_i$, pari a 0.26 da risultati sperimentali, è superiore al massimo valore per cui sono riportate le soluzioni, 0.18.

Si conclude che i risultati sperimentali ottenuti per $Re=12500$ non sono compatibili con le soluzioni. Esse infatti sono valide, come ricordato al capitolo 1.3.1, nel campo della stabilità lineare e inviscida, ossia per perturbazioni di velocità piccole rispetto al moto medio. Questa ipotesi non è soddisfatta dal flusso a più alto numero di Reynolds. Infatti, come già messo in evidenza al capitolo 4.1, la frequenza e l'ampiezza dell'oscillazione di velocità sono decisamente superiori rispetto al caso di $Re=6917$, dove, invece, si indaga effettivamente la turbolenza incipiente. Prendendo a riferimento il moto attorno al cilindro, *Sarwar & Mellibovsky (2020)* mettono in evidenza che il regime di transizione, dove si genera l'instabilità dello shear layer, è caratterizzato da numeri di Reynolds nell'intervallo fra 190 e 10000. Tale regime è successivo alla nascita dei vortici di Von Karman, che persistono da Re circa pari a 47 fino a $Re \sim 190$, seguiti dalla formazione di due modi instabili tridimensionali, rispettivamente per numeri di Reynolds di 190 e 260.

Si osserva, quindi, che il flusso a più alto numero di Reynolds, 12500, è fuori dal suddetto intervallo: la turbolenza è già sviluppata.

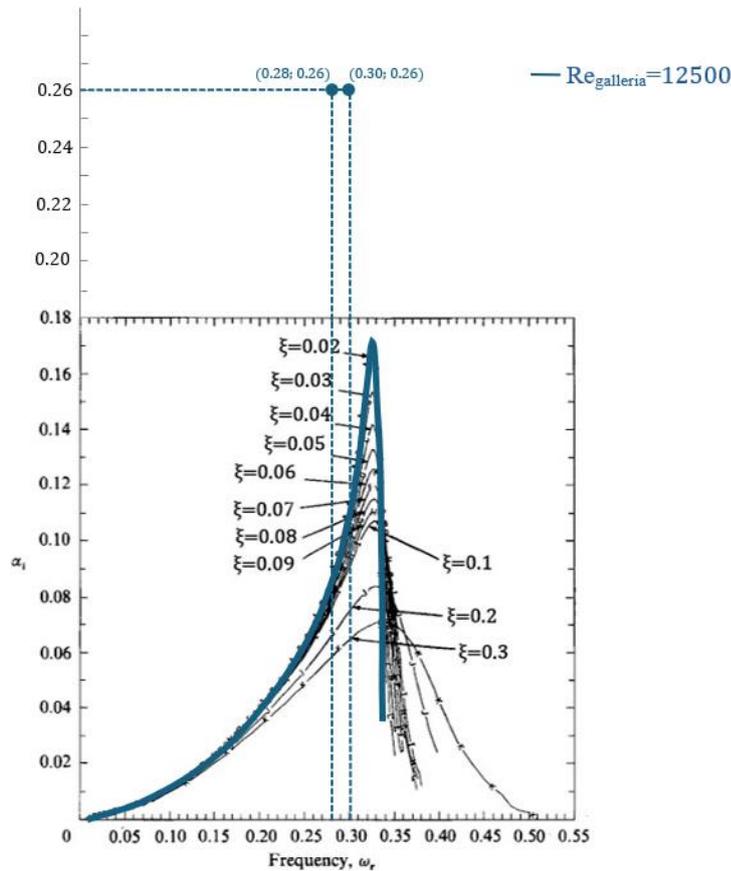


Figura 4.2. Rappresentazione dei risultati sperimentali per $Re=12500$, nell'insieme delle soluzioni per scia prossima all'ostacolo, proposte da Papageorgiou & Smith (1989)

4.3 Limiti dell'apparato sperimentale

È già stato messo in luce, al capitolo 3.3, che per il flusso caratterizzato da $Re=12500$ si osservano 10 periodi dell'oscillazione nei 6.2 secondi di acquisizione. All'interno del singolo periodo, di circa 0.6 secondi, campionando a 7 Hz, si hanno 42 campioni. Queste condizioni sono sufficienti per individuare la frequenza tipica del fenomeno indagato.

Per quanto riguarda, invece, il flusso con $Re=6917$, si riesce ad osservare solamente circa un periodo dell'oscillazione di velocità. Campionando a 3 Hz i campi di velocità istantanei, all'interno della durata dell'acquisizione si hanno solamente 9 campioni, insufficienti, stando ai risultati sperimentali, per individuare la frequenza della perturbazione di velocità, come stabilito al capitolo 3.2. Se si vuole determinare con sicurezza tale frequenza, è necessario, prima di tutto, poter osservare almeno un periodo dell'oscillazione di velocità nel tempo all'interno della durata dell'acquisizione. Quest'ultima deve quindi essere superiore rispetto alla durata di 3.1 s dell'acquisizione effettuata. Si può affermare che 6 s di acquisizione, circa il doppio della durata di un periodo dell'oscillazione, sono sufficienti per osservare almeno un periodo dell'oscillazione

di velocità. La RAM messa a disposizione dal computer, permettendo acquisizioni di durata fino a circa 20 s, corrispondenti a 3200 immagini, in tal senso non è limitante. Occorre, inoltre avere un maggior numero di campioni all'interno di un periodo, rispetto agli attuali 9. Una frequenza di 4 Hz, permettendo di averne 12 in un periodo potrebbe essere sufficiente. Affinché sia possibile spingersi ad una tale frequenza di campionamento, il campo di moto lagrangiano deve contenere un maggior numero di vettori, ossia nel flusso devono esserci più particelle che riflettono la luce o migliori condizioni di luminosità. Del resto, è questa la ragione per cui nella seconda prova, avendo un campo di moto lagrangiano più completo, si ha la possibilità di campionare i campi di moto istantanei con una frequenza di 7 Hz.

Per quanto riguarda l'amplificazione della perturbazione nello spazio, si è già osservato al capitolo 2.4.2 che la risoluzione spaziale dei campi di velocità medio e istantaneo di 3 mm non rappresenta un limite. Essa consente di avere a disposizione un sufficiente numero di punti all'interno della lunghezza d'onda della perturbazione di velocità, per ricostruire la sinusoidale. Per il caso a più basso numero di Reynolds, infatti la lunghezza d'onda è nell'intervallo fra 4 e 5 cm, mentre per il flusso indagato nella seconda prova è di 3-3.3 cm. Il limite è dato, però, dall'estensione della regione della scia illuminata dal laser. Lungo l'asse orizzontale essa ha una lunghezza di 7 cm, da 1.5 a 8.5 cm dal bordo di uscita del profilo per la prima prova e da 0 cm a 7.1 cm dal bordo di uscita per la seconda prova. L'inquadratura realizzata dalla videocamera, tuttavia, è più ampia, come si evince da tabella 2.2, al capitolo 2.1. Essa arriva fino ad una distanza di 12.8 cm dal bordo di uscita del profilo per la prima prova effettuata, ossia quella a più basso numero di Reynolds, e fino a 12 cm da esso per la seconda prova, a $Re=12500$. Utilizzando quindi un altro laser accanto al primo, che illumini la regione più a valle, si riuscirebbe a coprire una distanza di 11.3 cm, da 1.5 a 12.8 cm dal bordo di uscita del profilo idrodinamico, nel caso della prima prova, e di 12 cm, da 0 a 12 cm dall'ostacolo per la seconda prova. Nel primo caso questo vuol dire che, mantenendo la stessa inquadratura della videocamera, la regione potenzialmente indagabile, con profili di velocità sufficientemente completi, si estende da 2.1 a 12.8 cm dall'origine, come mostrato in figura 4.3. Si possono così osservare potenzialmente più di due lunghezze d'onda dell'oscillazione spaziale di velocità. In figura 4.3 se ne osservano circa 2.7, avendo assunto λ pari a 4 cm. Se si considera una lunghezza d'onda di 5 cm, se ne possono apprezzare circa 2.1.

Per il flusso a più alto numero di Reynolds, invece, la regione potenzialmente indagabile si estende per 11.3 cm, da 0.7 a 12 cm dal bordo del profilo, utilizzando due laser in serie come mostrato in figura 4.4. Questo consente di osservare 3.4-3.8 lunghezze d'onda della perturbazione di velocità, considerando λ nell'intervallo fra 3 e 3.3 cm. Con λ pari a 3.2 cm, come in figura 4.4, si possono apprezzare circa 3.5 lunghezze d'onda della perturbazione di velocità.

Si può anche utilizzare un singolo laser, ammesso che sia in grado di coprire le suddette distanze, garantendo una sufficiente intensità luminosa.

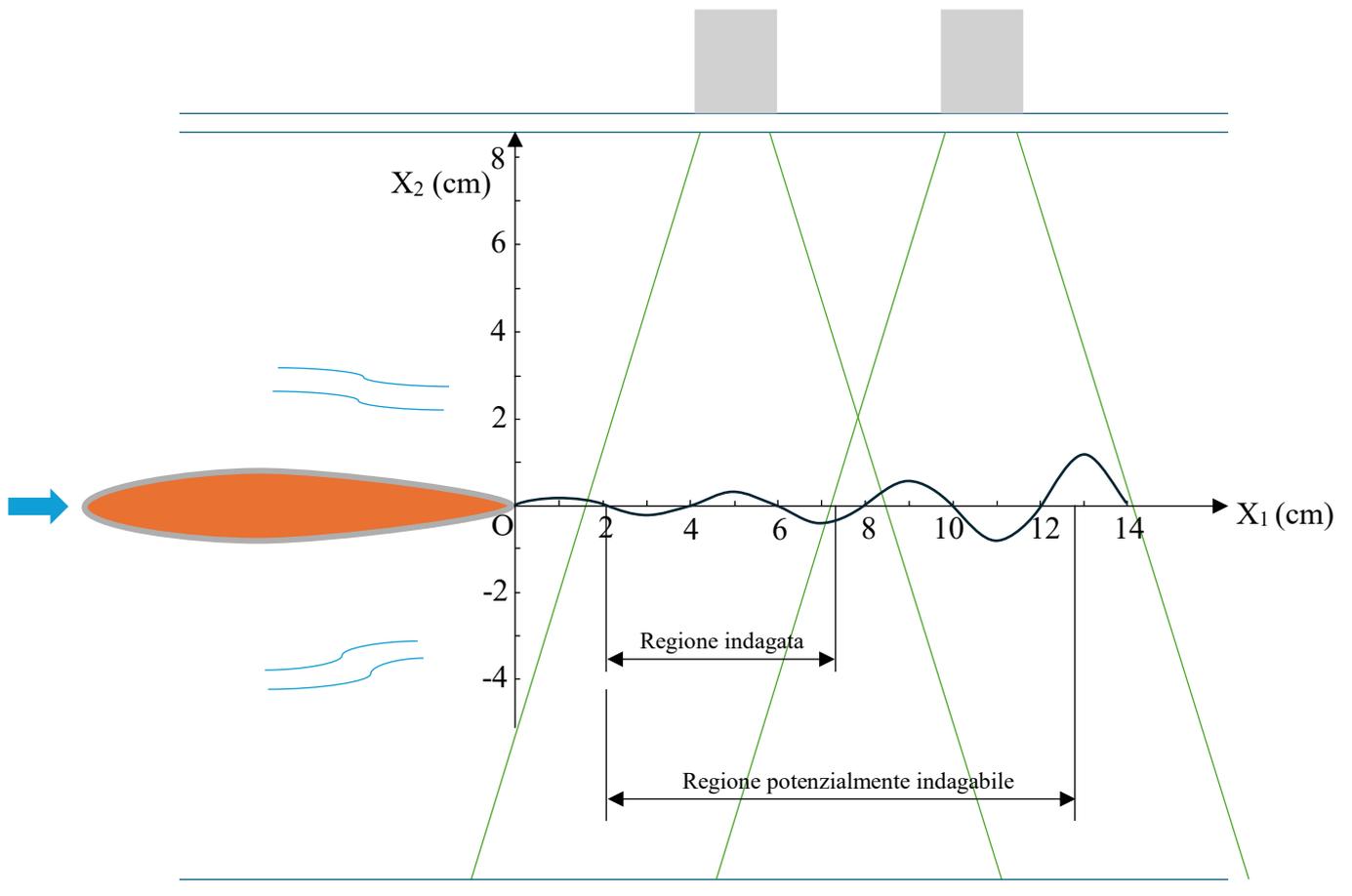


Figura 4.3. Estensione della regione di scia potenzialmente indagabile con l'utilizzo di due laser in serie lungo lo sviluppo longitudinale della galleria (prova con $Re=6917$)

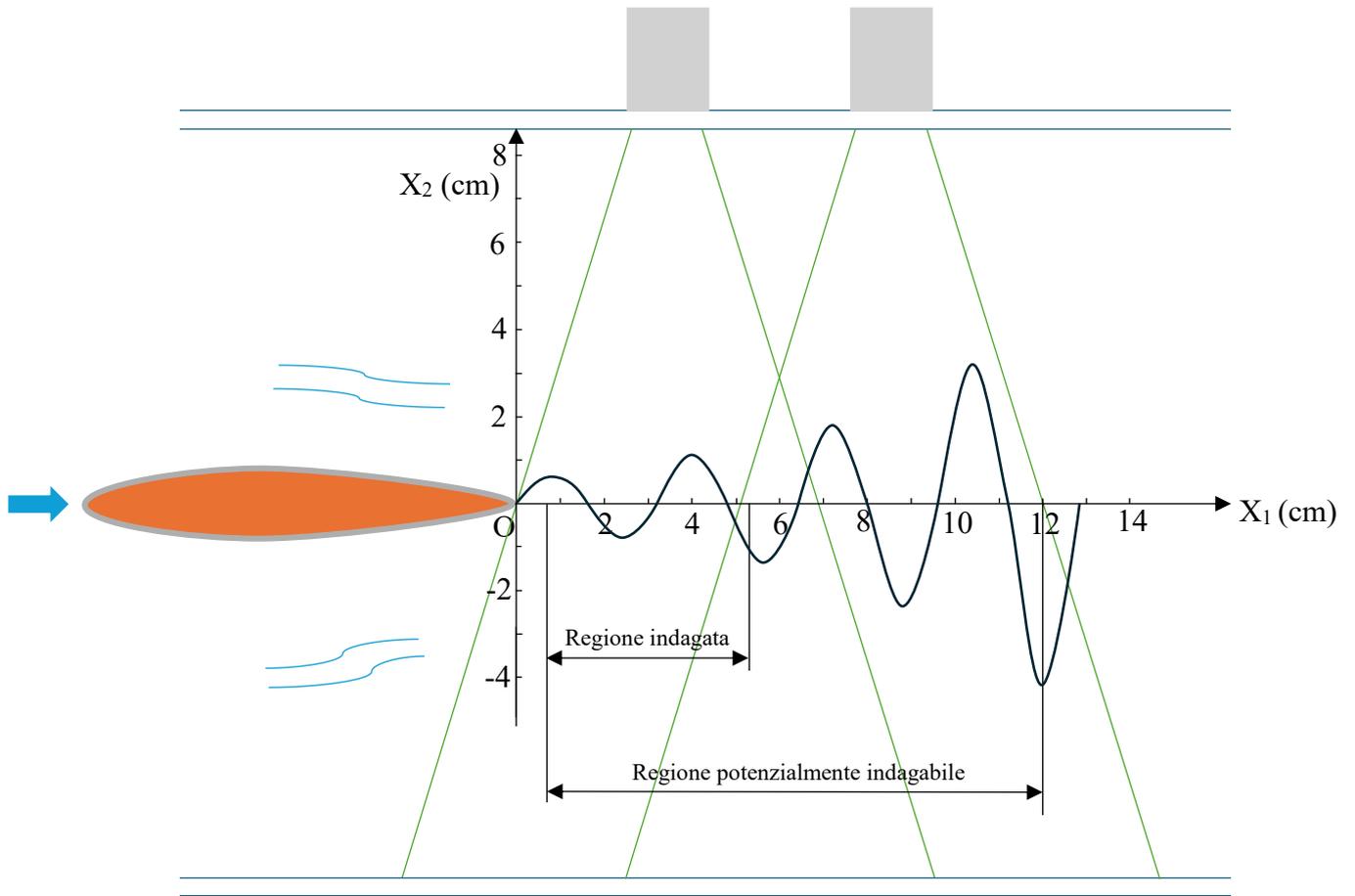


Figura 4.4. Estensione della regione di scia potenzialmente indagabile con l'utilizzo di due laser in serie lungo lo sviluppo longitudinale della galleria (prova con $Re=12500$)

5. Conclusioni

In questa tesi si cerca di caratterizzare, mediante velocimetria ad immagini, la turbolenza di due flussi in galleria ad acqua attorno ad un profilo idrodinamico. I due flussi indagati sono caratterizzati da differenti numeri di Reynolds: 6917 e 12500.

Si conduce un'analisi di stabilità. Sperimentalmente si determinano le oscillazioni della componente verticale di velocità, nello spazio e nel tempo. Esse sono ottenute in corrispondenza dei punti di flesso dei profili della componente longitudinale della velocità media. La scelta di porsi in corrispondenza di questi punti è suggerita dal teorema di Rayleigh, derivato al capitolo 1.3.1. Si determinano, quindi, i parametri spaziali e temporali caratteristici della perturbazione di velocità. Per ottenerli, si esegue un'interpolazione dei dati sperimentali dell'oscillazione di velocità sulla base della forma nota della soluzione dell'equazione di Rayleigh. Si cerca, infatti, essa in forma di modo normale. Determinati i parametri della perturbazione, si stabilisce dove si collocano i risultati sperimentali relativi ai due casi di studio all'interno delle soluzioni analitiche dell'equazione di Rayleigh, di *Betchov & Criminale* (1967) e *Papageorgiou & Smith* (1989).

Ciò permette di confrontare direttamente fra loro i due flussi. Si evidenzia che il differente numero di Reynolds non ha influenza sul fattore di amplificazione della perturbazione nello spazio, pari a 0.26 per entrambi, ma sui valori delle ampiezze dell'oscillazione iniziale e finale, decisamente più elevate per numero di Reynolds maggiore. Si osserva inoltre un evidente impatto del numero di Reynolds sulla frequenza dell'oscillazione di velocità: fra 0.3 e 0.4 Hz per $Re=6917$ e fra 1.5 e 1.7 Hz per $Re=12500$. La lunghezza d'onda, invece, è fra 0.04 e 0.05 m per $Re=6917$ e fra 0.03 e 0.033 m per $Re=12500$.

Sebbene rimanga valido il confronto fra i due flussi, si nota che solamente quello caratterizzato da numero di Reynolds più basso è compatibile con le soluzioni analitiche, in particolare con quelle proposte da *Betchov & Criminale* (1967). Esse sono valide per regione della scia lontana dall'ostacolo, ad almeno una lunghezza caratteristica da esso. Nel caso di Re pari a 12500 non c'è compatibilità fra risultati sperimentali e soluzioni analitiche. Esse infatti sono limitate al campo della stabilità lineare e inviscida, ossia sono valide per perturbazioni di velocità piccole rispetto al moto medio. Questa ipotesi non è soddisfatta dal flusso a più alto numero di Reynolds, caratterizzato, come già evidenziato, da frequenza e ampiezza dell'oscillazione di velocità decisamente superiori rispetto al caso di $Re=6917$. Ne consegue che per $Re=6917$ si indaga effettivamente la turbolenza incipiente, mentre per $Re=12500$ si osserva il moto turbolento già sviluppato. Tale numero di Reynolds è infatti al di fuori dell'intervallo caratterizzante il regime di transizione, dove si origina l'instabilità: fra 190 e 10000 per scia prodotta da un cilindro (*Sarwar & Mellibovsky*, 2020).

Il fattore di amplificazione di 0.26 per $Re=6917$ porta a ipotizzare che non ci si trovi nella condizione di risonanza, dove esso vale circa 0.56, considerando le soluzioni di *Betchov & Criminale* (1967).

L'incertezza maggiore sui risultati ottenuti si ha per il flusso con $Re=6917$. Questa è dovuta al minor numero di dati nel campo di moto lagrangiano rispetto al caso con $Re=12500$, a causa di un minor numero di particelle riflettenti la luce del laser o di peggiori condizioni di luminosità. Il risultato è che la frequenza di campionamento con cui si ottengono campi di moto istantanei sufficientemente completi, 3 Hz, è decisamente inferiore a quella adottata nel caso di $Re=12500$. Di conseguenza il numero di campioni che si ottengono all'interno della durata dell'acquisizione è insufficiente per determinare correttamente la frequenza dell'oscillazione.

L'analisi dell'oscillazione di velocità nello spazio, invece, è limitata per entrambi i flussi dall'estensione della regione della scia illuminata dal laser. Essa, pari a 7 cm lungo l'asse orizzontale della galleria, è decisamente minore rispetto all'ampiezza dell'inquadratura della videocamera. Si osserva così, nel caso di $Re=6917$, poco più di una lunghezza d'onda della fluttuazione di velocità, che è stimata essere 4-5 cm.

Per poter condurre un'analisi più affidabile, soprattutto nel caso del flusso a più basso Re , è pertanto opportuno: migliorare le condizioni di luminosità per poter osservare più particelle nelle immagini e utilizzare due laser in sequenza lungo lo sviluppo della galleria. Così è possibile sfruttare tutta l'ampiezza dell'inquadratura della videocamera. Ciò permette potenzialmente di osservare più di due lunghezze d'onda dell'oscillazione spaziale di velocità (2.1-2.7 per λ nell'intervallo fra 4 e 5 cm). Per il flusso con $Re=12500$, la stessa soluzione porta ad osservare 3.4-3.8 lunghezze d'onda dell'oscillazione di velocità.

6. Bibliografia

AGUI, J.C. & JIMENEZ, J., 1987, *On the performance of particle tracking*, Journal of Fluid Mechanics 185, 447-468.

BAILLY, C. & COMTE-BELLOT, G., 2015, *Turbulence*, Springer, 8-10 22.

BAEK, S.J. & LEE, S.J., 1996, *A new two-frame particle tracking algorithm using match probability*, Experiments in Fluids, 22, 23-32.

BARNARD, S.T. & THOMPSON, W.B., 1980, *Disparity analysis of images*, IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intelligence 2, 333–40.

BETCHOV, R. & CRIMINALE, W. O., 1967, *Stability of parallel flows*, Academic.

BOUSSINESQ, J., 1877, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, 23 (1), 1-680.

CAPART, H., 2000, *Dam-break induced geomorphic flows and the transition from solid- to fluid-like behaviour across evolving interfaces*, PhD thesis, UCL, Belgium.

CAPART, H., LIU, H.-H., VAN CROMBRUGGHE, X., YOUNG, D.L., 1997, *Digital imaging characterization of the kinematics of water-sediment interaction*, Water Air Soil Pollut., 99, 173-177.

CAPART, H., YOUNG, D., ZECH, Y., 2002, *Voronoi imaging methods for the measurement of granular flows*, Experiments in Fluids 32, 121–135.

CHANDRASEKHAR S., 1981, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Dover Press, New York.

CIERPKA, C., LÜTKE, B., KÄHLER, C., 2013, *Higher order multi-frame particle tracking velocimetry*, Experiments in fluids, 54 (5).

- COOLEY, P. W., WALLACE, D., ANTOHE, B., 2001, *Applications of Ink-Jet Printing Technology to BioMEMS and Microfluidic Systems*, Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering, 4560.
- DABIRI, D., 2007, *Cross-Correlation Digital Particle Image Velocimetry*, University of Washington, Department of Aeronautics and Astronautics, Seattle, WA, 98195).
- DRAZIN, P.G., 2002, *Introduction to Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press.
- GHARIB, M., & DABIRI, D., 2000, *Digital Particle Image Velocimetry, Flow Visualization, Techniques and Examples*, Ed. Smits A. J. and Lim T. T., Imperial College Press, Singapore.
- GULER, M., EDIL, T.B., BOSSCHER, P.J., 1999, *Measurement of particle movement in granular soils using image analysis*, J. Comp. Civ. Eng. 13, 116-122.
- HAGEMEIER, T., BÜCK, A., TSOTSAS, E., 2015, *Estimation of Particle Rotation in Fluidized Beds by Means of PTV*, Procedia Engineering 102, 841-849).
- HASSAN, Y. A. & CANAAN, R. E., 1991, *Full field bubbly flow velocity measurements using a multiframe particle tracking technique*, Experiments in Fluids 12, 49–60.
- KOLMOGOROV, A. N., 1941, *Local structure of turbulence in an incompressible fluid at very high Reynolds numbers*, Doklady Akademii Nauk SSSR, 31.
- LIN, Y., ROBINSON, T., EARLY, J, 2011, *Implementation of Menter's Transition Model on an Isolated Natural Lamina Flow Nacelle*, AIAA JOURNAL, 49 (4).
- MERZKIRCH, W., 1974, *Flow Visualization*, Academic Press, New York.
- MESEGUER, A., TREFETHEN, L., 2003, *Linearized pipe flow to Reynolds number 10^7* , J. Comput. Phys., 186, 1178–97.
- OHMI, K. & LI, H.-Y., 2000, *Particle-tracking velocimetry with new algorithms*, Meas. Sci. Technol. 11, 603–616.

ORSZAG, S. A., 1971, *Accurate solution of the Orr–Sommerfeld stability equation*, J. Fluid Mech., 50(4), 689-703.

PAPAGEORGIOU, D.T. & SMITH, F.T., 1989, *Linear instability of the wake behind a flat plate placed parallel to a uniform stream*, J. Fluid Mech, 208, 67-89.

PFENNIGER, W., 1961, *Transition in the inlet length of tubes at high Reynolds numbers*, in *Boundary Layer and Flow Control, Its Principles and Applications*, G Lachman, 970–80, Oxford, UK: Pergamon.

RAFFEL, M., WILLERT, C., WERELEY, S., KOMPENHANS, 2007, J., *Particle image velocimetry- A practical guide*, Springer.

RAFFEL, M., WILLERT, M. & KOMPENHANS, J., 1998, *Particle Image Velocimetry, A Practical Guide*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 135.

RAYLEIGH LORD (J.W. STRUTT), 1880, *On the stability, or instability, of certain fluid motions*, Proceedings of the London Mathematical Society, 11, 57–70.

RODRIGUEZ, A., SANCHEZ-ARCILLA, REDONDO, J.M., MÖSSO, C., 1999, *Macroturbulence measurements with electromagnetic and ultrasonic sensors*, Experiments in fluids, 27 (1), 31-42.

ROSENFELD, A., HUMMEL, R.A. & ZCKER, S.W., 1976 *Scene labeling by relaxation operations*, IEEE, Trans. SMC 6, 6, 420-433.

SEURONT, L., *Microscale Complexity in the Ocean: Turbulence, Intermittency and Plankton Life*, 2008, *Mathematica Modelling of Natural Phenomena* 3(3), 1-41.

SALWEN, H., COTTON, F.W., GROSCH, C.E., 1980, *Linear stability of Poiseuille flow in a circular pipe*, J. Fluid Mech., 98, 2273–84.

SARWAR, W., MELLIBOVSKY, F., 2020, *Characterization of three-dimensional vortical structures in the wake past a circular cylinder in the transitional regime*, Phys. Fluids, 32, 074104.

SCHARNOWSKI, S., BROSS, M., KÄHLER, C., J., 2019, Accurate turbulence level estimation using PIV/PTV, *Experiments in Fluids*, 60 (1).

VERSTEEG, H.K. & MALALAESEKERA, W., 2007, *An introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*, Pearson Education.

WESTERWEEL, J., DABIRI, D., GHARIB, M., 1997, *The effect of a discrete window offset on the accuracy of cross-correlation analysis of digital PIV recordings*, *Experiments in fluids*, 23, 20-28 Springer-Verlag.

WESTERWEEL, J. & SCARANO, F., 2005, *Universal outlier detection for PIV data*, *Exp. Fluids*, 39, 1096-1100, Springer-Verlag.