Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

SEMIGRUPPI DI APPLICAZIONI LINEARI E CONTINUE IN SPAZI DI BANACH

Tesi di Laurea in Analisi funzionale

Relatore:
Chiar.mo Prof.
GUIDETTI DAVIDE

Presentata da:
ROSSI MICHELE

Anno Accademico 2023-2024

Indice

Introduzione

La seguente tesi riguarda la teoria dei semigruppi di operatori lineari e continui. Dati X uno spazio di Banach, D(A) un suo sottospazio denso e $A : D(A) \to X$ un operatore lineare, si vuole determinare una soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) & \text{per } t \geq 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{PC}$$

Verranno analizzati dapprima i problemi ben posti e solo in seguito, introdurremmo i semigruppi e definiremo cosa si intende con generatore infinitesimale di un semigruppo. In particolare, se $T(\cdot)$ è il semigruppo e A rappresenta il suo generatore infinitesimale, allora la soluzione di (PC) può essere scritta come:

$$u(t) = T(t)u_0.$$

Il teorema centrale di tutta la teoria dei semigruppi è il teorema di Hille-Yosida. Esso ci fornisce le condizioni necessarie e sufficienti affinchè l'operatore A sia il generatore infinitesimale di un semigruppo $T(\cdot)$, mettendo in relazione tra loro le caratteristiche del semigruppo e le proprietà spettrali di A.
I semigruppi, inoltre, ci permettono di risolvere problemi ben più complessi, in cui è presente, ad esempio, un dato $f(t)$, con $f \in C^1$. In tal caso il problema

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & \text{per } t \in [0, T] \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{PNO}$$

ammette un'unica soluzione stretta, rappresentata mediante la formula di variazione delle costanti:

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Un caso di rilevante importanza è quello dei semigruppi analitici. Questa classe di semigruppi ci permette la risoluzione del problema di Cauchy (PNO) sotto ipotesi meno restrittive su f. Basterà infatti che la funzione f sia hölderiana di ordine α tale che la formula di variazione delle costanti è la soluzione stretta di (PNO). Nel loro ambito si può studiare la classica equazione del calore in $\mathbb{R}^n$.

Capitolo 0

Premesse

0.1 Integrali di funzioni su spazi di Banach

Definizione 0.1.1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Una partizione di $[a, b]$ è un insieme finito di punti $\{t_i : 0 \leq i \leq n\}$ tale che

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Sia σ una partizione di $[a, b]$. Indichiamo con $|\sigma|$ l'ampiezza di σ, cioè

$$|\sigma| = \max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}|\,.$$

Definizione 0.1.2. Siano X uno spazio di Banach reale o complesso e $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia $f : [a, b] \to X$. Definiamo le somme di Riemann I_σ, per una partizione σ di $[a, b]$, come

$$I_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \qquad \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]. \tag{1}$$

f si dice integrabile secondo Riemann se esiste $z \in X$ tale che
$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che, per ogni partizione σ di ampiezza $|\sigma| < \delta$, si ha

$$\|z - I_\sigma(f)\| < \epsilon. \tag{2}$$

In tal caso poniamo

$$z = \int_a^b f(t)dt. \tag{3}$$

Scriveremo

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{|\sigma| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \qquad \xi_i \in [t_{i-1}, t_i].$$

Lemma 0.1.1. *Se $f \in C([a,b],X)$, allora f è integrabile secondo Riemann.*

Dimostrazione. Per il teorema di Heine-Cantor f è uniformemente continua. Siano $\delta > 0$ e σ, τ due scomposizioni di $[a,b]$.

$$\sigma = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}, \qquad \tau = \{a = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_m = b\}$$

Sia $\epsilon > 0$. Verifichiamo che se $|\sigma|, |\tau| < \delta$ allora

$$\|I_\sigma(f) - I_\tau(f)\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{j=1}^{m} f(d_j)(\tau_j - \tau_{j-1}) \right\| < \epsilon.$$

$$c_1 \in [a, t_1], \dots c_n \in [t_{n-1}, t_n], \quad d_1 \in [a, \tau_1], \dots d_m \in [\tau_{m-1}, \tau_m].$$

Poniamo $\sigma \cup \tau = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_p = b\}$.
$\forall i = 1, \dots n$, $t_{i-1} = s_{r-1} < \cdots < s_{r-q} = t_i$. Segue che

$$f(c_i)(t_i - t_{i-1}) = f(c_i)((s_{r+q} - s_{r+q-1}) + \cdots + (s_r - s_{r-1})) =$$

$$f(c_i)(s_{r+q} - s_{r+q-1}) + \cdots + f(c_i)(s_r - s_{r-1})$$
$$= f(e_{r+q})(s_{r+q} - s_{r+q-1}) + \cdots + f(e_r)(s_r - s_{r-1}),$$

con $f(e_{r+q}) = \cdots = f(e_r) = f(c_i)$.
Quindi otteniamo che

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{r=1}^{p} f(e_r)(s_r - s_{r-1}), \qquad \text{con } e_r \in [t_{i-1}, t_i]$$

e analogamente

$$\sum_{j=1}^{n} f(d_j)(\tau_j - \tau_{j-1}) = \sum_{r=1}^{p} f(e'_r)(s_r - s_{r-1}), \qquad \text{con } e'_r \in [\tau_{j-1}, \tau_j].$$

Stimiamo $|e_r - e'_r|$.
$$|e_r - e'_r| \le |e_r - s_r| + |s_r - e'_r|.$$

Poiché $t_{i-1} \le s_r \le t_i$,

$$|e_r - s_r| \le |e_r - t_i| + |t_i - s_r| \le \delta + \delta = 2\delta.$$

In maniera analoga, poiché $\tau_{j-1} \le s_r \le \tau_j$,

$$|s_r - e'_r| \le |e_r - \tau_j| + |\tau_j - s_r| \le \delta + \delta = 2\delta.$$

Quindi $|e_r - e'_r| \leq 4\delta$.
Dall'uniformeme continuità di f, allora, $\forall \eta > 0$, se $4\delta < \delta(\eta)$ opportuno, $\|f(e_r) - f(e'_r)\| < \eta$. Segue che

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{j=1}^{m} f(d_j)(\tau_j - \tau_{j-1}) \right\| \leq \eta(b-a) < \epsilon.$$

Sia $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la successione di partizioni di $[a,b]$ tali che $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\sigma_k = \{a, a + \frac{b-a}{2^k}, \ldots, a + \frac{2^k - 1}{2^k}(b-a), b\}.$$

Allora, per quanto mostrato in precedenza, $\{I_{\sigma_k}(f)\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in X, e dunque è convergente. Indichiamo con $I(f)$ tale limite. Mostriamo che l'integrale di f è proprio $I(f)$. In effetti se $|\sigma_k| < \delta(\epsilon)$ opportuno, allora

$$\left\| I(f) - \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) \right\| \leq \|I(f) - I_{\sigma_k}(f)\| + \left\| I_{\sigma_k}(f) - \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) \right\| \leq 2\epsilon.$$

$\square$

Lemma 0.1.2. *Sia $f : [a,b] \to X$ continua. Allora $t \mapsto \|f(t)\|$ è continua e si ha*

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| \, dt. \tag{4}$$

Dimostrazione. Siano σ una partizione di $[a,b]$ e $I_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$ la somma di Riemann relativa a σ con $\xi_i \in]t_{i-1}, t_i[$. $t \mapsto \|f(t)\|$ è integrabile in quanto f è continua e

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|f(\xi_i)\| \, (t_i - t_{i-1}).$$

Segue quindi che

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| = \left\| \lim_{|\sigma|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \right\| \leq \lim_{|\sigma|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \|f(\xi_i)\| \, (t_i - t_{i-1}) = \int_a^b \|f(t)\| \, dt.$$

$\square$

Lemma 0.1.3. *Siano $f : [a,b] \to X$ continua e $A : D(A) \subseteq X \to X$ lineare e chiusa. Siano $f(t) \in D(A)$ $\forall t \in [a,b]$ e $t \mapsto (Af)(t)$ continua. Allora $\int_a^b f(t)dt \in D(A)$ e*

$$\int_a^b (Af)(t)dt = A(\int_a^b f(t)dt) \tag{5}$$

Dimostrazione. Sia σ una partizione di $[a, b]$. Poniamo

$$I = \int_a^b f(t)dt = \lim_{|\sigma| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}), \qquad \text{con } \xi_i \in]t_{i-1}, t_i[.$$

Dalla linearità di A si ha che

$$A(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n}(Af)(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \to \int_a^b (Af)(t)dt \qquad \text{se } |\sigma| \to 0.$$

Ma, poiché A è un operatore chiuso, segue che $\int_a^b f(t)dt \in D(A)$ e

$$AI = \int_a^b (Af)(t)dt.$$

□

Teorema 0.1.1 (Teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *Siano X uno spazio di Banach e $f \in C([a, b], X)$.*
Allora, posto $\forall x \in [a, b]$ $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, si ha che $F \in C^1([a, b], X)$ e

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in]a, b[. \tag{6}$$

Dimostrazione. Siano $x \in]a, b[$ e $h > 0$ tale che $x + h \in]a, b[$.

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt.$$

Dalla continuità di f segue che per ogni $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che se $|t - x| < \delta$ allora

$$\|f(t) - f(x)\| < \epsilon.$$

In particolare, se $|h| < \delta$ allora

$$\left\| \frac{F(x + h) - F(x)}{h} - f(x) \right\| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \|f(t) - f(x)\| \, dt \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \epsilon dt = \epsilon,$$

ossia

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{F(x + h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = 0.$$

□

Definizione 0.1.3. Sia $f : [a, b[\to X$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, tale che

- f è integrabile su $[a, c]$, $\forall c \in [a, b]$;
- $\exists \lim_{c \to b} \int_a^c f(t)dt \in X$.

Allora si dice che f è integrabile in senso generalizzato in $[a, b[$ e si pone

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{c \to b} \int_a^c f(t)dt. \tag{7}$$

Lemma 0.1.4. *Siano* $f : [a, +\infty[\to X$ *continua e* $A : D(A) \subseteq X \to X$ *lineare e chiusa. Siano* $f(t) \in D(A)$ $\forall t \in [a, b]$ *e* $t \mapsto (Af)(t)$ *continua. Allora* $\int_a^{+\infty} f(t)dt \in D(A)$ *e*

$$\int_a^{+\infty} (Af)(t)dt = A(\int_a^{+\infty} f(t)dt) \tag{8}$$

Dimostrazione. Sia $M > a$. Dal lemma 0.1.3 segue che $\int_a^M f(t)dt \in D(A)$ e

$$\lim_{M \to +\infty} A(\int_a^M f(t)dt) = \lim_{M \to +\infty} \int_a^M (Af)(t)dt = \int_a^{+\infty} (Af)(t)dt.$$

Poiché A è chiuso, allora, si ha la tesi. □

0.2 Funzioni olomorfe a valori in uno spazio di Banach

Definizione 0.2.1. Siano X uno spazio di Banach complesso, Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to X$. f è olomorfa se $\forall z \in \Omega$

$$\exists f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} \tag{9}$$

Siano Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to X$. Come nel caso $X = \mathbb{C}$, si può verificare che f olomorfa implica f continua. Inoltre, indicato con X' lo spazio duale di X, allora $\forall x' \in X'$

$$z \mapsto x'(f(z)) \qquad \text{è olomorfa da } \Omega \text{ in } \mathbb{C}.$$

Le funzioni olomorfe su spazi di Banach ereditano dalle funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$ molteplici proprietà.

Definizione 0.2.2. Siano Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to X$ olomorfa.
Sia $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva regolare di classe C^1. Poniamo

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \tag{10}$$

Lemma 0.2.1. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to X$ olomorfa e $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva regolare di classe C^1. Allora $\forall x' \in X'$ vale*

$$x'(\int_\gamma f(z)dz) = \int_\gamma x'(f(z))dz. \tag{11}$$

Dimostrazione. Sia $x' \in X'$. Allora per il lemma 0.1.3

$$x'(\int_\gamma f(z)dz) = x'(\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt) = \int_a^b x'(f(\gamma(t)))\gamma'(t)dt = \int_\gamma x'(f(z))dz.$$

□

Lemma 0.2.2. *Siano $\gamma_1 : \Omega \to \mathbb{C}$ e $\gamma_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ due cammini chiusi Ω-omotopi. Sia inoltre $f : \Omega \to X$ olomorfa. Allora*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Dimostrazione. Sia $x' \in X'$. Dal lemma 0.2.1 segue che

$$x'(\int_{\gamma_1} f(z)dz) = \int_{\gamma_1} x'(f(z))dz \quad \text{e} \quad x'(\int_{\gamma_2} f(z)dz) = \int_{\gamma_2} x'(f(z))dz.$$

Poichè $x' \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ è olomorfa, allora $\forall x' \in X'$,

$$\int_{\gamma_1} x'(f(z))dz = \int_{\gamma_2} x'(f(z))dz.$$

Allora, per l'arbitrarietà di x', dal teorema di Hanh-Banach segue che

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

□

Definizione 0.2.3. Sia γ un cammino chiuso in $\mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$ tale che a non appartiene al sostegno di γ. Si definisce l'indice di γ rispetto ad a il numero

$$I_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

Lemma 0.2.3 (Formula integrale di Cauchy)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$. Siano inoltre $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa, $r > 0$ e $z_0 \in \Omega$ tale che*

$$B_r(z_0) = \{z : |z - z_0| < r\} \subseteq \Omega$$

. Sia γ un cammino chiuso in $\Omega - \{z_0\}$ omotopo a $C_r(z_0)$, con

$$C_r(z_o) : t \mapsto z_0 + re^{it} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \tag{12}$$

Dimostrazione. Sia $x' \in X'$. Allora, per il risultato nel caso $X = \mathbb{C}$,

$$x'(f(z_0)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{x'(f(z))}{z - z_0} dz = x'(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz).$$

Per l'arbitrarietà di x', il risultato segue dal teorema di Hanh-Banach. $\square$

Teorema 0.2.1. *Siano Ω una aperto di $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to X$ una funzione olomorfa, $z_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tale che $B_r(z_0) \subseteq \Omega$.*
Allora $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists f^{(n)}(z)$. Inoltre, in $B_r(z_0)$, f è sviluppabile in serie di potenze, ossia

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga al caso $X = \mathbb{C}$, come mostrato nel capitolo 2.2 di A.G.Sveshnikov, A.N.Tikhonov (1978).

$\square$

Teorema 0.2.2. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e $f : \Omega - \{z_0\} \to X$. Allora per $0 < |z - z_0| < r$, con $\overline{B_r(z_0)} \subseteq \Omega$, si ha che f è sviluppabile in serie di Laurent intorno in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ e*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n,$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du.$$

Dimostrazione. Si veda il capitolo 4.1 di A.G.Sveshnikov, A.N.Tikhonov (1978).

$\square$

Teorema 0.2.3 (Teorema di Liouville)**.** *Sia $f : \mathbb{C} \to X$ olomorfa. Se f è limitata allora f è costante.*

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo f non costante.
Siano $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ tali che $f(z_0) \neq f(z_1)$. Allora, per il teorema di Hanh-Banach $\exists x' \in X'$ tale che

$$x'(f(z_0)) \neq x'(f(z_1)).$$

Ma $x' \circ f$ è olomorfa a valori in $\mathbb{C}$ e limitata se f è limitata. Per il teorema di Liouville classico, dunque $x' \circ f$ è costante e questo è una contraddizione. $\square$

Definizione 0.2.4. Siano Ω un aperto di $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ e $f : \Omega - \{z_0\} \to X$ olomorfa. Sia $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ il suo sviluppo di Laurent intorno a z_0. Allora il residuo di f in z_0 è la quantità

$$Res(f, z_0) = a_{-1}.$$

Teorema 0.2.4 (Teorema dei residui)**.** *Siano Ω un aperto di $\mathbb{C}$, $\{z_1, \ldots, z_p\} \subseteq \Omega$ e $f : \Omega - \{z_1, \ldots, z_p\} \to X$ olomorfa. Sia γ un cammino chiuso tale che $sost(\gamma) \subseteq \Omega - \{z_1, \ldots, z_p\}$. Allora*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{p} I_\gamma(z_j) Res(f, z_j). \tag{13}$$

Dimostrazione. Sia $x' \in X'$. Per il caso $X = \mathbb{C}$

$$\int_\gamma x'(f(z))dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{p} I_\gamma(z_j) Res(x' \circ f, z_j) = x'(2\pi i \sum_{j=1}^{p} I_\gamma(z_j) Res(f, z_j).$$

Per l'arbitrarietà di x', dal teorema di Hanh-Banach, si ha la tesi. $\square$

0.3 Insieme risolvente

Siano X,Y due spazi di Banach su $\mathbb{C}$. Indichiamo con

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \to Y : \text{ T è lineare e continua}\}.$$

Se $X = Y$ scriveremo $\mathcal{L}(X)$ invece di $\mathcal{L}(X, X)$. In $\mathcal{L}(X, Y)$ introduciamo la norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y .$$

$\mathcal{L}(X, Y)$ è uno spazio di Banach.

Definizione 0.3.1. Siano X uno spazio di Banach e D(A) un sottospazio di X. Sia inoltre $A : D(A) \to X$ lineare.
Definiamo l'insieme risolvente di A come

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ è 1-1 e } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}. \tag{14}$$

Lo spettro di A è il complementare in $\mathbb{C}$ di $\rho(A)$ e lo denoteremo con $\sigma(A)$.

Definizione 0.3.2. Siano $A : D(A) \to X$ lineare e $\lambda \in \rho(A)$. Si definisce l'operatore risolvente di A la funzione

$$\lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1}. \tag{15}$$

Per semplicità indicheremo con $\lambda - A$ la funzione $\lambda I - A$.

Osservazione 0.3.1. *La definizione 0.3.1 e parte dei risultati seguenti si estendono in maniera ovvia a spazi di Banach reali. Più precisamente, andranno a valere i lemmi 0.3.1,0.3.2,0.3.3 e i teoremi 0.3.1 e 0.3.2.*

Lemma 0.3.1. *Sia $A \in \mathcal{L}(X)$, $\|A\| < 1$. Allora*

$$1 \in \rho(A) \ \text{e} \ (1-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n \tag{16}$$

Dimostrazione. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ converge assolutamente in $\mathcal{L}(X)$. Infatti

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|A\|^n \tag{17}$$

che è convergente, e, poichè $\mathcal{L}(X)$ è completo, segue che $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ converge in $\mathcal{L}(X)$. Mostriamo ora che $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ è invertibile con inversa $1 - A$.

$$(1-A)\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n - \sum_{n=1}^{+\infty} A^n = I.$$

Allo stesso modo si vede che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n(1-A) = I.$$

Dunque $1 - A$ è invertibile e

$$(1-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n \in \mathcal{L}(X).$$

In particolare, dalla definizione di insieme risolvente si ricava che

$$1 \in \rho(A).$$

□

Teorema 0.3.1. *Sia $A : D(A) \to X$ lineare. Allora $\rho(A)$ è aperto in $\mathbb{C}$. In particolare, se $\lambda_0 \in \rho(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e*

$$|\lambda - \lambda_0| \left\|(\lambda_0 - A)^{-1}\right\| < 1,$$

si ha che

$$\lambda \in \rho(A) \quad \text{e} \quad \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq \frac{\|(\lambda_0 - A)^{-1}\|}{1 - |(\lambda - \lambda_0)| \, \|(\lambda_0 - A)^{-1})\|}. \tag{18}$$

Dimostrazione. Mostriamo che, se $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0 - A)^{-1}\|^{-1}$, allora $\lambda \in \rho(A)$.

$$\lambda x - Ax = y \Leftrightarrow (\lambda - \lambda_0)x + (\lambda_0 - A)x = y \Leftrightarrow (1 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - A)^{-1})x = (\lambda_0 - A)^{-1}y. \quad (19)$$

Se $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0 - A)^{-1}\|^{-1}$, dal lemma 0.3.1 segue che esiste

$$(1 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - A)^{-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 - A)^{-n}. \quad (20)$$

Quindi

$$x = (1 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - A)^{-1})^{-1}(\lambda_0 - A)^{-1}y = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 - A)^{-n-1}y. \quad (21)$$

Dunque $\lambda \in \rho(A)$ e

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 - A)^{-n-1}$$

da cui

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \le \frac{\|(\lambda_0 - A)^{-1}\|}{1 - |\lambda - \lambda_0| \, \|(\lambda_0 - A)^{-1}\|}. \quad (22)$$

□

Lemma 0.3.2. *Siano $D(A)$ un sottospazio di X e $A : D(A) \to X$ lineare. Allora $\forall x \in D(A)$ e per $\lambda \in \rho(A)$ vale*

$$A(\lambda - A)^{-1}x = (\lambda - A)^{-1}Ax. \quad (23)$$

Dimostrazione. Si ha

$$A(\lambda - A)^{-1}x = (A - \lambda + \lambda)(\lambda - A)^{-1}x$$
$$= \lambda(\lambda - A)^{-1}x - x = (\lambda - A)^{-1}(\lambda - \lambda + A)x = (\lambda - A)^{-1}Ax$$

. □

Lemma 0.3.3. *Sia $A : D(A) \to X$ lineare. Allora $\forall \lambda, \mu \in \rho(A)$,*

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} \quad (24)$$

Dimostrazione. Sia $x \in X$. Si ha

$$(\mu - A)(\mu - A)^{-1}x = x.$$

Ciò implica che

$$(\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}x + (\lambda - A)(\mu - A)^{-1}x = x \Leftrightarrow (\lambda - A)(\mu - A)^{-1}x = x - (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}x.$$

Quindi

$$(\mu - A)^{-1}x = (\lambda - A)^{-1}x - (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}x.$$

□

La formula (23) è detta "Identità del risolvente".

Corollario 0.3.1. *Siano $\lambda, \mu \in \rho(A)$. Allora*

$$(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} = (\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} \tag{25}$$

Dimostrazione. Siano $\lambda, \mu \in \rho(A)$ e $x \in X$. Dall'identità del risolvente segue che

$$(\lambda - A)^{-1}x - (\mu - A)^{-1}x = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}x. \tag{26}$$

In particolare vale anche

$$(\lambda - A)^{-1}x - (\mu - A)^{-1}x = -((\mu - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1})x = (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}x.$$

Eguagliando le due espressioni si ha la tesi. □

Teorema 0.3.2. *La funzione $\lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1}$ è continua e olomorfa da $\rho(A)$ in $\mathcal{L}(X)$. Inoltre vale*

$$\frac{d}{d\lambda}(\lambda - A)^{-1} = -(\lambda - A)^{-2}. \tag{27}$$

In generale $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda - A)^{-1} = (-1)^n n!(\lambda - A)^{-n-1}. \tag{28}$$

Dimostrazione. Mostriamo inizialmente che

$$\lambda \to (\lambda - A)^{-1} \qquad \text{è localmente limitata.}$$

Sia infatti $\mu \in \rho(A)$ tale che $|\mu - \lambda| \left\|(\mu - A)^{-1}\right\| < 1$. Allora, per l'identità del risolvente, si ha che

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq \left\|(\mu - A)^{-1}\right\| + |\mu - \lambda| \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \left\|(\mu - A)^{-1}\right\|.$$

Cioè

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq \frac{\|(\mu - A)^{-1}\|}{1 - |\mu - \lambda| \|(\mu - A)^{-1}\|}.$$

Proviamo la continuità.
Sia $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\rho(A)$ convergente a $\lambda \in \rho(A)$. Per l'identità del risolvente si ha che

$$\left\|(\lambda - A)^{-1} - (\lambda_n - A)^{-1}\right\| \leq |\lambda_n - \lambda| \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \left\|(\lambda_n - A)^{-1}\right\|.$$

Poichè $(\lambda - A)^{-1}$ è localmente limitata, segue che esiste $C > 0$, indipendente da n, tale che

$$\left\|(\lambda_n - A)^{-1}\right\| \leq C.$$

Perciò
$$\lim_{n\to+\infty} |\lambda_n - \lambda| \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \left\|(\lambda_n - A)^{-1}\right\| = 0.$$
Dunque $\lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1}$ è continua.
Verifichiamo che è olomorfa. Siano $\lambda \in \rho(A)$ e $h \in \mathbb{C}$ tale che $\lambda+h \in \rho(A)$. Per l'identità del risolvente si ha che
$$\lim_{h\to 0} \frac{(\lambda + h - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h(\lambda - A)^{-1}(\lambda + h - A)^{-1}}{h} = -(\lambda - A)^{-2}. \quad (29)$$
Sia $n \in \mathbb{N}$. Dimostriamo per induzione che
$$\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda - A)^{-1} = (-1)^n n!(\lambda - A)^{-n-1}. \quad (30)$$
(29) è vera per $n = 1$. Sia vera per $k \leq n$. Mostriamo che
$$\frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}}(\lambda - A)^{-1} = (-1)^{n+1}(n+1)!(\lambda - A)^{-n-2}.$$
Proviamo che $\forall n \in \mathbb{N}$
$$\frac{d}{d\lambda}((\lambda - A)^{-n}) = -n(\lambda - A)^{-n-1}. \quad (31)$$
La formula (30) è vera per $n = 1$. Sia vero per n.
$$\frac{d}{d\lambda}((\lambda - A)^{-n-1}) = \frac{d}{d\lambda}((\lambda - A)^{-n}(\lambda - A)^{-1}) =$$
$$= -n(\lambda - A)^{-n-1}(\lambda - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-n}(\lambda - A)^{-2} = -(n+1)(\lambda - A)^{-n-2}.$$
Di qui,
$$\frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}}(\lambda - A)^{-1} = \frac{d}{d\lambda}((-1)^n n!(\lambda - A)^{-n-1}) =$$
$$= (-1)^n n!(-n-1)(\lambda - A)^{-n-2} = (-1)^{n+1}(n+1)!(\lambda - A)^{-n-2}.$$
□

Teorema 0.3.3. *Siano $X \neq \{0\}$ e $A \in \mathcal{L}(X)$. Allora $\sigma(A)$ è compatto e non vuoto.*

Dimostrazione. Dal teorema 0.3.1 segue che $\sigma(A)$ è chiuso. Mostriamo che è anche limitato. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$. Dimostriamo che se $|\lambda| > \|A\|$ allora $\lambda \in \rho(A)$. In effetti, siccome $\lambda \neq 0$ allora
$$\lambda x - Ax = y \Leftrightarrow x - \lambda^{-1}Ax = \lambda^{-1}y.$$
Inoltre, per ipotesi vale che
$$\left\|\lambda^{-1}A\right\| < 1.$$

Si ha quindi che
$$\lambda x - Ax = y \Leftrightarrow x = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda^{-1}A)^n \lambda^{-1} y,$$
ovvero
$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n-1} A^n y. \tag{32}$$
Segue dunque che
$$\|x\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda|} \left\|\lambda^{-n} A^n\right\| \|y\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}} \|y\|,$$
da cui
$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}. \tag{33}$$
Quindi $\lambda \in \rho(A)$. Proviamo che $\sigma(A)$ è non vuoto.
Sia, per assurdo, $\sigma(A) = \emptyset$. Allora $\rho(A) = \mathbb{C}$. Dal teorema 0.3.2 segue che
$$\lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \tag{34}$$
è olomorfa intera. Per il teorema di Liouville e da (32), allora, $(\lambda - A)^{-1}$ è costante. Inoltre
$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} (\lambda - A)^{-1} = 0. \tag{35}$$
Segue quindi che $(\lambda - A)^{-1}$ è identicamente nulla.
Ciò è assurdo se $X \neq \{0\}$.

□

Esempio 0.3.1. Indichiamo con $BUC(\mathbb{C})$ l'insieme delle funzioni uniformemente continue e limitate da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$. Sia $X = BUC(\mathbb{C})$ dotato della norma $\|\cdot\|$ definita come segue: sia $u \in X$
$$\|u\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)|.$$
Siano
$$D(A) = \{u \in X \text{ tali che u è derivabile in } \mathbb{R} \text{ e } u' \in X\}$$
$$A : D(A) \to X \qquad Au = u'. \tag{36}$$
$(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach e A non è limitato.
Iniziamo mostrando che X munito della norma $\|\cdot\|$ è uno spazio di Banach.
Faremo perciò vedere che ogni successione di Cauchy in X è convergente.

Sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una tale successione. Per definizione varrà che
$\forall\epsilon > 0\ \exists\overline{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n, m > \overline{n}$ si ha

$$\|u_n - u_m\| < \epsilon.$$

Fissiamo $x \in \mathbb{R}$. Siccome

$$|u_n(x) - u_m(x)| \leq \|u_n - u_m\|,$$

allora la successione $\{u_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{C}$. Dalla completezza di $\mathbb{C}$ segue che $\{u_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente. Poniamo

$$u(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x).$$

Vogliamo dimostrare che $u \in X$ e u_n converge ad u in X. Siano quindi $\epsilon > 0$ e $n, m, \overline{n} \in \mathbb{N}$ tali che $n, m > \overline{n}$. Se

$$\|u_n - u_m\| < \epsilon,$$

allora $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > \overline{n}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha che

$$|u_n(x) - u(x)| = \lim_{m\to+\infty} |u_n(x) - u_m(x)| \leq \epsilon.$$

Questo vale per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque per $n > \overline{n}$

$$\sup_{\mathbb{R}} |u_n - u| \leq \epsilon.$$

Ciò implica che u è continua, perchè limite uniforme di funzioni continue. Mostriamo che u è limitata.
$\forall n \in \mathbb{N}$ u_n è limitata, ossia $\exists M > 0$ tale che $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|u_n(x)| \leq M.$$

Per $n > \overline{n}$ opportuno, allora,

$$|u(x)| \leq |u(x) - u_n(x)| + |u_n(x)| \leq 1 + M.$$

Dimostriamo adesso l'uniforme continuità, ovvero mostriamo che
$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tale che $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| < \delta$,

$$\Rightarrow |u(x) - u(y)| < \epsilon.$$

Fissiamo $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_n(x)| + |u_n(x) - u_n(y)| + |u_n(y) - u(y)|.$$

u_n converge uniformemente a u.
Dunque per $n > \overline{n}$ opportuno e $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|u(x) - u_n(x)| < \epsilon$$

Per lo stesso motivo

$$|u_n(y) - u(y)| < \epsilon.$$

Per ipotesi, per $n > \overline{n}$, u_n è uniformemente continua, cioè
$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_1(n, \epsilon) > 0$ tale che $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| < \delta_1(n, \epsilon) \Rightarrow |u_n(x) - u_n(y)| < \epsilon$. Perciò per $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > \overline{n}$ e $|x - y| < \delta_1(n, \epsilon)$

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_n(x)| + |u_n(x) - u_n(y)| + |u_n(y) - u(y)| < 3\epsilon.$$

Da ciò segue che $(BUC(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach.
Mostriamo che A non è continua. Infatti sia

$$u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

definita come

$$u_n(\xi) = \sin(n\xi).$$

Le funzioni seno e coseno sono funzioni limitate ed uniformemente continue, quindi $\forall n \in \mathbb{N}$ le u_n stanno in X. In particolare, valendo che

$$u_n'(\xi) = n \cos(n\xi),$$

dalle proprietà di sottospazio di D(A) anche $u_n' \in X$. Ma A non è continua in quanto

$$\|u_n\| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |u_n(\xi)| = 1,$$

mentre

$$\|u_n'\| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |u_n'(\xi)| = n.$$

Determiniamo l'insieme risolvente di A. Siano $f \in X$ e $x \in \mathbb{R}$. Per il teorema di Cauchy, il problema

$$\begin{cases} \lambda u(x) - u'(x) = f(x) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{37}$$

ammette un'unica soluzione, data da

$$u(x) = e^{\lambda x} u_0 - \int_0^x e^{\lambda(x-y)} f(y) dy. \tag{38}$$

Si tratta quindi di determinare u_0 in modo che $u \in X$.
Osserviamo che nel caso di $f = 0$, l'unica soluzione di (36) è

$$u(x) = e^{\lambda x} u_0.$$

Supponiamo che λ sia puramente immaginario. Esiste allora $y \in \mathbb{R}$ tale che

$$u(x) = e^{iyx} u_0 = (\cos(yx) + i \sin(yx)) u_0.$$

Quindi l'equazione $\lambda u - Au = 0$ ha soluzioni non banali e perciò $\lambda \notin \rho(A)$. Dunque

$$\rho(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tali che } \mathrm{Re}(\lambda) \neq 0\}.$$

Sia ora $f \neq 0$. Mostriamo che vale l'uguaglianza

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tali che } \mathrm{Re}(\lambda) \neq 0\}.$$

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$.

$$u(x) = e^{\lambda x} u_0 - \int_0^x e^{\lambda(x-y)} f(y) dy = e^{\lambda x} (u_0 - \int_0^x e^{-\lambda y} f(y) dy).$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left| e^{\lambda x} \right| = +\infty.$$

Affinchè u sia limitata, deve quindi valere che

$$\lim_{x \to +\infty} (u_0 - \int_0^x e^{-\lambda y} f(y) dy) = 0, \tag{39}$$

ossia

$$u_0 = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-\lambda y} f(y) dy = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} f(y) dy. \tag{40}$$

Allora l'unica soluzione può essere

$$u(x) = e^{\lambda x} (\int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} f(y) dy - \int_0^x e^{-\lambda y} f(y) dy) = e^{\lambda x} (\int_x^{+\infty} e^{-\lambda y} f(y) dy). \tag{41}$$

Verifichiamo che $u \in X$.
Siccome $f \in X$, allora

$$\left| \int_x^{+\infty} e^{\lambda(x-y)} f(y) dy \right| \leq \|f\| \int_x^{+\infty} e^{Re(\lambda)(x-y)} dy = \frac{\|f\|}{Re(\lambda)}.$$

Dunque u è limitata. Mostriamo che è uniformemente continua.
Da (36) $\forall x \in \mathbb{R}$

$$u'(x) = \lambda u(x) - f(x).$$

Poiché u è limitata, λu è limitata. Inoltre, poiché $f \in X$, segue che anche u' è limitata. Perciò u è una funzione differenziabile con derivata limitata, da cui u è uniformemente continua.
Supponiamo ora che $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. In questo caso

$$\lim_{x \to -\infty} \left| e^{\lambda x} \right| = +\infty.$$

Con osservazioni analoghe al caso precedente deve quindi essere

$$u_0 = -\int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda y} f(y) dy. \tag{42}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, l'unica soluzione può quindi essere

$$u(x) = e^{\lambda x}\left(-\int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda y} f(y) dy - \int_{0}^{x} e^{-\lambda y} f(y) dy\right) = e^{\lambda x}\left(-\int_{-\infty}^{x} e^{-\lambda y} f(y) dy\right). \tag{43}$$

Calcoli simili mostrano che se $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ e $f \in X$ allora $u \in X$.
In definitiva se $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$ allora $\lambda \in \rho(A)$ e $\forall x \in \mathbb{R}$

$$((\lambda - A)^{-1} f)(x) = \begin{cases} \int_{x}^{+\infty} e^{\lambda(x-y)} f(y) dy & \text{se } \mathrm{Re}(\lambda) > 0 \\ -\int_{-\infty}^{x} e^{\lambda(x-y)} f(y) dy & \text{se } \mathrm{Re}(\lambda) < 0 \end{cases} \tag{44}$$

Capitolo 1

Equazioni di evoluzione astratte

1.1 Problema ben posto

Siano X uno spazio di Banach reale o complesso, $D(A)$ un sottospazio di X e $A : D(A) \to X$ un operatore lineare.
Sotto queste ipotesi, per $x \in D(A)$, studiamo il seguente problema di Cauchy.

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) & \text{per } t \in [0, +\infty[\\ u(0) = x \end{cases} \tag{PC}$$

Andiamo a specificare cosa si intende con soluzione stretta.

Definizione 1.1.1. Si definisce soluzione stretta di (PC) una funzione $u : [0, +\infty[\to X$ tale che:

- u è derivabile.
- $\forall t \in [0, +\infty[$, $u(t) \in D(A)$ e $t \mapsto Au(t)$ è continua da $[0, +\infty[$ a X.
- u risolve (PC).

Osservazione 1.1.1. *Se u è soluzione stretta di (PC) allora è di classe $C^1([0, +\infty[, X)$.*

Definizione 1.1.2. Diremo che il problema (PC) è ben posto se $\forall x \in D(A)$ ammette un'unica soluzione stretta ed essa dipende con continuità da x, nel senso che $\forall T > 0$ $\exists C(T) > 0$ tale che

$$\max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X \leq C(T) \|x\| .$$

Teorema 1.1.1. *Sia $A \in \mathcal{L}(X)$. Il problema (PC) ammette un'unica soluzione stretta data da*

$$u(t) = e^{tA}x$$

con

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n. \tag{1.1}$$

Dimostrazione. Divideremo la dimostrazione in più passi. Iniziamo col mostrare che u è soluzione stretta di (PC) se e solo se u è continua e,
$\forall t \in [0, +\infty[$, risolve l'equazione integrale

$$u(t) = x + \int_0^t Au(s)ds. \tag{1.2}$$

Infatti se u è soluzione del problema di Cauchy, per definizione è derivabile e quindi continua. Dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue inoltre

$$u(t) - x = \int_0^t u'(s)ds = \int_0^t Au(s)ds.$$

Viceversa, supponiamo vera (1.2). Poiche' u è continua e A limitato, la funzione
$t \mapsto Au(t)$ è continua. Sempre dal teorema fondamentale del calcolo integrale, u è derivabile ed in particolare

$$u'(t) = Au(t), \qquad u(0) = x,$$

cioè vale (PC).
Per dimostrare l'esistenza della soluzione stretta, la costruiamo col metodo delle approssimazioni successive. Per $t \in [0, +\infty[$, poniamo dunque

$$u_0(t) = x$$

e per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1}(t) = x + \int_0^t Au_n(s)ds.$$

Mostriamo per induzione che, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k x. \tag{1.3}$$

Il caso base per $n = 0$ è vero per quanto detto in precedenza.
Sia vero per $k \leq n$. Allora

$$u_{n+1} = x + \int_0^t Au_n(s)ds = x + \int_0^t A(\sum_{k=0}^{n} \frac{s^k A^k}{k!} x)ds =$$

$$= x + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^{k+1} x \int_0^t s^k ds = x + \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} A^{k+1} x = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k A^k x}{k!}.$$

Inoltre vale che, se $T > 0$ e $0 \leq t \leq T$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left\| \frac{t^n A^n x}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T^n \|A\|^n}{n!} \|x\| = e^{T\|A\|} \|x\| . \tag{1.4}$$

Per $0 \leq t \leq T$, dunque, la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} x$$

converge totalmente. La convergenza totale implica la convergenza uniforme. Dunque $\{u_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, e

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} x$$

uniformemente in $[0, T]$, $\forall T > 0$.
Poniamo allora

$$u(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} x.$$

Per la convergenza uniforme in $[0, T]$ di u_n, si otterrà quindi che per $0 \leq t \leq T$,

$$u(t) = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}(t) = x + \lim_{n\to+\infty} \int_0^t Au_n(s)ds = x + \int_0^t Au(s)ds.$$

Ovvero $u(t)$ soddisfa (1.2) ed è soluzione del problema.
Per quanto riguarda l'unicità, per la linearità del problema è sufficiente mostrare che nel caso $x = 0$ l'equazione ha come unica soluzione $u = 0$.
Infatti per $t \in [0, +\infty[$ da

$$u(t) = \int_0^t Au(s)ds$$

segue

$$\|u(t)\| \leq \|A\| \int_0^t \|u(s)\| ds.$$

La tesi segue dal lemma di Gronwall. □

Lemma 1.1.1. *Sia $A \in \mathcal{L}(X)$. Allora valgono le seguenti.*

(I). $t \mapsto e^{tA} \in C^1([0, +\infty[, \mathcal{L}(X))$ *e* $\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA}$.

(II). $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$ *per* $t, s \geq 0$.

Dimostrazione. (I).
La successione di funzioni $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definita $\forall n \in \mathbb{N}$ come

$$v_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!},$$

è una successione di funzioni continue, convergente in $\mathcal{L}(X)$ uniformemente sui compatti. Dunque il limite è una funzione continua.
$\forall n \in \mathbb{N}$, v_n è derivabile con derivata

$$v_n'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1} A^k}{(k-1)!} = A \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

Inoltre $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a e^{tA} e per quanto mostrato prima si ha che la successione $\{v_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a Ae^{tA} sui compatti.
Quindi e^{tA} è di classe C^1 e

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{(n-1)!} = A \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1} A^{n-1}}{(n-1)!} = Ae^{tA}. \tag{1.5}$$

(II).
Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \\ u(0) = e^{sA}x_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Il problema (1.6) ha come unica soluzione stretta

$$u(t) = e^{tA}e^{sA}x_0.$$

Poniamo

$$v(t) = e^{(t+s)A}x_0.$$

Dalla derivabilità di u segue la derivabilità di v e, $\forall t \geq 0$, la derivata

$$v'(t) = Ae^{(t+s)A}x_0 = Av(t).$$

Inoltre

$$v(0) = e^{sA}x_0.$$

Questo significa che $v(t)$ è soluzione dello stesso problema e, per l'unicità della soluzione, si ha che $\forall t \geq 0$

$$u(t) = v(t),$$

cioè

$$e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A} \qquad \forall t, s \geq 0.$$

$\square$

Osservazione 1.1.2. *Da (I) del lemma 1.1.1, segue che*

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{tA}-Id}{t}=A \qquad \text{in } \mathcal{L}(X). \tag{1.7}$$

Dal teorema abbiamo ottenuto una forma esplicita della soluzione stretta u nel caso di A operatore lineare e limitato.
Diamo ora un esempio di problema (PC) ben posto in cui $A : D(A) \to X$ non è un operatore continuo e $D(A) \subset X$.
Consideriamo perciò il seguente caso.

Esempio 1.1.1. Siano $X = BUC(\mathbb{C})$ e $D(A) = \{u \in X|$ u è derivabile in $\mathbb{R}$ e $u' \in X\}$. Dall'esempio 0.3.1 si ha che la norma del sup $\|\cdot\|$ rende $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach. Sia A quindi l'operatore definito

$$A : D(A) \to X \tag{1.8}$$

tale che per $v \in D(A)$ e $x \in \mathbb{R}$

$$(Av)(x) = \frac{dv}{dx}(x). \tag{1.9}$$

Sia $u_0 \in D(A)$. Studiamo ora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) & \text{per } t \in [0, +\infty[\\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{PC}$$

Sia u una soluzione stretta di (PC). Dalla definizione segue quindi che
$u \in C^1([0, +\infty[, X)$, e quindi

$$t \mapsto \partial_t u(t) \in C([0, +\infty[, X).$$

Inoltre $\forall t \in [0, +\infty[$,

$$u(t) \in D(A), \qquad t \mapsto \partial_x u(t) \in C([0, +\infty[, X). \tag{1.10}$$

Poniamo $\forall t \geq 0$ e $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$u(t, x) := u(t)(x). \tag{1.11}$$

Allora si ha che

$$u \in C^1([0, +\infty[\mathrm{x}\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

e,

$$u'(t)(x) = (\partial_t u)(t, x), \qquad (Au(t))(x) = (\partial_x u)(t, x).$$

Dunque, fissato $u_0 \in D(A)$, il problema di Cauchy (PC) è equivalente a

$$\begin{cases} (\partial_t u)(t, x) = (\partial_x u)(t, x) & \text{per } t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

Studiamone la soluzione u.
Fissiamo $x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [0, +\infty[$ poniamo per definizione

$$v_x(t) = u(t, x - t).$$

Vogliamo far vedere che v_x è costante.
Dal fatto che u è di classe $C^1(\mathbb{R}x[0, +\infty[)$ segue la derivabilità di v_x, e indicate rispettivamente con D_1 e D_2 le derivate rispetto il primo e secondo termine, dal teorema del differenziale totale otteniamo che $\forall t \geq 0$

$$\frac{d}{dt}v_x(t) = D_1u(t, x - t) - D_2u(t, x - t) = 0. \tag{1.12}$$

Si ha quindi che $\forall x \in \mathbb{R}$, v_x è costante. In particolare

$$v_x(t) = v_x(0) = u(0, x) = u_0(x). \tag{1.13}$$

Ma allora $\forall t \geq 0$ e $\forall x \in \mathbb{R}$

$$u(t, x - t) = u_0(x)$$

Segue che

$$u(t, x) = u(t, (x + t) - t) = u_0(x + t).$$

Dobbiamo verificare che le condizioni della definizione 1.1.1 siano soddisfatte.
Indichiamo con

$$u(t) := u_0(\cdot + t),$$

cioè $u_0(\cdot + t)$ è la funzione che ad x associa $u_0(x + t)$.
Sia $u_0 \in D(A)$. Verifichiamo che

(I) $\forall t \geq 0$

$$u_0(\cdot + t) \in BUC(\mathbb{R}).$$

(II) $\forall t \geq 0$ esiste in $BUC(\mathbb{R})$ il seguente

$$\lim_{h \to 0} \frac{u_0(\cdot + t + h) - u_0(\cdot + t)}{h}.$$

Siano $x \in \mathbb{R}$ e $h > 0$.
Poiché $u_0 \in D(A)$, allora

$$\lim_{h \to 0} u_0(x + t + h) = u_0(x + t) \text{ uniformemente},$$

ovvero vale (I).
Mostriamo ora che u è derivabile in X. Quindi deve valere che per $h > 0$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(t + h) - u(t)}{h} = u'(t) \text{ in X}.$$

Sia $x \in \mathbb{R}$. Per $h > 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(t+h,x) - u(t,x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u_0(x+t+h) - u_0(x+t)}{h} = u_0'(x+t)$$

perchè $u_0 \in D(A)$. A questo punto stimiamo la differenza

$$\left| \frac{u_0(x+t+h) - u_0(x+t)}{h} - u_0'(x+t) \right| = \frac{1}{h} \left| \int_{x+t}^{x+t+h} (u_0'(y) - u_0'(x+t)) dy \right|.$$

Per cui, per $h < \delta(\epsilon)$ opportuno, siccome $u_0 \in D(A)$ segue che

$$\left| \frac{u_0(x+t+h) - u_0(x+t)}{h} - u_0'(x+t) \right| \leq \frac{1}{h} h\epsilon = \epsilon,$$

da cui

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(t+h,x) - u(t,x)}{h} = u_0'(x+t) \qquad \text{uniformemente in } \mathbb{R},$$

ossia

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} \to u_0'(\cdot + t) = u'(t) \text{ in } BUC(\mathbb{R}), \tag{1.14}$$

cioè (II).
Inoltre, sia $T > 0$. Se $t \leq T$ allora

$$\|u(t)\| = \|u_0(\cdot + t)\| = \|u_0\|.$$

Ciò significa che u è soluzione stretta del problema ben posto (PC).

1.2 Proprietà

Sia X uno spazio di Banach, $D(A) \subseteq X$ denso, $A : D(A) \to X$ lineare e $x \in D(A)$. Supponiamo inoltre che (PC) sia ben posto.
$\forall x \in D(A)$ indichiamo con u_x l'unica soluzione stretta avente dato iniziale $u(0) = x$.

Definizione 1.2.1. $\forall t \geq 0$ poniamo con

$$T(t)x = u_x(t).$$

Osservazione 1.2.1. *Sia $t \in [0, +\infty[$. Dalla definizione di problema ben posto segue che*

$$\|T(t)x\| = \|u_x(t)\| \leq C(T) \|x\|.$$

Dunque, $\forall t \geq 0$ se u_x è soluzione stretta di (PC) ben posto e $x \in D(A)$, abbiamo definito la funzione

$$\begin{aligned} T(t) &: D(A) \to D(A) \\ T(t)x &= u_x(t). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Elenchiamone le principali proprietà.

Lemma 1.2.1. *Sotto le precedenti ipotesi valgono:*

(I.) $T(0) = Id$.

(II.) $\forall t, s \geq 0$, $T(t+s) = T(t)T(s)$.

Dimostrazione. Fissiamo $x \in D(A)$.

$$T(0)x = u(0) = x.$$

Quindi vale (I).
Proviamo (II). Osserviamo che, essendo (PC) un problema ben posto, $\forall t, s \geq 0$ e per $x \in D(A)$, allora $T(s)x \in D(A)$ e quindi la composizione $T(t)T(s)$ ha senso.
Siano ora $t, s \geq 0$ e $x \in D(A)$. Sia u_x soluzione stretta del problema di Cauchy (PC) con dato iniziale x.
L'applicazione $t \mapsto u_x(t+s)$ è soluzione dello stesso problema con dato iniziale $u_x(s)$. Segue quindi che

$$T(t+s)x = u_x(t+s) = T(t)u_x(s) = T(t)T(s)x.$$

□

Lemma 1.2.2. $\forall t \geq 0$, $T(t) : D(A) \to D(A)$ *è una funzione lineare.*

Dimostrazione. Siano $u, v \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ le rispettive soluzioni strette di

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

Poniamo $\forall t \geq 0$, $z(t) = u(t) + v(t) = T(t)u_0 + T(t)v_0$.
$z \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ perchè è somma di funzioni C^1.
In particolare z è soluzione del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

che ammette come unica soluzione stretta $z(t) = T(t)z_0 = T(t)(u_0 + v_0)$. □

Lemma 1.2.3. *Munendo D(A) della topologia di sottospazio di X si ha che,*

$$T(t) : D(A) \to D(A)$$

è una funzione continua.

Dimostrazione. Sia infatti $t \in [0, +\infty[$ e $x, y \in D(A)$. Dalla definizione di problema ben posto segue che, se $t \leq T$,

$$\|T(t)x - T(t)y\| = \|T(t)(x - y)\| \leq C(T)\, \|x - y\| \,.$$

□

Siano (PC) ben posto e u la sua soluzione stretta. Se D(A) è sottospazio denso di X allora, per il teorema sul prolungamento di funzioni uniformemente continue e lineari, segue che esisterà un'unica

$$\overline{T(t)} : X \to X \tag{1.16}$$

lineare tale che

- $\forall t \geq 0$
$$\overline{T(t)} \in \mathcal{L}(X). \tag{1.17}$$
- la restrizione di $\overline{T(t)}$ a D(A) coincide con $T(t)$.

Ciò significa che $\overline{T(t)}$ è un'estensione continua di $T(t)$. Verifichiamone alcune proprietà.

Lemma 1.2.4. $\forall x \in X$ *la funzione* $t \mapsto \overline{T(t)}x$ *è continua.*

Dimostrazione. Siano $x \in D(A)$ e (PC) ben posto. Allora se u è soluzione stretta di (PC), si ha che $\forall t \geq 0$

$$\overline{T(t)}x = T(t)x = u(t).$$

Siano ora $x \in X$ e $t \geq 0$. Consideriamo una successione $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in $D(A)$ convergente a x. Dalla densità di D(A) in X segue che $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ esiste. Sia $T > 0$. Per $t \in [0, T]$, $\{T(t)x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\overline{T(t)}x$, in effetti

$$\lim_{k \to +\infty} \left\| T(t)x_k - \overline{T(t)}x \right\| \leq \lim_{k \to +\infty} C(T)\, \|x - x_k\| = 0.$$

Quindi $t \mapsto \overline{T(t)}x$ è continua in quanto limite di funzioni uniformemente continue sui compatti. □

Lemma 1.2.5. $\forall t, s \geq 0$

$$\overline{T(t+s)} = \overline{T(t)}\; \overline{T(s)}. \tag{1.18}$$

Dimostrazione. Sia $x \in D(A)$. Allora, poiché $T(s)x \in D(A)$ $\forall s \geq 0$,

$$\overline{T(t+s)}x = T(t)T(s)x = \overline{T(t)}\ \overline{T(s)}x.$$

Siano $x \in X$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in D(A) convergente a x. Allora

$$\lim_{k\to+\infty} T(t+s)x_k = \overline{T(t+s)}x. \tag{1.19}$$

Inoltre,

$$\overline{T(t+s)}x = \lim_{k\to+\infty} T(t+s)x_k = \lim_{k\to+\infty} T(t)T(s)x_k = \overline{T(t)}\ \overline{T(s)}x. \tag{1.20}$$

La tesi si ha per unicità del limite. □

Capitolo 2

Gruppi e Semigruppi

2.1 Introduzione ai semigruppi

Siano X spazio di Banach reale o complesso, D(A) sottospazio denso di X e $A : D(A) \to X$ lineare. Partendo dal problema di Cauchy ben posto (PC) avente come unica soluzione stretta u_x, abbiamo definito, $\forall t \geq 0$, l'applicazione $\overline{T(t)} \in \mathcal{L}(X)$ tale che per $x \in D(A)$,

$$\overline{T(t)}x = u_x(t).$$

Riprendiamone il concetto. In seguito scriveremo $T(t)$ invece di $\overline{T(t)}$.

2.1.1 Semigruppi di applicazioni lineari e continue

Definizione 2.1.1. Sia X uno spazio di Banach reale o complesso.
Un semigruppo è una famiglia di operatori lineari e continui in $\mathcal{L}(X)$, $\{T(t) : t \geq 0\}$ tale che:

- $\forall\ t, s \geq 0$
$$T(t+s) = T(t)T(s) \tag{2.1}$$

-
$$T(0) = Id \tag{2.2}$$

Un semigruppo si dice fortemente continuo se, $\forall x \in X$, è continua la funzione

$$T(\cdot)x : [0, +\infty[\to X$$

$$t \mapsto T(t)x. \tag{2.3}$$

In seguito, per semplicità, indicheremo con $T(\cdot)$ il semigruppo $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Lemma 2.1.1. *Sia $T(\cdot)$ un semigruppo fortemente continuo. Allora $\forall\delta > 0$ esiste $M_\delta > 0$ tale che $\forall t \in [0, \delta]$,*

$$\|T(t)\| \leq M_\delta. \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Sia $\delta > 0$. Dalla continuità di $t \mapsto T(t)x$, l'insieme $\{T(t)x : t \in [0, \delta]\}$ è limitato in X, ovvero esiste una costante $c_x \geq 0$, dipendente da x, tale che $\forall t \in [0, \delta]$

$$\|T(t)x\| \leq c_x.$$

Dal teorema di Banach-Steinhaus $\{T(t) : t \in [0, \delta]\}$ è un insieme equicontinuo, cioè esiste una costante $M_\delta > 0$ tale che

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\delta.$$

□

Teorema 2.1.1. *Siano X uno spazio di Banach reale o complesso, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X)$ e $S : X \to X$. Siano $x \in X$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in X convergente a x. Se $\forall x \in X$, $S_n x \to Sx$, allora*

$$S \in \mathcal{L}(X),$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n x_n = Sx. \tag{2.5}$$

Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} S_n x = Sx$$

uniformemente in qualunque compatto di X.

Dimostrazione. Dalla linearità di S_n deriva la linearità di S. Siano $x \in X$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in X, $x_n \to x$.

$$\|S_n x_n - Sx\| \leq \|S_n x_n - S_n x\| + \|S_n x - Sx\|.$$

Dal teorema di Banach-Steinhaus segue che $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un insieme equicontinuo, cioè $\exists C > 0$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\|S_n\| \leq C.$$

Segue che

$$\|Sx\| = \lim_{n\to+\infty} \|S_n x\| \leq C\|x\|.$$

Ovvero $S \in \mathcal{L}(X)$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n x_n - Sx\| \leq \lim_{n\to+\infty} (\|S_n(x_n - x)\| + \|S_n x - Sx\|)$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} (C\|x_n - x\| + \|S_n x - Sx\|) = 0.$$

Dimostriamo infine l'ultima affermazione. Se per assurdo non fosse vera, esisterebbero $\eta > 0$, $H \subseteq X$ compatto e $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in H$ tale che che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\|S_n x_n - S x_n\| \geq \eta.$$

Eventualmente passando ad una sottosuccessione possiamo supporre che

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \in H.$$

Segue da (2.5) che

$$\|S_n x_n - S x_n\| \leq \|S_n x_n - S x_0\| + \|S x_0 - S x_n\| \to 0.$$

In contraddizione con

$$\|S_n x_n - S x_n\| \geq \eta.$$

□

Lemma 2.1.2. *Sia $T(\cdot)$ un semigruppo. $T(\cdot)$ è fortemente continuo se e solo se $\forall x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ è continua in 0. Ossia se*

$$\lim_{t \to 0} \|T(t)x - x\| = 0. \tag{2.6}$$

Dimostrazione. Se $T(\cdot)$ è fortemente continuo allora $\forall x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ è continua in $[0, +\infty[$. Quindi (2.6) è vera anche per $t = 0$.
Viceversa, sia $t \mapsto T(t)x$ continua in 0. Iniziamo provando che $\exists \delta, M \geq 0$ tali che

$$\|T(t)\| \leq M \qquad \text{se } t \leq \delta.$$

Viceversa, sia $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $[0, +\infty[$, $t_n \to 0$ tale che

$$\sup_{[0,+\infty[} \|T(t_n)\| = +\infty.$$

Allora per il teorema di Banach-Steinhaus, $\exists x \in X$ tale che $\|T(t_n)x\|$ non è limitata. Ciò è una contraddizione con l'ipotesi di continuità in 0 di $T(t)x$.
Siano $x \in X$ e $h > 0$. Proviamo che

$$\lim_{h \to 0} \|T(t+h)x - T(t)x\| = 0.$$

$$\|T(t+h)x - T(t)x\| = \|T(t)(T(h)x - x)\|.$$

Per il punto precedente, per $t \in [0, \delta]$,

$$\|T(t)\| \leq M.$$

Se $t \in [0,2\delta]$, $t = \frac{t}{2} + \frac{t}{2}$, $\frac{t}{2} \in [0,\delta]$. Quindi

$$\|T(t)\| \leq \left\|T(\frac{t}{2})\right\|^2 \leq M^2.$$

Per induzione possiamo estendere questo fatto a $[0, 2^k\delta]$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Dunque $\exists M_\delta > 0$ tale che

$$\lim_{h\to 0} \|T(t+h)x - T(t)x\| \leq \lim_{h\to 0} M_\delta \|T(h)x - x\| = 0.$$

Sia $h \in]0,t[$.

$$\|T(t-h)x - T(t)x\| = \|T(t-h)(x - T(h)x)\|.$$

Analogamente, se $h \in]0,t[$, esiste $M_h > 0$ tale che

$$\lim_{h\to 0} \|T(t-h)x - T(t)x\| \leq \lim_{h\to 0} M_h \|x - T(h)x\| = 0.$$

□

2.1.2 Generatore infinitesimale

Definizione 2.1.2. Sia $T(\cdot)$ un semigruppo fortemente continuo e sia $t > 0$.
Il generatore infinitesimale di $T(\cdot)$ è l'applicazione $A : D(A) \to X$ definita da:

$$D(A) := \{x \in X : \exists \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \in X\}$$

$$Ax := \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \tag{2.7}$$

Diremo brevemente che A è il generatore di $T(\cdot)$.

Osservazione 2.1.1. *$D(A)$ è un sottospazio vettoriale di X e $A : D(A) \to X$ è un operatore lineare.*

Osservazione 2.1.2. *Sia $x \in D(A)$. Il generatore infinitesimale A rappresenta la derivata destra nel punto $t = 0$ della funzione $t \mapsto T(t)x$.*

Lemma 2.1.3. *Siano $T(\cdot)$ un semigruppo e A il suo generatore. Se $x \in D(A)$ allora*

- *$\forall t \geq 0$,*
$$T(t)x \in D(A) \tag{2.8}$$
-
$$t \mapsto T(t)x \in C^1([0,+\infty[, X) \tag{2.9}$$

- $\forall t \geq 0$,
$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax \tag{2.10}$$

Dimostrazione. Sia $h > 0$. Osserviamo che, se $x \in D(A)$, allora per $t > 0$,
$$\frac{T(h) - I}{h}T(t)x = \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)\frac{T(h)x - x}{h}. \tag{2.11}$$

In particolare
$$\lim_{h \to 0} \frac{T(h) - I}{h}T(t)x = \lim_{h \to 0} T(t)\frac{T(h)x - x}{h} = T(t)Ax.$$

Quindi $T(t)x \in D(A)$ e
$$AT(t)x = T(t)Ax.$$

Per provare (2.9) dobbiamo mostrare che, $\forall t > 0$, esiste la derivata sinistra di $T(t)x$ e coincide con $T(t)Ax$.
Siano $t, h > 0$. Allora
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - T(t)Ax = \lim_{h \to 0^+} T(t-h)(\frac{x - T(h)x}{-h} - T(h)Ax).$$

Dal teorema (2.1.1) segue che
$$\lim_{h \to 0^+} T(t-h)(\frac{x - T(h)x}{-h} - T(h)Ax) = 0.$$

Quindi si ha che $\forall t \geq 0$, $t \mapsto T(t)x$ è derivabile e
$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x. \tag{2.12}$$

$\square$

Osservazione 2.1.3. *Se A è il generatore di $T(\cdot)$, allora, per $x \in D(A)$ e $h > 0$, vale la seguente formula*
$$\frac{T(h)x - x}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h AT(s)xds. \tag{2.13}$$

In effetti dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che
$$\frac{1}{h}\int_0^h AT(s)xds = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{dT(s)}{ds}xds = \frac{T(h)x - x}{h}.$$

Lemma 2.1.4. *$D(A)$ è denso in X.*

Dimostrazione. Mostriamo che per ciascun $x \in X$ esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ convergente a x. Sia $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $]0,+\infty[$ convergente a 0. Definiamo $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$x_n := \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)xds. \tag{2.14}$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x = x.$$

Rimane da mostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in D(A)$.
Sia $h > 0$.

$$\frac{T(h)x_n - x_n}{h} = \frac{1}{ht_n}(\int_0^{t_n} T(h+s)xds - \int_0^{t_n} T(s)xds).$$

Ponendo $s' = s + h$,

$$\frac{1}{ht_n}(\int_h^{t_n+h} T(s)xds - \int_0^{t_n} T(s)xds)$$

$$= \frac{1}{ht_n}(\int_{t_n}^{t_n+h} T(s)xds + \int_h^{t_n} T(s)xds - \int_h^{t_n} T(s)xds - \int_0^{h} T(s)xds)$$

$$= \frac{1}{ht_n}(\int_{t_n}^{t_n+h} T(s)xds - \int_0^{h} T(s)xds).$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in D(A)$ e

$$Ax_n = \lim_{h\to 0}(\frac{1}{t_n}(\frac{1}{h}(\int_{t_n}^{t_n+h} T(s)xds - \int_0^{h} T(s)xds)) = \frac{1}{t_n}(T(t_n)x - x). \tag{2.15}$$

□

Lemma 2.1.5. *A è un operatore chiuso.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in D(A) convergente a $x \in X$ e sia $y \in X$ tale che $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converga ad y. Mostriamo che allora $x \in D(A)$ e $y = Ax$.
Dalla formula (2.13) segue che, $\forall t \geq 0$,

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_nds. \tag{2.16}$$

Quindi

$$T(t)x - x = \lim_{n\to+\infty}(T(t)x_n - x_n) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^t T(s)Ax_nds.$$

Facciamo vedere che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^t T(s)Ax_n ds = \int_0^t T(s)yds.$$

In effetti

$$\left\|\int_0^t T(s)Ax_n ds - \int_0^t T(s)yds\right\| \leq \int_0^t \|T(s)(Ax_n - y)\|\, ds.$$

Dal teorema 2.1.1 segue che $\forall\delta > 0$ esisterà $M_\delta > 0$ tale che

$$\|T(s)(Ax_n - y)\| \leq M_\delta \|Ax_n - y\| \qquad \text{per } t \in [0, \delta].$$

Allora $\forall\epsilon > 0$ per $n > \overline{n}$ opportuno

$$\int_0^t \|T(s)(Ax_n - y)\|\, ds \leq M_\delta \int_0^t \epsilon ds = tM_\delta\epsilon.$$

Dunque

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds,$$

da cui

$$Ax = \lim_{t\to 0}\frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0}\int_0^t T(s)yds = y. \tag{2.17}$$

□

Teorema 2.1.2. *Siano $T(\cdot)$ e $S(\cdot)$ semigruppi fortemente continui entrambi di generatore infinitesimale A.*
Allora $\forall t \geq 0$

$$T(t) = S(t) \tag{2.18}$$

Dimostrazione. Siano $x \in D(A)$ e $t, s \geq 0$, $t \geq s$.

$$\frac{d}{ds}(T(t-s)S(s)x) = \lim_{h\to 0}\frac{T(t-s-h)S(s+h)x - T(t-s)S(s)x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(T(t-s-h)\frac{(S(s+h)x - S(s)x)}{h} + \frac{T(t-s-h) - T(t-s)}{h}S(s)x).$$

Per il teorema 2.1.1

$$\lim_{h\to 0} T(t-s-h)\frac{(S(s+h)x - S(s)x)}{h} = T(t-s)AS(s)x.$$

Mentre, dal lemma 2.1.3 si ha che se $x \in D(A)$ e $s \geq 0$ allora $S(s)x \in D(A)$ e

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(t-s-h) - T(t-s)}{h}S(s)x = -AT(t-s)S(s)x.$$

Allora

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(t-s-h)S(s+h)x - T(t-s)S(s)x}{h} = T(t-s)AS(s)x - AT(t-s)S(s)x$$

$$= T(t-s)S(s)Ax - T(t-s)S(s)Ax = 0.$$

Segue quindi che $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ è costante, e in particolare $\forall t \geq 0$ e $\forall x \in D(A)$

$$T(t)x = S(t)x. \tag{2.19}$$

Sia ora $x \in X$. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in D(A) convergente a x.
Allora $\forall t \geq 0$ e $\forall x \in X$,

$$T(t)x = \lim_{n\to+\infty} T(t)x_n = \lim_{n\to+\infty} S(t)x_n = S(t)x. \tag{2.20}$$

□

2.1.3 Relazione tra semigruppi e problemi ben posti

Sia X uno spazio di Banach reale o complesso e $D(A) \subset X$ denso. Sia inoltre A il generatore infinitesimale di un semigruppo $T(\cdot)$. Fissiamo $T > 0$ e riprendiamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) & t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 & u_0 \in D(A) \end{cases} \tag{PC}$$

Sappiamo dal teorema 1.1.1 che nel caso di A limitato, il problema è ben posto e la soluzione stretta è data da

$$u(t) = e^{tA}u_0.$$

Vediamo come varia la soluzione stretta u nel caso in cui A è il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo non limitato.

Teorema 2.1.3. *Sia $T(\cdot)$ semigruppo di generatore infinitesimale A. Sia $T > 0$. Allora $\forall u_0 \in D(A)$ il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) & \textit{per } t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{PC}$$

è ben posto e la sua unica soluzione stretta è data da

$$u(t) = T(t)u_0 \tag{2.21}$$

Dimostrazione. Sia $u_0 \in D(A)$ e $T > 0$. Poniamo

$$u(t) = T(t)u_0.$$

Dal lemma 2.1.3 segue che u è una soluzione stretta di (PC). Verifichiamo che u è unica e dipende con continuità da u_0. Per linearità del problema mostriamo che se u è soluzione stretta di

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) & \text{per } t \in [0,T] \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

allora deve essere $\forall t \in [0,T]$,

$$u(t) = 0.$$

Sia $t \in]0,T]$. Per $s \in [0,t]$ definiamo

$$v(s) = T(t-s)u(s). \tag{2.23}$$

Verifichiamo che v è costante. Sia dunque $h > 0$ tale che $s + h \in [0,t]$.

$$\frac{v(s+h) - v(s)}{h} = \frac{T(t-s-h)u(s+h) - T(t-s)u(s)}{h}$$

$$= T(t-s-h)(\frac{u(s+h) - u(s)}{h}) + \frac{T(t-s-h) - T(t-s)}{h}u(s).$$

Esaminiamo separatamente i due termini. Dal teorema (2.1.1)

$$\lim_{h\to 0} T(t-s-h)\frac{u(s+h) - u(s)}{h} = T(t-s)u'(s), \tag{2.24}$$

mentre, poiché $\forall s \in [0,t]$ $u(s) \in D(A)$, vale che

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(t-s-h) - T(t-s)}{h}u(s) = -AT(t-s)u(s). \tag{2.25}$$

Allora, da (2.24) e (2.25), segue che

$$v'(s) = \lim_{h\to 0^+} \frac{v(s+h) - v(s)}{h} = T(t-s)(u'(s) - Au(s)) = 0.$$

Perciò v è costante e $\forall t \in [0,T]$

$$v(t) = v(0),$$

ossia $\forall t \geq 0$

$$0 = T(t)0 = v(0) = v(t) = u(t) = 0.$$

La soluzione u è quindi unica e dipende con continuità dal dato iniziale u_0. Siano infatti $T > 0$ e $t \in [0,T]$. Allora per il teorema di Banach-Steinhous esisterà $M_T > 0$ tale che

$$\|u(t)\| = \|T(t)u_0\| \leq M_T \|u_0\|, \tag{2.26}$$

$\square$

cioè se A è il generatore di un semigruppo $T(\cdot)$ allora $\forall u_0 \in D(A)$ il problema (PC) omogeneo è ben posto e, $\forall t \geq 0$, la soluzione stretta è

$$u(t) = T(t)u_0.$$

2.1.4 Esempi

Esempio 2.1.1. Sia $A \in \mathcal{L}(X)$,

$$T(t) = \{e^{tA} : t \geq 0\}$$

è un semigruppo con generatore infinitesimale A.
Dal lemma 1.1.1 segue che $T(\cdot)$ è un semigruppo. Dall'osservazione 1.1.2,

$$t \mapsto e^{tA} \in C^1([0, +\infty[, \mathcal{L}(X))$$

e $\forall x \in X$

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{tA}x - x}{t} = Ax.$$

Segue quindi che $T(\cdot)$ è un semigruppo di generatore infinitesimale A e $D(A) = X$.

In generale, dato un generico semigruppo $T(\cdot)$, la proprietà

$$t \mapsto T(t) \in C([0, +\infty[, \mathcal{L}(X))$$

non è vera. Analizziamo ad esempio il semigruppo delle traslazioni. (Vedi l'esempio 1.1.1)

Esempio 2.1.2. Semigruppo delle traslazioni
Sia $X = BUC(\mathbb{C})$. $\forall u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $\forall t \geq 0$ definiamo il semigruppo delle traslazioni

$$(T(t)(u))(x) = u(x + t). \tag{2.27}$$

Dall'esempio 1.1.1 segue che T(t) è un semigruppo fortemente continuo. Tuttavia $t \mapsto T(t)$ non è continua a valori in $\mathcal{L}(X)$. In effetti, siano $\epsilon > 0$ e $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tali che:

$$u_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{1}{\epsilon}t & \text{se } t \in [0, \epsilon] \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{2.28}$$

Si ha

$$T(\epsilon)u_0(t) = u_0(\epsilon + t).$$

Calcoliamo ora $\|T(\epsilon)u_0 - u_0\|$.

$$\|T(\epsilon)u_0 - u_0\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_0(t + \epsilon) - u_0(t)|.$$

$$u_0(t+\epsilon) - u_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -\epsilon \\ 1 + \frac{1}{\epsilon}t & \text{se } t \in]-\epsilon, 0] \\ 1 - \frac{1}{\epsilon}t & \text{se } t \in]0, \epsilon] \\ 0 & \text{se } t > \epsilon. \end{cases} \tag{2.29}$$

Quindi, la funzione che $t \mapsto T(t)$, non è continua perchè

$$\|T(\epsilon)u_0 - u_0\| \geq |u_0(\epsilon) - u_0(0)| = 1.$$

Studiamo ora il generatore infinitesimale di $T(\cdot)$.
Sia $\widetilde{A}$ il generatore infinitesimale di $T(\cdot)$. Indichiamo con A e D(A) rispettivamente l'operatore di derivazione definito nell'esempio 0.3.1 e il suo dominio, ossia

$$D(A) = \{u \in X : u \text{ è derivabile in } \mathbb{R}, u' \in X\},$$

$$A : D(A) \to X$$
$$Au = u'.$$

Mostriamo che $\widetilde{A} = A$.
Sia $u_0 \in D(A)$. $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall t \geq 0$,

$$\left| \frac{T(t)u_0(x) - u_0(x)}{t} - u_0'(x) \right| = \left| \frac{u_0(x+t) - u_0(x)}{t} - u_0'(x) \right|.$$

Poichè $u_0 \in BUC(\mathbb{C})$, dal teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha che

$$\left| \frac{u_0(x+t) - u_0(x)}{t} - u_0'(x) \right| \leq \frac{1}{t} \int_x^{x+t} |u_0'(s) - u_0'(x)| \, ds.$$

Per $t < \delta(\epsilon)$ opportuno, allora

$$\frac{1}{t} \int_x^{x+t} |u_0'(s) - u_0'(x)| \, ds < \frac{1}{t} t\epsilon = \epsilon.$$

Sia ora $u \in D(\widetilde{A})$. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\exists \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)u(x) - u(x)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{u(x+t) - u(x)}{t} = \widetilde{A}u(x) \text{ uniformemente,}$$

cioè, indicata con u'_+ la derivata destra di u, segue che $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\exists u'_+(x) = \widetilde{A}u(x).$$

Poiché $u \in D(\widetilde{A})$,

$$x \mapsto u'_+(x) \in BUC(\mathbb{C}).$$

In base al teorema 2.1.4 che segue, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\exists u'(x) = u'_+(x). \tag{2.30}$$

Perciò

$$A = \widetilde{A}$$

e

$$D(A) = \{u \in X : u \text{ è derivabile in } \mathbb{R}, u' \in X\}. \tag{2.31}$$

Enunciamo e dimostriamo il teorema utilizzato in (2.30).

Teorema 2.1.4. *Sia* $f : [a, b[\to X$ *continua tale che* $\forall t \in [a, b[$ *esiste* f'_+ *e*

$$t \mapsto f'_+(t) \in C([a, b[, X).$$

Allora $\forall t \in [a, b[$

$$\exists f'(t) = f'_+(t). \tag{2.32}$$

Dimostrazione. Poniamo

$$g(t) = f(a) + \int_a^t f'_+(s)ds. \tag{2.33}$$

Se riusciremo a dimostrare che $\forall t \in [a, b[$,

$$g(t) = f(t),$$

allora, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, potremo concludere che $\forall t \in [a, b[$

$$f'_+(t) = g'(t) = f'(t).$$

$\forall \epsilon > 0$ definiamo l'insieme

$$A_\epsilon = \{t \in [a, b[: |f(t) - g(t)| > \epsilon(t - a)\}. \tag{2.34}$$

Se $\forall \epsilon > 0$, $A_\epsilon = \emptyset$, allora

$$|f(t) - g(t)| \leq \epsilon(t - a) \qquad \forall t \in [a, b[.$$

Quindi, per l'arbitrarietà di ϵ, $g(t) = f(t)$.
Fissiamo $\epsilon > 0$. Supponiamo per assurdo che $A_\epsilon \neq \emptyset$. Sia

$$\bar{t} = \inf_{[a,b[}(A_\epsilon) \geq a.$$

Se $t \in [a, \bar{t}]$, allora

$$|f(t) - g(t)| \leq \epsilon(t - a).$$

$\forall t \in [a, b[$ indichiamo con $D_+(f-g)(t)$ la derivata destra di $(f-g)$ in t. Per ipotesi

$$D_+(f-g)(\bar{t}) = D_+(f)(\bar{t}) - D_+(g)(\bar{t}) = 0.$$

Segue che

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{(f-g)(\bar{t}+h) - (f-g)(\bar{t})}{h} = 0.$$

Perciò

$$(f-g)(\bar{t}+h) - (f-g)(\bar{t}) = o(h) \qquad \text{per } h \to 0^+.$$

Allora

$$\left|(f-g)(\bar{t}+h)\right| \leq \left|(f-g)(\bar{t}+h) - (f-g)(\bar{t})\right| + \left|(f-g)(\bar{t})\right|,$$

che per h sufficientemente piccolo

$$\leq o(h) + \epsilon(\bar{t}-a) \leq \epsilon(\bar{t}+h-a).$$

Ciò è in contradizione con la definizione di $\bar{t}$. □

Esempio 2.1.3. Sia $X = BUC([0, +\infty[, \mathbb{R})$. Definiamo $\forall t \geq 0$ e $x \geq 0$, il semigruppo delle traslazioni da destra

$$T(t) : X \to X$$

$$(T(t)u)(x) = u(x+t). \tag{2.35}$$

Analogamente all'esempio 2.1.2 segue che $T(t)$ è un semigruppo fortemente continuo. Studiamone il generatore infinitesimale. Indichiamo con $\widetilde{A}$ il generatore infinitesimale di A e con A il seguente operatore.

$$D(A) = \{u \in X : u \text{ è derivabile in } [0, \infty[, u' \in X\},$$

$$A : D(A) \to X,$$

$$Au = u'.$$

Verifichiamo che $A = \widetilde{A}$. Come nell'esempio 2.1.2 si può dimostrare che $D(A) \subseteq D(\widetilde{A})$. Viceversa, siano $u \in D(\widetilde{A})$ e $x \geq 0$.

$$(\widetilde{A}u)(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{(T(t)u)(x) - u(x)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{u(x+t) - u(x)}{t} = u'_+(x).$$

Poiché $u'_+ \in C([0, +\infty[, \mathbb{R})$, dal teorema 2.1.4, si ha che $\forall t \geq 0$, esiste la derivata $u'(t) = u'_+(t)$. Ciò significa che $\widetilde{A}$ è un'estensione di A e quindi $A = \widetilde{A}$.

Esempio 2.1.4. Equazione del calore
Siano $X = L^2(\mathbb{R}^n)$, $D(A) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)\} = H^2(\mathbb{R}^n)$. Definiamo

$$A : D(A) \to X,$$

$$Au = \Delta u. \tag{2.36}$$

Sia $u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Studiamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \Delta u(t,x) & \text{per } t \geq 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{PC}$$

Sia u una soluzione stretta di (PC). Indichiamo con $\mathcal{F}u$ la trasformata di Fourier di u. Allora, poichè $\mathcal{F}$ è un isomorfismo di X in sè,

$$u \in C^1([0,+\infty[, X) \Leftrightarrow \mathcal{F}u \in C^1([0,+\infty[, X)$$

e

$$\mathcal{F}(u'(t)) = \mathcal{F}(\lim_{h\to 0} \frac{u(t+h)-u(t)}{h}) = \partial_t \mathcal{F}u(t). \tag{2.37}$$

Si ha perciò che $\forall t \geq 0$ (PC) è un sistema equivalente a

$$\begin{cases} \partial_t (\mathcal{F}u)(t,\xi) = -\left|\xi\right|^2 (\mathcal{F}u)(t,\xi) & \text{per } t \geq 0 \\ (\mathcal{F}u)(0,\xi) = (\mathcal{F}u_0)(\xi) \end{cases} \tag{PCE}$$

che ammette un'unica soluzione $\mathcal{F}u$. Tale soluzione è definita per ogni $t \geq 0$ e $\forall \xi \in \mathbb{R}$ come

$$(\mathcal{F}u)(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2} (\mathcal{F}u_0)(\xi). \tag{2.38}$$

In particolare la soluzione u di (PC) è l'antitrasformata di Fourier di (2.37), cioè

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2} \mathcal{F}u_0(\xi))(x).$$

Definiamo ora il semigruppo.
Sia $t \geq 0$. Definiamo l'applicazione

$$T(t) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$T(t)f = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2} \mathcal{F}f). \tag{2.39}$$

La definizione ha senso. In effetti per $t \geq 0$ fissato,

$$\|T(t)f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \left\| e^{-t|\xi|^2} \mathcal{F}f \right\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \|\mathcal{F}f\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 .$$

Mostriamo che valgono le proprietà di semigruppo.
Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, per $t = 0$

$$T(0)f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) = f. \tag{2.40}$$

Inoltre, siccome vale che per $s \geq 0$

$$T(s)f = \mathcal{F}^{-1}(e^{-s|\xi|^2}\mathcal{F}f),$$

allora segue che $\forall t, s \geq 0$

$$\begin{aligned} T(t)(T(s)f) &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}\mathcal{F}(T(s)f)) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}e^{-s|\xi|^2}\mathcal{F}f) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-(t+s)|\xi|^2}\mathcal{F}f) = T(t+s)f. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Verifichiamo che è fortemente continuo. Per il lemma 2.1.2 è sufficiente mostrare la continuità in 0. Sia allora $f \in X$ e mostriamo che

$$\lim_{t\to 0} T(t)f = f \quad \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n).$$

$$\begin{aligned} \|T(t)f - f\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^n}\left\|e^{-t|\xi^2|}\mathcal{F}f - \mathcal{F}f\right\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\left\|(e^{-t|\xi^2|} - 1)\mathcal{F}f\right\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left|(e^{-t|\xi^2|} - 1)(\mathcal{F}f)(\xi)\right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left|(e^{-t|\xi^2|} - 1)\mathcal{F}f(\xi)\right|^2 d\xi = 0.$$

Sia $\widetilde{A}$ il generatore infinitesimale di $T(\cdot)$. Cioè

$$D(\widetilde{A}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \exists \lim_{h\to 0}\frac{T(h)u - u}{h} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

$$\widetilde{A} : D(\widetilde{A}) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\widetilde{A}u = \lim_{h\to 0}\frac{T(h)u - u}{h}.$$

Vogliamo provare che A, definito in (2.37), coincide con il generatore infinitesimale $\widetilde{A}$. Ossia che

$$A = \widetilde{A}.$$

Siano $h > 0$ e $u_0 \in D(A)$.

$$\frac{T(h)u_0 - T(0)u_0}{h} = \mathcal{F}^{-1}(\frac{e^{-h|\xi|^2} - 1}{h}\mathcal{F}u_0(\xi)).$$

Dimostriamo che per $h > 0$

$$\lim_{h\to 0} \mathcal{F}^{-1}(\frac{e^{-h|\xi|^2}-1}{h}\mathcal{F}u_0(\xi)) = \mathcal{F}^{-1}(-|\xi|^2 \mathcal{F}u_0(\xi)) \qquad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n).$$

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}((\frac{e^{-h|\xi|^2}-1}{h}+|\xi|^2)\mathcal{F}u_0(\xi))\right\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\left\|(\frac{e^{-h|\xi|^2}-1}{h}+|\xi|^2)\mathcal{F}u_0(\xi)\right\|_{L^2}^2$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left|(\frac{e^{-h|\xi|^2}-1}{h}+|\xi|^2)\mathcal{F}u_0(\xi)\right|^2 d\xi. \tag{2.42}$$

Poichè vale che

$$e^{-h|\xi|^2}-1 = -|\xi|^2\int_0^h e^{-|\xi|^2 s}ds,$$

si ha che

$$\frac{e^{-h|\xi|^2}-1}{h}+|\xi|^2 = |\xi|^2\left|1-\int_0^h e^{-|\xi|^2 s}ds\right| \le 2|\xi|^2,$$

segue che la formula (2.42) equivale a

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left|(-\frac{|\xi|^2}{h}\int_0^h e^{-|\xi|^2 s}ds+|\xi|^2)\right|^2 |\mathcal{F}u_0(\xi)|^2 d\xi \le \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}(|\xi|^2|\mathcal{F}u_0(\xi)|)^2 d\xi,$$

Poiché $u_0 \in D(A)$ segue che

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}(|\xi|^2|\mathcal{F}u_0(\xi)|)^2 d\xi < +\infty.$$

Quindi, per il teorema della convergenza dominata, segue che

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\left|(\frac{e^{-h|\xi|^2}-1}{h}+|\xi|^2)\mathcal{F}u_0(\xi)\right|^2 d\xi = 0.$$

Cioè se $u_0 \in D(A)$ allora

$$\exists \widetilde{A}u_0 = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\mathcal{F}^{-1}((e^{-t|\xi|^2}-1)\mathcal{F}u_0(\xi)) = Au_0.$$

Viceversa, supponiamo che $u_0 \in D(\widetilde{A})$. Allora esiste

$$\widetilde{A}u_0 = \lim_{h\to 0}\frac{T(h)-I}{h}u_0 = \mathcal{F}^{-1}(\frac{e^{-h|\xi|^2}-1}{h}\mathcal{F}u_0(\xi)).$$

Mostriamo che

$$\lim_{h\to 0}\mathcal{F}(\frac{T(h)-I}{h}u_0) = -\left|\xi\right|^2\mathcal{F}(u_0) = \Delta u_0 \qquad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n).$$

$\mathcal{F}^{-1}(\frac{e^{-h|\xi|^2}-1}{h}\mathcal{F}u_0(\xi))$ converge in L^2 e, poiché $\mathcal{F}$ è un isomorfismo di L^2 in sè, allora

$$\frac{e^{-h|\xi|^2}-1}{h}\mathcal{F}u_0(\xi) \qquad \text{converge in } L^2.$$

Puntualmente si ha che

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{-h|\xi|^2}-1}{h}\mathcal{F}u_0(\xi) = -\left|\xi\right|^2\mathcal{F}u_0(\xi) \qquad \text{in } L^2 \text{ q.o.}$$

Quindi se $u_0 \in D(\widetilde{A})$, $\left|\xi\right|^2\mathcal{F}u_0(\xi) \in L^2$ e

$$\widetilde{A} = \mathcal{F}^{-1}(-\left|\xi\right|^2\mathcal{F}u_0(\xi)).$$

E dunque

$$A = \widetilde{A},$$

cioè A è il generatore infinitesimale di $T(\cdot)$. Calcoliamo esplicitamente il semigruppo.

$$T(t)f = \mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|^2 t}(\mathcal{F}(f))(\xi)) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|^2 t}) * f.$$

Studiamo il termine $\mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|^2 t})$.

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|^2 t}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>}e^{-t|\xi|^2}d\xi.$$

Dal teorema di Fubini segue che

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>}e^{-t|\xi|^2}d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\prod_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}} e^{ix_i\xi_i - t\xi_i^2}d\xi_i.$$

$$ix_i\xi_i - t\xi_i^2 = -t\xi_i^2 + ix_i\xi_i + \frac{x_i^2}{4t} - \frac{x_i^2}{4t} = -(\sqrt{t}\xi_i - \frac{ix_i}{2\sqrt{t}})^2 - \frac{x_i^2}{4t}.$$

Segue che

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\prod_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}} e^{ix_i\xi_i - t\xi_i^2}d\xi_i = \frac{1}{(2\pi)^n}\prod_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}} e^{-(\sqrt{t}\xi_i - \frac{ix_i}{2\sqrt{t}})^2}e^{-\frac{x_i^2}{4t}}d\xi_i$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\prod_{i=1}^n e^{-\frac{x_i^2}{4t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(\sqrt{t}\xi_i - \frac{ix_i}{2\sqrt{t}})^2}d\xi_i = \frac{1}{(2\pi)^n}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\prod_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}} e^{-(s-\frac{ix_i}{2\sqrt{t}})^2}\frac{1}{\sqrt{t}}ds.$$

Facciamo vedere che $\forall a \in \mathbb{R}$
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+ia)^2} dx = \sqrt{\pi}.$$
Questa formula è ben nota se $a = 0$. Si tratta di farlo vedere per $a \neq 0$. Supponiamo che $a > 0$ e $R > 0$. Indichiamo con Γ la seguente curva in $\mathbb{C}$:
$$\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \leq R\}$$
$$\cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |Re(\lambda)| \leq R, Im(\lambda) = a\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |Re(\lambda)| = R, 0 \leq Im(\lambda) \leq a\}$$
orientata in senso antiorario. Per il teorema di Cauchy,
$$\int_{\Gamma} e^{-x^2} dx = 0.$$

Inoltre
$$\int_0^a e^{-(R+iy)^2} dy = \int_0^a e^{-(R^2+iRy-y^2)} dy = e^{-R^2} \int_0^a e^{-iRy+y^2} dy.$$
$$\left| e^{-R^2} \int_0^a e^{-iRy+y^2} dy \right| \leq e^{-R^2} \int_0^a e^{y^2} dy \to 0 \qquad \text{per } R \to +\infty.$$
$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+ia)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Ciò significa che
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(s-\frac{ix_i}{2\sqrt{t}})^2} \frac{1}{\sqrt{t}} ds = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \frac{1}{\sqrt{t}} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}.$$
Di qui
$$\frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{i=1}^n e^{-\frac{x_i^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\sqrt{t}\xi_i - \frac{ix_i}{2\sqrt{t}})^2} = \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} (\frac{\pi}{t})^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$
$$(T(t)f)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} f(x-y) dy.$$

2.2 Il Teorema di Hille-Yosida

Lemma 2.2.1. *Sia $T(\cdot)$ un semigruppo. Allora esistono $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tali che $\forall t \geq 0$*
$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \tag{2.43}$$

Dimostrazione. Sappiamo già (vedi lemma 2.1.1) che per $t \in [0,1]$, esiste una costante $M_1 \geq 1$ tale che
$$\|T(t)\| \leq M_1.$$
Sia $t \geq 0$. In generale
$$t = [t] + \{t\},$$
dove $[t]$ indica la parte intera di t e $\{t\}$ la parte decimale. Allora, dalle proprietà di semigruppo,
$$\|T(t)\| = \left\|T(\{t\})T(1)^{[t]}\right\| \leq M_1 M_1^{[t]} \leq M_1 M_1^t = M_1 e^{tln(M_1)}.$$
□

Teorema 2.2.1. *Sia $T(\cdot)$ un semigruppo fortemente continuo di generatore infinitesimale A tale che $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ per $\omega \in \mathbb{R}$ e $M \geq 1$. Allora valgono le seguenti*

(I) A è chiuso e $\overline{D(A)} = X$

(II) l'insieme risolvente $\rho(A)$ contiene $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) > \omega\}$

(III) $\forall \lambda \in \Gamma$ e $\forall n \in \mathbb{N}$
$$\left\|(\lambda - A)^{-n}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(Re(\lambda) - \omega)^n} \tag{2.44}$$

Dimostrazione. Dai lemmi 2.1.4 e 2.1.5 segue che $D(A)$ è denso in X e A è chiuso. Sia $\lambda \in \Gamma$ ed $x \in X$. Definiamo
$$R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \tag{2.45}$$
L'integrale esiste in senso generalizzato. In effetti,
$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^{+\infty} e^{-Re(\lambda)t} \|T(t)x\| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-Re(\lambda)t} Me^{\omega t} \|x\| dt = \frac{M}{(Re(\lambda) - \omega)} \|x\|. \tag{2.46}$$
Abbiamo così definito un operatore lineare e limitato. Dimostriamo che, se $\lambda \in \Gamma$, allora $\lambda \in \rho(A)$ e
$$R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}.$$
Siano $\lambda \in \Gamma$ ed $x \in X$. Allora verifichiamo che
$$R(\lambda)x \in D(A). \tag{2.47}$$
Infatti, sia $h > 0$.
$$\frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x = \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(T(t+h)x - T(t)x)dt$$

$$= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt.$$

Ciò equivale a

$$\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt - \frac{1}{h} \int_0^{h} e^{-\lambda t} T(t) x dt.$$

Passando al limite otterremo che

$$\lim_{h \to 0} (\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt - \frac{1}{h} \int_0^{h} e^{-\lambda t} T(t) x dt) = \lambda R(\lambda) x - x.$$

Questo implica che per ogni $x \in X$ e $\lambda \in \Gamma$

$$R(\lambda) x \in D(A), \qquad AR(\lambda) x = \lambda R(\lambda) x - x \tag{2.48}$$

ossia

$$(\lambda - A) R(\lambda) = I. \tag{2.49}$$

Sia ora $x \in D(A)$. Poiché A è chiuso, (vedi lemma 0.1.4)

$$R(\lambda) A x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) A x dt = A(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt) = AR(\lambda) x$$

e perciò $\forall x \in D(A)$ vale che

$$R(\lambda)(\lambda - A) x = (\lambda - A) R(\lambda) x = x \tag{2.50}$$

Mostriamo infine che vale la condizione (III).
Sia $\lambda \in \Gamma$. Dal teorema 0.3.2 $\lambda \mapsto R(\lambda)$ è olomorfa. Quindi, $\forall n \in \mathbb{N}$ è derivabile n-1 volte e

$$\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda) = (-1)^{n-1} (n-1)! R(\lambda)^n. \tag{2.51}$$

D'altra parte verifichiamo che, $\forall x \in X$,

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda) x = \int_0^{+\infty} -t e^{-\lambda t} T(t) x dt. \tag{2.52}$$

In effetti si ha che

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(\lambda + h) x - R(\lambda) x}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda + h) t} T(t) x dt - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ht} - 1}{h} e^{-\lambda t} T(t) x dt.$$

Poiché
$$\frac{e^{-ht}-1}{h} = -\frac{1}{h}\int_{-ht}^{0} e^s ds,$$
allora
$$\left|\frac{e^{-ht}-1}{h}\right| \leq \frac{|ht|}{|h|} = t.$$
Di qui
$$\left\|\lim_{h\to 0}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ht}-1}{h} e^{-\lambda t}T(t)xdt\right\| \leq \lim_{h\to 0}\int_0^{+\infty} te^{-Re(\lambda)t}Me^{\omega t}\left\|x\right\|dt.$$
Poiché $\omega - Re(\lambda) < 0$, segue che $te^{\omega - Re(\lambda)}$ è sommabile in $[0,+\infty[$ e dunque, dal teorema della convergenza di Lebesgue, segue 2.52. In generale, $\forall n \in \mathbb{N}$, iterando il precedente procedimento, si ha che
$$\frac{d^n}{d\lambda^n}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)xdt = \int_0^{+\infty}(-1)^n t^n e^{-\lambda t}T(t)xdt. \tag{2.53}$$
Da (2.51) e (2.53) segue allora che
$$\left\|R(\lambda)^n\right\| \leq \frac{M}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{(\omega-Re(\lambda))t}\left\|x\right\|dt. \tag{2.54}$$
Se riusciremo a mostrare che, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^{+\infty} t^n e^{(\omega-Re(\lambda))t}dt = \frac{n!}{(Re(\lambda)-\omega)^{n+1}} \tag{2.55}$$
avremo concluso. Procediamo per induzione.
Caso $n = 0$.
$$\int_0^{+\infty} e^{(\omega-Re(\lambda))t}dt = \lim_{M\to+\infty}\frac{1}{\omega - Re(\lambda)}[e^{(\omega-Re(\lambda))t}]_0^M = \frac{1}{Re(\lambda)-\omega}.$$
Supponiamo che valga
$$\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{(\omega-Re(\lambda))t}dt = \frac{(n-1)!}{(Re(\lambda)-\omega)^n}.$$
e dimostriamo (2.55). Integriamo per parti.
$$\int_0^{+\infty} t^n e^{(\omega-Re(\lambda))t}dt =$$
$$= \lim_{M\to+\infty}([\frac{t^n e^{(\omega-Re(\lambda))t}}{\omega-Re(\lambda)}]_0^M + \int_0^M \frac{n}{Re(\lambda)-\omega}t^{n-1}e^{(\omega-Re(\lambda))t}dt)$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{n}{Re(\lambda)-\omega} t^{n-1} e^{(\omega-Re(\lambda))t} dt).$$

Usando l'ipotesi induttiva si ha che,

$$\int_0^{+\infty} \frac{n}{Re(\lambda)-\omega} t^{n-1} e^{(\omega-Re(\lambda))t} dt = \frac{n!}{(Re(\lambda)-\omega)^{n+1}}.$$

□

Lemma 2.2.2. *Siano A generatore infinitesimale di $T(\cdot)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora $\forall x \in X$,*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda R(\lambda)x = x.$$

Dimostrazione. Sia $\lambda > \omega$ e $x \in D(A)$.

$$\|\lambda R(\lambda)x - x\| = \|AR(\lambda)x\| = \|R(\lambda)Ax\| \leq \frac{M}{\lambda-\omega}\|Ax\| \to 0 \text{ se } \lambda \to +\infty. \tag{2.56}$$

Siano $x \in X$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in D(A) convergente a x.

$$\|\lambda R(\lambda)x - x\| \leq \|\lambda R(\lambda)(x-x_k)\| + \|\lambda R(\lambda)x_k - x_k\| + \|x_k - x\|$$

$$\leq \frac{M\lambda}{\lambda-\omega}\|x-x_k\| + \|\lambda R(\lambda)x_k - x_k\| + \|x_k - x\|.$$

Sia $\epsilon > 0$. Siano $\overline{k}, \lambda(\epsilon)$ opportuni tali che se $k > \overline{k}$ e $\lambda > |\lambda(\epsilon)|$

$$\|x - x_k\| < \epsilon \qquad e \qquad \|\lambda R(\lambda)x_k - x_k\| < \epsilon.$$

Si ha allora che

$$\|\lambda R(\lambda)x - x\| \leq \frac{M\lambda}{\lambda-\omega}\epsilon + 2\epsilon.$$

□

Definizione 2.2.1. Sia A generatore infinitesimale di un semigruppo $T(\cdot)$.
Per $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > \omega$ definiamo gli approssimanti di Yosida di A come

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda). \tag{2.57}$$

Osservazione 2.2.1.

$$AR(\lambda) = (\lambda - \lambda + A)R(\lambda) = \lambda R(\lambda) - 1 \tag{2.58}$$

Gli $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ sono approssimanti di A nel seguente senso:

Lemma 2.2.3. *Sia A generatore infinitesimale di un semigruppo $T(\cdot)$. Siano $x \in D(A)$ e $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ gli approssimanti di Yosida di A. Allora*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda x = Ax. \tag{2.59}$$

Dimostrazione. Dal lemma 2.2.2 segue che

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda R(\lambda)Ax = Ax.$$

□

Osservazione 2.2.2. *Per ciascun $\lambda > \omega$, $A_\lambda : X \to X$ è lineare e limitato.*

Teorema 2.2.2. *Teorema di Hille-Yosida*

Sia $A : D(A) \to X$ lineare. A è il generatore infinitesimale di un semigruppo $T(\cdot)$ fortemente continuo tale che $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ se e solo se valgono

(I) A è chiuso e $\overline{D(A)} = X$;

(II) l'insieme risolvente $\rho(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \omega\}$;

(III) $\forall\lambda > \omega$ e $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left\|(\lambda - A)^{-n}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}. \tag{2.60}$$

Dimostrazione. Abbiamo già visto che le tre condizioni sono necessarie. Mostriamo che sono sufficienti.
Divideremo la dimostrazione in più passi. Supponiamo che valgano (I),(II) e (III). Dimostriamo che A è generatore infinitesimale di un semigruppo $T(\cdot)$ utilizzando gli approssimanti di Yosida di A.
Siano $\lambda > \omega$ e $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ gli approssimanti di Yosida di A.
Dall'esempio 1.1.1 segue che ogni A_λ è generatore infinitesimale del semigruppo

$$T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}, \qquad t \geq 0.$$

Passo 1. Dimostriamo che esistono $M' > 0$ e $\omega' \in \mathbb{R}$ tale che $\forall t \geq 0$ e $\forall\lambda > \omega$,

$$\left\|e^{tA_\lambda}\right\| \leq M'e^{t\omega'}.$$

Sia $t \geq 0$.

$$\|T_\lambda(t)\| = e^{-\lambda t}\left\|e^{\lambda^2 R(\lambda)t}\right\| \leq e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|\lambda^{2n}|\, t^n\, \|R(\lambda)^n\|}{n!}$$

$$\leq e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|\lambda^{2n}|\, t^n}{n!}\frac{M}{(\lambda-\omega)^n} = Me^{\frac{\lambda^2 t}{\lambda-\omega}-\lambda t}.$$

$$\frac{\lambda^2 t}{\lambda-\omega}-\lambda t=\frac{\lambda^2 t-\lambda^2 t+\omega\lambda t}{\lambda-\omega}=\frac{\omega\lambda t}{\lambda-\omega}\leq \omega(\omega+1)t=\omega' t \qquad \text{se } \lambda\geq\omega+1.$$

Passo 2. Mostriamo che $\forall x\in X$

$$\exists T(t)x=\lim_{\lambda\to+\infty}T_\lambda(t)x \tag{2.61}$$

Siano $x\in D(A)$ e $t\geq 0$. Dimostriamo che $\{T_\lambda(t)x\}_{\lambda\in\Gamma}$ è una successione di Cauchy in X. Per fare ciò verifichiamo inizialmente che, se $\lambda,\mu\in\Gamma$,

$$T_\lambda(t)x-T_\mu(t)x=\int_0^t T_\lambda(s)(A_\lambda-A_\mu)T_\mu(t-s)xds.$$

In effetti

$$\frac{d}{ds}(T_\lambda(s)T_\mu(t-s)x)=\lim_{h\to 0}\frac{T_\lambda(s+h)T_\mu(t-s-h)x-T_\lambda(s)T_\mu(t-s)x}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}(\frac{T_\lambda(s+h)-T_\lambda(s)}{h}T_\mu(t-s-h)x+T_\lambda(s)\frac{T_\mu(t-s-h)x-T_\mu(t-s)x}{h}).$$

Dal teorema 2.1.1 segue che

$$\frac{d}{ds}(T_\lambda(s)T_\mu(t-s)x)=A_\lambda T_\lambda(s)T_\mu(t-s)x-T_\lambda(s)A_\mu T_\mu(t-s)x$$

$$=T_\lambda(s)(A_\lambda-A_\mu)T_\mu(t-s)x=T_\lambda(s)T_\mu(t-s)(A_\lambda-A_\mu)x,$$

usando il fatto che tutti gli operatori commutano tra loro. Otteniamo quindi che

$$\int_0^t T_\lambda(s)T_\mu(t-s)(A_\lambda-A_\mu)xds=\int_0^t\frac{d}{ds}(T_\lambda(s)T_\mu(t-s)x)ds=T_\lambda(t)x-T_\mu(t)x.$$

Allora

$$\|T_\lambda(t)x-T_\mu(t)x\|\leq\int_0^t\|T_\lambda(s)T_\mu(t-s)(A_\lambda-A_\mu)x\|\,ds\leq$$

$$\leq\int_0^t Me^{\omega' s}Me^{\omega'(t-s)}\|(A_\lambda-A_\mu)x\|\,ds=M^2e^{\omega' t}\int_0^t\|(A_\lambda-A_\mu)x\|\,ds.$$

Dal lemma 2.2.3 segue che $\forall\epsilon>0$, se $\lambda,\mu>\overline{\lambda}$ opportuno

$$\|T_\lambda(t)x-T_\mu(t)x\|\leq M^2e^{\omega' t}\int_0^t\|(A_\lambda-A_\mu)x\|\,ds\leq M^2e^{\omega' t}\epsilon t. \tag{2.62}$$

Perciò, dall'arbitrarietà di ϵ si ha che $\forall x\in D(A)$ e $t\geq 0$, $\{T_\lambda(t)x\}_{\lambda\in\Gamma}$ è una successione di Cauchy in X e quindi è convergente. Sia

$$T(t)x=\lim_{\lambda\to+\infty}T_\lambda(t)x. \tag{2.63}$$

Dalla formula 2.62 segue che la convergenza è uniforme sui compatti. Dunque, $t \mapsto T(t)x \in C([0,+\infty[,X)$ e

$$\|T(t)x\| = \lim_{\lambda\to+\infty} \|T_\lambda(t)x\| \leq \lim_{\lambda\to+\infty} Me^{\frac{\omega\lambda t}{\lambda-\omega}}\|x\| = Me^{\omega t}\|x\|.$$

Inoltre $\forall x \in D(A)$, $t \mapsto T(t)x$ è lineare da $D(A)$ a $C([0,T],X)$. Dal teorema del prolungamento di funzioni lineari e uniformemente continue, segue che $T(\cdot)$ è estendibile con continuità in $\mathcal{L}(X)$ e $\forall x \in X$, $t \mapsto T(t)x \in C([0,+\infty[,X)$. Ciò implica che esiste una costante $C \geq 0$ tale che $\forall x \in X$,

$$\|T(t)x\| \leq C\|x\|.$$

Passo 3. $\{T(t) : t \geq 0\}$ è un semigruppo .
Sia $x \in D(A)$.

$$T(0)x = \lim_{\lambda\to+\infty} T_\lambda(0)x = x. \tag{2.64}$$

Proviamo che, se $t, s \geq 0$,

$$T(t)T(s)x = T(t+s)x. \tag{2.65}$$

$$T(t+s)x = \lim_{\lambda\to+\infty} T_\lambda(t+s)x = \lim_{\lambda\to+\infty} T_\lambda(t)T_\lambda(s)x.$$

Dal teorema 2.1.1,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} T_\lambda(t)T_\lambda(s)x = T(t)T(s)x.$$

Segue quindi che

$$T(t)T(s)x = T(t+s)x.$$

Siano $x \in X$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $D(A)$ convergente a x.

$$T(0)x = \lim_{n\to+\infty} T(0)x_n = \lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

$$T(t+s)x = \lim_{n\to+\infty} T(t+s)x_n = \lim_{n\to+\infty} T(t)T(s)x_n = T(t)T(s)x.$$

Passo 4. Verifichiamo che A è il generatore di T(t).
Indichiamo momentaneamente con $\widetilde{A}$ il generatore di T(t). Dimostriamo che $\widetilde{A} = A$. Siano $x \in D(A)$ e $\lambda \in \Gamma$.

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda\to+\infty} T_\lambda(t)x - x = \lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^t T_\lambda(s)A_\lambda x ds.$$

Proviamo che $\forall t \geq 0$,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^t T_\lambda(s)A_\lambda x ds = \int_0^t T(s)Ax ds. \tag{2.66}$$

In effetti,

$$\|T_\lambda(s)A_\lambda(s)x - T(s)Ax\| \leq \|T_\lambda(s)(A_\lambda x - Ax)\| + \|(T_\lambda(s) - T(s))Ax\|.$$

Dal lemma 2.2.3 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \overline{\lambda} > 0$ tale che se $\lambda > \overline{\lambda}$,

$$\|T_\lambda(s)(A_\lambda x - Ax)\| \leq Me^{\omega' t}\|A_\lambda x - Ax\| < Me^{\omega' t}\epsilon,$$

inoltre, dal punto 2,

$$\|(T_\lambda(s) - T(s))Ax\| < \epsilon.$$

Allora

$$\|T_\lambda(s)A_\lambda(s)x - T(s)Ax\| \leq Me^{\omega' t}\epsilon + \epsilon.$$

Segue che

$$\left\| \int_0^t (T_\lambda(s)A_\lambda(s)x - T(s)Ax)ds \right\| < (Me^{\omega' t}\epsilon + \epsilon)t.$$

Per l'arbitrarietà di ϵ, segue la formula (2.66). Allora per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Axds = Ax.$$

Cioè, se $x \in D(A)$, allora $x \in D(\widetilde{A})$ e $\widetilde{A}x = Ax$.
Sia ora $x \in D(\widetilde{A})$ e $\lambda > \omega$. Per ipotesi, se $\lambda > \omega$ allora $\lambda \in \rho(A)$ e dunque $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(\widetilde{A})$.
Sia $y \in X$ tale che $y = (\lambda - \widetilde{A})x$. Poniamo

$$x' = (\lambda - A)^{-1}y \tag{2.67}$$

Si ha che $x' \in D(A)$ e per quanto mostrato in precedenza, $Ax' = \widetilde{A}x'$. Se riusciremo a mostrare che $x' = x$ avremo concluso.

$$(\lambda - \widetilde{A})x' = (\lambda - A)x' = y.$$

Dall'iniettività di $\widetilde{A}$ segue che $x' = x$.
Ovvero $D(\widetilde{A}) = D(A)$ e

$$\widetilde{A}x = Ax. \tag{2.68}$$

□

Osservazione 2.2.3. *Le condizioni (II) e (III) del teorema di Hille-Yosida implicano, nel caso X spazio di Banach complesso, che*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) > \omega\} \subseteq \rho(A).$$

Infatti, sia $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 > \omega$. Per un tale λ_0 si ha che

$$\left\|(\lambda_0 - A)^{-n}\right\| \leq \frac{M}{(\lambda_0 - \omega)^n}.$$

$\lambda x - Ax = y \Leftrightarrow (\lambda - \lambda_0)x + (\lambda_0 - A)x = y \Leftrightarrow (1 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - A)^{-1})x = (\lambda_0 - A)^{-1}y$, *ossia*

$$x = (1 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - A)^{-1})^{-1}(\lambda_0 - A)^{-1}y \Leftrightarrow x = \sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda_0 - \lambda)^n(\lambda_0 - A)^{-n-1}y.$$

La serie converge se

$$|\lambda_0 - \lambda|^n \left\|(\lambda_0 - A)^{-n}\right\| < 1.$$

Inoltre, in tal caso

$$|\lambda_0 - \lambda|^n \left\|(\lambda_0 - A)^{-n}\right\| \leq M \left|\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - \omega}\right|^n.$$

Dato $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Re(\lambda) > \omega$, se riusciremo quindi a trovare $\lambda_0 > \omega$ tale che $\left|\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - \omega}\right| < 1$ avremo concluso.

$$\left|\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - \omega}\right|^n < 1 \Leftrightarrow |\lambda - \lambda_0|^2 < (\lambda_0 - \omega)^2,$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - \lambda_0)(\overline{\lambda} - \overline{\lambda_0}) < \lambda_0^2 - 2\lambda_0\omega + \omega^2 \Leftrightarrow |\lambda|^2 - 2\lambda_0 Re(\lambda) + \lambda_0^2 < \lambda_0^2 - 2\lambda_0\omega + \omega^2.$$

Di qui

$$|\lambda|^2 - \omega^2 < 2\lambda_0(Re(\lambda) - \omega).$$

Fissato $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re(\lambda) > \omega$, la quantità $|\lambda|^2 - \omega^2$ è costante. Segue che esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 > \omega$ tale che la disequazione risulta sempre vera. Cioè, se $Re(\lambda) > \omega$ allora $\lambda \in \rho(A)$.

2.3 Problemi di Cauchy non omogenei

Sia $A : D(A) \to X$ il generatore infinitesimale di un semigruppo $T(\cdot)$ fortemente continuo. Studiamo il seguente problema di Cauchy non omogeneo

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & \text{per } t \in [0, T] \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{PNO}$$

con $f : [0, T] \to X$ continua.

Lemma 2.3.1. *Sia $T > 0$. Se u è soluzione del problema non omogeneo allora*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \qquad \textit{per } 0 \leq t \leq T. \tag{2.69}$$

Dimostrazione. Siano $T > 0$ e $t \in]0, T]$. Per $s \in [0, t]$, poniamo $v(s) = T(t-s)u(s)$. Sia $h > 0$. Analogamente al caso omogeneo, dalla formula (2.23), segue che v è derivabile e

$$v'(s) = -T(t-s)Au(s) + T(t-s)u'(s) = T(t-s)(u'(s) - Au(s)) = T(t-s)f(s).$$

Dunque,

$$v(t) - v(0) = \int_0^t v'(s)ds = \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Inoltre, poiché $v(t) = u(t)$ e $v(0) = T(t)u_0$, si ha che

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \tag{2.70}$$

$\square$

(2.70) si chiama formula di variazione delle costanti.

Teorema 2.3.1. *Siano $u_0 \in D(A)$ e $f \in C^1([0,T], X)$. Allora u definita in (2.70) è soluzione stretta di (PNO).*

Dimostrazione. Sia $t \in [0, T]$. Sappiamo dal lemma 2.3.1 che se u è soluzione di (PNO) allora

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Verifichiamo che u è la soluzione stretta. Poniamo

$$z(t) := \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(s)f(t-s)ds.$$

Sia $h > 0$ tale che $t + h \in [0, T]$.

$$\frac{z(t+h) - z(t)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds - \int_0^t T(s)f(t-s)ds\right) =$$

$$\int_0^t T(s)\frac{f(t+h-s) - f(t-s)}{h}ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)f(t-s+h)ds.$$

Dimostriamo che il primo termine della somma converge a $\int_0^t T(s)f'(t-s)ds$.

$$\int_0^t T(s)\frac{f(t+h-s) - f(t-s)}{h}ds =$$

$$= \int_0^t T(s)(\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} - f'(t-s))ds + \int_0^t T(s)f'(t-s)ds.$$

$$\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} - f'(t-s) = \frac{1}{h}\int_{t-s}^{t-s+h} (f'(r)-f'(t-s))dr.$$

Di qui

$$\int_0^t T(s)(\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} - f'(t-s))ds = \int_0^t T(s)(\frac{1}{h}\int_{t-s}^{t+h-s} (f'(r)-f'(t-s))dr)ds.$$

Sia $\epsilon > 0$. Poiché $f' \in C([0,T],X)$, allora $\exists \delta > 0$ opportuno tale che, se $h < \delta$,

$$\|f'(r) - f'(s)\| \leq \epsilon.$$

Segue che per un tale δ, $\exists C > 0$ tale che,

$$\left\| \int_0^t T(s)(\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} - f'(t-s))ds \right\| \leq$$

$$\int_0^t \left\| \frac{1}{h} T(s) \int_{t-s}^{t-s+h} (f'(r)-f'(s))dr \right\| ds \leq tC\epsilon,$$

cioè

$$\lim_{h\to 0} \int_0^t T(s)(\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} - f'(t-s))ds = 0.$$

Quindi

$$\lim_{h\to 0} \int_0^t T(s)\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} ds = \int_0^t T(s)f'(t-s)ds. \tag{2.71}$$

Analizziamo il secondo termine.

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds =$$

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)(f(t+h-s)-f(0))ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)f(0)ds.$$

Poiché $f \in C([0,T],X)$, si ha che, se $h < \delta$ opportuno,

$$\|f(t+h-s) - f(0)\| < \epsilon.$$

Segue quindi che $\exists C > 0$ tale che

$$\|T(s)(f(t+h-s)-f(0))\| \leq C\epsilon.$$

Allora,

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)(f(t+h-s) - f(0))ds \right\| \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \| T(s)(f(t+h-s) - f(0)) \| \, ds$$

$$\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} C\epsilon ds = C\epsilon,$$

ossia, per l'arbitrarietà di ϵ

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)(f(t+h-s) - f(0))ds = 0.$$

Inoltre, dal teorema fondamentale del calcolo integrale, vale che

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f(0)ds = T(t)f(0),$$

e quindi

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds =$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)(f(t+h-s) - f(0))ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f(0)ds\right) = T(t)f(0). \tag{2.72}$$

Da (2.71) e (2.72) segue che

$$z'(t) = \lim_{h \to 0} \left(\int_0^t T(s) \frac{f(t+h-s) - f(t-s)}{h} ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f(t-s+h)ds\right)$$

$$= \int_0^t T(t-s)f'(s)ds + T(t)f(0). \tag{2.73}$$

Verifichiamo che $\forall t \in [0, T]$, $z(t) \in D(A)$ e calcoliamo $Az(t)$.

$$\frac{T(h) - Id}{h} \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \frac{1}{h} \int_0^t T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

$$= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)f(t-s)ds$$

$$= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds + \frac{1}{h} \int_h^t T(s)f(t+h-s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)f(t-s)ds =$$

$$= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds + \int_h^t T(s) \frac{f(t+h-s) - f(t-s)}{h} ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)f(t-s)ds. \tag{2.74}$$

Studiamo separatamente i termini della somma (2.74). Analogamente alla formula (2.72) si ottiene che

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds = T(t)f(0).$$

$$\int_h^t T(s)\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}ds =$$

$$= \int_h^t T(s)(\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} - f'(t-s))ds + \int_h^t T(s)f'(t-s)ds.$$

$$T(s)(\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} - f'(t-s))ds = T(s)\frac{1}{h}\int_{t-s}^{t-s+h}(f'(r)-f'(t-s))dr.$$

Poiché $f' \in C([0,T],X)$, allora $\exists\delta > 0$ opportuno tale che, se $h < \delta$,

$$\|f'(r) - f'(t-s)\| < \epsilon.$$

Segue che, per un tale δ, $\exists C > 0$ tale che,

$$\left\|\int_h^t T(s)(\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} - f'(t-s))ds\right\| \leq$$

$$\int_h^t \left\|\frac{1}{h}T(s)\int_{t-s}^{t-s+h}(f'(r)-f'(s))dr\right\| ds \leq (t-h)C\epsilon,$$

cioè

$$\lim_{h\to 0}\int_h^t T(s)(\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} - f'(t-s))ds = 0.$$

Quindi

$$\lim_{h\to 0}\int_h^t T(s)\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}ds = \lim_{h\to 0}\int_h^t T(s)f'(t-s)ds =$$

$$\int_0^t T(s)f'(t-s)ds. \tag{2.75}$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale, inoltre,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h T(s)f(t-s)ds = T(0)f(t) = f(t).$$

Segue che $\forall t \in [0,T]$, $z(t) \in D(A)$ e

$$Az(t) = \lim_{h\to 0}(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds + \frac{1}{h}\int_h^t T(s)f(t+h-s)ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)f(t-s)ds)$$

$$= T(t)f(0) + \int_0^t T(s)f'(t-s)ds - f(t). \tag{2.76}$$

Sia u la soluzione del (PNO). Per il lemma 2.3.1

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(s)f(t-s)ds = T(t)u_0 + z(t).$$

Poiché $u_0 \in D(A)$, segue che $\forall t \in [0,T]$, $u(t) \in D(A)$. Inoltre dalle formule (2.73) e (2.76) si ha che

$$u'(t) - Au(t) = AT(t)u_0 + z'(t) - AT(t)u_0 - Az(t) = f(t),$$

cioè u è soluzione stretta di (PNO). □

Esempio 2.3.1. Siano $X = BUC(\mathbb{C})$ e $A : D(A) \to X$ definiti come nell'esempio 2.1.2. Siano $f \in C^1([0,T], X)$ e $u_0 \in D(A)$. Per il teorema 2.3.1, il problema

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_x u(t,x) + f(t,x) & \text{per } t \in [0,T], x \in \mathbb{R} \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{PNO}$$

ammette un'unica soluzione data da

$$u(t,x) = (T(t)u_0)(x) + \int_0^t (T(t-s)f(s))(x)ds = u_0(t+x) + \int_0^t f(s, x+t-s)ds.$$

2.4 Gruppi

Definizione 2.4.1. Siano X uno spazio di Banach e $t \in]-\infty, +\infty[$. Si definisce gruppo fortemente continuo di applicazioni lineari e continue una funzione

$$G : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X) \tag{2.77}$$

tale che

(I).
$$G(0) = Id,$$

(II). $\forall t, s \in \mathbb{R}$
$$G(t+s) = G(t)G(s),$$

(III). $\forall x \in X$
$$t \mapsto G(t)x \in C(\mathbb{R}, X).$$

Osservazione 2.4.1. *Per ciascun $t \in \mathbb{R}$, $G(t)$ è invertibile.*
Infatti la proprietà (II) assicura che

$$I = G(0) = G(t-t) = G(t)G(-t) = G(-t)G(t). \tag{2.78}$$

Ossia $\forall t \in \mathbb{R}$ l'inverso di G(t) è G(-t).

2.4.1 Caratterizzazione del generatore infinitesimale

Definizione 2.4.2. Definiamo il generatore infinitesimale di un gruppo come

$$A : D(A) \to X,$$

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{G(t)x - x}{t}. \tag{2.79}$$

Il dominio D(A) è definito da

$$D(A) = \{x \in X : \exists Ax \in X\}. \tag{2.80}$$

Osservazione 2.4.2. *Nel caso di generatore infinitesimale di un gruppo occorre verificare che il limite esiste per $t \to 0$ e non solamente per $t \to 0^+$.*

Definizione 2.4.3. Sia $G(\cdot)$ un gruppo. Poniamo $\forall t \geq 0$

$$T_+(t) = G(t),$$

$$T_-(t) = G(-t). \tag{2.81}$$

Osservazione 2.4.3. *$T_+(\cdot)$ e $T_-(\cdot)$ sono due semigruppi fortemente continui.*

Teorema 2.4.1. *Sia A il generatore infinitesimale di un gruppo $G(\cdot)$. Allora A e -A sono rispettivamente i generatori infinitesimali di $T_+(\cdot)$ e $T_-(\cdot)$.*

Dimostrazione. Indichiamo con A_+ il generatore infinitesimale di $T_+(\cdot)$ e con A_- quello di $T_-(\cdot)$. Sia $x \in D(A)$.

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{G(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{G(t)x - x}{t} = A_+x.$$

Ciò significa che

$$D(A) \subseteq D(A_+).$$

Sia $x \in D(A_+)$. Allora

$$\exists \lim_{t\to 0^+} \frac{T_+(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{G(t)x - x}{t} = A_+x.$$

Verifichiamo che

$$\exists \lim_{t\to 0^-} \frac{G(t)x - x}{t} = A_+x.$$

In effetti

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{G(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{G(-t)x - x}{-t} = \lim_{t\to 0^+} G(-t)\frac{G(t)x - x}{t}.$$

Per il teorema 2.1.1

$$= \lim_{t\to 0^+} G(-t)\frac{G(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+} G(-t)\frac{T_+(t)x - x}{t} = A_+x.$$

Dunque

$$D(A) = D(A_+)$$

e, $\forall x \in D(A)$

$$Ax = A_+x.$$

Mostriamo adesso che -A è il generatore di $T_-(\cdot)$. Sia $x \in D(A)$.

$$Ax = \lim_{t\to 0^-} \frac{G(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{G(-t)x - x}{-t} = -\lim_{t\to 0^+} \frac{T_-(t)x - x}{t} = -A_-x.$$

Viceversa, sia $x \in D(A_-)$. Si ha che

$$\exists \lim_{t\to 0^+} \frac{T_-(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{G(-t)x - x}{t}.$$

Verifichiamo che

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{G(t)x - x}{t} = -A_-x.$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{G(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+} G(t)\frac{x - G(-t)x}{t} = -A_-x.$$

Mentre

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{G(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{G(-t)x - x}{-t} = -A_-x.$$

□

Lemma 2.4.1. *Sia $A : D(A) \to X$ lineare e $\lambda \in \rho(A)$. Allora $-\lambda \in \rho(-A)$ e*

$$R(\lambda, A) = -R(-\lambda, -A). \tag{2.82}$$

Cioè se $\lambda \in \rho(A)$ segue che $-\lambda \in \rho(-A)$.

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \rho(A)$.

$$\lambda x - Ax = y \Leftrightarrow -\lambda x + Ax = -y.$$

Ossia

$$x = (\lambda - A)^{-1}y \Leftrightarrow x = -(-\lambda + A)^{-1}y.$$

□

Sia A il generatore infinitesimale di un gruppo $G(\cdot)$. Dal teorema (2.), si ha che A e -A sono rispettivamente i generatori infinitesimali di $T_+(\cdot)$ e $T_-(\cdot)$. Dal teorema di Hille-Yosida, allora, $\exists \omega_0, \omega_1 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\rho(A) \supseteq \Gamma_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) > \omega_1\},$$

$$\rho(-A) \supseteq \Gamma_2 = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) > \omega_2\}.$$

Dal lemma 2.3.1,

$$\lambda \in \rho(-A) \Rightarrow -\lambda \in \rho(A),$$

cioè

$$\rho(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) < -\omega_2\}.$$

Ciò significa che

$$\rho(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) < -\omega_2 \vee Re(\lambda) > \omega_1\}. \tag{2.83}$$

Ne deriva che

$$\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : -\omega_2 < Re(\lambda) < \omega_1\}.$$

Teorema 2.4.2. *Sia $A : D(A) \to X$ lineare. Supponiamo che A e -A siano rispettivamente i generatori infinitesimali di due semigruppi $T_+(\cdot)$ e $T_-(\cdot)$. Allora*

$$G(t) = \begin{cases} T_+(t) & se\ t \geq 0 \\ T_-(-t) & se\ t \leq 0 \end{cases} \tag{2.84}$$

è un gruppo di generatore infinitesimale A.

Dimostrazione. Sia $x \in X$.

$$G(0)x = T_+(0)x = x.$$

Siano $t, s \in \mathbb{R}$. Mostriamo che

$$G(t)G(s)x = G(t+s)x.$$

Supponiamo che $t, s \geq 0$. Allora, poichè $T_+(\cdot)$ è un semigruppo, si ha

$$G(t)G(s)x = T_+(t)T_+(s)x = T_+(t+s)x = G(t+s)x.$$

Si ha il risultato analogo anche nel caso di $t, s < 0$.
Rimane da studiare il caso di t, s di segno opposto. Supponiamo che $s < 0 < t$ e $t+s > 0$.

$$G(t)G(s)x = T_+(t)T_-(-s)x = T_+(t+s)T_+(-s)T_-(-s)x.$$

Se riusciremo a mostrare che, $\forall x \in X$, se $s \geq 0$, $T_+(s)T_-(s)x = x$ avremo concluso. Sia $x \in D(A)$.

$$\frac{d}{ds}T_+(s)T_-(s)x = AT_+(s)T_-(s)x - T_+(s)AT_-(s)x = 0.$$

Ciò significa che $T_+(s)T_-(s)$ è costante, in particolare, poichè per $s = 0$ $T_+(s)T_-(s) = I$, segue che $\forall s \geq 0$
$$T_+(s)T_-(s)x = x.$$
Dalla densità di D(A) allora, se $x \in X$, segue che
$$T_+(s)T_-(s)x = x.$$
Anaogamente,
$$T_-(s)T_+(s) = I.$$
□

Utilizzando i risultati precedenti mostriamo che è possibile estendere alcuni esempi di semigruppi già trattati a gruppi.

Esempio 2.4.1. Sia $A \in \mathcal{L}(X)$. Per $t \in \mathbb{R}$ definiamo in modo naturale
$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n. \tag{2.85}$$
Per quanto detto nel capitolo 1 la serie è uniformemente convergente. Osserviamo che se $A \in \mathcal{L}(X)$ anche $-A \in \mathcal{L}(X)$. Dunque $-A$ è il generatore infinitesimale di un semigruppo $T_-(t)$. Allora, dal teorema 2.3.2 segue che $G(t)$ è un gruppo fortemente continuo e A è il suo generatore infinitesimale.

Esempio 2.4.2. Siano $X = BUC(\mathbb{R})$ e $T(\cdot)$ il semigruppo delle traslazioni. Sia $u \in X$. e definiamo per $t, x \in \mathbb{R}$
$$G(t) : X \to X$$
$$G(t)u(x) = u(x + t). \tag{2.86}$$
Anche in questo caso definiamo i semigruppi $T_+(t)$ e $T_-(t)$. Per ciascun $u \in X$, $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$,
$$T_+(t)u(x) = u(x + t) \qquad \text{e} \qquad T_-(t)u(x) = u(x - t). \tag{2.87}$$
Siano $D(A) \subseteq X$,
$$A : D(A) \to X$$
definiti come nell'esempio 2.1.2. Già è noto che A è il generatore infinitesimale di $T_+(\cdot)$. Mostriamo che -A è il generatore di $T_-(t)$. In effetti $\forall x \in \mathbb{R}$
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T_-(t)u(x) - u(x)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{u(x - t) - u(x)}{t} = -Au(x). \tag{2.88}$$
Segue quindi dal teorema 2.3.2 che $G(\cdot)$ è un gruppo fortemente continuo e A è il suo generatore infinitesimale.

Capitolo 3

Semigruppi analitici

Definizione 3.0.1. Siano X uno spazio di Banach complesso, D(A) sottospazio denso di X e $A : D(A) \to X$ lineare. A si dice settoriale se esistono $\theta_0 \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$,$M > 0$ e $R_0 > 0$ tali che

- $$\rho(A) \supseteq \Sigma_{R_0,\theta_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |arg(\lambda)| < \theta_0, |\lambda| \geq R_0\}, \tag{3.1}$$
- $\forall \lambda \in \Sigma_{R_0,\theta_0}$,
$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}. \tag{3.2}$$

Definizione 3.0.2. Siano X spazio di Banach complesso e $D(A) \subseteq X$ denso. Sia $A : D(A) \to X$ un operatore settoriale. Definiamo per $t > 0$ e $x \in X$,

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R,\theta}} e^{t\lambda} R(\lambda, A) x d\lambda \tag{3.3}$$

con $R > 0$, $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$ e

$$\gamma_{R,\theta} = \{\rho e^{i\theta} : \rho \geq R\} \cup \{Re^{i\varphi} : -\theta \leq \varphi \leq \theta\} \cup \{\rho e^{-i\theta} : \rho \geq R\} \tag{3.4}$$

che ha come sostegno l'unione dei sostegni dei tre cammini ed è orientata da $\infty e^{-i\theta}$ a $\infty e^{i\theta}$.

D'ora in poi denomineremo un tale cammino curva di raggio R e ampiezza θ.

Osservazione 3.0.1. *Verifichiamo che la definizione non dipende dalla scelta né di θ né di R tali che $R > R_0$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \theta_0$.*
Siano infatti $R' > R$ e $\gamma_{R',\theta}$ la curva in $\mathbb{C}$ di angolo θ e raggio R'.

$$\int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda - \int_{\gamma_{R',\theta}} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda = \int_{\Gamma_{R,R'}} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

con
$$\Gamma_{R,R'} = \{\rho e^{-i\theta} : R \leq \rho \leq R'\}\cup$$
$$\cup\{Re^{i\varphi} : -\theta \leq \varphi \leq \theta\} \cup \{\rho e^{i\theta} : R \leq \rho \leq R'\} \cup \{R'e^{i\theta} : -\theta \leq \varphi \leq \theta\}.$$
$\Gamma_{R,R'}$ *è una curva chiusa orientata in senso antiorario, pertanto, essendo* $\lambda \to e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}$ *una funzione olomorfa, segue dal teorema di Cauchy che*
$$\int_{\Gamma_{R,R'}} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda = 0,$$
e quindi non si ha dipendenza da R.
Mostriamo che non dipende nemmeno da θ. *Siano* $\theta' \in]\frac{\pi}{2}, \theta]$ *e* $\gamma_{R,\theta'}$ *la curva in* $\mathbb{C}$ *di ampiezza* θ' *e raggio R. Allora*
$$\int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda - \int_{\gamma_{R,\theta'}} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda = \int_{\Gamma_{\theta,\theta'}} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$
con
$$\Gamma_{\theta,\theta'} = (\{\rho e^{i\theta'} : R \leq \rho < +\infty\} \cup \{Re^{i\varphi} : \theta' \leq \varphi \leq \theta\} \cup \{\rho e^{i\theta} : R \leq \rho < +\infty\})$$
$$\cup(\{\rho e^{-i\theta} : R \leq \rho < +\infty\} \cup \{Re^{i\varphi} : -\theta \leq \varphi \leq -\theta'\} \cup \{\rho e^{-i\theta'} : R \leq \rho < +\infty\})$$
$$= \gamma_1 \cup \gamma_2,$$
orientate rispettivamente da $\infty e^{i\theta}$ *a* $\infty e^{i\theta'}$ *e da* $-\infty e^{-i\theta'}$ *a* $-\infty e^{i\theta}$. *Verifichiamo che*
$$\int_{\gamma_1} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda = 0.$$
Sia $R' > R$. *Poniamo con* Γ *la seguente curva:*
$$\Gamma = \{\rho e^{i\theta} : R \leq \rho \leq R'\} \cup \{R'e^{i\varphi} : \theta' \leq \varphi \leq \theta\}$$
$$\cup\{\rho e^{i\theta'} : R \leq \rho \leq R'\} \cup \{Re^{i\varphi} : \theta' \leq \varphi \leq \theta\}.$$
Osserviamo che
$$\int_{\gamma_1} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda$$
$$= \lim_{R' \to +\infty} (\int_\Gamma e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda - \int_{\{R'e^{i\varphi} : \theta' \leq \varphi \leq \theta\}} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda).$$
Poiché Γ *è una curva chiusa, dal teorema di Cauchy, si ha che*
$$\int_\Gamma e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda = 0.$$

Inoltre

$$\left\|\lim_{R'\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\{R'e^{i\varphi}:\theta'\le\varphi\le\theta\}} e^{\lambda t}(\lambda-A)^{-1}d\lambda\right\|$$

$$=\left\|\lim_{R'\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\theta'}^{\theta} e^{R'e^{i\varphi}t}(R'e^{i\varphi}-A)^{-1}R'ie^{i\varphi}d\varphi\right\|$$

$$\le\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\theta'}^{\theta} e^{R'cos(\varphi)t}\frac{M}{R'}R'd\varphi=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\theta'}^{\theta} Me^{R'cos(\varphi)t}d\varphi.$$

Poiché $\cos(\varphi)<0$, *si ha che*

$$\lim_{R'\to+\infty} e^{R'cos(\varphi)t}=0$$

e quindi

$$\lim_{R'\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\theta'}^{\theta} Me^{R'cos(\varphi)t}d\varphi=0.$$

Segue che

$$\lim_{R'\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\{R'e^{i\varphi}:\theta'\le\varphi\le\theta\}} e^{\lambda t}(\lambda-A)^{-1}d\lambda=0,$$

cioè

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} e^{\lambda t}(\lambda-A)^{-1}d\lambda$$

$$=\lim_{R'\to+\infty}(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}(\lambda-A)^{-1}d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int_{\{R'e^{i\varphi}:\theta'\le\varphi\le\theta\}} e^{\lambda t}(\lambda-A)^{-1}d\lambda)=0.$$

Analogamente

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} e^{\lambda t}(\lambda-A)^{-1}d\lambda=0.$$

Quindi l'integrale non dipende nemmeno dalla scelta di θ.

Teorema 3.0.1. *Sia* $A:D(A)\to X$ *settoriale e* $\forall t>0$, *sia* $T(t)$ *definito da (3.3). Allora* $\forall t>0$, $T(t)\in\mathcal{L}(X)$. *Inoltre* $\exists M_1>0,\omega\in\mathbb{R}$ *tali che*

$$\|T(t)\|\le M_1e^{\omega t}.$$

Dimostrazione. Siano $\theta\in]\frac{\pi}{2},\pi]$, $R>0$ e $\gamma_{R,\theta}$ (vedi 3.4). Supponiamo inizialmente che $t\ge 1$.

$$\|T(t)\|=\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} e^{t\lambda}R(\lambda,A)d\lambda\right\|\le\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{R}^{+\infty} e^{t\rho e^{-i\theta}}(\rho e^{-i\theta}-A)^{-1}e^{-i\theta}d\rho\right\|$$

$$+\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\theta}^{\theta} e^{Rte^{i\varphi}}(Re^{i\varphi}-A)^{-1}Rie^{i\varphi}d\varphi\right\|+\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{R}^{+\infty} e^{t\rho e^{i\theta}}(\rho e^{i\theta}-A)^{-1}e^{i\theta}d\rho\right\|$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

$$I_1 = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_R^{+\infty} e^{t\rho e^{-i\theta}} (\rho e^{-i\theta} - A)^{-1} e^{-i\theta} d\rho \right\|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_R^{+\infty} e^{t\rho cos(\theta)} \frac{M}{\rho} d\rho \leq \frac{1}{2\pi} \int_R^{+\infty} e^{t\rho cos(\theta)} \frac{M}{R} dr$$

$$= \frac{M}{2\pi R} \frac{e^{tRcos(\theta)}}{t\,|cos(\theta)|}.$$

$$I_2 = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\theta}^{\theta} e^{Rte^{i\varphi}} (Re^{i\varphi} - A)^{-1} Rie^{i\varphi} d\varphi \right\|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} e^{tRcos(\varphi)} \frac{M}{R} R d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} e^{tR} d\varphi = \frac{M}{\pi} \theta e^{tR}.$$

$$I_3 = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_R^{+\infty} e^{t\rho e^{i\theta}} (\rho e^{i\theta} - A)^{-1} e^{i\theta} d\rho \right\|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_R^{+\infty} e^{t\rho cos(\theta)} \frac{M}{\rho} d\rho = \frac{M}{2\pi R} \frac{e^{tRcos(\theta)}}{t\,|cos(\theta)|}$$

Si ha dunque che, per $t > 1$ fissato,

$$\|T(t)\| \leq \|I_1\| + \|I_2\| + \|I_3\| \leq \frac{M}{\pi R} \frac{e^{tRcos(\theta)}}{t\,|cos(\theta)|} + \frac{M}{\pi} \theta e^{tR}.$$

Supponiamo ora che $0 < t < 1$. Poiché l'integrale non dipende da R, scegliamo come cammino $\gamma_{\frac{R}{t},\theta}$, cioè il cammino in $\mathbb{C}$ di ampiezza θ e raggio $\frac{R}{t}$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\frac{R}{t},\theta}} e^{t\lambda} R(\lambda, A) x d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{R}{t}}^{+\infty} e^{t\rho e^{-i\theta}} (\rho e^{-i\theta} - A)^{-1} e^{-i\theta} d\rho$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\theta}^{\theta} e^{\frac{R}{t} te^{i\varphi}} (\frac{R}{t} e^{i\varphi} - A)^{-1} \frac{R}{t} ie^{i\varphi} d\varphi + \frac{1}{2\pi i} \int_R^{+\infty} e^{t\rho e^{i\theta}} (\rho e^{i\theta} - A)^{-1} e^{i\theta} d\rho$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

$$\|I_1\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{R}{t}}^{+\infty} e^{\rho e^{-i\theta} t} (\rho e^{-i\theta} - A)^{-1} e^{-i\theta} d\rho \right\|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{R}{t}}^{+\infty} e^{t\rho cos(\theta')} \frac{M}{\rho} d\rho = \frac{1}{2\pi} \int_R^{+\infty} e^{r' cos(\theta)} \frac{M}{r'} dr'$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_R^{+\infty} e^{r'cos(\theta)}\frac{M}{R}dr' = \frac{M}{2\pi R\,|cos(\theta)|}e^{Rcos(\theta)}.$$

$$\|I_2\| = \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\theta}^{\theta} e^{\frac{R}{t}te^{i\varphi}}(\frac{R}{t}e^{i\varphi}-A)^{-1}\frac{R}{t}ie^{i\varphi}d\varphi\right\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{\theta} e^{Rcos(\varphi)}\frac{Mt}{R}\frac{R}{t}d\varphi$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{\theta} e^R M d\varphi = \frac{M}{\pi R}\theta e^R.$$

$$\|I_3\| = \left\|\int_{\frac{R}{t}}^{+\infty} e^{t\rho e^{i\theta}}(\rho e^{i\theta}-A)^{-1}e^{i\theta}d\rho\right\|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{R}{t}}^{+\infty} e^{t\rho cos(\theta)}\frac{M}{\rho}d\rho \leq \frac{M}{2\pi R\,|cos(\theta)|}e^{Rcos(\theta)}.$$

Teorema 3.0.2. *Siano $A : D(A) \to X$ un operatore settoriale a dominio denso in X e $T(\cdot)$ definito da (3.3). Allora $\forall t, s > 0$,*

$$T(t)T(s) = T(t+s).$$

Siano $R' > R$, $t, s > 0$ e $\theta' \in]\frac{\pi}{2}, \theta[$. Indichiamo con γ_0 la curva di ampiezza θ e raggio R e con γ_1 la curva di ampiezza θ' e raggio R'.

$$T(t)T(s) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_0} e^{\lambda t}R(\lambda, A)d\lambda \int_{\gamma_1} e^{\mu s}R(\mu, A)d\mu$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_0}(\int_{\gamma_1} e^{\lambda t+\mu s}R(\lambda, A)R(\mu, A)d\mu)d\lambda.$$

Per l'identità del risolvente si ha che

$$T(t)T(s) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_0}(\int_{\gamma_1}\frac{e^{\lambda t+\mu s}}{\mu-\lambda}(R(\lambda, A)-R(\mu, A))d\mu)d\lambda$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_0}(\int_{\gamma_1}\frac{e^{\lambda t+\mu s}}{\mu-\lambda}R(\lambda, A)d\mu)d\lambda - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_0}(\int_{\gamma_1}\frac{e^{\lambda t+\mu s}}{\mu-\lambda}R(\mu, A)d\mu)d\lambda$$

$$= I_1 - I_2.$$

$$I_1 = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_0}(\int_{\gamma_1}\frac{e^{\lambda t+\mu s}}{\mu-\lambda}R(\lambda, A)d\mu)d\lambda = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_0}(\int_{\gamma_1}\frac{e^{\mu s}}{\mu-\lambda}d\mu)e^{\lambda t}R(\lambda, A)d\lambda.$$

Sia $r' > R'$. Poniamo con $\Gamma_{r'}$ la seguente curva in $\mathbb{C}$:

$$\Gamma_{r'} = \{\rho e^{i\theta'} : R' \leq \rho \leq r'\} \cup \sigma_{\theta'} \cup \{\rho e^{-i\theta'} : R' \leq \rho \leq r'\} \cup \{R'e^{i\varphi} : -\theta' \leq \varphi \leq \theta\},$$

con

$$\sigma_{\theta'} = \{r'e^{i\varphi} : \theta' \leq \varphi \leq 2\pi - \theta\}. \tag{3.5}$$

$\Gamma_{r'}$ è una curva chiusa e, per il teorema dei residui,

$$\int_{\Gamma_{r'}} \frac{e^{\mu s}}{\mu - \lambda} d\mu = (2\pi i) e^{\lambda s}.$$

Mostriamo ora che

$$\lim_{r' \to +\infty} \int_{\sigma_{\theta'}} \frac{e^{\mu s}}{\mu - \lambda} d\mu = 0.$$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\sigma_{\theta'}} \frac{e^{\mu s}}{\mu - \lambda} d\mu \right\| &= \left\| \int_{\theta'}^{2\pi - \theta} \frac{e^{r'e^{i\varphi}s}}{r'e^{i\varphi} - \lambda} r' i e^{i\varphi} d\varphi \right\| \\ &\leq \int_{\theta'}^{2\pi - \theta} \frac{e^{r' cos(\varphi) s}}{|r'e^{i\varphi} - \lambda|} r' d\varphi. \end{aligned}$$

Poiché $cos(\varphi) < 0$, segue che

$$\lim_{r' \to +\infty} \frac{e^{r' cos(\varphi) s}}{|r'e^{i\varphi} - \lambda|} r' = 0,$$

da cui si ha che

$$\lim_{r' \to +\infty} \int_{\theta'}^{2\pi - \theta} \frac{e^{r' cos(\varphi) s}}{|r'e^{i\varphi} - \lambda|} r' d\varphi = 0.$$

Quindi

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{\mu s}}{\mu - \lambda} d\mu = \lim_{r' \to +\infty} \left(\int_{\Gamma_{r'}} \frac{e^{\mu s}}{\mu - \lambda} d\mu - \int_{\sigma_{\theta'}} \frac{e^{\mu s}}{\mu - \lambda} d\mu \right) = (2\pi i) e^{\lambda s}.$$

Segue che

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_0} 2\pi i e^{\lambda s} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} e^{\lambda(t+s)} R(\lambda, A) d\lambda = T(t+s). \end{aligned}$$

Se riusciremo a mostrare che $I_2 = 0$, avremo concluso.

$$I_2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_1} \left(\int_{\gamma_0} \frac{e^{\lambda t}}{\mu - \lambda} d\lambda \right) e^{\mu s} (\mu - A)^{-1} d\mu.$$

Sia $r > R$. Indichiamo con Γ_r il cammino

$$\Gamma_r = \{\rho e^{i\theta} : R \leq \rho \leq r\} \cup \{Re^{i\varphi} : -\theta \leq \varphi \leq \theta\} \cup \{\rho e^{-i\theta} : R \leq \rho \leq r\} \cup \sigma_\theta, \tag{3.6}$$

con $\sigma_\theta = \{re^{i\varphi} : \theta \leq \varphi \leq 2\pi - \theta\}$. Indichiamo con Ω la regione delimitata da Γ_r.

$$\int_{\gamma_0} \frac{e^{\lambda t}}{\mu - \lambda} d\lambda = \lim_{r \to +\infty} (\int_{\Gamma_r} \frac{e^{\lambda t}}{\mu - \lambda} d\lambda - \int_{\sigma_\theta} \frac{e^{\lambda t}}{\mu - \lambda} d\lambda).$$

Poiché Γ_r è un cammino chiuso e $\lambda \mapsto \frac{e^{t\lambda}}{\lambda - \mu}$ è una funzione olomorfa senza singolarità in Ω, segue che

$$\int_{\Gamma_r} e^{t\lambda}(\lambda - A)^{-1} d\lambda = 0.$$

Proviamo che

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\sigma_\theta} \frac{e^{\lambda t}}{\mu - \lambda} d\lambda = 0.$$

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\sigma_\theta} \frac{e^{\lambda t}}{\mu - \lambda} d\lambda = \lim_{r \to +\infty} \int_{\theta}^{2\pi - \theta} \frac{e^{re^{i\varphi}t}}{\mu - re^{i\varphi}} rie^{i\varphi} d\varphi = J.$$

$$\|J\| = \left\| \lim_{r \to +\infty} \int_{\theta}^{2\pi - \theta} \frac{e^{re^{i\varphi}t}}{\mu - re^{i\varphi}} rie^{i\varphi} d\varphi \right\| \leq \lim_{r \to +\infty} \int_{\theta}^{2\pi - \theta} \frac{e^{r\cos(\varphi)t}}{|\mu - re^{i\varphi}|} rd\varphi.$$

Poiché $\cos(\varphi) < 0$, allora

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{e^{r\cos(\varphi)t}}{|\mu - re^{i\varphi}|} r = 0.$$

Segue quindi che

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\theta}^{2\pi - \theta} \frac{e^{r\cos(\varphi)t}}{|\mu - re^{i\varphi}|} rd\varphi = 0,$$

dunque

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\sigma_\theta} \frac{e^{\lambda t}}{\mu - \lambda} d\lambda = 0.$$

Di qui

$$\int_{\gamma_0} \frac{e^{\lambda t}}{\mu - \lambda} d\lambda = \lim_{r \to +\infty} (\int_{\Gamma_r} \frac{e^{\lambda t}}{\mu - \lambda} d\lambda - \int_{\sigma_\theta} \frac{e^{\lambda t}}{\mu - \lambda} d\lambda) = 0,$$

$$\Rightarrow I2 = 0.$$

Ciò significa che, $\forall t, s \geq 0$,

$$T(t)T(s) = T(t+s).$$

□

Teorema 3.0.3. *Siano A un operatore settoriale e $T(\cdot)$ definito come in (3.3). Allora $\forall x \in X$,*

$$\lim_{t \to 0} T(t)x = x.$$

Dimostrazione. Siano $x \in D(A)$ e $\gamma_{r,\theta}$ il cammino di ampiezza θ e raggio R.

$$\lim_{t \to 0} T(t)x = \lim_{t \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} x d\lambda.$$

$$\lambda(\lambda - A)^{-1}x - x = A(\lambda - A)^{-1}x = (\lambda - A)^{-1}Ax.$$

$$\Rightarrow (\lambda - A)^{-1}x = \frac{x}{\lambda} + \frac{(\lambda - A)^{-1}}{\lambda} Ax.$$

Di qui

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} x d\lambda = \frac{1}{2\pi i} (\int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t} \frac{x}{\lambda} x d\lambda + \int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t} \frac{(\lambda - A)^{-1}}{\lambda} Ax d\lambda)$$

$$= I_1 + I_2.$$

Sia $r > 0$ e Γ_r la curva in $\mathbb{C}$ definita come in (3.6). Γ_r è una curva chiusa, pertanto dal teorema dei residui si ha che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} e^{\lambda t} \frac{x}{\lambda} x d\lambda = Res(\frac{e^{\lambda t} x}{\lambda}, 0) = x.$$

Inoltre

$$\left\| \int_{\sigma_\theta} e^{\lambda t} \frac{x}{\lambda} d\lambda \right\| = \left\| \int_{\theta}^{2\pi - \theta} e^{re^{i\varphi}t} \frac{x}{re^{i\varphi}} rie^{i\varphi} d\varphi \right\| \leq \int_{\theta}^{2\pi - \theta} e^{r\cos(\varphi)t} \|x\| \, d\varphi.$$

Poiché $\cos(\varphi) < 0$, segue che

$$\lim_{r \to +\infty} e^{r\cos(\varphi)t} \|x\| = 0,$$

e dunque

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\theta}^{2\pi - \theta} e^{r\cos(\varphi)t} \|x\| \, d\varphi = 0.$$

Quindi si ha che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t} \frac{x}{\lambda} x d\lambda = \lim_{r \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} (\int_{\Gamma_r} e^{\lambda t} \frac{x}{\lambda} x d\lambda - \int_{\sigma_\theta} e^{\lambda t} \frac{x}{\lambda} d\lambda) = x.$$

Verifichiamo che $I_2 = 0$.

$$\lim_{t \to 0} I_2 = \lim_{t \to 0} \int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t} \frac{(\lambda - A)^{-1}}{\lambda} Ax d\lambda = 0.$$

Mostriamo inizialmente che

$$\lim_{t\to 0}\int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t}\frac{(\lambda-A)^{-1}}{\lambda}Axd\lambda=\int_{\gamma_{R,\theta}}\frac{(\lambda-A)^{-1}}{\lambda}Axd\lambda.$$

$$\left\|\int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t}\frac{(\lambda-A)^{-1}}{\lambda}Axd\lambda-\int_{\gamma_{R,\theta}}\frac{(\lambda-A)^{-1}}{\lambda}Axd\lambda\right\|=\left\|\int_{\gamma_{R,\theta}}(e^{\lambda t}-1)\frac{(\lambda-A)^{-1}}{\lambda}Axd\lambda\right\|$$

$$\leq\int_{\gamma_{R,\theta}}\left|e^{\lambda t}-1\right|\frac{M}{|\lambda|^2}\|Ax\|\,|d\lambda|\,.$$

$$\left|e^{\lambda t}-1\right|\frac{M}{|\lambda|^2}\leq(e^{Re(\lambda)t}+1)\frac{M}{|\lambda|^2},$$

che è sommabile in $\gamma_{R,\theta}$, e, per il teorema sulla convergenza dominata di Lebesgue, si ha che

$$\lim_{t\to 0}\int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t}\frac{(\lambda-A)^{-1}}{\lambda}Axd\lambda=\int_{\gamma_{R,\theta}}\frac{(\lambda-A)^{-1}}{\lambda}Axd\lambda.$$

Sia $R'>0$ e indichiamo con $\Gamma_{R'}$ la seguente curva:

$$\Gamma_{R'}=\{\rho e^{i\theta}:R\leq\rho\leq R'\}\cup\sigma_\theta\cup\{\rho e^{-i\theta}:R\leq\rho\leq R'\}\cup\{Re^{i\varphi}:-\theta\leq\varphi\leq\theta\},$$

con

$$\sigma_\theta=\{R'e^{i\varphi}:-\theta\leq\varphi\leq\theta\},$$

percorsa in senso orario. Dal teorema di Cauchy, segue che

$$\int_{\Gamma_{R'}}\frac{(\lambda-A)^{-1}}{\lambda}Axd\lambda=0.$$

Inoltre

$$\lim_{R'\to+\infty}\int_{\sigma_{\theta'}}\frac{(\lambda-A)^{-1}}{\lambda}Axd\lambda=\lim_{R'\to+\infty}\int_{\theta}^{-\theta}\frac{(R'e^{i\varphi}-A)^{-1}}{R'e^{i\varphi}}AxR'ie^{i\varphi}d\varphi.$$

$$\lim_{R'\to+\infty}\left\|\int_{\theta}^{-\theta}\frac{(R'e^{i\varphi}-A)^{-1}}{R'e^{i\varphi}}AxR'ie^{i\varphi}d\varphi\right\|\leq\lim_{R'\to+\infty}\int_{\theta}^{-\theta}\frac{M}{R'^2}\|Ax\|\,R'd\varphi$$

$$=\lim_{R'\to+\infty}-\frac{M\theta}{2R'}\|Ax\|=0.$$

Segue quindi che

$$\int_{\gamma_{R,\theta}}\frac{(\lambda-A)^{-1}}{\lambda}Axd\lambda=\lim_{R'\to+\infty}(\int_{\Gamma_{R'}}\frac{(\lambda-A)^{-1}}{\lambda}Axd\lambda-\int_{\sigma_{\theta'}}\frac{(\lambda-A)^{-1}}{\lambda}Axd\lambda)=0,$$

cioè
$$\lim_{t\to 0} I_2 = 0,$$
ossia $\forall x \in D(A)$,
$$\lim_{t\to 0} T(t)x = x.$$
Siano $x \in X$ e $\epsilon > 0$. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in D(A) tale che $\|x - x_n\| < \epsilon$. Allora
$$\|T(t)x - x\| \leq \|T(t)(x - x_n)\| + \|T(t)x_n - x_n\| + \|x_n - x\|.$$
Poiché $T(\cdot)$ è equicontinuo vicino a 0, segue che $\forall\delta > 0$ e $t \in [0, \delta]$, $\exists C > 0$ tale che
$$\|T(t)(x - x_n)\| < C\epsilon,$$
inoltre, per quanto dimostrato in precedenza, se $x_n \in D(A)$ e $t \in [0, \delta]$, allora
$$\|T(t)x_n - x_n\| < \epsilon.$$
Di qui $\forall x \in X$,
$$\|T(t)x - x\| < C\epsilon + \epsilon + \epsilon = (2 + C)\epsilon.$$
$\square$

Osservazione 3.0.2. *$T(\cdot)$ è un semigruppo e, per il teorema 2.1.2, $T(\cdot)$ è fortemente continuo.*

Lemma 3.0.1. *Sia $A : D(A) \to X$ lineare tale che $\rho(A) \neq \emptyset$, allora A è un operatore chiuso.*

Dimostrazione. Siano $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ una successione in $D(A)$ e $x, y \in X$ tali che
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} Ax_n = y.$$
Verifichiamo che $x \in D(A)$ e $y = Ax$.
$$\begin{aligned}(\lambda - A)^{-1}y = \lim_{n\to+\infty}(\lambda - A)^{-1}Ax_n &= \lim_{n\to+\infty} A(\lambda - A)^{-1}x_n \\ &= A(\lambda - A)^{-1}x = -x + \lambda(\lambda - A)^{-1}x,\\ \Rightarrow x &= (\lambda(\lambda - A)^{-1}x - (\lambda - A)^{-1}y) \in D(A),\\ &\Rightarrow x \in D(A).\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(\lambda - A)^{-1}Ax = A(\lambda - A)^{-1}x &= \lim_{n\to+\infty} A(\lambda - A)^{-1}x_n \\ &= \lim_{n\to+\infty}(\lambda - A)^{-1}Ax_n = (\lambda - A)^{-1}y.\end{aligned}$$
Dall'iniettività di A segue l'iniettività di $(\lambda - A)^{-1}$, dunque
$$y = Ax.$$
$\square$

Teorema 3.0.4. *Siano $A : D(A) \to X$ settoriale e $T(\cdot)$ il semigruppo definito in (3.3). Allora $\forall t > 0$ e $x \in X$,*

$$T(t)x \in D(A), \quad e \quad AT(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\lambda t} A(\lambda - A)^{-1} x d\lambda.$$

Dimostrazione. Siano $x \in X$ e $t > 0$. Per il lemma 0.1.3 segue che

$$T(t)x \in D(A)$$

e

$$AT(t)x = A(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} x d\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t} A(\lambda - A)^{-1} x d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t}\lambda(\lambda - A)^{-1} x d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t} x d\lambda = I_1 - I_2.$$

Verifichiamo che $I_2 = 0$. In effetti, siano $r' > R$ e $\Gamma_{r'}$ la curva chiusa definita in (3.6). Dal teorema di Cauchy segue che

$$\int_{\Gamma_{r'}} e^{\lambda t} x d\lambda = 0,$$

inoltre

$$\left\| \int_{\sigma_\theta} e^{\lambda t} x d\lambda \right\| = \left\| \int_\theta^{2\pi - \theta} e^{r' t e^{\varphi}} x r' i e^{i\varphi} d\varphi \right\|$$

$$\leq \int_\theta^{2\pi - \theta} e^{r' t cos(\varphi)} \|x\| r' d\varphi.$$

Poiché $cos(\varphi) < 0$, segue che $\lim_{r' \to +\infty} e^{r' t cos(\varphi)} r' = 0$.

$$\Rightarrow \lim_{r' \to +\infty} \int_{\sigma_\theta} e^{\lambda t} x d\lambda = 0.$$

Di qui

$$\int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t} x d\lambda = \lim_{r' \to +\infty} (\int_{\Gamma_{r'}} e^{\lambda t} x d\lambda - \int_{\sigma_\theta} e^{\lambda t} x d\lambda) = 0,$$

ovvero

$$AT(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t}\lambda(\lambda - A)^{-1} x d\lambda. \tag{3.7}$$

□

Teorema 3.0.5. *Siano A un operatore settoriale e $T(\cdot)$ il semigruppo associato. Allora $t \mapsto T(t)$ è di classe $C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{L}(X))$ e*

$$\frac{d}{dt} T(t) = AT(t).$$

Dimostrazione. Sia $h > 0$. Per la formula (3.7) sarà sufficiente mostrare che

$$T(t)' = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} \lambda e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Stimiamo la norma della differenza.

$$\left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} \frac{e^{\lambda(t+h)} - e^{\lambda t}}{h}(\lambda - A)^{-1} d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} \lambda e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\|$$

$$= \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} (\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} - \lambda) e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_{R,\theta}} \left| \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} - \lambda \right| e^{Re(\lambda)t} \frac{M}{|\lambda|} d\lambda.$$

$$\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h \lambda e^{\lambda s} ds.$$

Segue che

$$\left| \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} - \lambda \right| = \frac{1}{h}\left| \int_0^h \lambda e^{\lambda s} ds - \lambda \right| \leq \frac{|\lambda|}{h}\int_0^h \left| e^{\lambda s} - 1 \right| ds \leq |\lambda| \left| e^{Re(\lambda)s} + 1 \right|.$$

Poiché $Re(\lambda)$ è limitata, si ha che $\exists C > 0$ tale che

$$\left| \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} - \lambda \right| \leq |\lambda| \left| e^{Re(\lambda)s} + 1 \right| \leq |\lambda| C.$$

Di qui,

$$\left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} (\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} - \lambda) e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} x d\lambda \right\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_{R,\theta}} |\lambda| C e^{Re(\lambda)t} \frac{M}{\lambda} d\lambda,$$

che è convergente.

Allora, dal teorema della convergenza dominata di Lebesgue, si ha che

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} \frac{e^{\lambda(t+h)} - e^{\lambda t}}{h}(\lambda - A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} \lambda e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

ovvero,

$$\exists T'(t) = AT(t).$$

Verifichiamo ora che $t \mapsto AT(t)$ è continua. Per il teorema precedente è sufficiente mostrare che, se $t_0 > 0$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione convergente a t_0,$\forall n \in \mathbb{N}$ $t_n > t_0$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t_n}\lambda(\lambda - A)^{-1}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t_0}\lambda(\lambda - A)^{-1}d\lambda.$$

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t_n}\lambda(\lambda - A)^{-1}d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t_0}\lambda(\lambda - A)^{-1}d\lambda\right\|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_{R,\theta}} \left\|(e^{\lambda t_n} - e^{\lambda t_0})\lambda(\lambda - A)^{-1}\right\| d\lambda \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_{R,\theta}} \left|e^{\lambda t_n} - e^{\lambda t_0}\right| Md\lambda.$$

Di qui

$$\left|e^{\lambda t_n} - e^{\lambda t_0}\right| = \left|(e^{\lambda(t_n-t_0)} - 1)e^{\lambda t_0}\right| \leq (e^{Re(\lambda)(t_n-t_0)} + 1)e^{Re(\lambda)t_0},$$

che è sommabile in $\gamma_{R,\theta}$. Dal teorema della convergenza dominata di Lebesgue si ha la tesi.

□

Teorema 3.0.6. *Siano $A : D(A) \to X$ settoriale e $T(\cdot)$ il semigruppo definito in (3.3). Allora A è il generatore infinitesimale di $T(\cdot)$.*

Dimostrazione. Indichiamo con $\widetilde{A}$ il generatore infinitesimale di $T(\cdot)$ e con $D(\widetilde{A})$ il suo dominio. Dimostriamo che $D(A) = D(\widetilde{A})$.
Sia $x \in D(A)$. Verifichiamo che

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = Ax.$$

Poiché $x \in D(A)$, $\forall t > 0$,

$$AT(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t}A(\lambda - A)^{-1}xd\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}Axd\lambda = T(t)Ax.$$

Sia $h > 0$.

$$T(t)x - T(h)x = \int_h^t (T(s)x)'ds = \int_h^t AT(s)xds = \int_h^t T(s)Axds.$$

Poiché

$$\exists \lim_{h\to 0} T(h)Ax = Ax,$$

segue che

$$T(t)x - x = \lim_{h\to 0}(T(t)x - T(h)x) = \lim_{h\to 0}\int_h^t (T(s)x)'ds = \int_0^t T(s)Axds,$$

e dunque,

$$T(t)x - x = \int_0^t AT(s)xds = \int_0^t T(s)Axds.$$

Di qui, dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Axds = Ax.$$

Si ha quindi che

$$D(A) \subseteq D(\widetilde{A}).$$

Siano $x \in D(\widetilde{A})$ e $\lambda \in \rho(A)$. Sia $y \in X$ tale che

$$y = (\lambda - \widetilde{A})x.$$

Poniamo con

$$x' = (\lambda - A)^{-1}y.$$

Segue che $x' \in D(A)$ e, per il punto precedente,

$$Ax' = \widetilde{A}x'.$$

Dall'iniettività di $\widetilde{A}$, si ha che

$$(\lambda - \widetilde{A})x = (\lambda - \widetilde{A})x' \Rightarrow x = x',$$

ovvero $x \in D(A)$ e $D(\widetilde{A}) = D(A)$. $\square$

Osservazione 3.0.3. *Semigruppi di questo tipo si chiamano semigruppi analitici perchè $\forall x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ ammette un prolungamento analitico sul settore*

$$\{z \in \mathbb{C} : |Arg(z)| < \theta - \frac{\pi}{2}\}.$$

In effetti, siano $R > 0$, $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$, e $\gamma_{R,\theta}$ la curva di raggio R e ampiezza θ. Verifichiamo per quali $t \in \mathbb{C}$ è definito $T(t)$.

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R,\theta}} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_R^{+\infty} e^{t\rho e^{-i\theta}}(\rho e^{-i\theta} - A)^{-1}e^{-i\theta}d\rho$$

$$+\frac{1}{2\pi i} \int_{-\theta}^{\theta} e^{Rte^{i\varphi}}(Re^{i\varphi} - A)^{-1}Rie^{i\varphi}d\varphi + \frac{1}{2\pi i} \int_R^{+\infty} e^{t\rho e^{i}\theta}(\rho e^{i\theta} - A)^{-1}e^{i\theta}d\rho$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Sia $t = re^{i\sigma}$.

$$\|I_1\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_R^{+\infty} e^{re^{i\sigma}\rho e^{-i\theta}} (\rho e^{-i\theta} - A)^{-1} e^{-i\theta} d\rho \right\|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_R^{+\infty} e^{r\rho cos\sigma+\theta} \frac{M}{\rho} d\rho \leq \frac{1}{2\pi} \int_R^{+\infty} e^{r\rho cos\sigma+\theta} \frac{M}{R} d\rho,$$

che è definito solamente se $cos(\sigma+\theta) < 0$, *cioè*

$$-(\theta - \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \theta < \sigma < \frac{3\pi}{2} - \theta.$$

$$\|I_3\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_R^{+\infty} e^{r\rho cos(\sigma - i\theta)} \frac{M}{\rho} d\rho,$$

che, analogamente ad I_1, *è definito se e solo se* $cos(\sigma - i\theta) < 0$. *Ciò signica che*

$$\frac{\pi}{2} + \theta < \sigma < \frac{3\pi}{2} + \theta.$$

Di qui segue che

$$-(\theta - \frac{\pi}{2}) < \sigma < \theta - \frac{\pi}{2}.$$

In realtà, in riferimento al teorema 3.0.5 si può vedere che $t \mapsto T(t)$ *è una funzione analitica.*

3.1 Problemi non omogenei con semigruppi analitici

Teorema 3.1.1. *Sia* $T(\cdot)$ *un semigruppo analitico di generatore infinitesimale* A. *Allora* $\exists C > 0$ *tale che per* $0 < t \leq 1$,

$$\|AT(t)\| \leq \frac{C}{t}.$$

Dimostrazione. Siano $t \in]0,1]$ e $\gamma_{R,\theta}$ la curva di ampiezza θ e raggio R.

$$\|AT(t)\| = \left\| \int_{\gamma_{R,\theta}} \lambda e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\|.$$

Poiché l'integrale non dipende dalla scelta di R, allora, ponendo $\mu = \lambda t$,

$$\left\| \int_{\gamma_{R,\theta}} \lambda e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\| = \left\| \int_{\gamma_{\frac{R}{t},\theta}} \frac{\mu}{t} e^{\frac{\mu}{t} t} (\frac{\mu}{t} - A)^{-1} \frac{1}{t} d\mu \right\|$$

$$\leq \int_{\gamma_{\frac{\mu}{t},\theta}} \frac{|\mu|}{t} e^{Re(\mu)} \frac{Mt}{|\mu|} \frac{1}{t} |d\mu| = \int_{\gamma_{\frac{R}{t},\theta}} e^{Re(\mu)} \frac{M}{t} d\mu = \frac{C}{t}.$$

□

Definizione 3.1.1. Siano $\alpha > 0$ e $f : [a,b] \to X$. Si dice che f è hölderiana di ordine α se $\exists C > 0$ tale che

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C\,|x-y|^{\alpha}\,. \tag{3.8}$$

Osservazione 3.1.1. *Una funzione hölderiana è continua. Ogni funzione di classe C^1 è hölderiana.*

Teorema 3.1.2. *Siano $T(\cdot)$ un semigruppo analitico,$u_0 \in D(A)$ e $f \in C^{\alpha}([0,T],X)$, con $T, \alpha > 0$. Allora*

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

è soluzione stretta di

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & per\ t \in [0,T] \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{PNO}$$

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$. Per $\epsilon \leq t \leq T$ poniamo

$$u_\epsilon(t) = \int_0^{t-\epsilon} T(t-s)f(s)ds. \tag{3.9}$$

$\forall \delta > 0$, $u_\epsilon(t)$ converge uniformemente a $u(t)$ in $[\delta, T]$. In effetti,

$$\|u(t) - u_\epsilon(t)\| = \left\| \int_0^t T(t-s)f(s)ds - \int_0^{t-\epsilon} T(t-s)f(s)ds \right\|$$

$$\leq \int_{t-\epsilon}^t \|T(t-s)f(s)\|\,ds.$$

Poiché $s \mapsto T(t-s)f(s) \in C([0,T],X)$, segue che $\exists C > 0$ tale che

$$\|T(t-s)f(s)\| \leq C\,\|f\|\,.$$

$$\Rightarrow \int_{t-\epsilon}^t \|T(t-s)f(s)\|\,ds \leq C\,\|f\|\,\epsilon,$$

ovvero

$$\lim_{\epsilon \to 0} u_\epsilon(t) = u(t), \qquad \text{uniformemente.}$$

Verifichiamo che u_ϵ è derivabile in $]\epsilon, T]$. Sia $h > 0$.

$$\frac{u_\epsilon(t+h) - u_\epsilon(t)}{h} = \frac{1}{h}\Big(\int_0^{t-\epsilon+h} T(t+h-s)f(s)ds - \int_0^{t-\epsilon} T(t-s)f(s)ds\Big)$$

$$= \frac{1}{h}\int_{t-\epsilon}^{t-\epsilon+h} T(t+h-s)f(s)ds + \int_0^{t-\epsilon} \Big(\frac{T(t+h-s) - T(t-s)}{h}\Big)f(s)ds.$$

Mostriamo che

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{t-\epsilon}^{t-\epsilon+h} T(t+h-s)f(s)ds = T(\epsilon)f(t-\epsilon).$$

$$\frac{1}{h}\int_{t-\epsilon}^{t-\epsilon+h} T(t+h-s)f(s)ds - T(\epsilon)f(t-\epsilon)$$

$$= \frac{1}{h}\int_{t-\epsilon}^{t-\epsilon+h} T(t+h-s)(f(s)-f(t-\epsilon))ds$$

$$+\frac{1}{h}\int_{t-\epsilon}^{t-\epsilon+h} (T(t+h-s)-T(\epsilon))f(t-\epsilon)ds.$$

Sia $\eta > 0$. Poiché $f \in C^\alpha$, allora, se $h < \delta(\eta)$ opportuno, si ha che $\exists C > 0$ tale che

$$\|T(t+h-s)(f(s)-f(t-\epsilon))\| \le C\,|s-t+\epsilon|^\alpha \le Ch^\alpha = \eta.$$

Inoltre, dalla continuità di $s \mapsto T(t+h-s)$ in $\mathcal{L}(X)$, si ha che se $h < \delta(\eta)$,

$$\|T(t+h-s)-T(\epsilon)\| < \eta.$$

Segue che

$$\left\|\frac{1}{h}\int_{t-\epsilon}^{t-\epsilon+h} T(s+h-s)(f(s)-f(t-\epsilon))ds\right\|$$

$$+\left\|\frac{1}{h}\int_{t-\epsilon}^{t-\epsilon+h} (T(s+h-s)-T(\epsilon))f(t-\epsilon)ds\right\|$$

$$< \eta + \eta\,\|f\|\,,$$

cioè

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{t-\epsilon}^{t-\epsilon+h} T(s+h-s)f(s)ds = T(\epsilon)f(t-\epsilon).$$

Verifichiamo ora che

$$\lim_{h\to 0}\int_0^{t-\epsilon}(\frac{T(t+h-s)-T(t-s)}{h})f(s)ds = \int_0^{t-\epsilon} AT(t-s)f(s)ds. \tag{3.10}$$

Stimiamo la seguente norma.

$$\left\|\int_0^{t-\epsilon}(\frac{T(t+h-s)-T(t-s)}{h})f(s)ds - \int_0^{t-\epsilon} AT(t-s)f(s)ds\right\|$$

$$= \left\|\int_0^{t-\epsilon}(\frac{T(t+h-s)-T(t-s)}{h} - AT(t-s))f(s)ds\right\|$$

$$\leq \int_0^{t-\epsilon} \left\| (\frac{T(t+h-s)-T(t-s)}{h} - AT(t-s))f(s) \right\| ds.$$

$$\frac{T(t+h-s)-T(t-s)}{h} - AT(t-s) = \frac{1}{h}\int_{t-s}^{t+h-s} AT(r)dr - AT(t-s)$$

$$= \frac{1}{h}\int_{t-s}^{t+h-s} (AT(r) - AT(t-s))dr.$$

Sia $\eta > 0$. Poiché $r \mapsto AT(r)$ è continua in $\mathcal{L}(X)$, allora, se $\eta < \delta(\eta)$ opportuno,

$$\|AT(r) - AT(t-s)\| < \eta.$$

Quindi

$$\left\| \int_0^{t-\epsilon} (\frac{T(t+h-s)-T(t-s)}{h})f(s)ds - \int_0^{t-\epsilon} AT(t-s)f(s)ds \right\| < \eta(t-\epsilon)\|f\|.$$

Di qui segue che u_ϵ è derivabile e

$$u'_\epsilon(t) = T(\epsilon)f(t-\epsilon) + \int_0^{t-\epsilon} AT(t-s)f(s)ds.$$

Verifichiamo che u'_ϵ converge uniformemente in $[\delta, T]$ $\forall \delta \in]0, T[$.

$$\lim_{\epsilon \to 0} T(\epsilon)f(t-\epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0}(T(\epsilon)(f(t-\epsilon) - f(t)) + T(\epsilon)f(t)).$$

Poiché $f \in C^\alpha$, segue che $\exists C > 0$ tale che

$$\|T(\epsilon)(f(t-\epsilon) - f(t))\| \leq C\epsilon^\alpha.$$

Inoltre, per la seconda parte del teorema 2.1.1, essendo $T(\cdot)$ equicontinua vicino a 0, si ha che

$$\lim_{\epsilon \to 0} T(\epsilon)f(t) = T(0)f(t) = f(t) \quad \text{uniformemente in } [\delta, T].$$

Di qui

$$\lim_{\epsilon \to 0} T(\epsilon)f(t-\epsilon) = f(t) \quad \text{uniformemente in } [\delta, T].$$

$$\int_0^{t-\epsilon} AT(t-s)f(s)ds = \int_0^{t-\epsilon} AT(t-s)(f(s) - f(t))ds + \int_0^{t-\epsilon} AT(t-s)f(t)ds.$$

Verifichiamo che

$$\int_0^{t-\epsilon} AT(t-s)(f(s) - f(t))ds \to \int_0^t AT(t-s)(f(s) - f(t))ds$$

uniformemente per $\epsilon \to 0$.

$$\left\| \int_0^t AT(t-s)(f(s)-f(t))ds - \int_0^{t-\epsilon} AT(t-s)(f(s)-f(t))ds \right\|$$
$$= \left\| \int_{t-\epsilon}^t AT(t-s)(f(s)-f(t))ds \right\| \leq \int_{t-\epsilon}^t \|AT(t-s)(f(s)-f(t))\| \, ds.$$

Dal teorema 3.1.1, e poiché $f \in C^\alpha$, segue che $\exists C > 0$ tale che

$$\|AT(t-s)(f(s)-f(t))\| \leq \frac{C}{t-s} |s-t|^\alpha = C |s-t|^{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow \left\| \int_{t-\epsilon}^t AT(t-s)(f(s)-f(t))ds \right\| \leq \int_{t-\epsilon}^t \|AT(t-s)(f(s)-f(t))\| \, ds$$
$$\leq \int_{t-\epsilon}^t C |t-s|^{\alpha-1} \, ds = [\frac{-C(t-s)^\alpha}{\alpha}]_{s=t-\epsilon}^t = \frac{C}{\alpha}\epsilon^\alpha.$$

Segue che

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{t-\epsilon} AT(t-s)(f(s)-f(t))ds = \int_0^t AT(t-s)(f(s)-f(t))ds$$

uniformemente in $[\delta, T]$. Inoltre

$$AT(t-s)f(t) = \frac{d}{ds}(-T(t-s)f(t)),$$

da cui

$$\int_0^{t-\epsilon} AT(t-s)f(t)ds = [\frac{d}{ds}(-T(t-s)f(t))]_{s=0}^{s=t-\epsilon} = T(t)f(t) - T(\epsilon)f(t).$$

Per il teorema 2.1.1,

$$T(\epsilon)f(t) \to f(t) \qquad \text{uniformemente in }]0, T]$$

ovvero

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{t-\epsilon} AT(t-s)f(s)ds = T(t)f(t) - f(t) + \int_0^t AT(t-s)(f(s)-f(t))ds.$$

Dunque

$$\lim_{\epsilon \to 0} u'_\epsilon(t) = \lim_{\epsilon \to 0}(T(\epsilon)f(t-\epsilon) + \int_0^{t-\epsilon} AT(t-s)f(s)ds)$$
$$= T(t)f(t) + \int_0^t T(t-s)(f(s)-f(t))ds \tag{3.11}$$

uniformemente su $[\delta, T]$, con $\delta > 0$. Dunque $u \in C^1(]0,T], X)$ in quanto limite uniforme di funzioni continue e

$$u'(t) = T(t)f(t) + \int_0^t T(t-s)(f(s)-f(t))ds.$$

Calcoliamo $Au_\epsilon(t)$. Per il lemma 0.1.3 si ha che

$$u_\epsilon = \int_0^{t-\epsilon} T(t-s)f(s)ds \in D(A)$$

e, analogamente ai calcoli precedenti, si ha che

$$Au_\epsilon(t) = A\int_0^{t-\epsilon} T(t-s)f(s)ds = \int_0^{t-\epsilon} AT(t-s)f(s)ds$$

$$= T(t)f(t) - T(\epsilon)f(t) + \int_0^{t-\epsilon} T(t-s)(f(s)-f(t))ds.$$

Di qui, poiché $\forall \delta \in]0,T]$, $u_\epsilon(t)$ converge uniformemente a $u(t)$, si ha che $u(t) \in D(A)$ e

$$Au(t) = \lim_{\epsilon \to 0} Au_\epsilon(t) = T(t)f(t) - f(t) + \int_0^t T(t-s)(f(s)-f(t))ds. \tag{3.12}$$

Quindi per $0 < t \leq T$, da (3.12) e (3.13) si ha che

$$u'(t) - Au(t) = f(t).$$

Segue che $\forall t \in]0,T]$, u è soluzione stretta di (PNO). Verifichiamo che u è soluzione stretta in $[0,T]$.

$$Au(t) = T(t)f(t) - f(t) + \int_0^t AT(t-s)(f(s)-f(t))ds,$$

da cui

$$\|Au(t)\| \leq \|T(t)(f(t)-f(0))\| + \|T(t)f(0)-f(0)\|$$

$$+ \|f(0)-f(t)\| + \int_0^t \|AT(t-s)(f(s)-f(t))\| \, ds.$$

Sia $\eta > 0$. Poiché $f \in C^\alpha$ e $t \mapsto T(t)$ è continua in $\mathcal{L}(X)$, segue che, per $t < \delta(\eta)$ opportuno $\exists C > 0$ tale che

$$\|T(t)(f(t)-f(0))\| + \|T(t)f(0)-f(0)\| + \|f(0)-f(t)\| < Ct^\alpha + \eta + t^\alpha < C\eta + \eta + \eta.$$

Inoltre dal teorema 3.1.1 , se $h < \delta(\eta)$, $\exists C > 0$ tale che

$$\int_0^t \|AT(t-s)(f(s)-f(t))\|\, ds \leq \int_0^t C\,|t-s|^{\alpha-1}\, ds < C\eta.$$

Allora

$$\lim_{t\to 0} Au(t) = T(t)f(t) - f(t) + \int_0^t AT(t-s)(f(s)-f(t))ds = 0,$$

e quindi $Au \in C([0,T],X)$. Per $0 < \epsilon \leq t \leq T$,

$$u(t) - u(\epsilon) = \int_\epsilon^t u'(s)ds = \int_\epsilon^t (Au(s) + f(s))ds.$$

Passando al limite per ϵ a 0 si ottiene che

$$u(t) = \int_0^t (Au(s) + f(s))ds.$$

Di qui

$$u'(0) = f(0),$$

ovvero $u(t)$ è soluzione di (PNO) $\forall t \in [0,T]$. □

Osservazione 3.1.2. *Sotto le stesse ipotesi, se $u_0 \in D(A)$, allora l'unica soluzione stretta di*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & \textit{per } t \in [0,T] \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{PNO}$$

è

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \tag{3.13}$$

Infatti, basta osservare che, dal teorema 3.0.5,

$$\frac{d}{dt}(T(t)u_0) = AT(t)u_0.$$

Il resto della dimostrazione è analoga al caso di $u(0) = 0$.

Esempio 3.1.1. Siano $X = BUC(\mathbb{R})$, $D(A) = \{u \in X : u' \in X\}$

$$A : D(A) \to X,$$

$$Au = u'.$$

A non è settoriale perchè dall'esempio 0.3.1, se $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, allora $\lambda \notin \rho(A)$ e dunque non esiste $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$ tale che $\Sigma_\theta \subseteq \rho(A)$.

Esempio 3.1.2. Siano $X = L^2(\mathbb{R}^n)$, $D(A) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)\} = H^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$A : D(A) \to X,$$

$$Au = \Delta u.$$

Innanzitto osserviamo che il dominio è denso in X, perché lo spazio C_0^∞ è denso in $H^2(\mathbb{R}^n)$. A è un operatore settoriale. Verifichiamo che, se $\lambda = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ tale che $\theta \neq \pi$, allora $\lambda \in \rho(A)$. Infatti, siano $u \in D(A)$ e $f \in L^2$. Allora

$$(\lambda - \Delta)u = f \Leftrightarrow (\lambda + |\xi|^2)(\mathcal{F}u)(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi).$$

Segue che

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \frac{(\mathcal{F}f)(\xi)}{(\lambda + |\xi|^2)} \Leftrightarrow u = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(\mathcal{F}f)(\xi)}{(\lambda + |\xi|^2)}\right),$$

ossia

$$(\lambda - A)^{-1} f = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(\mathcal{F}f)(\xi)}{(\lambda + |\xi|^2)}\right).$$

Inoltre

$$\left\|(\lambda - A)^{-1} f\right\|_{L^2} = \left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(\mathcal{F}f)(\xi)}{(\lambda + |\xi|^2)}\right)\right\|_{L^2} \leq \frac{1}{2\pi |\lambda|} \|\mathcal{F}f\|_{L^2} \leq \frac{1}{|\lambda|} \|f\|_{L^2}.$$

Di qui

$$\rho(A) \supseteq \{\lambda = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \theta \neq \pi\}.$$

Dunque il semigruppo

$$T(t) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n),$$

$$T(t)f = \mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|^2 t}(\mathcal{F}(f))(\xi))$$

è un semigruppo analitico. Per la formula del semigruppo si veda l'esempio 2.1.4.

Bibliografia

[1] A.Lunardi: Introduzione alla teoria dei semigruppi, secondo semestre dell'a.a. 2014/2015, Università di Parma.

[2] A.Pazy: Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer (1983).

[3] A.G.Sveshnikov A.N.Tikhonov, The theory of functions of a complex variable, Mir Publishers (1978).