

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Augusto Righi"
Corso di Laurea in Fisica

Soluzioni approssimate ed esatte di modelli di tipo Kuramoto

Relatore:
Prof. Marco Lenci

Presentata da:
Giulio Bici

Anno Accademico 2023/2024

Ai miei genitori

Abstract

Questa tesi presenta uno studio sull'originale modello di Kuramoto, analizzandone le soluzioni.

Il modello si dimostra un potente strumento, ampiamente utilizzato in sinergetica e in diverse applicazioni pratiche.

Vengono introdotti tre modelli lineari, per ciascuno dei quali è fornita una soluzione.

L'ultimo sistema è oggetto di un'analisi più approfondita, in quanto nell'ipotesi di frequenze naturali uguali per tutti gli oscillatori, si dimostra che è esattamente equivalente al modello originale di Kuramoto: grazie al Teorema di Perron-Frobenius, si determinano le soluzioni esatte per un modello più generale rispetto a quello originariamente proposto da Kuramoto, sempre nell'ipotesi di frequenze uguali.

Indice

1	Descrizione del modello	5
1.1	Equazioni governanti	5
1.2	Parametro d'ordine	6
1.3	Stato stazionario	11
1.3.1	Oscillatori "locked"	12
1.3.2	Oscillatori "drift"	12
1.4	Autoconsistenza	15
2	Linearizzazione del modello	18
2.1	Linearizzazione	18
2.2	Riformulazione lineare	21
2.3	Computazione matriciale a valori complessi	23
3	Soluzioni esatte del modello	25
3.1	Teorema di Perron-Frobenius per matrici ergodiche	25
3.2	Applicazione al modello complesso	28
3.2.1	Caso di una particolare condizione iniziale	30
3.3	Soluzione esatta di un modello generalizzato	32

Introduzione

La *sincronizzazione* è definita come "il coordinarsi degli eventi in modo tale da far funzionare il sistema uniformemente".

Uno dei primi documenti in cui viene menzionato questo fenomeno risale al ricercatore olandese Christiaan Huygens.

Egli osservò che due pendoli identici debolmente accoppiati attraverso un asta rigida (come può essere un bastone di legno sostenuto da due sedie), si sincronizzavano mantenendo stessa ampiezza e periodo di oscillazione, ma in direzione opposta.

Nel 1967 il biologo americano Arthur Winfree suggerì un modello matematico per descrivere la sincronizzazione, che però risultava molto complicato da risolvere.

Fu così che nel 1974 Yoshiki Kuramoto inventò una tecnica per semplificare le difficoltà matematiche del modello di Winfree.

Vedremo cosa può accadere in un sistema ad un numero grande di dimensioni, eventualmente infinito, illustrando quello che i fisici definiscono **comportamento collettivo**.

Tale modello si basa sul comportamento di un grande insieme di oscillatori accoppiati, che possono rappresentare in maniera approssimativa i miliardi di neuroni sottostanti alle onde cerebrali, o grandi array di giunzioni Josephson.

Per riprodurre la diversità degli oscillatori reali, Kuramoto assunse che le frequenze naturali fossero distribuite casualmente.

Tali differenze tendono a desincronizzare il sistema; per opporsi a tale tendenza, il modello assume che gli oscillatori siano accoppiati attrattivamente, "tirandosi" a vicenda in modo da essere in fase.

La domanda risulta dunque se la tendenza alla sincronizzazione dell'accoppiamento è in grado di contrastare la tendenza alla desincronizzazione data dalla distribuzione delle frequenze.

Ciò che rende il modello di Kuramoto così brillante, è la sua facile trattabilità: nonostante sia ad alta dimensionalità, non lineare e casuale, ammette comunque un'analisi soddisfacente delle sue proprietà.

Capitolo 1

Descrizione del modello

1.1 Equazioni governanti

Supponiamo di avere un sistema di N oscillatori, ognuno dei quali risulti avere frequenza Ω_i , il cui stato è dato da una variabile circolare $\Theta_i \in S^1$, dove $S^1 = [0, 2\pi]$ con 0 e 2π identificati.

Le equazioni governanti per il modello di Kuramoto risultano essere:

$$\dot{\Theta}_i = \Omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\Theta_j - \Theta_i)$$

Le variabili di stato $\Theta_1, \dots, \Theta_N$ rappresentano le *fasi* degli oscillatori, mentre le *frequenze naturali* $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ sono estratte casualmente da una densità $G(\Omega)$ che assumeremo essere unimodale e simmetrica rispetto ad una frequenza media μ . Assumeremo inoltre che la distribuzione abbia **code infinite**, ossia che valga:

$$\forall L > 0, \quad \exists x \in (-\infty, \infty) \quad \text{tale che } |x| > L \text{ e } f_G(x) > 0$$

Ribadiamo che $G(\Omega) > 0$ per ogni $-\infty < \Omega < \infty$.

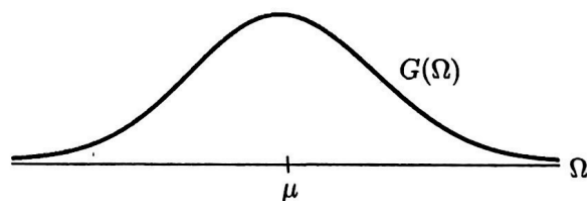


Figura 1.1: Esempio di distribuzione simmetrica e unimodale

Inoltre, il termine di **accoppiamento**:

$$\frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\Theta_j - \Theta_i)$$

produce l'interazione tra gli oscillatori.

Quando $K > 0$ le interazioni risultano essere attrattive.

Nel termine di accoppiamento è implicitamente assunto che ogni oscillatore interagisce con tutti gli altri con egual forza, formando un accoppiamento noto come **all-to-all**, corrispondente ad un *grafo completo* tale assunzione semplifica di parecchio la nostra

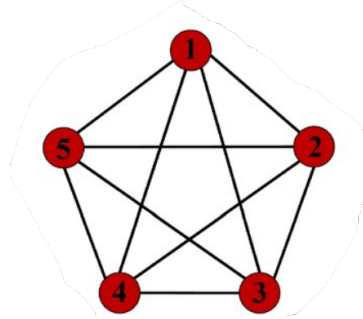


Figura 1.2: *Esempio di interazione all-to-all su grafo*

analisi, in quanto ci abbona le complicazioni dovute alla struttura spaziale, in quanto non dobbiamo più rendere conto di quali sono i "vicini" di un determinato oscillatore.

1.2 Parametro d'ordine

Un modo classico di visualizzare il modello consiste nel vedere gli oscillatori come punti circolanti il cerchio unitario, il cui colore corrisponde alla propria frequenza naturale (come accade nello spettro elettromagnetico)

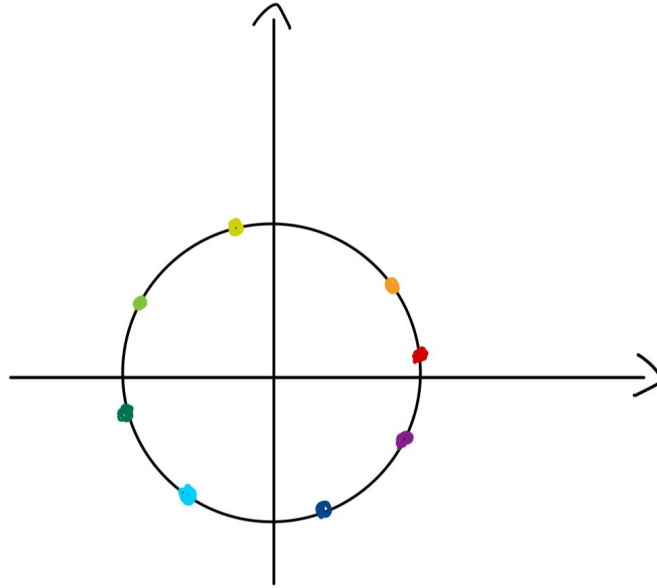


Figura 1.3: *Esempio di visualizzazione del modello*

Supponiamo dunque di rappresentare un oscillatore con fase Θ_j come un punto nel piano (x, y) dato da $(\cos \Theta_j, \sin \Theta_j)$.

Tale punto chiaramente cade sempre sulla circonferenza unitaria.

Attraverso la nota formula di Eulero, possiamo passare al piano complesso:

$$x + iy = \cos \Theta_j + i \sin \Theta_j = e^{i\Theta_j}$$

l'intera popolazione degli oscillatori corrisponderà dunque ad N punti sulla circonferenza unitaria nel piano complesso.

Prendendo ora la media dei numeri complessi $e^{i\Theta_j}$, otteniamo:

$$re^{i\Psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\Theta_j} \quad 0 \leq r \leq 1.$$

La quantità $re^{i\Psi}$ è nota come **parametro d'ordine complesso** che possiamo interpretare geometricamente come il centroide degli oscillatori nel piano complesso:

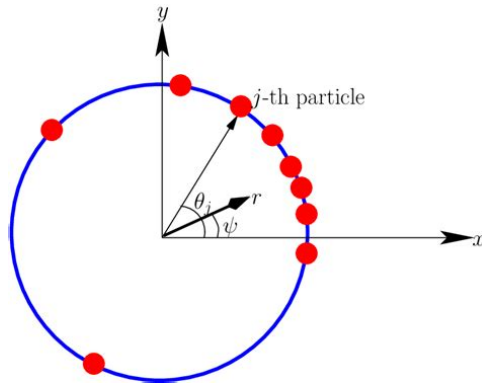


Figura 1.4: *Rappresentazione del parametro d'ordine nel piano complesso*

In generale, il raggio r indica l'ammontare di ordine nella popolazione, per questo è noto come **parametro d'ordine**, mentre l'angolo Ψ fornisce una misura della fase media.

Possiamo ora usare il parametro d'ordine r per definire come il modello di Kuramoto si comporta per differenti valori della costante di accoppiamento K ; difatti possiamo osservare se il sistema sta diventando più sincronizzato senza dover tracciare tutte le N fasi, ma solamente il numero r .

Possiamo fare una prova integrando numericamente il modello, usando 1000 oscillatori le cui frequenze naturali sono estratte casualmente da una distribuzione gaussiana con media $\mu = 5$ e deviazione standard $\sigma = 1$.

Fissando la costante di accoppiamento $K = 1$ ciò che si osserva nel lungo periodo risulta essere:

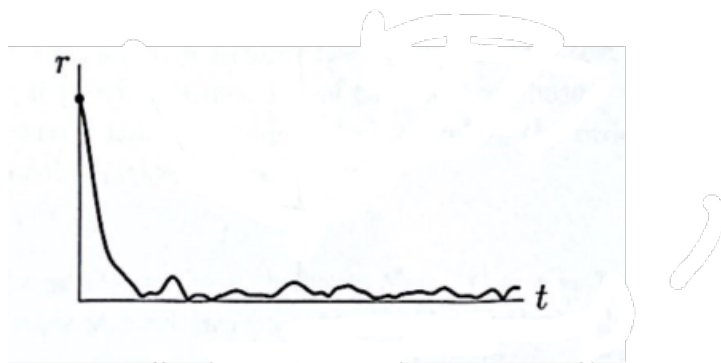


Figura 1.5: *Evoluzione temporale del parametro d'ordine con $K = 1$ e $N = 1000$*

Le fluttuazioni attorno allo zero sono note come **finite-size effects** e sono dovute unicamente al fatto che N risulta essere un numero finito.

Le simulazioni numeriche suggeriscono che, per il limite di N -infinito, $r(t)$ tende sempre ad una costante nel lungo periodo.

Sorprendentemente Kuramoto arrivò a tale conclusione senza il beneficio delle simulazioni numeriche, supponendo r costante e portando avanti la propria analisi.

Il parametro d'ordine del modello *di fatto* diventa costante, per $N \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow \infty$, ogni qualvolta $K \geq 0$ e $G(\Omega)$ è una densità con la solita forma a campana simmetrica.

Sotto tali assunzioni, il valore limite r_∞ del parametro d'ordine r dipende da K come mostrato in figura:

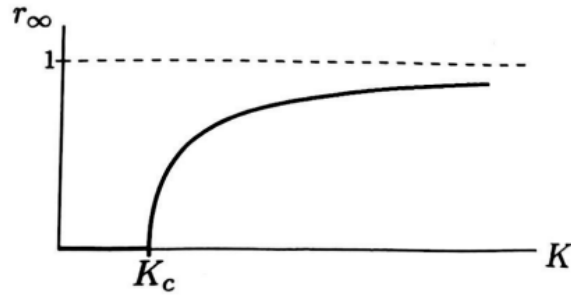


Figura 1.6: *Andamento del parametro d'ordine in funzione della costante d'accoppiamento*

Possiamo fare diversi commenti sull'andamento del sistema: innanzitutto il parametro d'ordine non risulta strettamente crescente rispetto alla costante d'accoppiamento K , ma la quantità d'ordine, misurata da r_∞ rimane zero fino al raggiungimento di un valore K_c detto **valore critico**.

In quel punto il sistema sperimenta una *transizione di fase* auto-organizzandosi in un qualche stato ordinato con $r_\infty(K) > 0$.

Possiamo semplificare ulteriormente il modello utilizzando due accorgimenti: notiamo innanzitutto che possiamo riscrivere il termine d'accoppiamento, in quanto:

$$r e^{i\Psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\Theta_j}$$

moltiplicando ambo i lati per $e^{-i\Theta_i}$ e prendendo la parte immaginaria di ogni lato, si ottiene:

$$r \sin(\Psi - \Theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\Theta_j - \Theta_i)$$

che sostituita nell'equazione differenziale iniziale porta a:

$$\dot{\Theta}_i = \Omega_i + K r \sin(\Psi - \Theta_i) \quad i = 1, \dots, N$$

Anche se sembra che gli oscillatori sono disaccoppiati, in realtà l'accoppiamento permane nei parametri d'ordine complessi r e Ψ , nonostante ciò tale rappresentazione ci suggerisce che il modello di Kuramoto possiede **accoppiamento di campo medio**: abbiamo un nuovo punto di vista, in cui ogni oscillatore è accoppiato ad un campo medio prodotto da ognuno di essi.

Possiamo ora sfruttare una simmetria del modello di Kuramoto. Se immaginiamo di studiare la dinamica in un sistema rotante a frequenza costante, le equazioni governanti non cambiano.

Supponiamo di andare in un SDR rotante a frequenza μ , corrispondente al valor medio della densità $G(\Omega)$. Sia

$$\theta_i = \Theta_i - \mu t$$

la fase dell'oscillatore i -esimo nel sistema rotante, sostituendo nel modello originale troviamo la seguente espressione:

$$\dot{\theta}_i = \Omega_i - \mu + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i)$$

che risulta l'equazione governante nel SDR rotante.

L'unica differenza dall'equazione originale consiste nelle frequenze naturali degli oscillatori, che risultano essere traslate a:

$$\omega_i = \Omega_i - \mu$$

e poiché ogni oscillatore viene traslato della medesima quantità, la frequenza media risulta essere traslata a $\mu - \mu = 0$.

Fisicamente la quantità ω_i misura il *detuning* dalla frequenza media μ .

Possiamo vedere come le nuove frequenze risultano distribuite, denotando la densità di probabilità associata con:

$$g(\omega) = G(\mu + \omega)$$

e poiché G è assunta simmetrica rispetto alla media:

$$G(\mu + \omega) = G(\mu - \omega)$$

si avrà che

$$g(\omega) = g(-\omega)$$

per cui $g(\omega)$ risulta una funzione pari.

Tale proprietà è uno dei principali vantaggi nel lavorare nel SDR rotante.

1.3 Stato stazionario

Kuramoto congetturò l'esistenza di uno stato stazionario per il sistema, in cui $r(t)$ fosse costante e $\Psi(t)$ ruotasse uniformemente alla frequenza media μ :

$$\begin{aligned}r(t) &= r_\infty \\ \Psi(t) &= \mu t\end{aligned}$$

Nel sistema rotante, l'equazione per $r(t)$ rimane la stessa mentre si avrà che

$$\psi(t) = \Psi(t) - \mu t$$

denota l'angolo del parametro d'ordine complesso visto nel SDR rotante, in tal modo la congettura di Kuramoto si semplifica nella seguente maniera:

Il modello N_∞ possiede uno stato stazionario in cui $r(t)$ è costante e $\psi(t) = 0$.

Se ciò è vero l'equazione governante si riduce a:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr_\infty \sin(\theta_i)$$

e ora il sistema risulta completamente *disaccoppiato*; è l'assunzione di r costante a rendere gli oscillatori indipendenti.

D'ora in poi consideriamo per abbreviazione la seguente uguaglianza: $r = r_\infty(K)$.

1.3.1 Oscillatori "locked"

Nel SDR rotante, gli oscillatori con $|\omega_i| < Kr$ tendono al punto di equilibrio per $t \rightarrow \infty$.

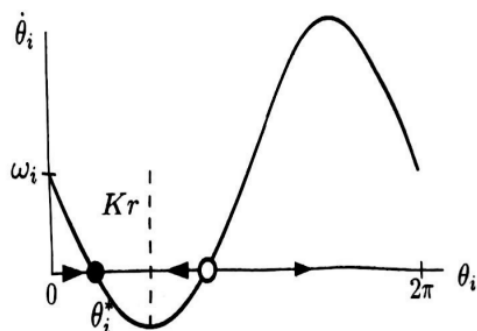


Figura 1.7: *Campo vettoriale per $\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr \sin \theta_i$*

Tali oscillatori verranno definiti come aventi **fase locked**; una volta raggiunto il punto di equilibrio stabile nel sistema rotante, essi restano rigidamente bloccati ad avere differenza di fase relativa costante per tutto il tempo.

Visti nel sistema di riferimento iniziale, essi risultano circolare come *pacchetti sincronizzati* ruotanti alla frequenza media μ ;

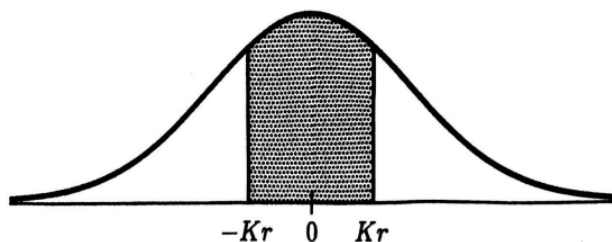


Figura 1.8: *Distribuzione degli oscillatori locked*

1.3.2 Oscillatori "drift"

Gli oscillatori con $|\omega_i| > Kr$, che chiameremo **drifters**, non possiedono alcun punto fisso nel SDR rotante con moto non uniforme

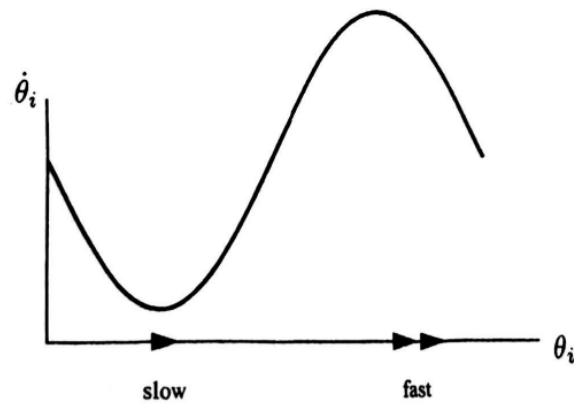


Figura 1.9: *Campo vettoriale dei drifters*

per cui essi vanno "alla deriva" rispetto agli oscillatori locked, quelli più veloci staranno in testa al gruppo mentre quelli lenti rimarranno indietro.

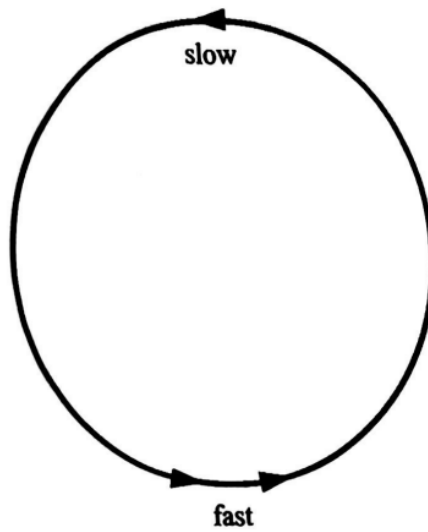


Figura 1.10: *Non uniformità del moto*

essi non riescono a sincronizzarsi poiché le loro frequenze risultano essere troppo lontane dalla frequenza media.

È naturale chiedersi come far coesistere l'esistenza di tali oscillatori con la nostra ipotesi sui valori costanti di r e di ψ ; Kuramoto propose una soluzione basata sulla distribuzione dei drifters, che doveva risultare essa stessa *stazionaria*, in modo che essi potessero apportare un contributo costante ai valori di r e ψ rendendo la nostra analisi consistente.

Per ottenere una formula della distribuzione stazionaria, consideriamo tutti i drifters aventi una particolare frequenza naturale ω , e supponiamo di averne infiniti, immaginandoli come un fluido colorato che gira attorno al cerchio unitario. Le singole molecole del fluido rappresentano gli oscillatori e si muovono non uniformemente seguendo il campo di velocità dato da:

$$v(\theta, \omega) = \dot{\theta} = \omega - Kr \sin \theta$$

Nello stato stazionario, il fluido avrà una distribuzione più densa laddove il campo di velocità è più piccolo, e sarà più sottile laddove le velocità sono elevate:

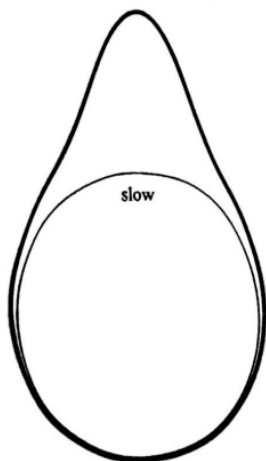


Figura 1.11: *Rappresentazione grafica della distribuzione non uniforme*

anche se le singole particelle (gli oscillatori) continuano a muoversi, la distribuzione nel complesso può rimanere stazionaria, in quanto per ogni oscillatore che esce dalla sua zona, ce n'è uno che lo rimpiazza. Tali considerazioni portarono Kuramoto a ipotizzare una densità inversamente proporzionale alla velocità:

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{C}{|\omega - Kr \sin \theta|}$$

per determinare il valore della costante, possiamo chiedere la normalizzazione di ρ rendendola una densità di probabilità per ogni valore di ω :

$$\int_0^{2\pi} \rho(\theta, \omega) d\theta = 1$$

la cui integrazione porta a: $C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - K^2 r^2}$.

1.4 Autoconsistenza

Dobbiamo ora assicurarci che gli stati stazionari degli oscillatori locked e dei drifters appena trovati siano consistenti con i valori costanti di r e di ψ assunti per ipotesi. Nello specifico il parametro d'ordine complesso $re^{i\psi}$ deve essere auto-consistente, per cui:

$$re^{i\psi} = \langle e^{i\theta} \rangle$$

dove le parentesi sottintendono una media su tutta la popolazione. Possiamo dunque imporre l'assunzione $\psi = 0$ nel SDR rotante, cosicché l'**equazione di autoconsistenza** risulti essere:

$$r = \langle e^{i\theta} \rangle$$

possiamo scomporre in due parti il contributo al valore medio, ottenendo:

$$r = \langle e^{i\theta} \rangle_{lock} + \langle e^{i\theta} \rangle_{drift}$$

Calcoliamo ora entrambi i contributi:

Possiamo iniziare considerando gli oscillatori locked aventi frequenza ω e fase θ nel sistema rotante, per cui:

$$\omega = Kr \sin \theta \qquad |\omega| \leq Kr$$

le fasi dell'oscillatore coprono il semicerchio dato da $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Usando la proprietà della funzione di distribuzione $g(\omega)$, ogni oscillatore ha un naturale partner di frequenza $-\omega$, che corrisponde nel piano complesso al complesso coniugato, portando un contributo nullo rispetto all'asse delle ordinate:

$$\langle y \rangle_{lock} = \langle \sin \theta \rangle_{lock} = 0$$

per cui l'unico contributo è dato da:

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{lock} = \langle \cos \theta \rangle_{lock} + i \langle \sin \theta \rangle_{lock} = \langle \cos \theta \rangle_{lock}$$

Possiamo ora utilizzare la legge dei grandi numeri, per ottenere:

$$\langle \cos \theta \rangle_{lock} = \int_{-Kr}^{Kr} \cos \theta g(\omega) d\omega$$

e cambiando variabile d'integrazione mediante sostituzione data da $\omega = Kr \sin \theta$:

$$\langle \cos \theta \rangle_{lock} = Kr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta$$

Quando applichiamo la legge dei grandi numeri per i drifters, otteniamo per il contributo:

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{drift} = \int_0^{2\pi} \int_{|\omega| > Kr} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta$$

La *ratio* dietro tale espressione è simile alla precedente: prima consideriamo la frazione di oscillatori aventi una particolare fase θ (tale frazione risulterà proporzionale alla densità $\rho(\theta, \omega)$) per poi pesare il contributo secondo la distribuzione $g(\omega)$ e integrare su tutte le possibili frequenze e fasi.

Possiamo inserire l'espressione precedentemente trovata per la densità:

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega^2 - K^2 r^2}}{|\omega - Kr \sin \theta|}$$

e risolvere l'integrale doppio.

Potremmo invece utilizzare argomenti di simmetria per renderci conto che l'integrale è necessariamente pari a zero: come abbiamo precedentemente osservato, vi è un naturale partner per ogni drifter di frequenza ω , dato da $-\omega$ per la parità della distribuzione $g(\omega)$. Entrambe le densità stazionarie $\rho(\theta, \omega)$ e $\rho(\theta + \pi, -\omega)$ possiedono simmetria destra-sinistra, per cui apportano un contributo nullo a $\langle \cos \theta \rangle_{drift}$; poiché ciò rimane vero per ogni frequenza $|\omega| > Kr$ possiamo concludere che $\langle \cos \theta \rangle_{drift} = 0$.

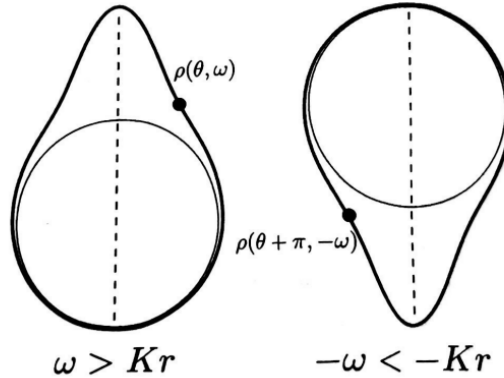


Figura 1.12: *Simmetria della distribuzione*

Sempre per la parità della funzione di distribuzione possiamo concludere con un ragionamento analogo che:

$$\langle \sin \theta \rangle_{drift} = 0$$

otteniamo il sorprendente risultato per il quale, nello stato stazionario, il contributo dei drifters al parametro d'ordine è nullo.

Mettendo tutti i nostri risultati insieme, possiamo riscrivere l'equazione di auto-consistenza come:

$$r = Kr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta$$

Possiamo risolvere tale equazione per trovare r in funzione della costante di accoppiamento K .

una soluzione banale è data da $r=0$, in cui tutti gli oscillatori risultano drifters distribuiti in modo uniforme con $\rho(\theta, \omega) = \frac{1}{2\pi}$. Tale stato è noto come **stato**

incoerente e tutti gli oscillatori risultano essere completamente disorganizzati.

Possiamo trovare altre soluzioni dell'equazione di auto-consistenza semplificando r da ambo i lati:

$$1 = K \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta$$

che definisce implicitamente una famiglia di soluzioni coerenti con $r = r_\infty(K) > 0$ per $K > K_c$.

Capitolo 2

Linearizzazione del modello

Lo studio analitico del modello, a causa della sua natura non lineare, può risultare estremamente complicato.

Tramite opportune semplificazioni è però possibile trovare soluzioni esatte al nostro problema.

Esponiamo in questo capitolo tre modelli lineari per il modello.

Uno di questi modelli fornirà la soluzione esatta del modello di Kuramoto, sotto l'ipotesi aggiuntiva che tutte le frequenze degli oscillatori siano identiche.

2.1 Linearizzazione

Quando le differenze di fase tra i nostri oscillatori risultano piccole, possiamo approssimare il seno col suo argomento e assumendo le frequenze naturali pari a zero, l'equazione del modello può essere riscritta come:

$$\dot{\theta}_i = K \sum_{j=1}^N A_{ij} (\theta_j - \theta_i)$$

Dove A_{ij} è la matrice di adiacenza, definita come:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \neq j, \\ 0 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

perché il modello di Kuramoto è dato su un grafo completo, in cui ogni interazione tra due oscillatori ha lo stesso peso.

Possiamo sfruttare la relazione tra la matrice Laplaciana e quella di adiacenza data da: $L_{ij} = k_i \delta_{ij} - A_{ij}$, dove k_i è il grado del nodo i -esimo, in modo che l'equazione

governante risulti essere:

$$\dot{\theta}_i = -K \sum_{j=1}^N L_{ij} \theta_j$$

Per risolvere questo sistema, utilizziamo un cambio di base attraverso gli autovettori ϕ_j della matrice Laplaciana:

$$\theta_i = \sum_{j=1}^N U_{ij} \phi_j,$$

dove U_{ij} è la matrice degli autovettori normalizzati, definita come la matrice diagonalizzante la Laplaciana:

$$U^T L U = \Lambda$$

poichè essendo la matrice U unitaria, vale che $U^T = U^{-1}$.

Nel nuovo sistema di coordinate (modi normali), l'equazione differenziale si scrive:

$$\dot{\phi}_j = -K \lambda_j \phi_j$$

dove λ_j è l'autovalore associato all'autovettore ϕ_j .

La soluzione per $\phi_j(t)$ è:

$$\phi_j(t) = e^{-K \lambda_j t} \phi_j(0),$$

Ritornando alle coordinate originali, otteniamo:

$$\theta_i(t) = \sum_{j=1}^N U_{ij} e^{-K \lambda_j t} \phi_j(0).$$

Da queste soluzioni si ottiene che l'evoluzione della media del quadrato delle differenze di fase risulta:

$$\langle (\theta_l(t) - \theta_k(t))^2 \rangle = 2D \sum_m (U_{lm} - U_{km})^2 e^{-2K \lambda_m t}$$

Dove D è un coefficiente legato alle fluttuazioni iniziali.

Abbiamo dunque che non solo le due fasi tendono allo stesso valore in base al tempo trascorso, come ci aspettavamo, ma anche in base alla differenza tra le proiezioni sui modi normali, pesata da un decadimento esponenziale, di cui possiamo farne uno studio più approfondito;

consideriamo un grafo completo G_n con n nodi. La matrice laplaciana \mathbf{L} del grafo risulta è definita come:

$$L = K - A$$

dove:

- K è la matrice dei gradi del grafo, una matrice diagonale in cui ogni elemento K_{ii} è uguale al grado del nodo i .

Nel caso di un grafo completo G_n , ogni nodo ha grado $n - 1$, quindi $D = (n - 1)I_n$, dove I_n è la matrice identità di ordine n .

- A è la matrice di adiacenza del grafo.

Per un grafo completo G_n , ogni coppia di nodi è connessa, quindi la matrice di adiacenza A ha 1 in tutte le posizioni eccetto sulla diagonale, dove è 0. Quindi, $A = J_n - I_n$, dove J_n è la matrice di ordine n con tutti gli elementi uguali a 1.

La matrice laplaciana è quindi:

$$L = (n - 1)I_n - (J_n - I_n) = nI_n - J_n$$

Per determinarne gli autovalori, osserviamo alcune proprietà delle matrici I_n e J_n :

1. La matrice identità I_n ha autovalori tutti uguali a 1.
2. La matrice J_n ha un autovalore uguale a n con molteplicità 1, e un autovalore uguale a 0 con molteplicità $n - 1$.

.

Pertanto, gli autovalori di L risultano essere:

- $n - 0 = n$ con molteplicità $n - 1$
- $n - n = 0$ con molteplicità 1

Quindi, gli autovalori della matrice Laplaciana sono:

$$0, n, n, \dots, n$$

Si può vedere che il termine dominante corrisponde a $m = 2$, che risulta essere il secondo autovalore più grande noto come *Fiedler value*.

2.2 Riformulazione lineare

Nel 2008 D. Roberts [Rob07] propose una riformulazione lineare dell'originale modello di Kuramoto, basata su un'equazione agli autovalori:

$$\dot{\psi}_i = (i\omega_i - \gamma) + \sum_{j \neq i} \Omega_{ij} \psi_j \quad (2.1)$$

Dove $\psi_i(t)$ è una funzione a valori complessi il cui legame con l'originaria $\theta_i(t)$ verrà chiarito in seguito, e ω_i rappresenta la frequenza intrinseca dell' i -esimo oscillatore, Ω_{ij} rappresenta la costante di accoppiamento tra gli oscillatori i e j , mentre γ è la costante di decadimento, che verrà tarata in modo da portare il sistema in uno stato stazionario. Prendiamo come sistema di oscillatori quello in cui si ha accoppiamento globale e uniforme, ovvero $\Omega_{ij} = \frac{\Omega}{N}$, $\forall i \neq j$, dove assumiamo Ω positivo.

La soluzione del modello lineare risulta essere dunque:

$$\psi = \sum_{j=1}^N a_j \mathbf{v}_j e^{\lambda_j t}$$

dove a_j sono costanti determinate dalle condizioni iniziali, mentre \mathbf{v}_j e λ_j sono rispettivamente gli autovettori ed autovalori associati alla matrice implicitamente definita dall'equazione (2.1).

Per osservare il collegamento con la riformulazione lineare e il modello originale, bisogna effettuare la trasformazione non lineare, data da $\psi_m(t) = R_m(t) e^{i\theta_m(t)}$, sull'equazione (2.1) che porta a:

$$\dot{R}_i = \gamma R_i + \frac{\Omega}{N} \sum_{j \neq i} R_j \cos(\theta_j - \theta_i) \quad (2.2)$$

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{\Omega}{N} \sum_{j \neq i} \frac{R_j}{R_i} \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (2.3)$$

che risultano essere le equazioni dinamiche che il modulo e l'argomento di $\psi_m(t)$ devono soddisfare.

Osserviamo che, nel caso in cui $\frac{R_j}{R_i} \rightarrow 1$, e nel caso di accoppiamento uniforme, l'equazione dinamica (2.3) risulta essere equivalente a quella dell'originale modello di Kuramoto, quando viene raggiunto lo stato stazionario.

D'altra parte, possiamo riscrivere l'equazione (2.1) come:

$$\dot{\psi}_i = \sum_{j=1}^N (\Omega_{ij} - \gamma \delta_{ij}) \psi_j$$

dove abbiamo posto $\omega_i = 0$ in quanto vogliamo studiare il caso in cui tutti gli oscillatori risultino identici, i.e., $\omega_i = \omega, \forall i$.

Da tale espressione, possiamo identificare la matrice data da: $[\frac{\Omega}{N}(1 - \delta_{ij}) - \gamma\delta_{ij}]$, e trovare lo spettro corrispondente.

Avremo $(N - 1)$ autovalori degeneri, uguali a $-\gamma - \frac{\Omega}{N}$, ed un unico autovalore:

$$\lambda_N = -\gamma + \frac{\Omega(N - 1)}{N}$$

associato all'autovettore $\mathbf{v}_N = (1, 1, 1, \dots, 1)$. Imponiamo come restrizione sui valori di γ che $Re(\lambda_N) = 0$ in modo da forzare ogni $R_i(t)$ ad andare nello stato stazionario nel lungo periodo e questo giustifica la nostra assunzione in cui $\frac{R_j}{R_i} \rightarrow 1$.

In pratica imponiamo per γ il valore dato da:

$$\gamma = \frac{\Omega(N - 1)}{N}$$

così che la differenza di fase $\langle(\psi_j(t) - \psi_i(t))^2\rangle$ decada come $e^{2\Omega}$; è importante sottolineare come in questa analisi abbiamo adottato la convenzione di ordinare gli autovalori attraverso le loro parti reali in ordine crescente, partendo da λ_1 .

2.3 Computazione matriciale a valori complessi

Nel 2021 L.Muller [MMN21] e collaboratori introdussero una formulazione del modello basata su di un' estensione attraverso matrici complesse dell'equazione originale. Partiamo dal modello originale su di un network generale a N nodi:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \kappa \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i)$$

dove $\theta_i \in [-\pi, \pi]$ rappresenta lo stato dell'oscillatore i -esimo al tempo t , ω_i è la frequenza intrinseca, κ è un riscaldamento della forza di accoppiamento, e l'elemento $a_{ij} \in \{0, 1\}$ rappresenta la connessione tra il nodo i -esimo e il nodo j -esimo.

Possiamo portarci in un SDR rotante in cui $\omega = 0$ e tale operazione risulta valida assumendo che $\omega_i = \omega$, $\forall i$ che risulta essere un' ipotesi cruciale per la risoluzione esatta del sistema.

Sottraendo un termine immaginario alla parte di accoppiamento:

$$\dot{\theta}_i = \gamma \sum_{j=1}^N a_{ij} [\sin(\theta_j - \theta_i) - i \cos(\theta_j - \theta_i)] \quad (2.4)$$

Possiamo notare come tale espressione implichi che $\theta_i \in \mathbb{C}$ e richieda un riscaldamento della forza di accoppiamento ($\gamma = \frac{2\kappa}{\pi}$).

Moltiplicando ambo i lati dell'equazione (2.4) per l'unità immaginaria i , otteniamo:

$$i\dot{\theta}_i = \gamma \sum_{j=1}^N a_{ij} [i \sin(\theta_j - \theta_i) + \cos(\theta_j - \theta_i)]$$

ed applicando la formula di Eulero, è possibile riscrivere il sistema come:

$$i\dot{\theta}_i = \gamma \sum_{j=1}^N a_{ij} e^{i(\theta_j - \theta_i)} = \gamma e^{-i\theta_i} \sum_{j=1}^N a_{ij} e^{i\theta_j}$$

che possiamo riscrivere in forma matriciale come:

$$\dot{\theta} = \frac{\gamma}{i} \text{diag}[e^{-i\theta}] A e^{i\theta}$$

dove $\theta \in \mathbb{R}^N$ rappresenta il vettore di stato tra i vari nodi, e $A \in \{0, 1\}^{N \times N}$ è la matrice di adiacenza.

Sfruttando il fatto che l'inversa di $\text{diag}[e^{-i\theta}]$ risulta essere $\text{diag}[e^{i\theta}]$, arriviamo a:

$$\text{diag}[e^{i\theta}] \dot{\theta} = \frac{\gamma}{i} A e^{i\theta}$$

Ora, usando il fatto che:

$$\text{diag}[e^{i\theta}] \dot{\theta} = \frac{1}{i} \frac{d}{dt} e^{i\theta}$$

possiamo comparare le espressioni ed ottenere la seguente uguaglianza:

$$\frac{d}{dt} e^{i\theta} = \gamma A e^{i\theta}$$

possiamo porre ora $\mathbf{x} = e^{i\theta}$, e sostituendo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \gamma A \mathbf{x}$$

la cui soluzione generale risulta essere:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\gamma A t} \mathbf{x}(0) \tag{2.5}$$

L'equazione (2.5) risulta essere direttamente connessa a quella dell'originale modello di Kuramoto, difatti scrivendo $\theta = \theta_{re} + i\theta_{im}$, abbiamo che:

$$\mathbf{x} = e^{i(\theta_{re} + i\theta_{im})} = e^{-\theta_{im}} e^{i\theta_{re}}$$

per cui θ_{re} risulta essere la fase della soluzione analitica di \mathbf{x} , che possiamo prendere nel range $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Capitolo 3

Soluzioni esatte del modello

Prendendo come riferimento il terzo dei modelli lineari, attraverso il teorema di Perron-Frobenius dimostriamo come tale modello ammette sempre soluzioni esatte, in cui il sistema si sincronizza indipendentemente dalla costante di accoppiamento, sotto opportune ipotesi, a meno di condizioni iniziali "patologiche" di cui viene comunque fornito uno studio.

3.1 Teorema di Perron-Frobenius per matrici ergodiche

Definizione 3.1. Sia data una matrice quadrata $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non-negativa ($P_{ij} \geq 0, \forall i, j$), chiamo **grafo associato** alla matrice il grafo direzionato e pesato i cui siti risultano indicizzati da 1 a n , tale che il sito i -esimo sia collegato al sito j -esimo se e solo se $p_{ij} \neq 0$.

In tal caso il peso associato all'arco tra i, j è dato dal valore p_{ij}

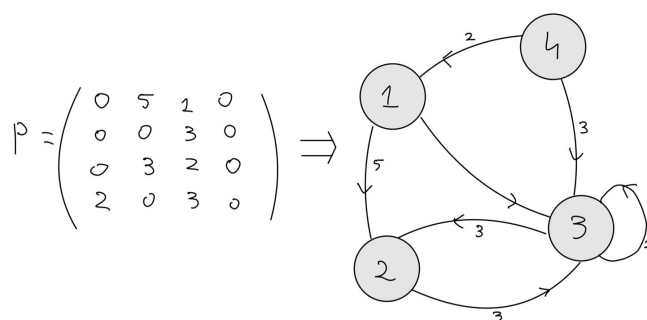


Figura 3.1: Esempio di grafo associato ad una matrice in cui si è usata la convenzione di segnare il peso associato all'arco nel caso esso sia diverso da 1

Possiamo ora dare la prima definizione che servirà alla nostra analisi.

Definizione 3.2. Una matrice è detta **irriducibile** se il grafo associato risulta connesso

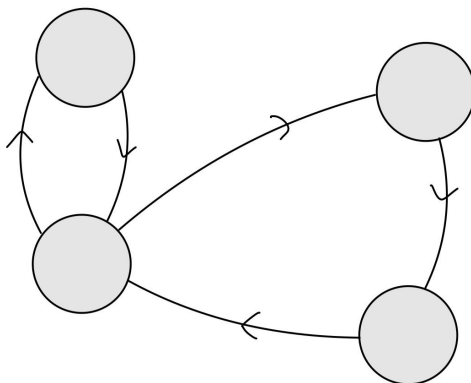


Figura 3.2: Esempio di grafo associato ad una matrice irriducibile

Il grafo associato ad una matrice irriducibile P risulterà pertanto connesso e potremmo raggiungere qualsiasi stato j a partire da qualsiasi stato i .

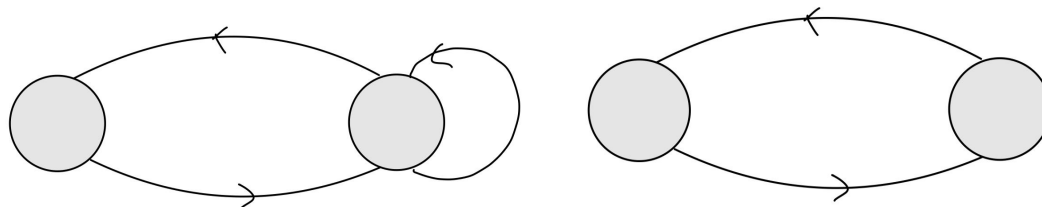
Definizione 3.3. Sia $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice quadrata. Sia $T(i)$ l'insieme dei tempi di ritorno per uno stato i , definito come:

$$T(i) = \{k \in \mathbb{N} : (P^k)_{ii} > 0\}$$

allora la matrice P viene detta **aperiodica** se:

$$\text{MCD}(T(i)) = 1 \quad \forall i$$

Se $\text{MCD}(T(i)) \neq 1$, tale numero viene chiamato **periodo** dello stato i



(a) Esempio di grafo associato ad una matrice aperiodica

(b) Esempio di grafo associato ad una matrice periodica, ogni sito ha periodo 2

Figura 3.3: Confronto tra grafi associati a matrici aperiodiche e periodiche.

Intuitivamente se la matrice è aperiodica significa che non esistono cicli "rigidi" nella dinamica, ovvero che il sistema non è bloccato in oscillazioni regolari tra sottogruppi di stati.

Se una matrice P risulta sia irriducibile che aperiodica, chiameremo tale matrice **ergodica**.

Si può vedere [Hal56] che una matrice quadrata P è ergodica se e solo se $\exists k \in \mathbb{Z}^+$ tale che $\forall i, j \in \{1, \dots, N\}$ si ha $(P^k)_{ij} > 0$.

Teorema 3.1 (Perron-Frobenius). *Sia $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice non-negativa, irriducibile e aperiodica. Allora valgono le seguenti proprietà:*

1. *Esiste un autovalore reale $\lambda_{max} > 0$, detto autovalore principale di P , tale che:*

$$|\lambda| \leq \lambda_{max}$$

per ogni altro autovalore λ di P

2. *l'autovalore λ_{max} è semplice ed è associato ad un autovettore unico.*

Possiamo utilizzare tali risultati nella soluzione trovata per il modello lineare complesso, dimostrando come la dinamica del sistema viene controllata da tale autovalore principale.

3.2 Applicazione al modello complesso

Analizziamo ora come possiamo applicare tale teorema per trovare soluzioni esatte al terzo dei modelli lineari, quello complesso.

Trattiamo il caso di frequenze intrinseche omogenee: $\omega_i = \omega \forall i$, inoltre assumeremo di essere nel caso di accoppiamento all-to-all, in cui il grafo sotteso risulta essere completo. È noto che per tale grafo la matrice di adiacenza risulta essere non-negativa ed irriducibile, per cui ci troviamo nelle ipotesi del teorema di Perron-Frobenius ed esisterà un autovalore principale, che chiamiamo λ_1 , di cui è istruttivo fare uno studio ulteriore. Consideriamo la matrice di adiacenza $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definita come:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \neq j, \\ 0 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Esplicitamente, A è una matrice $n \times n$ con zeri sulla diagonale principale e uni in tutte le altre posizioni. Scriviamo l'equazione agli autovalori:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Supponiamo che il vettore \mathbf{v} sia il vettore colonna:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

cioè un vettore di lunghezza n in cui tutte le entrate sono uguali a 1.

Calcoliamo $A\mathbf{v}$. La i -esima componente di $A\mathbf{v}$ è data da:

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}v_j.$$

Poiché $v_j = 1$ per ogni j e $A_{ij} = 1$ se $i \neq j$, la somma risulta in:

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}v_j = \sum_{j \neq i} 1 = n - 1.$$

Quindi, ogni componente di $A\mathbf{v}$ è $n - 1$, e possiamo scrivere:

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} n - 1 \\ n - 1 \\ \vdots \\ n - 1 \end{bmatrix} = (n - 1)\mathbf{v}.$$

Da ciò si conclude che \mathbf{v} è un autovettore di A con autovalore:

$$\lambda = n - 1.$$

È interessante notare come, essendo la matrice di adiacenza una matrice simmetrica, autovettori di autovalori diversi debbano essere necessariamente ortogonali e che la condizione di ortogonalità con il vettore di tutti uni implichi necessariamente che tale vettore non sia non-negativo, ovvero, per un vettore la condizione di ortogonalità con il vettore di tutti uni comporta che la somma delle proprie componenti sia nulla, e tale condizione non può essere soddisfatta, a meno del caso banale, se le componenti sono tutte non-negative.

Ciò significa che l'autovalore principale risulta essere proprio $(n - 1)$. riprendendo l'equazione (2.5):

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\gamma A} \mathbf{x}(0)$$

scegliendo la base degli autovettori della matrice di adiacenza, possiamo riscrivere:

$$\mathbf{x}(0) = \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{v}^{(j)}$$

per cui la nostra soluzione risulta essere:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^N c_j e^{\gamma \lambda_j t} \mathbf{v}^{(j)}$$

poiché per il teorema di Perron-Frobenius vale che:

$$\lambda_1 \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$$

asintoticamente avremo che la soluzione risulta essere:

$$\mathbf{x}(t) \sim c_1 e^{\gamma(n-1)t} \mathbf{v}^{(1)}$$

dove:

$$\mathbf{v}^1 = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]$$

tale equazione risulta reale, per cui necessariamente $\theta_{\mathbf{re}} = 0$ e la soluzione risulta essere stazionaria, in cui tutti gli oscillatori hanno stessa fase e risultano pertanto sincronizzati.

3.2.1 Caso di una particolare condizione iniziale

Nell'analisi precedente abbiamo implicitamente assunto che il coefficiente c_1 dello sviluppo della soluzione fosse diverso da zero, tuttavia ciò non risulta sempre vero, in quanto il valore del coefficiente dipende dalle condizioni iniziali del sistema.

Consideriamo una situazione iniziale in cui le fasi degli oscillatori possono assumere valori in $\{0, \pi\}$.

Consideriamo la matrice di adiacenza $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, abbiamo già mostrato che il vettore le cui componenti sono tutte pari ad 1, cioè:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

è un autovettore associato all'autovalore $\lambda = n - 1$. Ora consideriamo il sottospazio ortogonale al vettore \mathbf{v} .

Un generico vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ che soddisfa:

$$\mathbf{w}^\top \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n w_i = 0,$$

appartiene a questo sottospazio. Per tali vettori \mathbf{w} , calcoliamo $A\mathbf{w}$:

$$(A\mathbf{w})_i = \sum_{j \neq i} w_j.$$

Dato che $\sum_{j=1}^n w_j = 0$, possiamo riscrivere:

$$\sum_{j \neq i} w_j = -w_i.$$

Pertanto, otteniamo:

$$A\mathbf{w} = -\mathbf{w}.$$

Quindi, ogni vettore \mathbf{w} ortogonale a \mathbf{v} è un autovettore di A con autovalore $\lambda = -1$.

Poiché il sottospazio ortogonale a \mathbf{v} ha dimensione $n - 1$, concludiamo che $\lambda = -1$ è un autovalore con molteplicità algebrica $n - 1$.

Lo sviluppo della nostra soluzione risulta essere:

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \mathbf{v}^{(1)} + c_2 \mathbf{v}^{(2)} + \dots + c_n \mathbf{v}^{(n)}$$

ponendoci nella condizione iniziale tale per cui $c_1 = 0$, come accade nella situazione descritta sopra, otteniamo la seguente soluzione:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\gamma t A} \mathbf{x}(0) = e^{-\gamma t} \sum_{j=2}^N c_j \mathbf{v}^{(j)}$$

possiamo argomentare la stabilità di tale soluzione ponendoci nello spazio proiettivo. Il fattore $e^{-\gamma t}$ garantisce che l'ampiezza della soluzione diminuisca esponenzialmente nel tempo, portando il sistema asintoticamente verso l'origine dello spazio.

Tuttavia, nello spazio proiettivo, ciò che conta non è l'ampiezza del vettore $\mathbf{x}(t)$, ma *la direzione relativa*, ovvero il rapporto tra le sue componenti.

Lo spazio proiettivo considera equivalenti i vettori che differiscono solo per un fattore di scala, ovvero:

$$\mathbf{x}(t) \sim \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|}$$

Osserviamo che:

- $e^{-\gamma t}$ è un fattore uniforme per tutte le componenti del vettore. Nel contesto proiettivo, questo fattore non influisce sulla direzione del vettore perché si cancella nel rapporto:

$$\frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} = \frac{\sum_{j=2}^N c_j \mathbf{v}^{(j)}}{\|\sum_{j=2}^N c_j \mathbf{v}^{(j)}\|}.$$

- L'espressione $\sum_{j=2}^N c_j \mathbf{v}^{(j)}$ dipende solo dalla combinazione lineare iniziale degli autovettori $\mathbf{v}^{(j)}$ e non dal tempo t , poiché il termine esponenziale si applica uniformemente e si cancella nello spazio proiettivo.

Nello spazio proiettivo, il vettore risulta costante perché:

- La direzione di $\mathbf{x}(t)$ è determinata esclusivamente dalla struttura iniziale della combinazione lineare di $\mathbf{v}^{(j)}$.
- La dipendenza temporale $e^{-\gamma t}$ non altera i rapporti tra le componenti (direzioni), ma solo la magnitudine, che è irrilevante in termini proiettivi.

Il vettore $\mathbf{x}(t)$ nello spazio proiettivo è costante perché la direzione è fissata dalla combinazione iniziale degli autovettori, e il fattore temporale $e^{-\gamma t}$ è omogeneo per tutte le componenti, annullandosi nel calcolo proiettivo.

Pertanto, il sistema evolve stabilmente verso una direzione unica nello spazio proiettivo, definita dalla decomposizione iniziale $\mathbf{x}(0)$.

3.3 Soluzione esatta di un modello generalizzato

È possibile notare che nella trattazione riguardante la soluzione esatta del modello, l'unica ipotesi veramente necessaria risulta essere quella di frequenze uguali e che la matrice di adiacenza risulti essere ergodica.

Questo perché finché sono valide le ipotesi del teorema di Perron-Frobenius sulla matrice di adiacenza, ovvero la condizione di irriducibilità e aperiodicità, la trattazione risulta essere ugualmente valida, ossia, avremo sempre un autovalore principale, anche se non corrispondente allo stesso autovettore, anch'esso non-negativo.

Attraverso queste considerazioni possiamo concludere che la sincronizzazione sotto l'ipotesi di frequenze uguali avviene per modelli più generali dell'originale modello di Kuramoto.

È possibile fornire esempi di grafi in cui le proprietà di irriducibilità e aperiodicità risultano rispettate, discriminando i casi in cui la nostra generalizzazione risulta possibile o meno.

Definizione 3.4. *chiamo **grafo a catena** un grafo i cui siti sono disposti in circolo e gli archi risultano essere presenti solo tra siti adiacenti*

possiamo vedere che uno dei criteri per stabilire se un grafo a catena risulti essere irriducibile o meno, è dato dal numero di siti presenti nel grafo stesso, in particolare se abbiamo un numero dispari di siti il grafo risulterà essere aperiodico, pertanto potremo utilizzare il teorema di Perron-Frobenius e trovare una soluzione esatta al modello.

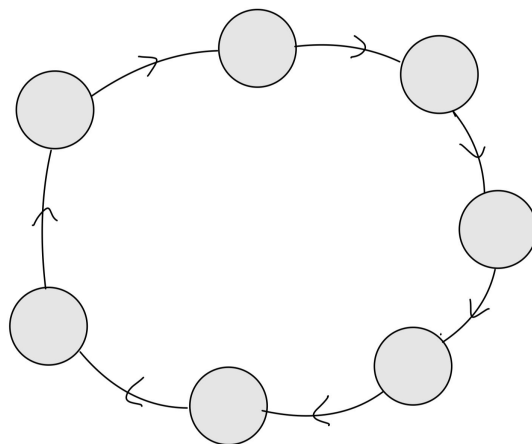


Figura 3.4: *Esempio di grafo a catena con numero dispari di siti*

Al contrario, con un numero pari di siti il grafo non risulterà aperiodico, in quanto se abbiamo un grafo con n siti, partendo da uno qualsiasi di essi, sarà possibile tornare ad esso con n passi, pertanto avremo sempre una periodicità pari a 2, cosicché non sarà

possibile applicare il teorema di Perron-Frobenius ed a priori nulla si può dire sulla soluzione del sistema.

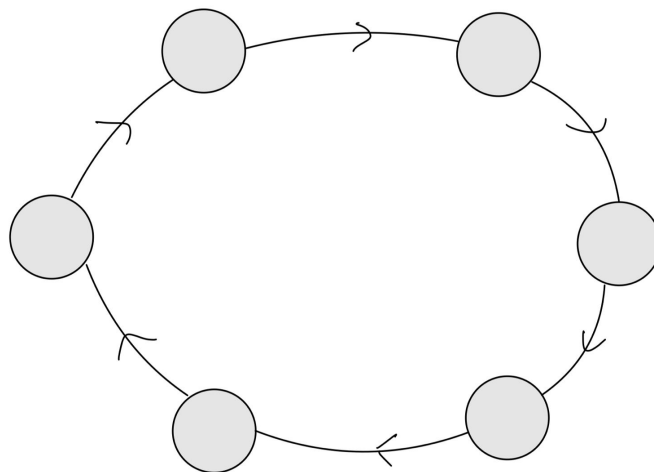


Figura 3.5: *Esempio di grafo a catena con numero pari di siti*

esiste però un modo per rendere un grafo a catena con numero pari di siti aperiodico, aggiungendo un arco che colleghi un sito non adiacente permette di rompere la periodicità e rientrare nelle condizioni necessarie all'applicazione del teorema, rendendo di nuovo valida la nostra analisi.

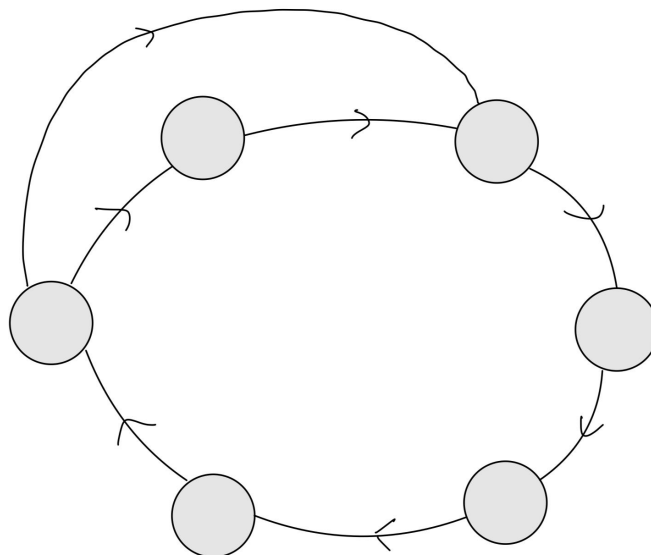


Figura 3.6: *Esempio di come è possibile spezzare la periodicità di una catena circolare*

Bibliografia

- [Hal56] Paul R. Halmos. *Lectures on Ergodic Theory*. Reprinted by Dover Publications, 2017. Tokyo: The Mathematical Society of Japan, 1956.
- [Kur84] Yoshiki Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. 1^a ed. Springer Series in Synergetics. Published: 08 December 2011 (Softcover), 06 December 2012 (eBook). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg, 1984, pp. VIII, 158. ISBN: 978-3-642-69691-6. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-69689-3>. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-69689-3>.
- [Chr01] Gordon Royl Chris Godsil. *Algebraic Graph Theory*. Springer New York, NY, 2001. ISBN: 978-0-387-95241-3. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0163-9>.
- [Str04] Steven H. Strogatz. “Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order”. In: *Physics Today* 57.6 (giu. 2004), pp. 59–65. DOI: 10.1063/1.1761201. URL: <https://pubs.aip.org/physicstoday/article/57/6/59/914814/Sync-The-Emerging-Science-of-Spontaneous-Order>.
- [Rob07] David C. Roberts. “Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators”. In: *arXiv:0704.1166* (apr. 2007). eprint: 0704.1166. URL: <https://arxiv.org/pdf/0704.1166>.
- [Ser10] Denis Serre. *Matrices, Theory and Applications*. Springer New York, NY, 2010. ISBN: 978-1-4419-7683-3. DOI: 10.1007/978-1-4419-7683-3.
- [Spi16] Renato Spigler. “The mathematics of Kuramoto models wich describe synchronization phenomena”. In: *Rivista Unione Matematica Italiana* 1.2 (2016). URL: http://www.bdim.eu/item?fmt=pdf&id=RUMI_2016_1_1_2_123_0.
- [MMN21] Lyle Muller, Ján Minač e Tung T. Nguyen. “Algebraic approach to the Kuramoto model”. In: *Physical Review E* 104.L022201 (ago. 2021). DOI: 10.1103/PhysRevE.104.L022201. URL: <https://journals.aps.org/pre/pdf/10.1103/PhysRevE.104.L022201>.

- [Bau22] Maria Li López Bautista. *Alternative description of the Kuramoto model of coupled oscillators*. <https://github.com/itsmarialb/Kuramoto>. Bachelor's Thesis. Advisor: Albert Díaz-Guilera. Diagonal 645, 08028 Barcelona, Spain, giu. 2022.
- [Str24] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. 3rd. Chapman e Hall/CRC, 2024. DOI: 10.1201/9780429398490.