

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

# TEOREMA DEL VIRIALE E APPLICAZIONI ASTROFISICHE

Relatrice:  
Prof.ssa Marcella Brusa

Presentata da:  
Michela Falcinelli

---

Anno Accademico 2023/2024

## Sommario

Nell'elaborato che segue verrà approfondito il Teorema del Viriale, partendo dalla sua formulazione tensoriale, la più generale, per arrivare alla sua espressione scalare.

L'obiettivo è fornire una panoramica chiara e completa delle sue derivazioni, analizzando i passaggi fondamentali e discutendo le implicazioni del teorema in diversi ambiti dell'astrofisica. In seguito ad una breve introduzione al contesto generale, il primo capitolo è dedicato all'analisi dei fondamenti teorici e dei passaggi concettuali che conducono alla formulazione del Teorema del Viriale, la cui trattazione approfondita è oggetto del secondo capitolo. Alla fine dell'elaborato verrà discussa la sua applicazione a sistemi dinamici, con particolare attenzione al piano viriale, alla catastrofe gravotermica e al collasso gravitazionale delle nubi di gas, elementi cruciali per comprendere l'evoluzione di sistemi stellari e la formazione delle stelle.

# Indice

<b>1</b>	<b>Derivazione del Teorema del Viriale</b>	<b>2</b>
1.1	Introduzione . . . . .	2
1.2	Il problema degli N corpi . . . . .	3
1.3	Il tempo di rilassamento a due corpi . . . . .	4
1.4	Equazione non collisionale di Boltzmann . . . . .	5
1.5	Equazioni di Jeans . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Formulazione del Teorema del Viriale</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Applicazioni del Teorema del Viriale nei Sistemi Astrofisici</b>	<b>12</b>
3.1	Sistemi Autogravitanti . . . . .	12
3.1.1	Piano Viriale . . . . .	12
3.1.2	Catastrofe Gravotermica . . . . .	13
3.1.3	Collasso di una nube di gas . . . . .	14

# Capitolo 1

## Derivazione del Teorema del Viriale

### 1.1 Introduzione

Il Teorema del Viriale è uno strumento fondamentale per capire le relazioni energetiche nei sistemi autogravitanti all'equilibrio, cioè un insieme di corpi che interagiscono tra loro esclusivamente sotto l'azione della forza gravitazionale e che hanno raggiunto una condizione di stabilità dinamica in cui le grandezze macroscopiche, come la densità e l'energia, non variano più significativamente nel tempo.

Il Teorema del Viriale offre inoltre una soluzione approssimata, ma efficace, al problema degli  $N$  corpi in equilibrio dinamico senza dover risolvere esplicitamente il problema, riducendone la complessità. In questo modo è possibile ottenere informazioni globali su sistemi autogravitanti complessi come i sistemi stellari. Grazie a questa connessione, esso assume un ruolo centrale in astrofisica nello studio dell'evoluzione dinamica delle galassie, le quali da un punto di vista strettamente formale e matematico possiamo pensarle come sistemi di moltissimi corpi in quanto costituite da oggetti considerabili punti materiali, le stelle. Una galassia o un ammasso di galassie che non rispetta il Teorema del Viriale potrebbe essere in una fase di fusione o interazione con un altro sistema, quindi non ancora in equilibrio.

Numerose sono le sue applicazioni astrofisiche, che spaziano dalla descrizione dell'evoluzione dinamica degli ammassi stellari alla formazione delle stelle. In questa trattazione il teorema del viriale verrà utilizzato per analizzare il piano viriale e la relazione tra equilibrio e distribuzione dell'energia, l'evaporazione gravitazionale degli ammassi globulari e il fenomeno della catastrofe gravotermica. Inoltre, sarà approfondito il suo ruolo nel collasso gravitazionale di una nube di gas evidenziando come esso guidi la contrazione e il riscaldamento del sistema nelle prime fasi di formazione stellare.

## 1.2 Il problema degli $N$ corpi

Il problema degli  $N$  corpi consiste nello studio del moto di  $N$  masse puntiformi ( $N > 2$ ) sotto l'influenza reciproca dei loro campi gravitazionali. Molti dei sistemi stellari di nostro interesse possono essere trattati come sistemi a  $N$  corpi, con  $N \simeq 10^{11}$  valore rappresentativo dell'ordine di grandezza del numero di stelle in una galassia.

Come è noto, in un generico sistema di riferimento inerziale, le equazioni differenziali del problema con  $N$  corpi sono:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -G \sum_{j=1; j \neq i}^N m_j \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{r_{ij}^3} \quad r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.1)$$

Queste equazioni non sono risolubili analiticamente per  $N > 2$ , poiché la loro soluzione richiederebbe la ricerca di integrali primi, ovvero quantità conservate come leggi di conservazione che permettano di semplificare il sistema dinamico. Quindi, il problema non può essere ridotto a un insieme di  $6N - 1$  integrazioni indipendenti che descrivano esattamente il moto di ciascuna particella nel tempo. Per affrontare questa complessità si adottano strategie di semplificazione mirate a ridurre il numero di gradi di libertà del sistema. Una di queste consiste nel sostituire idealmente la distribuzione discreta (dunque discontinua) delle  $N$  masse con una distribuzione omogenea (dunque continua) di densità  $\rho(\mathbf{x}; t)$ . Tale distribuzione di densità descrive in maniera soddisfacente il vero sistema “granulare” di  $N$  corpi e rappresenta una sorta di modello continuo per quello reale. Alla densità  $\rho$  è associato un potenziale “liscio” (generalmente dipendente dal tempo) tramite la nota equazione di Poisson  $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$ , che è dato da:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{y}; t) d^3\mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \quad (1.2)$$

Finché questa approssimazione rimane valida possiamo descrivere il moto di ciascuna stella come determinato dal potenziale “liscio”  $\Phi(\mathbf{x}, t)$ . Di conseguenza, la dimensionalità dello spazio delle fasi si riduce da  $6N$  a 6, semplificando enormemente il problema matematico. Naturalmente, le orbite stellari nel sistema omogeneo e “liscio” rappresentano solo approssimazioni delle orbite reali, in quanto ogni stella (per esempio la  $i$ -esima stella) si muove sotto l'azione del potenziale effettivo che chiamiamo  $\Phi_{true}$ , dato da:

$$\Phi_{true}(\mathbf{x}_i, t) = -G \sum_{j=1; j \neq i}^N \frac{m_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \quad (1.3)$$

La problematica che emerge a questo punto della trattazione può essere sintetizzata chiedendoci quale possa essere l'entità della discrepanza tra l'orbita fittizia descritta da una data stella sotto l'influenza di  $\Phi$  e l'orbita vera descritta sotto l'azione di  $\Phi_{true}$ . La differenza  $\Phi_{true} - \Phi$  è definita con il termine “granularità”: ci si domanda dunque quale sia

il tempo necessario affinché tale termine riesca a cambiare significativamente l'orbita che verrebbe eseguita da ciascuna stella nel potenziale "liscio"  $\Phi$ . È evidente che una risposta precisa a una domanda di questo tipo richiederebbe la conoscenza dettagliata di entrambe le orbite, ma è proprio questa complessità che intendiamo aggirare. Diventa dunque necessario individuare un metodo ingegnoso che permetta di stimare quantitativamente tale tempo (come affronteremo nel prossimo capitolo) senza ricorrere alla risoluzione diretta del problema degli  $N$  corpi. La rilevanza fondamentale di questa problematica in fisica ha portato allo sviluppo di numerosi approcci mirati a trovare una soluzione.

### 1.3 Il tempo di rilassamento a due corpi

Il tempo scala menzionato in precedenza è comunemente noto come *tempo di rilassamento* e rappresenta l'intervallo temporale caratteristico oltre il quale l'approssimazione continua introdotta nel capitolo precedente è da considerarsi non più valida. Esso si basa su due assunzioni:

1. tutti gli incontri tra le particelle sono trattati come indipendenti (l'effetto di ciascun incontro è sommato agli altri);
2. tutti gli incontri tra particelle sono trattati come incontri iperbolici tra due corpi.

Per queste ragioni, il tempo caratteristico a cui faremo riferimento è chiamato *tempo di rilassamento a due corpi* ed è indicato con  $t_{2b}$ .

A questo proposito possiamo fare due distinzioni: se l'età di un sistema fisico preso in esame risulta significativamente maggiore di  $t_{2b}$ , il sistema può essere considerato *non collisionale* e le interazioni gravitazionali tra le singole stelle non hanno avuto il tempo di influenzare significativamente l'evoluzione complessiva del sistema; al contrario, se l'età del sistema è confrontabile o inferiore a  $t_{2b}$ , esso rientra nella categoria dei sistemi *collisionali* e le quasi-collisioni tra coppie di stelle diventano importanti ridistribuendo l'energia cinetica nel sistema. Possiamo pensare al tempo di rilassamento, quindi, come il tempo necessario affinché le interazioni gravitazionali cumulative delle stelle in un sistema stellare causino un cambiamento significativo del loro stato dinamico.

Una scala temporale adeguata per confrontare il tempo di rilassamento e stabilirne la durata è il *tempo di attraversamento* del sistema  $t_{cross}$ , cioè il tempo caratteristico che una stella con una dispersione di velocità  $\sigma$  impiega per attraversare il sistema di raggio  $R$ . Si calcola come:

$$t_{cross} = \frac{2R}{\sigma} \tag{1.4}$$

Vale allora il seguente rapporto approssimato:

$$\frac{t_{2b}}{t_{cross}} \simeq \frac{0,1N}{\ln N} \quad (1.5)$$

Nelle galassie il tempo di rilassamento può essere stimato in circa  $10^{17}$  yr, assumendo  $N \simeq 11$  e  $t_{cross} \simeq 10^8$  yr. Questo valore è enormemente superiore all'età dell'Universo (approssimativamente  $10^{10}$  yr), implicando che tali sistemi possono essere considerati essenzialmente non collisionali e che gli effetti delle interazioni ravvicinate tra le stelle sono trascurabili.

Il tempo di rilassamento, contrariamente a quanto ci si potrebbe aspettare, dipende fortemente dal numero di elementi  $N$ : maggiore è la popolazione del sistema, più tempo esso impiega a raggiungere il rilassamento. Inoltre, all'aumentare della sua “granularità” il trasferimento di energia attraverso le interazioni gravitazionali diventa progressivamente meno efficiente. Pertanto, nei sistemi stellari più piccoli è meno probabile che il comportamento non collisionale sia una buona approssimazione (poiché la “granularità” aumenta e le interazioni individuali tra le stelle diventano più rilevanti rispetto al potenziale “liscio” che descrive il sistema nel suo insieme). Per esempio, negli ammassi globulari con  $N \simeq 10^5$  e  $t_{cross} \simeq 10^6$  yr, il tempo di rilassamento risulta essere di circa  $10^9$  yr. Questo valore è inferiore all'età dell'Universo, rendendo gli effetti delle collisioni tra le stelle non trascurabili. In questi sistemi più piccoli gli incontri ravvicinati tra tre o più stelle giocano un ruolo cruciale: tali interazioni non solo provocano trasferimenti di energia tra le stelle, ma possono anche portare alla formazione di subsistemi legati gravitazionalmente, come i sistemi di stelle binarie. Questi processi influenzano significativamente l'evoluzione dinamica degli ammassi globulari e ne complicano la descrizione teorica rispetto ai sistemi più grandi.

## 1.4 Equazione non collisionale di Boltzmann

Il punto di partenza per la derivazione del Teorema del Viriale risiede nell'*equazione non collisionale di Boltzmann* (CBE, Collisionless Boltzmann Equation), uno degli strumenti matematici fondamentali della dinamica stellare. Questa equazione trova applicazione rigorosa nel caso di sistemi stellari ideali completamente privi di collisioni.

Per un sistema con un numero finito di stelle  $N$  la distinzione tra sistemi collisionali e non collisionali non è mai assoluta. Infatti le interazioni gravitazionali tra le stelle, benchè deboli e puntuali, accumulano effetti significativi con il trascorrere del tempo. Nel limite ideale in cui il numero di stelle  $N \rightarrow \infty$ , ci aspettiamo che l'approssimazione non collisionale rimanga valida per tempi arbitrariamente lunghi. L'equazione di Boltzmann non collisionale, è il nostro primo obiettivo in questo quadro teorico. Deriveremo la CBE in coordinate cartesiane, una scelta che semplifica la trattazione e consente di mettere in luce i principali aspetti fisici e matematici senza l'aggiunta di complessità formali.

Per garantire generalità, assumiamo che il potenziale totale a cui è soggetto ciascun elemento del sistema stellare sia dato dalla somma  $\Phi_T = \Phi + \Phi_{ext}$ , dove  $\Phi$  è il potenziale “liscio” associato alla densità  $\rho$  del sistema, mentre  $\Phi_{ext} = \Phi_{ext}(\mathbf{x}; t)$  rappresenta un potenziale esterno funzione della posizione  $x$  e del tempo  $t$ . Quando  $\Phi_{ext} = 0$ , il sistema viene definito *autogravitante*. La dinamica di ciascun elemento nello spazio delle fasi è quindi determinata dal campo di velocità

$$(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{v}}) = (\mathbf{v}, -\nabla_{\mathbf{x}}\Phi_T) \quad (1.6)$$

La CBE stabilisce che, nel regime privo di collisioni, la funzione di distribuzione  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  evolve secondo la relazione:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{x}}f \rangle - \langle \nabla_{\mathbf{x}}\Phi_T, \nabla_{\mathbf{v}}f \rangle = 0 \quad (1.7)$$

- $\frac{Df}{Dt}$  é la derivata totale di  $f$  lungo le traiettorie nello spazio delle fasi.
- Gli operatori  $\nabla_{\mathbf{x}}$  e  $\nabla_{\mathbf{v}}$  rappresentano rispettivamente il gradiente spaziale e il gradiente nel dominio delle velocità.
- $\frac{\partial f}{\partial t}$  descrive il cambiamento temporale della funzione di distribuzione.
- I termini successivi rappresentano il trasporto nello spazio delle fasi:  $\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}f$  è il trasporto spaziale e  $(\nabla_{\mathbf{x}}\Phi_T) \cdot \nabla_{\mathbf{v}}f$  il trasporto indotto dal potenziale gravitazionale totale  $\Phi_T$ .

dove

$$\Delta\Phi(\mathbf{x}; t) = 4\pi G \int_{\text{Re}^3} f d^3\mathbf{v}, \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \quad (1.8)$$

## 1.5 Equazioni di Jeans

Come abbiamo visto, la soluzione generale della CBE dipende dalla conoscenza delle proprietà delle orbite in potenziali tridimensionali che possono anche variare nel tempo. Tuttavia, studiare tali orbite va, in generale, ben oltre le possibilità attuali della matematica. Per questo motivo, oltre all’uso di simulazioni numeriche sono stati sviluppati vari metodi per “estrarre” informazioni utili dalla CBE.

In questa parte della trattazione viene dunque mostrato come il sistema di equazioni noto come *equazioni di Jeans* possa essere derivato calcolando i momenti di velocità della CBE. Tuttavia, invece di lavorare nello spazio delle fasi a sei dimensioni (posizione e velocità) ci concentriamo sulle proprietà medie nello spazio tridimensionale delle configurazioni (le posizioni). Questo permette di ottenere modelli più intuitivi di quantità



osservabili, come la distribuzione delle stelle e la loro dispersione di velocità, in un modo più comprensibile e pratico. Infine, considerando i momenti spaziali delle equazioni di Jeans sullo spazio delle configurazioni, si arriverà alla derivazione del teorema viriale in forma tensoriale.

Per ottenere le equazioni di Jeans, si parte dalla definizione di una funzione generica  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  nello spazio delle fasi che rappresenta una proprietà fondamentale del sistema a livello microscopico. Questa funzione consente di tradurre le informazioni della funzione di distribuzione  $f$  in relazioni dinamiche che descrivono il comportamento del sistema. Intuitivamente,  $F$  è l'espressione matematica di qualsiasi proprietà fisica di interesse che descrive cosa sta facendo una stella in una determinata posizione  $\mathbf{x}$ , con velocità  $\mathbf{v}$ , al tempo  $t$ . Per passare da una descrizione microscopica a una macroscopia, si definisce una funzione media  $F(\mathbf{x}, t)$  che descrive la proprietà fisica di interesse su scala più ampia. Questa funzione è data dalla media ponderata di  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  rispetto alla distribuzione  $f$  nello spazio delle velocità:

$$\bar{F}(\mathbf{x}; t) \equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}; t)} \int_{\text{Re}^3} F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}, \quad \rho(\mathbf{x}; t) \equiv \int_{\text{Re}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v} \quad (1.9)$$

dove  $\rho(\mathbf{x}; t)$  è la densità di massa nella posizione  $\mathbf{x}$  al tempo  $t$ . Nella dinamica stellare, tra tutte le possibili funzioni  $F$  che si possono immaginare, sono di particolare interesse quelle che portano ai cosiddetti momenti della velocità:

$$\bar{v}_i(\mathbf{x}; t) \equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}; t)} \int_{\text{Re}^3} v_i f d^3\mathbf{v}, \quad (1.10)$$

$$\overline{v_i v_j}(\mathbf{x}; t) \equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}; t)} \int_{\text{Re}^3} v_i v_j f d^3\mathbf{v} \quad (1.11)$$

$$\sigma_{ij}^2(\mathbf{x}; t) \equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}; t)} \int_{\text{Re}^3} (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) f d^3\mathbf{v} = \sigma_{ji}^2 \quad (1.12)$$

dove  $i, j = 1, 2, 3$ ; le  $\bar{v}_i(\mathbf{x}; t)$  sono le componenti della *velocità di streaming* e il tensore simmetrico  $\sigma_{ij}^2(\mathbf{x}; t)$  è il *tensore di dispersione delle velocità*. Ovviamente, è possibile ottenere momenti di velocità di ordine superiore considerando i prodotti di ordine superiore tra le componenti di velocità. È inoltre valida la seguente identità:

$$\sigma_{ij}^2(\mathbf{x}; t) = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j \quad (1.13)$$

che ci mostra come il tensore di dispersione delle velocità sia legato alla varianza e alla covarianza della distribuzione delle velocità. I termini diagonali  $i = j$  rappresentano le varianze delle velocità  $\sigma_{ii}^2$ , sempre positivi; essendo inoltre il tensore simmetrico, esiste un sistema di riferimento in cui  $\sigma_{ij}^2$  è diagonale.

Questo ci porta ad una semplice interpretazione geometrica del tensore  $\sigma_{ij}^2$ : ad ogni punto  $\mathbf{x}$  del sistema stellare è possibile associare un *ellissoide di dispersione di velocità*, la cui “superficie” è definita come funzione del versore unitario  $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$  da:

$$\sigma^2(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \sigma_{ij}^2 n_i n_j \quad (1.14)$$

dove  $\mathbf{n}$  spazia su tutto l'angolo solido attorno a  $\mathbf{x}$ . In generale, l'ellissoide di dispersione delle velocità rappresenta graficamente come varia la dispersione delle velocità delle stelle in tutte le direzioni in un punto. I suoi parametri principali, ossia l'orientamento (direzione degli assi) e i rapporti assiali (lunghezze relative degli assi), dipendono dalla dinamica locale e cambiano in relazione allo spazio (in punti diversi di un sistema stellare la forma e l'orientamento dell'ellissoide possono variare) e al tempo (l'evoluzione dinamica del sistema può alterare queste proprietà).

Procediamo ora con il derivare le equazioni di Jeans associate ad una funzione di distribuzione  $f$  e un potenziale totale  $\Phi_T$ . Attraverso una serie di manipolazioni matematiche e partendo dalla CBE descritta in (1.7) è possibile dimostrare, come prima cosa, che la seguente equazione differenziale rappresenta una forma generale delle equazioni di Jeans, obbedita dai momenti di velocità di  $F$ :

$$\frac{\partial \rho \overline{F}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \overline{F v_i}}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \Phi_T}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{F}}{\partial v_i} + \overline{\rho v_i \frac{\partial F}{\partial x_i}} + \rho \frac{\partial F}{\partial t} \quad (1.15)$$

Scegliendo delle specifiche funzioni per  $F$  si ottengono le importanti equazioni di Jeans:

- per  $F = 1$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \overline{v_i})}{\partial x_i} = 0 \quad (1.16)$$

- per  $F = v_j$

$$\frac{\partial \rho \overline{v_i}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \overline{v_i v_j}}{\partial x_j} = -\rho \frac{\partial \Phi_T}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.17)$$

Una chiara somiglianza è evidente con le equazioni della dinamica dei fluidi, in particolare l'equazione di continuità (che descrive la conservazione della massa) e la conservazione della quantità di moto. Tali analogie non sono casuali: la ragione risiede nel fatto che entrambe le formulazioni si basano su principi fisici comuni e seguono processi matematici simili. Nello specifico, le equazioni di Jeans sono una versione statistica delle equazioni di continuità e di conservazione della quantità di moto applicate a sistemi di particelle (stelle, nel nostro caso). Le equazioni della dinamica dei fluidi, invece, trattano il fluido come mezzo continuo, ma il metodo di derivazione è affine.

## Capitolo 2

# Formulazione del Teorema del Viriale

Le equazioni di Jeans sono strumenti preziosi che contengono informazioni importanti non direttamente accessibili senza un lavoro aggiuntivo. Infatti, dopo aver mediato la CBE rispetto allo spazio delle velocità, si possono compiere ulteriori passaggi che ci portano alla scrittura del Teorema del Viriale nella sua forma tensoriale, generalizzazione di quella scalare che deriveremo solo successivamente.

Per un sistema stellare descritto da una distribuzione di densità  $\rho(\mathbf{x}; t)$ , introduciamo il *tensore momento d'inerzia simmetrico del secondo ordine*:

$$I_{ij} \equiv \int_{\text{Re}^3} \rho x_i x_j d^3 \mathbf{x}, \quad I = \int_{\text{Re}^3} \rho (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) d^3 \mathbf{x} = \text{Tr}(I_{ij}). \quad (2.1)$$

Secondariamente, altri tre tensori simmetrici del secondo ordine misurano l'energia cinetica del sistema. Questi sono:

$$K_{ij} \equiv \frac{1}{2} \int_{\text{Re}^3} \rho \bar{v}_i \bar{v}_j d^3 \mathbf{x}, \quad T_{ij} \equiv \int_{\text{Re}^3} \rho \bar{v}_i \bar{v}_j d^3 \mathbf{x}, \quad \Pi_{ij} \equiv \int_{\text{Re}^3} \rho \sigma_{ij}^2 d^3 \mathbf{x} \quad (2.2)$$

conosciuti rispettivamente come *tensore energia cinetica totale*, *tensore energia cinetica ordinata* e *tensore energia cinetica di dispersione*, le cui tracce sono indicate come:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(K_{ij}) &= \frac{1}{2} \int_{\text{Re}^3} \rho (\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 + \bar{v}_3^2) d^3 \mathbf{x} = K, \\ \text{Tr}(T_{ij}) &= \frac{1}{2} \int_{\text{Re}^3} \rho (\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 + \bar{v}_3^2) d^3 \mathbf{x} = T, \\ \text{Tr}(\Pi_{ij}) &= \int_{\text{Re}^3} \rho (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) d^3 \mathbf{x} = \Pi. \end{aligned}$$

Dall'equazione (1.13), la quale ci permette di concludere che i tensori appena scritti sono simmetrici, si ha:

$$K_{ij} = T_{ij} + \frac{\Pi_{ij}}{2}, \quad \text{la cui traccia risulta essere} \quad K = T + \frac{\Pi}{2}. \quad (2.3)$$

Il nostro scopo ora è cercare una generalizzazione tensoriale di qualche termine legato all'energia gravitazionale. Ricordiamo, a tal proposito, che due funzioni scalari descrivono l'energia gravitazionale  $U_T$  della distribuzione di densità  $\rho$  nel potenziale totale  $\Phi_T = \Phi + \Phi_{ext}$ , dove  $\Phi$  è il potenziale gravitazionale prodotto dalla componente  $\rho$  e  $\Phi_{ext}$  è il potenziale gravitazionale generato dalle densità esterne  $\rho_{ext}$ .

Per un sistema in cui possiamo porre  $\Phi_T = 0$  all'infinito, definiamo l'*auto-energia gravitazionale* come

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{Re}^3} \rho \Phi d^3 \mathbf{x} \quad (2.4)$$

mentre

$$U_{ext} = \int_{\text{Re}^3} \rho \Phi_{ext} d^3 \mathbf{x} \quad (2.5)$$

rappresenta l'energia gravitazione esterna. Un ulteriore tensore del secondo ordine, che chiameremo *tensore energia di interazione*, può essere associato all'energia gravitazionale della densità  $\rho$  nel potenziale totale  $\Phi_T$  come segue:

$$W_{ij}^T = - \int_{\text{Re}^3} \rho x_i \frac{\partial \Phi_T}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x} = W_{ij} + W_{ij}^{ext} \quad (2.6)$$

$$W_T = \text{Tr}(W_{ij}^T) = - \int_{\text{Re}^3} \langle \mathbf{x}, \nabla \Phi_T \rangle d^3 \mathbf{x} = W + W_{ext}$$

dove il significato di  $W_{ij}$  e  $W_{ij}^{ext}$  segue immediatamente da  $\Phi_T = \Phi + \Phi_{ext}$ . Procediamo l'analisi ritornando a considerare la seconda equazione di Jeans (1.17): moltiplicandola per  $x_i$  e integrando sulle posizioni si ottiene

$$\underbrace{\int x_i \frac{\partial \rho \bar{v}_j}{\partial t} d^3 \mathbf{x}}_a = - \underbrace{\int x_i \frac{\partial \rho \bar{v}_j v_k}{\partial x_k} d^3 \mathbf{x}}_b - \underbrace{\int \rho x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x}}_c - \underbrace{\int \rho x_i \frac{\partial \Phi_{ext}}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x}}_d \quad (2.7)$$

I vari termini si trasformano come segue:

- a) risulta uguale a  $\frac{d}{dt} \int \rho x_i \bar{v}_j d^3 \mathbf{x}$
- b) integrando per parti diventa uguale a  $2K_{ij}$
- c) pari a  $U_{ij}$

d) pari a  $W_{ij}$

Si conoscono dunque tutti gli ingredienti per costruire la relazione cercata. Sostituendo, infatti, i valori appena trovati nell'equazione (2.7) ci viene restituito il seguente risultato che rappresenta il fondamentale Teorema del Viriale nella sua **forma tensoriale**:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2} = 2K_{ij} + W_{ij} + \frac{W_{ij}^{ext} + W_{ji}^{ext}}{2} \quad (2.8)$$

Applicando ad ogni tensore la propria traccia posso estrarre da questo la più conosciuta **forma scalare**:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2K + U + W \quad (2.9)$$

Se il sistema considerato è in uno stato di equilibrio  $I$  risulta essere indipendente dal tempo e la sua derivata temporale è nulla. Allora il teorema del viriale si riduce a

$$2K = -(U + W) \quad (2.10)$$

Osservazioni:

- $W$  non è l'energia potenziale di  $\rho$  nel campo esterno, che invece è  $U_{ext}$ , già definita in (2.5).
- Il termine  $W$  gioca un ruolo fondamentale nel Teorema del Viriale perché introduce l'effetto del campo esterno sulla dinamica del sistema.
- $U$  è l'energia potenziale gravitazione interna.
- $K$  è l'energia cinetica totale del sistema.

# Capitolo 3

## Applicazioni del Teorema del Viriale nei Sistemi Astrofisici

### 3.1 Sistemi Autogravitanti

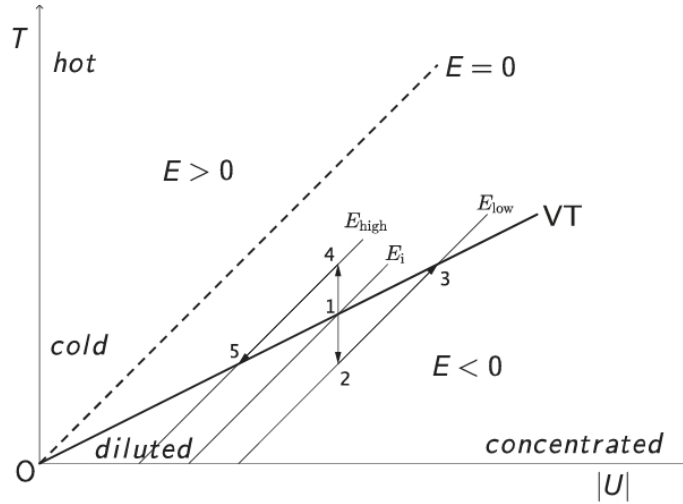
In questa sezione illustriamo come il Teorema del Viriale, nella sua forma più semplice  $2T + U = 0$ , permetta di derivare proprietà fisiche fondamentali dei sistemi stellari autogravitanti, per esempio il loro lento collasso come conseguenza dell'evaporazione gravitazionale delle stelle che porta alla cosiddetta catastrofe gravotermica, uno dei concetti più importanti per comprendere l'evoluzione dinamica degli ammassi globulari.

#### 3.1.1 Piano Viriale

I fenomeni appena citati possono essere rappresentati qualitativamente attraverso la costruzione di un *piano viriale*, uno strumento grafico per visualizzare lo stato di un sistema autogravitante. Poniamo in corrispondenza dell'asse delle ascisse il modulo dell'energia totale potenziale  $|U|$  e lungo l'asse delle ordinate l'energia cinetica totale

$$T = \frac{|U|}{2}. \quad (3.1)$$

creando in questo modo un grafico come quello in **Figura 3.1**. Il contesto di fronte al quale ci troviamo ci consente di descrivere sistemi la cui concentrazione aumenta progressivamente nel verso crescente di  $|U|$ : infatti nella parte sinistra del grafico abbiamo valori di energia potenziale piccolissimi, quasi zero, dunque le particelle risultano molto distanti tra loro. Allo stesso modo, spostandoci verso valori maggiori di energia potenziale (in modulo) le particelle risultano essere vicinissime rendendo i sistemi estremamente concentrati. Spostandoci nel verso crescente di  $T$  invece, troviamo sistemi sempre più caldi (la temperatura è ovviamente legata all'energia cinetica del sistema).



**Figura 3.1.** Piano viriale per sistemi autogravitanti con forze  $\propto 1/r^2$ , dove la posizione di sistemi virializzati e alcune linee di conservazione dell'energia sono rappresentati per diversi valori dell'energia totale. I sistemi sono qualitativamente indicati come caldi, freddi, “diluiti” e “concentrati” secondo la loro posizione nel piano.

Come è noto, un sistema in equilibrio soddisfa il Teorema del Viriale: ne consegue che un sistema autogravitante è virializzato se, e solo se, il suo punto rappresentativo è posto sulla retta descritta dall'equazione (3.1). Inoltre, se il sistema è isolato vale la legge di conservazione dell'energia totale  $E$ :

$$T = |U| + E \quad (3.2)$$

Per un sistema che evolve ad energia costante, il suo punto rappresentativo può muoversi solo sulla linea fissata dalle condizioni iniziali. Ovviamente la linea  $T = |U|$  cioè  $E = 0$  rappresenta sistemi con energia totale pari a zero (linea tratteggiata del grafico), le linee parallele al di sopra rappresentano sistemi non legati, mentre le linee parallele sottostanti rappresentano sistemi con energia totale negativa. Diventa intuitivo dedurre che gli unici sistemi con una probabilità diversa da zero di trovarsi all'equilibrio (cioè in corrispondenza della retta del Viriale) sono quelli con  $E < 0$ .

### 3.1.2 Catastrofe Gravotermica

La *catastrofe gravotermica* è un fenomeno di rilevante importanza per l'evoluzione degli ammassi globulari.

Come discusso nei capitoli iniziali di questa trattazione, gli ammassi globulari hanno un tempo di rilassamento di circa un miliardo di anni. Questo significa che, nel tempo, il sistema tende a raggiungere un equilibrio termodinamico in cui le velocità stellari seguono

una distribuzione di Maxwell-Boltzmann. Poichè le stelle di piccola massa hanno velocità medie più alte, per l'equipartizione dell'energia cinetica tendono a spostarsi verso la coda di alta velocità della Maxwelliana. Con il passare del tempo queste stelle, attraverso le interazioni dinamiche, aumentano progressivamente la loro velocità fino a superare quella fuga dell'ammasso globulare. Questo processo, noto come *evaporazione gravitazionale*, conduce tali stelle a “sfuggire” dal sistema, che rimane gravitazionalmente legato, con energia totale negativa.

L'evaporazione gravitazionale, perciò, rimuove preferenzialmente stelle di piccola massa dall'ammasso globulare portando con sé una parte dell'energia cinetica del sistema. Questo processo riduce il contenuto energetico complessivo dell'ammasso perturbando temporaneamente il suo equilibrio dinamico. Sebbene ci sia anche una variazione dell'energia potenziale gravitazionale  $U$ , questa è limitata dalla forma stessa di  $U$  che non può diminuire oltre il valore massimo  $-(Gm_1m_2)/r$ . La variazione di  $T$  (energia cinetica totale) è invece molto più significativa rispetto alla variazione di  $U$ , poichè è direttamente collegata alle stelle che “evaporano” a causa della loro velocità elevata. Di conseguenza, l'ammasso può ritornare in equilibrio, ma si sposta su una retta del piano viriale corrispondente a uno stato energetico complessivo più basso rispetto a quello iniziale (nella **Figura 3.1** viene rappresentato graficamente il processo dai punti 1 – 2 – 3). L'effetto macroscopico è che l'ammasso si contrae e la sua temperatura cinetica aumenta, rendendolo più caldo, comportamento che riflette la risposta del sistema autogravitante alla perdita di energia: mentre diventa più compatto l'ammasso si muove verso stati di maggiore concentrazione e “calore” cinetico. Le regioni centrali dell'ammasso globulare tendono a contrarsi più rapidamente rispetto alle aree periferiche. Poichè le stelle che evaporano abbandonano il sistema principalmente dalle regioni esterne, si accentua il contrasto di densità tra queste e il nucleo centrale portando a una situazione in cui il core dell'ammasso diventa significativamente più denso, mentre le regioni esterne si presentano come una sorta di atmosfera rarefatta. In un simile contesto le stelle devono accumulare energia sufficiente per “sfuggire” dall'ammasso, comportando una conseguente contrazione del nucleo che aumenta ulteriormente la velocità delle stelle al suo interno. Tale comportamento dà origine a un fenomeno noto come *catastrofe gravotermica*, in cui la densità e la velocità delle stelle nelle regioni centrali aumentano in maniera significativa. Con l'avanzare della catastrofe gravotermica l'ammasso evolve verso configurazioni caratterizzate da profili di densità post-collasso nei quali le regioni centrali diventano estremamente concentrate. Allo stesso tempo, le alte velocità stellari e l'elevata densità facilitano la formazione di sistemi binari nelle regioni centrali che possono influenzare ulteriormente l'evoluzione dinamica dell'ammasso globulare.

### 3.1.3 Collasso di una nube di gas

Immaginiamo una nube di gas che, per ragioni non specificate, inizia a collassare sotto la propria gravità. Nelle prime fasi di questo processo la densità del gas aumenta ma



la temperatura, invece di crescere, tende a diminuire. Questo avviene perchè l'aumento della densità facilita l'irraggiamento, un fenomeno in gran parte attribuibile agli incontri tra particelle (moti a due corpi) che favoriscono la perdita di energia sotto forma di radiazione. Le perdite radiative possono essere così efficienti che la nube continua a collassare e raffreddarsi. Tuttavia, mentre il collasso prosegue, la densità raggiunge un valore tale da rendere il cammino libero medio dei fotoni progressivamente inferiore alle dimensioni della nube e una parte significativa dell'energia rilasciata durante il collasso non è più dissipata nello spazio circostante. Di conseguenza il gas inizia a riscaldarsi, processo che, a sua volta, rallenta il collasso gravitazionale. Alla fine, il sistema raggiunge uno stato di (quasi) equilibrio durante il quale la nube diventa più calda rispetto allo spazio circostante e continua a emettere fotoni. Coerentemente con la seconda legge della termodinamica, la nube, ora una protostella, perde energia sotto forma di radiazione. Questa perdita di energia può essere descritta dalla relazione

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} \quad (3.3)$$

dove  $E$  è l'energia totale,  $T$  la temperatura e  $U$  l'energia potenziale gravitazionale. Tale relazione evidenzia come il sistema stia continuamente irradiando energia attraverso la perdita di fotoni, motore fondamentale del processo. Quando la protostella si trova in uno stato di (quasi) equilibrio possiamo applicare il Teorema del Viriale che stabilisce

$$2\frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt} \quad (3.4)$$

Combinando questa relazione con quella sopra riportata otteniamo:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dE}{dt} \quad (3.5)$$

Nonostante la perdita di energia totale la temperatura del sistema aumenta, comportamento apparentemente paradossale spiegabile dal fatto che l'energia potenziale gravitazionale del sistema  $U$  è negativa e varia in modo tale che

$$\frac{dU}{dt} = 2\frac{dE}{dt} \quad (3.6)$$

Ciò implica che, durante il collasso, la protostella si contrae fino al punto in cui l'energia potenziale gravitazionale diventa significativamente più negativa, di un ammontare pari a circa il doppio dell'energia persa per irraggiamento. È proprio questo il meccanismo per cui, pur perdendo energia complessiva, la protostella aumenta la sua temperatura interna. Il processo appena descritto è una diretta conseguenza del Teorema del Viriale ed è cruciale per comprendere l'evoluzione delle protostelle durante le prime fasi di formazione.

# Bibliografia

- [1] Luca Ciotti. *Introduction to Stellar Dynamics*. Cambridge University Press, 2021.
- [2] Luca Ciotti. *Appunti di Astrofisica Extragalattica*. 2022-2023.
- [3] Luca Ciotti. *Appunti di Dinamica Stellare*. Bertinoro, 2006.
- [4] Cesare Chiosi. *Struttura ed evoluzione delle stelle*. Cambridge University Press, 2002.
- [5] Attilo Ferrari. *Stelle, galassie e universo*. Springer-Verlag Mailand, 2011.
- [6] Francesco Rosario Ferraro. *Appunti di Astrofisica Stellare*. 2020-2021.
- [7] James Binney, Scott Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, 2008.
- [8] Giuseppe Bertin. *Corso di introduzione all'Astrofisica*. I modulo. 2009-2010.