

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”
Corso di Laurea in Fisica

Teoria della Stabilità nei Sistemi Dinamici

Relatore:
Prof.ssa Simonetta Abenda

Presentata da:
Federico Gnudi

Anno Accademico 2023/2024

Sommario

Questa tesi si propone di esaminare la teoria della stabilità dei sistemi dinamici, con particolare attenzione alla stabilità dei punti di equilibrio. Inizialmente, vengono introdotti i concetti fondamentali dei sistemi dinamici e analizzate le condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità di un punto di equilibrio, attraverso l'uso dell'analisi lineare e della teoria di Lyapunov. Successivamente, la tesi esplora alcuni esempi concreti di sistemi dinamici, tra cui l'oscillatore armonico, il pendolo non lineare, il modello logistico e il modello Lotka-Volterra, per illustrare come la teoria della stabilità possa essere applicata a contesti diversi. Ogni esempio viene trattato in dettaglio, con particolare attenzione alla determinazione della stabilità dei punti di equilibrio e all'analisi del comportamento asintotico del sistema.

Indice

1. <u>Introduzione</u>	6
2. <u>Fondamenti per Sistemi Dinamici</u>	7
2.1 <u>Definizione di Sistema Dinamico</u>	7
2.2 <u>Spazio delle fasi</u>	8
2.3 <u>Punti di Equilibrio e Traiettorie</u>	8
2.4 <u>Stabilità di un Sistema Dinamico</u>	8
2.5 <u>Sistemi Dinamici in Fisica</u>	9
3. <u>Teoria della Stabilità</u>	11
3.1 <u>Definizione formale di Stabilità</u>	11
3.2 <u>Stabilità per Sistemi Lineari e Linearizzazione</u>	12
3.3 <u>Teoria di Lyapunov</u>	19
4. <u>Applicazioni della Teoria della Stabilità ai Sistemi Dinamici</u>	24
4.1 <u>Oscillatore Armonico</u>	24
4.2 <u>Pendolo Non Lineare</u>	26
4.3 <u>Modello Logistico</u>	30
4.4 <u>Modello di Lotka-Volterra di Predazione e Competizione</u>	31
5. <u>Conclusioni</u>	35
6. <u>Bibliografia</u>	36

Capitolo 1

Introduzione

I sistemi dinamici descrivono fenomeni che evolvono nel tempo, e sono utilizzati per modellare una vasta gamma di situazioni in diverse aree della scienza, dalla fisica alla biologia, dall'economia alla chimica. Questi sistemi possono essere lineari o non lineari, deterministici o stocastici, e la loro analisi permette di comprendere come le variabili coinvolte si comportano nel tempo in risposta a condizioni iniziali e a forze esterne.

Un aspetto fondamentale dello studio dei sistemi dinamici è l'analisi dei punti di equilibrio e la loro stabilità, ovvero come il sistema si comporta vicino a queste configurazioni invariate nel tempo. I punti di equilibrio sono soluzioni costanti delle equazioni che governano il sistema e, a seconda delle condizioni iniziali, il sistema può stabilizzarsi attorno a essi, oscillare, o divergere all'infinito.

In questa tesi ci proponiamo di esplorare i concetti di stabilità dei punti di equilibrio e le tecniche per determinare tale stabilità, applicando le conoscenze teoriche a sistemi classici della fisica e dell'ecologia. Studieremo sistemi lineari e non lineari, in particolare per quest'ultimi adotteremo 2 approcci principali:

1. L'analisi lineare tramite la matrice Jacobiana, che ci consente di studiare la stabilità locale vicino ai punti di equilibrio.
2. L'uso della teoria di Lyapunov, che offre un criterio più generale per determinare la stabilità, anche in presenza di comportamenti ciclici e non asintotici.

Capitolo 2

Fondamenti per Sistemi Dinamici

I sistemi dinamici sono modelli matematici che descrivono l'evoluzione nel tempo di uno stato fisico o di un insieme di variabili. Essi si fondano su equazioni che collegano le variazioni temporali di grandezze fisiche, come posizione, velocità, temperatura, densità, ecc. La teoria dei sistemi dinamici è un campo ampio che trova applicazioni in numerose aree della fisica, dalla meccanica classica alla termodinamica, dalla biologia alla teoria del caos. In questo capitolo, esploreremo le basi matematiche dei sistemi dinamici, concentrandoci in particolare sui concetti di punto di equilibrio e di stabilità.

2.1 Definizione di Sistema Dinamico

Un sistema dinamico può essere descritto come un insieme di leggi matematiche che regolano l'evoluzione temporale di uno o più parametri, detti variabili dinamiche, che rappresentano lo stato del sistema in ogni istante di tempo. La rappresentazione di un sistema dinamico è solitamente fornita da un insieme di equazioni differenziali ordinarie (ODE, Ordinary Differential Equations).

Un sistema dinamico continuo può essere descritto da equazioni del tipo:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t),$$

dove:

- $x(t)$ è il vettore delle variabili di stato che rappresentano il sistema ad un dato istante di tempo t .
- $f(x(t), t)$ è una funzione che dipende dallo stato attuale del sistema e, in alcuni casi, esplicitamente dal tempo.

Se la funzione f non dipende esplicitamente dal tempo, il sistema è detto autonomo, e il comportamento del sistema dipende solo dallo stato attuale del sistema stesso.

2.2 Spazio delle Fasi

Per analizzare il comportamento di un sistema dinamico, è utile passare a una rappresentazione geometrica delle sue soluzioni. Lo spazio delle fasi è uno strumento fondamentale in questo contesto. Esso è un insieme astratto di tutte le possibili configurazioni del sistema, dove ogni punto nello spazio rappresenta uno possibile stato del sistema. Nel caso di un sistema dinamico descritto da un vettore di variabili $\boldsymbol{x}(t)$, lo spazio delle fasi è un sottospazio euclideo con la stessa dimensione del numero di variabili dinamiche \boldsymbol{x} . Ogni punto dello spazio delle fasi corrisponde ad una particolare configurazione del sistema, e l'evoluzione nel tempo corrisponde ad una traiettoria nello spazio delle fasi.

2.3 Punti di Equilibrio e Traiettorie

Nel contesto di un sistema dinamico, due concetti fondamentali sono quelli di punto di equilibrio e traiettoria:

1. **Punti di Equilibrio:** Un punto di equilibrio \boldsymbol{x}_e è uno stato in cui, se il sistema è in quel punto, rimarrà lì senza evolversi. Matematicamente, si ha un punto di equilibrio quando la velocità di variazione delle variabili di stato è nulla:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_e) = 0.$$

In altre parole, il punto di equilibrio è una soluzione delle equazioni differenziali che determina lo stato in cui il sistema è statico.

2. **Traiettorie:** Le traiettorie del sistema descrivono come lo stato del sistema evolve nel tempo, partendo da un dato stato iniziale. Per ogni punto iniziale $\boldsymbol{x}(0)$, esiste una traiettoria unica che mostra come le variabili cambiano nel tempo. Le traiettorie possono essere studiate per analizzare come il sistema risponde a piccole perturbazioni rispetto ai punti di equilibrio.

2.4 Stabilità di un Sistema Dinamico

Il concetto di stabilità è cruciale per comprendere come un sistema si comporta nel tempo. In generale, si dice che un sistema sia stabile se, partendo da uno stato vicino a

un punto di equilibrio, il sistema rimane vicino a quel punto, anche se soggetto a piccole perturbazioni. La stabilità può essere classificata in vari tipi:

1. **Stabilità Asintotica:** Un punto di equilibrio x_e è stabile asintoticamente se, partendo da un punto iniziale vicino a x_e , la traiettoria del sistema tende a x_e quando il tempo tende all'infinito. In altre parole, il sistema ritorna al punto di equilibrio nel lungo periodo.
2. **Stabilità di Lyapunov:** Un punto di equilibrio è stabile secondo Lyapunov se, dato un piccolo spostamento iniziale, la traiettoria del sistema rimane dentro una certa regione attorno a x_e , ma non necessariamente tende a x_e . La stabilità di Lyapunov implica che il sistema non si allontani troppo dal punto di equilibrio, anche se non è richiesto che il sistema vi ritorni.
3. **Instabilità:** Un punto di equilibrio è instabile se anche una piccola perturbazione porta il sistema lontano dal punto di equilibrio. In altre parole, il sistema diverge, e la traiettoria si allontana in modo significativo dal punto di equilibrio.

2.5 Sistemi Dinamici in Fisica

I concetti di stabilità e dinamica sono alla base di molti fenomeni fisici. Alcuni esempi tipici includono:

1. **Oscillatori Armonici:** Il comportamento di un sistema massa-molla è descritto da un sistema dinamico lineare, dove il punto di equilibrio corrisponde alla posizione di riposo della molla. L'analisi della stabilità di questo sistema consente di prevedere la risposta del sistema alle perturbazioni.
2. **Pendolo Semplice:** Un esempio classico di sistema non lineare è il pendolo, dove la stabilità dipende dal suo angolo di deflessione rispetto alla posizione verticale. Il comportamento di questo sistema può essere descritto tramite equazioni differenziali non lineari, e la stabilità del punto di equilibrio può essere studiata tramite tecniche di linearizzazione.
3. **Sistemi di Particelle Interagenti:** Sistemi più complessi, come i gas o i fluidi, possono essere modellati come sistemi dinamici in cui le particelle interagiscono secondo leggi di forza non lineari. La stabilità di questi sistemi è più difficile da

analizzare, ma gli stessi concetti di stabilità locale e globale si applicano anche in questi contesti.

Capitolo 3

Teoria della Stabilità

La teoria della stabilità studia il comportamento di un sistema dinamico vicino ai suoi punti di equilibrio, con particolare attenzione alla risposta del sistema a piccole perturbazioni. In questo capitolo viene analizzata la stabilità dei punti di equilibrio per un sistema autonomo del tipo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

3.1 Definizione formale di stabilità

Consideriamo un sistema dinamico autonomo descritto dalle equazioni:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

dove $\mathbf{x}(t) \in \mathfrak{R}^n$ è il vettore delle variabili di stato del sistema ed $\mathbf{f}: \Omega \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ che è considerata una funzione di classe $C^1(\Omega, \mathfrak{R}^n)$. Dato $\mathbf{y} \in \Omega$ definiamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{y} \end{cases}$$

Tale problema secondo il Teorema di Esistenza e Unicità avrà una soluzione (traiettoria) unica, che indichiamo come $\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y}) \in \Omega$. Indichiamo l'intervallo di esistenza di tale soluzione come $I(\mathbf{y}) = (\tau_-(\mathbf{y}), \tau_+(\mathbf{y}))$, con $-\infty \leq \tau_-(\mathbf{y}) < 0 < \tau_+(\mathbf{y}) \leq \infty$. Cominciamo a studiare la stabilità dei punti di equilibrio in modo più dettagliato.

Definizione 3.1.1 Un punto $\mathbf{a} \in \Omega$ si dice di equilibrio per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ se $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = 0$. Indichiamo l'insieme dei punti di equilibrio come:

$$C_f := \{\mathbf{a} \in \Omega: \mathbf{f}(\mathbf{a}) = 0\}$$

Se $C_f \neq \emptyset$ e $\mathbf{a} \in C_f$, allora si ha $\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$, per ogni t reale.

Notazione: $B_r(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n: |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r\}$ indica la palla di raggio $r > 0$ centrata in $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^n$. Ricordiamo che $|\mathbf{x}|$ è la norma euclidea in \mathfrak{R}^n , dunque $|\mathbf{x}| = \sum x_i^2$.

Definizione 3.1.2 Un punto $\mathbf{a} \in C_f$ di equilibrio per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ si dice stabile (o stabile secondo Lyapunov) se esiste $r > 0$ tale che:

1. $B_r(\mathbf{a}) \subset \Omega$;
2. per ogni $0 < r' < r$ esiste $0 < r'' \leq r'$ tale che, per ogni $\mathbf{y} \in B_{r''}(\mathbf{a})$, si ha $\tau_+(\mathbf{y}) = +\infty$ e $\phi^t(\mathbf{y}) \in B_{r'}(\mathbf{a})$, per ogni $t \geq 0$.

Dunque se si prendono dati iniziali \mathbf{y} sufficientemente vicini ad \mathbf{a} la soluzione $\phi^t(\mathbf{y})$ evolve rimanendo vicina al punto di equilibrio \mathbf{a} per ogni $t \geq 0$.

Si dirà che $\mathbf{a} \in C_f$ è instabile se non è stabile.

Introduciamo ora il concetto di stabilità asintotica, in cui è richiesto che la soluzione del sistema tenda ad \mathbf{a} per $t \rightarrow \infty$.

Definizione 3.1.3 Un punto $\mathbf{a} \in C_f$ di equilibrio per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ si dice asintoticamente stabile se è stabile e si ha:

$$\forall \mathbf{y} \in B_{r''}(\mathbf{a}), \phi^t(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{a}, \text{ per } t \rightarrow \infty.$$

3.2 Stabilità per sistemi lineari e linearizzazione

Un metodo comune per analizzare la stabilità di un sistema non lineare consiste nella linearizzazione del sistema attorno al punto di equilibrio.

Supponiamo che il sistema sia descritto dall'equazione differenziale:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

dove $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ sono definiti come nel paragrafo [3.1](#). Se \mathbf{a} è un punto di equilibrio, allora $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = 0$. Per analizzare il comportamento del sistema vicino ad \mathbf{a} , si espande \mathbf{f} in serie di Taylor intorno ad \mathbf{a} e, trascurando i termini non lineari, si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t),$$

dove $A = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}$ è la matrice Jacobiana del sistema valutata in $\mathbf{x} = \mathbf{a}$.

Così abbiamo ottenuto un sistema lineare autonomo del tipo $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, descritto dalla matrice A . Se la matrice A è invertibile allora il sistema presenta un unico punto di

equilibrio in $\mathbf{x} = 0$. La stabilità del punto di equilibrio dipende dagli autovalori λ_i della matrice A , secondo il seguente teorema.

Teorema 3.2.1 Supponiamo che A sia una matrice invertibile $n \times n$ per $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$.

1. Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa, allora il punto di equilibrio $\mathbf{x} = 0$ è asintoticamente stabile. Inoltre $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ si ha $\phi^t(\mathbf{p}) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$.
2. Se almeno un autovalore di A ha parte reale positiva, allora il punto $\mathbf{x} = 0$ è instabile e la soluzione diverge per $t \rightarrow \infty$.

Verifichiamo i risultati di questo teorema nel caso di un sistema 2×2 , $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

dove i coefficienti a_{ij} sono reali.

Come detto, se la matrice A è non singolare, l'unico punto di equilibrio del sistema $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ è $(x, y) = (0, 0)$. Per studiare la stabilità di questo sistema utilizziamo la forma normale di Jordan della matrice A , ovvero una matrice J non singolare tale che esiste una matrice invertibile B per cui $A = B^{-1}JB$. Tali matrici J e B esistono sempre per una matrice A invertibile e la matrice di Jordan J ha i medesimi autovalori λ_1 e λ_2 della matrice A .

Vediamo che forme può avere la matrice J 2×2 :

- I. Se λ_1 e λ_2 sono reali e distinti:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

- II. Se $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$ è reale, distinguiamo i casi:

- a. λ ha molteplicità geometrica 2:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix};$$

- b. λ ha molteplicità geometrica 1:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- III. Se λ_1 e λ_2 sono complessi coniugati, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, si può mostrare:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Lemma 3.2.2 Eseguendo il cambio di variabile $\mathbf{z} = B\mathbf{u}$ le soluzioni $\mathbf{u}(t)$ del problema $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ si trasformano nelle soluzioni $\mathbf{z}(t)$ del problema $\mathbf{z}' = J\mathbf{z}$.

Il punto $(0,0)$ è stabile per $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ se e solo se lo è anche per $\mathbf{z}' = J\mathbf{z}$.

Dimostrazione. $\mathbf{z}' = B\mathbf{u}' = BA\mathbf{u} = JB\mathbf{u} = J\mathbf{z}$, dunque $\mathbf{z}' = J\mathbf{z}$. Quindi il cambio di variabile B trasforma una curva $\mathbf{u}(t) = (x(t), y(t))$ soluzione di $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ nel piano (x, y) in una curva $\mathbf{z}(t) = (z_1(t), z_2(t))$ soluzione di $\mathbf{z}' = J\mathbf{z}$ nel piano (z_1, z_2) . Le caratteristiche qualitative delle soluzioni non vengono cambiate dalla trasformazione, in particolare $(x(t), y(t)) \rightarrow (0,0)$ per $t \rightarrow \infty$ se e solo se fa lo stesso anche $(z_1(t), z_2(t))$. Per studiare la stabilità dell'origine per $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ possiamo quindi affidarci al problema $\mathbf{z}' = J\mathbf{z}$. ■

Studiamo ora come si comporta la soluzione del sistema $\mathbf{u}' = J\mathbf{u}$ nei casi I II e III evidenziati prima.

Nel caso I di 2 autovalori λ_1 e λ_2 reali e distinti il sistema si può scrivere:

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x \\ y' = \lambda_2 y \end{cases}$$

Le soluzioni sono date da $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ e $y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$, dove $c_1 = x(0)$ e $c_2 = y(0)$ sono reali. Notiamo subito che le soluzioni $x(t)$ e $y(t)$ divergono rispettivamente per $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ e dunque è verificato che, per autovalori di A λ_1 e λ_2 reali e negativi, l'origine $(0,0)$ è un punto di equilibrio stabile, mentre se almeno uno di essi è positivo il punto è instabile.

Possiamo riscrivere la soluzione nella forma $y(x)$. Per $c_1 \neq 0$ (se $c_1 = 0$ allora $x(t) \equiv 0$) possiamo ribaltare la soluzione $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ esplicitando t , per poi sostituirlo all'interno di $y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$ ed ottenere:

$$y(x) = \frac{c_2}{c_1} x^{\lambda_2/\lambda_1}, \text{ dove } c'_1 = c_1^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

Il comportamento di tale funzione dipende dai segni degli autovalori e dal loro rapporto. Per $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ siamo nel caso descritto in Figura 3.1a, mentre per $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ siamo nel caso in Figura 3.1b. In entrambi i casi l'origine è asintoticamente stabile e viene

chiamata nodo stabile. Se invece λ_1 e λ_2 sono positivi abbiamo un nodo instabile (vedi Figure [3.2a](#) e [3.2b](#)). Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ la funzione $y(x)$ è una iperbole, l'origine è instabile e viene chiamato punto sella (vedi Figura [3.3](#)).

Prendiamo ora in considerazione il caso II in cui $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$ è reale. Se siamo nel caso II.a otteniamo un sistema analogo al precedente ma con esponente unico λ , per cui le soluzioni possono essere scritte come $x(t) = c_1 e^{\lambda t}$ e $y(t) = c_2 e^{\lambda t}$. Il punto $(0,0)$ è asintoticamente stabile se $\lambda < 0$, altrimenti è instabile. Grafici mostrati nelle Figure [3.4a](#) e [3.4b](#).

Se invece siamo nel caso II.b, il sistema assume la forma:

$$\begin{cases} x' = \lambda x + y \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

La soluzione della seconda equazione porta a $y(t) = c_2 e^{\lambda t}$. Sostituendo $y(t)$ nella prima si ottiene $x' = \lambda x + c_2 e^{\lambda t}$, che porta alla soluzione finale $x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}$. Come nel caso precedente il punto $(0,0)$ è asintoticamente stabile per $\lambda < 0$ e instabile altrimenti. Come per il caso I possiamo ricavare la curva $x(y)$. Quindi per $c_2 \neq 0$ possiamo ribaltare la soluzione $y(t) = c_2 e^{\lambda t}$ esplicitando t , per poi sostituirlo all'interno di $x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}$ ed ottenere (vedi Figure [3.5a](#) e [3.5b](#)):

$$x(y) = \left(c_1 + c_2 \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{y}{c_2} \right) \right) \frac{y}{c_2}.$$

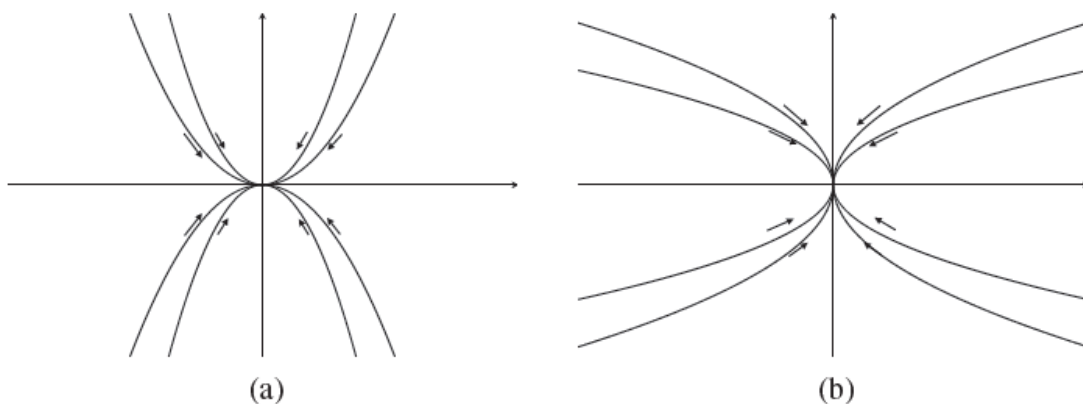


Figura 3.1. Nodi stabili. (a) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$; (b) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ [1]

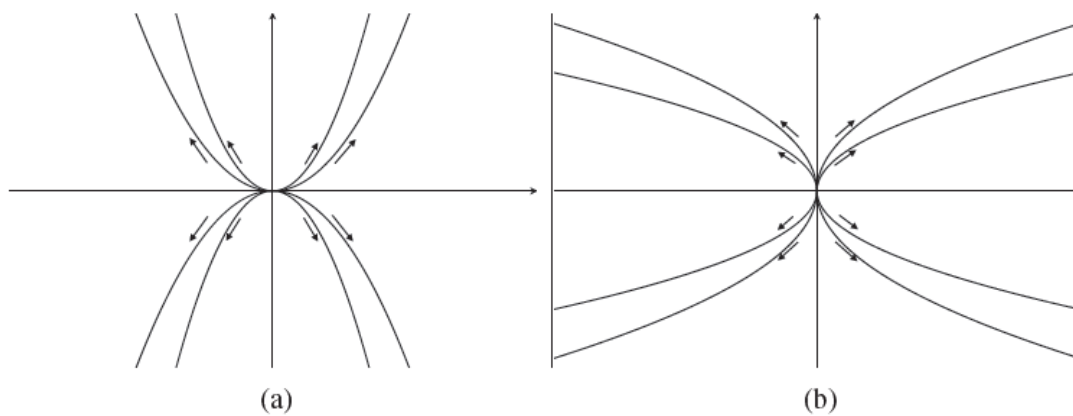


Figura 3.2. Nodi instabili. (a) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$; (b) $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ [1]

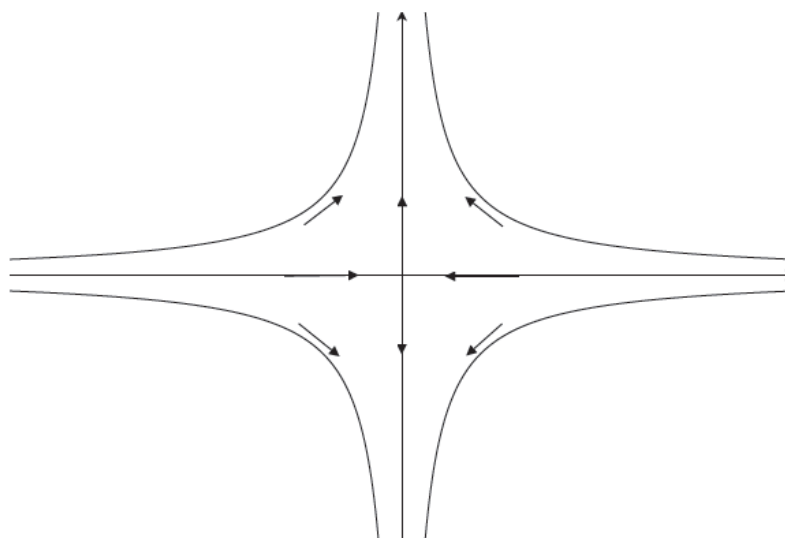


Figura 3.3. Punto sella. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ [1]

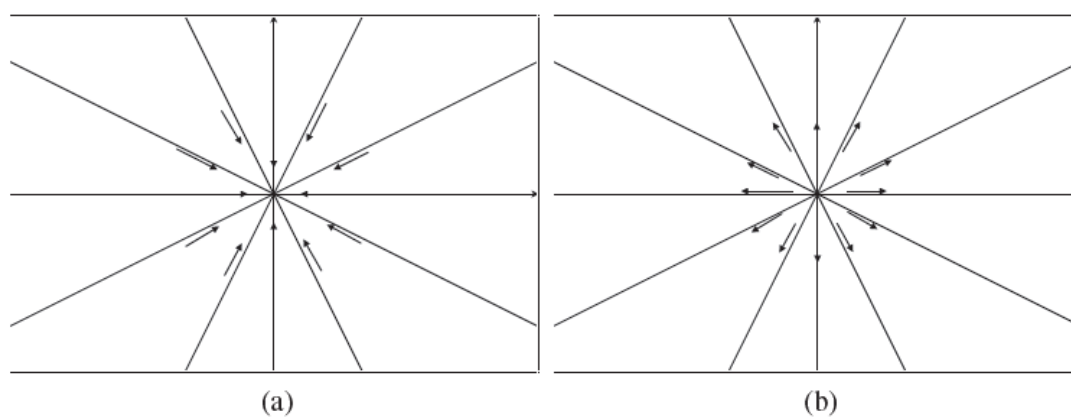


Figura 3.4. Caso II.a. (a) Nodo stabile, $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$;

(b) Nodo instabile, $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ [1]

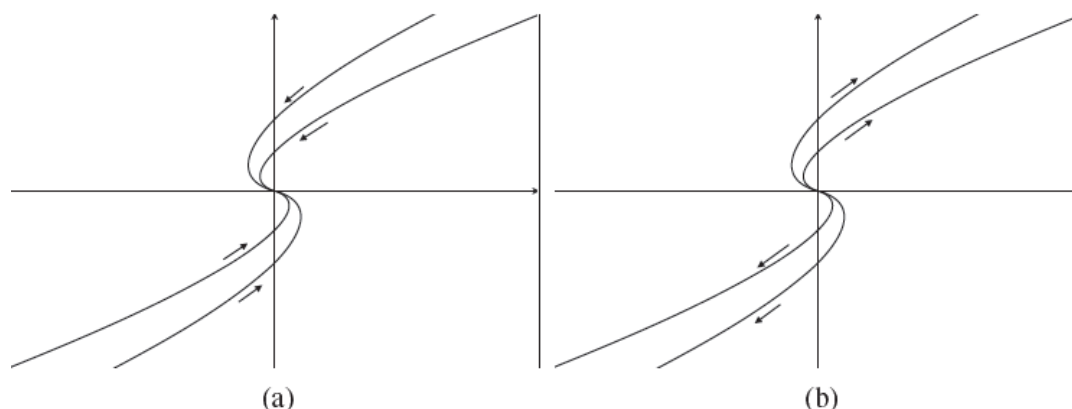


Figura 3.5. Caso II.b. (a) Nodo stabile, $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$;
 (b) Nodo instabile, $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ [1]

A questo punto rimane da analizzare il caso III per cui i 2 autovalori sono complessi coniugati, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Il sistema diventa:

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y \\ y' = \beta x + \alpha y \end{cases}$$

Possiamo passare ad un sistema di coordinate polari, per cui $x(t) = r(t) \cos(\theta(t))$ e $y(t) = r(t) \sin(\theta(t))$. Riscriviamo il sistema come:

$$\begin{cases} r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta = \alpha r \cos \theta - \beta r \sin \theta \\ r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta = \beta r \cos \theta + \alpha r \sin \theta \end{cases}$$

Ora, sommando la prima equazione moltiplicata per $\cos \theta$ alla seconda moltiplicata per $\sin \theta$, si ottiene l'equazione $r' = \alpha r$.

In modo analogo, se sottraiamo dalla seconda equazione moltiplicata per $\cos \theta$ la prima moltiplicata per $\sin \theta$ otteniamo $\theta' = \beta$. Il sistema può essere riscritto come:

$$\begin{cases} r' = \alpha r \\ \theta' = \beta \end{cases}$$

che ha soluzioni $r(t) = c_1 e^{\alpha t}$ e $\theta(t) = \beta t + c_2$. Ritornando alle variabili x e y :

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t + c_2), \quad y(t) = c_1 e^{\alpha t} \sin(\beta t + c_2).$$

Dunque notiamo che la stabilità dell'origine dipende solo dalla parte reale α , ovvero il punto $(0,0)$ è asintoticamente stabile se la parte reale α di entrambi gli autovalori $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ è negativa, mentre, se $\alpha > 0$, $(0,0)$ è instabile.

Se $\alpha \neq 0$, il punto di equilibrio si chiama fuoco e le curve che otteniamo sul piano (x, y) sono spirali, vedi Figure 3.6a e 3.6b.

Se invece $\alpha = 0$, abbiamo che $r(t)$ è costante e perciò le curve che otteniamo sono circonferenze di raggio $r = c_1$, centrate nell'origine, vedi Figura 3.7.

Quindi per $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$ il punto $(0,0)$ viene detto centro ed è stabile ma non asintoticamente stabile.

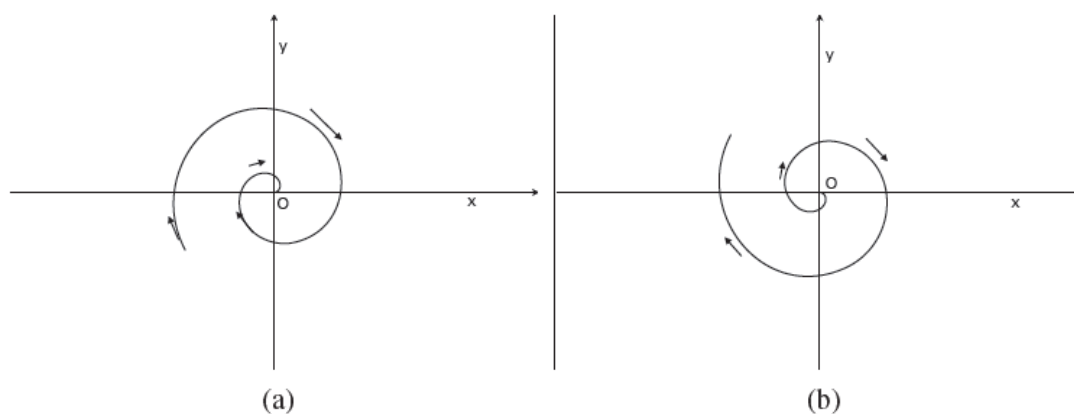


Figura 3.6. Caso III, con $\alpha \neq 0$. (a) $\alpha < 0$, fuoco stabile;

(b) $\alpha > 0$, fuoco instabile [1]

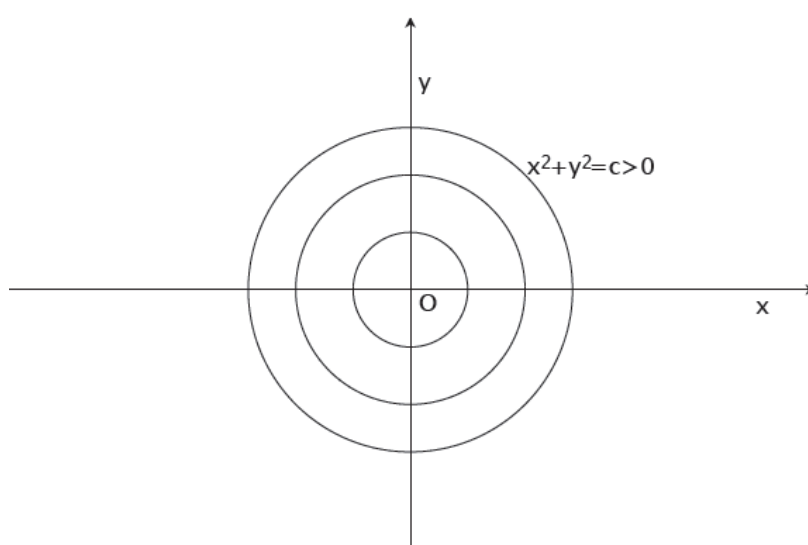


Figura 3.7. Caso III, con $\alpha = 0$ [1]

Abbiamo quindi verificato con successo i risultati del teorema 3.2.1 per il caso bidimensionale. I risultati del teorema sono validi in generale per sistemi $n \times n$, però in questa trattazione non li verificheremo.

3.3 Teoria di Lyapunov

La Teoria di Lyapunov fornisce un criterio per determinare la stabilità asintotica di un punto di equilibrio senza ricorrere alla linearizzazione. Il teorema si basa sull'esistenza di una funzione scalare, la funzione di Lyapunov, che misura "l'energia" del sistema. Consideriamo il problema di Cauchy introdotto nel paragrafo 3.1.

Definizione 3.3.1 Dato il sistema autonomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{f}: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ed un suo punto di equilibrio $\mathbf{a} \in C_f$, diremo che una funzione $V \in C^1(U, \mathbb{R})$, dove $U \subset \Omega$ è un aperto contenente \mathbf{a} , è una funzione di Lyapunov per \mathbf{f} (e relativamente ad \mathbf{a}) se:

1. $V(\mathbf{a}) = 0$ e $V(\mathbf{x}) > 0$, per ogni $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{a}\}$;
2. $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \langle \nabla V(\mathbf{x}) | \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle \leq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in U$.

Diremo invece che V è una funzione di Lyapunov forte se vale 1 e:

3. $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \langle \nabla V(\mathbf{x}) | \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle < 0$ per ogni $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{a}\}$.

Notazione: $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$ denota il prodotto scalare euclideo tra i vettori \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Teorema 3.3.2 Dato $\mathbf{a} \in C_f$ punto di equilibrio per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

- i. Se esiste una funzione di Lyapunov per \mathbf{f} relativamente ad \mathbf{a} , allora \mathbf{a} è stabile.
- ii. Se esiste una funzione di Lyapunov forte per \mathbf{f} relativamente ad \mathbf{a} , allora \mathbf{a} è asintoticamente stabile.

Dimostrazione. Partiamo dal dimostrare i. Consideriamo una funzione di Lyapunov $V \in C^1(U, \mathbb{R})$ per \mathbf{f} , con $\mathbf{a} \in U \subset \Omega$. Secondo la definizione 3.1.2, dobbiamo dimostrare che, prendendo in modo arbitrario $r' > 0$, in modo che $\overline{B_{r'}(\mathbf{a})} \subset U$, e fissato $0 < r'' < r'$ si ha che, per ogni $\mathbf{y} \in B_{r''}(\mathbf{a})$, $\tau_+(\mathbf{y}) = +\infty$ e la soluzione al problema di Cauchy $\phi^t(\mathbf{y}) \in B_{r'}(\mathbf{a})$ per ogni $t \geq 0$.

A tale scopo definiamo $m := \min_{\partial B_{r'}(\mathbf{a})} V$, dove indichiamo con $\partial B_{r'}(\mathbf{a})$ la frontiera di $B_{r'}(\mathbf{a})$. Tale minimo per la proprietà 1 di una funzione di Lyapunov sarà positivo.

Fissiamo ora r'' in modo che $V(\mathbf{x}) < m$, per ogni $\mathbf{x} \in \overline{B_{r''}(\mathbf{a})}$. A questo punto consideriamo l'intervallo non vuoto:

$$E = \{t > 0: \boldsymbol{\phi}^s(\mathbf{y}) \in B_{r'}(\mathbf{a}), \forall s \in [0, t[\}.$$

Definiamo T come estremo superiore di tale insieme. Dobbiamo provare che $T = +\infty$.

Per la proprietà 2 per V :

$$\frac{dV(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y}))}{dt} = \langle \nabla V(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y})) | \mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y})) \rangle \leq 0, \forall t \in [0, T[.$$

Dunque la funzione V è decrescente nel tempo, infatti per le ipotesi fatte:

$$V(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y})) \leq V(\mathbf{y}) < m, \forall t \in [0, T[.$$

Supponiamo per assurdo $T < \infty$. Se prendiamo una qualsiasi successione $0 < t_\gamma \nearrow T$, con $t_\gamma \in E$, dato che $\boldsymbol{\phi}^{t_\gamma}(\mathbf{y}) \in \overline{B_{r'}(\mathbf{a})}$ per ogni γ , per una sottosuccessione $\boldsymbol{\phi}^{t_\gamma}(\mathbf{y})$ avremo che:

$$\boldsymbol{\phi}^{t_\gamma}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{z} \text{ per } \gamma \rightarrow \infty,$$

per un certo $\mathbf{z} \in \overline{B_{r'}(\mathbf{a})}$. Tuttavia, poiché $T = \sup E$, \mathbf{z} deve necessariamente appartenere alla frontiera $\partial B_{r'}(\mathbf{a})$. Dunque otteniamo:

$$V(\boldsymbol{\phi}^{t_\gamma}(\mathbf{y})) \rightarrow V(\mathbf{y}) \geq m, \text{ per } \gamma \rightarrow \infty,$$

e questo porta evidentemente ad una contraddizione, quindi i è provata.

Occupiamoci ora del caso ii di una funzione di Lyapunov forte.

Per dimostrare il secondo caso ii dobbiamo provare che $\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{a}$ per $t \rightarrow \infty$, per ogni \mathbf{y} , con $\mathbf{a} \neq \mathbf{y} \in B_{r''}(\mathbf{a})$. Per la proprietà 3 della Definizione 3.3.1, abbiamo che $V(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y}))$ è strettamente decrescente con t .

Il nostro obiettivo è provare che $V(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y})) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$, poiché se consideriamo una qualsiasi successione $t_\gamma \rightarrow \infty$ tale che $\boldsymbol{\phi}^{t_\gamma}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{z}$, con $\mathbf{z} \in \overline{B_{r'}(\mathbf{a})}$, avremo quindi $V(\mathbf{z}) = 0$, e perciò si avrà necessariamente $\mathbf{z} = \mathbf{a}$ per la proprietà 1 di V .

Supponiamo per assurdo che $V(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y})) \rightarrow k > 0$ per $t \rightarrow \infty$. In questo caso si avrebbe che per un certo $t_k > 0$ e per tutti i $t \geq t_k$:

$$\frac{k}{2} \leq V(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y})) \leq \frac{3}{2}k.$$

Quindi $\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y}) \in V^{-1}([\frac{k}{2}, \frac{3}{2}k]) \cap \overline{B_r(\mathbf{a})}$, per $t \geq t_k$. Tale insieme è un compatto disgiunto da \mathbf{a} (perché il primo insieme non può contenere \mathbf{a}), dunque esisterà un numero positivo C per cui, per la proprietà di stretta decrescita di V , possiamo scrivere:

$$\frac{dV(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y}))}{dt} = \langle \nabla V(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y})) | \mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y})) \rangle \leq -C, \quad \forall t \geq t_k.$$

A questo punto se scriviamo:

$$\begin{aligned} 0 < V(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y})) &= V(\boldsymbol{\phi}^{t_k}(\mathbf{y})) + \int_{t_k}^t \frac{dV(\boldsymbol{\phi}^s(\mathbf{y}))}{ds} ds \leq \\ &\leq V(\boldsymbol{\phi}^{t_k}(\mathbf{y})) - C(t - t_k), \quad \forall t \geq t_k \end{aligned}$$

otteniamo un risultato in contraddizione con la tesi che $V(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y}))$ converga ad un valore positivo k . Questo conclude la prova del punto ii e la dimostrazione del teorema. ■

In pratica, la funzione di Lyapunov $V(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y}))$ fornisce un "potenziale" che varia lungo le traiettorie $\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y})$ del sistema. Se la funzione $V(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y}))$ diminuisce nel tempo, il sistema tende a stabilizzarsi, rimanendo confinato per tutti i tempi $t \geq 0$.

Nota. Se $\dot{V}(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y})) = 0$ per ogni $t \geq 0$, allora $V(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y}))$ è costante nel tempo e quindi abbiamo $V(\boldsymbol{\phi}^0(\mathbf{y})) = V(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y})) = V(\mathbf{y}) \forall t \geq 0$. Dunque sicuramente $V(\mathbf{y})$ non può tendere a 0 per $t \rightarrow \infty$ e perciò $\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y})$ non può tendere ad \mathbf{a} per $t \rightarrow \infty$. In questo caso il punto di equilibrio \mathbf{a} è stabile ma non asintoticamente stabile.

La funzione di Lyapunov può anche essere utilizzata per stabilire se un punto di equilibrio è instabile. A tal proposito introduciamo il teorema:

Teorema 3.3.3. Dato \mathbf{a} punto di equilibrio per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, supponiamo l'esistenza di una funzione $h \in C^1(U, \mathbb{R})$, con $U \subset \Omega$ aperto contenente \mathbf{a} , tale che:

- i. $h(\mathbf{a}) = 0$ e $h(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{a}\}$;
- ii. $\frac{dh}{dt} = \langle \nabla h(\mathbf{x}) | \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle > 0, \forall \mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{a}\}$.

Allora sappiamo che \mathbf{a} è instabile.

Dimostrazione. Procedendo per assurdo, consideriamo che \mathbf{a} sia stabile. Dunque per la definizione 3.1.2 assumiamo che esista $r > 0$, con $B_r(\mathbf{a}) \subset U$, tale che, per ogni $0 < r' < r$, esiste $0 < r'' \leq r'$ per cui $\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y}) \in B_{r'}(\mathbf{a})$, per ogni $t \geq 0$ e $\mathbf{y} \in B_{r''}(\mathbf{a})$. Prendiamo $\mathbf{y} \in B_{r''}(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\}$, per cui possiamo scrivere:

$$\frac{dh(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y}))}{dt} = \langle \nabla h(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y})) | \mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y})) \rangle > 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Quindi $h(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y})) > 0$ è strettamente crescente per l'ipotesi ii del teorema. Abbiamo che $\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y}) \in h^{-1}([h(\mathbf{y}), +\infty]) \cap \overline{B_{r'}(\mathbf{a})}$ compatto, perciò esisterà un numero positivo C tale che:

$$\frac{dh(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y}))}{dt} = \langle \nabla h(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y})) | \mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y})) \rangle \geq C, \quad \forall t \geq 0.$$

A questo punto, in modo simile alla precedente dimostrazione, scriviamo:

$$h(\boldsymbol{\phi}^t(\mathbf{y})) = h(\boldsymbol{\phi}^0(\mathbf{y})) + \int_0^t \frac{dh(\boldsymbol{\phi}^s(\mathbf{y}))}{ds} ds \geq h(\boldsymbol{\phi}^0(\mathbf{y})) + Ct, \quad \forall t \geq 0,$$

che ci porta ad una incongruenza con l'ipotesi per cui \mathbf{a} sia stabile. ■

Ora possiamo enunciare il seguente teorema generale, di cui però non forniamo la dimostrazione, per maggiori dettagli vedi [2].

Teorema 3.3.4. Consideriamo il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{f} \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, e sia $\mathbf{a} \in C_f$ un punto di equilibrio del sistema in considerazione.

Definiamo $A := \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}$ matrice jacobiana di \mathbf{f} calcolata per $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ e sia p_A il polinomio caratteristico della matrice A .

Allora valgono i seguenti enunciati:

- i. Se \mathbf{a} è stabile per $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, allora le radici λ del polinomio caratteristico p_A della matrice A devono avere tutte parte reale non positiva.
- ii. Se p_A ha radici con parte reale negativa, allora il punto \mathbf{a} è asintoticamente stabile per $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Dunque la stabilità del punto \mathbf{a} per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ viene accoppiata alla stabilità dell'origine per il sistema lineare $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Infatti se p_A ha radici con parte reale

negativa, per quanto visto nel teorema 3.2.1, per matrici invertibili, l'origine è un punto asintoticamente stabile per il sistema lineare $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, e questo per il precedente teorema assicura che anche \mathbf{a} sia asintoticamente stabile per il sistema di partenza.

Ricordiamo che le radici del polinomio caratteristico corrispondono agli autovalori della matrice A .

Capitolo 4

Applicazioni della Teoria della Stabilità ai Sistemi Dinamici

In questo capitolo, esploreremo alcuni esempi concreti di sistemi dinamici, focalizzandoci sull'analisi della stabilità dei punti di equilibrio in vari contesti fisici. Gli esempi selezionati spaziano dai sistemi meccanici a quelli ecologici, mostrando come i principi teorici della stabilità si applicano in situazioni reali. In ogni esempio, analizzeremo i punti di equilibrio del sistema e ne studieremo la stabilità utilizzando i metodi discussi nel capitolo precedente.

4.1 Oscillatore Armonico

Uno dei sistemi dinamici più semplici e fondamentali in fisica è l'oscillatore armonico. Questo sistema descrive il moto di una massa appesa a una molla, ed è una buona approssimazione per numerosi fenomeni fisici, come il moto di un pendolo in piccole oscillazioni o il comportamento di molecole in un solido cristallino.

4.1.1 Equazioni del Moto

L'oscillatore armonico (1-D) è descritto dall'equazione differenziale del secondo ordine:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

dove:

- m è la massa dell'oggetto;
- k è la costante elastica della molla;
- x corrisponde allo spostamento dell'oggetto rispetto alla posizione di equilibrio.

In forma equivalente, possiamo scrivere questa equazione come un sistema di equazioni del primo ordine, introducendo la variabile velocità $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{k}{m}x \end{cases}$$

Tale sistema può essere riscritto in forma matriciale, con $\mathbf{u} = (x, v)$, come:

$$\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}, \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque se A (matrice jacobiana del sistema lineare) è non singolare, ovvero il suo determinante è diverso da zero, possiamo applicare i risultati visti per i sistemi lineari nel teorema [3.2.1](#).

4.1.2 Punti di Equilibrio

Per un sistema dinamico il punto di equilibrio è il punto in cui la variazione delle variabili dinamiche è nulla, ovvero in questo caso per $\dot{x} = v = 0$ e per $\dot{v} = -\frac{k}{m}x = 0$. Perciò il punto di equilibrio sarà in $\mathbf{u} = (0,0)$, ovvero la configurazione in cui la massa è ferma nella posizione di equilibrio della molla. Ci aspettavamo l'origine come unico punto di equilibrio poiché la matrice del sistema è non singolare.

4.1.3 Stabilità del Punto di Equilibrio

Per quanto visto nel teorema [3.2.1](#), per analizzare la stabilità dell'origine ci basta analizzare gli autovalori λ_i di A . Calcoliamo il polinomio caratteristico e determiniamo l'equazione caratteristica:

$$p_A = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -k/m & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

Tale equazione ha 2 soluzioni, dunque avremo 2 autovalori: $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Il sistema ha quindi autovalori puramente immaginari, perciò siamo nel caso [III](#) descritto nel paragrafo [3.2](#). In particolare siamo nel caso di autovalori con parte reale nulla, perciò il punto di equilibrio $(0,0)$ si dice centro e sarà stabile ma non asintoticamente stabile, poiché le traiettorie rimarranno vicine all'origine senza convergere. Lo spazio delle fasi di tale sistema è rappresentato in [Figura 4.1](#).

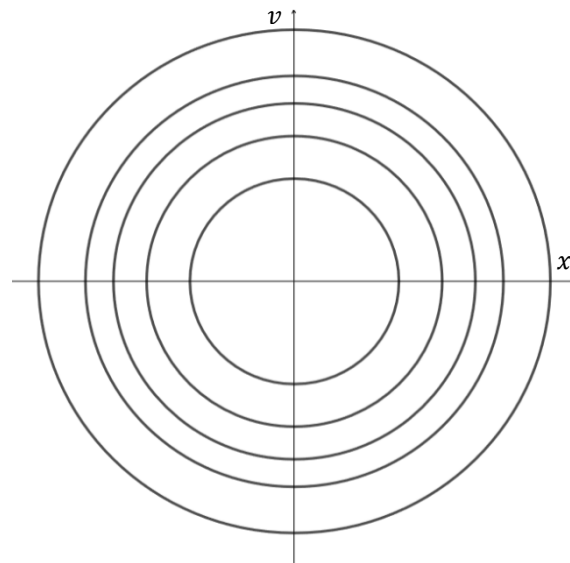


Figura 4.1. Spazio delle fasi per l'oscillatore armonico

4.2 Pendolo non Lineare

Il pendolo semplice è un esempio classico di sistema dinamico non lineare. Esso descrive il moto di un pendolo che oscilla sotto l'influenza della gravità.

Consideriamo un pendolo formato da una sbarra rigida (massa trascurabile) di lunghezza l , alla quale è attaccata una massa m . L'altro estremo della sbarra è fissato ad una parete. Consideriamo l'oscillazione del pendolo fissata nel piano (x, y) , dunque la massa del pendolo si muoverà lungo circonferenze, con centro l'estremo fissato.

La posizione della massa nel tempo è determinata dalla variabile angolare $\theta(t)$, che misura l'angolo, misurato in senso antiorario, fra la direzione della sbarra e la configurazione con la sbarra verso il basso. La posizione della massa m al tempo t è data quindi da $(x, y) = (l\sin\theta(t), -l\cos\theta(t))$, per figura schematica vedi Figura 4.2.

I moduli di velocità e accelerazione della massa sono dati rispettivamente da $l\dot{\theta}$ e $l\ddot{\theta}$. Assumiamo che agiscano 2 forze sul sistema, ovvero la forza di gravità e una forza di attrito. La forza di gravità sarà costante (mg) nel tempo e agirà lungo la direzione verticale verso il basso. Assumiamo invece che la forza di attrito sia proporzionale al modulo della velocità e che agisca lungo la direzione del moto, dunque possiamo rappresentare il termine di attrito come $-bl\dot{\theta}$, per una certa costante $b > 0$.

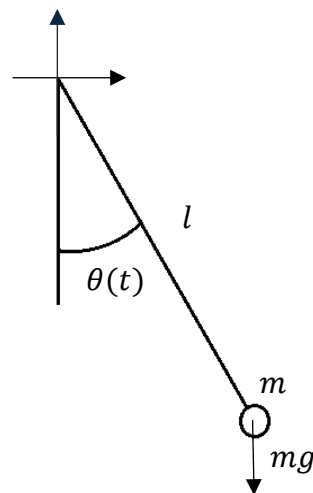


Figura 4.2. Schema pendolo non lineare

4.2.1 Equazioni del Moto

Seguendo le leggi della dinamica lungo la direzione tangente del moto, otteniamo la seguente equazione differenziale al second'ordine:

$$ml\ddot{\theta} = -bl\dot{\theta} - mg\sin\theta$$

Per semplificare consideriamo $m = l = g = 1$. Come per l'oscillatore armonico, possiamo riscrivere questa equazione come un sistema di equazioni al primo ordine, infatti se introduciamo la variabile $v = \dot{\theta}$:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -bv - \sin\theta \end{cases}$$

4.2.2 Punti di Equilibrio

I punti di equilibrio per il pendolo si trovano imponendo $(\dot{\theta}, \dot{v}) = (0,0)$, ossia per $\sin\theta = 0$. Dunque per $\theta \in [0,2\pi]$ abbiamo 2 punti di equilibrio, uno per $(\theta, v) = (0,0)$ e uno per $(\theta, v) = (\pi, 0)$, che corrispondono rispettivamente alle configurazioni con la sbarra verticale verso il basso e verso l'alto.

4.2.3 Stabilità dei Punti di Equilibrio

Partiamo da analizzare il punto di equilibrio $(\theta, v) = (\pi, 0)$, che per ragioni fisiche ci aspettiamo essere instabile. Per verificarlo consideriamo la tecnica della linearizzazione intorno al punto di equilibrio.

Per fare ciò dobbiamo calcolare la matrice jacobiana del sistema per $(\theta, v) = (\pi, 0)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b \end{pmatrix}.$$

Per verificare che il punto è instabile calcoliamo gli autovalori λ_i di A :

$$\lambda^2 + \lambda b + 1 = 0.$$

Gli autovalori saranno perciò: $\lambda_{1,2} = -b/2 \pm \sqrt{b^2/4 + 1}$. Dunque abbiamo un autovalore con parte reale positiva $\forall b > 0$ e quindi il punto di equilibrio $(\pi, 0)$ è confermato essere instabile.

Ora possiamo occuparci del secondo punto di equilibrio $(\theta, v) = (0, 0)$.

In questo caso troviamo il seguente sistema linearizzato:

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$

In questo caso troviamo autovalori $\lambda_{1,2} = -b/2 \pm \sqrt{b^2/4 - 1}$, per cui, per $b = 0$ abbiamo 2 autovalori immaginari puri, mentre per $b > 0$ possiamo ottenere autovalori reali negativi oppure autovalori complessi con parte reale negativa. Dunque in tutti i casi possibili abbiamo una configurazione stabile. In particolare per $b > 0$ il punto $(\theta, v) = (0, 0)$ sarà asintoticamente stabile in quanto il sistema tenderà a riportarsi nella configurazione con l'asta diretta verso il basso verticalmente (Per spazio delle fasi considerare il caso in Figura 3.6a).

Se $b = 0$ siamo in un caso di pendolo ideale senza presenza di attrito e, come ci aspettiamo fisicamente, il punto di equilibrio $(\theta, v) = (0, 0)$ non può essere asintoticamente stabile, in quanto l'asta in rotazione, senza dissipare energia, rimane in rotazione senza tendere alla configurazione stabile.

Possiamo approfondire il discorso introducendo la teoria di Lyapunov. Consideriamo quindi la funzione:

$$E(\theta, v) = \frac{1}{2} v^2 + 1 - \cos\theta.$$

Tale funzione corrisponde all'energia totale del sistema. $E(0, 0) = 0$.

A questo punto ricaviamo la derivata temporale dell'energia:

$$\dot{E} = v\dot{v} + \dot{\theta}\sin\theta = -bv^2.$$

Dunque $\dot{E} < 0$, $\forall(\theta, v) \neq (0,0)$ e quindi E è una funzione di Lyapunov forte relativamente al punto di equilibrio $(0,0)$ (vedi definizione [3.3.1](#)). A questo punto, per il teorema [3.3.2](#), dato che esiste una funzione di Lyapunov forte relativamente all'origine, essa sarà asintoticamente stabile.

Grazie all'energia possiamo approfondire la descrizione delle traiettorie del sistema nello spazio delle fasi. In particolare occupiamoci del caso del pendolo ideale per $b = 0$. In questo caso avremo $\dot{E} = 0$ e perciò l'energia E sarà costante lungo il moto, dunque per studiare le traiettorie del moto possiamo semplicemente graficare le curve $E = \frac{1}{2}v^2 + 1 - \cos\theta$, ottenendo il risultato nello spazio delle fasi in [Figura 4.3](#), in cui consideriamo $\theta \in] -\infty, +\infty[$.

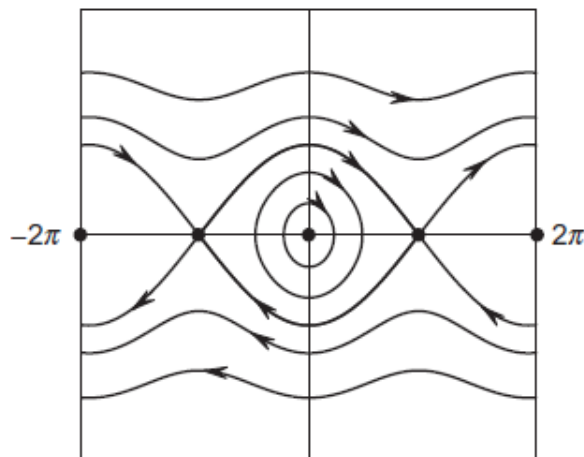


Figura 4.3. Spazio delle fasi per il pendolo ideale [3]

Le traiettorie che compiono giri intorno all'origine sono confinate, in modo tale che $-\pi < \theta(t) < \pi$. Tali soluzioni rappresentano quindi il moto oscillatorio del pendolo intorno alla posizione di equilibrio, per cui $\theta = 0$, senza raggiungere mai la configurazione $\theta = \pi$, in cui l'asta è verticale e diretta verso l'alto.

Abbiamo poi le traiettorie che collegano i punti di equilibrio $(\pm\pi, 0)$, che corrispondono ai casi in cui il pendolo tende esattamente alla posizione di equilibrio instabile verticale (tali traiettorie sono chiaramente le più rare).

Infine abbiamo le traiettorie in cui la variabile angolare $\theta(t)$ cresce/decrece per tutti i tempi. Queste traiettorie rappresentano i moti per cui il pendolo non si ferma mai e continua a ruotare in senso antiorario/orario.

4.3 Modello Logistico

Il modello logistico è un modello discreto utilizzato in biologia per descrivere la crescita di una popolazione in un ambiente limitato. Il modello tiene conto sia della crescita della popolazione sia della capacità di carico dell'ambiente, che limita la crescita quando la popolazione si avvicina a un numero critico.

4.3.1 Equazione Logistica

Il modello è descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

dove:

- N è il numero di abitanti della popolazione;
- $r > 0$ è il tasso di crescita della popolazione;
- K è il carico massimo dell'ambiente, ovvero il numero massimo di individui che può sostenere l'ambiente.

4.3.2 Punti di Equilibrio

Cerchiamo i punti di equilibrio imponendo $\frac{dN}{dt} = 0$, ovvero risolvendo:

$$rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) = 0.$$

Dunque il sistema possiede 2 punti di equilibrio: per $N = 0$ e per $N = K$.

4.3.3 Stabilità Punti di Equilibrio

In questo caso il sistema è 1-dimensionale, ovvero è descritto solo da una variabile dinamica, ovvero $N(t)$, dunque lo jacobiano di questo sistema sarà formato da un solo elemento scalare, e non da una matrice come nei casi precedenti.

A questo punto la verifica di stabilità si riduce al calcolo della derivata dell'equazione logistica calcolata nei punti di equilibrio e alla determinazione del segno di tale derivata.

$$\frac{d^2N}{dt^2} = r \left(1 - \frac{2N}{K} \right).$$

Quindi possiamo affermare:

- Al punto $N = 0$, la derivata seconda è positiva ($r > 0$), il che implica che il punto di equilibrio è instabile (la popolazione tende a crescere da zero).
- Al punto $N = K$, la derivata seconda è negativa ($-r < 0$), indicando che il punto è stabile: la popolazione si stabilizza al valore $N = K$.

4.4 Modello Lotka-Volterra di Predazione e Competizione

Il modello Lotka-Volterra è un sistema di equazioni differenziali che descrive l'evoluzione nel tempo di due popolazioni: una specie preda e una specie predatrice. Le equazioni possono essere scritte come:

$$\begin{cases} \dot{N} = \alpha N - \beta NP \\ \dot{P} = \delta NP - \gamma P \end{cases}$$

Dove:

- N è la popolazione delle prede;
- P è la popolazione dei predatori;
- α è il tasso di crescita naturale delle prede in assenza di predatori;
- β è il tasso con cui i predatori catturano le prede;
- δ è il tasso di crescita delle popolazioni di predatori in seguito alla predazione;
- γ è il tasso di mortalità dei predatori in assenza di prede;

4.4.1 Interpretazione del Modello

Nel modello di Lotka-Volterra, la popolazione di prede cresce esponenzialmente in assenza di predatori (termine αN) e viene ridotta dalla predazione, il cui tasso è proporzionale al numero di predatori e al numero di prede (termine βNP).

Allo stesso modo, la popolazione di predatori cresce grazie alla disponibilità di prede (termine δNP), mentre la morte dei predatori avviene a un tasso proporzionale alla loro popolazione, anche in assenza di prede (termine γP).

In sintesi, le due popolazioni sono strettamente legate da interazioni positive (crescita dei predatori dovuta alla predazione) e negative (decrescita delle prede a causa della predazione e morte dei predatori senza cibo).

4.4.2 Punti di Equilibrio

Per analizzare la stabilità del sistema, è utile individuare i punti di equilibrio dove le velocità di cambiamento di entrambe le popolazioni sono nulle, cioè:

$$\dot{N} = 0; \quad \dot{P} = 0.$$

Da queste condizioni, otteniamo due equazioni per i punti di equilibrio:

$$\begin{cases} N(\alpha - \beta P) = 0 \\ P(\delta N - \gamma) = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di queste equazioni sono i seguenti punti di equilibrio:

1. Punto di equilibrio $(N, P) = (0, 0)$. Entrambe le popolazioni sono estinte.
2. Punto di equilibrio $(N, P) = (\gamma/\delta, \alpha/\beta)$. Questo è il punto di equilibrio in cui entrambe le popolazioni coesistono.

4.4.3 Stabilità dei Punti di Equilibrio

Per determinare la stabilità del punto di equilibrio non banale $(\bar{N}, \bar{P}) := (\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ utilizziamo l'analisi della matrice jacobiana del sistema (linearizzazione).

La matrice Jacobiana A del sistema di equazioni è data da:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - \beta P & -\beta N \\ \delta P & \delta N - \gamma \end{pmatrix}.$$

Ora, valutando questa matrice nel punto di equilibrio (\bar{N}, \bar{P}) otteniamo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\beta\gamma/\delta \\ \delta\alpha/\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

A questo punto possiamo ricavare gli autovalori di tale matrice, che saranno:

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}}$$

Dunque abbiamo autovalori immaginari puri e pertanto il sistema linearizzato presenta un centro, tuttavia in questo caso il teorema [3.2.1](#) di linearizzazione non garantisce la stabilità del punto critico.

Dunque, per studiare la stabilità del punto di equilibrio (\bar{N}, \bar{P}) , introduciamo la funzione:

$$L(N, P) = \delta N - \gamma \ln N + \beta P - \alpha \ln P.$$

Tale funzione $L(N, P)$ è costruita per essere una costante del moto ($\dot{L} \equiv 0$) per $N, P > 0$ (per maggiori dettagli vedi bibliografia [3]). Dunque tutte le traiettorie del sistema nello spazio (N, P) giacciono sulle curve di livello della funzione L (vedi Figura [4.4](#)).

A questo punto è facile mostrare che la funzione $L(N, P)$ presenta un minimo assoluto nel punto di equilibrio $(\bar{N}, \bar{P}) = (\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ (basta mostrare che la matrice hessiana di L , calcolata nel punto in considerazione, è definita positiva).

Dunque la funzione $H = L(N, P) - L(\bar{N}, \bar{P})$, per come è stata costruita, è una funzione di Lyapunov per il punto di equilibrio (\bar{N}, \bar{P}) , e quindi esso è stabile.

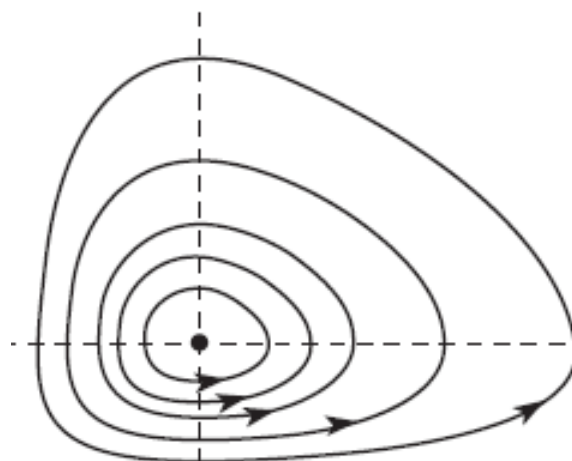


Figura 4.4. Spazio delle fasi per il modello di Lotka-Volterra [3]

L'analisi precedente indica che, per il modello di Lotka-Volterra, il punto di equilibrio non è stabile nel senso tradizionale, ma il sistema tende a oscillare ciclicamente. Questi

cicli di predazione e crescita delle prede sono caratterizzati da oscillazioni periodiche, dove la popolazione delle prede cresce quando i predatori sono in numero relativamente basso e, a sua volta, la popolazione dei predatori cresce quando c'è una maggiore disponibilità di prede. Man mano che la popolazione di predatori aumenta, le prede vengono consumate in modo più efficace, portando a una diminuzione delle popolazioni di prede. Senza abbastanza prede, i predatori diminuiscono, e il ciclo ricomincia.

Capitolo 5

Conclusioni

In questa tesi abbiamo affrontato la teoria della stabilità dei punti di equilibrio nei sistemi dinamici, applicandola a quattro esempi concreti: l'oscillatore armonico, il pendolo non lineare, il modello logistico e il modello Lotka-Volterra. L'obiettivo era esplorare come le tecniche analitiche per la stabilità possano essere applicate a sistemi di diversa natura e complessità, fornendo una comprensione generale del comportamento dinamico dei sistemi studiati.

Nonostante l'utilità delle tecniche applicate, ci sono alcune limitazioni che meritano di essere sottolineate. La linearizzazione tramite la matrice Jacobiana, pur essendo una tecnica utile per sistemi vicini ai punti di equilibrio, non è sufficiente per trattare sistemi fortemente non lineari. La teoria di Lyapunov, sebbene utile per stabilire criteri di stabilità globale, può risultare difficile da applicare in maniera esplicita per sistemi complessi, e non fornisce informazioni dettagliate sulle dinamiche locali o sul tipo di instabilità (ad esempio, caotica).

Bibliografia

- [1] Ahmad, S. e A. Ambrosetti (2015). *A textbook on ordinary differential equations*.
- [2] Parenti, C. e A. Parmeggiani (2019). *Algebra lineare ed equazioni differenziali ordinarie*.
- [3] W. Hirsch, M., S. Smale e R. L. Devaney (2012). *Differential equations, dynamical Systems, and an introduction to chaos*.