

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

IL POLINOMIO CROMATICO:  
COLORAZIONI E ORIENTAZIONI  
ACICLICHE DI UN GRAFO

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
FABRIZIO CASELLI

Presentata da:  
SARA FURLANI

Anno Accademico 2023-2024



*A Tommaso,  
amico raro,  
per ogni secondo  
che mi ha dedicato*



# Introduzione

George David Birkhoff ha definito il concetto di polinomio cromatico per la prima volta nel 1912. Il matematico statunitense introdusse il polinomio cromatico associato ad una mappa  $M$ , indicato con  $P(M, \lambda)$ , definendolo come la funzione che, data  $M$ , associa, ad ogni intero non negativo  $\lambda$ , il numero di colorazioni proprie della mappa ottenute utilizzando al più  $\lambda$  colori. Una colorazione propria è, per definizione, una qualsiasi colorazione che assegna due diversi colori ad ogni coppia di regioni adiacenti, che quindi condividono almeno un lato di misura non nulla. Birkhoff pensava infatti di potersene servire per dimostrare che, data una qualsiasi cartina geografica, fossero sufficienti quattro colori per ottenere una colorazione propria. La sua idea, in particolare, era quella di provare che  $P(M, 4) > 0$  per ogni mappa  $M$ .

Questo concetto è stato successivamente generalizzato al caso di un qualsiasi grafo  $G$ , portando a determinare importanti proprietà di questa funzione.

L'obiettivo principale di questo elaborato, suddiviso in tre capitoli, è lo studio del polinomio cromatico e, in particolare, del suo rapporto con le orientazioni acicliche dei grafi. A tale scopo, approfondiremo il teorema di Stanley, fornendone due diverse dimostrazioni.

Nel primo capitolo introdurremo alcune delle nozioni di base della teoria dei grafi e delle loro colorazioni, verranno definiti concetti come grafi, cammini, componenti connesse, colorazioni proprie e numero cromatico.

Nel secondo capitolo presenteremo il polinomio cromatico e illustreremo alcune delle più significative proprietà di questa funzione, principalmente grazie all'utilizzo della

formula di cancellazione e contrazione:

$$P(G, \lambda) = P(G \setminus e, \lambda) - P(G/e, \lambda),$$

dove  $G \setminus e$  è il grafo ottenuto da  $G$  rimuovendo l'arco  $e$  mentre  $G/e$  contraendolo.

Utilizzando questa formula, dimostreremo che il polinomio cromatico è una funzione polinomiale in una sola variabile. Metteremo in evidenza, inoltre, la stretta correlazione tra questa funzione e il grafo al quale è associata, mostrando che è possibile conoscere il numero di vertici e di archi di un grafo a partire dal suo polinomio cromatico. Infine, discuteremo alcune caratteristiche comuni a tutti i polinomi cromatici, come il fatto che i suoi coefficienti sono numeri interi e che si alternano di segno.

Il terzo capitolo, infine, sarà dedicato allo studio delle orientazioni acicliche di un grafo e della loro relazione con il polinomio cromatico. In particolare presenteremo lo studio condotto da Stanley, il primo a dimostrare che il valore assoluto del polinomio cromatico di un grafo  $G$  calcolato in  $-1$  restituisce il numero di orientazioni acicliche di  $G$ .

Gran parte di questo ultimo capitolo sarà dedicata a una dimostrazione equivalente dello stesso teorema, che utilizza le funzioni generatrici. Grazie ad alcune specifiche relazioni tra le orientazioni acicliche, le colorazioni proprie e i sottoinsiemi di vertici indipendenti, dimostreremo il teorema.

Faremo poi un cenno al problema del conteggio delle orientazioni acicliche di un grafo, che abbiano un sottoinsieme di vertici indipendenti fissato come insieme delle sorgenti, nel caso particolare in cui questo insieme abbia cardinalità 1.

# Indice

|                                                                            |           |
|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduzione</b>                                                        | <b>i</b>  |
| <b>1 Basi della teoria dei grafi</b>                                       | <b>1</b>  |
| 1.1 Definizioni di base della teoria dei grafi . . . . .                   | 1         |
| 1.2 Colorazione dei grafi . . . . .                                        | 4         |
| <b>2 Il polinomio cromatico</b>                                            | <b>5</b>  |
| 2.1 Introduzione al polinomio cromatico . . . . .                          | 5         |
| 2.2 La formula di cancellazione-contrazione . . . . .                      | 7         |
| 2.3 Proprietà del polinomio cromatico . . . . .                            | 9         |
| <b>3 Il numero di orientazioni acicliche di un grafo</b>                   | <b>13</b> |
| 3.1 Dimostrazione di Stanley . . . . .                                     | 13        |
| 3.2 Dimostrazione con funzioni generatrici . . . . .                       | 17        |
| 3.2.1 Colorazioni proprie e sottoinsiemi di vertici indipendenti . . . . . | 18        |
| 3.2.2 Orientazioni acicliche e sorgenti di un'orientazione . . . . .       | 22        |
| <b>Bibliografia</b>                                                        | <b>28</b> |



# Elenco delle figure

|     |                                                |    |
|-----|------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Esempio di grafo . . . . .                     | 2  |
| 1.2 | Grafo completo $K_5$ . . . . .                 | 2  |
| 1.3 | Grafo vuoto . . . . .                          | 2  |
| 1.4 | Cammino . . . . .                              | 2  |
| 1.5 | Componenti connesse . . . . .                  | 3  |
| 1.6 | Albero . . . . .                               | 3  |
| 1.7 | Colorazione propria di $G$ . . . . .           | 4  |
| 1.8 | Colorazione impropria di $G$ . . . . .         | 4  |
| 2.1 | Grafo completo $K_3$ . . . . .                 | 6  |
| 2.2 | Grafo $G$ . . . . .                            | 7  |
| 2.3 | Grafo $G \setminus e$ . . . . .                | 8  |
| 2.4 | Grafo $G/e$ . . . . .                          | 8  |
| 3.1 | Orientazione aciclica . . . . .                | 14 |
| 3.2 | Orientazione non aciclica . . . . .            | 14 |
| 3.3 | Sottografo di $G$ . . . . .                    | 19 |
| 3.4 | Sottoinsiemi di vertici indipendenti . . . . . | 19 |



# Capitolo 1

## Basi della teoria dei grafi

In questo primo capitolo proponiamo alcune delle definizioni fondamentali della teoria dei grafi, che risulteranno essenziali per la comprensione dei capitoli successivi.

Le notazioni che verranno introdotte saranno quelle utilizzate nel resto dell'elaborato.

### 1.1 Definizioni di base della teoria dei grafi

**Definizione 1.1.** Un **grafo** (o grafo non orientato),  $G = (V, E)$ , è una coppia  $(V, E)$  dove  $V$  è un insieme non vuoto i cui elementi sono detti **vertici** (o nodi), ed  $E$  è un insieme di coppie non ordinate di elementi di  $V$ , detti **archi** (anche spigoli o lati). Più precisamente uno spigolo è un insieme  $\{A, B\} \subset V$  tale che  $1 \leq |\{A, B\}| \leq 2$ . È possibile avere spigoli del tipo  $\{A\}$  che vengono chiamati **cappi**.

**Definizione 1.2.** Due vertici  $A, B \in V$  si dicono **adiacenti** se  $\{A, B\} \in E$ , ovvero se esiste un arco di estremi  $A$  e  $B$ .

**Definizione 1.3.** Un grafo si dice **completo** se è privo di cappi e se  $\forall A, B \in V$ ,  $\{A, B\} \in E$ , ovvero se comunque presi due vertici del grafo, questi sono adiacenti. Indichiamo con  $K_n$  il grafo completo con  $n$  vertici.

**Definizione 1.4.** Definiamo **grafo vuoto** (o nullo) ogni grafo del tipo  $G = (V, \emptyset)$ , ovvero privo di spigoli.

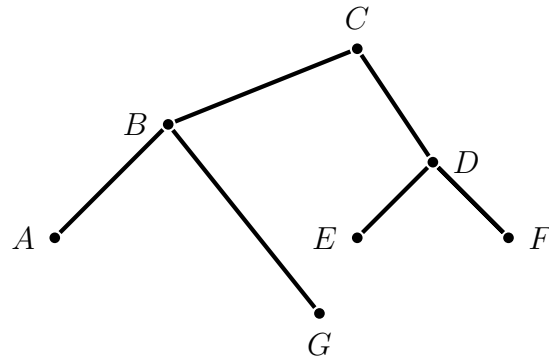


Figura 1.1: Grafo  $G$ : il grafo  $G$  in figura è dotato di  $n = 7$  vertici e  $m = 6$  archi.  $B$  e  $C$  sono vertici adiacenti;  $C$  e  $G$  sono vertici non adiacenti.

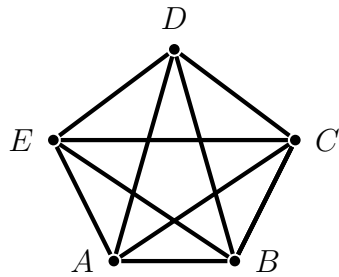


Figura 1.2: Grafo completo  $K_5$

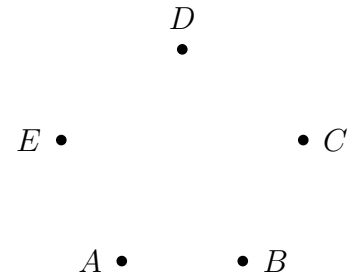


Figura 1.3: Grafo vuoto

**Definizione 1.5.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo. Si chiama **cammino** di estremi  $A_1$  e  $A_k$  una sequenza

$$\langle A_1, A_2, \dots, A_k \rangle$$

con  $A_i \in V, \{A_i, A_{i+1}\} \in E \ \forall i$ .

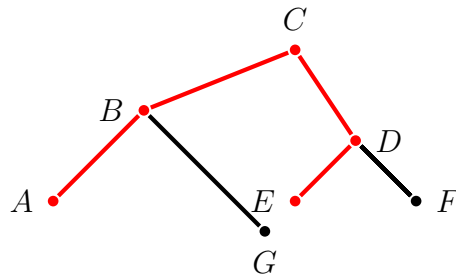


Figura 1.4: Cammino di estremi  $A$  ed  $E$

**Definizione 1.6.** Un cammino si dice **elementare** se non contiene vertici ripetuti, fatta eventualmente eccezione per il primo e l'ultimo vertice che potrebbero essere uguali; in questo caso si parla di **ciclo**.

**Definizione 1.7.** Un grafo si dice **connesso** se  $\forall A, B \in V$  esiste un cammino di estremi  $A$  e  $B$ .

**Definizione 1.8.** Dato un grafo  $G = (V, E)$ , chiamiamo **componenti connesse** di  $G$ , i sottografi  $G_i = (V_i, E_i)$  per  $1 \leq i \leq k$ , tali che:

- $G_i = (V_i, E_i)$  è connesso, per  $1 \leq i \leq k$ ;
- $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$  (partizione di  $V$ );
- $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$  (partizione di  $E$ );
- $\forall i \neq j$ , non esistono lati in  $E$  tra  $V_i$  e  $V_j$ ;

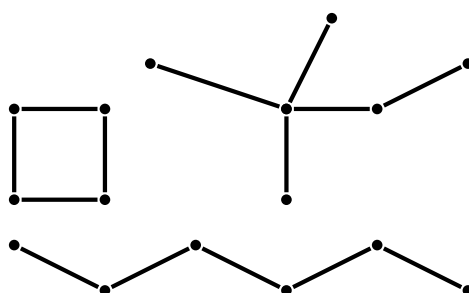


Figura 1.5: Grafo  $G$  non connesso, dotato di tre componenti connesse

**Definizione 1.9.** Si dice **albero** un grafo connesso privo di cicli.

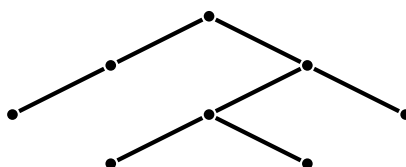


Figura 1.6: Albero

## 1.2 Colorazione dei grafi

La colorazione dei grafi è un particolare caso di etichettamento dei grafi, che utilizza i colori come etichette. In particolare si parla di colorazione dei vertici se ad ogni vertice viene associato un colore e, in modo analogo, si può parlare di colorazione degli spigoli. L'assegnazione di tali etichette viene effettuata in modo tale da rispettare delle precise condizioni; ad esempio chiamiamo *colorazione propria (o esatta)* dei vertici di un grafo la colorazione che associa un diverso colore a ciascun elemento di una qualsiasi coppia di vertici adiacenti; al contrario chiameremo *colorazione impropria* una colorazione che non soddisfi tale condizione.

**Definizione 1.10.** Viene definita una ***k*-colorazione propria** una qualsiasi colorazione propria che utilizza al massimo  $k$  colori.

**Definizione 1.11.** Si dice **numero cromatico** di un grafo  $G$ , e si indica con  $\chi(G)$ , il minimo intero  $k$  per cui esiste una sua  $k$ -colorazione.

*Esempio 1.1.* Proponiamo una colorazione propria e una colorazione impropria del grafo  $G$ .

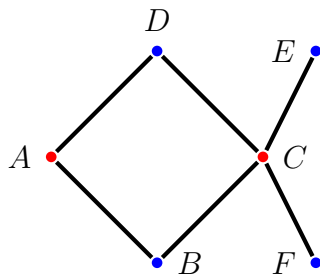


Figura 1.7: Colorazione propria di  $G$

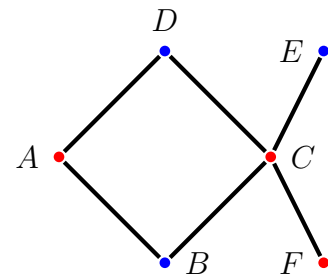


Figura 1.8: Colorazione impropria di  $G$

Si noti il numero cromatico del grafo  $G$  in figura è  $\chi(G) = 2$ .

# Capitolo 2

## Il polinomio cromatico

In questo capitolo introduciamo il polinomio cromatico, definito per la prima volta nel 1912 da George David Birkhoff, nel tentativo di risolvere il così detto "Problema dei quattro colori".

### 2.1 Introduzione al polinomio cromatico

**Definizione 2.1.** *Dato un grafo  $G$ , indichiamo con  $P(G, \lambda)$  il numero di colorazioni esatte di  $G$  che si possono ottenere utilizzando al più  $\lambda$  colori.  $P(G, \lambda)$  prende il nome di **polinomio cromatico**.*

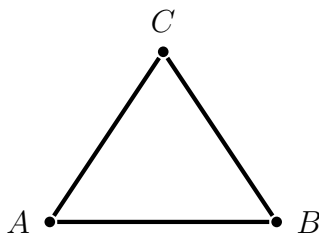
*Osservazione 2.1.* Per come sono stati definiti il numero cromatico e il polinomio cromatico, è evidente che  $\chi(G) = \min\{\lambda \in \mathbb{Z} | P(G, \lambda) \neq 0\}$ .

*Esempio 2.1.* [Polinomio cromatico del grafo vuoto] Nel caso di un grafo vuoto con  $n$  vertici è semplice notare che vale

$$P(G, \lambda) = \lambda^n.$$

Infatti, poiché non esistono archi che congiungono i vertici del grafo, possiamo colorare ogni vertice in modo indipendente con  $\lambda$  colori, ottenendo una colorazione esatta.

*Esempio 2.2.* Consideriamo il grafo in figura e immaginiamo di volerlo colorare utilizzando al più  $\lambda$  colori.

Figura 2.1: Grafo completo  $K_3$ 

Partendo dal vertice  $A$ , abbiamo  $\lambda$  possibilità di scelta per la sua colorazione. Essendo  $B$  adiacente ad  $A$ , è possibile colorarlo in  $\lambda - 1$  modi diversi, per ottenere una colorazione esatta. Infine, assegnati i colori ai vertici  $A$  e  $B$ , rimangono esattamente  $\lambda - 2$  colori disponibili per il vertice  $C$ , affinché venga mantenuta la condizione di esattezza per la colorazione del grafo. Si ha quindi

$$P(K_3, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

*Osservazione 2.2.* Questo ragionamento può essere facilmente generalizzato al caso di un grafo completo  $K_n$ ; infatti si può procedere in modo analogo a quanto fatto per  $K_3$ , applicando lo stesso ragionamento per ciascuno degli  $n$  vertici di  $K_n$ . L'ultimo vertice del grafo potrà essere colorato in esattamente  $(n - (\lambda - 1))$  modi; questo ci porta a concludere che vale la seguente relazione:

$$P(K_n, \lambda) = \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1).$$

*Esempio 2.3* (Polinomio cromatico di un albero). Calcoliamo il polinomio cromatico di un albero avente  $n$  nodi. Possiamo costruire un qualsiasi albero partendo da un arco, aggiungendo gli altri uno alla volta, ognuno dei quali avrà un solo vertice in comune con l'albero costruito fino al passo precedente. Ad esempio:



poiché il nuovo arco ha in comune solo un vertice con l'albero creato al passo precedente,

il suo altro vertice potrà essere colorato in  $\lambda - 1$  modi diversi. Da ciò segue che per un qualsiasi albero  $T$  con  $n$  vertici vale:

$$P(T, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}.$$

**Proposizione 2.1.** *Dato  $G = (V, E)$  un grafo, siano  $G_1, G_2, \dots, G_k$  le sue componenti connesse; allora vale:*

$$P(G, \lambda) = P(G_1, \lambda) \cdots P(G_k, \lambda). \quad (2.1)$$

*Dimostrazione.* Per definizione di componente connessa, si ha che  $G_1, \dots, G_k$  sono sconnesse, per questo le colorazioni delle diverse componenti connesse sono indipendenti tra loro; è evidente quindi che il numero di modi possibili per colorare il grafo  $G$  è esattamente uguale al prodotto del numero di colorazioni esatte delle componenti separate.  $\square$

## 2.2 La formula di cancellazione-contrazione

Presentiamo ora il *teorema di cancellazione-contrazione*, un risultato di fondamentale importanza per lo sviluppo della teoria del polinomio cromatico.

**Definizione 2.2.** *Dato un grafo  $G = (V, E)$  e un suo lato  $e = \{A, B\} \in E$ , indichiamo con  $G \setminus e$  il grafo ottenuto da  $G$  eliminando il lato  $e$ , e con  $G/e$  quello ottenuto identificando i vertici  $A$  e  $B$ .*

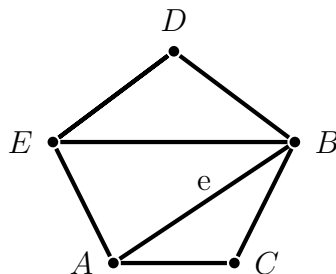
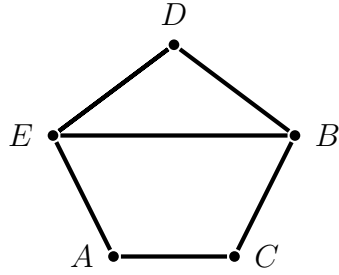
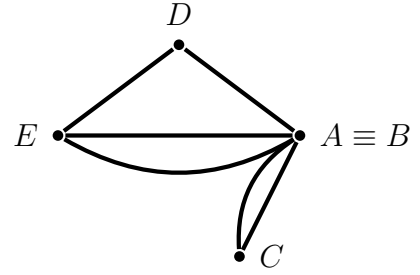
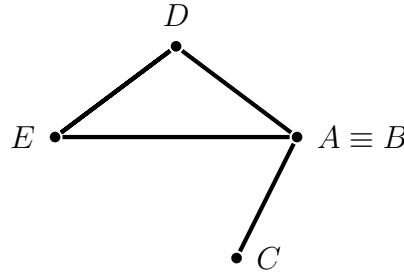


Figura 2.2: Grafo  $G$

Figura 2.3: Grafo  $G \setminus e$ Figura 2.4: Grafo  $G/e$ 

*Osservazione 2.3.* Nel caso in cui il grafo presenti degli archi multipli, questi possono essere sostituiti da archi singoli; infatti un arco multiplo rappresenta esattamente la stessa restrizione sui colori di un arco singolo che congiunge gli stessi nodi, per cui possiamo sostituire a  $G/e$  il seguente grafo:

Figura 2.5: Grafo  $G/e$ 

*Osservazione 2.4.* Si può facilmente notare che valgono le seguenti:

- $|V(G \setminus e)| = |V(G)|$ ;
- $|E(G \setminus e)| = |E(G)| - 1$ ;
- $|V(G/e)| = |V(G)| - 1$ ;
- $|E(G/e)| < |E(G)|$ ;

Consideriamo il grafo  $G$  in figura 2.3, e una sua coppia di vertici non adiacenti, ad esempio  $A$  e  $B$ . Sia  $e = (A, B) \in E$ , le colorazioni del grafo  $G \setminus e$  possono essere di due tipi:

1. colorazioni nelle quali  $A$  e  $B$  hanno colori diversi;

2. colorazioni nelle quali  $A$  e  $B$  hanno lo stesso colore;

si può notare che le colorazioni del tipo (1) sono esatte anche per il grafo  $G$  e, viceversa, ad ogni colorazione di  $G$  corrisponde una colorazione di  $G \setminus e$  del tipo (1). Per quanto riguarda invece le colorazioni del caso (2), a ciascuna di esse corrisponde una colorazione del grafo  $G/e$ , e ogni colorazione di  $G/e$  è una colorazione del tipo (2).

Da ciò segue che

$$P(G \setminus e, \lambda) = P(G, \lambda) + P(G/e, \lambda).$$

Abbiamo così mostrato che vale la seguente equazione, detta *formula di cancellazione-contrazione*:

$$P(G, \lambda) = P(G \setminus e, \lambda) - P(G/e, \lambda). \quad (2.2)$$

L'idea che abbiamo utilizzato è quella di applicare il principio di cancellazione-contrazione ripetutamente, fino ad ottenere grafi il cui polinomio cromatico sia noto, come ad esempio il caso di grafi vuoti, completi o alberi con  $k$  nodi;

*Osservazione 2.5.* È importante osservare che, utilizzando tale principio, il numero di grafi su cui lavorare raddoppia ad ogni passo, rendendo potenzialmente il processo molto dispendioso dal punto di vista pratico. Nonostante questo, l'importanza di questo teorema per lo sviluppo della teoria del polinomio cromatico sarà presto evidente. Ci si limiti ora ad osservare che i risultati mostrati finora ci permettono di calcolare il polinomio cromatico di un qualsiasi grafo. Si può procedere infatti in maniera induttiva sul numero di lati, utilizzando il teorema di cancellazione-contrazione, partendo dalla condizione nota  $P(G_0, \lambda) = \lambda$  per  $G_0$  grafo vuoto con un solo vertice, insieme all'utilizzo della relazione  $P(G + H, \lambda) = P(G, \lambda)P(H, \lambda)$  dove  $H + G$  è l'unione disgiunta di  $H$  e  $G$  (caso particolare di (2.1) con due sole componenti connesse).

## 2.3 Proprietà del polinomio cromatico

**Teorema 2.1.** *Il polinomio cromatico è un polinomio, nella sola variabile  $\lambda$ .*

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione sul numero di lati  $m$ ;

il passo base  $m = 0$  è banalmente vero, infatti, dato il grafo vuoto con  $n$  vertici, abbiamo osservato che vale  $P(G, \lambda) = \lambda^n$ , polinomio in  $\lambda$ .

Supponiamo ora che il teorema valga per un qualsiasi grafo con al più  $m - 1$  lati, e consideriamo  $G = (V, E)$  tale che  $|E| = m$ . Per l'osservazione (2.4) si ha  $E(G \setminus e) = E(G) - 1 = m - 1$  e  $E(G/e) < E(G) = m$ ; ciò significa che, per il passo induttivo, i polinomi cromatici di  $G/e$  e  $G \setminus e$  sono polinomi in  $\lambda$ , e, per (2.2), sappiamo che vale  $P(G, \lambda) = P(G \setminus e, \lambda) - P(G/e, \lambda)$ ; da cui segue che  $P(G, \lambda)$  è un polinomio in  $\lambda$ .  $\square$

**Teorema 2.2.** *Dato  $G = (V, E)$  allora il grado del polinomio cromatico di  $G$  è pari a  $n$ , con  $n = |V|$ .*

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione sul numero di lati  $m$ .

Se  $m = 0$  allora sappiamo che il polinomio cromatico del grafo vuoto con  $n$  vertici è  $P(G, \lambda) = \lambda^n$ , polinomio di grado  $n$ .

Supponiamo vero il teorema per ogni grafo con al più  $m - 1$  lati, e consideriamo  $G = (V, E)$  con  $|E| = m$  e  $n = |V|$ .

Sappiamo che  $|E(G)| = m - 1$  e  $|E(G/e)| < m$ , quindi possiamo applicare il passo induttivo a  $G \setminus e$  e a  $G/e$ . In particolare quindi  $P(G, \lambda) = P(G \setminus e, \lambda) - P(G/e, \lambda)$  è la differenza di un polinomio di grado  $n$  e uno di grado  $n - 1$ . Abbiamo così dimostrato che  $\deg(P(G, \lambda)) = n$ .  $\square$

**Teorema 2.3.** *Dato  $G = (V, E)$  un grafo, con  $|V| = n$ ,  $|E| = m$  sia  $P(G, \lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0$  il suo polinomio cromatico; allora valgono le seguenti:*

1.  $P(G, \lambda)$  è monico, cioè  $|a_n| = 1$ ;
2.  $|a_{n-1}| = m$ ;
3.  $a_n > 0$  e gli  $a_k$  si alternano di segno;
4.  $a_k \in \mathbb{Z}$ ,  $k = 1, \dots, n$ ;
5. se  $a_k = 0$  allora  $a_{k-1} = 0$ ;

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione sul numero di lati  $m$ ;

se  $m = 0$  allora  $P(G, \lambda) = \lambda^n$ , è facile notare che sono verificate tutte le proprietà;

supponiamo ora il teorema valido per ogni grafo con al più  $m - 1$  lati. Siano  $m_1 := |E(G \setminus e)| = m - 1$  e  $m_2 := |E(G/e)| < m$ ; per il passo induttivo possiamo quindi scrivere

$$P(G \setminus e, \lambda) = \lambda^n - m_1 \lambda^{n-1} + b_1 \lambda^{n-2} - b_2 \lambda^{n-3} + \dots$$

$$P(G/e, \lambda) = \lambda^{n-1} - m_2 \lambda^{n-2} + c_1 \lambda^{n-3} - c_2 \lambda^{n-4} + \dots$$

con  $P(G \setminus e, \lambda)$  e  $P(G/e, \lambda)$  che soddisfano 1, 2, 3, 4, 5, in particolare avremo quindi  $b_i$  e  $c_i$  interi non negativi.

Per 2.2 si ha

$$\begin{aligned} P(G, \lambda) &= P(G \setminus e, \lambda) - P(G/e, \lambda) = \\ &= (\lambda^n - m_1 \lambda^{n-1} + b_1 \lambda^{n-2} - b_2 \lambda^{n-3} + \dots) - (\lambda^{n-1} - m_2 \lambda^{n-2} + c_1 \lambda^{n-3} - c_2 \lambda^{n-4} + \dots) = \\ &= \lambda^n - (m_1 + 1) \lambda^{n-1} + (b_1 + m_2) \lambda^{n-2} - (b_2 + c_1) \lambda^{n-3} + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

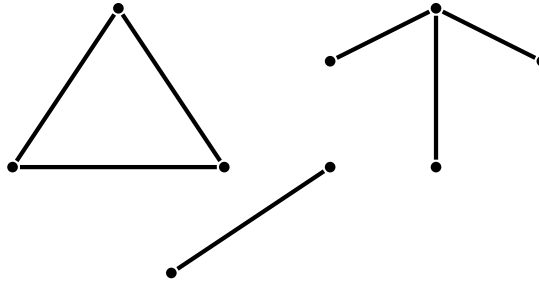
Consideriamo ora  $b_{i+1} + c_i$  il primo coefficiente di  $P(G, \lambda)$  uguale a 0. Si ha che  $b_{i+1} + c_i = 0 \Rightarrow b_{i+1} = 0$  e  $c_i = 0$ ;

poiché vale 5 per  $P(G \setminus e, \lambda)$  e  $P(G/e, \lambda)$  si ha che  $b_{j+1} = 0$  e  $c_j = 0 \forall j \geq i$  da cui  $b_{j+1} + c_j = 0 \forall j \geq i$ . Ciò verifica (5) per  $P(G, \lambda)$ . Inoltre segue direttamente da (2.3) che  $P(G, \lambda)$  è monico (1), che il coefficiente di grado  $\lambda^{n-1}$ ,  $(m_1 + 1)$  è pari al numero di lati di  $G$  (2), i coefficienti si alternano di segno (3), e sono tutti interi in quanto somma di interi (4).  $\square$

**Proposizione 2.2.** *Sia  $G$  un qualsiasi grafo, sia  $P(G, \lambda) = a_n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0$  il suo polinomio cromatico, allora  $a_0 = 0$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo  $a_0 = c$ ,  $c \neq 0$ ; allora si ha  $P(G, 0) = c$  questo è assurdo per com'è stato definito il polinomio cromatico, infatti non è possibile colorare un grafo utilizzando 0 colori.  $\square$

*Esempio 2.4.* Calcoliamo il polinomio cromatico del grafo in figura e mostriamo che sono verificate le proprietà citate nei teoremi precedenti.



Il grafo è composto da tre componenti connesse, delle quali sappiamo calcolare il polinomio cromatico; si tratta infatti di due grafi completi,  $K_3$  e  $K_2$  e di un albero con 4 nodi. Avremo quindi  $P(G, \lambda) = P(K_3, \lambda) \cdot P(K_2, \lambda) \cdot P(T_4, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \cdot \lambda(\lambda - 1) \cdot \lambda(\lambda - 1)^3 = \lambda^9 - 7\lambda^8 + 20\lambda^7 - 30\lambda^6 + 25\lambda^5 - 11\lambda^4 + 2\lambda^3$ .

Possiamo notare che  $P(G, \lambda)$  associato al grafo in figura, è un polinomio monico nella variabile  $\lambda$  di grado 9, pari al numero di vertici del grafo. Inoltre il coefficiente del termine di grado 8, cioè  $n - 1$  con  $n$  numero di vertici, corrisponde al numero di archi del grafo; valgono inoltre le proprietà dei teoremi 2.3 e della proposizione 2.2; infatti tutti i coefficienti del polinomio sono interi e si alternano di segno; i termini di grado minore o uguale a 2 hanno coefficienti nulli e il termine noto è uguale a 0.

## Capitolo 3

# Il numero di orientazioni acicliche di un grafo

In questo capitolo mostreremo la correlazione tra il polinomio cromatico e il numero di orientazioni acicliche di un grafo. In particolare inizieremo presentando lo studio svolto nel 1972 da Richard Stanley, che, per primo, dimostrò che il valore assoluto del polinomio cromatico di un grafo  $G$ , calcolato in  $-1$  restituisce il numero di orientazioni acicliche di  $G$ . Forniremo poi una dimostrazione alternativa dello stesso risultato che utilizza le funzioni generatrici.

### 3.1 Dimostrazione di Stanley

**Definizione 3.1.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo. Un'**orientazione** di  $G$  è il risultato dell'assegnazione di una direzione  $A \rightarrow B$  oppure  $B \rightarrow A$  ad ogni arco  $\{A, B\} \in E$ . Diremo che  $G$  è un **grafo orientato** se è dotato di un'orientazione.

**Definizione 3.2.** Dato  $G$  un grafo orientato, un **ciclo orientato** è un insieme di vertici  $\{A_1, \dots, A_k\} \subset V$  per cui esistono gli archi  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_k \rightarrow A_1$ . Un'orientazione è detta **aciclica** se non ha cicli orientati.

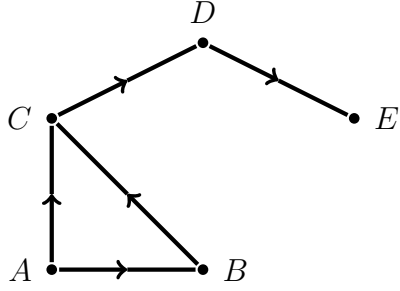


Figura 3.1: Orientazione aciclica

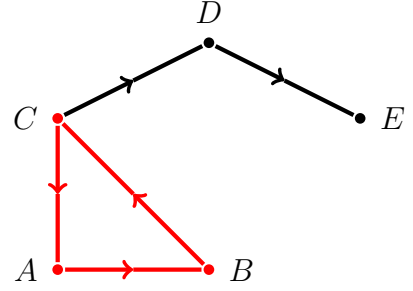


Figura 3.2: Orientazione non aciclica

**Proposizione 3.1.** Dato  $P(G, \lambda)$  il polinomio cromatico del grafo  $G$ , allora si ha che  $P(G, \lambda)$  è uguale al numero di coppie  $(\sigma, \mathcal{O})$  dove  $\sigma$  è una mappa  $\sigma : V \rightarrow \{1, \dots, \lambda\}$  e  $\mathcal{O}$  è un'orientazione del grafo  $G$  tali che:

1.  $\mathcal{O}$  è aciclica;
2. se  $A \rightarrow B$  nell'orientazione  $\mathcal{O}$  allora  $\sigma(A) > \sigma(B)$ ;

*Dimostrazione.* La condizione (2) garantisce che  $\sigma$  sia una colorazione propria, infatti se  $A, B \in X \Rightarrow \sigma(A) \neq \sigma(B)$ ;

Viceversa se  $\sigma$  è una colorazione propria allora questa definisce un'unica orientazione aciclica di  $G$ . Infatti, essendo  $\sigma(A) \neq \sigma(B)$ ,  $\forall \{A, B\} \in E$  se  $\sigma(A) > \sigma(B)$  orientiamo il lato  $A \rightarrow B$ , al contrario se  $\sigma(B) > \sigma(A)$  consideriamo l'orientazione  $B \rightarrow A$ . Inoltre, da questa condizione, segue automaticamente (1), infatti supponiamo per assurdo che esista ciclo diretto in  $G$ , ad esempio  $A \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow A$ , allora per (2) vale  $\sigma(A) > \sigma(B_1) > \sigma(B_2) > \dots > \sigma(A)$  il che è assurdo.

Abbiamo quindi dimostrato che il numero di  $\sigma$  tali che valgano (1) e (2) coincide con il numero di colorazioni esatte.  $\square$

Definiamo ora similmente  $\bar{P}(\lambda)$ , dato  $\lambda$  intero non negativo, come il numero di coppie  $(\sigma, \mathcal{O})$  tale che  $\sigma$  è una mappa  $\sigma : V \rightarrow \{1, \dots, \lambda\}$  e  $\mathcal{O}$  è un'orientazione di  $G$  tale che:

1.  $\mathcal{O}$  è un'orientazione aciclica;
2. se  $A \rightarrow B$  nell'orientazione  $\mathcal{O}$  allora  $\sigma(A) \geq \sigma(B)$ ;

**Teorema 3.1.** *Dato  $G = (V, E)$ , per qualsiasi intero non negativo vale*

$$\bar{P}(G, \lambda) = (-1)^n P(G, -\lambda) \text{ con } n = |V|.$$

*Dimostrazione.* Abbiamo visto nell'Osservazione 2.5 che il polinomio cromatico di qualsiasi grafo  $P(G, \lambda)$  è univocamente determinato dalle seguenti condizioni:

1.  $P(G_0, \lambda) = \lambda$  per  $G_0$  grafo vuoto con un solo vertice;
2.  $P(G + H, \lambda) = P(G, \lambda)P(H, \lambda)$  dove  $H + G$  è l'unione disgiunta di  $H$  e  $G$ ;
3.  $\forall e \in E, P(G, \lambda) = P(G \setminus e, \lambda) - P(G/e, \lambda)$ , per (2.2);

quindi la funzione  $f(G, \lambda) := (-1)^n P(G, -\lambda)$  sarà univocamente determinata da:

1.  $f(G_0, \lambda) = (-1)^1 P(G_0, -\lambda) = -(-\lambda) = \lambda$ ;
2.  $f(G + H, \lambda) = (-1)^{n+m} P(G + H, -\lambda) = (-1)^n P(G, -\lambda) (-1)^m P(H, -\lambda) = f(G, \lambda) f(H, \lambda)$ , con  $|H| = m$ ;
3.  $f(G, \lambda) = (-1)^n P(G, \lambda) = (-1)^n (P(G \setminus e, \lambda) - P(G/e, \lambda)) = (-1)^n P(G \setminus e, \lambda) - (-1)^n P(G/e, \lambda) = (-1)^n P(G \setminus e, \lambda) + (-1)^{n-1} P(G/e, \lambda) = f(G \setminus e, \lambda) + f(G/e, \lambda)$ .

Di conseguenza per dimostrare la proposizione, sarà sufficiente verificare le seguenti tre proprietà per  $\bar{P}(G, \lambda)$ :

- 1a)  $\bar{P}(G_0, \lambda) = \lambda$ ;
- 2a)  $\bar{P}(G + H, \lambda) = \bar{P}(G, \lambda) \bar{P}(H, \lambda)$ ;
- 3a)  $\forall e \in E, \bar{P}(G, \lambda) = \bar{P}(G \setminus e, \lambda) + \bar{P}(G/e, \lambda)$ .

Le prime due condizioni sono banalmente verificate, occupiamoci ora della terza.

Sia  $e = \{A, B\} \in E$ , consideriamo  $\sigma : V(G \setminus e) \rightarrow \{1, \dots, \lambda\}$  e  $\mathcal{O}$  un'orientazione aciclica di  $G \setminus e$  compatibile con  $\sigma$ . Osserviamo che  $\sigma$  è ben definita su  $V(G)$  in quanto  $V(G) = V(G \setminus e)$ . Siano ora  $\mathcal{O}_1$  l'orientazione di  $G$  ottenuta aggiungendo  $A \rightarrow B$  a  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{O}_2$  quella ottenuta aggiungendo  $B \rightarrow A$  a  $\mathcal{O}$ . Se riusciamo a dimostrare che per ogni coppia  $(\sigma, \mathcal{O})$

esattamente una tra  $\mathcal{O}_1$  e  $\mathcal{O}_2$  è compatibile con  $\sigma$ , eccetto per un numero pari a  $\bar{P}(G, \lambda)$  di queste coppie, caso in cui sia  $\mathcal{O}_1$  che  $\mathcal{O}_2$  sono compatibili con  $\sigma$ , sarà valida la scrittura:  $\bar{P}(G, \lambda) = \bar{P}(G \setminus e, \lambda) + \bar{P}(G/e, \lambda)$ , e avremo quindi dimostrato il teorema.

Presa una qualsiasi coppia  $(\sigma, \mathcal{O})$  dove  $\sigma : V \rightarrow \{1, \dots, \lambda\}$  e  $\mathcal{O}$  è un'orientazione aciclica di  $(G \setminus e)$  compatibile con  $\sigma$ , allora sarà verificata una delle seguenti condizioni:

1.  $\sigma(A) > \sigma(B)$ ;
2.  $\sigma(A) < \sigma(B)$ ;
3.  $\sigma(A) = \sigma(B)$ ;

Caso (1): Se  $\sigma(A) > \sigma(B)$  allora sicuramente  $\mathcal{O}_2$  non è compatibile con  $\sigma$ , infatti dati  $A \rightarrow B \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow A \Rightarrow \sigma(A) > \sigma(B) \geq \sigma(C_1) \geq \sigma(C_2) \geq \dots \geq \sigma(A)$  il che è assurdo, mentre  $\mathcal{O}_1$  lo è.

Caso (2): Similmente al caso (1) si ha che  $\mathcal{O}_2$  è compatibile mentre  $\mathcal{O}_1$  non lo è.

Caso (3): Vogliamo dimostrare che sia  $\mathcal{O}_1$  che  $\mathcal{O}_2$  sono compatibili con  $\mathcal{O}$ . Supponiamo per assurdo che nessuna delle due orientazioni  $\mathcal{O}_1$  e  $\mathcal{O}_2$  sia aciclica, allora esistono due cammini orientati

$$A \rightarrow B \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow A$$

$$B \rightarrow A \rightarrow D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow \dots \rightarrow B$$

ma questo significa che esiste un cammino orientato

$$A \rightarrow D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow \dots \rightarrow B \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow A$$

il che è assurdo, poiché, per ipotesi,  $\mathcal{O}$  è aciclica.

Abbiamo così mostrato che almeno una tra  $\mathcal{O}_1$  e  $\mathcal{O}_2$  è aciclica.

Resta ora da provare che sia  $\mathcal{O}_1$  che  $\mathcal{O}_2$  sono compatibili con  $\sigma$  per esattamente  $\bar{P}(G, \lambda)$  coppie  $(\sigma, \mathcal{O})$ , con  $\sigma(A) = \sigma(B)$ .

Per fare questo occorre definire una biezione tra le coppie  $(\sigma, \mathcal{O})$  tali che sia  $\mathcal{O}_1$  che  $\mathcal{O}_2$  siano acicliche, con  $\sigma(A) = \sigma(B)$  e le coppie  $(\sigma', \mathcal{O}')$  tali che  $\sigma' : V \rightarrow \{1, \dots, \lambda\}$  e  $\mathcal{O}'$  sia un'orientazione aciclica di  $G/e$  compatibile con  $\sigma'$ .

Sia  $C$  il vertice di  $G/e$  ottenuto identificando i vertici  $A$  e  $B$ , allora, indicando con  $V(G)$  l'insieme dei vertici del grafo  $G$ , si ha che  $V(G/e) = V(G \setminus e) - \{A, B\} \cup \{C\}$ .

Data  $(\sigma, \mathcal{O})$  definiamo  $\sigma'$  come  $\sigma'(D) = \sigma(D) \forall D \in V(G \setminus e) - C$  e  $\sigma'(C) = \sigma(A) = \sigma(B)$ .  
Sia ora  $\mathcal{O}'$  tale che  $D_1 \rightarrow D_2$  in  $\mathcal{O}' \iff D_1 \rightarrow D_2$  in  $\mathcal{O}$  allora

$$\Phi(\sigma, \mathcal{O}) = (\sigma', \mathcal{O}')$$

è la biezione cercata. □

**Corollario 3.1** (Teorema di Stanley). *Dato un grafo  $G$ , il numero di orientazioni acicliche di  $G$  è pari a  $|P(G, -1)|$ .*

*Dimostrazione.* Segue direttamente da quanto dimostrato finora, infatti, per il teorema (3.1),  $|P(G, -1)| = |\bar{P}(G, 1)|$  che, per definizione, rappresenta il numero di coppie  $(\sigma, \mathcal{O})$  tali che  $\sigma$  sia una mappa, con  $\sigma : V \rightarrow 1$  e  $\mathcal{O}$  è un'orientazione aciclica di  $G$  tale che se  $A \rightarrow B$  in  $\mathcal{O}$  allora  $\sigma(A) = \sigma(B)$ . Si noti che questa condizione è banalmente verificata in quanto  $\sigma$  mappa ogni elemento di  $V$  in 1. □

## 3.2 Dimostrazione con funzioni generatrici

Proponiamo in questa sezione una dimostrazione alternativa del teorema di Stanley, basata sull'utilizzo delle funzioni generatrici.

Dato un grafo  $G$ , consideriamo l'insieme finito dei suoi vertici,  $V$ .

Sia

$$\begin{aligned} f : 2^V &\rightarrow A \\ V \supseteq V' &\mapsto f(V') \end{aligned} \tag{3.1}$$

una funzione d'insieme, dove  $A$  è un anello commutativo con unità.

Consideriamo ora la funzione generatrice

$$F_f(\nu) := \sum_{V' \subseteq V} f(V') \cdot \nu^{V'}, \quad \nu^\emptyset := 1,$$

e definiamo le seguenti regole di calcolo:

dati  $V', V'' \subseteq V$ ,

$$\nu^{V'} \cdot \nu^{V''} := \nu^{V' + V''},$$

dove

$$V' + V'' := \begin{cases} V' \cup V'' & \text{se } V' \cap V'' = \emptyset \\ \star, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con  $\star + V' := \star$ ,  $\star + \star := \star$  e  $\nu^\star := 0$

È evidente che, con le operazioni appena definite, si ha

$$A[V] \cong A[v_1, \dots, v_n] / \langle v_1^2, \dots, v_n^2 \rangle$$

pertanto, salvo alcune occasioni in cui sarà utile l'utilizzo della notazione appena descritta, possiamo pensare alla variabile  $\nu^{V'}$  come al prodotto dei singoli elementi di  $V'$ , tenendo presente che, se uno degli elementi compare al quadrato, il prodotto sarà uguale a 0.

Consideriamo infine la derivata  $\partial^v$  per ogni  $v \in V$  definita come

$$\partial^v \nu^{V'} := \begin{cases} \nu^{V'} & \text{se } v \in V' \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per ogni  $\emptyset \subseteq V' \subseteq V$ , poniamo

$$\partial^{V'} := \prod_{\nu \in V'} \partial^\nu, \text{ da cui segue } \partial^{V'} \nu^{V''} := \begin{cases} \nu^{V''} & \text{se } V' \subseteq V'' \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In particolare si nota facilmente che  $\partial^\emptyset$  è l'identità.

*Osservazione 3.1.* Notiamo che la derivata per com'è stata definita, non soddisfa tutte le proprietà di derivazione ordinaria. Tuttavia, basandosi sulla definizione  $\partial^{V'} := \prod_{\nu \in V'} \partial^\nu$ , è possibile determinare delle regole specifiche per il calcolo di tale derivata.

Usufruiremo in particolare, nel corso di questo capitolo, della seguente proprietà:

*Sia  $s \in V$ , sia  $G \in A[[V]]$ , allora vale:*

$$\partial^{\{s\}}[G(F_f(\nu))] = G'(F_f(\nu)) \cdot \partial^{\{s\}} F_f(\nu).$$

### 3.2.1 Colorazioni proprie e sottoinsiemi di vertici indipendenti

**Definizione 3.3.** Per ogni  $\emptyset \subseteq V' \subseteq V$  indichiamo con  $G[V']$  il **sottografo di  $G(V, E)$  generato da  $V'$** ; ovvero il grafo i cui vertici sono i vertici di  $V'$  e gli archi corrispondono a quelli di  $G$  che hanno come estremi elementi di  $V'$ .

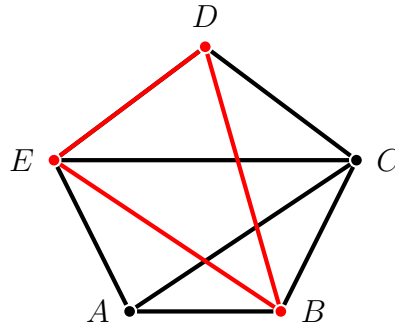


Figura 3.3: In rosso il sottografo di  $G$  generato da  $\{E, D, B\}$

**Definizione 3.4.** Definiamo  $I \subset V$  *sottoinsieme di vertici indipendenti* se il sottografo generato da  $I$  non contiene archi.

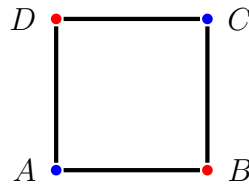
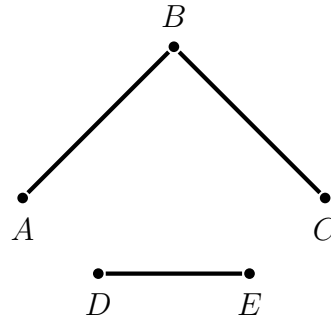


Figura 3.4:  $\{A, C\}$ ,  $\{B, D\}$  sono sottoinsiemi di  $V$  di vertici indipendenti

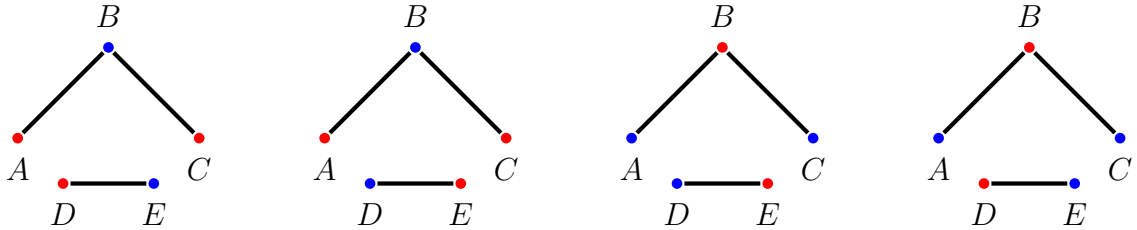
*Osservazione 3.2.* Si osservi che vi è una relazione tra gli insiemi di vertici indipendenti e le colorazioni proprie di un grafo; infatti, data  $\sigma : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  una colorazione con  $k$  colori, questa è propria se e solo se,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\sigma^{-1}(i)$  è un insieme di vertici indipendenti. È quindi evidente che ad ogni partizione dei vertici di un grafo  $G$  in  $k$  insiemi di vertici indipendenti, incluso l'insieme vuoto, corrisponde una colorazione propria di  $G$  con al più  $k$  colori, e viceversa.

*Esempio 3.1.* Sia  $G$  il grafo in figura.

Consideriamo le partizioni dei vertici di  $G$  in due insiemi di vertici indipendenti; le possibili partizioni sono  $\{A, C, D\} \cup \{E, B\}$ ,  $\{A, C, E\} \cup \{B, D\}$ ,  $\{E, B\} \cup \{A, C, D\}$ ,  $\{B, D\} \cup \{A, C, E\}$ . Per ciascuna di queste partizioni, associando un colore ai vertici del primo insieme, e un colore diverso ai vertici del secondo insieme, otteniamo tutte e sole



le colorazioni proprie possibili del grafo  $G$  utilizzando al più due colori.



Definiamo  $I_G(\nu)$  la funzione indicatrice dei sottoinsiemi indipendenti di vertici di  $G$  come la funzione che, dato  $V'$  tale che  $\emptyset \subseteq V' \subseteq V$ , vale 1 se  $V'$  è un sottoinsieme di vertici indipendenti, 0 altrimenti. Si ha:

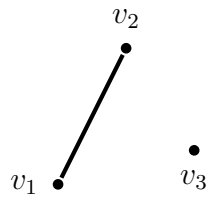
$$I_G(\nu) := \sum_{\emptyset \subset I \subseteq V, I \text{ indipendente}} \nu^I.$$

Poniamo inoltre

$$P_{G,\lambda}(\nu) := \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} P(G[V'], \lambda) \cdot \nu^{V'},$$

dove  $P(G[V'], \lambda)$ , in accordo con le notazioni utilizzate finora, indica il polinomio cromatico del sottografo generato da  $V'$ .

*Esempio 3.2.* Consideriamo il grafo in figura:



Si ha  $I_G(\nu) = 1 + \nu^{\{v_1\}} + \nu^{\{v_2\}} + \nu^{\{v_3\}} + \nu^{\{v_1, v_3\}} + \nu^{\{v_2, v_3\}}$

Calcoliamo ora  $P_{G,2}(\nu) = \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} P(G[V'], \lambda) \cdot \nu^{V'}$ .

Consideriamo prima i sottoinsiemi  $\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}$ , si ha  $P(G[\{v_1\}], \lambda) = P(G[\{v_2\}], \lambda) = P(G[\{v_3\}], \lambda) = \lambda$ , cioè  $P(G[\{v_1\}], 2) = P(G[\{v_2\}], 2) = P(G[\{v_3\}], 2) = 2$ ;

Per i sottoinsiemi di cardinalità 2 si ha  $P(G[\{v_1, v_2\}], \lambda) = \lambda(\lambda-1) \Rightarrow P(G[\{v_1, v_2\}], 2) = 2$ ;  $P(G[\{v_1, v_3\}], \lambda) = P(G[\{v_2, v_3\}], \lambda) = \lambda^2$  essendo  $G[\{v_1, v_3\}]$  e  $G[\{v_2, v_3\}]$  grafi vuoti con due vertici, da cui  $P(G[\{v_1, v_3\}], 2) = P(G[\{v_2, v_3\}], 2) = 4$

Si nota infine facilmente che  $P(G, \lambda) = \lambda^2(\lambda-1)$  da cui  $P(G, 2) = 4$ .

Possiamo quindi scrivere

$$P_{G,2}(\nu) = 2\nu^{\{v_1\}} + 2\nu^{\{v_2\}} + 2\nu^{\{v_3\}} + 2\nu^{\{v_1, v_2\}} + 4\nu^{\{v_1, v_3\}} + 4\nu^{\{v_2, v_3\}} + 4\nu^{\{v_1, v_2, v_3\}}.$$

Osserviamo ora che  $[1 + I_G(\nu)]^2 = [1 + \nu^{\{v_1\}} + \nu^{\{v_2\}} + \nu^{\{v_3\}} + \nu^{\{v_1, v_3\}} + \nu^{\{v_2, v_3\}}]^2 =$   
 $= 1 + \nu^{\{v_1\}} + \nu^{\{v_2\}} + \nu^{\{v_3\}} + \nu^{\{v_1, v_3\}} + \nu^{\{v_2, v_3\}} + \nu^{\{v_1\}} + \nu^{\{v_1, v_2\}} + \nu^{\{v_1, v_3\}} + \nu^{\{v_1, v_2, v_3\}} + \nu^{\{v_2\}} +$   
 $\nu^{\{v_2, v_1\}} + \nu^{\{v_2, v_3\}} + \nu^{\{v_2, v_1, v_3\}} + \nu^{\{v_3\}} + \nu^{\{v_3, v_1\}} + \nu^{\{v_3, v_2\}} + \nu^{\{v_1, v_3\}} + \nu^{\{v_1, v_3, v_2\}} + \nu^{\{v_2, v_3\}} +$   
 $\nu^{\{v_2, v_3, v_1\}} = 1 + 2\nu^{\{v_1\}} + 2\nu^{\{v_2\}} + 2\nu^{\{v_3\}} + 2\nu^{\{v_1, v_2\}} + 4\nu^{\{v_1, v_3\}} + 4\nu^{\{v_2, v_3\}} + 4\nu^{\{v_1, v_2, v_3\}};$   
 vale quindi la relazione  $1 + P_{G,2}(\nu) = [1 + I_G(\nu)]^2$ .

Vogliamo ora dimostrare che l'osservazione precedente può essere generalizzata per il prodotto di  $k$  fattori  $[1 + I_G(\nu)]$ .

Si può notare che, moltiplicando  $k$  fattori  $[1 + I_G(\nu)]$ , dove  $I_G(\nu)$  è la somma di monomi  $\nu^{V^i}$ , si ottiene il termine  $\nu^{V^i}$  ogni volta che si moltiplicano tra loro  $k$  fattori  $\nu^{V^j}$  tali che i  $V^j$  siano disgiunti, e la loro unione dia esattamente  $V^i$ ; è quindi chiaro che il coefficiente di  $V^i$  corrisponde al numero di partizioni possibili di  $V^i$  in  $k$  sottoinsiemi, con la possibilità di utilizzare anche l'insieme vuoto. Per l'osservazione (3.2), si ha che anche il coefficiente di  $\nu^{V^i}$  in  $P_{G,\lambda}(\nu)$  è uguale al numero di partizioni di  $V^i$  in  $k$  insiemi di vertici indipendenti.

Vale quindi la seguente proposizione:

**Proposizione 3.2.** *Dato  $G$  un grafo, date  $P_{G,\lambda}(\nu)$  la funzione generatrice delle colorazioni con al più  $\lambda$  colori e  $I_G(\nu)$  la funzione indicatrice dei sottoinsiemi indipendenti, vale la seguente equazione:*

$$1 + P_{G,\lambda}(\nu) = [1 + I_G(\nu)]^\lambda.$$

Dalla quale segue:

$$\frac{d}{d\lambda}[1 + P_{G,\lambda}(\nu)] = [1 + I_G(\nu)]^\lambda \cdot \log[1 + I_G(\nu)]$$

*Osservazione 3.3.* Osserviamo che, nella proposizione precedente, il numero 1 nel membro di sinistra indica la colorazione del grafo ottenuta utilizzando 0 colori, mentre in quello di destra esso rappresenta la possibilità di utilizzare l'insieme vuoto come uno o più dei  $k$  insiemi della partizione. In altre parole indica la possibilità di scegliere di assegnare ad uno o più colori l'insieme vuoto, il che equivale a non utilizzare il colore corrispondente. Questo è possibile in quanto vogliamo contare il numero di colorazioni esatte ottenute utilizzando al più  $\lambda$  colori, senza la necessità di utilizzarli tutti.

### 3.2.2 Orientazioni acicliche e sorgenti di un'orientazione

Per ogni  $\emptyset \subseteq V' \subseteq V$ , sia  $a(G[V'])$  il numero di orientazioni acicliche del grafo  $G[V']$  e, dato  $\emptyset \subseteq S \subseteq V$  sia  $a_S(G[V'])$  il numero di orientazioni acicliche di  $G[V']$  tali che  $S$  sia l'insieme delle sorgenti. Ovviamente  $a_S(G[V']) = 0$  se  $S$  non è un sottoinsieme di  $V'$ , e se  $S = \emptyset$  allora  $a_S(G[V']) = 0$ , in quanto un'orientazione aciclica di un grafo deve necessariamente avere almeno una sorgente.

Poniamo ora

$$A_G(\nu) := \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} a(G[V']) \cdot \nu^{V'};$$

$$A_{G,S}(\nu) := \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} a_S(G[V']) \cdot \nu^{V'}.$$

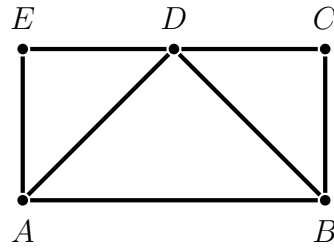
Il rapporto fondamentale tra le orientazioni acicliche e i sottoinsiemi indipendenti di un grafo si basa sul fatto che l'insieme delle sorgenti di un'orientazione aciclica è sempre un insieme di vertici indipendenti.

Quindi se  $S'$  con  $\emptyset \subseteq S' \subseteq V$  non è indipendente, allora non può essere un sottoinsieme dell'insieme delle sorgenti.

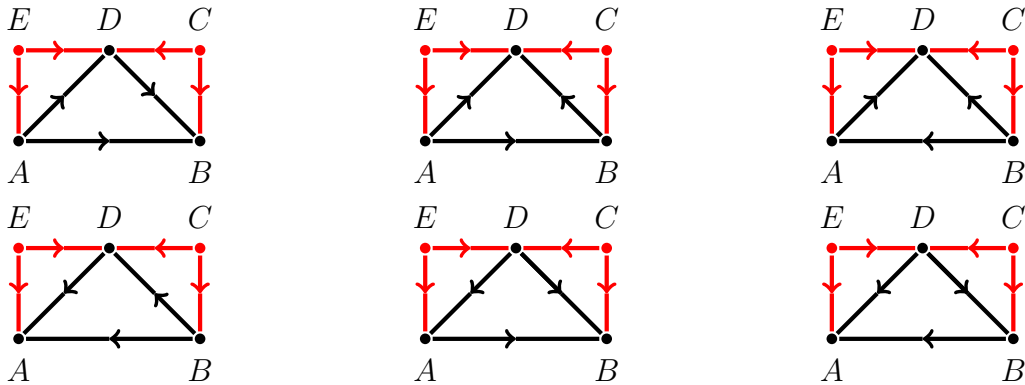
Se invece  $S'$  è indipendente, vogliamo contare il numero di orientazioni acicliche tali che  $S'$  sia un sottoinsieme dell'insieme delle sorgenti; notiamo che tali orientazioni di  $G[V']$  con  $\emptyset \subseteq S' \subseteq V' \subseteq V$ , si ottengono partendo da un'orientazione aciclica qualsiasi del grafo  $G[V' \setminus S']$  e orientando tutti gli archi rimanenti da  $S'$  verso  $V' \setminus S'$ , e quindi si ha

che il numero di orientazioni acicliche tali che  $S'$  sia un sottoinsieme dell'insieme delle sorgenti è uguale a  $[A_G(\nu)] \cdot \nu^{S'}$ .

*Esempio 3.3.* Consideriamo il grafo  $G$  in figura:



Le possibili orientazioni acicliche di  $G$  che abbiano  $\{E, C\}$  come sottoinsieme dell'insieme delle sorgenti si ottengono partendo da un'orientazione aciclica di  $G \setminus \{\{A, E\}, \{E, D\}, \{D, C\}, \{C, B\}\}$  e orientando gli archi rimanenti in modo che sia  $E$  che  $C$  siano sorgenti:



Abbiamo così ottenuto tutte le possibili orientazioni del grafo  $G$  tali che  $\{E, C\}$  sia un sottoinsieme dell'insieme delle sorgenti.

Per quanto appena osservato, indicata con  $B_{G,S'}$  la funzione generatrice delle orientazioni acicliche di  $G$  tali che  $S'$  sia un sottoinsieme dell'insieme delle sorgenti, si ha:

$$B_{G,S'} = [A_G(\nu)] \cdot \nu^{S'} \quad (3.2)$$

Per com'è stata definita  $B_{G,S'}$  vale inoltre:

$$B_{G,S'} = \sum_{S' \subseteq S} A_{G,S}.$$

**Proposizione 3.3.** *Sia  $V$  un insieme finito, e siano  $f$  e  $g$  due funzioni definite sui sottoinsiemi di  $V$ . Se esiste una relazione del tipo*

$$g(T) = \sum_{T \subseteq S} f(S),$$

*allora vale:*

$$f(S) = \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|T-S|} g(T).$$

*Dimostrazione.* Sia

$$g(T) = \sum_{T \subseteq U \subseteq V} f(U);$$

vogliamo verificare che vale

$$f(S) = \sum_{S \subseteq T \subseteq V} (-1)^{|T-S|} g(T).$$

Per mostrare che questa relazione inversa è corretta, sostituiamo la definizione di  $g(T)$  nella sommatoria, ottenendo

$$f(S) = \sum_{S \subseteq T \subseteq V} (-1)^{|T-S|} \left( \sum_{T \subseteq U \subseteq V} f(U) \right).$$

Scambiamo ora l'ordine delle sommatorie:

$$f(S) = \sum_{U \subseteq V} f(U) \left( \sum_{S \subseteq T \subseteq U} (-1)^{|T-S|} \right).$$

Analizziamo la sommatoria interna;

il numero di sottoinsiemi  $T$  di  $U$  che contengono  $S$  è pari al numero di sottoinsiemi di  $U - S$ , infatti possiamo costruire un sottoinsieme  $T$  scegliendo un sottoinsieme di  $U - S$  e aggiungendo  $S$ . Sapendo che, dato un insieme finito, questo ha tanti sottoinsiemi di cardinalità pari quanti di cardinalità dispari, si ha:

$$\sum_{S \subseteq T \subseteq U} (-1)^{|T-S|} = 0.$$

Nel caso particolare in cui  $S = T$  si ha  $(-1)^0 = 1$  da cui segue  $f(S) = f(S)$ .

Abbiamo quindi verificato:

$$f(S) = \sum_{S \subseteq T \subseteq V} (-1)^{|T-S|} \left( \sum_{T \subseteq U \subseteq V} f(U) \right).$$

□

La proposizione appena mostrata, se applicata ad  $A_{G,S}$  e  $B_{G,S'}$ , ci permette di mettere in relazione le orientazioni del grafo  $G$  che hanno esattamente  $S$  come insieme delle sorgenti, ovvero  $A_{G,S}$ , con  $B_{G,S'}$ , le orientazioni acicliche che hanno  $S'$  come sottoinsieme delle sorgenti con  $S \subseteq S'$ .

Vale in particolare la seguente relazione:

$$A_{G,S} = \sum_{S \subseteq S'} (-1)^{|S'-S|} B_{G,S'}. \quad (3.3)$$

Sostituendo 3.2 in 3.3 si ha:

$$A_{G,S} = \sum_{S \subseteq S'} (-1)^{|S'-S|} [1 + A_G(\nu)] \nu^{S'} \quad (3.4)$$

con  $S'$  che varia tra gli insiemi delle sorgenti che contengono  $S$ , ovvero, per quanto detto in precedenza, varia tra gli insiemi di vertici indipendenti che contengono  $S$ . Per questo possiamo sostituire  $(-1)^{|S'-S|} \nu^{S'}$  con  $(-1)^S \partial^S [1 + I_G(-\nu)]$ .

Abbiamo così dimostrato la seguente proposizione:

**Proposizione 3.4.** *Per ogni  $\emptyset \subseteq S \subseteq V$  si ha:*

$$[1 + A_G(\nu)] (-1)^{|S|} \partial^S [1 + I_G(-\nu)] = \partial^S [1 + A_{G,S}(\nu)].$$

*Osservazione 3.4.* Si noti che nel membro di destra è stata introdotta la formulazione  $\partial^S [1 + A_{G,S}(\nu)]$  per generalizzare la proposizione. Infatti questo estende la validità dell'equazione al caso particolare  $S = \emptyset$ .

**Corollario 3.2.** *Nel caso in cui  $S = \emptyset$  si ha*

$$[1 + A_G(\nu)] [1 + I_G(-\nu)] = 1.$$

*Mentre se  $S = \{s\}$ , con  $s \in V$ , allora vale:*

$$-[1 + A_G(\nu)] \cdot \partial^{\{s\}} I_G(-\nu) = A_{G,s}(\nu).$$

Grazie ai risultati ottenuti finora, in particolare alla Proposizione 3.2 e al Corollario 3.2 si ottiene il seguente risultato:

**Teorema 3.2.** *Per ogni  $\emptyset \subseteq V' \subseteq V$ , vale:*

$$[1 + I_G(-\nu)]^{-1} = 1 + A_G(\nu) = 1 + P_{G,-1}(-\nu). \quad (3.5)$$

*Dimostrazione.* Per il corollario 3.2 si ha  $[1 + A_G(\nu)] = [1 + I_G(-\nu)]^{-1}$  e, applicando  $\lambda = -1$  al risultato della proposizione 3.2, si ottiene  $1 + P_{G,-1}(\nu) = [1 + I_G(\nu)]^{-1}$ .

Da cui  $[1 + I_G(\nu)]^{-1} = 1 + A_G(\nu) = 1 + P_{G,-1}(-\nu)$ .  $\square$

**Corollario 3.3.** *Dato un grafo  $G$  vale  $a(G) = (-1)^n P(G, -1)$ .*

*Dimostrazione.* Poiché dal Teorema 3.2 si ha l'uguaglianza  $1 + A_G(\nu) = 1 + P_{G,-1}(-\nu)$ , i coefficienti dei singoli monomi nelle due funzioni generatrici coincidono. In particolare questo implica che  $a(G) = (-1)^n P(G, -1)$  in quanto questi rappresentano, per definizione, rispettivamente il coefficiente di  $\nu^V$  in  $A_G(\nu)$  e in  $P_{G,-1}(-\nu)$ .  $\square$

Analizziamo infine il caso in cui l'insieme delle sorgenti  $S$  contenga un solo elemento, ovvero  $S = \{s\}$ .

**Teorema 3.3.** *Sia  $s \in V$  fissato, allora vale:*

$$\partial^s(-\log[1 + I_G(-\nu)]) = -[1 + I_G(\nu)]^{-1} \cdot \partial^s I_G(-\nu) = A_{G,s}(\nu).$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione consiste in semplici sostituzioni delle relazioni espresse nei teoremi precedenti. Infatti, per la proprietà della derivata riportata nell'Osservazione 3.1, si ha

$$\partial^s(-\log[1 + I_G(-\nu)]) = (-\log[1 + I_G(-\nu)])' \cdot \partial^s I_G(-\nu) = -[1 + I_G(-\nu)]^{-1} \cdot \partial^s I_G(-\nu),$$

per il Teorema 3.2, sappiamo che  $[1 + I_G(-\nu)]^{-1} = 1 + A_G(\nu)$ , da cui,

$$\partial^s(-\log[1 + I_G(-\nu)]) = -[1 + A_G(\nu)] \cdot \partial^s I_G(-\nu)$$

e, infine, per il Corollario 3.2, vale:

$$-[1 + A_G(\nu)] \cdot \partial^s I_G(-\nu) = A_{G,s}(\nu).$$

Abbiamo quindi dimostrato:

$$\partial^s(-\log[1 + I_G(-\nu)]) = -[1 + I_G(\nu)]^{-1} \cdot \partial^s I_G(-\nu) = A_{G,s}(\nu).$$

$\square$

Posto  $A_G^*(\nu) := -\log[1 + I_G(-\nu)]$ , vale il seguente teorema:

**Teorema 3.4.**  $\forall \emptyset \subset V' \subseteq V$ ,

$$-\log[1 + I_G(-\nu)] = A_G^*(\nu) = \frac{d}{d\lambda} P_{G,0}(\nu)$$

conta il numero di orientazioni acicliche di  $G[V']$  che hanno una sola sorgente fissata  $s \in V'$ , e questo numero non è mai negativo. In particolare, è uguale a 0 se  $G$  non è connesso, è uguale a 1 se  $G$  è un albero, ed è maggiore di 1 in tutti gli altri casi.

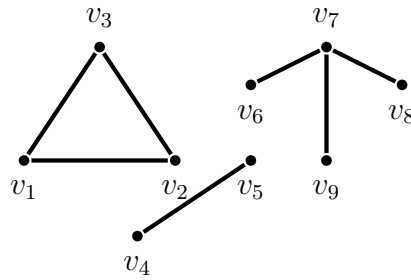
*Dimostrazione.* L'equazione è una diretta conseguenza della definizione di  $A_G^*(\nu)$  e della Proposizione 3.2 applicata a  $\lambda = 0$ .

Per quanto riguarda, invece, le successive considerazioni sul valore di  $A_G^*(\nu)$ , consideriamo separatamente i diversi casi.

Nel caso in cui  $G$  non sia connesso, non esiste alcuna orientazione aciclica che abbia una sola sorgente; infatti ogni componente connessa di  $G$  dovrà essere orientata in modo aciclico, e quindi, per quanto osservato in precedenza, dovrà avere una sorgente.

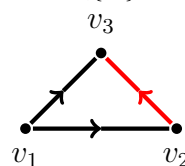
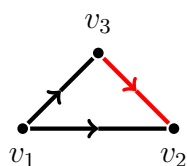
Nel caso in cui  $G$  sia un albero, fissato  $s \in V$ , l'unica orientazione aciclica di  $G$  che abbia  $\{s\}$  come insieme delle sorgenti, è quella ottenuta orientando ogni arco in modo che, per ogni  $v \in V$ , il cammino più breve da  $s$  a  $v$  sia orientato verso  $v$ . Resta ora a dimostrare l'ultima affermazione; consideriamo  $s \in V$  fissato, i cammini più brevi da  $s \in V$  formano un'arborescenza con  $\{s\}$  come unica sorgente. Ogni arco aggiuntivo può essere orientato in due modi diversi, senza la possibilità di creare un ciclo. Si può procedere in modo analogo per gli archi rimanenti, estendendo così l'orientazione, che rimarrà aciclica, a tutto  $G$ .  $\square$

*Esempio 3.4.* Consideriamo il grafo dell'Esempio 2.4, che riportiamo di seguito:

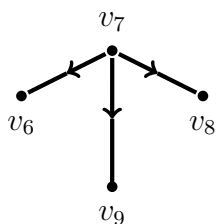


Per quanto dimostrato nel teorema precedente, il grafo  $G$  in figura non può essere orientato in modo tale che abbia una sola sorgente  $\{s\}$ , con  $s \in V$  fissato, in quanto non è connesso. Analizziamo ora le diverse componenti connesse del grafo.

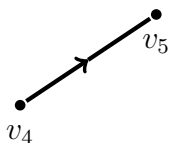
Consideriamo  $K_3$ , verifichiamo che, ad esempio, esiste più di un'orientazione aciclica di  $K_3$  con  $\{v_1\}$  come insieme delle sorgenti. Procedendo con lo stesso ragionamento descritto nella dimostrazione del teorema, orientiamo  $v_1 \rightarrow v_2$  e  $v_1 \rightarrow v_3$ , a questo punto resta da orientare il lato  $\{v_2, v_3\} \in E$ . Questo può essere orientato indifferentemente come  $v_2 \rightarrow v_3$  o  $v_3 \rightarrow v_2$ , senza generare un ciclo diretto. Vale quindi  $A_{G, \{v_1\}} = 2$ .



Consideriamo ora l'albero  $T_4$ , e studiamo le orientazioni che abbiano  $\{v_7\}$  come insieme delle sorgenti. Per quanto detto nella dimostrazione del teorema, l'unica possibilità è la seguente:



Lo stesso vale per  $T_2$ , fissato, ad esempio,  $v_4 \in V$  come unica sorgente.





# Bibliografia

- [1] Feng Ming Dong, Khee Meng Koh e Kok-Lai Teo. *Chromatic polynomials and chromaticity of graphs*. World Scientific, 2005.
- [2] Bodo Lass. “Orientations acycliques et le polynôme chromatique”. In: *European Journal of Combinatorics* 22.8 (2001), pp. 1101–1123.
- [3] Ronald C. Read. “An introduction to chromatic polynomials”. In: *Journal of Combinatorial Theory* 4.1 (1968), pp. 52–71. ISSN: 0021-9800.
- [4] Richard P Stanley. “Acyclic orientations of graphs”. In: *Discrete Mathematics* 5.2 (1973), pp. 171–178.