

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”
Corso di Laurea in Fisica

Contagio e rischio sistemico nelle reti finanziarie

Relatore:
Prof. Fabrizio Lillo

Presentata da:
Giuseppina Rainone

Anno Accademico 2023/2024

*A mamma e papà,
a mia sorella e mio fratello.*

A Domenico.

Abstract

In questa Tesi viene studiata la complessa struttura delle reti finanziarie e nello specifico il fenomeno del contagio sistemico. Viene approfondito il ruolo della teoria delle reti complesse nell'interpretazione delle interazioni tra istituzioni finanziarie e nella comprensione dei rischi legati alla diffusione delle crisi. Fornita una panoramica sul mercato interbancario, con particolare riferimento alla crisi del 2008, si approfondisce il modello di Gai e Kapadia, evidenziandone prima gli aspetti teorici e poi quelli applicativi simulando scenari di contagio.

Attraverso l'applicazione della teoria dei grafi, vengono studiate le proprietà strutturali delle reti al fine di valutare come queste influenzino la resilienza del sistema. I risultati delle simulazioni evidenziano come piccoli shock locali possano essere amplificati in relazione alle caratteristiche topologiche delle reti e del ruolo cruciale svolto dai nodi altamente connessi detti anche "hub". Infine, si discutono le scelte in materia di regolamentazione per la mitigazione del rischio sistemico nelle reti finanziarie.

Questo lavoro di Tesi fornisce uno strumento analitico utile alla comprensione del fenomeno del contagio nelle reti finanziarie e propone misure per aumentare la stabilità delle stesse.

Indice

Introduzione	8
1 Il mercato interbancario	10
1.1 Il Rischio sistemico	10
1.1.1 La definizione di Schwarcz	12
1.2 Quantificazione del rischio sistemico	13
1.2.1 Il modello RAMSI: struttura e funzionamento	13
1.3 La tendenza di diffusione delle crisi	17
1.3.1 La tendenza "robusta-ma-fragile" della rete finanziaria	17
1.4 La crisi del 2008: un caso di studio	18
1.4.1 Il discorso di Haldane: la crisi del 2008 a confronto con l'epidemia di SARS del 2002	19
2 La modellizzazione delle reti finanziarie	21
2.1 La teoria dei grafi	22
2.1.1 Tipologie di grafi e grado dei nodi	24
2.1.2 Calcolo delle metriche di centralità	27
2.1.3 Connettività e contagio nella rete	28
2.1.4 La struttura della rete interbancaria	28
2.2 La diffusione del contagio	34
2.3 La funzione generatrice	37
2.3.1 Distribuzione dei Gradi di Poisson	39
3 Il Modello di Gai e Kapadia: Teoria e Simulazioni	41
3.1 Descrizione e Meccanismi del Modello	41
3.1.1 Canali di Contagio	41
3.1.2 Struttura della Rete Finanziaria	42
3.1.3 Assunzioni stilizzate	43
3.1.4 La dinamica del contagio	44
3.2 Simulazione di uno Scenario di Base e Soluzioni Analitiche	50
3.2.1 Risultati Numerici e Confronto con le Soluzioni Analitiche	50

3.2.2	Ruolo dei Buffer di Capitale	53
3.2.3	Effetti delle Vendite Forzate di Attività	55
3.2.4	Interpretazione dei Risultati	56
	Conclusioni	59

Elenco delle figure

1.1	Timeline degli eventi nel modello RAMSI	14
1.2	Analisi della biomodalità.	15
1.3	Asset del sistema sotto stress.	16
1.4	La rete finanziaria globale nel 1995 e nel 2005.	20
2.1	Rete interbancaria schematica.	23
2.2	Rappresentazione schematica della rete multiplex interbancaria.	33
3.1	Un esempio di rete pesata e diretta.	43
3.2	Trasmissione del contagio.	47
3.3	Il caso di riferimento.	51
3.4	Confronto tra soluzioni di riferimento e soluzioni analitiche.	53
3.5	Variazione del buffer di capitale.	54
3.6	Effetti di liquidità e contagio.	56

Elenco delle tabelle

2.1	Coefficiente di clustering per ciascuna banca.	26
2.2	Metriche di centralità e loro interpretazione nelle reti finanziarie.	26
2.3	Analisi quantitativa del ruolo degli hub nella propagazione del contagio. .	34
2.4	Confronto tra reti complete e incomplete in termini di resilienza e probabilità di contagio.	35
2.5	Rischio di contagio in funzione della connettività della rete.	39

Introduzione

Negli ultimi decenni il sistema finanziario globale ha subito radicali cambiamenti e si è caratterizzato per una crescente complessità e interconnessione tra le istituzioni finanziarie.

L'avvento di nuove tecnologie, l'innovazione finanziaria e la liberalizzazione dei mercati hanno portato alla creazione di una rete di relazioni economiche in cui banche, istituzioni finanziarie non bancarie e mercati dei capitali sono strettamente interconnessi. Una struttura di questo tipo, da un lato ha permesso una maggiore efficienza nella distribuzione del capitale e nella gestione del rischio ma dall'altro ha reso il sistema maggiormente vulnerabile.

La crisi finanziaria del 2008 ha messo in luce fragilità intrinseche dei sistemi finanziari moderni: il fallimento di un'istituzione come Lehman Bros., ha dimostrato come shock locali siano in grado di propagarsi rapidamente attraverso la rete finanziaria globale con conseguenti effetti sistemici di ampia portata. Questo evento ha evidenziato la necessità di comprendere più approfonditamente le dinamiche di contagio e di sviluppare strumenti analitici adeguati a modellizzare tali fenomeni.

La teoria delle reti complesse offre un quadro concettuale potente per l'analisi delle interazioni tra le diverse componenti del sistema. Tramite l'applicazione della teoria dei grafi, è possibile rappresentare le istituzioni finanziarie come nodi di una rete e le loro relazioni come collegamenti, consentendo di studiare la struttura topologica del sistema e di identificare i canali di propagazione del contagio.

In questo contesto, il modello di Gai e Kapadia [20], rappresenta un contributo estremamente rilevante nello studio del contagio in ambito finanziario. Questo modello integra meccanismi di contagio diretto e indiretto con l'obiettivo di analizzare come gli shock possano propagarsi all'interno della rete finanziaria. Un approccio di questo tipo consente di approfondire le condizioni in cui piccoli shock locali possono dar luogo a crisi sistemiche, enfatizzando il ruolo cruciale della struttura della rete e dei buffer di capitale nelle banche.

L'obiettivo di questo lavoro di Tesi è quello di approfondire la modellizzazione delle reti finanziarie e analizzare i meccanismi di diffusione del contagio, con particolare focus sul modello di Gai e Kapadia. Attraverso l'applicazione della teoria dei grafi, verranno analizzate le proprietà strutturali delle reti finanziarie, quali la distribuzione dei gradi,

la centralità dei nodi e il coefficiente di clustering al fine di comprendere come queste influenzino la resilienza del sistema.

In seguito verranno descritte le simulazioni basate sul modello di Gai e Kapadia per illustrare l'impatto della connettività della rete e dei buffer di capitale sulla probabilità e sulla diffusione del contagio.

La tesi è organizzata come segue:

- Nel Capitolo 1, viene fornita una panoramica delle tendenze di diffusione delle crisi nei mercati finanziari con un'analisi delle reti finanziarie a partire dalla crisi del 2008.
- Nel Capitolo 2, si introducono concetti fondamentali di teoria dei grafi nell'ambito della modellizzazione delle reti finanziarie, esaminando le metriche di centralità e le proprietà topologiche delle reti.
- Nel Capitolo 3, si approfondisce il modello di Gai e Kapadia, descrivendone la struttura teorica e i meccanismi di contagio e successivamente vengono presentate le simulazioni del modello e discussi i risultati con particolare attenzione alle implicazioni per la stabilità finanziaria e la regolamentazione.

Questo approccio intende fornire una comprensione approfondita dei fattori che influenzano la propagazione del rischio nei sistemi finanziari e delle strategie in grado di mitigare il rischio sistemico.

Capitolo 1

Il mercato interbancario

Il mercato interbancario rappresenta una frazione della rete finanziaria in cui gli intermediari, le banche, realizzano tra loro operazioni di credito e debito. Esso svolge un ruolo cardine nella trasmissione della politica monetaria e consente alle banche di gestire squilibri di liquidità e fronteggiarne quindi le fluttuazioni. Tali interconnessioni, da un lato formano una base per l'assicurazione reciproca, dall'altro rappresentano un potenziale elemento di instabilità per il sistema finanziario [27]; se infatti il mercato interbancario non funziona in maniera efficiente può verificarsi una reazione "a catena" e la crisi di una banca propagarsi attraverso la rete. La tendenza di diffusione delle crisi nel mercato interbancario è spesso definita come *rischio sistemico*. Tuttavia, quello appena citato, è un concetto ben più complesso, al quale è opportuno dedicare maggiore attenzione.

1.1 Il Rischio sistemico

Dare una definizione comune di rischio sistemico consente di evitare ambiguità nell'identificare politiche comuni per la mitigazione di tale rischio.

Duffie e Singleton [12] collocano il rischio sistemico tra cinque categorie di rischio finanziario:

1. **Rischio di mercato:** il rischio di cambiamenti inaspettati nei prezzi di mercato;
2. **Rischio di credito:** il rischio di cambiamenti di valore dovuti a variazioni inattese nella qualità del credito, in particolare se una controparte non rispetta una delle sue obbligazioni contrattuali;
3. **Rischio di liquidità:** il rischio che i costi di aggiustamento delle posizioni finanziarie possano aumentare notevolmente;
4. **Rischio operativo:** il rischio che frodi, errori o altri fallimenti operativi provochino perdite di valore;

5. **Rischio sistemico:** il rischio che il fallimento di una parte del sistema finanziario possa propagarsi all'intero sistema.

e lo definiscono come *il rischio di illiquidità diffusa nel mercato o default a catena*.

Si noti come, se quest'ultimo si riferisce all'intero sistema finanziario, gli altri tipi di rischio riguardano invece singole istituzioni.

Nella letteratura economica sono state nel tempo proposte varie definizioni di rischio sistemico; a titolo di esempio se ne citano alcune:

1. Mishkin 1995 [25]: "La probabilità di un evento improvviso, di solito inaspettato, che interrompe le informazioni nei mercati finanziari, rendendoli incapaci di incanalare efficacemente i fondi verso quelle parti con le opportunità di investimento più produttive."
2. Kaufman 1995 [21]: "La probabilità che si accumulino perdite cumulative a causa di un evento che innesca una serie di perdite successive lungo una catena di istituzioni o mercati che compongono un sistema. Cioè, il rischio sistemico è il rischio di una reazione a catena di cadute di tasselli interconnessi."
3. Banca dei Regolamenti Internazionali 1994 [4]: "Il rischio che il mancato adempimento da parte di un partecipante delle proprie obbligazioni contrattuali possa a sua volta causare il default di altri partecipanti, con una reazione a catena che porta a difficoltà finanziarie più ampie."
4. Board of Governors of the Federal Reserve System 2001 [8]: "Nel sistema dei pagamenti, il rischio sistemico può verificarsi se un'istituzione partecipante a una rete privata di pagamenti di grande valore non fosse in grado o non volesse regolare la propria posizione di debito netto. Se un tale fallimento nel regolamento si verificasse, i creditori dell'istituzione nella rete potrebbero anche non essere in grado di regolare i propri impegni. Gravi ripercussioni potrebbero, di conseguenza, diffondersi ad altri partecipanti nella rete privata, ad altre istituzioni di deposito non partecipanti alla rete e all'economia non finanziaria in generale."

Seppur da queste emerge che il rischio sistemico sia complesso e interconnesso con molteplici aspetti del sistema finanziario, questo non basta secondo Kaufman e Scott [22], Taylor [31] e molti altri a far sì che almeno una di queste sia assunta come sua definizione concordata.

Gli stessi individuano tre elementi caratteristici del rischio sistemico [19]:

- Un evento scatenante
- La propagazione dello shock attraverso il sistema finanziario

- Un impatto significativo della crisi sull'economia macro

Ciascuno di questi elementi può avere matrice di diversa natura; l'evento scatenante può essere esterno al sistema (ad esempio un attacco terroristico) oppure interno (ad esempio il fallimento di un'istituzione interna al sistema); lo shock può propagarsi attraverso collegamenti diretti tra le banche oppure indirettamente come avviene nel caso di crisi di fiducia. Allo stesso tempo anche l'impatto delle crisi sistemiche può assumere varie forme e quindi riguardare indici di mercato, tassi d'interesse, offerta di moneta, offerta di credito, economia produttiva e livello di occupazione [19]. Da tale ambiguità, come notano Admati e Hellwig [2], consegue che la mitigazione di tale rischio può di volta in volta assumere un significato diverso e che quindi possa essere addirittura pericoloso, senza una comune definizione di rischio sistemico, implementare politiche che mirino a ridurlo.

1.1.1 La definizione di Schwarez

Con la crisi del 2007-2008, è emersa chiaramente la capacità di una crisi sistemica di causare danni anche al di fuori della rete; tuttavia, in nessuna delle definizioni precedentemente riportate tale possibilità è contemplata.

E' Schwarez a risolvere questa carenza della letteratura economica definendo il rischio sistemico come segue:

”Il rischio che uno shock economico come il fallimento di un mercato o di un'istituzione inneschi (tramite un panico o in altro modo) il fallimento di una catena di mercati o istituzioni o una catena di perdite significative per le istituzioni finanziarie, causando aumenti nel costo del capitale o diminuzioni della sua disponibilità, spesso evidenziato da una significativa volatilità dei prezzi nei mercati finanziari.”

– *S.L. Schwarez, Systemic Risk*, [29].

Nonostante la formulazione non propriamente elegante, è questa la definizione che ha ricevuto supporto dal maggior numero di esperti in quanto la più vicina a cogliere il significato di rischio sistemico ed è questa quella che adotteremo d'ora in poi.

Il rischio sistemico rappresenta un elemento centrale per l'analisi delle reti finanziarie. Questo, se si tratta di reti interbancarie è particolarmente rilevante per via della complessità e dell'intensità delle relazioni finanziarie che alimentano notevolmente la probabilità di contagio in caso di crisi.

1.2 Quantificazione del rischio sistemico

Quantificare il rischio sistemico è cruciale per analizzare la stabilità del sistema finanziario globale perchè consente di misurare la probabilità e l'impatto di eventi estremi in grado di mettere in crisi l'intero sistema. La gestione del rischio sistemico, a causa della complessità delle interconnessioni tra le istituzioni finanziarie, richiede l'utilizzo di modelli avanzati che possono quantificare sia la probabilità di contagio, sia l'effetto domino delle perdite, come descritto da Prasanna Gai in [13]. L'autore evidenzia come, nelle reti finanziarie, la struttura e l'intensità dei legami tra le banche influenzino la diffusione degli shock e quindi rendano necessario l'utilizzo di un approccio quantitativo.

1.2.1 Il modello RAMSI: struttura e funzionamento

Il **Risk Assessment Model for Systemic Institutions** (RAMSI) è un modello sviluppato dalla Banca d'Inghilterra per la quantificazione del rischio sistemico. Tale modello nasce con l'obiettivo di valutare la vulnerabilità del sistema bancario attraverso simulazioni di stress estremo; combina dati sui bilanci delle banche con variabili macroeconomiche e rappresenta il sistema finanziario come una complessa rete di nodi e archi basandosi sui concetti fondamentali di teoria delle reti e processi di diffusione.

Il modello RAMSI si sviluppa in diverse fasi, rappresentate in figura 1.1. Ciascuna delle fasi riflette un'interazione in cui il sistema è soggetto a shock esterni: per ognuna si analizzano i feedback delle istituzioni bancarie.

Le fasi sono:

1. **Shock Macroeconomico Iniziale:** Ad ogni iterazione, il modello introduce uno shock economico esterno. Ad esempio vengono introdotti eventi come una recessione o una crisi di liquidità, che si riflette su variabili economiche quali il PIL, l'inflazione, i tassi di interesse e i prezzi degli asset. Fattori di questo tipo sono definiti "rischi macroeconomici" che hanno impatti diretti sui bilanci delle banche.
2. **Reazioni delle Banche:** Ogni banca reagisce diversamente agli shock: possono verificarsi perdite sui crediti e sul portafoglio di trading e variazioni nei ricavi da interessi. Una riduzione dei prezzi degli asset, ad esempio, comporta perdite di trading che riducono la capitalizzazione delle banche.
3. **Effetto Soglia e Default Bancario:** Quando le perdite cumulative superano una certa soglia di capitale, una banca entra in default. Questo evento innesca un processo di contagio che coinvolge le banche creditrici, creando un effetto domino che può portare a un collasso sistemico.
4. **Meccanismo di Feedback e Contagio:** Il modello RAMSI integra meccanismi di feedback, in cui il default di una banca può innescare ulteriori default a causa

di perdite da controparte e svalutazione degli asset. Il modello simula in maniera iterativa questi effetti fino al raggiungimento di uno stato di equilibrio o di collasso.

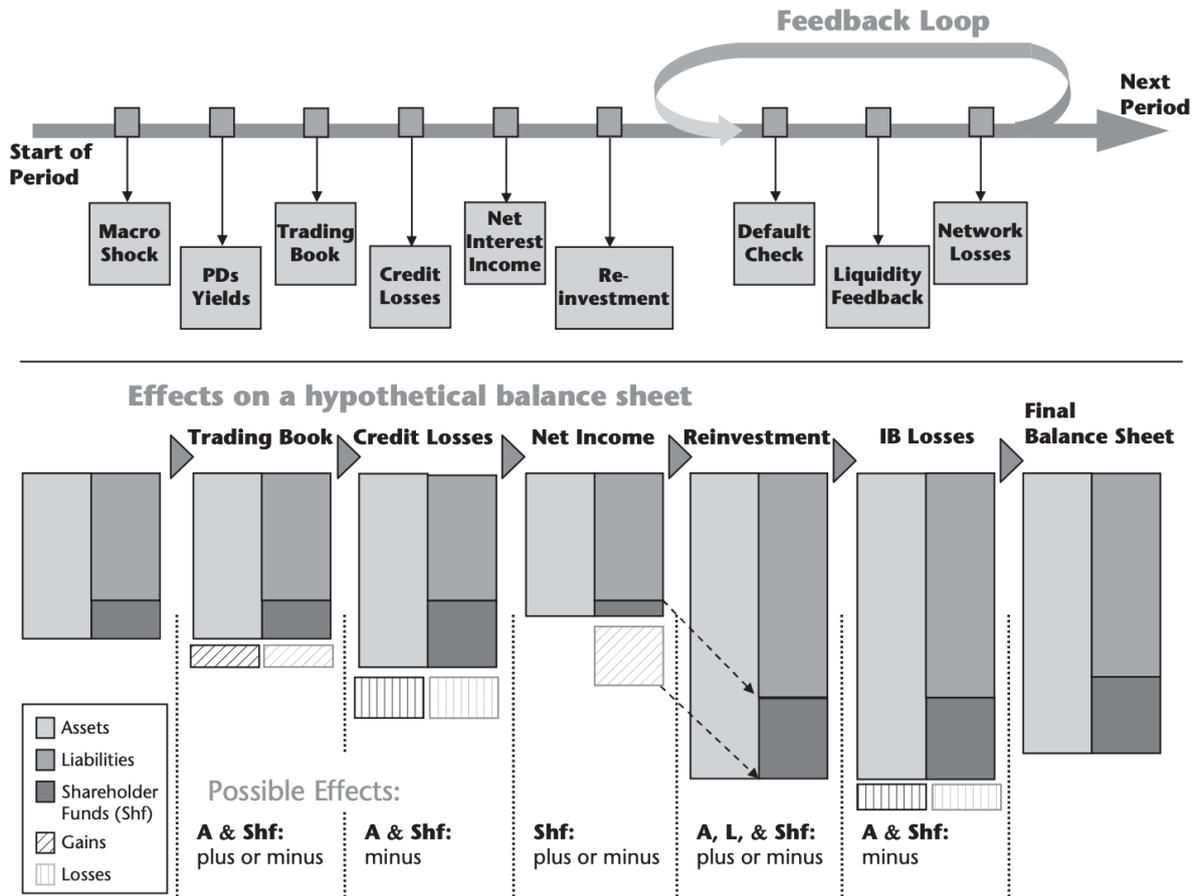


Figura 1.1: Timeline degli eventi nel modello RAMSI. Tratta da [13]

Come si evince da figura 1.1, all'inizio di ogni periodo, viene applicato uno shock economico che si propaga progressivamente. In caso di default di una banca, il sistema aggiorna il bilancio di tutte le altre per riflettere le perdite da controparte, innescando un processo iterativo che simula il contagio.

Il contagio può avvenire attraverso due principali meccanismi[13]:

1. **Perdite da Controparte:** In seguito al default di una banca, i suoi creditori subiscono perdite sulle loro esposizioni verso di essa. Effetti di questo tipo sono

analoghi ai fenomeni di percolazione in fisica¹, in cui una perturbazione si propaga attraverso una rete di nodi interconnessi.

2. **Effetto di Svalutazione degli Asset:** In seguito al default di una banca, i suoi asset vengono liquidati sul mercato per soddisfare le richieste dei creditori. La conseguenza del processo di liquidazione è una discesa dei prezzi di mercato per gli asset simili detenuti da altre banche, generando perdite addizionali per il sistema. Questo fenomeno è paragonabile agli effetti di feedback in sistemi fisici non lineari, dove una piccola perturbazione iniziale può amplificarsi a causa di interazioni interne al sistema.

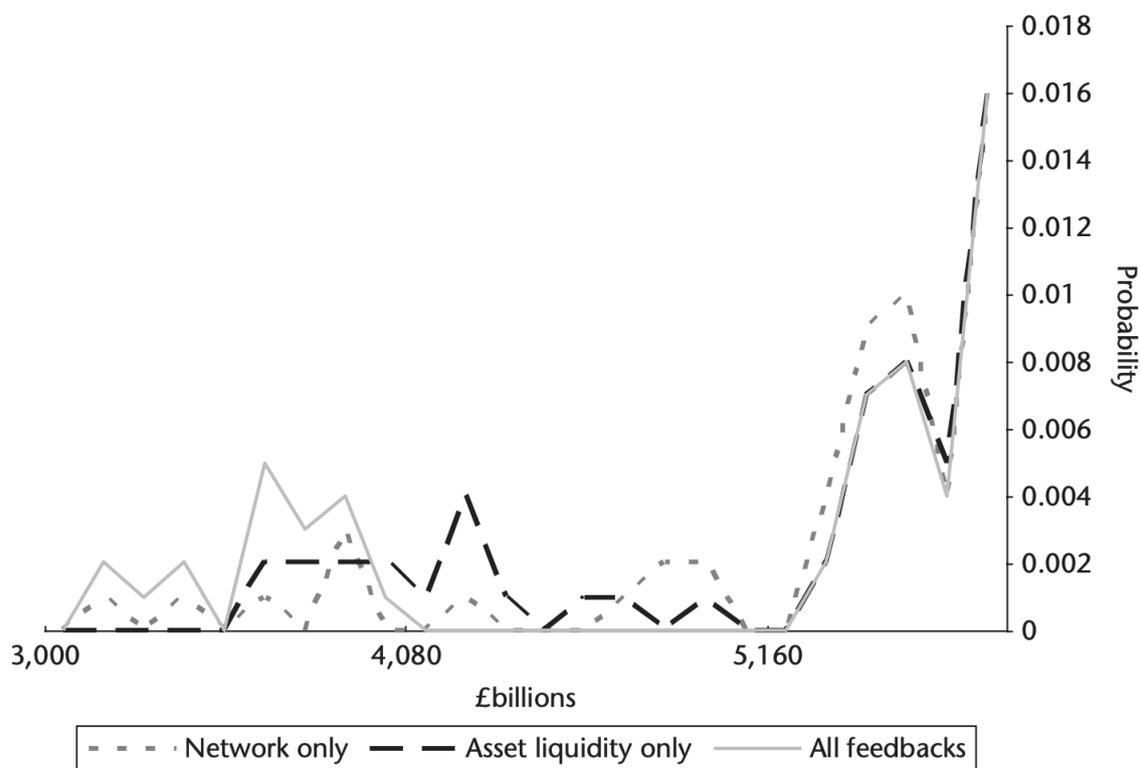


Figura 1.2: Analisi della biomodalità. Tratta da [13]

La **distribuzione bimodale** delle perdite è un aspetto interessante del modello RAMSI. In condizioni standard, la maggior parte delle banche riesce a mantenere la propria stabilità ma in situazione di particolare stress, il sistema entra in una condizione di

¹I modelli di percolazione, spesso utilizzati per studiare la diffusione di fluidi in materiali porosi, sono strumenti utili per comprendere come il fallimento di un nodo (banca) possa diffondersi attraverso l'intero sistema finanziario.

instabilità; in particolare, in figura 1.2, si evidenzia un secondo picco che rappresenta lo scenario di default a catena. La figura 1.2 mostra infatti come, in presenza di feedback di rete e svalutazione degli asset, la distribuzione delle perdite si sposti verso il secondo picco, suggerendo quindi un aumento della probabilità di crisi sistemica.

La struttura del sistema finanziario risultante dal modello RAMSI è analoga ad una rete complessa, in cui le banche sono i nodi e le connessioni rappresentano legami finanziari.

La **teoria della percolazione** è rilevante nello studio del contagio finanziario: i nodi possono trasmettere una perturbazione (come una perdita finanziaria) ai nodi vicini, in una modalità simile a quella con cui un fluido percola attraverso un materiale poroso. Nel RAMSI, se la percentuale di nodi compromessi non supera una certa soglia critica, la crisi può rimanere confinata, altrimenti può diffondersi a livello sistemico.

In presenza di feedback di rete e svalutazione degli asset, come mostrato in figura 1.3, la distribuzione si sposta verso scenari estremi aumentando la probabilità di default multipli.

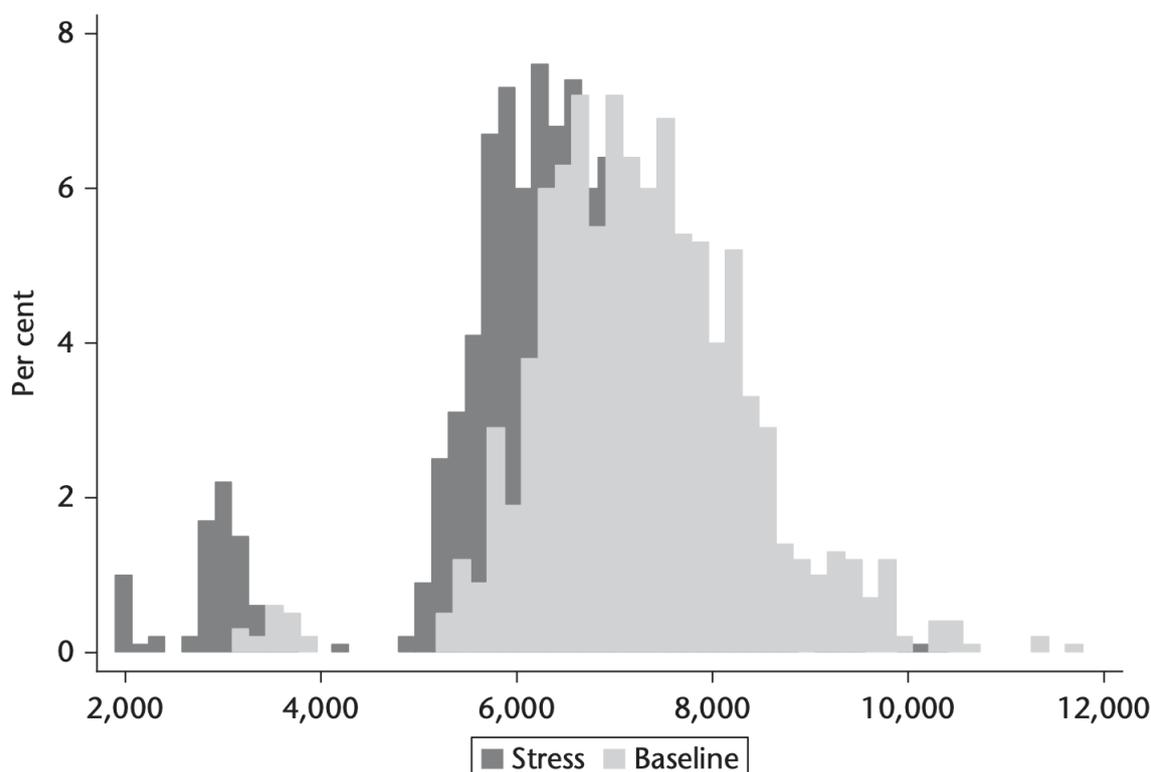


Figura 1.3: Asset del sistema sotto stress. Tratta da [13]

Un approccio di questo tipo consente di monitorare il sistema finanziario e adottare, all'occorrenza, le misure di contenimento più opportune. Attraverso simulazioni di shock e analisi delle interconnessioni finanziarie, il modello permette di esplorare come uno shock locale possa amplificarsi e trasformarsi in una crisi sistemica: un esempio esplicativo è rappresentato dalla crisi del 2008.

1.3 La tendenza di diffusione delle crisi

Come già discusso nelle sezioni precedenti, nel mercato interbancario esiste una tendenza per le crisi a diffondersi da istituzione a istituzione [27]. Le crisi si manifestano talvolta come eventi che si propagano rapidamente attraverso il sistema causando un effetto domino di default. Tale fenomeno di diffusione, noto come *contagio finanziario*, è alimentato dalla struttura fortemente interconnessa dei moderni sistemi finanziari in cui le istituzioni finanziarie sono tra loro legate da una rete complessa di crediti e obbligazioni [20].

Gli studi condotti da Allen e Gale [14] hanno dimostrato la dipendenza del contagio finanziario dalla struttura della rete di collegamento delle istituzioni finanziarie.

Quando la rete è completa e cioè l'esposizione reciproca tra le banche è uniforme, l'effetto di uno shock iniziale tende ad essere contenuto e distribuito e quindi l'impatto della crisi risulta complessivamente ridotto. Nelle reti incomplete, quando l'esposizione non è uniforme, lo shock iniziale può causare il fallimento delle banche vicine e innescare quindi un ciclo di default con alta velocità di propagazione. Uno scenario di questo tipo è stato osservato nel 2008, quando il fallimento di Lehman Bros si diffuse rapidamente innescando una crisi globale di liquidità.

1.3.1 La tendenza "robusta-ma-fragile" della rete finanziaria

Gli eventi di crisi, mettono in evidenza come le risposte comportamentali degli attori della rete possano esacerbare il contagio.

Nel corso degli anni le reti finanziarie globali hanno visto un aumento di complessità e interconnessione. Un aumento di connettività può essere facilmente associato ad un aumento della robustezza della rete in quanto consente una maggiore distribuzione del rischio.

D'altra parte, se è vero che l'interconnessione può favorire un ammortizzazione del rischio, è vero anche che quando uno shock colpisce un nodo altamente connesso, la stessa rete può diventare estremamente vulnerabile.

L'elemento chiave della questione è quindi la presenza di nodi cosiddetti "hub", ovvero istituzioni finanziarie altamente connesse. Questi "hub", se colpiti da un fallimento, possono trasformarsi in un canale di amplificazione del contagio, innescando una cascata

di effetti negativi su tutto il sistema. Questo comportamento è tipico delle reti con distribuzioni del grado cosiddette "a coda grassa", nelle quali una piccola percentuale di nodi detiene la maggior parte delle connessioni.

In reti di questo tipo, uno shock casuale che interessa un nodo periferico può essere facilmente attutito mentre uno shock che interessa un nodo centrale può portare al collasso.

Questo tipo di dinamiche rendono le reti finanziarie "robuste-ma-fragili": in condizioni normali la connettività riduce la probabilità di crisi sistemiche, ma in condizioni di shock significativi ai nodi principali, il contagio può diffondersi rapidamente e minacciare l'integrità dell'intero sistema finanziario.

1.4 La crisi del 2008: un caso di studio

La crisi finanziaria globale del 2008 è stato un evento senza precedenti, caratterizzato da un default sistemico che ha irrimediabilmente scosso l'economia mondiale.

Dopo il rallentamento del 2001, gli anni precedenti alla crisi, in particolare il triennio 2004-2006, detto della *Great Moderation*, hanno visto una fase di espansione economica su larga scala caratterizzata per i bassi tassi d'interesse e per i contenuti livelli di inflazione. Tali circostanze hanno favorito un significativo aumento del valore degli asset, in particolare negli Stati Uniti, alimentando i consumi.

Lo sviluppo di prodotti finanziari complessi e rischiosi come il modello di intermediazione "originate-to-distribute"² (OTD) ha permesso alle banche di cedere facilmente i crediti erogati e favorito la diffusione di strumenti come i mutui subprime³ [24]. All'imponente crescita economica si sono affiancate altresì le conseguenze negative di questi cambiamenti: un deterioramento degli standard di concessione del credito ma soprattutto una globale sottovalutazione del rischio che ha portato ad una crescente insolvenza dei mutuatari e quindi anche ad un'insostenibile crescita del debito.

Con la crescita dei tassi di insolvenza, il valore dei mutui subprime si ridusse drasticamente causando significative perdite per le istituzioni finanziarie coinvolte. La crisi dei mutui subprime è infatti considerata il fattore scatenante della prima fase della crisi del 2008. Il fallimento di Lehman Bros nel settembre 2008 è considerato invece l'inizio di una seconda fase della crisi e se vogliamo il suo apice. In questa fase la consapevolezza dell'inaccessibilità al capitale privato degli investitori, ha innescato una generale crisi di fiducia tra le istituzioni finanziarie. La dichiarazione di bancarotta di una delle principali

²un modello finanziario basato sulla cessione di attività o passività, beni o debiti di privati o di crediti di una società (solitamente una banca) conosciuta con il nome di *originator*, attraverso cui si costruiscono emissioni mediante la trasformazione del bene o del debito o credito (*securitization*) in titoli obbligazionari, poi collocati presso il pubblico.

³è un prodotto che viene erogato a persone la cui valutazione creditizia è considerata di livello inferiore rispetto ad altri soggetti.

banche d'investimento degli Stati Uniti (Lehman Bros) provocò un'ondata di panico sui mercati finanziari globali e la rapida diffusione della crisi di liquidità.

Un evento di questo tipo ha evidenziato come il fallimento di una singola istituzione possa avere ripercussioni sistemiche mettendo in luce la vulnerabilità del sistema finanziario interconnesso.

1.4.1 Il discorso di Haldane: la crisi del 2008 a confronto con l'epidemia di SARS del 2002

All'indomani della crisi, nel 2009, il Direttore Esecutivo per la Stabilità Finanziaria presso la Banca d'Inghilterra, Andrew G. Haldane, tenne un discorso intitolato "Rethinking the Financial Network" [18].

Nel suo discorso, Haldane, oltre a fornire un'eccellente panoramica della natura delle reti finanziarie, attuò un confronto, se vogliamo un parallelismo, tra il fallimento di Lehman Bros e l'epidemia di SARS del 2002.

Egli notò che nei due eventi di contagio si potesse identificare uno schema comune a qualsiasi sistema complesso adattivo:

- Un evento esterno che colpisce
- Segue il panico e il sistema complesso si blocca
- I danni collaterali sono ampi e profondi

Facendo una valutazione a posteriori, in entrambi i casi, nonostante l'evento scatenante fosse di modesta entità, durante l'evento la dinamica era caotica.

Haldane imputò il default del 2008 a due tendenze in particolare: l'aumento della complessità e la diminuzione della diversità.

L'aumento della complessità, rappresentato in figura 1.4 implica l'instaurarsi della tendenza "robusta-ma-fragile" già descritta nella sezione 1.3.1. Una rete dove c'è un significativo numero di nodi altamente connessi come quella in analisi se è vero che può essere robusta nel fronteggiare shock casuali, può essere altamente vulnerabile a shock che mirano ai nodi altamente connessi.

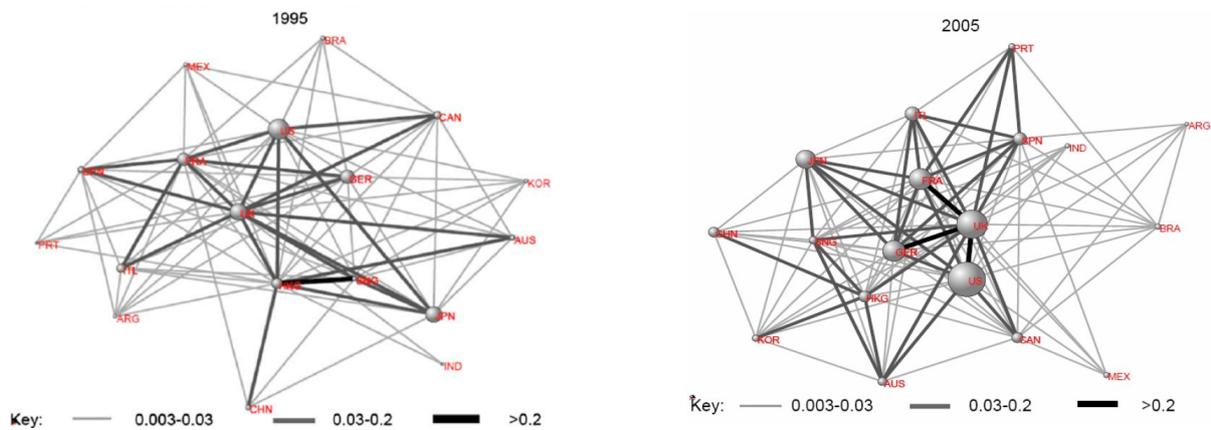


Figura 1.4: La rete finanziaria globale nel 1995 (a sinistra) e nel 2005 (a destra). Lo spessore delle linee indica la forza dei collegamenti come frazione del PIL totale. Tratta da [18].

Negli esempi trattati da Haldane gli attori mostrano una varietà di risposte comportamentali che creano feedback e influenzano la stabilità di rete [19].

Durante un'epidemia possono generarsi risposte di due tipi: "nascondersi" o "fuggire"; a seconda di quale tra queste sia dominante, la virulenza dell'evento varia. Nelle crisi finanziarie, allo stesso modo, le banche possono decidere se accumulare liquidità o vendere attività; peggiorando in ogni caso il problema sistemico. In periodi sfavorevoli è facile che il rischio che una delle parti sia inadempiente ai propri obblighi, il rischio cioè di controparte, aumenti per via della complessità e interconnessione della rete.

Durante il triennio della *Great Moderation*, la ricerca di rendimenti ha portato molti degli attori a seguire strategie simili e ad adottare medesime scelte nella gestione del rischio con conseguente drastica riduzione della diversità finanziaria. Il risultato di queste tendenze è stata una sempre più marcata omogeneità dei bilanci bancari.

"La finanza è diventata quasi una monocultura, in cui tutte le banche sono diventate vulnerabili all'infezione dallo stesso virus" [19, p. 8].

Secondo Haldane, modellizzare questo tipo di reti, approfondendo lo studio oltre l'ambito finanziario, è l'unico modo di indagare con efficienza gli elementi che ne influenzano la stabilità.

Capitolo 2

La modellizzazione delle reti finanziarie

La modellizzazione delle reti finanziarie è un campo di studio essenziale per comprendere le interazioni tra istituzioni finanziarie e per analizzare le dinamiche di rischio, stabilità e contagio nel sistema finanziario globale.

In una rete finanziaria, le istituzioni finanziarie (banche, mercati, investitori) sono rappresentate da nodi (o vertici) e le relazioni finanziarie tra queste entità come prestiti, partecipazioni azionarie, derivati, scambi di titoli o altri contratti finanziari sono rappresentate da collegamenti (o archi).

Queste reti forniscono uno strumento potente per comprendere il rischio sistemico che si verifica quando uno shock locale, come il fallimento di una banca o una crisi di liquidità, per via della crescente interconnessione tra banche e istituzioni finanziarie globali, si propaga rapidamente innescando crisi che si diffondono generando problemi più ampi.

Esistono diversi tipi di reti finanziarie, ciascuna delle quali rappresenta un aspetto specifico dei mercati finanziari:

- **Reti interbancarie:** Queste reti modellano le relazioni di prestito e finanziamento tra le banche. I nodi rappresentano le banche e gli archi i prestiti tra di loro. L'analisi di tali reti può identificare le banche più connesse e vulnerabili al rischio di default.
- **Reti di proprietà azionarie:** In queste reti, i nodi rappresentano le aziende e gli archi la quota di proprietà che un'azienda detiene di un'altra. Talune reti possono essere utilizzate per identificare concentrazioni di potere o rischi di contagio durante le crisi.
- **Reti di liquidità:** In queste reti i nodi rappresentano istituzioni finanziarie e mercati e gli archi, prestiti e depositi. La modellizzazione di queste reti è fondamentale

per comprendere come si muovono i capitali e quali istituzioni possano essere più vulnerabili.

- **Reti di esposizione ad derivati:** In queste reti, i nodi rappresentano gli attori finanziari e gli archi i contratti derivati da loro scambiati. Reti come queste sono cruciali per comprendere l'esposizione delle istituzioni finanziarie a strumenti complessi e le conseguenti modalità di propagazione del rischio.

La capacità di analizzare il rischio sistemico e il contagio è un tema centrale nella modellizzazione delle reti finanziarie.

Modellando le reti, si può simulare come i rischi si propagano da un nodo all'altro. Si osserva in particolare che reti dense di connessioni, possono facilitare la propagazione del rischio, mentre reti più sparse possono essere più resilienti a shock localizzati. Le reti finanziarie consentono di identificare cioè le istituzioni "troppo grandi per fallire" o "troppo connesse per fallire".

E' possibile applicare vari approcci matematici e computazionali al fine di modellizzare le reti:

- **Modelli di contagio:** Questi modelli simulano come una crisi finanziaria si diffonda attraverso la rete; ad esempio un default bancario può propagarsi lungo i collegamenti rappresentati dalle esposizioni debitorie, causando un effetto a cascata.
- **Modelli multilivello:** Questi modelli considerano diversi tipi di relazioni simultanee: esposizioni debitorie, transazioni di derivati e proprietà azionarie. In questo modo offrono una visione più completa e dettagliata delle interconnessioni finanziarie.
- **Stress test:** E' possibile simulare scenari di stress sulle reti finanziarie e osservare come il rischio si diffonda attraverso la rete. Questo approccio è fondamentale per comprendere la resilienza del sistema in condizioni di crisi.

2.1 La teoria dei grafi

La teoria dei grafi permette di rappresentare in maniera efficiente le connessioni tra le entità finanziarie come una rete, fornendo un quadro matematico essenziale per analizzare la propagazione del rischio sistemico e del contagio all'interno del sistema.

Un grafo può rappresentare formalmente le reti finanziarie ed è definito matematicamente come:

$$G = (V, E) \tag{2.1}$$

dove V è l'insieme dei nodi (o vertici) e E è l'insieme degli archi (o spigoli). Nodi e archi rappresentano rispettivamente le entità finanziarie e le loro relazioni.

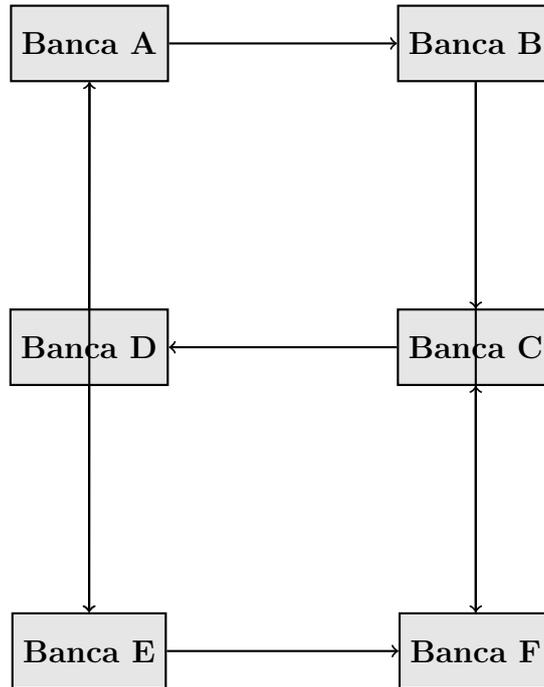


Figura 2.1: Rete interbancaria schematica.

La figura 2.1 rappresenta schematicamente una rete interbancaria in cui ciascuno dei nodi indica una banca e ciascuno dei collegamenti rappresenta una relazione di credito direzionale tra gli attori.

Per comprendere formalmente le connessioni tra entità finanziarie si introduce la matrice di adiacenza A , una matrice quadrata di dimensioni $|V| \times |V|$ definita come:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se esiste un arco da } i \text{ a } j, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.2)$$

Questa matrice permette di esprimere in forma matematica le relazioni tra le banche; nel caso specifico della figura 2.1, la matrice di adiacenza è una matrice quadrata di dimensioni 6×6 , dove ogni riga e colonna rappresenta una banca (Banca A, Banca B, ..., Banca F). Se tra una banca i e una banca j esiste un collegamento diretto, l'elemento $A_{ij} = 1$, altrimenti è uguale a 0. La matrice di adiacenza è quindi la seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

In questa matrice:

- L'elemento $A_{12} = 1$ indica che esiste una connessione da "Banca A" a "Banca B".
- L'elemento $A_{34} = 1$ rappresenta una connessione da "Banca C" a "Banca D".
- Gli zeri indicano l'assenza di connessioni dirette tra le banche corrispondenti.

Applicando la teoria dei grafi alla modellizzazione delle reti finanziarie, è possibile studiare dettagliatamente la stabilità del sistema nella sua interezza.

2.1.1 Tipologie di grafi e grado dei nodi

Sulla base delle caratteristiche delle relazioni tra le entità, i grafi possono essere:

- **Direzionali:** Quando esiste una direzione specifica nel collegamento tra due banche.
- **Ponderati:** Quando agli archi è assegnato un peso dato dalla matrice A_{ij} che rappresenta la "quantità" di esposizione finanziaria tra due entità e assume valori reali.

Il **grado di un nodo** è una delle varie proprietà fondamentali dei grafi che permette di descriverne e comprenderne il comportamento. Il **grado** rappresenta il numero di connessioni che un'entità ha con le altre. E' utile per identificare le istituzioni che sono più connesse e quindi più "centrali" nel sistema finanziario. Nello specifico:

- Il **grado entrante** rappresenta il numero di prestiti ricevuti da un'istituzione:

$$k_i^{out} = \sum_j A_{ij} \quad (2.4)$$

- Il **grado uscente** rappresenta il numero di prestiti concessi da un'istituzione:

$$k_i^{in} = \sum_j A_{ji} \quad (2.5)$$

Metriche di centralità

La **centralità di un nodo** misura l'importanza di un nodo nella rete. Per identificare i nodi più critici si utilizzano varie metriche di centralità:

- **Centralità di grado:** Misura il numero di connessioni in un nodo come:

$$C_D(i) = k_i \quad (2.6)$$

dove $k_i = k_i^{in} + k_i^{out}$ nel caso di grafi direzionati. Lo stesso valore normalizzato è:

$$C_D(i) = \frac{k_i}{N - 1} \quad (2.7)$$

- **Centralità di betweenness:** Misura quanto un nodo si trovi sui percorsi più brevi tra altri nodi, consentendo di individuare la sua importanza come intermediario. Si esprime come:

$$C_B(i) = \sum_{s \neq i \neq t} \frac{\sigma_{st}(i)}{\sigma_{st}} \quad (2.8)$$

dove

- σ_{st} è il numero di percorsi minimi tra i nodi s e t .
- $\sigma_{st}(i)$ è il numero di questi percorsi che passano per il nodo i .

- **Centralità di vicinanza:** Misura quanto un nodo è vicino agli altri consentendo di individuare le banche più influenti sul sistema. Si esprime come:

$$C_C(i) = \frac{1}{\sum_j d(i, j)} \quad (2.9)$$

dove $d(i, j)$ è la distanza minima tra i nodi i e j .

Coefficiente di clustering

Un altro indicatore importante è il **clustering coefficient**, che fornisce una misura della tendenza dei nodi vicini ad essere connessi tra loro. Questo coefficiente è definito come:

$$C_i = \frac{2e_i}{k_i(k_i - 1)} \quad (2.10)$$

dove:

- e_i è il numero di archi esistenti tra i vicini del nodo i .
- k_i è il grado del nodo i .

Il coefficiente di clustering C_i misura la tendenza dei nodi vicini a connettersi. In reti finanziarie, un elevato C_i può indicare cluster di banche, che aumentano il rischio di contagio. La tabella seguente riporta C_i per ciascuna banca del grafico:

Banca	Grado	Coefficiente di Clustering
Banca A	4	0.5
Banca B	3	0.33
Banca C	3	0.67

Tabella 2.1: Coefficiente di clustering per ciascuna banca.

Un alto valore di questo coefficiente, può quindi indicare che le banche formano gruppi altamente connessi e quindi più vulnerabili al contagio.

La tabella 2.2 riassume le principali metriche di centralità e il clustering coefficient e colloca ciascuno di questi indicatori nel contesto delle reti finanziarie. Questi consentono di indentificare i nodi cruciali della rete e di valutare il contagio e la stabilità sistemica.

Metrica di Centralità	Descrizione	Interpretazione
Centralità di Grado	Numero di connessioni di un nodo.	Indica la connettività di una banca; alta centralità di grado può amplificare il contagio.
Centralità di Betweenness	Frequenza di passaggio nei percorsi minimi.	Misura il ruolo di intermediazione; alta betweenness facilita la propagazione del contagio.
Centralità di Vicinanza	Inversa della distanza media da tutti gli altri nodi.	Indica l'influenza di una banca sul sistema; alta vicinanza implica alto rischio di contagio.
Coefficiente di Clustering	Probabilità che i vicini di un nodo siano collegati tra loro.	Misura la tendenza a formare gruppi connessi, favorendo la diffusione di shock locali.

Tabella 2.2: Metriche di centralità e loro interpretazione nelle reti finanziarie.

2.1.2 Calcolo delle metriche di centralità

Per comprendere meglio le metriche di centralità, applichiamo quanto appreso teoricamente alla rete rappresentata in figura 2.1:

Centralità di Grado Per ciascuna banca (nodo), la centralità di grado si calcola sommando le connessioni entranti e uscenti. Ad esempio, per "Banca A":

$$C_D(\text{Banca A}) = k_{\text{in}}(A) + k_{\text{out}}(A) = 1 + 3 = 4 \quad (2.11)$$

Centralità di Betweenness Questa misura valuta quanto spesso un nodo si trovi sui percorsi minimi tra altri nodi. Per "Banca C", calcoliamo i percorsi minimi tra le altre banche che includono "Banca C".

Supponiamo di avere i seguenti percorsi minimi tra coppie di nodi che passano per "Banca C":

- Tra "Banca A" e "Banca E": c'è un percorso minimo $A \rightarrow C \rightarrow E$, quindi $\sigma_{AE} = 1$ e $\sigma_{AE}(C) = 1$, che contribuisce con:

$$\frac{\sigma_{AE}(C)}{\sigma_{AE}} = \frac{1}{1} = 1. \quad (2.12)$$

- Tra "Banca B" e "Banca D": supponiamo ci siano due percorsi minimi, uno dei quali passa per "Banca C", quindi $\sigma_{BD} = 2$ e $\sigma_{BD}(C) = 1$. Il contributo di "Banca C" in questo caso è:

$$\frac{\sigma_{BD}(C)}{\sigma_{BD}} = \frac{1}{2} = 0.5. \quad (2.13)$$

Sommando i contributi per tutti i percorsi minimi che passano per "Banca C", otteniamo:

$$C_B(\text{Banca C}) = 1 + 0.5 = 1.5 \quad (2.14)$$

Centralità di Vicinanza Indica la vicinanza di un nodo a tutti gli altri nodi, ed è definita come l'inverso della somma delle distanze minime dal nodo agli altri nodi. Per "Banca A", calcoliamo la centralità di vicinanza come segue:

Supponiamo che le distanze minime di "Banca A" verso le altre banche siano:

- Distanza da "Banca A" a "Banca B": $d(A, B) = 1$
- Distanza da "Banca A" a "Banca C": $d(A, C) = 2$
- Distanza da "Banca A" a "Banca D": $d(A, D) = 1$
- Distanza da "Banca A" a "Banca E": $d(A, E) = 1$

- Distanza da "Banca A" a "Banca F": $d(A, F) = 2$

La centralità di vicinanza per "Banca A" è quindi calcolata come:

$$C_C(\text{Banca A}) = \frac{1}{\sum_j d(A, j)} = \frac{1}{1 + 2 + 1 + 1 + 2} = \frac{1}{7} \approx 0.143 \quad (2.15)$$

2.1.3 Connettività e contagio nella rete

Un insieme di nodi collegati tra loro forma una **componente connessa**. Nelle reti finanziarie, identificare le componenti connesse è fondamentale per capire quali istituzioni siano maggiormente esposte al contagio.

Le reti finanziarie seguono spesso una struttura, detta **struttura scale-free** caratterizzata da pochi nodi altamente connessi (hub). Nella nostra rete di esempio, "Banca A" agisce da hub. In caso di suo fallimento, l'intero sistema subirebbe ripercussioni significative. I **percorsi** rappresentano le connessioni che collegano due nodi mentre la **distanza geodetica** è il numero minimo di collegamenti necessari per passare da un nodo all'altro. Percorsi brevi tra nodi indicano che il rischio possa diffondersi rapidamente.

La distanza geodetica tra due nodi rappresenta il percorso minimo necessario per connetterli. Considerando "Banca A" e "Banca C", la distanza geodetica è di 2 poiché il percorso più breve attraversa "Banca B" o "Banca F". Nelle reti più complesse, si utilizzano algoritmi specifici per individuare i percorsi più brevi.

2.1.4 La struttura della rete interbancaria

Il mercato interbancario può essere rappresentato come una rete complessa in cui le connessioni tra le istituzioni finanziarie riflettono le esposizioni creditizie reciproche. Analizzare la rete consente di individuare elementi critici per la stabilità del sistema e di comprendere i possibili meccanismi di contagio finanziario. Di seguito, affronteremo l'applicazione di diversi approcci per studiare la struttura e le caratteristiche della rete interbancaria, ognuno dei quali contribuisce a una visione più completa della resilienza del sistema.

Un modello generalmente utilizzato per rappresentare il mercato interbancario è quello di un grafo direzionato e ponderato $G = (V, E)$, in cui:

- V è l'insieme dei nodi che rappresentano le singole istituzioni finanziarie.
- E è l'insieme dei collegamenti (o archi) che rappresentano le relazioni creditizie come prestiti o esposizioni debitorie.

La direzionalità degli archi identifica il debitore e il creditore [5]: un arco dal nodo i al nodo j indica che la banca i ha un'esposizione creditizia verso la banca j . Il peso assegnato a ciascuno dei collegamenti w_{ij} rispecchia l'entità dell'esposizione, ad esempio

l'importo del prestito. La rete può essere descritta tramite una matrice di adiacenza ponderata A in cui, se esiste un'esposizione da i a j , $A_{ij} = w_{ij}$, altrimenti $A_{ij} = 0$.

La matrice delle esposizioni W può essere impiegata nel calcolo della probabilità di default condizionato. Ad esempio, se un nodo j è insolvente, la probabilità che questo causi il default del nodo i a cui è collegato è calcolata come:

$$P_{D|C}(i|j) = \frac{W_{ij}}{\sum_{k \in N(i)} W_{ik}} \quad (2.16)$$

In questa espressione $N(i)$ rappresenta l'insieme dei nodi connessi a i . $P_{D|C}(i|j)$ permette dunque di quantificare la vulnerabilità di un nodo rispetto al default di un nodo vicino.

Recentemente, l'uso della teoria delle reti nei sistemi finanziari è cresciuto notevolmente, soprattutto dopo la crisi finanziaria del 2008 [7]. Questo ha portato a sviluppare diversi approcci di analisi delle reti finanziarie, classificati in tre livelli di analisi:

1. **Approccio topologico**

Il primo livello adotta un approccio puramente topologico in cui i collegamenti tra nodi possono o meno esistere.

2. **Approccio ponderato e direzionale**

Il secondo livello introduce peso e direzionalità dei collegamenti, aumentando la complessità del modello [26].

3. **Approccio basato sul "fitness"**

Il terzo livello, aggiunto di recente, assegna ai nodi un grado di libertà detto "fitness" che ha influenza sulla topologia della rete [16].

Approccio topologico

In questo contesto, la rete può essere descritta tramite la matrice di adiacenza A dove, come precedentemente visto, $A_{ij} = 1$ se esiste un collegamento tra il nodo i e il nodo j , e $A_{ij} = 0$ altrimenti. Si studiano proprietà come la distribuzione dei gradi $P(k)$ dove k è il numero di collegamenti di un nodo. Si analizza se la rete segue una distribuzione di grado a invarianza di scala (power-law), indicativa di nodi altamente connessi (hub).

La distribuzione dei gradi può essere espressa come:

$$P(k) \propto k^{-\gamma} \quad (2.17)$$

Nelle reti finanziarie, valori tipici di γ si aggirano tra 2 e 3, indicando una distribuzione eterogenea dei gradi. Questa distribuzione, nota come invarianza di scala, suggerisce che pochi nodi (hub) abbiano un alto numero di connessioni, mentre la maggior parte dei nodi ha un numero basso di collegamenti. Gli hub sono elementi critici per la stabilità

della rete, poiché la loro disfunzione può propagare il rischio in modo significativo. La distribuzione dei gradi nella rete interbancaria segue una legge di potenza, tipica di reti finanziarie. Questa caratteristica evidenzia la presenza di nodi "hub", cruciali per la stabilità della rete poiché concentrazione di connessioni.

Si calcolano anche parametri globali come il coefficiente di clustering medio $\langle C \rangle$, che misura la tendenza dei nodi a formare triangoli, e la lunghezza media dei cammini $\langle L \rangle$, che indica l'efficienza della trasmissione di informazioni nella rete [3]. Il coefficiente di clustering per un nodo i è definito come:

$$C_i = \frac{2e_i}{k_i(k_i - 1)} \quad (2.18)$$

dove e_i è il numero di collegamenti tra i vicini del nodo i e k_i è il grado del nodo i .

In sintesi, l'analisi topologica della rete interbancaria fornisce un quadro generale della distribuzione delle connessioni e dell'esistenza di hub. Questi elementi strutturali sono essenziali per comprendere la stabilità e le vulnerabilità del sistema. Tuttavia, per approfondire il ruolo delle esposizioni finanziarie, è necessario considerare non solo la presenza dei collegamenti, ma anche il loro peso e la direzionalità, come verrà discusso nel prossimo approccio.

Approccio ponderato e direzionale

In questo caso i collegamenti, oltre ad esistere, possono avere un peso e una direzione. La matrice di adiacenza diventa quindi una matrice ponderata W , dove W_{ij} rappresenta il peso del collegamento dal nodo i al nodo j .

Un approccio di questo tipo permette di individuare i nodi che, oltre ad essere altamente connessi, gestiscono volumi significativi di transazioni; si considerano infatti misure come la forza dei nodi, in particolare:

- **Forza entrante:**

$$s_i^{\text{in}} = \sum_j W_{ji} \quad (2.19)$$

- **Forza uscente:**

$$s_i^{\text{out}} = \sum_j W_{ij} \quad (2.20)$$

Alcune banche gestiscano volumi elevati sia in termini di esposizioni in entrata che in uscita. Questa caratteristica rende tali istituzioni potenziali canali di contagio all'interno della rete, poiché una loro difficoltà finanziaria potrebbe avere un effetto a cascata su altre banche connesse.

Per evidenziare la prevalenza delle transazioni di entità diverse, si analizza inoltre la distribuzione dei pesi $P(w)$. Questa può rivelare se ci sono poche transazioni di grande

entità o molte di piccola entità, influenzando la dinamica del contagio nella rete. Un esempio di distribuzione dei pesi $P(w)$ in scala log-log, indicativa di una distribuzione a legge di potenza è caratteristica delle reti eterogenee.

Coefficiente di Clustering Ponderato Si possono inoltre calcolare coefficienti di clustering ponderati, come proposto da Barrat et al. [6], per evidenziare la tendenza delle banche a formare cluster coesi con intensità variabile delle transazioni. Il coefficiente di clustering ponderato per un nodo i è dato da:

$$C_i^w = \frac{1}{s_i(k_i - 1)} \sum_{j,h} \frac{(W_{ij} + W_{ji})}{2} \frac{(W_{ih} + W_{hi})}{2} \frac{A_{jh}}{2} \quad (2.21)$$

dove s_i è la forza del nodo i e A_{jh} è l'elemento della matrice di adiacenza (non ponderata).

L'approccio ponderato e direzionale consente di ottenere una visione dettagliata delle interazioni finanziarie, mettendo in luce sia l'importanza dei nodi altamente connessi che il volume delle transazioni gestite. Tali informazioni sono essenziali per comprendere i potenziali canali di contagio in caso di shock finanziari all'interno della rete.

Approccio basato sulla "fitness"

La fitness η_i di un nodo i rappresenta una sua caratteristica intrinseca che determina la capacità di "attrarre" collegamenti.

Nei modelli basati su tale approccio, la probabilità che due nodi i e j siano collegati è proporzionale al prodotto delle loro fitness:

$$P_{ij} = \frac{\eta_i \eta_j}{\sum_{k,l} \eta_k \eta_l} \quad (2.22)$$

Reti descritte da questo modello hanno distribuzioni di grado che possono essere regolate variando la distribuzione delle fitness. Ad esempio, se la fitness segue una distribuzione esponenziale, la distribuzione dei gradi risultante può essere una legge di potenza.

Gli effetti di P_η sulla struttura globale della rete riguardano la formazione di hub. Un'analisi sul rapporto tra la resilienza della rete e la fitness evidenzia che, rimuovendo nodi ad alta fitness, la connettività globale è fortemente influenzata[16]. Le banche con fitness più elevata tendono ad avere un grado più alto, riflettendo una maggiore interconnessione.

Il modello di fitness permette di analizzare la resilienza del sistema in caso di shock che colpiscano nodi con alta fitness. Secondo Garlaschelli et al. [16], la rimozione di nodi ad alta fitness riduce significativamente la connettività della rete, aumentando la vulnerabilità al contagio. Pertanto, i nodi con fitness elevata possono fungere sia da facilitatori della liquidità che da canali di propagazione di crisi, rendendo la rete suscettibile a shock sistemici.

Questi risultati indicano che le politiche di mitigazione del rischio, come il rafforzamento dei requisiti di capitale per le banche altamente interconnesse, possono migliorare la stabilità complessiva della rete.

L'integrazione di questi livelli di analisi è uno strumento utile a comprendere più approfonditamente le reti interbancarie. Questo approccio "multilivello" fornisce al primo livello una visione generale della struttura delle connessioni, introduce poi al secondo livello pesi e direzionalità permettendo di quantificare i flussi finanziari e il terzo livello, tramite l'uso della fitness offre una spiegazione dei meccanismi che riguardano la formazione della rete.

Al fine di identificare vulnerabilità sistemiche e sviluppare di conseguenza strategie di mitigazione del rischio, un approccio di questo tipo è fondamentale.

Ciascun livello di analisi offre una prospettiva specifica della resilienza e vulnerabilità del sistema. L'approccio topologico fornisce una panoramica generale della connettività della rete, utile per identificare i punti critici che potrebbero facilitare la diffusione del contagio. L'approccio ponderato e direzionale permette una comprensione dettagliata dei flussi finanziari, consentendo di modellare l'impatto degli shock sulla base della distribuzione dei pesi e della direzionalità delle connessioni. Infine, l'approccio basato sulla fitness offre una visione delle caratteristiche intrinseche dei nodi e del loro ruolo nell'attrarre connessioni, fornendo una spiegazione delle dinamiche di formazione della rete che può aiutare a prevedere come certi nodi critici possano fungere da veicoli primari di contagio.

Un esempio di applicazione di questo approccio multilivello si trova nello studio di [15], che dimostra come ciascuno di questi aspetti influenzi la resilienza della rete durante scenari di crisi.

Nel contesto della rete interbancaria è di fondamentale importanza distinguere tra reti basate sulla similarità e reti di interazione diretta. La rete interbancaria è un esempio di rete di interazione diretta nella quale cioè i collegamenti rappresentano transazioni finanziarie reali come esposizioni creditizie tra banche e prestiti. Una struttura di questo tipo è cruciale per comprendere come il rischio sistemico possa propagarsi attraverso il sistema finanziario globale.

La rete interbancaria descrive le relazioni di prestito e finanziamento tra le istituzioni bancarie e rappresenta per questo un elemento di fondamentale importanza per la comprensione del sistema finanziario globale.

La struttura delle esposizioni è fortemente complessa e interconnessa e per questo può essere veicolo di contagio durante le crisi; è questo il motivo per il quale l'analisi delle reti è cruciale per valutare la propagazione del rischio sistemico. La resilienza e la vulnerabilità del sistema bancario dipendono dall'organizzazione delle interazioni tra le entità coinvolte.

La resilienza della rete si misura mediante il coefficiente di resilienza della rete (R)

che valuta complessivamente la stabilità rispetto a potenziali shock.

$$R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{k_i}{k_{max}} \right) \quad (2.23)$$

dove k_i è il grado del nodo i e k_{max} è il grado massimo nella rete. Valori di R prossimi a 1 indicano maggiore resilienza mentre valori inferiori caratterizzano una rete più vulnerabile.

Nel contesto della rete interbancaria, è importante distinguere tra vulnerabilità e resilienza della rete. La vulnerabilità fa riferimento ai punti deboli della rete – nodi e connessioni - che, se colpiti, possono amplificare il contagio. Ad esempio, i nodi con elevata centralità di betweenness rappresentano canali di propagazione della crisi. La resilienza, invece, rappresenta la capacità complessiva del sistema di resistere agli shock.

Questa distinzione è supportata da analisi come quelle di [18], che mostrano come la resilienza sia fortemente influenzata dalla struttura della rete.

Nella realtà dei fatti, per rappresentare più accuratamente la rete interbancaria si ricorre ad un **multiplex** o rete multistrato [5] in cui ogni nodo è una banca e ogni strato è una rete che rappresenta un tipo di relazioni e il cui utilizzo considera pertanto l'eterogeneità delle relazioni creditizie.

Ai fini della nostra trattazione, con le dovute premesse, risulta sufficiente una descrizione basata sulla semplice teoria dei grafi illustrata nella sezione 2.1.

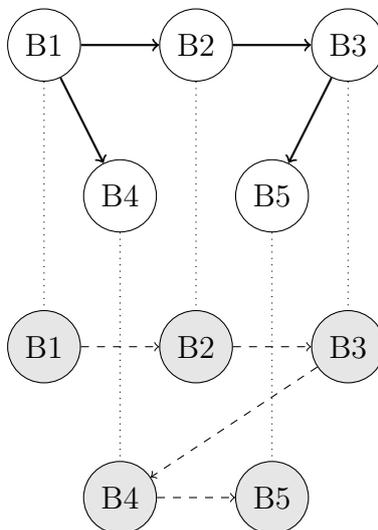


Figura 2.2: Rappresentazione schematica della rete multiplex interbancaria con diversi strati finanziari, come in [10].

Nelle reti finanziarie, la presenza di pochi hub aumenta l'efficienza del sistema in tempi normali, ma rende la rete vulnerabile a guasti mirati. Infatti, un fallimento lo-

calizzato in un nodo di alto grado potrebbe propagarsi rapidamente, analogamente ai fenomeni di percolazione nei sistemi fisici complessi. Questo fenomeno evidenzia come gli hub svolgano una duplice funzione: facilitano il flusso di liquidità ma, al contempo, amplificano il rischio di contagio se sottoposti a uno shock esterno.

Banca	Grado	Potenziale di contagio
Hub 1	50	Alto
Hub 2	45	Alto
Hub 3	42	Medio

Tabella 2.3: Analisi quantitativa del ruolo degli hub nella propagazione del contagio, basata su [7].

Un'analisi della rete interbancaria di questo tipo, non solo permette di comprendere meglio la struttura della rete, ma fornisce anche una base solida per lo sviluppo di politiche di mitigazione del rischio. Identificando i nodi critici e le connessioni che rappresentano potenziali canali di contagio, tramite questo approccio multilivello, è possibile adottare misure preventive, come requisiti di capitale maggiori per gli hub o limiti di esposizione per i nodi con alta centralità di betweenness.

Ad esempio, lo studio di [17] quantifica l'impatto dei requisiti di capitale sulle reti finanziarie, evidenziando come tali misure possano migliorare la resilienza della rete in condizioni di stress. Questo approccio rappresenta un'importante strategia per prevenire la diffusione del contagio, argomento che verrà approfondito nella sezione successiva.

2.2 La diffusione del contagio

La diffusione del contagio nelle reti finanziarie è un fenomeno chiave per la comprensione della vulnerabilità e della resilienza dei sistemi finanziari interconnessi. Analizzare e modellare la diffusione del contagio è utile a prevedere quali istituzioni potrebbero amplificare il contagio e a valutare il rischio complessivo per la stabilità finanziaria.

Il **contagio** è definito come la capacità di uno shock, come una perdita o il fallimento di una banca, di propagarsi attraverso il sistema, influenzando non solo le entità direttamente collegate, ma anche quelle connesse indirettamente. La propagazione del contagio può generare crisi sistemiche e compromettere quindi la stabilità del sistema finanziario nella sua interezza.

Nel capitolo precedente sono stati introdotti alcuni concetti chiave, tra cui quello di **rischio sistemico**, che descrive il potenziale impatto di uno shock che si diffonde attraverso il sistema. Tale concetto è strettamente collegato alla robustezza delle reti

finanziarie: una rete robusta può attutire gli shock senza che questi si propagino in maniera significativa, mentre una rete fragile permette la rapida diffusione del contagio, amplificando quindi l’impatto iniziale.

La diffusione del contagio può essere trattata come un fenomeno di equilibrio [18], in cui piccoli shock localizzati possono propagarsi influenzando le aree esterne. Un esempio chiave è rappresentato dalla crisi del 2008, trattata nella sezione 1.4, che, pur essendo originariamente localizzata, ha avuto ripercussioni globali a causa delle interconnessioni complesse tra le istituzioni finanziarie.

Lo studio di Allen e Gale [14] evidenzia come la struttura di interconnessione bancaria sia di fondamentale importanza per la diffusione del contagio. In questo modello, il sistema finanziario è costituito da banche interconnesse che detengono esposizioni reciproche tramite crediti interbancari. Questo meccanismo, pensato per condividere il rischio, in presenza di uno shock di liquidità può portare alla diminuzione del valore dei crediti detenuti e ridurre la capacità delle banche di soddisfare le esigenze di liquidità.

Allen e Gale modellano l’allocazione delle risorse delle banche attraverso un problema di ottimizzazione: ogni banca decide la frazione di risorse da investire in attività liquide e illiquide per massimizzare la propria utilità attesa, tenendo conto di incertezze di mercato e vincoli di bilancio. La condizione di bilancio è definita come:

$$D = L + I \tag{2.24}$$

dove L rappresenta le riserve liquide, I gli investimenti illiquidi e D il deposito totale.

La struttura della matrice di adiacenza A , in cui ogni elemento a_{ij} indica l’esposizione della banca i verso la banca j , determina la topologia della rete e gioca un ruolo cruciale nella propagazione del contagio. La crisi si diffonde rapidamente quando un fallimento in una regione causa fallimenti a catena nelle regioni interconnesse.

In una rete completa, dove ogni banca è interconnessa con tutte le altre, il rischio è distribuito in maniera più efficiente, rendendo il sistema più resiliente. Al contrario, reti incomplete sono generalmente più vulnerabili agli effetti di contagio e al collasso economico, poiché lo shock può propagarsi rapidamente attraverso cluster isolati, innescando una serie di fallimenti a catena che portano a crisi più ampie. La teoria delle reti permette di quantificare i punti critici oltre i quali uno shock locale si trasforma in una crisi sistemica.

Tipo di Rete	Probabilità di Contagio	Resilienza
Completa	Bassa	Alta
Incompleta	Alta	Bassa

Tabella 2.4: Confronto tra reti complete e incomplete in termini di resilienza e probabilità di contagio.

Per comprendere meglio la dinamica del contagio, il modello di sistema finanziario può essere descritto con una struttura temporale discreta [1], rappresentata dai periodi $t = 0, 1, 2, \dots$. In ogni periodo t , esiste un numero finito di banche funzionanti, M_t , ciascuna indicata da $k = 1, 2, \dots, M_t$. Le banche canalizzano i fondi ricevuti dai depositanti verso investimenti produttivi, le cui opportunità derivano da imprenditori del settore non finanziario.

Ogni banca riceve shock stocastici alle riserve liquide, dovuti a variazioni nei depositi e nei prelievi dei clienti. Questi shock possono riguardare depositi in contante, prelievi e trasferimenti interbancari elettronici. Poiché le fluttuazioni di liquidità sono imprevedibili, una banca può facilmente trovarsi impossibilitata a soddisfare i propri obblighi di pagamento a causa dell'illiquidità degli attivi.

Nel caso in cui non esista un mercato interbancario (condizione in cui $c = 0$), un'incapacità di rispondere alle richieste dei clienti può causare il fallimento della banca. Se invece è presente un mercato interbancario, una banca in difficoltà di liquidità può cercare fondi per adempiere agli obblighi di pagamento e per ripagare creditori preesistenti. Tuttavia, se anche dopo questi tentativi i fondi non risultano sufficienti, la banca sarà costretta a chiudere.

La matrice di connettività J_{ij} definisce le interconnessioni di credito tra le banche; J_{ij} assume valore 1 se esiste un collegamento creditizio tra le banche i e j e valore 0 in caso contrario. Questi collegamenti vengono stabiliti all'inizio della simulazione, con una probabilità di connessione rappresentata da c . Il caso $c = 0$ rappresenta un'assenza di prestiti interbancari, mentre $c = 100\%$ indica un sistema completamente interconnesso.

Al tempo $t = 0$, l'economia inizia con un numero finito M_0 di banche, e la sequenza di eventi si ripete in ogni periodo. All'inizio di ciascun periodo, ogni banca eredita un ammontare di attività liquide L_{t-1} , composto da depositi A_{t-1} , capitale V_{t-1} e investimenti passati I_{t-s} . La quantità di liquidità intra-periodo L_t varia a seguito di pagamenti di interessi, reddito da investimenti e shock sui depositi.

La funzione generatrice, descritta più accuratamente nella sezione successiva, è uno strumento essenziale per modellare la distribuzione dei gradi dei nodi e le proprietà di connettività della rete. La funzione generatrice $G(x)$ della distribuzione dei gradi $P(x)$ è definita come:

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k)x^k \quad (2.25)$$

Questa funzione consente di determinare statisticamente il comportamento della rete e di identificarne i percorsi critici per la propagazione del contagio. In particolare, la funzione generatrice permette di calcolare il grado medio critico $\langle k \rangle$ oltre il quale la rete passa da uno stato frammentato a uno connesso, favorendo quindi la propagazione del contagio. Nelle reti con un grado medio-basso gli shock tendono a rimanere confinati, mentre in reti ad alta connettività il contagio può propagarsi su larga scala.

Un'analisi quantitativa evidenzia come le caratteristiche strutturali delle reti interbancarie influenzino la resilienza del sistema finanziario.

2.3 La funzione generatrice

Nella sezione precedente, abbiamo analizzato la diffusione del contagio come un fenomeno centrale per la comprensione della vulnerabilità e resilienza delle reti finanziarie interconnesse. Nel contesto della modellizzazione delle reti finanziarie, la **funzione generatrice di probabilità** è uno strumento matematico chiave per descrivere le caratteristiche della rete, come la distribuzione dei gradi dei nodi, e per fare previsioni sulla propagazione degli shock finanziari. Dopo aver introdotto il modello base di contagio, è opportuno approfondire il ruolo della funzione generatrice per caratterizzare matematicamente la diffusione del contagio e il comportamento critico della rete.

Sia $P(k)$ la probabilità che un nodo nella rete interbancaria abbia grado k , definito come il numero di collegamenti di una banca con altre banche, cioè il numero di prestiti ricevuti e concessi. La **funzione generatrice di probabilità** $G_0(x)$ per la distribuzione dei gradi è definita come:

$$G_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k)x^k \quad (2.26)$$

Da questa funzione si ricavano informazioni importanti sulla distribuzione dei gradi, come il grado medio e la varianza.

Le proprietà fondamentali della **funzione generatrice di probabilità** $G_0(x)$ sono:

- **Normalizzazione:** Poiché $P(k)$ è una distribuzione di probabilità, $G_0(1) = 1$.
- **Grado Medio:** Il grado medio $\langle k \rangle$ è dato dalla derivata prima di $G_0(x)$ valutata in $x = 1$:

$$\langle k \rangle = G'_0(1) = \left. \frac{dG_0(x)}{dx} \right|_{x=1} = \sum_{k=0}^{\infty} kP(k) \quad (2.27)$$

- **Varianza del Grado:** La varianza del grado σ^2 è ottenuta dalla derivata seconda:

$$\sigma^2 = G''_0(1) + G'_0(1) - [G'_0(1)]^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k - \langle k \rangle)^2 P(k) \quad (2.28)$$

Le banche possono avere grado di ingresso, cioè il numero di banche da cui ricevono prestiti, e grado di uscita, cioè il numero di banche alle quali concedono prestiti. Si indica con P_{jk} la probabilità che una banca abbia grado di ingresso j e grado di uscita k .

La **funzione generatrice congiunta** $G(x, y)$ per la distribuzione dei gradi di ingresso e di uscita è definita come:

$$G(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P_{jk} x^j y^k \quad (2.29)$$

A questo punto, è utile considerare la vulnerabilità delle banche. Introduciamo una probabilità v_j che una banca con grado di ingresso j sia vulnerabile al contagio. La **funzione generatrice dei nodi vulnerabili** può essere espressa come:

$$G_v(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} v_j P_{jk} x^j y^k \quad (2.30)$$

Questa funzione consente di modellare il contagio tenendo conto della struttura della rete e della probabilità di vulnerabilità delle banche.

Per analizzare come il contagio si propaga, consideriamo le funzioni generatrici condizionate che descrivono la distribuzione dei gradi dei nodi raggiunti seguendo un collegamento:

- **Funzione Generatrice** $G_0(y)$: La funzione generatrice marginale per i gradi di uscita di una banca vulnerabile scelta casualmente è:

$$G_0(y) = G_v(1, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} v_j P_{jk} y^k \quad (2.31)$$

- **Funzione Generatrice** $G_1(y)$: La funzione generatrice condizionata per i gradi di uscita di una banca vulnerabile raggiunta attraverso un collegamento in ingresso è:

$$G_1(y) = \frac{1}{\langle j \rangle_v} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} j v_j P_{jk} y^k \quad (2.32)$$

dove $\langle j \rangle_v = \sum_{j=0}^{\infty} j v_j P_j$ è il grado medio di ingresso ponderato per la vulnerabilità.

Tramite queste funzioni generatrici, si può calcolare la probabilità che il contagio si propaghi attraverso la rete e si possono caratterizzare i cluster vulnerabili.

Una misura dell'estensione del contagio nel sistema è data dalla dimensione media S del cluster vulnerabile; questa può essere calcolata derivando $H_0(y)$ rispetto a y e valutando la derivata in $y = 1$:

$$S = H'_0(1) = G'_0(1) + G'_0(1) \frac{G'_1(1)}{1 - G'_1(1)} \quad (2.33)$$

dove:

- $G'_0(1) = \sum_{j,k} v_j P_{jk} k$ è il grado medio di uscita dei nodi vulnerabili;
- $G'_1(1) = \frac{\sum_{j,k} j v_j P_{jk} k}{\langle g \rangle_v}$ è il grado medio di uscita dei nodi vulnerabili raggiunti attraverso un collegamento in ingresso.

La condizione $G'_1(1) = 1$ indica una **transizione di fase** nella rete:

- Se $G'_1 < 1$, il cluster vulnerabile ha dimensioni limitate e il contagio tende a rimanere confinato.
- Se $G'_1 > 1$, si forma un **cluster gigante** vulnerabile, coinvolgendo una sostanziale parte della rete nel contagio sistemico.

Per reti con distribuzioni dei gradi di Poisson, dette anche distribuzioni con code pesanti, il parametro critico che determina la transizione di fase è detto κ ed è dato da:

$$\kappa = G'_1(1) = \frac{\langle \kappa^2 \rangle}{\langle \kappa \rangle} - 1 \quad (2.34)$$

La condizione di vulnerabilità critica per la rete è:

$$\phi \kappa > 1 \quad (2.35)$$

In particolare, ϕ è la probabilità che una banca sia vulnerabile, quindi la condizione $\phi \kappa > 1$ determina l'esistenza di un cluster gigante vulnerabile, capace di originare un contagio sistemico.

Tipo di rete	Connettività	Contagio sistemico
Bassa connettività	$\kappa < 1$	Contagio confinato a piccoli cluster
Alta connettività	$\kappa > 1$	Rischio di contagio sistemico

Tabella 2.5: Rischio di contagio in funzione della connettività della rete, in accordo con [28].

2.3.1 Distribuzione dei Gradi di Poisson

In una rete casuale in cui la distribuzione dei gradi segue una distribuzione di Poisson con grado medio κ , la funzione generatrice $G_0(x)$ si esprime come:

$$G_0(x) = e^{\langle k \rangle (x-1)} \quad (2.36)$$

La derivata prima è:

$$G'_0(x) = \langle k \rangle e^{\langle k \rangle (x-1)} \quad (2.37)$$

di conseguenza $G'_0(1) = \langle k \rangle$. La derivata seconda è:

$$G''_0(x) = \langle k \rangle^2 e^{\langle k \rangle(x-1)} \quad (2.38)$$

quindi $G''_0(1) = \langle k \rangle^2$. Il parametro κ diventa:

$$\kappa = \frac{G''_0(1)}{G'_0(1)} = \langle k \rangle \quad (2.39)$$

La condizione critica per il contagio sistemico è:

$$\phi \langle k \rangle > 1 \quad (2.40)$$

Quindi, per un dato valore della vulnerabilità ϕ , esiste un grado medio critico della rete oltre il quale il sistema diventa suscettibile al contagio sistemico.

In sintesi, la funzione generatrice di probabilità rappresenta un potente strumento matematico per analizzare la distribuzione dei gradi nelle reti finanziarie e comprendere le condizioni critiche per la diffusione del contagio. La sua applicazione consente di determinare il grado medio critico e di valutare l'effetto delle vulnerabilità strutturali delle reti sul rischio sistemico. In particolare, l'uso della funzione generatrice permette di modellare il rischio che uno shock locale si trasformi in un contagio sistemico, in funzione della struttura e della connettività della rete.

Nel prossimo capitolo, faremo uso di queste basi teoriche per implementare simulazioni del contagio nelle reti finanziarie, applicando il modello di Gai-Kapadia. Questo modello ci consentirà di tradurre le conclusioni teoriche in scenari quantitativi e di osservare come la struttura della rete influisce sulla propagazione degli shock attraverso le banche. Attraverso le simulazioni, valuteremo l'impatto della connettività e della distribuzione dei gradi dei nodi sulla resilienza complessiva del sistema, fornendo un'interpretazione quantitativa dei fenomeni discussi finora.

Capitolo 3

Il Modello di Gai e Kapadia: Teoria e Simulazioni

L'obiettivo di questo capitolo è analizzare il modello proposto da Gai e Kapadia [20] nel 2010 per le reti finanziarie. In particolare, dopo una descrizione dettagliata della struttura del modello, si studia un caso di riferimento e si propone una simulazione di uno scenario di base. Attraverso l'interpretazione dei risultati ottenuti sarà possibile trarre conclusioni rispetto all'efficacia del modello presentato.

3.1 Descrizione e Meccanismi del Modello

Il modello di Gai e Kapadia [20] si propone come strumento utile ad analizzare il contagio nei sistemi finanziari moderni, caratterizzati da complesse interconnessioni tra intermediari finanziari.

3.1.1 Canali di Contagio

In generale, il default può diffondersi da un'istituzione all'altra attraverso due canali chiave:

- **Contagio diretto:** avviene attraverso le esposizioni dirette di controparte; il default di una singola banca causa perdite immediate per le banche creditrici. Se una banca i è esposta alla banca j con un'esposizione pari a L_{ij} , allora il default della banca j riduce gli attivi interbancari della banca i della quantità L_{ij} . Questo meccanismo è particolarmente pericoloso in reti con molteplici collegamenti fortemente ponderati, dove il fallimento di una singola banca può innescare una cascata di insolvenze. La rete finanziaria funge da mezzo di propagazione, dove la connessione diretta tra due nodi amplifica il rischio di contagio in presenza di buffer di capitale insufficienti.

- **Contagio indiretto:** avviene attraverso gli effetti di liquidità sugli attivi. La vendita forzata di asset da parte di banche in default comporta una riduzione dei prezzi di mercato con la conseguente svalutazione degli asset delle altre banche. Un abbassamento di q riduce il valore degli attivi esterni A_i^M , indebolendo i bilanci delle banche e potenzialmente causando ulteriori default. Anche istituzioni senza esposizioni dirette verso la banca in default possono subire svalutazioni significative. La rete dei mercati finanziari amplifica gli effetti di contagio indiretto, rendendo vulnerabili banche con elevata esposizione ad asset illiquidi.

I due canali di contagio non agiscono in modo isolato, ma si rafforzano a vicenda. Un esempio tipico si manifesta quando una banca subisce perdite dirette a causa del default delle sue controparti, e la riduce di conseguenza la propria capacità di mantenere gli attivi. Questa situazione la costringe a liquidare asset illiquidi, deprimendo ulteriormente il prezzo di mercato. La diminuzione del valore di mercato degli asset impatta negativamente sui bilanci delle altre banche, amplificando il contagio e propagandolo all'intera rete. Un piccolo shock iniziale può quindi rapidamente trasformarsi in un fallimento sistemico se la rete finanziaria è sufficientemente connessa.

L'analisi di questi due canali dimostra che una maggiore connettività della rete, pur favorendo la diversificazione del rischio individuale, può aumentare il rischio sistemico complessivo. L'interazione tra contagio diretto e indiretto enfatizza l'importanza di politiche che regolamentino le esposizioni interbancarie e garantiscano una sufficiente liquidità di mercato.

3.1.2 Struttura della Rete Finanziaria

Il modello di Gai e Kapadia considera una rete finanziaria in cui n banche sono tra loro collegate da prestiti interbancari. Ciascuna banca è rappresentata come un nodo all'interno di un grafo pesato e direzionato. Come descritto nella sezione precedente, questa modellizzazione si basa sulla teoria dei grafi, in cui i collegamenti tra i nodi (le banche) rappresentano le esposizioni interbancarie. I collegamenti sono:

- **Diretti:** riflettono la relazione di credito (da creditore a debitore).
- **Pesati:** l'entità dell'esposizione è rilevante per analizzare la diffusione del contagio.

Ogni nodo i ha un grado di ingresso j_i , che rappresenta il numero di collegamenti che puntano verso una banca e quindi le sue controparti debentrici, e un grado di uscita k_i , che rappresenta invece il numero di collegamenti che escono dalla banca, cioè, le sue controparti creditrici. Ad esempio, banche con alto grado di ingresso j_i sono più esposte al rischio di default delle loro controparti.

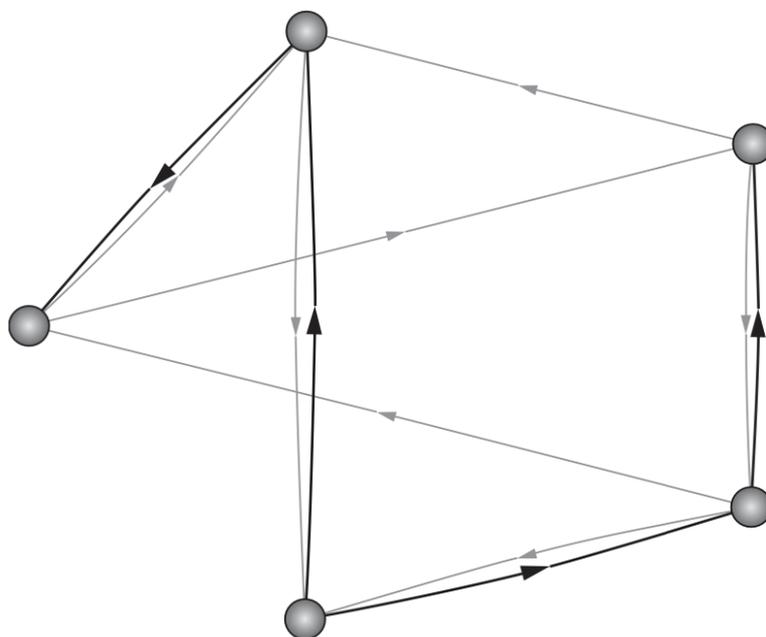


Figura 3.1: Un esempio di rete pesata e diretta. Tratta da [13]

In figura 3.1 è rappresentata graficamente una rete finanziaria costituita da cinque banche. La rappresentazione, come stabilito dal modello, imposta non solo la direzionalità delle esposizioni interbancarie ma anche la loro rilevanza, assegnando ad esposizioni di maggiore entità linee più spesse. A partire da questa è possibile definire, ad esempio, i gradi di entrata e di uscita di ciascuna delle cinque banche coinvolte.

La posizione di ciascuna banca nella rete influisce direttamente sulla sua vulnerabilità e sul ruolo che può avere nella propagazione degli shock. Nodi centrali, con alti valori di j_i e k_i , sono cruciali per la stabilità sistemica, mentre i nodi periferici, pur avendo un impatto limitato, sono più suscettibili agli shock provenienti dai nodi centrali.

In sintesi, il modello di Gai e Kapadia mostra come le proprietà topologiche della rete influenzino il rischio di contagio, evidenziando il delicato equilibrio tra diversificazione e vulnerabilità sistemica.

3.1.3 Assunzioni stilizzate

Nel modello proposto, sono impiegate alcune assunzioni semplificate per l'analisi del rischio sistemico. Gli attivi interbancari sono considerati uniformemente distribuiti tra tutte le controparti debentrici e i collegamenti tra i nodi sono formati casualmente e indipendentemente.

L'analisi di Gai e Kapadia assume che la distribuzione congiunta dei gradi di ingresso e uscita governi il potenziale per la diffusione degli shock attraverso la rete [20].

La rete è costruita come un grafo casuale, cioè con una struttura completamente arbitraria. In un sistema definito con una struttura del genere, i collegamenti tra le banche sono generati casualmente, senza una struttura predeterminata. Non vi è alcuna correlazione statistica tra i nodi e la mescolanza tra questi; in altre parole non vi è alcuna tendenza per i nodi altamente connessi ad essere collegati con altri nodi altamente connessi o scarsamente connessi. Tale approccio consente di analizzare sia le implicazioni di una rete altamente connessa, in cui gli shock si diffondono rapidamente ma le perdite sono più distribuite, sia quelle di una rete più frammentata, in cui il contagio può essere limitato ma anche localmente catastrofico.

Si assume che gli attivi esterni A_i^M siano illiquidi ma con un valore di mercato inizialmente pari a $q = 1$ e che, in caso di default ($\phi = 1$), non vi siano recuperi parziali.

Tali assunzioni oltre a semplificare il modello, enfatizzano la distinzione tra:

- **Condivisione del rischio:** si riferisce alla capacità della rete di distribuire le perdite su più nodi.
- **Diffusione del rischio:** indica la propagazione degli shock dovuta alle interconnessioni.

Per modellare il contagio, il modello assume che le banche siano inizialmente tutte solvibili. Un evento di default, come uno shock idiosincratico¹ o aggregato², viene introdotto perturbando la rete al tempo $t = 1$.

Queste assunzioni consentono di isolare e comprendere meglio i meccanismi di propagazione del contagio, ma limitano l'aderenza del modello alla complessità della realtà. Tuttavia, grazie a queste semplificazioni, Gai e Kapadia sono riusciti a mettere in luce alcuni principi fondamentali del rischio sistemico, tra cui l'importanza della densità della rete e il ruolo della liquidità di mercato nel determinare la stabilità complessiva.

3.1.4 La dinamica del contagio

Il bilancio di ogni banca i è descritto da *attivi* e *passivi* e questi sono considerati in relazione ad alcune assunzioni semplificative precedentemente approfondite nella sezione 3.1.3. Gli attivi possono essere interbancari A_i^{IB} o esterni illiquidi A_i^M ; i passivi, allo stesso modo, possono essere interbancari L_i^{IB} o depositi dei clienti D_i .

La solvibilità di una banca è determinata dal buffer di capitale K_i , che rappresenta la capacità della banca di assorbire perdite senza diventare insolvente:

¹Evento specifico che colpisce un singolo elemento o una parte limitata di un sistema, senza influenzare direttamente il resto. Ad esempio, il fallimento di una banca isolata.

²Evento di ampia portata che colpisce simultaneamente molte entità o l'intero sistema, spesso causato da fattori macroeconomici o globali, come una crisi finanziaria.

$$K_i = A_i^{IB} + A_i^M - L_i^{IB} - D_i. \quad (3.1)$$

Il buffer di capitale di una banca è definito come la differenza tra valori contabile dei suoi asset e passività. Includendo l'effetto di eventuali controparti in default e delle svalutazioni di mercato, la condizione di solvibilità diventa:

$$(1 - \phi)A_i^{IB} + qA_i^M - L_i^{IB} - D_i > 0, \quad (3.2)$$

dove ϕ è la frazione di banche debentrici verso la banca i che sono in default e q rappresenta il prezzo di mercato degli attivi illiquidi. In condizioni normali e quindi in assenza di "vendite forzate", $q = 1$, mentre in situazioni di stress di liquidità $q < 1$. Data una banca i , assumiamo che in seguito al default di una banca ad essa collegata, la banca i perda tutti gli asset interbancari ad essa esposti; in base a questo la condizione di solvibilità può essere altresì espressa come:

$$\phi < \frac{K_i - (1 - q)A_i^M}{A_i^{IB}}, \text{ per } A_i^{IB} \neq 0 \quad (3.3)$$

Come stabilito nella sezione 3.1.3, assumiamo che tutte le banche della rete siano inizialmente solvibili e che la rete sia perturbata al $t = 1$ dal default di una banca. Affinché il default si diffonda, poichè quando una controparte fallisce, le banche collegate perdono ciascuna una frazione $\frac{1}{j_i}$ dei loro asset, deve esistere una banca vicina per cui valga:

$$\frac{1}{j_i} > \frac{K_i - (1 - q)A_i^M}{A_i^{IB}}, \quad (3.4)$$

dove j_i è il grado di ingresso della banca i .

Questo rapporto suggerisce che banche con bassi gradi di ingresso, buffer di capitale ridotti o alte esposizioni ad attivi illiquidi siano particolarmente a rischio.

Il modello di Gai e Kapadia utilizza la probabilità v_j che una banca con grado di ingresso j sia vulnerabile per stimare il rischio sistemico. La probabilità è calcolata come:

$$v_j = P\left(\frac{1}{j} > \frac{K_i - (1 - q)A_i^M}{A_i^{IB}}\right) \quad \forall j \leq 1 \quad (3.5)$$

Funzioni Generatrici e Trasmissione degli Shock

Nel contesto del modello di Gai e Kapadia, le funzioni generatrici di probabilità offrono uno strumento potente per analizzare la propagazione del contagio attraverso una rete finanziaria. In reti sufficientemente grandi, affinché il contagio si diffonda oltre i vicini immediati della banca inizialmente in default, è necessario che questi vicini abbiano a loro volta collegamenti in uscita verso altre banche vulnerabili.

Definiamo la **funzione generatrice di probabilità** per la distribuzione congiunta dei gradi di ingresso e di uscita delle banche vulnerabili come:

$$G(x, y) = \sum_{j,k} v_j p_{jk} x^j y^k \quad (3.6)$$

dove:

- v_j è la probabilità che una banca con grado di ingresso j sia vulnerabile (come definito precedentemente nell'equazione 3.2);
- p_{jk} è la probabilità che una banca abbia grado di ingresso j e grado di uscita k .

Questa funzione generatrice incapsula l'informazione sulla distribuzione dei gradi delle banche vulnerabili nella rete. Poiché ogni attivo interbancario di una banca è una passività interbancaria di un'altra, il grado medio di ingresso deve essere uguale al grado medio di uscita nella rete:

$$z = \sum_{j,k} j p_{jk} = \sum_{j,k} k p_{jk} \quad (3.7)$$

Dalla funzione generatrice $G(x, y)$, possiamo derivare la funzione generatrice marginale per i gradi di uscita delle banche vulnerabili scelte casualmente:

$$G_0(y) = G(1, y) = \sum_{j,k} v_j p_{jk} y^k \quad (3.8)$$

Si noti che $G_0(1)$ rappresenta la frazione di banche vulnerabili nella rete:

$$G_0(1) = \sum_{j,k} v_j p_{jk} \quad (3.9)$$

Analogamente, definiamo la funzione generatrice condizionata per i gradi di uscita delle banche vulnerabili raggiunte seguendo un collegamento in ingresso scelto casualmente:

$$G_1(y) = \frac{\sum_{j,k} v_j j p_{jk} y^k}{\sum_{j,k} j p_{jk}} = \frac{1}{z} \sum_{j,k} v_j j p_{jk} y^k \quad (3.10)$$

Questa funzione tiene conto del fatto che una banca con un grado di ingresso più elevato ha una maggiore probabilità di essere raggiunta seguendo un collegamento in ingresso.

Per analizzare la propagazione del contagio, consideriamo la funzione generatrice $H_1(y)$ che descrive la distribuzione delle dimensioni dei cluster vulnerabili raggiungibili seguendo un collegamento in uscita da una banca vulnerabile. Questa funzione soddisfa la seguente equazione di autoconsistenza:

$$H_1(y) = 1 - G_1(1) + y G_1(H_1(y)) \quad (3.11)$$

dove $G_1(1)$ è la probabilità che una banca raggiunta sia vulnerabile.

Supponiamo di seguire un collegamento in uscita scelto casualmente da una banca vulnerabile fino alla sua estremità, e poi verso ogni altra banca vulnerabile raggiungibile da tale estremità. Questo insieme di banche è definito come il *cluster vulnerabile in uscita* alla fine di un collegamento in uscita scelto casualmente da una banca vulnerabile. Poiché cattura i collegamenti tra banche vulnerabili, la dimensione e la distribuzione del cluster vulnerabile caratterizzano la diffusione del default attraverso la rete finanziaria a seguito di un fallimento iniziale.

Ogni cluster vulnerabile, rappresentato da un quadrato nella figura 3.2 può assumere molte forme diverse.

Seguendo un collegamento in uscita scelto casualmente possiamo trovare:

- Una singola banca alla sua estremità senza ulteriori collegamenti in uscita che ne emanano. La banca in questione può essere sicura (s) o vulnerabile (v).
- Una banca vulnerabile con uno, due o più collegamenti che ne emanano verso ulteriori cluster.

Per rendere possibile una soluzione esatta, assumiamo che i collegamenti che partono dal nodo in default siano di tipo albero e non contengano loop chiusi.

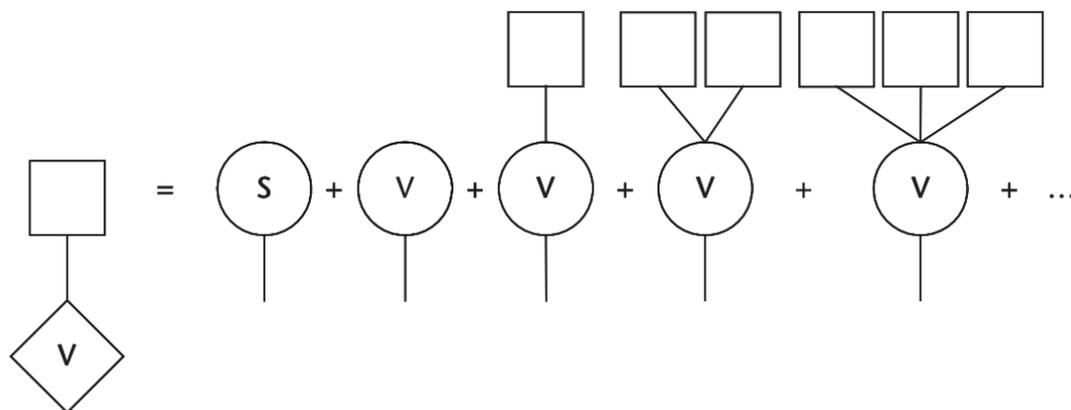


Figura 3.2: Trasmissione del contagio. Tratta da [13]

Sia $H_1(y)$ la funzione generatrice per la probabilità di raggiungere un cluster vulnerabile in uscita di data dimensione (in termini di numero di banche vulnerabili) seguendo un collegamento in uscita casuale da una banca vulnerabile. Come mostrato in figura 3.2, la probabilità totale di tutte le possibili forme può essere rappresentata in modo autoconsistente come la somma delle probabilità di colpire una banca sicura, colpire solo una singola banca vulnerabile, colpire una singola banca vulnerabile collegata a un altro

cluster, due altri cluster, e così via. Ogni cluster a cui si può arrivare è indipendente. Pertanto, $H_1(y)$ soddisfa la seguente condizione di autoconsistenza:

$$H_1(y) = \Pr[\text{raggiungere banca sicura}] + y \sum_{j,k} v_j r_{jk} [H_1(y)]^k \quad (3.12)$$

dove il fattore iniziale di y tiene conto del singolo vertice alla fine del collegamento iniziale, e abbiamo utilizzato il fatto che se una funzione generatrice genera la distribuzione di probabilità di una certa proprietà di un oggetto, allora la somma di tale proprietà su m oggetti indipendenti è distribuita secondo la m -esima potenza della funzione generatrice. Utilizzando l'equazione precedente e notando che $G_1(1)$ rappresenta la probabilità che un vicino casuale di una banca vulnerabile sia vulnerabile, possiamo scrivere l'equazione precedente in forma implicita come:

$$H_1(y) = 1 - G_1(1) + yG_1(H_1(y)) \quad (3.13)$$

Ci sono due possibilità che possono presentarsi per stabilire la distribuzione delle dimensioni dei cluster vulnerabili in uscita a cui appartiene una banca scelta casualmente:

1. La banca può essere sicura.
2. La banca può avere grado di ingresso j e grado di uscita k , ed essere vulnerabile con probabilità $v_j \cdot p_{jk}$.

Nell'ultimo caso, ogni collegamento in uscita porta a un componente vulnerabile la cui dimensione è estratta dalla distribuzione generata da $H_1(y)$. Quindi, la dimensione del componente vulnerabile a cui appartiene una banca scelta casualmente è generata da:

$$H_0(y) = \Pr[\text{banca sicura}] + y \sum_{j,k} v_j p_{jk} [H_1(y)]^k = 1 - G_0(1) + yG_0[H_1(y)] \quad (3.14)$$

Possiamo quindi calcolare la distribuzione completa delle dimensioni dei cluster vulnerabili risolvendo l'equazione per $H_1(y)$ e sostituendo il risultato nell'equazione per $H_0(y)$.

Derivando $H_0(y)$ rispetto a y e valutando la derivata in $y = 1$ possiamo calcolare la dimensione media del cluster vulnerabile S :

$$S = H'_0(1) = G'_0(1) + G'_0(1) \frac{G'_1(1)}{1 - G'_1(1)} \quad (3.15)$$

dove:

$$G'_1(1) = \frac{\sum_{j,k} v_j j^k p_{jk}}{\sum_{j,k} j p_{jk}} \quad (3.16)$$

La condizione per la quale la dimensione media del cluster vulnerabile diverge, indicando una **transizione di fase**, è data da:

$$G'_1(1) = 1 \quad (3.17)$$

Questa condizione critica rappresenta il punto in cui si forma un **cluster gigante** vulnerabile nella rete:

- Se $G'_1(1) < 1$, i cluster vulnerabili sono di dimensioni limitate e il contagio tende a estinguersi rapidamente.
- Se $G'_1(1) > 1$, esiste una probabilità positiva che un default iniziale possa portare al fallimento di una porzione significativa della rete.

Analisi della Transizione di Fase

La condizione critica $G'_1(1) = 1$ può essere espressa in termini delle proprietà strutturali della rete e della vulnerabilità delle banche:

$$\sum_{j,k} j k v_j p_{jk} = z \quad (3.18)$$

dove z è il grado medio della rete.

Questo risultato mostra che la possibilità di una transizione di fase dipende sia dalla struttura della rete (attraverso p_{jk} e z) sia dalla vulnerabilità delle banche (attraverso v_j).

Man mano che il grado medio z aumenta, i valori tipici di j e k aumentano, incrementando il prodotto $j \cdot k$. Tuttavia, poiché v_j tende a diminuire all'aumentare di j (banche con un alto grado di ingresso sono meno vulnerabili), l'effetto complessivo sulla somma dipende dall'equilibrio tra questi fattori.

Esistono quindi due possibili scenari:

- **Singola transizione di fase:** la condizione $G'_1(1) = 1$ è soddisfatta una sola volta al variare di z , indicando un unico punto critico oltre il quale il contagio sistemico diventa possibile.
- **Doppia transizione di fase:** la condizione $G'_1(1) = 1$ è soddisfatta per due valori distinti di z e definisce una finestra di valori per i quali il contagio sistemico è possibile. Al di fuori di questa finestra, o la rete è troppo scarsamente connessa (basso z) per consentire la diffusione del contagio, oppure la vulnerabilità delle banche è troppo bassa (alto z e basso v_j) per permettere al contagio di propagarsi nonostante l'elevata connettività.

3.2 Simulazione di uno Scenario di Base e Soluzioni Analitiche

Calibrando il modello opportunamente, Gai e Kapadia [20] propongono una simulazione numerica, volta ad analizzare come un singolo evento di default possa propagarsi attraverso una rete finanziaria complessa.

La rete è modellata come un grafo casuale con distribuzione di Poisson 2.3.1 per rappresentare le connessioni tra $n = 1000$ banche. Questo approccio semplificato è scelto per garantire che i risultati siano guidati dalle proprietà strutturali del sistema piuttosto che da assunzioni specifiche sulla configurazione della rete. Tuttavia, nonostante la semplicità del modello, le intuizioni generate sono rilevanti anche per reti finanziarie più complesse. I parametri iniziali includono una composizione degli attivi in cui:

- Il 20% è costituito da asset interbancari.
- Il restante 80% è costituito da asset esterni non bancari.

I buffer di capitale sono fissati al 4% del totale degli asset; tale cifra è calibrata in base a dati di bilanci di grandi istituti finanziari internazionali pubblicati nel 2005 [20].

In generale, questa configurazione riflette dati empirici sulle reti bancarie nei mercati sviluppati, come riportato da Upper [32], e garantisce che il modello sia calibrato su ipotesi realistiche.

La connettività della rete è controllata dal grado medio z , che varia tra 1 e 15. Questa variabile rappresenta il numero medio di collegamenti per banca, un fattore cruciale per determinare la propagazione del contagio: reti scarsamente connesse sono più resistenti al contagio, ma possono esacerbare i danni locali; al contrario, reti densamente connesse possono amplificare il contagio ma distribuire più uniformemente le perdite.

Selezionando casualmente una banca e azzerandone gli attivi esterni, si introduce un evento di default. Questo shock iniziale è rappresentativo di eventi idiosincratici, come perdite inattese dovute a frodi, cattiva gestione o fallimenti del settore. Si innesca un processo iterativo in cui le banche creditrici possono fallire se il loro buffer di capitale è insufficiente a coprire le perdite. Il processo si ripete fino a quando non si verificano più nuovi default. Ogni simulazione viene eseguita 1000 volte per ogni valore di z , considerando solo episodi in cui almeno il 5% delle banche fallisce, al fine di isolare eventi sistemici significativi.

3.2.1 Risultati Numerici e Confronto con le Soluzioni Analitiche

Si definisce *crisi sistemica* un evento in cui il default iniziale di una banca causa il fallimento di una frazione significativa di istituzioni del sistema bancario. In particolare,

una crisi sistemica si verifica quando la frazione f di banche che falliscono supera una soglia predefinita γ :

$$f = \frac{N_{\text{default}}}{N_{\text{totale}}} \geq \gamma \quad (3.19)$$

In accordo a quanto detto in precedenza [20], nel contesto delle simulazioni, si assume $\gamma = 0,05$. Tale soglia permette di distinguere tra fallimenti isolati e crisi che hanno invece un impatto sistemico sul sistema finanziario.

Le simulazioni mostrano due aspetti principali:

1. La *frequenza del contagio*, cioè la probabilità che il default iniziale porti a una crisi sistemica.
2. L'*estensione del contagio*, misurata come la frazione di banche che falliscono durante episodi sistemici.

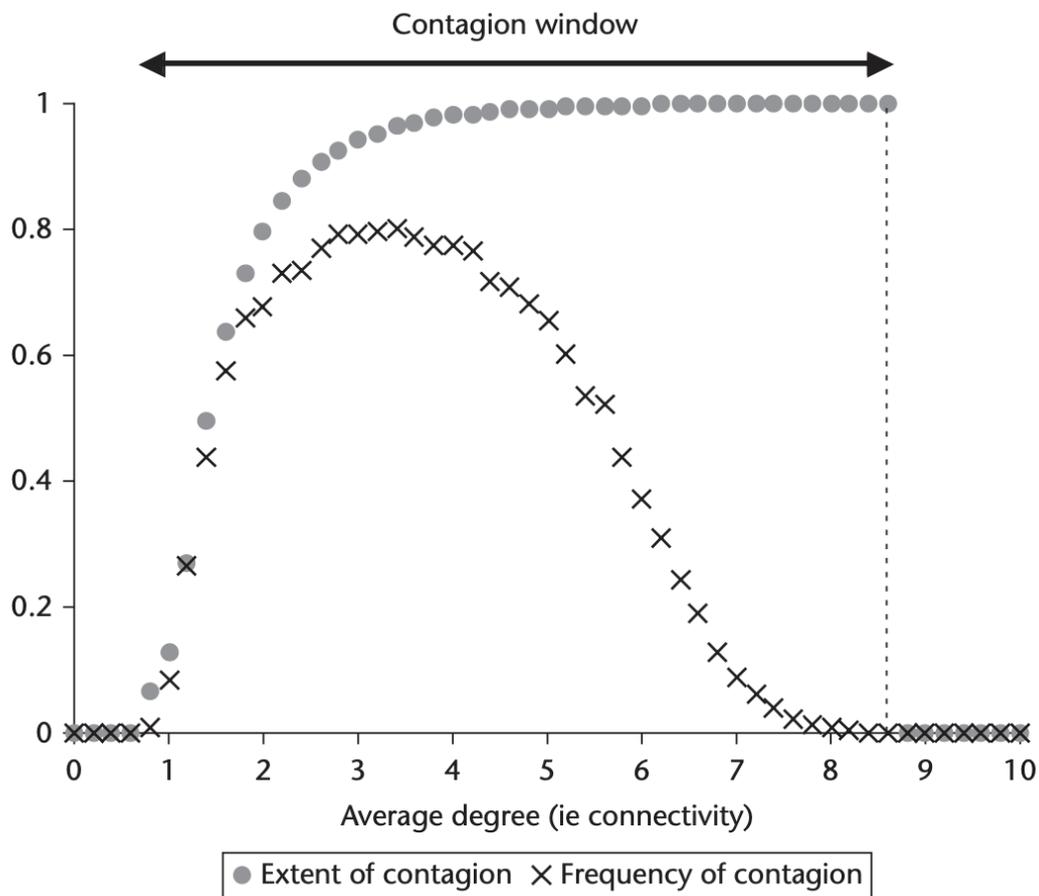


Figura 3.3: Il caso di riferimento. Tratta da [13]

Analisi dei Risultati

Il grafico in figura 3.3 riassume il caso di riferimento illustrando questi due aspetti in funzione del grado medio della rete z .

Si osservano due curve: l'una rappresenta la diffusione del contagio, cioè la frazione di banche che falliscono condizionatamente al superamento della soglia del 5%, l'altra la probabilità che il contagio si inneschi per diversi valori di z .

In base al valore della connettività media z si osserva che:

- Entro un livello $2 < z < 8$ è collocata quella che definiamo finestra di contagio. Questa, delimita un'area di fragilità entro cui il contagio è più probabile e intenso. Come si osserva dalla figura 3.3 la probabilità di contagio non cresce linearmente e raggiunge un picco in corrispondenza di un valore $3 < z < 4$. Il comportamento osservato riflette un equilibrio tra una connettività sufficiente a propagare lo shock e una vulnerabilità locale che consente la diffusione del contagio.
- Per valori bassi di z , verosimilmente per $z < 2$, il contagio si verifica solo quando una banca vulnerabile appartenente al cluster gigante, o adiacente ad esso, subisce uno shock. In questa fase, il contagio coinvolge una parte limitata della rete: la componente connessa 2.1.3.
- Per valori alti di connettività, $z > 8$, il contagio diventa molto poco frequente, verificandosi in meno di 5 casi ogni 1000 simulazioni. Quando questo accade, tutte le banche della rete falliscono, portando ad un crollo sistemico completo.

Confronto con le Soluzioni Analitiche

I risultati numerici sono confrontati con le soluzioni analitiche nella Figura 3.4. Le soluzioni analitiche dimostrano che il contagio si verifica solo entro una finestra critica di z , confermando i risultati numerici. Sebbene il limite analitico del modello si riferisca al caso $n \rightarrow \infty$, i risultati numerici con n nell'ordine di 10000 nodi approssimano in maniera efficace le soluzioni teoriche.

Nella simulazione, si osserva come un numero inferiore di nodi porti ad un lieve ampliamento della finestra di contagio rispetto ai risultati analitici; tuttavia, gli aspetti qualitativi di nostro interesse rimangono invariati.

In particolare, la probabilità di contagio mantiene un andamento rispondente al modello, raggiungendo un picco in corrispondenza di $3 < z < 4$. Anche la diffusione del contagio mostra un comportamento coerente con il modello teorico.

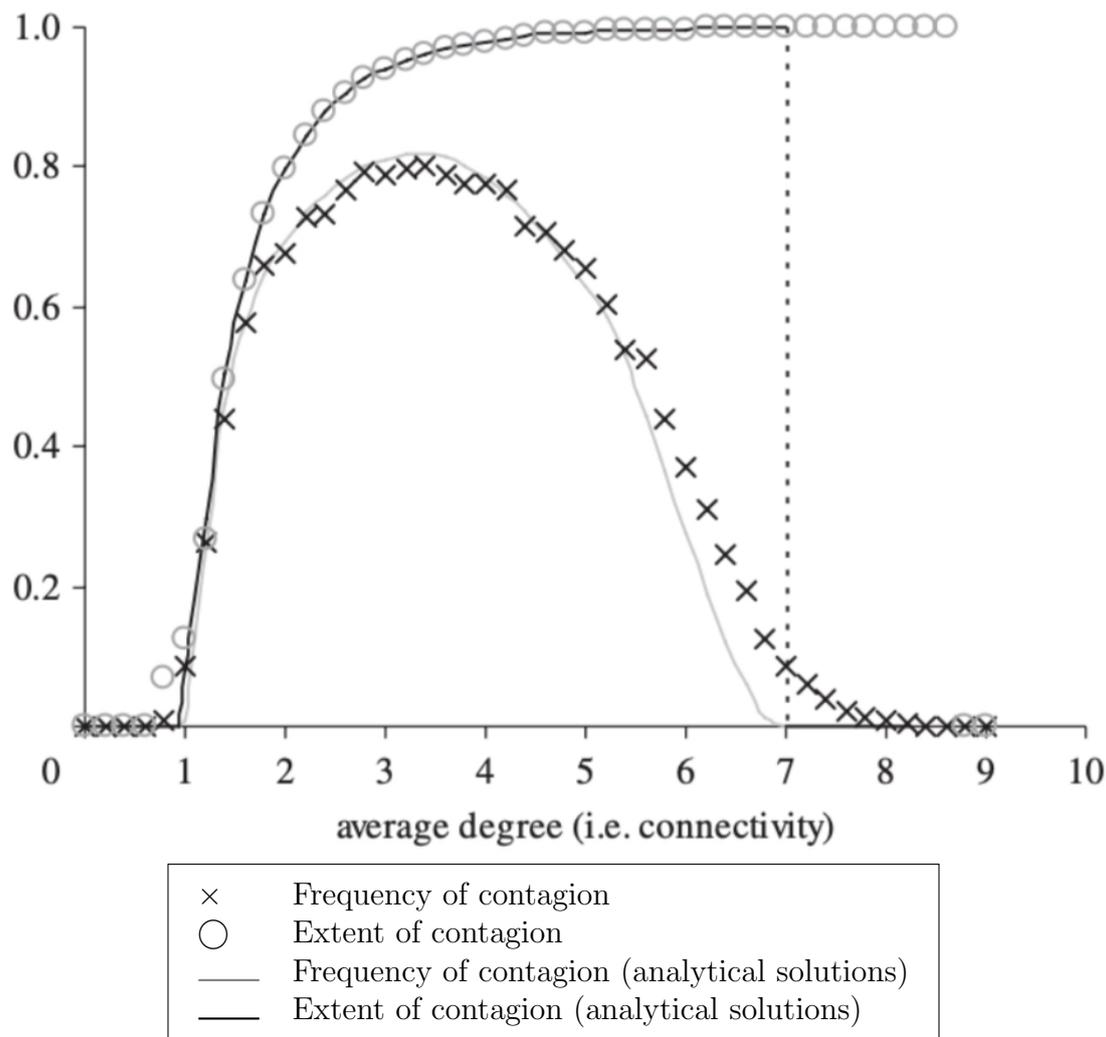


Figura 3.4: Confronto tra soluzioni di riferimento e soluzioni analitiche. Tratta da [20].

3.2.2 Ruolo dei Buffer di Capitale

La figura 3.5 illustra l'impatto della variazione dei buffer di capitale sulla resilienza della rete finanziaria, evidenziando come essi influenzino la probabilità e la diffusione del contagio. Questa analisi è centrale nel modello di Gai e Kapadia [20], che mette in luce il ruolo critico del capitale nel determinare la stabilità sistemica.

I buffer di capitale rappresentano la capacità delle banche di assorbire perdite derivanti da default di controparti interbancarie. Una riduzione di questi buffer amplia la finestra di contagio, aumentando sia la probabilità che le banche non riescano a coprire

le perdite e di conseguenza si inneschino fallimenti a catena, sia l'estensione del fenomeno. Come si evince dal grafico, valori più bassi del buffer (3% e 4%) mostrano maggiore frequenza e diffusione del contagio.

Tuttavia, quando il buffer di capitale viene aumentato al 5% è chiaramente visibile come un aumento della connettività possa contemporaneamente ridurre la probabilità di contagio ma aumentare la sua diffusione condizionale al suo scoppio.

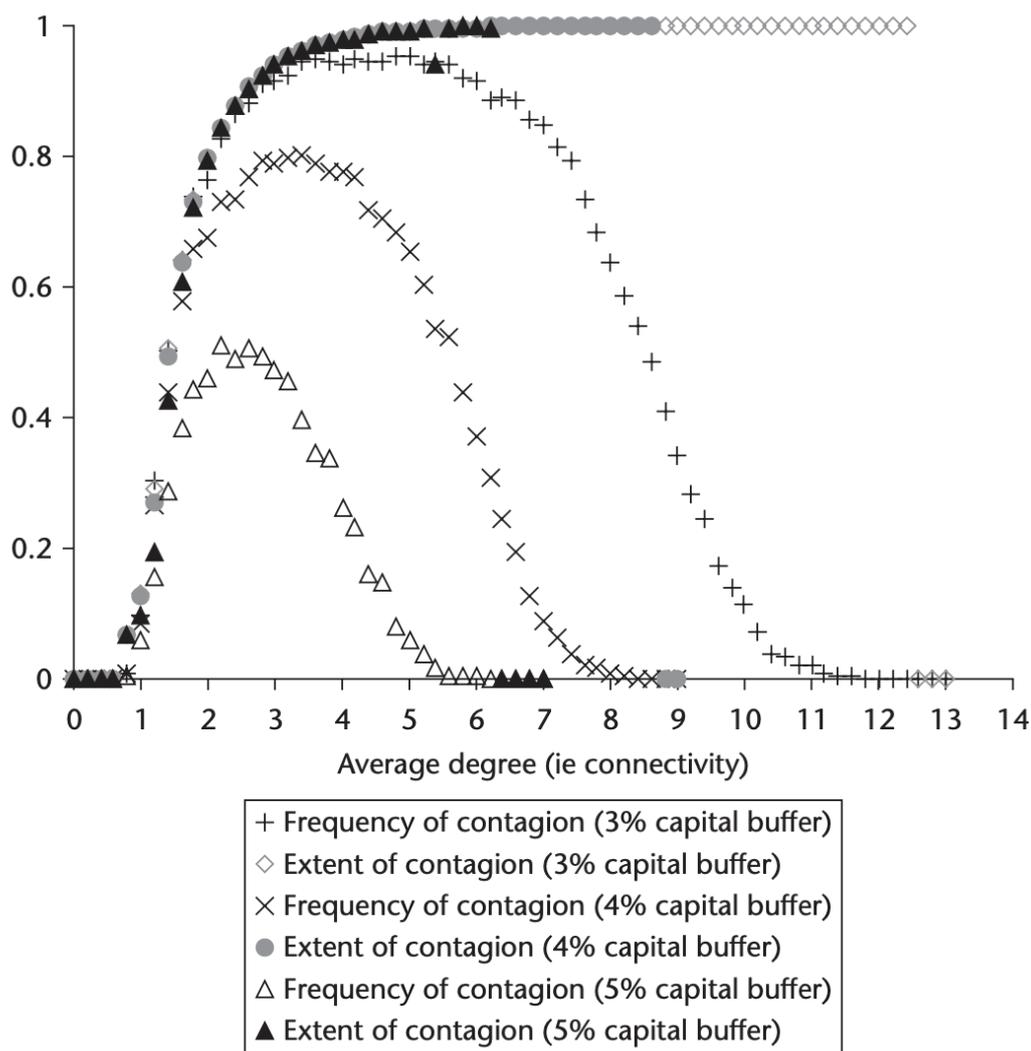


Figura 3.5: Variazione del buffer di capitale. Tratta da [13]

3.2.3 Effetti delle Vendite Forzate di Attività

Un ulteriore elemento di grande rilevanza per l'amplificazione del contagio nei mercati finanziari è rappresentato dalle vendite forzate di attività. Studi come quelli di Diamond e Rajan [11] o di Stein [30] hanno dimostrato che le vendite forzate possano portare ad una significativa svalutazione dei prezzi delle attività, generando effetti di contagio che si sommano a quelli derivanti dai default diretti.

Il modello di Gai e Kapadia può essere esteso per incorporare effetti di questo tipo.

In particolare, quando una banca fallisce, i mercati finanziari possono mostrare una capacità limitata di assorbire le attività esterne illiquide vendute durante la liquidazione forzata. Diretta conseguenza è che il prezzo di tali attività diminuisca. Seguendo l'approccio di Cifuentes et al. [9], supponiamo che il prezzo delle attività illiquide, q , sia dato da:

$$q = e^{-ax} \quad (3.20)$$

dove $x > 0$ è la frazione di attività illiquide del sistema vendute sul mercato.

Il parametro a è settato in maniera tale che, quando viene venduto un decimo delle attività totali del sistema, il prezzo delle attività diminuisce della stessa percentuale.

Integrando questa equazione nelle simulazioni, si osserva che, quando una banca va in default, tutte le sue attività esterne vengono vendute sul mercato e il prezzo delle attività, stando all'equazione (3.20), diminuisce. Assumiamo che, al diminuire del prezzo delle attività, le attività esterne di tutte le altre banche subiscano una rivalutazione al nuovo prezzo di mercato. Facendo riferimento alla condizione di solvibilità (3.2), è evidente che un evento di questo tipo sia in grado di rendere alcune banche vulnerabili, portandole potenzialmente al default.

Integrando gli effetti delle vendite forzate, alla fonte di contagio diretta derivante da default interbancari, si somma quindi un'ulteriore potenziale fonte di contagio. Tuttavia, è importante notare che l'effetto dovuto alle vendite forzate, come evidente in figura 3.6, si manifesta subordinatamente al default di una banca. Questo rappresenta un'approssimazione, distante da quanto più realisticamente ci si aspetterebbe, implica una sottostima dell'impatto del rischio di liquidità. Limitarsi infatti a considerare solo gli effetti post-default, impedisce di considerare eventuali impatti negativi sui prezzi precedenti al default delle banche.

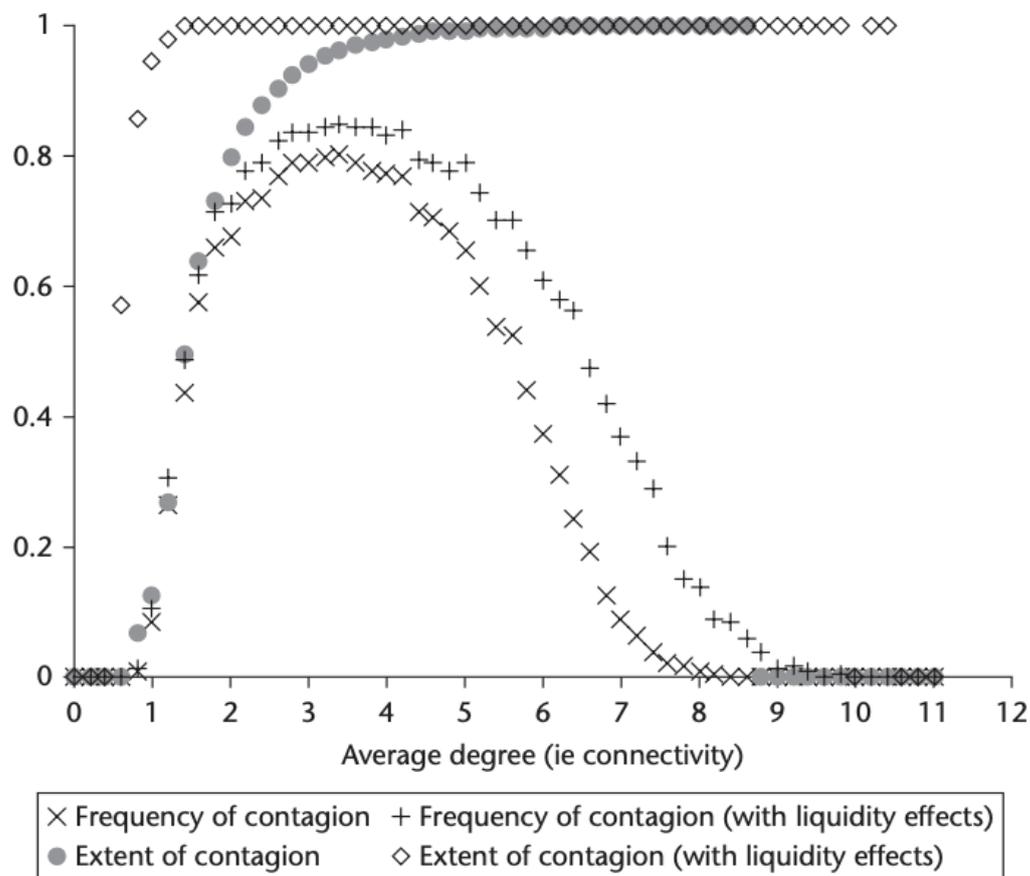


Figura 3.6: Effetti di liquidità e contagio. Tratta da [13]

Come evidenziato da May e Arinaminpathy [23], l'effetto delle vendite forzate diventa particolarmente rilevante in scenari in cui i tassi di recupero interbancari sono molto elevati. Questo dimostra come, nonostante nell'ambito delle simulazioni, come si evince dalla figura 3.6, l'impatto delle vendite forzate non modifichi significativamente i risultati, queste possono comunque risultare critiche in altri scenari.

In particolare infatti, come ci si aspetta, gli effetti di liquidità amplificano l'entità del contagio quando si verifica e provocano un allargamento della finestra di contagio, senza però modificare drasticamente i principali risultati del modello.

3.2.4 Interpretazione dei Risultati

I risultati delle simulazioni di Gai e Kapadia [20] evidenziano il ruolo cruciale della struttura della rete finanziaria e dei buffer di capitale nel determinare la stabilità sistemica. La modellizzazione tramite una rete casuale con distribuzione di Poisson ha permesso di

isolare gli effetti strutturali del contagio, dimostrando come le caratteristiche della rete influenzino sia la probabilità che la diffusione del contagio.

La Finestra Critica del Contagio

Il grado medio della rete (z) emerge come una variabile fondamentale. Le simulazioni mostrano che il contagio si verifica principalmente entro una finestra critica ($2 \leq z \leq 8$):

- **Bassi valori di z ($z < 2$):** la frammentazione della rete riduce la propagazione del contagio, ma l'isolamento delle banche può portare a perdite localizzate significative.
- **Valori intermedi ($2 \leq z \leq 8$):** la rete è sufficientemente connessa per trasmettere il contagio, ma non abbastanza diversificata per attenuarlo. Questo rappresenta il massimo della vulnerabilità sistemica.
- **Valori elevati ($z > 8$):** la diversificazione riduce la probabilità di contagio, ma i rari episodi che si verificano coinvolgono una porzione significativa del sistema, riflettendo la natura *robusta-ma-fragile* delle reti finanziarie.

Il confronto con le soluzioni analitiche conferma che il contagio avviene solo entro questa finestra critica. Per $z > 8$, la probabilità di contagio diminuisce drasticamente, ma quando si verifica, coinvolge l'intera rete. Questo comportamento, tipico delle reti complesse, riflette una transizione di fase in cui il sistema diventa globalmente connesso.

Ruolo dei Buffer di Capitale

I buffer di capitale si dimostrano essenziali per contenere il contagio. Le simulazioni per diversi livelli di buffer mostrano che:

- Con buffer bassi (3%), la finestra critica del contagio si amplia, e la probabilità di eventi sistemici raggiunge il picco.
- Con buffer intermedi (4%), la resilienza migliora, restringendo la finestra critica e limitando la diffusione del contagio.
- Con buffer alti (5%), il contagio diventa raro e circoscritto, confermando l'efficacia di buffer elevati per garantire la stabilità.

Questi risultati suggeriscono che i buffer di capitale non solo riducono la probabilità di contagio, ma ne attenuano anche la diffusione. La figura 3.5 mostra chiaramente come il rischio sistemico vari al variare dei buffer di capitale, evidenziando il loro ruolo cruciale per la stabilità complessiva della rete.

Implicazioni per la Regolamentazione

I risultati di Gai e Kapadia offrono spunti preziosi per la regolamentazione:

- **Gestione della connettività:** le reti con connettività intermedia ($3 < z < 4$) sono particolarmente vulnerabili. I regolatori dovrebbero monitorare e gestire la densità delle connessioni per evitare che il sistema operi nella finestra critica del contagio.
- **Buffer di capitale adeguati:** è necessario garantire che i buffer superino una soglia minima (intorno al 4%) per prevenire la propagazione degli shock.
- **Diversificazione strutturale:** promuovere una connettività equilibrata che riduca la vulnerabilità senza amplificare il rischio di episodi sistemici.

Le simulazioni confermano che i sistemi finanziari presentano una natura *robusta-ma-fragile*. Mentre la connettività riduce la probabilità di contagio in reti altamente connesse, essa amplifica la gravità degli episodi quando questi si verificano. I buffer di capitale agiscono come uno strumento chiave per mitigare questa fragilità, migliorando la resilienza del sistema. Tuttavia, la loro efficacia dipende dalla struttura complessiva della rete, sottolineando l'importanza di considerare sia le connessioni interbancarie che la solidità individuale delle banche.

In sintesi, il lavoro di Gai e Kapadia dimostra che una regolamentazione mirata, che consideri sia la struttura della rete che il capitale delle banche, è fondamentale per minimizzare il rischio sistemico e garantire la stabilità finanziaria.

Conclusioni

Nel presente lavoro si è esplorata la complessità delle reti finanziarie e i meccanismi attraverso cui il contagio può propagarsi nell'intero sistema finanziario. Con l'applicazione della teoria dei grafi, sono state analizzate le proprietà strutturali delle reti interbancarie, evidenziando come connettività, distribuzione dei gradi e metriche di centralità influenzino la vulnerabilità del sistema agli shock.

In particolare, l'analisi del modello di Gai e Kapadia ha permesso di comprendere in che modo piccoli shock idiosincratici possano dare luogo a crisi sistemiche attraverso meccanismi di contagio diretti e indiretti. Il modello ha evidenziato l'esistenza di una finestra critica di connettività entro la quale il sistema finanziario è particolarmente suscettibile al contagio.

Si è osservato inoltre che una rete con connettività intermedia è quella con il rischio sistemico massimo, mentre reti altamente connesse, pur riducendo la probabilità di contagio, possono amplificare l'impatto degli shock.

Le simulazioni hanno messo in luce l'importanza dei buffer di capitale nella mitigazione del rischio sistemico: incrementi dei buffer di capitale hanno dimostrato di ridurre in maniera significativa non solo la probabilità del contagio ma anche la sua diffusione, evidenziando quindi il ruolo cruciale delle politiche di regolamentazione nel rafforzare la resilienza del sistema finanziario.

Le conclusioni emerse da questo studio hanno molteplici implicazioni nella regolamentazione e la supervisione finanziaria. In primo luogo, un monitoraggio attento della struttura delle interconnessioni evita che il sistema operi nella finestra critica di connettività in cui il rischio sistemico è massimizzato. In secondo luogo, la definizione di requisiti di capitale adeguati è essenziale affinché le banche dispongano di buffer sufficienti a fronteggiare perdite inattese, limitando di conseguenza la propagazione degli shock attraverso la rete.

Dai risultati si evince inoltre che una maggiore diversificazione delle esposizioni interbancarie, se si considerano i trade-off associati all'aumento della connettività, può contribuire a ridurre la vulnerabilità del sistema.

In sintesi, si apprende che la modellizzazione delle reti finanziarie rappresenta uno strumento fondamentale per comprendere le dinamiche di propagazione del rischio e per sviluppare strategie efficaci nell'ambito della mitigazione del rischio sistemico. Per

prevenire future crisi finanziarie e garantire la stabilità del sistema finanziario globale è necessaria una approfondita consapevolezza delle interconnessioni finanziarie e dei meccanismi di contagio.

Bibliografia

- [1] Daron Acemoglu, Asuman Ozdaglar e Alireza Tahbaz-Salehi. «Systemic risk and stability in financial networks». In: *American Economic Review* 105.2 (2015), pp. 564–608.
- [2] Anat Admati e Martin Hellwig. *The Bankers' New Clothes*. Princeton: Princeton University Press, 2014.
- [3] Réka Albert e Albert-László Barabási. «Statistical mechanics of complex networks». In: *Reviews of Modern Physics* 74.1 (2002), pp. 47–97.
- [4] Bank for International Settlements. *64th Annual Report*. Basel: Bank for International Settlements, 1994.
- [5] Leonardo Bargigli, Giovanni di Iasio, Luigi Infante, Fabrizio Lillo e Federico Pierobon. «The multiplex structure of interbank networks». In: *Quantitative Finance* 15 (2015), pp. 673–691.
- [6] Alain Barrat, Marc Barthelemy, Romualdo Pastor-Satorras e Alessandro Vespignani. «The architecture of complex weighted networks». In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 101.11 (2004), pp. 3747–3752.
- [7] Stefano Battiston, James B. Glattfelder, Diego Garlaschelli, Fabrizio Lillo e Guido Caldarelli. «The Structure of Financial Networks». In: *Network Science: Complexity in Nature and Technology*. A cura di Ernesto Estrada, Maria Fox, Desmond J. Higham e Gian-Luca Oppo. London: Springer London, 2010, pp. 131–163. ISBN: 978-1-84996-396-1.
- [8] Board of Governors of the Federal Reserve System. *Policy Statement on Payments System Risk*. Federal Reserve. *Systems Optimization and Operations Report*. 2001.
- [9] Rodrigo Cifuentes, Gianluigi Ferrucci e Hyun Song Shin. «Liquidity risk and contagion». In: *Journal of the European Economic Association* 3.2-3 (2005), pp. 556–566.
- [10] Manlio De Domenico, Clara Granell, Mason A Porter e Alex Arenas. «Multiplex financial networks: Revealing the level of complexity in finance». In: *Journal of Complex Networks* 3.2 (2015), pp. 159–176.

- [11] Douglas W Diamond e Raghuram G Rajan. «Fear of fire sales, illiquidity seeking, and credit freezes». In: *The Quarterly Journal of Economics* 126.2 (2011), pp. 557–591.
- [12] Darrell Duffie e Kenneth Singleton. *Credit Risk: Pricing, Measurement, and Management*. Princeton: Princeton University Press, 2003.
- [13] Prasanna Gai. *Systemic Risk: The Dynamics of Modern Financial Systems*. OUP Oxford, 2013. ISBN: 9780199544493.
- [14] Franklin Allen, Douglas Gale. «Financial Contagion». In: *Journal of political economy* 108.1 (2000), pp. 1–211.
- [15] Antonios Garas, Frank Schweitzer e Shlomo Havlin. «Quantifying economic linkages with application to the European sovereign debt crisis». In: *The European Physical Journal B* 85.6 (2012), pp. 1–10.
- [16] Diego Garlaschelli e Maria I Loffredo. «Fitness-dependent topological properties of the world trade web». In: *Physical Review Letters* 93.18 (2004), p. 188701.
- [17] Paul Glasserman e H Peyton Young. «How likely is contagion in financial networks?» In: *Journal of Banking & Finance* 50 (2015), pp. 383–399.
- [18] Andrew G. Haldane. *Rethinking the Financial Network*. Speech delivered at the Financial Student Association. Available at the Bank of England’s website. Amsterdam, Netherlands, 2009.
- [19] T.R. Hurd. *Contagion! Systemic Risk in Financial Networks*. SpringerBriefs in Quantitative Finance. Springer, 2016. ISBN: 9783319339290.
- [20] Prasanna Gai, Sujit Kapadia. «Contagion in financial networks». In: *Proc. R. Soc. A* 466 (2010), pp. 2401–2423.
- [21] George G. Kaufman. «Comment on systemic risk». In: *Research in Financial Services: Banking, Financial Markets, and Systemic Risk*. A cura di George Kaufman. Vol. 7. Greenwich: JAI Press, 1995, pp. 47–52.
- [22] George G. Kaufman e Kenneth E. Scott. «What is systemic risk, and do bank regulators retard or contribute to it?» In: *Independent Review* 7.3 (2003), pp. 371–391.
- [23] Robert M May e Nimalan Arinaminpathy. «Systemic risk: the dynamics of model banking systems». In: *Journal of The Royal Society Interface* 7.46 (2010), pp. 823–838.
- [24] Stefano Mieli. *La crisi finanziaria internazionale e le banche italiane*. Intervento al convegno “Mercati finanziari: profili civilistici, contabili e fiscali”, Scuola di Polizia Tributaria della Guardia di Finanza. Direttore Centrale per la Vigilanza bancaria e finanziaria della Banca d’Italia. Roma, Italia, 2009.

- [25] Frederic Mishkin. «Comment on systemic risk». In: *Research in Financial Services: Banking, Financial Markets, and Systemic Risk*. A cura di George Kaufman. Vol. 7. Greenwich: JAI Press, 1995, pp. 31–45.
- [26] Mark EJ Newman. «The structure and function of complex networks». In: *SIAM Review* 45.2 (2003), pp. 167–256.
- [27] Giulia Iori, Saqib Jafarey, Francisco G. Padilla. «Systemic risk on the interbank market». In: *Journal of Economic Behavior & Organization* 61 (2006), pp. 525–542.
- [28] Romualdo Pastor-Satorras e Alessandro Vespignani. «Epidemic spreading in scale-free networks». In: *Physical review letters* 86.14 (2001), pp. 3200–3203.
- [29] Steven L. Schwarcz. «Systemic risk». In: *Georgetown Law Journal* 97.1 (2008). Duke Law School Legal Studies Paper No. 163.
- [30] Jeremy C Stein. «Monetary policy as financial-stability regulation». In: *The Quarterly Journal of Economics* 127.1 (2012), pp. 57–95.
- [31] John B. Taylor. «Defining Systemic Risk Operationally». In: *Ending Government Bailouts as We Know Them*. A cura di Kenneth E. Scott, George P. Shultz e John B. Taylor. Hoover Institution, Stanford University, 2010. Cap. 4.
- [32] Christian Upper. «Using Counterfactual Simulations to Assess the Danger of Contagion in Interbank Markets». In: *BIS Working Papers* 234 (2007).