

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Fisica dell'accrescimento

Tesi di laurea

Presentata da:

**Caetano Brigagão
Lunardi**

Relatrice:

**Chiar.ma Prof.essa
Marcella Brusa**

Appello III

Anno Accademico 2023-2024

“Uns, com os olhos postos no passado, Vêem o que não vêem; outros, fitos Os mesmos olhos no futuro, vêem O que não pode ver-se”

- Ricardo Reis

Abstract

Lo studio dei meccanismi che caratterizzano l'accrescimento è di grande rilevanza per diverse aree dell'astronomia, poiché ci permette di capire meglio problemi come il processo di formazione stellare, l'evoluzione delle galassie e la fisica dietro i Nuclei Galattici Attivi. L'approccio di questa tesi sarà quello di fornire un *Overview* di alcuni dei concetti e grandezze fondamentali per la descrizione dell'accrescimento. A tale fine, si discuterà il modello classico di Bondi, che ci offre un solido punto di partenza per modelli più complessi. In seguito verrà introdotto il limite di Eddington per il caso di accrescimento sfericamente simmetrico e otticamente sottile. Nell'ultimo capitolo si terrà la trattazione dei dischi di accrescimento geometricamente sottili e otticamente spessi.

Indice

1	Introduzione	2
2	Modello di Bondi	4
2.1	Soluzioni al problema di Bondi	7
3	Luminosità di Eddington	8
3.1	Interazione materia-radiazione	8
3.2	Equilibrio tra le forze.	9
4	Dischi di accrescimento	11
4.1	Viscosità	11
4.1.1	Dissipazione viscosa	12
4.2	Struttura del disco	13
4.2.1	Leggi di conservazione	13
4.2.2	Dischi sottili stazionari	14
4.3	Stime sugli spettri	15

Capitolo 1

Introduzione

In Astrofisica, l'accrescimento è il fenomeno nel quale un corpo celeste aumenta la sua massa attraverso l'accumulo di materia risultante dall'interazione gravitazionale con un altro corpo o con il mezzo circostante.

I sistemi che ci interessano sono quelli in cui l'accrescimento di materia agisce come sorgente principale della luminosità del sistema. Questa energia è prodotta dalla conversione di energia potenziale gravitazionale in energia cinetica del gas e radiazione elettromagnetica. Per quantificare questo processo si consideri la perdita di energia potenziale di un corpo di massa m accresciuto da un corpo di massa M , con $M \gg m$

$$\Delta E = \frac{GMm}{r}. \quad (1.1)$$

Se M è una stella di raggio R_* e supponiamo che tutta l'energia potenziale di m venga liberata nella forma di energia termica quando il corpo raggiunge la superficie, allora possiamo scrivere la **Luminosità di accrescimento** come

$$L_{\text{acc}} = \frac{GM\dot{M}}{R_*} \quad (1.2)$$

ove \dot{M} viene chiamato tasso di accrescimento e rappresenta la massa che M riesce effettivamente ad accumulare

Buchi neri: Se quantifichiamo la compattezza di un corpo massiccio con il parametro $q = \frac{M}{R}$ notiamo che l'efficienza energetica dell'accrescimento è molto più grande per oggetti molto compatti, come stelle di neutroni e buchi neri che per oggetti come stelle di sequenza principale. Facciamo alcuni calcoli per capire meglio questa produzione di energia. Si consideri un buco nero stazionario di massa M e raggio di Schwarzschild

$$R_{\bullet} = \frac{2GM}{c^2} \quad (1.3)$$

e un corpo di massa m in orbita circolare che passa dall'orbita circolare stabile più interna ($R_{\text{ISCO}} = 3R_{\bullet}$) a R_{\bullet} .¹

¹Per definizione, orbite di raggio $R < R_{\text{ISCO}}$ devono per forza decadere, facendo spiraleggiare il corpo verso il buco nero

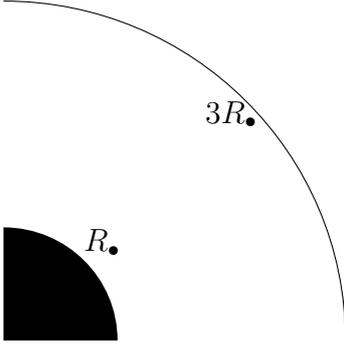


Figura 1.1: Distanza relativa tra il raggio di Schwarzschild e R_{ISCO}

Per un'orbita circolare, vale

$$v^2 = \frac{GM}{r}. \quad (1.4)$$

Otteniamo l'energia totale del corpo m dalla somma dell'energia cinetica E_K e potenziale E_G

$$E(r) = E_K + E_G = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} \stackrel{(1.4)}{=} -\frac{GMm}{2r}. \quad (1.5)$$

L'energia persa durante la caduta verso il buco nero sarà $\Delta E = E(R_\bullet) - E(R_{\text{ISCO}})$

$$E(R_\bullet) - E(3R_\bullet) = -\frac{GMm}{2R_\bullet} + \frac{GMm}{6R_\bullet} = -\frac{GMm}{3R_\bullet}. \quad (1.6)$$

Dalla (1.3) avremo che $\Delta E = mc^2/6$. Trattandosi di buchi neri, non è detto che valga la (1.2), poiché parte dell'energia liberata dall'accrescimento potrebbe rimanere comunque intrappolata dentro l'orizzonte. Il parametro adimensionale che tiene conto di questo fatto è η , che misura l'efficienza radiativa del processo. Allora:

$$L_{\text{acc}} = \eta \dot{M} c^2 = \frac{2\eta GM \dot{M}}{R_\bullet}. \quad (1.7)$$

In generale per buchi neri stellari $\eta \approx 0.1 - 0.2$ [2]. In comparazione la catena protone-protone ha un'efficienza $\eta \approx 0.007 mc^2$. Questa altissima efficienza radiativa fa dell'accrescimento l'unico meccanismo che conosciamo capace di alimentare i nuclei galattici attivi (AGN). Questi oggetti hanno dimensioni della scala del parsec ma la loro luminosità supera quella della galassia in cui risiedono. Però i meccanismi che descrivono l'accrescimento negli AGN non sono ancora ben compresi e sono difficili da studiare, sia dal punto di vista teorico che osservativo. Gli oggetti per cui la teoria riesce a riprodurre fedelmente le osservazioni sono i sistemi binari vicini.

Capitolo 2

Modello di Bondi

Lo scenario studiato da Bondi è tra i più semplici in assoluto, trattandosi dell'accrescimento costante (*Steady flow*) e sfericamente simmetrico di una nube di gas uniforme e spazialmente infinita. La scelta del modello di Bondi per questa tesi si trova sia nella sua facile impostazione, sia nella sua introduzione a concetti più generali che compaiono in modelli più complicati. Si potrebbe pensare che questo modello abbia utilità solo in ambito teorico, visto che la simmetria sferica è difficilmente un'assunzione ragionevole quando di solito si ha a che fare con dischi di accrescimento. Vi sono però dei contesti astrofisici in cui la descrizione di Bondi sia ragionevole, per esempio il caso di una stella che accresce gas dal mezzo interstellare o il caso in cui cerchiamo di legare la quantità di gas a disposizione per l'accrescimento di un nucleo galattico alle condizioni di densità e temperatura del mezzo in cui si trova[3].

Impostiamo il problema. Si consideri un corpo massivo e compatto M come un buco nero stazionario immerso in una nube di gas che occupa l'intero spazio e si facciano le seguenti assunzioni:

- (i) Accrescimento costante;
- (ii) Simmetria sferica;
- (iii) Momento angolare del gas, auto-gravità, viscosità e campi magnetici sono trascurabili;
- (iv) Vale la legge dei gas perfetti;
- (v) Il gas è soggetto a trasformazioni politropiche;
- (vi) Il gas è fermo per grandi distanze dal corpo accrescente;

Due formule idrodinamiche di grande importanza sono le equazioni di Eulero e di continuità, che dalle nostre assunzioni si riducono come segue:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0 \quad \stackrel{(i)}{\Rightarrow} \quad \dot{M}_B = 4\pi r^2 \rho(-v). \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla P + \vec{f} \quad \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} \quad v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0. \quad (2.2)$$

Le quantità $\rho(r)$ e $v(r)$ sono rispettivamente la densità e velocità radiale del gas a distanza r dal centro di M . M_B viene detto *Tasso di accrescimento di Bondi*. Il segno negativo davanti a v nella (2.1) si deve all'assunzione che v sia positivo per il gas che fluisce nel verso uscente. Nella (2.2) $\vec{f} = -\frac{GM\rho}{r^2}$ è dovuta alla simmetria sferica, che in questo caso preserva come forza esterna solo la componente radiale della gravità. Le assunzioni (iv) e (v) possono essere legate come segue:

$$P = \frac{k\rho T}{\mu m_p} = \frac{P_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \rho^\gamma. \quad (2.3)$$

Le quantità P_∞, T_∞ e ρ_∞ indicano il valore che le variabili tendono ad assumere quando sono molto lontane dalla sfera di influenza del corpo M , ossia per $r \rightarrow \infty$. γ indica l'indice politropico e si trova nell'intervallo $1 < \gamma < \frac{5}{3}$. L'estremo $\gamma = 1$ rappresenta il caso di accrescimento isoterma, mentre $\gamma = 5/3$ indica l'accrescimento adiabatico. In questo momento è opportuno introdurre una quantità di grande importanza, la velocità del suono politropica:

$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \gamma \frac{P}{\rho} = \gamma \frac{kT}{\mu m_p} \quad (2.4)$$

anch'essa con il suo corrispondente valore all'infinito c_∞ . La sua introduzione porta a definire il *Numero di Mach* come $\mathcal{M} = \frac{v}{c_s}$, che definisce per il gas un regime subsonico ($\mathcal{M} < 1$) e un regime supersonico ($\mathcal{M} > 1$). Tornando al problema, si ha che le sue soluzioni idrodinamiche si ottengono integrando rispetto ad r la (2.2) che ci restituisce il cosiddetto *Integrale di Bernoulli*:

$$\frac{v(r)^2}{2} + \Delta h(r) - \frac{GM}{r} = 0 \quad (2.5)$$

dove h è proporzionale all'entalpia per unità di massa ed è definita come

$$\Delta h \equiv \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} = \begin{cases} \frac{c_\infty^2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] & , \quad \gamma \neq 1 \\ c_\infty^2 \ln\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) & , \quad \gamma = 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

Alla fine avremo un sistema costituito dalle equazioni (2.5) e (2.1). Prima di proseguire con la risoluzione del problema, ci conviene adimensionalizzare e normalizzare il sistema, per farlo introduciamo un'altra quantità importante, nota come *Raggio di Bondi*:

$$r_B = \frac{GM}{c_\infty^2}, \quad (2.7)$$

una scala di distanza che può essere interpretata come il raggio di influenza dell'oggetto di massa M . Questo naturalmente dipende anche dal gas, vista la sua dipendenza da c_∞ . Questo raggio di solito si trova molto vicino al raggio sonico r_s , definito come il raggio che soddisfa la relazione $v^2(r_s) = c_s^2(r_s)$. Naturalmente questo raggio non esiste per il caso adiabatico, poiché tutto il lavoro fatto dal gas viene convertito in energia termica, non permettendo mai a esso di raggiungere c_s^2 .

Proseguiamo con la normalizzazione del sistema:

$$\begin{cases} x = \frac{r}{r_B} \\ \tilde{\rho} = \frac{\rho_s}{\rho_\infty} \\ \tilde{c}_s = \frac{c_s}{c_\infty} = \tilde{\rho}^{\frac{\gamma-1}{2}} \end{cases} . \quad (2.8)$$

Dopo una manipolazione algebrica questo diventa:

$$\begin{cases} x^2 \mathcal{M} \tilde{\rho}^{\frac{\gamma+1}{2}} = \lambda, \\ \frac{(\mathcal{M} \tilde{c}_s)^2}{2} + \frac{\tilde{\rho}^{\gamma-1}}{\gamma-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\gamma-1} \end{cases} \quad (2.9)$$

Dove λ può essere definito come $\lambda = \frac{\dot{M}_B}{4\pi r_B^2 \rho_\infty c_\infty}$, che riceve il nome di *parametro di accrescimento* (si veda [3]) ed è un autovalore del sistema. Quando è noto, siamo in grado di fissare il tasso costante di accrescimento per un corpo di massa M e per le condizioni del gas quando $r \rightarrow \infty$. Date le equazioni scritte sopra vediamo come sia opportuno introdurre la quantità $\Lambda = \lambda^{\frac{2(1-\gamma)}{\gamma+1}}$ e riscrivere il sistema nella forma:

$$g(\mathcal{M}) = \Lambda f(x) \quad (2.10)$$

Esplicitando queste due funzioni:

$$\begin{cases} g(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^{\frac{2(1-\gamma)}{\gamma+1}} \left(\frac{\mathcal{M}^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \right) \\ f(x) = x^{\frac{4(1-\gamma)}{\gamma+1}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\gamma-1} \right) \end{cases} \quad (2.11)$$

Si noti che al variare di γ dentro il suo intervallo stabilito, le funzioni $g(\mathcal{M})$ e $f(x)$ presenteranno entrambe dei minimi, indicati rispettivamente con g_{\min} e f_{\min} . Notiamo che $g_{\min} = g(\mathcal{M} = 1)$, che coincide con il *punto sonico* che separa i due regimi menzionati prima. Guardando nuovamente la (2.10), ci sarà un valore minimo che Λ potrà assumere che definiamo come:

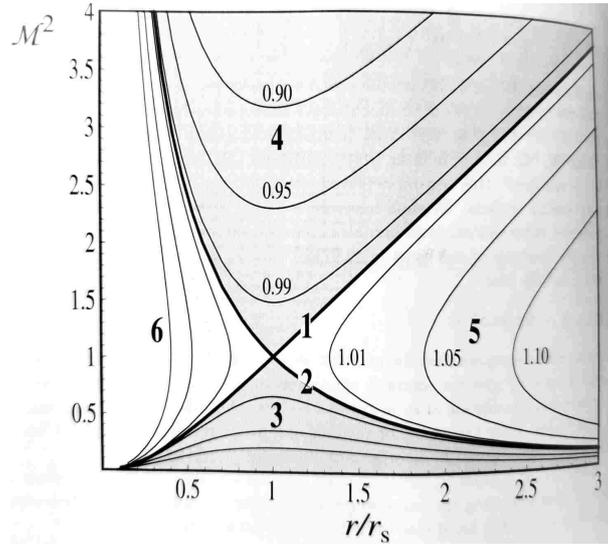
$$\Lambda \geq \Lambda_{\text{cr}} \equiv \frac{g_{\min}}{f_{\min}} \quad (2.12)$$

Traducendo questa richiesta per il parametro di accrescimento λ :

$$\lambda \leq \lambda_{\text{cr}} \equiv \left(\frac{f_{\min}}{g_{\min}} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{5-3\gamma} \right)^{\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)}} \quad (2.13)$$

Questo è un risultato di enorme importanza. Ci dice che dato un corpo di massa M , noto un'insieme di grandezze fisiche $(T_\infty, P_\infty, \rho_\infty)$ che descrivono una nube di gas e noto l'indice politropico, allora possiamo stimare il tasso massimo di accrescimento permesso. Se consideriamo un gas monoatomico (per cui $\gamma = 5/3$), avremo $\lambda = 1/4$ e quindi una bassa efficienza di accrescimento, tale da evitare completamente il regime supersonico

Figura 2.1: (Frank, King e Raine [1]). Quadrato del numero di Mach in funzione di r/r_s .



2.1 Soluzioni al problema di Bondi

Ci sono alcune “famiglie” diverse di soluzioni idrodinamiche per il modello classico di Bondi. Cerchiamo quella che ci interessa di più fisicamente:

- Per $\lambda = \lambda_{\text{cr}}$ abbiamo le soluzioni (1) e (2) della figura (2.1). Queste sono dette soluzioni transoniche ($v^2(r_s) = c_s^2(r_s)$), poiché durante la caduta il gas cambia regime. In quelle di tipo 1 abbiamo che $v^2 \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$ e $v^2 > c_s^2$ per $r < r_s$. Questa è una soluzione accettabile per l’accrescimento nel nostro caso, rispettando la richiesta di gas stazionario e subsonico all’infinito e supersonico nelle vicinanze di M . Le soluzioni di tipo 2 hanno i segni opposti per la velocità. Si tratta di un gas che si trova in regime subsonico e a basse velocità nelle vicinanze del corpo M e in regime supersonico all’infinito. Fisicamente questa soluzione potrebbe descrivere un vento stellare ideale anziché un accrescimento.
- Per $\lambda < \lambda_{\text{cr}}$ le soluzioni sono indicate da (3) e (4) della figura. Le soluzioni di tipo 4 sono supersoniche $\forall r$ e vanno escluse poiché violano la richiesta di un gas subsonico all’infinito. Quelle di tipo 3 sono subsoniche $\forall r$ e vanno escluse per il loro moto subsonico nelle vicinanze del corpo.
- Potremmo anche avere soluzioni per $\lambda > \lambda_{\text{cr}}$ indicate da (5) e (6). Queste però presentano delle discontinuità che fisicamente rappresenterebbero onde d’urto, che romperebbero con l’assunzione di accrescimento costante

In conclusione le uniche soluzioni adeguate per descrivere l’accrescimento nel problema di Bondi sono quelle di tipo 1, con un gas inizialmente fermo e subsonico che raggiunge M in un regime supersonico. Le soluzioni di tipo 2 potrebbero comunque essere utili se si lavorassero con i venti di gas uscenti da M .

Capitolo 3

Luminosità di Eddington

Il limite di Eddington fu inizialmente introdotto nello studio delle stelle, per cercare di capire in che condizioni la luminosità prodotta da una stella fosse in grado di bilanciare o superare la gravità alla sua superficie. Lo stesso limite può essere applicato nel contesto dell'accrescimento, poiché come abbiamo visto nell'introduzione, la produzione di energia può essere enorme, essendo capace di fermare l'influsso di materia e conseguentemente "spegnere" la sorgente. L'obiettivo di questo capitolo sarà impostare un caso fisico semplice, formulare le forze principali che agiscono sulla materia accresciuta e definire la luminosità di Eddington a partire dall'equilibrio tra queste forze.

Studiamo il caso di una sorgente accrescente compatta, come un buco nero o una stella di neutroni e supponiamo che l'accrescimento abbia simmetria sferica e che il gas sia otticamente sottile. A una data frequenza ν il gas emetterà una luminosità $L(\nu)$, che ci permette di definire la distribuzione spettrale di energia (*Spectral energy distribution*):

$$f(\nu) \equiv \frac{L(\nu)}{L} \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty f(\nu) d\nu = 1 \quad (3.1)$$

dove L è la luminosità bolometrica e si ottiene integrando $L(\nu)$ su tutto lo spettro. Se assumiamo un'emissione isotropa, diventa immediato introdurre anche la densità di flusso $S(\nu, r) = \frac{L(\nu)}{4\pi r^2}$, dove r è la distanza dalla sorgente. Dato che ogni fotone di frequenza ν emesso ha energia $E = h\nu$ e impulso $p = \frac{h\nu}{c}$, avremo che il **flusso di impulso EM** radiale per unità d'area sarà dato dal prodotto tra il flusso dei fotoni $\frac{S(\nu, r)}{E}$ e il loro momento:

$$\frac{S(\nu, r)}{E} p = \frac{S(\nu, r)}{c} = \frac{L(\nu)}{4\pi r^2 c}. \quad (3.2)$$

3.1 Interazione materia-radiazione

Per semplificare i calcoli senza perdere troppo rigore, supponiamo che il gas accresciuto sia composto prevalentemente da idrogeno ionizzato, parliamo cioè un plasma di protoni ed elettroni liberi. Questa è una approssimazione ragionevole considerando che approssimativamente 90% del gas nelle galassie (a spirali) è composto da idrogeno [4]. Più avanti verrà introdotta una correzione che tiene conto della presenza di elementi più pesanti nel gas.

Si consideri lo scattering Thomson come meccanismo di interazione dominante tra i fotoni e le particelle del gas. Poiché la sezione d'urto Thomson degli elettroni $\sigma_{T,e}$ è più grande di un fattore $(m_p/m_e)^2$ della sezione d'urto dei protoni $\sigma_{T,p}$, saranno gli elettroni ad assorbire la maggior parte dell'energia trasferita dai fotoni e possiamo trascurare per il momento l'interazione tra fotoni e protoni. A questo punto possiamo scrivere il modulo della forza radiativa agente sul singolo elettrone:

$$F_e(r) = \int_0^\infty \frac{L(\nu)\sigma_{T,e}}{4\pi r^2 c} d\nu = S(r) \frac{\sigma_{T,e}}{c}. \quad (3.3)$$

Questa relazione vale se le energie dei fotoni interagenti sono basse ($h\nu \ll m_e c^2$). Se vogliamo essere più rigorosi e includere anche i fotoni molto energetici ($h\nu \approx m_e c^2$), dobbiamo usare la sezione d'urto di Klein-Nishina $\sigma_{KN,e} = \sigma_{T,e} f_{KN}(\nu)$, che tiene conto degli effetti introdotti dall'elettrodinamica quantistica sullo scattering. Sostituendola nella (3.3):

$$F_e(r) = \int_0^\infty \frac{L f(\nu) \sigma_{T,e}}{4\pi r^2 c} f_{KN}(\nu) d\nu. \quad (3.4)$$

Per compattezza definiamo

$$C_{KN} = \int_0^\infty f(\nu) f_{KN}(\nu) d\nu. \quad (3.5)$$

Per basse energie, $C_{KN} \sim 1$. La (3.4) vale per i singoli elettroni. Consideriamo ora il loro insieme. Si supponga che la distribuzione del gas accresciuto sia sfericamente simmetrica, e sia $n_e(r)$ la densità numerica di elettroni a distanza r dalla sorgente. Il prodotto $F_{\text{rad}} = F_e n_e$ ci darà l'impulso trasferito agli elettroni per unità di tempo e di volume:

$$\boxed{F_{\text{rad}}(r) = \frac{L \sigma_{T,e} n_e(r)}{4\pi r^2 c} C_{KN}} \quad (3.6)$$

Questa forza è radiale e diretta nel verso uscente, opposto alla gravità. Si noti che dalla discrepanza tra le sezioni d'urto e masse degli elettroni e dei protoni, si potrebbe intuire un "soffiamento" delle cariche negative verso l'esterno. Questo soffiamento, naturalmente, comporta un'opposizione da parte dell'attrazione elettrostatica tra le cariche che a sua volta trascina anche gli ioni verso l'esterno. Dunque l'impulso dei fotoni viene effettivamente trasferito alle coppie elettrone-ione che compongono il gas accresciuto.

3.2 Equilibrio tra le forze.

Rintroduciamo la forza gravitazionale agente sulla materia. Questa sarà sempre

$$F_{\text{grav}}(r) = -\frac{GM}{r^2} \rho(r) \quad (3.7)$$

e focalizziamo un attimo su $\rho(r)$, che in generale sarà dato da

$$\rho(r) = n_e(r)m_e + n_p(r)m_p \quad (3.8)$$

$n_p(r)$ tiene conto anche dei neutroni presenti, che avendo una massa molto simile a quella dei protoni, possono essere incorporati nella stessa densità numerica. Nel caso di un gas composto prevalentemente da idrogeno si avrà $n_e(r) \approx n_p(r)$. Trascurando la massa degli elettroni e introducendo la correzione C_A che tiene conto della composizione chimica del materiale, la (3.8) si può riscrivere come

$$\rho(r) = n_e(r)m_p C_A. \quad (3.9)$$

Inserendo la (3.9) nella (3.7):

$$F_{\text{grav}}(r) = -\frac{GMn_e(r)m_p}{r^2}C_A. \quad (3.10)$$

Sommando le due forze (3.7) e (3.6), otteniamo la forza totale agente sul volumetto di gas a distanza r

$$F_{\text{tot}} = F_{\text{grav}}(r) + F_{\text{rad}}(r) = -\frac{GMn_e(r)m_p}{r^2}C_A + \frac{L\sigma_{T,e}n_e(r)}{4\pi r^2 c}C_{KN}. \quad (3.11)$$

Imponendo questa forza uguale a 0 e risolvendo per L , otteniamo finalmente la luminosità (L_{Edd}) che corrisponde all'equilibrio tra le due forze:

$$\boxed{L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_{T,e}} \frac{C_A}{C_{KN}}}. \quad (3.12)$$

Analizziamo questa formula, ricordando sempre le assunzioni fatte nella sua deduzione. Innanzitutto si noti l'indipendenza di questo limite dalla distanza r ; questa è una conseguenza della richiesta di gas otticamente sottile. Inoltre si tenga conto del fatto che il raggiungimento di questo limite non ferma la materia in caduta ma segna il suo rallentamento ¹, pertanto il corpo può continuare temporaneamente ad accrescere materia a luminosità che superano L_{Edd} , definendo così il regime **Super-Eddington**.

L'equazione (3.12) ci suggerisce la definizione di un'altra quantità rilevante. Riprendendo la formula che definisce la luminosità di accrescimento e uguagliando le due espressioni ($L_{\text{Edd}} = L_{\text{acc}}$) possiamo definire il **tasso di accrescimento di Eddington** (*Eddington accretion rate*):

$$\frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_{T,e}} \frac{C_A}{C_{KN}} = \frac{GM\dot{M}}{r} \Rightarrow \dot{M}_{\text{Edd}} = \frac{4\pi r m_p c}{\sigma_{T,e}} \frac{C_A}{C_{KN}}, \quad (3.13)$$

che rappresenta il flusso di materia accresciuta alla luminosità L_{Edd} . Dalla (1.7):

$$\dot{M}_{\text{Edd}} = \frac{L_{\text{Edd}}}{\eta c^2}. \quad (3.14)$$

Quantitativamente la (3.12) può essere scritta come [1]

$$L_{\text{Edd}} \approx 1.3 \times 10^{38} \frac{M}{M_{\odot}} \text{erg s}^{-1} \quad (3.15)$$

Una conclusione che si può tirar fuori da questa relazione e dalla (3.14) è che l'accrescimento massimo permesso per buchi neri stellari, essendo proporzionale alla loro massa, è troppo inefficiente per spiegare la formazione di buchi neri supermassivi a partire dall'accrescimento di gas interstellare, data l'attuale età dell'Universo. È necessario cercare altrove il processo responsabile della loro formazione.

¹La luminosità viene raggiunta quando l'accelerazione totale è nulla. La materia potrà continuare a cadere poiché avrà ancora velocità non nulla

Capitolo 4

Dischi di accrescimento

Nei capitoli scorsi si è assunto che il momento angolare totale del mezzo accresciuto fosse nullo ($\vec{J} = 0$). Nella realtà il gas interstellare avrà sempre una quantità non nulla di momento angolare. Questa quantità è di fondamentale importanza perché rompe con la simmetria sferica assunta prima e costringe il gas a formare un disco di accrescimento intorno al corpo massiccio. La morfologia che questo disco può assumere varia a seconda della quantità di momento angolare, dalle condizioni del mezzo e dall'efficienza radiativa del processo.

In questo capitolo tratteremo il caso di un disco **geometricamente sottile** e otticamente spesso attorno a un corpo di raggio R_* e massa M . È opportuno lavorare con le coordinate cilindriche, facendo sì che l'asse z coincida con la direzione di \vec{J} . Possiamo stratificare il disco in diversi “anelli” di spessore infinitesimo dr . Il materiale dentro ogni anello avrà una velocità orbitale data da

$$\vec{v}_\phi = \vec{\Omega}(r) \times \vec{r}. \quad (4.1)$$

dove $\vec{\Omega}(r)$ rappresenta la velocità angolare del materiale a distanza r e segue un profilo di velocità Kepleriano:

$$\Omega(r) = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}. \quad (4.2)$$

Per essere effettivamente accresciuto, l'orbita di un elemento di massa nel gas deve decadere, portandolo sempre più vicino al centro del disco, il che implica la graduale perdita di momento angolare da parte dell'elemento di massa. Alla base di questa perdita ci sarà la torsione viscosa, prodotta dalla rotazione differenziale del disco.

4.1 Viscosità

All'interno del gas troviamo moti caotici con velocità media \tilde{v} e libero cammino medio/lunghezza d'onda caratteristica λ ¹. Queste quantità ci permettono di scrivere la viscosità cinematica come

$$\mu \sim \lambda \tilde{v}. \quad (4.3)$$

¹L'interpretazione fisica di \tilde{v} e λ dipende dal meccanismo che genera la viscosità. Nel caso di trasporto molecolare rappresenteranno rispettivamente velocità termica delle particelle e il loro libero cammino medio. Nel caso di turbolenza idrodinamica saranno la velocità tipica dei vortici e la loro lunghezza d'onda caratteristica, o scala spaziale.

Cerchiamo di capire il ruolo che gioca μ nella redistribuzione di momento angolare nel disco. La fisica rigorosa della viscosità è piuttosto complessa e oltre lo scopo di questo capitolo, pertanto proseguiamo con un'interpretazione di uso meramente pratico.

Consideriamo due anelli A e B di larghezza λ e delimitati dai raggi $r - \lambda$ e $r + \lambda$. Strutturalmente questi anelli avranno una densità superficiale $\Sigma(r)$ ed è ragionevole in questo caso scriverla come $\Sigma(r) = \rho(r)H$ ottenuta integrando ρ lungo lo spessore del disco² (H). Come conseguenza dei moti caotici, ci sarà uno scambio di particelle tra i due anelli, trasportando in media momento angolare da $R_A = r - \lambda/2$ a $R_B = r + \lambda/2$ e viceversa. Complessivamente ci sarà un flusso di momento angolare dall'anello più interno (A) a quello più esterno (B). Ricordando che $J(r) = mv_\phi r$, si avrà alla fine l'espressione per la variazione temporale di J , data dal **momento meccanico** τ

$$\frac{\partial J}{\partial t} = -\tau(r) = \dot{M}_A R_B v_\phi(R_A) - \dot{M}_B R_A v_\phi(R_B). \quad (4.4)$$

Fermiamoci un attimo per analizzare quest'equazione. $\dot{M}_A = \dot{M}_B = 2\pi r \Sigma \tilde{v}$ indicano il flusso di massa per unità di tempo in un disco di altezza H dovuto ai moti caotici con velocità \tilde{v} . I termini rappresentano il momento angolare medio trasportato verso l'esterno e verso l'interno rispettivamente, dove $v_\phi(R_A) > v_\phi(R_B)$ come conseguenza del moto Kepleriano. Riscriviamola esplicitando Ω e facendo alcune approssimazioni³

$$-\tau(r) = 2\pi r^3 \Sigma \tilde{v} [\Omega(R_A) - \Omega(R_B)]. \quad (4.5)$$

L'espansione di Taylor⁴ al primo ordine in λ ci da:

$$\Omega(R_A) - \Omega(R_B) = -\lambda \frac{d\Omega}{dr}. \quad (4.6)$$

Sostituendo (4.3) e (4.6) nella (4.5), ci viene restituita l'espressione compatta per il momento torcente che l'anello esterno esercita su quello interno:

$$\tau(r) = 2\pi r^3 \Sigma \mu \frac{d\Omega}{dr}. \quad (4.7)$$

Si possono tirare fuori alcune osservazioni da questa formula. La prima è che se stessimo lavorando con l'assunzione di disco rigido ($\frac{d\Omega}{dr} = 0$) avremmo giustamente un momento torcente nullo ($\tau = 0$). La seconda riguarda il segno di τ , infatti se $\frac{d\Omega}{dr} < 0$ come nel caso Kepleriano anche τ sarà negativo, risultando in un trasferimento complessivo di momento angolare verso gli anelli più esterni.

4.1.1 Dissipazione viscosa

Ora ricaviamo fuori una quantità importante che lega la viscosità alla liberazione di energia, partendo dal momento meccanico agente su un generico anello che si trovi

² $H \ll r$ nella nostra assunzione di disco sottile

³Lo sviluppo algebrico della (4.4) produce termini del tipo $\lambda^2/4$ che trascuriamo

⁴Questa espansione è valido nel caso in cui $\lambda \ll r$

tra r e $r + dr$. Facendo uno sviluppo di Taylor e applicando la regola del prodotto per le derivate avremo:

$$\tau(r + dr) - \tau(r) = \frac{\partial \tau}{\partial r} dr \quad (4.8)$$

$$\Omega \frac{\partial \tau}{\partial r} dr = \left[\frac{\partial(\Omega \tau)}{\partial r} - \tau \frac{d\Omega}{dr} \right] dr. \quad (4.9)$$

Guardiamo la seconda equazione, il termine a sinistra ci fornisce il tasso di lavoro del momento torcente, che ha la forma di una potenza. Nel lato destro invece abbiamo due termini, il primo è il “tasso di convezione” di energia rotazionale nel gas. In questo momento però siamo molto più interessati al secondo termine $-\tau \Omega' dr$, dove abbiamo usato $\Omega' = d\Omega/dr$. Questo termine ci da il “riscaldamento differenziale” di un anello di larghezza dr . Se lo dividiamo per la superficie dell’anello⁵ $4\pi r dr$ otteniamo la dissipazione viscosa, che rappresenta il lavoro dissipato nella forma di energia termica del gas per unità di superficie:

$$D(r) = \frac{\tau \Omega'}{4\pi r} \stackrel{(4.7)}{=} \frac{\mu \Sigma (r \Omega')^2}{2}. \quad (4.10)$$

Un modo più comodo di scrivere questa relazione e quello che utilizzeremo più avanti si ottiene derivando rispetto ad r la (4.2) e sostituendo:

$$D(r) = \frac{9GM\mu\Sigma}{8r^3}. \quad (4.11)$$

Questa relazione vale solo quando si ha un profilo di rotazione Kepleriano.

Prescrizione- α : Data la grande complessità della fisica che riguarda la viscosità e la nostra limitata comprensione di essa, viene spesso usata la parametrizzazione semi-empirica di Shakura e Sunyaev:

$$\mu = \alpha c_s H \quad (4.12)$$

con $\alpha < 1$. La c_s rappresenta la velocità del suono nel gas che compone il disco.

4.2 Struttura del disco

Abbiamo trattato nell’ultima sezione la perdita del momento angolare dovuta alla viscosità, che risulta nel decadimento dell’orbita di un elemento di massa all’interno del disco. Adesso focalizziamoci su questo *drift* radiale, quantificato da $v_r = \frac{dr}{dt}$, che ci suggerisce la scrittura di due leggi di conservazione, la prima per la massa e la seconda per il momento angolare.

4.2.1 Leggi di conservazione

Riprendiamo un anello generico che si trovi tra r e $r + \Delta r$. Abbiamo visto che questo avrà una massa pari a $2\pi r \Sigma \Delta r$. Derivandola rispetto al tempo ed effettuando un’espansione:

$$\frac{\partial}{\partial t} (2\pi r \Sigma \Delta r) \sim -2\pi \Delta r \frac{\partial(r \Sigma v_r)}{\partial r}. \quad (4.13)$$

⁵Si ricordi che il disco ha 2 facce ($2(2\pi r) = 4\pi r$)

Al limite per $\Delta r \rightarrow 0$ si ottiene la legge per la conservazione della massa:

$$R \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(r \Sigma v_r) = 0. \quad (4.14)$$

Lo stesso anello avrà momento angolare uguale a $2\pi r^3 \Sigma \Delta r \Omega$. Si ripete il procedimento per ricavare la corrispondente legge di conservazione, ricordando la (4.8):

$$r \frac{\partial}{\partial t}(\Sigma r^2 \Omega) + \frac{\partial}{\partial r}(r^3 \Sigma v_r \Omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \tau}{\partial r}. \quad (4.15)$$

È importante fermarsi un attimo per discutere il significato delle derivate temporali ($\frac{\partial}{\partial t}$). In questo contesto la variazione temporale della quantità è legata al suo flusso totale attraverso due anelli adiacenti e non alla variazione della quantità in questione sull'intero disco. La (4.15) può essere ulteriormente semplificata se lavoriamo con l'assunzione di un potenziale gravitazionale stazionario, ossia ($\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$), conferendoci:

$$r \Sigma v_r (r^2 \Omega)' = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \tau}{\partial r}. \quad (4.16)$$

Possiamo fare alcune manipolazioni algebriche con le equazioni presentate sopra per ricavare un'espressione per la velocità radiale:

$$v_r = -\frac{3}{\Sigma \sqrt{r}} \frac{\partial}{\partial r}(\mu \Sigma \sqrt{r}). \quad (4.17)$$

4.2.2 Dischi sottili stazionari

Cerchiamo una relazione per la luminosità del disco nel caso in cui le derivate parziali temporali nelle leggi di conservazione (4.15) e (4.14) siano nulle. Pertanto:

$$r \Sigma v_r = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad \dot{M} = 2\pi r \Sigma (-v_r) \quad \text{costante}. \quad (4.18)$$

Ricaviamo dall'integrazione di (4.15) con $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ la seguente relazione:

$$r^3 \Sigma v_r \Omega = \frac{\tau}{2\pi} + \frac{C}{2\pi}, \quad (4.19)$$

dove C è una costante. Si può dimostrare con alcuni calcoli e assunzioni che $C = -\dot{M} \sqrt{GM R_*}$, dove una delle assunzioni fatte è che R_* sia il raggio della stella che accresce. Riscrivendo (4.19) e ricordando l'espressione per τ :

$$\mu \Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \sqrt{\frac{R_*}{r}} \right], \quad (4.20)$$

che vale per il caso kepleriano. Si può usare questo risultato per ottenere una nuova relazione per la dissipazione viscosa:

$$D(r) = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi r^3} \left[1 - \sqrt{\frac{R_*}{r}} \right]. \quad (4.21)$$

Infine possiamo scrivere l'espressione per la luminosità prodotta dal disco tra raggi r_1 ed r_2 come

$$L(r_1, r_2) = 2 \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r D(r) dr. \quad (4.22)$$

Ricordando sempre che il 2 tiene conto delle due facce del disco. Se vogliamo ottenere la luminosità di tutto il disco impostiamo $r_1 = R_*$ e $r_2 \rightarrow \infty$. Ricavando infine la luminosità del disco geometricamente sottile e otticamente spesso:

$$\boxed{L_{\text{disc}} = \frac{GM\dot{M}}{2R_*} = \frac{1}{2}L_{\text{acc}}}. \quad (4.23)$$

Per concludere, l'approssimazione dei dischi geometricamente sottili è generalmente valida quando trattiamo l'accrescimento nei sistemi binari. Le osservazioni di questi sistemi sono in gran parte d'accordo con la teoria. Un punto debole della nostra trattazione resta comunque il meccanismo della viscosità, che richiede ancora delle parametrizzazioni e rimane ancora un topico molto dibattuto nella letteratura.

4.3 Stime sugli spettri

Finiamo questo capitolo facendo delle stime di ordine di grandezza sugli spettri degli oggetti compatti che accrescono. Queste saranno stime rudimentali ma ci permettono di creare un'idea di quali oggetti possono o meno essere responsabili degli spettri che osserviamo. Definiamo una temperatura di radiazione T_{rad} tale che l'energia media dei fotoni $h\nu$ emessi da una sorgente sia dell'ordine di kT_{rad} . Consideriamo ora un corpo accrescente di raggio R e supponiamo che emetta tutta la sua luminosità di accrescimento come un corpo nero. Allora possiamo definire una temperatura di corpo nero T_b data dalla legge di Stefan-Boltzmann e (1.2):

$$T_b = \left(\frac{L_{\text{acc}}}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{1/4} \quad (4.24)$$

Che servirà in questo caso come limite inferiore di T_{rad} e sarà dell'ordine di T_{rad} per accrescimenti otticamente spessi. Introduciamo anche T_{th} , che indica l'ipotetica temperatura che una sorgente apparirebbe avere se tutta l'energia termica prodotta dall'accrescimento di ciascuna coppia elettrone-protone venisse convertita direttamente in radiazione.

$$T_{\text{th}} \approx \frac{GMm_p}{3kR_*}, \quad (4.25)$$

ove si è trascurata la massa dell'elettrone. Questa agisce come un limite superiore a T_{rad} . Perciò avremo $T_b < T_{\text{rad}} < T_{\text{th}}$. Applichiamo queste formule per ricavare una stima degli intervalli di emissione di alcuni oggetti. Per una stella di neutroni o buco nero di massa solare (per i dettagli: Cap.1 di[1]) otteniamo un intervallo:

$$1\text{KeV} < h\nu < 50\text{MeV} \quad (4.26)$$

che ci appaiono come emettitori dei medio-lontani raggi-X. Per nane bianche otteniamo:

$$6\text{eV} < h\nu < 100\text{KeV}. \quad (4.27)$$

Queste devono essere visibili nell'ottico, ultravioletto e nei vicini raggi-X. Anche se rudimentali, queste stime ci danno comunque risultati che sono in accordo con le osservazioni di questi oggetti nella nostra galassia.

Bibliografia

- [1] Juhan Frank, Andrew King, Derek Raine. *Accretion Power in Astrophysics*. Cambridge University Press. 2002.
- [2] *Appunti personali del corso di Astrofisica extragalattica*, presieduto dal Prof. Luca Ciotti. A.A. 2023/2024
- [3] Valerya Korol, Luca Ciotti, Silvia Pellegrini. *Bondi accretion in early-type galaxies*. Oxford University Press. 2016
- [4] *Appunti personali del corso di Processi di Radiazione e MHD*, presieduto dal Prof. Daniele Dallacasa. A.A. 2023/2024
- [5] *Appunti personali del corso di Active Galactic Nuclei and Supermassive Black Holes*, presieduto dal Prof. Cristian Vignali. A.A. 2024/2025