

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Meccanismi di Trasporto di Energia in Astrofisica

Tesi di laurea

Presentata da:
Andrea Salvemini

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa Marcella Brusa

Anno accademico 2023-2024

Indice

Introduzione

Trasporto dell'Energia nelle Stelle

1 Trasporto Radiativo

1.1 Equazione del Trasporto Radiativo

1.2 Opacità e Leggi di Kramers

2 Trasporto Convettivo

2.1 Equazione del Trasporto Convettivo

2.2 Gradiente Adiabatico

2.3 Criterio di Schwarzschild

2.4 Equazione del Flusso Convettivo

3 Trasporto Conduttivo

4 Trasporto Radiativo nelle Atmosfere Stellari

5 Casi Limite del Trasporto Radiativo

Bibliografia

Appendice

Introduzione

Quando si parla di energia in astrofisica, non possiamo che pensare alle stelle. All' interno dei loro nuclei si innescano i processi di **fusione nucleare** responsabili della produzione di grandi quantità di energia. In fisica si distinguono tre tipologie di meccanismo di trasporto dell'energia: **Conduzione, Convezione e Irraggiamento** . Sono proprio questi meccanismi che trasferiscono l'energia prodotta nel nucleo alla superficie, consentendo alle stelle di permeare il cosmo di luce e calore. Nell' elaborato verranno presentati questi tre processi e i fenomeni in cui essi risultano protagonisti: dalla struttura interna delle stelle e le loro atmosfere ai quasar.

Trasporto dell' Energia nelle stelle

Per le considerazioni che seguiranno nei prossimi capitoli, la stella (interni e atmosfera) è stata modellizzata come una serie di gusci sferici concentrici di gas perfetto; in ogni guscio è presente **Equilibrio Termodinamico Locale (LTE)** così da presentare una temperatura uniforme in ogni suo punto. Questo modello tiene conto delle differenti temperature all'interno delle stelle ed è fondamentale in quanto il trasporto di energia dipende dal **Gradiente termico (∇T)** (ovvero la variazione di temperatura rispetto alla profondità) che regola il **Flusso di energia** $F = \frac{L_r}{4\pi r^2}$. E' proprio la differenza di temperatura tra nucleo e superficie che innesca il trasporto di energia. Oltre il Gradiente Termico per determinare il flusso, va considerata anche l' **opacità k** , coefficiente di assorbimento di energia per grammo di materia. Nelle stelle la materia è sotto forma di plasma composto da nuclei atomici, elettroni, fotoni e neutrini. Le principali particelle coinvolte sono i **fotoni** per il **trasporto radiativo** e gli **elettroni** per quello **conduttivo** . Confrontando l'energia associata a queste particelle si osserva che l'energia degli elettroni risulta maggiore di quella dei fotoni, questo potrebbe portare a pensare che sia il Trasporto Conduttivo il principale tipo di trasporto nelle stelle, ma in realtà non è così. Infatti si deve anche considerare il **libero cammino medio (LCM)** delle particelle, ossia la distanza media che la particella percorre fra due urti consecutivi. In questo caso sono i fotoni ad avere un LCM maggiore rispetto agli elettroni. Questo determina che, in condizioni di gas perfetto, la conduzione sia trascurabile ed a giocare un ruolo fondamentale siano l' irraggiamento e la convezione. Nel trasporto di energia andrebbero inclusi anche i neutrini; queste particelle di massa quasi nulla, prodotte da alcuni processi nucleari, sottraggono energia alla stella senza però cederla in quanto esse interagiscono raramente con la materia. Per questo motivo, i neutrini non saranno trattati nell'elaborato.

1 Trasporto Radiativo

Il trasporto radiativo, come già accennato, è mediato dai fotoni. Le particelle di luce, prodotte nel nucleo tramite reazioni termonucleari e contrazione gravitazionale, interagiscono con la materia circostante tramite processi di assorbimento/emissione e scattering. Sono proprio queste interazioni a trasportare energia e calore dalle parti più interne e calde agli strati esterni più freddi della stella (in accordo con il gradiente termico). Le interazioni radiazione-materia sono anche responsabili del moto disordinato dei fotoni; infatti nonostante i fotoni viaggino alla velocità della luce, non si deve immaginare il trasporto radiativo come un flusso ordinato di queste particelle. Si osserva che la distanza (d) percorsa da un fotone è legata al suo libero cammino medio (l) e dal numero di interazioni (N) secondo la formula:

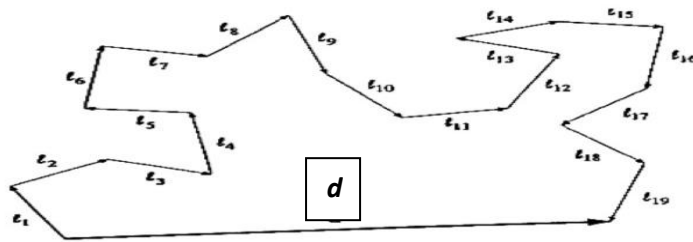


Fig. 1: Traiettoria di un fotone, con evidenziati i vari urti consecutivi di lunghezza l [Fonte 1]

$$d = l\sqrt{N} \quad [1]$$

Da quest'ultima si comprende che il trasporto radiativo può diventare poco efficiente: basti solo pensare che i fotoni prodotti nel nucleo del Sole impiegano circa 10^6 anni per arrivare alla superficie.

1.1 Equazione del Trasporto Radiativo

Per ottenere l'equazione del trasporto radiativo si parte dalla definizione di **Pressione di Radiazione** (P_{rad}) cioè la pressione che viene esercitata su un corpo quando esso è esposto ad una radiazione elettromagnetica. La formula è la seguente:

$$P_{rad} = \frac{1}{3} aT^4 \quad [2]$$

dove $a = \frac{4\sigma}{c} = 7.546 \cdot 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$, con $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-5} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ T}^{-4}$ costante di Stefan-Boltzmann e c la velocità della luce.

Derivandola rispetto a r (cioè la profondità) si ottiene il **Gradiente di Pressione**, che indica la variazione di quest'ultima in relazione alla variazione della profondità :

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = \frac{4}{3} aT^3 \frac{dT}{dr} \quad [3]$$

Al secondo membro compare invece il **Gradiente di Temperatura**. Il Gradiente di pressione può essere espresso anche in relazione all' Opacità k , alla densità (ρ) e al Flusso di radiazione (quantità di energia che investe la superficie in unità di tempo) :

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{k\rho}{c} F_{rad} \quad [4]$$

Uguagliando la [3] e la [4] si ricava :

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3k\rho}{4ac} \frac{F_{rad}}{T^3} \quad [5]$$

Infine sostituendo $F_{rad} = \frac{L_r}{4\pi r^2}$, si ottiene l' **Equazione del Trasporto Radiativo** :

$$\boxed{\frac{dT}{dr} |_{rad} = -\frac{3}{4ac} \frac{k\rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2}} \quad [6]$$

Dalla [6] si osserva la dipendenza del Gradiente Termico dal flusso di radiazione (e quindi dalla luminosità) e dall'opacità k . Sono proprio queste due grandezze a regolare il gradiente stesso. Inoltre si deduce che, così come un Gradiente genera un flusso, anche un flusso di energia produce un gradiente.

1.2 Opacità e Leggi di Kramers

L'opacità della materia stellare è una misura della resistenza offerta dalla materia al passaggio della radiazione; essa dipende dal modo in cui i fotoni interagiscono con le altre particelle del plasma. Le interazioni possibili tra radiazione e materia si dividono in: 1) processi di Assorbimento, in cui il fotone viene assorbito e non riappare più con la stessa energia e frequenza iniziale (ν).

2) processi di Diffusione in cui è la traiettoria del fotone che viene deviata.

Queste interazione producono una diminuzione del Flusso di radiazione e possiedono un loro coefficiente di opacità. Le relazioni per determinare il valore di questi coefficienti sono note come Leggi di Kramers. Esse esprimono la dipendenza, da T e ρ , dell'opacità nello strato considerato. In maggiore dettaglio i processi si distinguono in:

Assorbimento Bound-Bound (Legato-Legato)

Questo processo, noto come Foto-eccitazione, si verifica quando un elettrone in uno stato legato di energia E_1 assorbe un fotone e si sposta in un altro stato legato con energia maggiore E_2 . Affinché questo avvenga, il fotone assorbito deve avere necessariamente un'energia pari al gap tra i due livelli energetici: $h\nu_{BB} = E_2 - E_1$ dove h è la costante di Planck e ν_{BB} è la frequenza del fotone necessaria per la transizione.

Negli interni stellari questo processo non ha molta rilevanza, in quanto gran parte della materia è ionizzata e quindi pochi elettroni sono nello stato legato. Acquisisce importanza nelle atmosfere stellari in quanto responsabile delle righe spettrali.

Assorbimento Bound-Free (Legato-Libero)

Questo processo, noto come Fotoionizzazione, si verifica quando un elettrone in uno stato legato di energia E_1 assorbe un fotone e si sposta in uno stato libero di energia E_3 .

La transizione risulta meno selettiva rispetto alla precedente, in quanto basta che il fotone trasferisca un'energia superiore al potenziale di ionizzazione (χ_{ion}):

$$h\nu_{BF} = E_3 - E_1 > \chi_{ion}$$

In seguito, l'elettrone libero potrà perdere energia cinetica tramite urti con altre particelle e, tramite ricombinazione, essere ricatturato da un nucleo che riemetterebbe un fotone di minore energia. Portando a una complessiva degradazione dell'energia. Il Coefficiente di Assorbimento è:

$$k_{BF} \propto 10^{25} Z (1 + X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \quad [7]$$

La dipendenza con Z, cioè l'abbondanza di metalli, è data dal fatto che solo questi elementi contribuiscono al processo, essendo gli unici ad avere ancora elettroni legati. Negli interni stellari H e He sono quasi totalmente ionizzati.

Assorbimento Free-Free (Libero-Libero)

Questo processo si verifica quando un elettrone libero di energia E_3 assorbe un fotone e si sposta in un altro stato libero di energia E_4 . Per questa transizione non ci sono restrizioni per l'energia del fotone: $h\nu_{FF} = E_4 - E_3$.

Considerazione importante: Fisicamente l'assorbimento può avvenire solo se l'elettrone è in un campo elettrico, in caso contrario il processo non sarebbe possibile in quanto violerebbe la conservazione della quantità di moto. Il suo Coefficiente di Assorbimento è:

$$k_{FF} \propto 10^{22} (X + Y) (1 + X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \quad [8]$$

La relazione dipende, in questo caso, fortemente dalle abbondanze di H e He (rispettivamente X e Y) cioè gli elementi che danno maggiore contributo di elettroni con la loro ionizzazione.

Scattering (Diffusione)

Questo processo, diversamente dai casi precedenti, consiste in una collisione tra un fotone e un elettrone con conseguente deviazione del fotone. Questa interazione ritarda l'uscita di quest'ultimo dalla stella. Quando l'energia del fotone è minore di quella della massa a riposo dell'elettrone ($h\nu \ll m_e c^2$) si ha scattering Thomson. Se invece vale $h\nu \sim m_e c^2$ si ha lo scattering Compton. Il coefficiente di assorbimento per lo scattering Thomson:

$$k_E \propto 0.2(1 + X) \quad [9]$$

Questo coefficiente prevale sugli altri due quando la densità è bassa e/o la temperatura è alta. [L'andamento dell'opacità è descritto al punto a) dell'appendice].

Si può immaginare il coefficiente di assorbimento totale pari a: $k(\nu) = k_{BF} + k_{FF} + k_e$. In realtà per definire l'opacità media, operativamente si usa la trasparenza media $\left(\frac{1}{k}\right)$ calcolata tramite media di Rosseland (una media pesata, con peso la derivata della funzione di Planck rispetto alla temperatura) che risulta:

$$\frac{1}{k} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k_v} \frac{dB}{dT} dv}{\int_0^\infty \frac{dB}{dT} dv} \quad [10]$$

2 Trasporto Convettivo

Un altro meccanismo protagonista nelle stelle è la convezione. Questo tipo di trasporto, diversamente dagli altri due, è mediato da celle di gas. Si immagina una cella di gas, che avendo temperatura maggiore rispetto alla materia circostante, risale gli strati della stella. Nel farlo si espande, risultando meno densa del fluido che la circonda, essa tenderà a salire ulteriormente. Il moto continua fino alla dissoluzione della cella nello strato d'arrivo, in cui cederà calore. L'intero processo avviene in condizioni di adiabaticità che implicano che la "cella" non scambi calore lungo il suo tragitto ($dQ = 0$), ma lo ceda totalmente solo all'arrivo. Alla risalita di gas più caldo e meno denso è associata anche la caduta di materiale più denso e freddo verso gli strati interni. Questo processo mette in moto grandi quantità di materia e produce un rimescolamento della composizione interna della stella, omogeneizzandola. Nel caso in cui il rimescolamento coinvolgesse anche parti del nucleo, si assisterebbe all'allungamento della vita dell'astro. Infatti il nucleo attingerebbe all'idrogeno presente in altri strati della stella oltre a quello contenuto al suo interno, per alimentare i processi di fusione. In questo capitolo verranno trattati i concetti fondamentali per comprendere la convezione e le condizioni grazie alle quali può verificarsi.

2.1 Equazione del Trasporto Convettivo

In una zona convettiva si considera una cella di gas di massa dm ad una distanza r dal nucleo, che si innalza di un'altezza h . Il flusso di energia trasportata (**Flusso convettivo**) sarà:

$$F_{conv} = c_p \Delta T \rho v \quad [11]$$

Dove c_p è il calore specifico a pressione costante, ΔT è la differenza tra temperatura della cella e l'ambiente; insieme rappresentano l'energia termica per grammo trasportata a pressione costante. Infine ρv indica il flusso di massa che attraversa l'unità di superficie in unità di tempo, in cui v è la velocità della cella convettiva. La [11] può essere riscritta mostrando la dipendenza dalla differenza (o eccesso) del gradiente reale rispetto a quello adiabatico:

$$F_{conv} = c_p \rho v \left[\frac{dT}{dr} \Big|_{ad} - \frac{dT}{dr} \right] h \quad [12]$$

2.2 Gradiente Adiabatico

Il **Gradiente Adiabatico** è il concetto fondamentale ai fini della trattazione sul trasporto convettivo. Infatti rappresenta il valore di confronto per determinare in quali condizioni la

convezione si innesca. Per ricavare l' espressione generale del gradiente adiabatico si parte dall' equazione dei gas perfetti :

$$P = \frac{k_B \rho T}{\mu H} \quad [13]$$

Dove P, ρ, T sono rispettivamente la pressione, la densità e la temperatura, mentre μ è il peso molecolare medio, H è la massa di idrogeno e k_B è la costante di Boltzmann. Si suppone che ci si trovi in zone lontane dal nucleo, garantendo così che μ rimanga costante. Applicando alla [13] il logaritmo si ha $\text{Log } P = \text{Log } \rho + \text{Log } T - \text{Log } \mu + \text{costante}$ e derivandola rispetto a r , si ottiene:

$$\frac{d \text{Log } P}{dr} = \frac{d \text{Log } \rho}{dr} + \frac{d \text{Log } T}{dr} - \frac{d \text{Log } \mu}{dr} \quad [14]$$

Nell'ipotesi di lontananza dalle regioni termonucleari, μ risulta costante e la [14] si potrà riscrivere come:

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{dr} = \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \quad [15]$$

In condizione adiabatiche e partendo dal Primo Principio della Termodinamica, valgono le seguenti relazioni :

$$P \propto \rho^\gamma, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Dove C_p e C_v sono i calori specifici a pressione e a volume costante [i valori sono riportati al punto b) in appendice]. Differenziando e derivando rispetto a r si ottiene:

$$\frac{dP}{dr} = \gamma \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \quad \rightarrow \quad \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{dr} \quad [16]$$

Infine sostituendo la [16] nella [15], si ha l' **Espressione del Gradiente Adiabatico**:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{dr} + \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \Big|_{ad} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{dT}{dr} \Big|_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}} \quad [17]$$

Considerando inoltre che il Gradiente Termico in scala logaritmica è:

$$\frac{dT}{dr} \frac{P}{T} \frac{dr}{dP} = \frac{dT}{dP} \frac{P}{T} = \frac{d \text{Log } T}{d \text{Log } P} \equiv \nabla \quad [18]$$

Portando a sinistra il rapporto tra T e P e la derivata, si può riscrivere in forma compatta la [17] come:

$$\boxed{\nabla_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)} \quad [19]$$

In condizioni di gas monoatomico (tipica degli interni stellari) : $\gamma = \frac{5}{3} \Rightarrow \nabla_{ad} = 0.4$

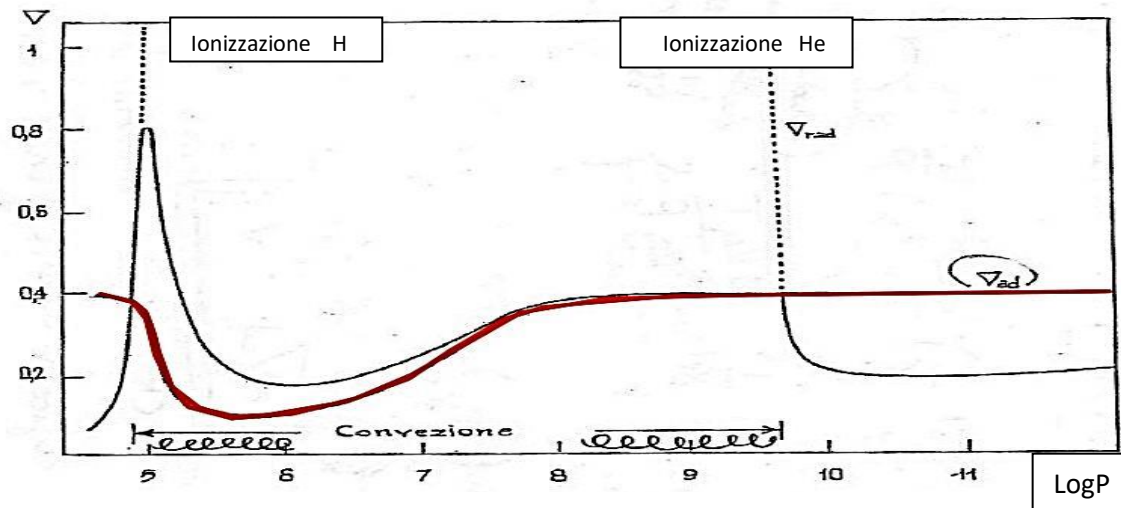


Fig.2: Andamenti dei Gradienti Logaritmici di temperatura (asse y) nella zona subatmosferica di una stella della MainSequence. Log P su asse X. In rosso il gradiente adiabatico, in grigio quello effettivo. [Fonte 1]

Dalla Figura2, si può osservare che, nonostante il gas trattato sia sempre monoatomico, il valore del gradiente non risulti costante. Va precisato che i valori di C_p e C_v non dipendono solo dal tipo di gas [si consulti il punto b) in appendice], ma anche dalle condizioni in cui esso si trova. Infatti in zone della stella in cui il gas risulta parzialmente ionizzato, i calori specifici tendono ad aumentare, in quanto parte dell'energia viene spesa per ionizzare il gas stesso e quindi sarà necessario più calore per riscaldarlo. Di conseguenza risulterà: $\gamma = 1.1 \rightarrow \nabla_{ad} = 0.1$

2.3 Criterio di Schwarzschild

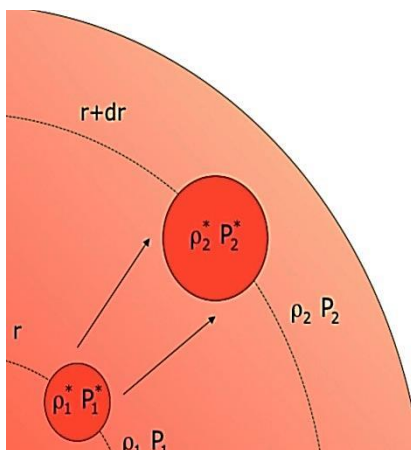


Fig. 3: Espansione cella di gas in risalita [Fonte 1]

Come anticipato, il Gradiente Adiabatico ricopre un importante ruolo nel criterio che determina quali zone della stella siano stabili o meno rispetto alla convezione. Questo criterio è noto come Criterio di Schwarzschild. Come mostrato nella Figura3, si prenda un elemento di materia con pressione P e densità ρ a distanza r dal nucleo, che si sposta radialmente verso la superficie della stella. La cella si espanderà in maniera adiabatica finché la sua pressione interna non sarà in equilibrio con quelle esterna. Lo spostamento è adiabatico, quindi vale:

$$P\rho^{-\gamma} = \text{cost} \quad [20]$$

Nel punto di partenza r , la cella è in equilibrio con l'esterno e si ha :

$$P_1^* = P_1; \rho_1^* = \rho_1; T_1^* = T_1. \quad (* \text{ indica i fattori interni})$$

Nel punto di arrivo $r + dr$, si ha invece : $P_2^* = P_2$.

La relazione [20] è valida per tutto lo spostamento, quindi si ottiene:

$$P_2^* \rho_2^{*\gamma} = P_1^* \rho_1^{*\gamma} \Rightarrow \rho_2^* = \left(\frac{P_2^*}{P_1^*}\right)^{1/\gamma} \rho_1^* \quad [21]$$

La densità fissa la condizione di stabilità rispetto al trasporto convettivo.

Se l'elemento continua a salire, l'equilibrio è instabile, e si ha convezione; se invece scende, l'equilibrio risulta stabile (no convezione). Infatti la cella scende solo se presenta una densità (e quindi un peso) maggiore rispetto al gas circostante, ovvero $\rho_2^* > \rho_2$.

Quindi la condizione di **Equilibrio stabile** risulta: $\rho_2^* = \rho_1^* \left(\frac{P_2^*}{P_1^*}\right)^{1/\gamma} > \rho_2$ [22]

Riscrivendo la [22] solo in termini di ambiente esterno (ricordando le condizioni iniziali e finali), si ha :

$$\rho_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/\gamma} > \rho_2$$
 [23]

Considerando le relazioni : $P_2 = P_1 + \frac{dP}{dr} dr$; $\rho_2 = \rho_1 + \frac{d\rho}{dr} dr$ e sostituendole nella [23] e sviluppando in serie di Taylor l'argomento in parentesi, si ottiene:

$$\boxed{-\frac{1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} < -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr}}$$
 [24]

La relazione è la forma esatta e generale della condizione di stabilità "contro" i moti convettivi e può essere applicata in ogni strato della stella. Ricordando la prima versione della [15] e sostituendo il gradiente della densità, si può riscrivere la [24] come:

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} < -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr}$$
 [25]

I termini con la pressione possono essere raggruppati e, tenendo in considerazione che i gradienti sono negativi, si ha:

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{P} \left|\frac{dP}{dr}\right| > \frac{1}{T} \left|\frac{dT}{dr}\right| \rightarrow \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) > \frac{P}{T} \left|\frac{dT}{dr}\right| \left|\frac{dr}{dP}\right|$$
 [26]

Infine ricordando le definizioni [18] e [19] e sostituendole, si ricava la relazione del **Criterio di Criterio di Schwarzschild**:

$$\boxed{\nabla_{ad} > \nabla}$$
 [27]

Condizione che i gradienti verificano quando non avviene convezione. Con buona approssimazione il $\nabla \sim \nabla_{rad}$. Il gradiente radiativo va calcolato in ogni strato della stella e poi confrontato con quello adiabatico. In generale si avranno due casi come mostrato in Figura4. Nel **caso 1**: il valore assoluto del gradiente radiativo è maggiore di quello adiabatico. In questo caso una cella di gas che si sposta da r_0 a r_0+dr risulterebbe più calda dell'ambiente circostante e, a parità di pressione, meno densa. La cella continuerebbe la sua risalita producendo convezione. Nel **caso 2**: il valore assoluto del gradiente radiativo è minore di quello adiabatico. In questo caso invece, la cella che risale si troverà in un ambiente più caldo; risultando più densa e pesante tenderà a ritornare verso la posizione iniziale e la convezione non si verificherà.

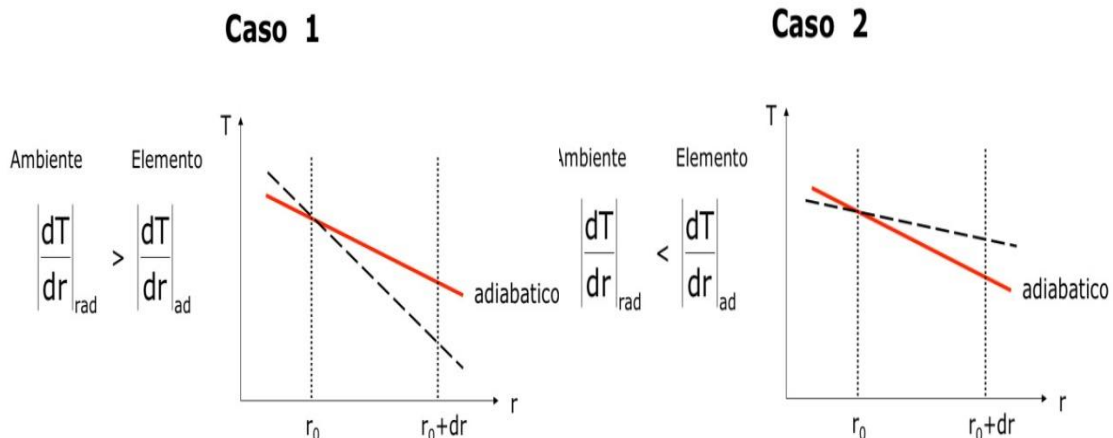


Fig.4: Confronto grafico tra l'andamento del Gradiente Adiabatico (in rosso) e quello radiativo (tratteggiato). Caso 1 : convezione. Caso 2: non convezione. Temperatura T su asse y e distanza r su asse x. [Fonte1].

Analizzando la Figura2 si può determinare in quali zone della stella sia presente la convezione, zone dette a regime convettivo, e in quali no (a regime radiativo). Infatti partendo dalla definizione del gradiente radiativo [6] si possono determinare le condizioni che favoriscono l'innesco del trasporto convettivo:

- Opacità(k) grande che implica un gradiente radiativo alto (condizione tipica della regione esterna)
- Rate di produzione d'energia fortemente dipendente dalla temperatura che implica un F_{rad} grande e quindi un gradiente radiativo alto (condizione tipica delle regioni centrali)
- Presenza di gas parzialmente ionizzato che riduce il fattore γ e quindi diminuisce il ∇_{ad} .

Si assume come bordo della zona convettiva il punto in cui la cella di gas presenta accelerazione nulla. Ciò però non implica che anche la velocità sia zero; infatti la cella, possedendo ancora della velocità, potrebbe sconfinare nella zona radiativa rimescolando anche parte di essa. Questo fenomeno è parametrizzato dal cosiddetto **Overshooting**. La zona in cui la cella sconfinata è detta rimescolata come mostrato in Figura5. Infine, come accennato ad inizio capitolo, questo fenomeno può coinvolgere regioni nucleari della stella, alterandone la quantità di combustibile nucleare a disposizione al loro interno.

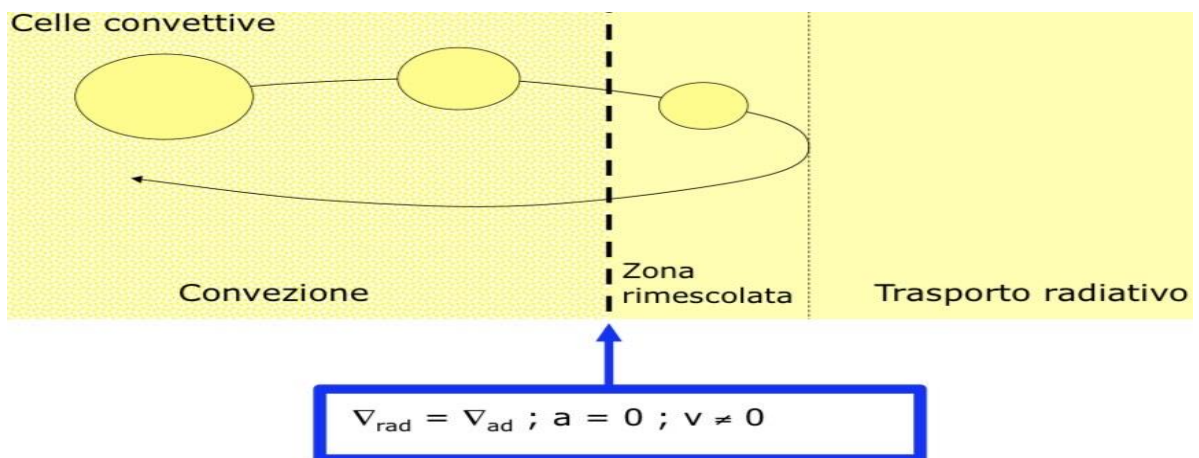


Fig.5: Sbordamento di celle convettive nella regione radiativa. La linea tratteggiata è il bordo teorico tra le zone fissato dal criterio. La seconda linea è il limite effettivo della zona rimescolata parametrizzato dal l' Overshooting [Fonte 1]

2.4 Equazione del Flusso Convettivo

Prima di riprendere la formulazione del Flusso Convettivo, è necessario sottolineare che non esiste ancora una trattazione esatta del moto turbolento tipico delle celle convettive. Verranno quindi introdotte una serie di approssimazioni e parametrizzazioni del libero cammino medio delle celle di gas. L' approssimazione più utilizzata è la **Mixing Length Theory**, teoria che prevede la parametrizzazione del moto delle celle tramite la lunghezza di rimescolamento ' l ' (distanza media percorsa dalla cella prima di dissolversi). Questo parametro è a sua volta definito in funzione di un parametro libero α che è fissato in modo tale che le strutture convettive calcolate riproducano le osservazioni ($0.5 < \alpha < 2$). Si ha: $l = \alpha \cdot H_p$ con H_p altezza di scala di pressione ovvero, la distanza caratteristica entro la quale la pressione si riduce di un e-esimo. Si deduce che maggiore è il parametro α più è efficiente la convezione. Bisogna però prestare attenzione al valore di l . Infatti se $l \ll H_p$ la convezione diventa poco efficiente. Viceversa, se $l \gg H_p$ l'elemento convettivo perde di significato. Riprendendo l' equazione [12], la si moltiplica e divide per P , T , dP . Sostituendo h con l e ricordando la definizione di gradiente logaritmico [18], si ottiene:

$$F_{conv} = \frac{1}{2} \rho v c_p l \left[\frac{dT}{dP} \Big|_{ad} - \frac{dT}{dP} \right] \frac{P}{T} \frac{dP}{dr} \frac{T}{P} = \frac{1}{2} \rho v c_p l (\nabla_{ad} - \nabla) \frac{dP}{dr} \frac{T}{P} \quad [28]$$

Il flusso di materia ora è $\frac{1}{2} \rho v$ per tener conto che metà delle celle salgono e metà scendono.

Considerando che $\frac{1}{H_p} = -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr}$ sostituendo, si ha: $F_{conv} = \frac{1}{2} \rho v c_p \frac{l}{H_p} (\nabla - \nabla_{ad}) T$ e ricordando che $\alpha = \frac{l}{H_p}$, infine si ottiene l'**Equazione Generale del Flusso Convettivo**:

$$F_{conv} = \frac{1}{2} \rho v c_p \alpha (\nabla - \nabla_{ad}) T \quad [29]$$

Analogamente a come si è fatto per il Flusso convettivo, a partire dalla [6] si può scrivere l'equazione del Flusso Radiativo in termini di Gradiente:

$$F_{rad} = \frac{4ac}{3k\rho} \frac{T^4}{H_p} \nabla \quad [30]$$

Dalla [29] e [30] si può ottenere l' **Equazione Generale del Flusso**, valida in ogni guscio a distanza r dal nucleo della stella e di spessore dr :

$$F = F_{rad} + F_{conv} = \frac{L_r}{4\pi r^2} = \frac{4ac}{3k\rho} \frac{T^4}{H_p} \nabla + \frac{1}{2} \rho v c_p \alpha (\nabla - \nabla_{ad}) T \quad [31]$$

(si ricordi che il flusso dipende da L_r , ma sono solo gli strati interni a contribuire alla luminosità, mentre negli strati esterni delle stelle essa rimane pressoché costante)

Dalla [31] si ricava l'Espressione generale del Gradiente Vero:

$$\nabla = \frac{\frac{L_r}{4\pi r^2} + \frac{1}{2}\rho v c_p \alpha (\nabla_{ad}) T}{\frac{4ac T^4}{3k\rho H_p} + \frac{1}{2}\rho v c_p \alpha T} \quad [32]$$

Matematicamente quando la v tende a zero, $\nabla \rightarrow \nabla_{rad}$ e quindi la convezione non è presente; invece quando v cresce, $\nabla \rightarrow \nabla_{ad}$ e la convezione domina, esattamente come previsto dal Criterio di Schwarzschild. Si può stimare la velocità della cella considerando le forze agenti (su unità di volume), il loro lavoro ed uguagliandolo all'energia cinetica:

$$v = \sqrt{2g \frac{\Delta T}{T} l}$$

Sostituendo nella [11] il valore di v e scrivendo ΔT in funzione del gradiente superadiabatico ($\Delta T = \frac{dT}{dr} l$), si ricava la [33] cioè un'ulteriore formula del Flusso Convettivo:

$$F_{conv} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \sqrt{\frac{g}{T}} c_p \left(\frac{dT}{dr}\right)^{3/2} l^2 \quad [33]$$

3 Trasporto Conduttivo

Come si è visto nell'introduzione, la conduzione non è un meccanismo efficace all'interno delle stelle. Questo risulta vero fin quando il plasma si trova in condizione di gas perfetto. Durante la vita di una stella, il nucleo è sottoposto a variazioni di temperatura e pressione che potrebbero portare la materia ad acquisire uno stato detto **degenerare** [approfondito nel punto c) in appendice]. Questa condizione, tipica dei nuclei di giganti rosse e nane bianche, è caratterizzata dall' avere occupati tutti i livelli energetici al di sotto dell'energia di Fermi. In questa particolare configurazione, gli elettroni liberi sono impossibilitati a trasferire energia a quelli nei livelli occupati e ciò determina l'aumento del loro libero cammino medio (paragonabile adesso a quello dei fotoni) rendendo la conduzione non più trascurabile. La relazione per il **Flusso Conduttivo** è nota come **legge di Fick**:

$$F_{cond} = - \frac{4acT^3}{3k_c \rho} \frac{dT}{dr} \quad [34]$$

L'equazione è identica a quella per il Flusso Radiativo [5], nella quale però compare il termine di opacità radiativa (da ora espresso come k_r). In presenza di entrambi i meccanismi di trasporto, si ha:

$$F = F_{rad} + F_{cond} = - \frac{4acT^3}{3k_{tot}\rho} \frac{dT}{dr} \quad [35]$$

In cui k_{tot} (opacità totale) è calcolata come : $\frac{1}{k_{tot}} = \frac{1}{k_c} + \frac{1}{k_r}$.

In condizioni di gas perfetto si ha $k_c \gg k_r$, rendendo trascurabile la conduzione.

4 Trasporto Radiativo nelle Atmosfere Stellari

Una volta che i fotoni hanno attraversato la struttura interna della stella, il loro viaggio non è concluso. Infatti intorno alla stella è presente una regione gassosa, nota come **Atmosfera Stellare**. Questa regione è composta principalmente da H, ma presenta anche tracce, via via più esigue, di altri elementi e composti più pesanti; di conseguenza i fotoni andranno incontro ad altri processi di Assorbimento o Scattering, che ne ritarderanno la

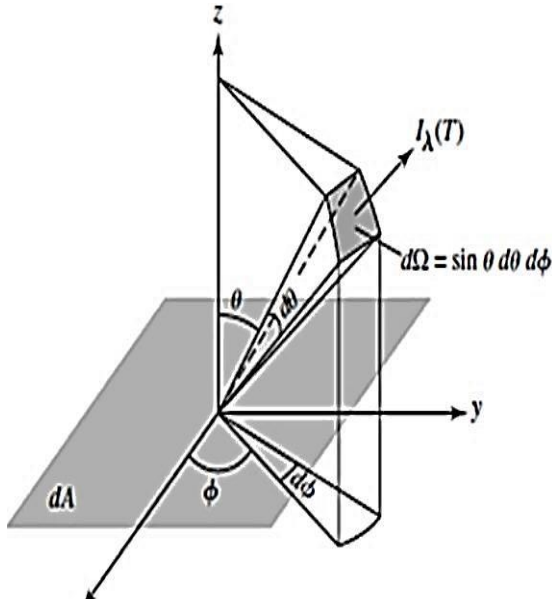


Fig.6: Intensità Specifica I [Fonte2, Capitolo 9.1]

diffusione. Sono proprio questi fenomeni a generare lo spettro stellare tipico dell' astro.

Il meccanismo di trasporto dell'energia nell'atmosfera è ovviamente quello radiativo. Per trattarlo si parte dal definire l' **Intensità Specifica**:

$$I_{\lambda} = \frac{E_{\lambda} d\lambda}{d\lambda dt dA \cos \theta d\Omega} \quad [\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-3} \text{sr}^{-1}] \quad [36]$$

Ossia, la quantità di radiazione avente lunghezza d'onda compresa tra λ e $\lambda+d\lambda$, che attraversa nell'unità di tempo dt l'area dA e in un angolo solido $d\Omega$ come mostrato in Figura6.

Dalla [36] si può definire il **Flusso Radiativo**, ossia la quantità di energia netta passante ogni secondo attraverso l'unità di area in un dato intervallo di lunghezze d'onda (λ e $\lambda+d\lambda$):

$$F_{\lambda} d\lambda = \int I_{\lambda} d\lambda \cos \theta d\Omega = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_{\lambda} d\lambda \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \quad [37]$$

Si ricordi che è sempre valida la LTE; considerando i processi di emissione e assorbimento, che alterano l'intensità luminosa attraverso l'atmosfera stellare, si ha:

$$dI_{\lambda} = -I_{\lambda} k_{\lambda} \rho ds + j_{\lambda} \rho ds \quad [38]$$

Il primo addendo rappresenta l'assorbimento dipendente dall' opacità (k_{λ}), il secondo è l'emissione con il suo coefficiente (j_{λ}). Entrambi dipendono dalla distanza percorsa ds dalla radiazione e dalla densità ρ . Quindi l'intensità della radiazione varia, in quanto alcuni fotoni vengono assorbiti e possono essere sostituiti da altri emessi dal gas. Il tasso con cui avvengono questi processi determina quanto rapidamente varia l'intensità del flusso di radiazione. Dalla [38] si può ottenere l'equazione del **Trasporto Radiativo nelle Atmosfere stellari**. Infatti riscrivendola:

$$\frac{dI_{\lambda}}{ds} = -I_{\lambda} k_{\lambda} \rho + j_{\lambda} \rho \rightarrow -\frac{1}{k_{\lambda} \rho} \frac{dI_{\lambda}}{ds} = I_{\lambda} - \frac{j_{\lambda}}{k_{\lambda}} \rightarrow \boxed{-\frac{1}{k_{\lambda} \rho} \frac{dI_{\lambda}}{ds} = I_{\lambda} - S_{\lambda}} \quad [39]$$

Il rapporto tra coefficiente di emissione e quello di assorbimento (l'opacità) è chiamato **Funzione Sorgente** (S_λ) e fisicamente descrive come i fotoni della radiazione iniziale vengano assorbiti e rimpiazzati da fotoni generati localmente dal gas.

Per una trattazione più completa si introduce un'altra importante grandezza, nota come **Profondità Ottica** (τ_λ) :

$$d\tau_\lambda = -k_\lambda \rho ds \rightarrow \tau_\lambda = -\int_0^s k_\lambda \rho ds \quad [40]$$

rappresentante la misura della trasparenza, che descrive il grado di opacità di una sezione dell'atmosfera nei confronti della radiazione che l'attraversa. Per convenzione si assume che $\tau_\lambda = 0$ per lo strato più esterno dell'atmosfera. Riscrivendo la [39] in relazione a τ_λ

si ha:
$$\boxed{\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} = I_\lambda - S_\lambda} \quad [41]$$

Supponendo che $S_\lambda = 0$, si ottiene: $\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} = I_\lambda \rightarrow \frac{dI_\lambda}{I_\lambda} = d\tau_\lambda$ che integrata da 0 a s diviene:

$$I_\lambda = I_{\lambda,0} \cdot e^{-\tau_\lambda} \quad [42]$$

Quest'ultima è la relazione che ci indica di quanto si riduce l'intensità luminosa iniziale ($I_{\lambda,0}$) di un fascio di radiazione, che attraversa uno strato di materia con profondità ottica τ_λ e quindi opacità k_λ . La [42] è una riscrittura della legge di **Lambert-Beer** ed è valida in tutti i casi in cui una radiazione attraversa materia, inclusa l'atmosfera dei pianeti.

Se $\tau_\lambda \gg 1$ il gas sarà detto **Otticamente Spesso**, mentre se $\tau_\lambda \ll 1$ sarà **Otticamente Sottile**. Nel primo caso la I_λ tenderà a zero mentre nel secondo si avrà $I_\lambda \approx I_{\lambda,0}$.

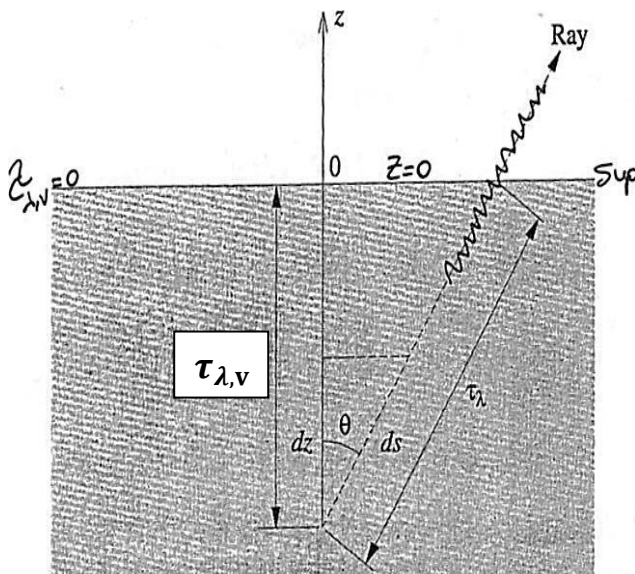
Un gas che risulti otticamente **opaco** è tale da ridurre l'intensità della radiazione; contrariamente in un gas che risulti sottile, la radiazione non perderebbe di intensità, attraversandolo indisturbata. Inoltre la Profondità Ottica dipende dalla lunghezza d'onda(λ), quindi un gas che risulta otticamente spesso, o opaco, per una λ , può essere otticamente sottile per un'altra.

Nella [41] non è presente nessuna grandezza che indichi direttamente la profondità dello strato di atmosfera che andiamo a considerare. Dato che lo spessore dei piani in cui è divisa l'atmosfera è trascurabile, rispetto al raggio di curvatura, si può assumere l'approssimazione degli "strati piani-paralleli", in cui i vari strati sono modellizzati come piani e paralleli tra loro. Grazie a questa approssimazione, si può definire la **Profondità Ottica Verticale** ($\tau_{\lambda,v}$) che è la proiezione della profondità ottica sull'asse delle z (perpendicolare allo strato):

$$\tau_{\lambda,v}(z) = \int_z^0 k_\lambda \rho dz \quad [43]$$

in corrispondenza della superficie $Z=0$ e $\tau_{\lambda,v}=0$.

Come si vede dalla Figura 7, un raggio con angolo θ attraversa una frazione di atmosfera maggiore, dunque si cerca il legame tra $\tau_{\lambda,v}$ e τ_{λ} . Attraverso considerazioni geometriche, si osserva che:



$$dz = ds \cos \theta$$

$$\tau_{\lambda,v} = \tau_{\lambda} \cos \vartheta \Rightarrow \tau_{\lambda} = \frac{\tau_{\lambda,v}}{\cos \theta}$$

Si riscrive la [41] in relazione alla Profondità Ottica Verticale e si ottiene:

$$\cos \theta \frac{dI_{\lambda}}{d\tau_{\lambda,v}} = I_{\lambda} - S_{\lambda} \quad [44]$$

Fig.7: Profondità ottica verticale in strati piani-paralleli
[Fonte 1]

La [44] risulta più vantaggiosa in quanto $\tau_{\lambda,v}$ è una vera e propria coordinata verticale lungo l'atmosfera e non dipende dalla direzione della radiazione.

Infine, applicando l'approssimazione di atmosfera grigia, si può eliminare la dipendenza dalla lunghezza d'onda. Matematicamente, tramite media di Rosseland [10], si ottiene l'opacità media che non dipende da λ e integrando I_{λ} e S_{λ} su λ ne si elimina la dipendenza. Si ottiene così :

$$\cos \theta \frac{dI}{d\tau_v} = I - S \quad [45]$$

Questa relazione, oltre a descrivere il trasporto radiativo nelle atmosfere stellari, è fondamentale per ricavare l'equazione per descrivere la struttura dell'atmosfera in termini di temperatura: $T^4 = \frac{3}{4} T_e^4 \left(\tau_v + \frac{2}{3} \right)$ dove T_e è la temperatura dello strato da cui riemergono i fotoni. Quindi si associa ad ogni strato un valore di temperatura T e τ_v e si osserva che lo strato in cui $T = T_e$, ha $\tau_v = 2/3$ ed è noto come **Fotosfera**. La sua temperatura rappresenta quella effettiva della stella. Inoltre, ricordando che lo strato più esterno ha una $\tau_v = 0$, si intuisce facilmente che quando si osserva una stella, si sta in realtà guardando quello che accade in profondità nella sua atmosfera. Infatti la Fotosfera è lo strato in cui l'atmosfera passa da essere otticamente spessa ad otticamente sottile, permettendo ai fotoni di emergere e raggiungere lo spazio aperto. Nel caso del Sole, la sua $T_e = 5770K$ perfettamente in accordo con il suo spettro, approssimabile a quello di un corpo nero a quella temperatura.[definizione di corpo nero al punto d) in appendice]

5 Casi Limite del Trasporto Radiativo

La radiazione, come visto nel Capitolo 1, produce pressione sulla materia che incontra lungo il suo cammino, data dalla relazione [2]. In condizione di equilibrio idrostatico [precisazione nel punto e) in appendice], in un corpo celeste la Pressione (formula [4]) bilancia la Forza Gravitazionale e vale:

$$-\frac{k\rho}{c} \frac{L_r}{4\pi r^2} = -G \frac{M\rho}{r^2} \text{ da cui } \rightarrow \boxed{L_{Eddington} \propto \frac{4\pi c G M}{k}} \quad [46]$$

Il valore di luminosità ottenuto prende il nome di **Luminosità di Eddington**. Se un corpo celeste raggiungesse, o superasse, questo limite di luminosità, la radiazione dei fotoni sarebbe tale da bilanciare, o vincere, la sua stessa gravità. La $L_{Eddington}$ stabilisce quindi la luminosità massima di una stella e quanto massiccia possa essere. Infatti, se una stella presentasse una luminosità maggiore, i suoi strati verrebbero spazzati via portandola alla dissoluzione. Nella [46] si nota la dipendenza dalla Massa dell'astro e dall'opacità: questo implica che oggetti molto massivi presentano un valore limite più alto. Il limite teorico di massa per una stella era fissato a $150 M_{Sole}$, ma osservazioni successive hanno portato alla scoperta di stelle con masse tra le $170-230 M_{Sole}$ come nel caso di **R136a1**. L'altro parametro importante è l'opacità per scattering: nei processi di scattering H e He, avendo una sezione d'urto σ_T piccola, presentano un'opacità minore rispetto ai metalli, con conseguente aumento della $L_{Eddington}$. Infatti si ipotizza che le prime stelle dell'universo (dette di Popolazione 3) avendo metallicità (percentuale di metalli) nulla, potessero raggiungere masse superiori alle $230 M_{Sole}$, essendo composte solo da H ed He: unici elementi presenti nel cosmo primordiale.

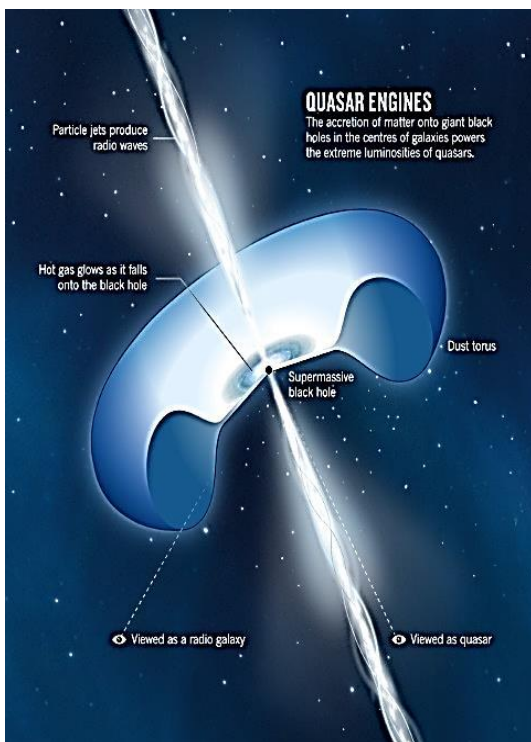


Fig.8: Rappresentazione di un Quasar con disco di accrescimento di gas e toroide [Fonte6]

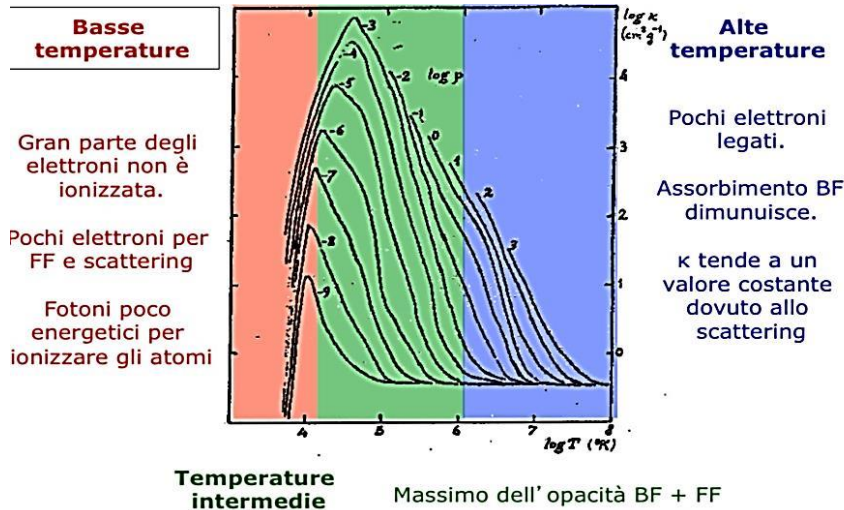
Il meccanismo di trasporto radiativo è presente anche nei Quasar. I quasar (QUASi-stellar radio source) sono nuclei galattici attivi (**Buchi Neri**) che presentano un disco di accrescimento come si osserva nella Figura8. Quando grandi quantità di materia (principalmente mezzo interstellare della galassia) cadono nel buco nero, queste sono sottoposte a regimi di compressione gravitazionale e attrito che le porta a riscaldarsi ed a emettere luce. I quasar sono stati osservati sempre in presenza di Buchi neri super massicci (con masse dalle $10^6 - 10^9 M_{Sole}$). Nel caso di quasar che raggiungono la $L_{Eddington}$, si osserva che il materiale smetterebbe di cadere nel Buco nero, con conseguente spegnimento del disco. Il Trasporto radiativo, infatti, risulterebbe talmente efficace da impedire al Buco Nero di "nutrirsi" e crescere.

BIBLIOGRAFIA

- [1] F.R. Ferraro, *Dispense del corso di "Astrofisica Stellare"*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, A.A. 2022-2023
- [2] B. W. Carroll, Dale A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, Pearson Education Limited, Second Edition 2014
- [3] D. Dallacasa, *Dispense del corso "Processi di radiazione e MHD"*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, A.A. 2022-2023
- [4] L. Ciotti, *Dispense del corso di "Astrofisica Extragalattica"*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, A.A. 2022-2023
- [5] C. Lardo, *Dispense del corso "Ottica Astronomica"*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, A.A. 2021-2022
- [6] Robert Antonucci, *Articolo di Nature* n. 495 pagine 165-167 (Marzo 2013)
- [7] L. Pasquini, *Dispense del corso "Struttura della Materia"*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, A.A. 2022-2023
- [8] F. Ravanini, *Dispense del corso "Istituzioni di Fisica Teorica"*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, A.A. 2022-2023
- [9] G. Pugliese, *Dispense del corso "Termodinamica"*, Politecnico di Bari, A.A. 2013-2014

Appendice

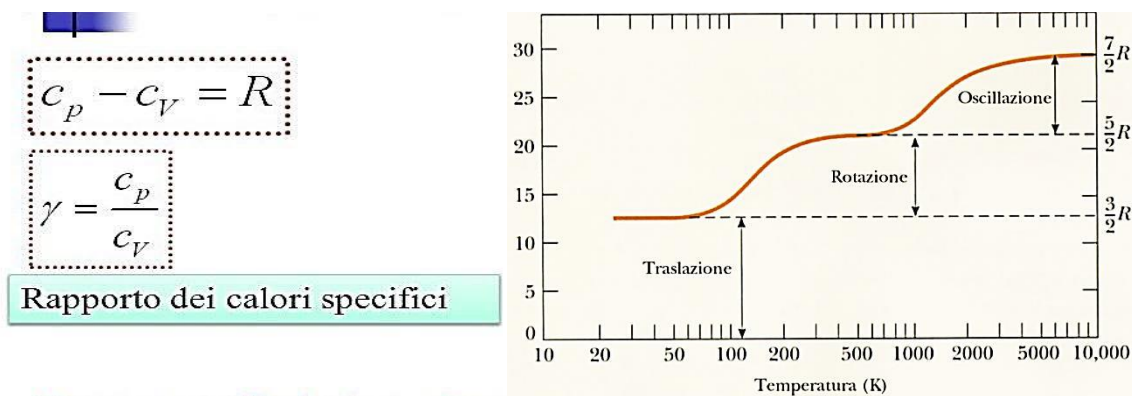
a) Come affrontato nel capitolo 1, l'opacità dipende da Temperatura e Densità. Il grafico sotto riportato mostra il suo andamento, in relazione ai logaritmi delle grandezze citate. L'opacità aumenta con la Densità; mentre rispetto alla Temperatura si individuano 3 zone:



Nella zona **Rossa** si ha un rapido aumento in $\log T \sim 4$, causato dalla ionizzazione del H e la prima del He; Zona **Verde** dominano i processi BF e FF, fino al picco causato dall'andamento di $k \propto T^{-3.5}$. Infine nella zona **Blu** c'è la tendenza al valore costante dovuto allo scattering.

Fig.9 Andamento del Logaritmo dell' Opacità (ordinate) in funzione dei Logaritmo Temperatura (ascisse) e di quello della Densità. [Fonte 1]

b) In Figura sono riportati i valori dei Calori Specifici a Volume e a Pressione costante per un gas monoatomico e il relativo valore di γ . Nel grafico si osserva come all'aumentare della Temperatura, C_v aumenti con conseguente diminuzione di γ .



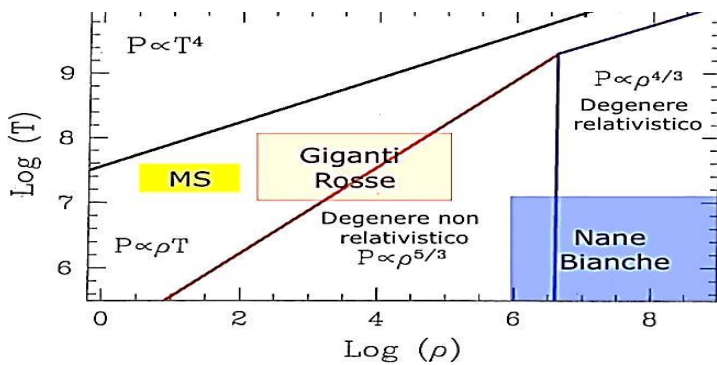
Per una gas ideale sia c_v che c_p dipende solo da T

■ Gas monoatomici $c_v = \frac{3}{2}R \Rightarrow c_p = \frac{5}{2}R \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + R}{c_v} = \frac{5}{3} = 1.6$

Fig. 10 Valori dei calori specifici di un gas monoatomico, calcolo di γ e grafico dell' andamento del valore di C_v (ordinate) in funzione della temperatura (ascisse) e relativi moti (Traslazione, Rotazione, Oscillazione).[Fonte 9]

c) Come accennato nel capitolo 3, il nucleo di una stella nel corso della sua esistenza subisce variazioni di Temperatura e Pressione. Queste variazioni influenzano fortemente lo stato della materia al suo interno e possono farle assumere nuove configurazioni, con diverse distribuzioni statistiche di energia. Un gas perfetto risponde alla distribuzione di Maxwell, mentre uno degenera a quella di Fermi-Dirac. Ciò che sostanzialmente

differenza le due, è il numero di stati quantistici di un livello di energia rispetto al numero di particelle che lo occupano.



11 Grafico $\text{Log } p - \text{Log } T$ che mostra le condizioni del gas in relazione ai log di Temperatura (ordinate) e di Densità (ascisse) con evidenziate le regioni di gas degenerare [Fonte1]

Per Maxwell si hanno molti più stati energetici rispetto al numero di particelle, quindi è poco probabile che più particelle occupino lo stesso livello. La distribuzione non risente del principio di esclusione di Pauli. Mentre per Fermi-Dirac, il maggior numero di particelle porta alcune ad occupare gli stati ad energia inferiore a quella di Fermi (E_F), costringendo le altre

ad assumere valori di energia più alta. In questa configurazione le particelle non possono perdere energia, in quanto gli stati meno energetici sono già occupati (non potendo violare il Principio di Pauli), quindi acquisiscono un LCM paragonabile a quello dei fotoni.

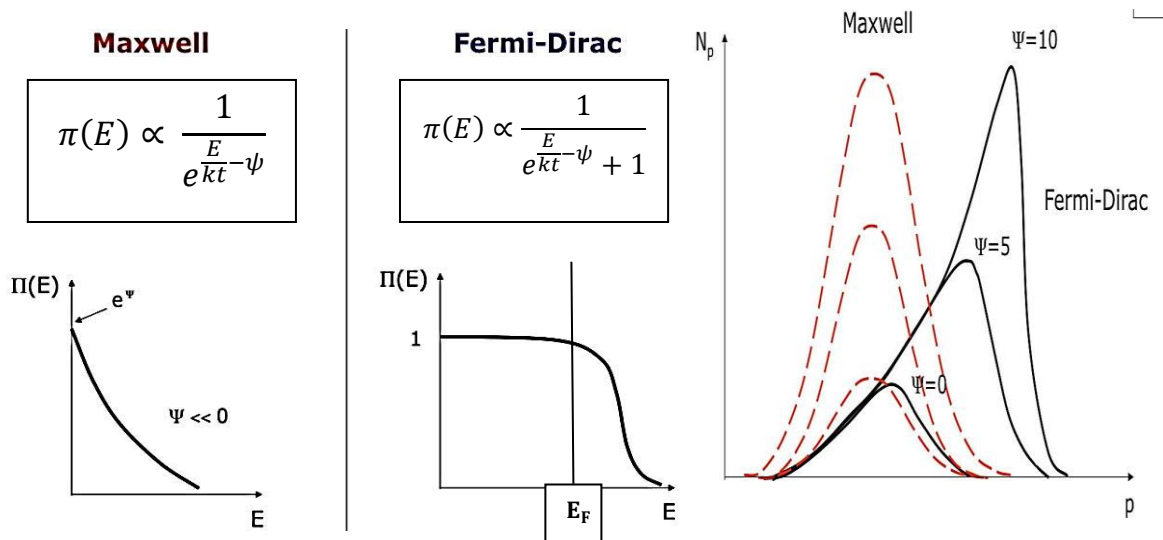


Fig12: A sinistra: Andamenti dell' Indice di Occupazione $\pi(E)$ (sulle ordinate) in funzione dell'energia (ascisse). A destra: Distribuzione statistiche di Maxwell e Femi-Dirac. Quantità di Moto (p) sulle ascisse e Numero particelle sulle ordinate [Fonte 1]

Entrambe le distribuzioni dipendono da un parametro di degenerazione ψ , che dipende dalla Temperatura e dalla Densità. Dal grafico della Fermi-Dirac si osserva come per le particelle che hanno energia inferiore a E_F l'occupazione è totale(100%). A destra si nota come, all'aumentare della temperatura, il picco della Maxwelliana si innalza (più particelle presenteranno quella p). Mentre per la Fermi-Dirac, all'aumentare del numero di particelle, ψ aumenta come anche i valori di p acquisiti dalle particelle stesse con conseguente innalzamento e spostamento verso destra della curva.

d) Un corpo nero è un oggetto ideale all'equilibrio termico che assorbe tutta la radiazione incidente senza rifletterla. Il suo spettro, noto come funzione di Planck, è univocamente dipendente dal valore della temperatura.

e) Le stelle sono oggetti in cui la condizione di equilibrio idrostatico è garantita sì, dalla pressione, ma da quella esercitata dal gas (P_{gas}) al suo interno. Infatti P_{gas} risulta tre ordini di grandezza maggiore della P_{Rad} , rendendola trascurabile. Questo non vale nei Quasar dove a dominare è proprio la P_{Rad} .