

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

La contrazione di Lorentz: storia e paradossi

Relatore:

Prof. Vincenzo Fano

Correlatore:

Prof. Daniele Molinini

Presentata da:

Gaetano Alessi

Sommario

Questo lavoro si propone di offrire una comprensione piena e adeguata dell'idea di contrazione di Lorentz approfondendo le sue origini storiche e il suo funzionamento in casi particolarmente controintuitivi. Il primo capitolo discute brevemente i precedenti teorici e sperimentali che hanno portato alla sua formulazione relativistica: l'aberrazione stellare, l'elettromagnetismo classico, gli esperimenti di Fizeau e Michelson e Morley. Il secondo capitolo approfondisce la natura del fenomeno presentando varie versioni di un apparente paradosso, noto in letteratura come "*barn and pole paradox*" ("paradosso dell'asta e del fienile"), toccando questioni come la realtà od oggettività delle contrazioni e come queste modificano il concetto di rigidità. Il terzo e ultimo capitolo descrive l'aspetto che avrebbe un corpo soggetto alla contrazione di Lorentz qualora riuscissimo a vederlo, mostrando che apparirebbe ruotato piuttosto che contratto (rotazione di Terrell).

Indice

Introduzione	3
1 Storia	5
1.1 Aberrazione della luce	5
1.2 Fresnel e Fizeau	6
1.3 Elettromagnetismo	9
1.4 Michelson e Morley	10
1.5 Lorentz	15
1.6 Einstein	16
1.7 Aberrazione: interpretazione relativistica	20
1.8 Fizeau: interpretazione relativistica	20
2 Paradosso dell'asta nel fienile	21
2.1 Formulazione del paradosso	21
2.2 Versione di Rindler	21
2.3 Rigidità e contrazione	23
2.4 Realtà del fenomeno	25
2.5 Variante con rotazione	26
2.6 Variante 3D	28
2.7 Variante con circuito	30
2.8 Analisi generale	32
3 Apparenza visiva della contrazione	37
3.1 Sfera	37
3.2 Angoli piccoli	38
3.3 Oggetti grandi	41
Bibliografia	45

Introduzione

*Die größte Kunst im Lehr- und Wettleben besteht darin, das Problem
in ein Postulat zu verwandeln, damit kommt man durch.*
- Goethe¹

È superfluo ribadire l'importanza della rivoluzione scientifica seguita alle intuizioni che Albert Einstein sviluppa ne *L'elettrodinamica dei corpi in movimento*, pubblicato nel 1905; ma per apprezzarne la mole, occorre insistere sul cambio di prospettiva che viene qui attuato. Di fronte a un panorama teorico essenzialmente caotico, occupato da diverse idee in contrasto tra loro e per la più parte insoddisfacenti, Einstein dirada il campo di ricerca per mezzo della rinuncia più audace, quella alla concezione newtoniana, e comunque comune, dello spaziotempo. Quello che appariva come un rompicapo irrisolvibile con gli strumenti dell'elettromagnetismo e della meccanica, e che sembrava richiedere - in maniera sempre più farraginosa - la supposizione di forze o di mezzi sconosciuti, è ora imposto e preso come punto di partenza: “[...] le stesse leggi dell'elettrodinamica e dell'ottica saranno valide per tutti i sistemi di riferimento nei quali vigono le equazioni della meccanica. Solleveremo questa congettura (il cui contenuto sarà di seguito chiamato ‘Principio di Relatività’) allo stato di postulato” [10].

Questo significa che un problema che Lorentz cercava di trattare dinamicamente, mettendo cioè in gioco delle forze che spiegassero i risultati osservati, viene da Einstein risolto - o meglio, dissolto - in maniera cinematica: l'assunzione dell'invarianza della velocità della luce cambia la struttura matematica stessa della descrizione dello spazio e del tempo. Ne consegue un quadro chiaro e necessariamente coerente dei fenomeni che faticavano a trovare una spiegazione limpida e semplice. A questa adeguatezza teorica può però corrispondere una certa difficoltà nell'applicazione corretta delle idee in casi particolarmente lontani dal senso comune - questo è, se vogliamo, il prezzo del cambiamento di prospettiva. È proprio studiando il modo in cui anche queste situazioni rietrano nelle previsioni della teoria che si garantisce una comprensione adeguata di questa.

Questa tesi è incentrata sull'idea di contrazione delle lunghezze. Se ne scorrono nella prima sezione le origini storiche: i fatti sperimentali e le ipotesi esplicative che la hanno introdotta, dalle osservazioni di Bradley sui fenomeni di aberrazione stellare e di Fresnel sulla velocità della luce in un mezzo, all'interferometro di Fizeau e a quello, di enorme rilevanza teorica, di Michelson e Morley. Si espone poi l'ipotesi di Lorentz, dal quale la contrazione prende il nome, e finalmente la derivazione delle trasformazioni complete dovuta ad Einstein. Questi risultati vengono poi applicati ai casi già trattati dell'aberrazione e dell'esperimento di Fizeau, dando esempio della chiarezza con cui la nuova teoria agisce sui problemi precedenti.

A partire da questo quadro concettuale, il secondo capitolo tratta un noto paradosso, quello dell'asta e del fienile, che ha a che vedere con l'osservazione o meno di un urto dai punti di vista di sistemi di riferimento in moto relativo tra loro. Lo si illustra anzitutto in termini generali, mostrandone l'effettiva impossibilità all'interno della teoria della relatività speciale, e se ne presentano poi diverse varianti che ne colgono vari aspetti: la formulazione originale di Wolfgang Rindler [25], il ruolo della rotazione dei corpi nella risoluzione, il caso di corpi tridimensionali, il problema del suo inserimento in un circuito elettrico. Si conclude la sezione generalizzando la trattazione tramite variabili adimensionali per identificare la condizione della sussistenza dell'apparente paradosso. Queste analisi offrono anche l'occasione di riflettere sul concetto di rigidità alla luce della mecca-

¹“La più grande arte nella vita, teorica e pratica, consiste nel trasformare un problema in un postulato, così ce la si cava.” Lettera a Zelter del 9 agosto 1828, citata in [1], p.80.

nica relativistica e sulla legittimità di attribuire all'effetto di contrazione uno stato di realtà od oggettività.

Il terzo capitolo è dedicato alla questione di come apparirebbe un corpo in moto a velocità relativistica se riuscissimo a vederlo con i nostri occhi. Viene qui notata la fondamentale distinzione tra 'osservare' e 'vedere', e si mostra che una vera e propria contrazione è riscontrabile solo nell'ambito dell'osservazione fisica. Difatti, come ha mostrato, tra gli altri, Terrell [31], l'apparenza visiva sarebbe quella di una rotazione del corpo contratto. Si considera prima il caso di una sfera, poi di un corpo che sottende un angolo solido piccolo, infine di un corpo qualunque.

Ciò che risalterà alla fine, e su cui si insisterà più volte, sarà che le apparenti assurdità e gli scogli nella comprensione di certi fenomeni nascono sempre dall'applicare senza criterio l'idea della contrazione trascurando la modifica della componente temporale che pure è richiesta dalle trasformazioni di Lorentz. E infatti questa è connessa con l'innovazione più dirompente della relatività speciale, quella che veramente trasforma un problema in un postulato, vale a dire la finitezza e l'invarianza della velocità della luce: si capirà che da qui derivano sia le risoluzioni del paradosso sia l'invisibilità della contrazione.

1 Storia

L'idea della contrazione di Lorentz è storicamente in intima connessione con l'idea di etere. Abbandonata con l'avvento della meccanica newtoniana, tornata in auge con la scoperta dei fenomeni elettrici e magnetici, essa era utilizzata per giustificare il trasporto delle onde elettromagnetiche. Questa panoramica storica segue l'impostazione di [7].

1.1 Aberrazione della luce

Nel 1727, James Bradley [5] osservò che le stelle riferite a coordinate astronomiche fisse rispetto alla terra sembrano percorrere traiettorie in moto circolare uniforme su orbite di diametro di circa 41 secondi d'arco. Consideriamo il caso più semplice di una stella allo zenit, raffigurato in Fig. 1. Se la Terra si trova a riposo nel sistema di riferimento dell'etere, i raggi di luce provenienti dalla stella giungono perpendicolarmente alla superficie terrestre e per osservare la stella basterà posizionare il telescopio verticalmente. Se però la Terra è in movimento verso destra con velocità v rispetto all'etere, il telescopio dovrà cambiare inclinazione affinché il suo tubo venga percorso dal raggio di luce senza che questo ne colpisca le pareti. Infatti, se la luce si muove comunque perpendicolarmente verso il terreno, nel tempo Δt in cui essa percorre la distanza $c\Delta t$ il telescopio si sarà mosso verso destra di una distanza $v\Delta t$. Analogamente, se corriamo sotto la pioggia, vediamo le gocce venirci incontro in obliquo. Dal un punto di vista solidale col telescopio, il raggio si muove lungo l'asse dall'obiettivo all'oculare. Possiamo calcolare facilmente l'angolo d'inclinazione perché questo succeda:

$$\tan \alpha = \frac{v\Delta t}{c\Delta t} = \frac{v}{c} \quad (1.1.1)$$

Se la Terra si muove attorno al sole a velocità $v \approx 3 \times 10^4 \text{ms}^{-1}$, otteniamo un angolo $\alpha = 20.5''$. Approssimando il moto terrestre a un moto circolare, la direzione dell'aberrazione si inverte ogni sei mesi e l'asse del telescopio che punta la stella descriverà un cono di diametro $2\alpha = 41''$, in ottimo accordo con le osservazioni di Bradley.

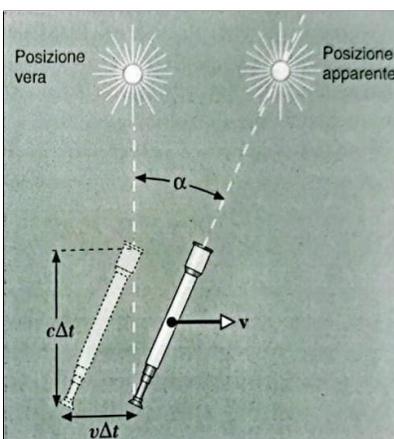


Fig. 1: Schema del fenomeno dell'aberrazione stellare [24].

1.2 Fresnel e Fizeau

Augustin-Jean Fresnel [14] concepiva un etere elastico che verrebbe parzialmente trascinato da un mezzo ottico in moto relativo rispetto a esso. In particolare, se il mezzo si muove rispetto all'etere con velocità v , l'etere verrebbe trascinato con una frazione della sua velocità, fv , dove il coefficiente di trascinamento di Fresnel è così definito:

$$f = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad (1.2.1)$$

con n indice di rifrazione del mezzo ottico.

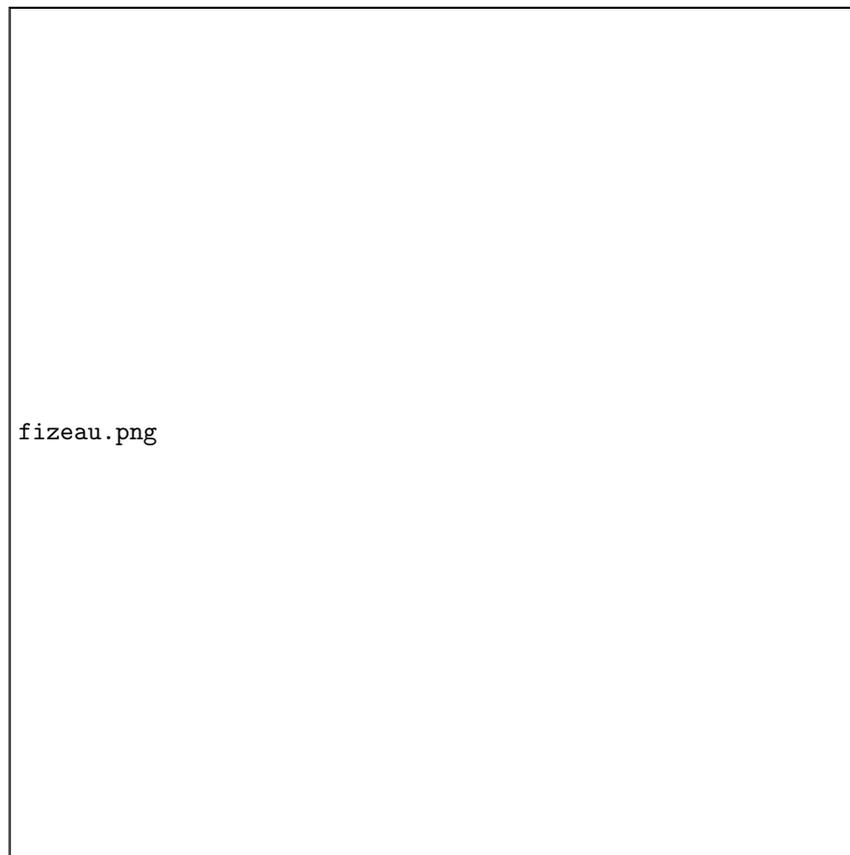


Fig. 2: Schema semplificato dell'interferometro di Fizeau [7].

Al fine di determinare se questo trascinamento potesse essere misurato fu fondamentale l'esperienza di Hippolyte Fizeau [13], che usò un interferometro schematizzato in Fig. 2. Nel tubo scorre un fluido con velocità v in direzione $ABDC$. L'apparato si muove verso destra rispetto all'etere con velocità V . Dalla sorgente S parte un raggio di luce monocromatica che viene diviso dallo specchio semiriflettente G in due parti, di cui una segue il percorso $GM_1M_2M_3G$ e l'altra il percorso $GM_3M_2M_1G$ (gli specchi M_1 , M_2 ed M_3 riflettono completamente la luce). Esaminiamo il percorso del secondo raggio. Lungo AB :

- la velocità del fluido rispetto all'interferometro è v ;
- la velocità del fluido rispetto all'etere, senza trascinamento, è $V + v$;
- la velocità del fluido rispetto all'etere, considerando il trascinamento di Fresnel (1.2.1), è

$$V + v - f(V + v) = (1 - f)(V + v); \quad (1.2.2)$$

- la velocità del raggio rispetto al fluido, senza trascinamento, è $\frac{c}{n}$;
- la velocità del raggio rispetto al fluido, con trascinamento, è

$$\frac{c}{n} - (1 - f)(V + v); \quad (1.2.3)$$

- la velocità del raggio rispetto all'interferometro, con trascinamento, è

$$\frac{c}{n} - (1 - f)(V + v) + v = \frac{c}{n} - (1 - f)V + fv. \quad (1.2.4)$$

Lo stesso dicasi per il tratto DC : sostituendo v con $-v$ e c con $-c$ nella (1.2.4) la velocità del raggio rispetto all'interferometro sarà

$$-\frac{c}{n} - (1 - f)V - fv. \quad (1.2.5)$$

Perciò, se la somma delle lunghezze dei tratti AB e DC è L , il tempo impiegato dal secondo raggio per percorrerli sarà

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{L}{\frac{c}{n} - (1 - f)V + fv} - \frac{L}{-\frac{c}{n} - (1 - f)V - fv} \\ &= 2L \frac{\frac{c}{n} + fv}{\left(\frac{c}{n} + fv\right)^2 - (1 - f)^2 V^2}. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Assumendo $v, V \ll c$, il denominatore può essere approssimato a $\left(\frac{c}{n}\right)^2$ e la (1.2.6) può essere scritta

$$t_2 = 2L \frac{n^2}{c^2} \left(\frac{c}{n} + fv\right). \quad (1.2.7)$$

Quanto al primo raggio, procediamo analogamente sostituendo $-v$ a v e trovando

$$t_1 = 2L \frac{n^2}{c^2} \left(\frac{c}{n} - fv\right). \quad (1.2.8)$$

I due raggi arrivano al telescopio T con uno sfasamento temporale di

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 4L \frac{n^2}{c^2} fv, \quad (1.2.9)$$

perciò, attraversando una stretta fenditura, formeranno una figura di interferenza, in cui le fasce luminose corrispondono a uno sfasamento di un multiplo intero di 2π (la differenza tra i cammini ottici è un multiplo intero della lunghezza d'onda λ) e quelle scure a uno sfasamento di un multiplo intero dispari di π (la differenza tra i cammini ottici è un multiplo intero dispari di $\lambda/2$).

Con la (1.2.9) possiamo calcolare lo spostamento delle frange tra il caso con il fluido stazionario e quello con il fluido a velocità v , che corrisponde a

$$\Delta k = \frac{c\Delta t}{\lambda} = 4L \frac{n^2}{c\lambda} f v. \quad (1.2.10)$$

Inserendo nella (1.2.10) l'espressione del coefficiente di trascinamento di Fresnel (1.2.1) otteniamo

$$\Delta k = \frac{4L}{\lambda} \frac{v}{c} (n^2 - 1). \quad (1.2.11)$$

Estraendo dalla (1.2.10) il coefficiente di trascinamento ricaviamo l'espressione

$$f = \frac{\lambda c}{4n^2 L v} \Delta k. \quad (1.2.12)$$

Calcolando lo sfasamento con la (1.2.11) e inserendolo nella (1.2.12) si ottiene un valore del coefficiente di trascinamento compatibile con quello teorico che ci si aspetta dalla formula di Fresnel (1.2.1).

Questa venne confermata anche da un esperimento condotto da Martin Hoek [15] con un interferometro simile a quello di Fizeau (Fig. 3): i raggi venivano fatti passare attraverso un tubo pieno d'acqua in quiete e l'intero apparato veniva fatto ruotare per osservare la figura d'interferenza formata all'arrivo. Tuttavia, assumendo una certa velocità del sistema rispetto all'etere, non si osservava spostamento nella sequenza di frange: ciò implicava un trascinamento parziale nel tratto col fluido secondo un coefficiente espresso dalla (1.2.1).

Chiaramente quanto abbiamo visto fu interpretato alla luce dell'ipotesi di un trascinamento parziale dell'etere, la quale procurava però insoddisfazione nella sua mancanza di basi teoriche solide. Lo stesso Fizeau commenta:

“Il successo dell'esperimento mi sembra rendere necessaria l'adozione dell'ipotesi di Fresnel, o almeno la legge che ha trovato per l'espressione dell'alterazione della velocità della luce per l'effetto del movimento di un corpo; poiché sebbene quella legge trovata vera possa essere una prova molto forte a favore dell'ipotesi di cui è solo una conseguenza, forse la concezione di Fresnel può apparire così straordinaria, e per certi aspetti così difficile, da ammettere, che saranno necessario altre prove e un esame approfondito da parte dei teorici prima di adottarla come espressione dei fatti reali del caso.”²

Il trascinamento sembrava infatti avere la strana proprietà di dipendere tramite l'indice di rifrazione dalla lunghezza d'onda e quindi dal colore del raggio luminoso. Non era inoltre chiara la natura stessa del fenomeno: se tutto l'etere fosse trascinato con una parte della velocità del corpo, se parte dell'etere fosse trascinato con tutta la velocità del corpo, o se parti diverse dell'etere fossero trascinate con velocità comprese tra zero e quella del corpo³. Di fatto, queste esperienze avevano prodotto una crisi teorica compiutamente risolta solo con l'avvento della relatività speciale.

²[13], p. 355.

³[30], p.4.

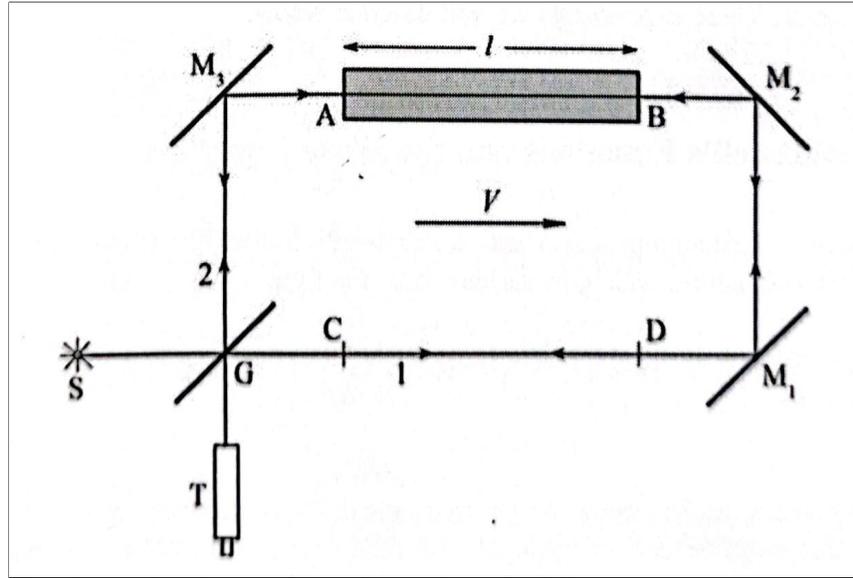


Fig. 3: Schema semplificato dell'interferometro di Hoek [7].

1.3 Elettromagnetismo

Prima di procedere all'esposizione dell'esperimento di Michelson e Morley, conviene scorrere brevemente le motivazioni che portavano alla supposizione di un etere luminifero dal punto di vista dell'elettromagnetismo classico, che descrive la radiazione elettromagnetica mediante le quattro equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J} \end{cases} \quad (1.3.1)$$

dove \mathbf{E} è il campo elettrico, \mathbf{B} è il campo magnetico, ρ è la densità volumetrica di carica, \mathbf{J} è la densità di corrente, ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto e μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto.

Nel vuoto, in assenza di cariche libere o correnti, abbiamo $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$, sicché le (1.3.1) si semplificano in

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.3.2)$$

che, combinate, danno le seguenti equazioni rispettivamente per il campo elettrico e per il campo magnetico:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.3.3)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (1.3.4)$$

le quali, coincidendo con l'equazione di d'Alembert, identificano delle onde di velocità

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ms}^{-1} \quad (1.3.5)$$

la quale, significativamente, non dipende dalla velocità della sorgente o dell'osservatore. Al pari dell'aria per le onde sonore, l'etere veniva considerato una necessità per la propagazione di queste onde - di qui la denominazione 'etere luminifero'. Ma oltre alla natura di questo ipotetico mezzo, il problema più grande nello scenario teorico del tempo era il fatto che le (1.3.2) non rispettano il principio di relatività galileiano, vale a dire non hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Le trasformazioni di Galileo tra due sistemi S e S' in moto relativo con velocità v

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (1.3.6)$$

applicate alle (1.3.3) e (1.3.4) non le lasciano invariate, bensì danno la forma (nel caso del campo elettrico)

$$\nabla' \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t'^2} + \frac{1}{c^2} \left(v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x' \partial t'} \right). \quad (1.3.7)$$

Le forme (1.3.3) e (1.3.7) possono coesistere solo se accettiamo il sistema di riferimento terrestre come un sistema privilegiato in cui le onde elettromagnetiche si esprimono nella loro forma più semplice. Di qui il bisogno teorico di un sistema come l'etere, che ricalca da questo punto di vista lo spazio assoluto di Newton, in cui non si presentavano le forze inerziali. Ma di qui anche il bisogno di studiare il moto della Terra rispetto al mezzo etereo.

1.4 Michelson e Morley

Proprio questo fu l'obiettivo dell'esperimento di Michelson e Morley [20]. È importante che, benché la teoria dell'etere fosse presupposta dagli sperimentatori, le previsioni dell'esperimento non dipendevano da essa, bensì semplicemente dall'assunzione della relatività galileiana e dell'indipendenza della velocità della luce dalla velocità della sorgente che la emette⁴. L'apparato sperimentale consisteva in un interferometro rotante attorno a un asse verticale, posizionato su un blocco di granito galleggiante nel mercurio, in modo da ridurre l'attrito e le perturbazioni (Fig. 4). In maniera simile all'interferometro di Fizeau, l'idea era quella di comparare la velocità della luce lungo direzioni perpendicolari, al fine di misurare l'eventuale differenza dovuta al moto relativo all'etere.

Seguendo le trattazioni di [7] e [3], analizziamo il percorso della luce, riferendoci alla Fig. 5. Un raggio monocromatico parte dalla sorgente s e attraversa una fenditura. Lo schermo semiriflettente

⁴[29], p. 245.

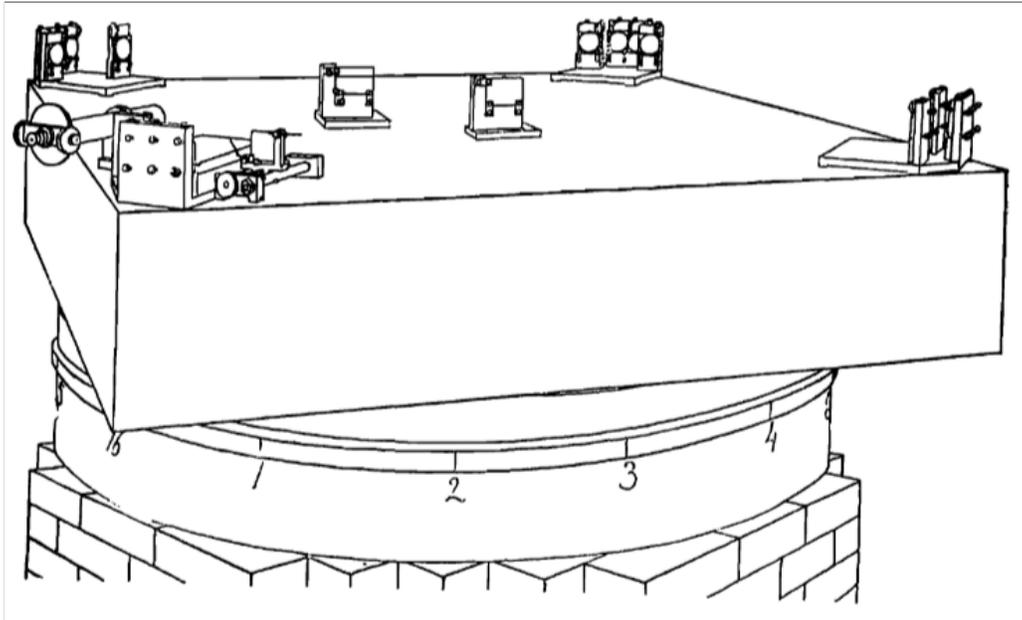


Fig. 4: Illustrazione originale dell'apparato sperimentale [20].

a lo divide in due parti, di cui una viene trasmessa verso c , qui riflessa totalmente, poi ancora riflessa da a per finire in d nel telescopio di osservazione. L'altra parte viene riflessa verso b , qui riflessa totalmente, infine trasmessa da a verso d . Chiaramente, se i due raggi impiegano nel loro viaggio lo stesso tempo, arriveranno al telescopio in fase e produrranno interferenza costruttiva, cioè un massimo di intensità al centro del campo ottico del telescopio. Lo stesso accade nel caso in cui i tempi differiscono di un multiplo intero del periodo della luce usata. Se in s abbiamo una fenditura verticale, lo stesso discorso si farà con delle frange di interferenza: nel caso di interferenza costruttiva, avremo una frangia luminosa al centro. Poco distante da essa, in corrispondenza di una differenza temporale di mezzo periodo, si produrrà interferenza distruttiva, quindi una frangia scura.

Assumiamo le distanze ac e ab entrambe uguali a L . Eseguiamo i calcoli nel sistema di riferimento dell'etere, rispetto al quale poniamo che l'apparato si muova di velocità v (vento d'etere) in direzione del braccio ac . In questo sistema, per quanto detto in Sez. 1.3, la luce si muove con velocità c in tutte le direzioni. Partiamo dal tragitto da a a c che la luce percorre dopo la trasmissione parziale in a . Se questo tratto viene percorso in un tempo t_1 , lo specchio c si sarà spostato di una distanza vt_1 a causa del suo moto rispetto all'etere. Nello stesso tempo, il raggio percorre una distanza ct_1 . Abbiamo dunque:

$$L + vt_1 = ct_1$$

$$t_1 = \frac{L}{c - v}. \quad (1.4.1)$$

Faremo un discorso analogo per il ritorno da c ad a , con la differenza che ora c si allontana e a si avvicina:

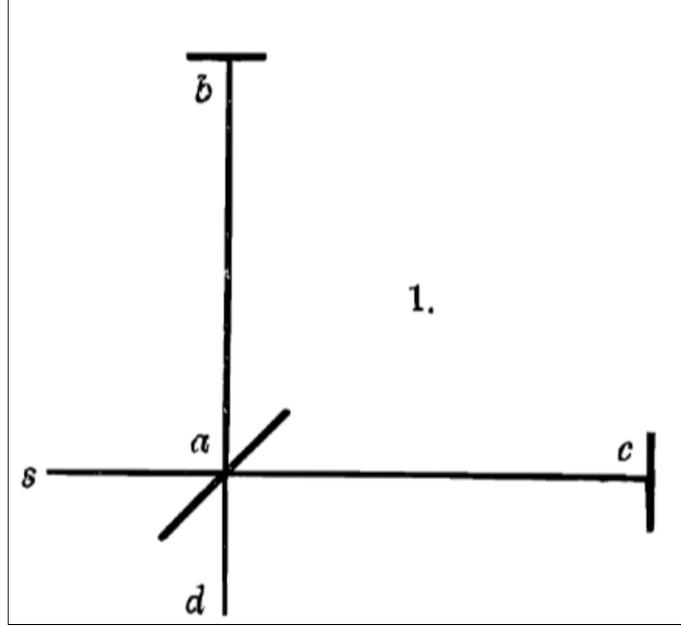


Fig. 5: Schema semplificato dell'interferometro [20].

$$L - vt'_1 = ct'_1$$

$$t'_1 = \frac{L}{c + v}. \quad (1.4.2)$$

Allora il tempo totale da a a c e viceversa è

$$t_1 + t'_1 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = 2L \frac{c}{c^2 - v^2}, \quad (1.4.3)$$

durante il quale il raggio percorre una distanza

$$d_1 = c(t_1 + t'_1) = 2L \frac{c^2}{c^2 - v^2}. \quad (1.4.4)$$

Passiamo al tragitto da a a b . Durante il tempo t_2 da esso impiegato, lo specchio b si muove di una distanza vt_2 verso destra, e la luce percorre una distanza ct_2 . La distanza percorsa dalla luce sarà, nel sistema dell'etere, l'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti hanno lunghezze L e vt_2 . Avremo allora

$$(ct_2)^2 = L^2 + (vt_2)^2$$

$$t_2 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \quad (1.4.5)$$

Per il ritorno da b ad a avremo un triangolo dai lati di lunghezze uguali a quello dell'andata, perciò t'_2 sarà uguale a t'_1 e il tempo totale del tragitto aba è

$$t_2 + t'_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad (1.4.6)$$

durante il quale il raggio percorre una distanza

$$d_2 = c(t_2 + t'_2) = 2L \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \quad (1.4.7)$$

Confrontando (1.4.4) e (1.4.7) abbiamo una differenza di lunghezza tra i due cammini pari a

$$\Delta d = d_1 - d_2 = 2L \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (1.4.8)$$

Per $v \ll c$ possiamo applicare alla (1.4.8) l'approssimazione $(1 - x)^\alpha \approx 1 - \alpha x$ e scrivere

$$\Delta d = 2L \left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) - \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) \right] = L \frac{v^2}{c^2}, \quad (1.4.9)$$

differenza che determina la posizione della frange d'interferenza nel campo ottico del telescopio d . Qui sta il punto cruciale dell'esperimento: per misurare lo spostamento delle frange ripetiamo il calcolo dopo aver ruotato l'interferometro di 90° . La velocità v rispetto all'etere sarà ora diretta lungo il braccio ad , il tratto perpendicolare al vento d'etere sarà ora ac e quello parallelo ab . Allora d_1 e d_2 si scambieranno e Δd cambierà di segno, di modo che la variazione totale nel cammino della luce sia

$$2\Delta d = 2L \frac{v^2}{c^2}. \quad (1.4.10)$$

Per una differenza di cammino pari a una lunghezza d'onda λ osserveremo uno spostamento nella figura d'interferenza di una frangia, cioè di una distanza pari a quella tra due frange luminose adiacenti. Allora per una variazione di $2\Delta d$ avremo uno spostamento di un numero di frange pari a

$$\Delta N = \frac{2\Delta d}{\lambda} = 2 \frac{v^2}{c^2} \frac{L}{\lambda}. \quad (1.4.11)$$

Lo spostamento massimo si ha nel caso in cui un braccio è inizialmente in direzione del moto terrestre; questa assunzione non comporta comunque una perdita di generalità, a patto di effettuare la rotazione di 90° . Considerando allora, come fanno Michelson e Morley [20], la velocità della Terra sulla sua orbita $v \approx 10^{-4}c$ e una lunghezza dei bracci dell'interferometro $L = 2 \times 10^6 \lambda$, otteniamo, secondo la (1.4.11), $\Delta N = 0.04$, troppo piccolo per essere rilevato perché sovrappreso dalle vibrazioni dell'apparato. L'esperimento fu quindi ripetuto decuplicando la lunghezza dei cammini ottici percorsi tramite riflessioni multiple su specchi opportunamente collocati (Fig. 6). Dalla (1.4.11) è chiaro che con questa modifica arriviamo a una variazione della figura d'interferenza di $\Delta N = 0.4$, il 40% di una frangia, in seguito alla rotazione dell'interferometro.

Com'è noto, il risultato dell'esperimento, riportato in Fig. 7, fu del tutto negativo e sembrava escludere l'esistenza del riferimento assoluto dell'etere.

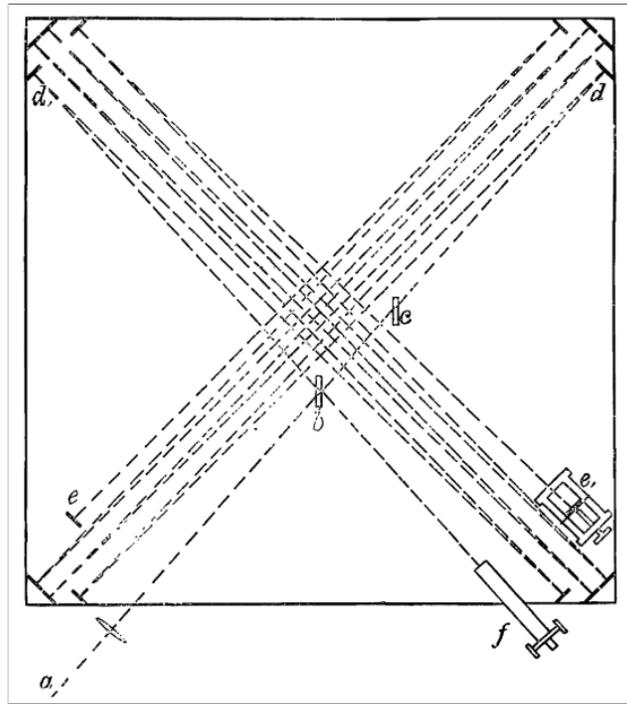


Fig. 6: Illustrazione dei cammini ottici con riflessioni ripetute più volte [20].

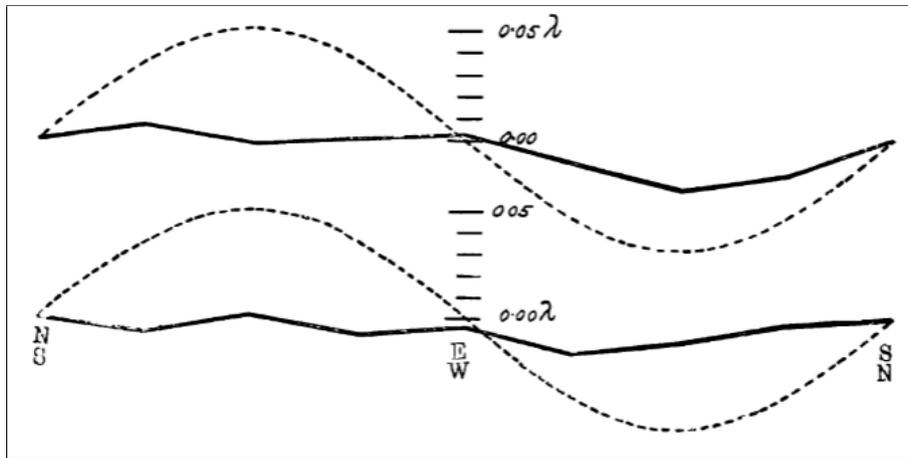


Fig. 7: Grafico dei risultati dell'esperimento effettuato a mezzogiorno (sopra) e alle sei di sera (sotto). Le linee tratteggiate rappresentano $1/8$ dello spostamento teorico, mentre quelle continue uniscono i valori osservati. Sono inoltre segnati i punti cardinali: una rotazione completa corrisponde a $N \rightarrow E \rightarrow S \rightarrow W \rightarrow N$ [20].

1.5 Lorentz

Veniamo finalmente all'ipotesi della contrazione delle lunghezze. Essa venne formulata indipendentemente da Fitzgerald [12] e da Lorentz [16] [17] proprio per salvare l'esistenza del mezzo etereo in seguito all'esperimento di Michelson e Morley. Il panorama teorico era in realtà più complesso: la teoria eterica di Stokes, ad esempio, concepiva un etere come un vero e proprio fluido all'interno del quale la Terra orbita trascinandolo con sé, perciò qualsiasi esperimento fatto più o meno a livello del mare sarebbe risultato in quiete rispetto a esso. Ma proprio questa ipotesi era in contrasto con altre evidenze sperimentali, come quelle relative all'aberrazione della luce viste in Sez. 1.1, che impedivano di accettarla definitivamente. Senza entrare nel dettaglio, diremo che Lorentz si propone con questa nuova idea di salvare l'etere come inteso fin da Fresnel conciliandolo coi risultati negativi di Michelson e Morley.

Riferendoci ancora alla Fig. 5, consideriamo la direzione del vento d'etere parallela al braccio ac . Approssimando i tempi (1.4.3) e (1.4.6) come abbiamo fatto nella (1.4.9), otteniamo

$$T_1 = \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (1.5.1)$$

per il tratto parallelo a v e

$$T_2 = \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) \quad (1.5.2)$$

per il tratto perpendicolare, sicché avremo una differenza di

$$\Delta T = T_1 - T_2 = L \frac{v^2}{c^3}. \quad (1.5.3)$$

Ora, lo stesso risultato può essere ottenuto assumendo che una linea che collega, parallelamente a v , due punti del corpo in movimento non conservi la sua lunghezza, per poi recuperarla concluso il moto. Se nel tratto parallelo la lunghezza del braccio diventa $L(1 - \alpha)$, allora la (1.5.1) diventa

$$T_2 = \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) (1 + \alpha) \approx \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \alpha \right) \quad (1.5.4)$$

dove si è trascurato il termine $-\alpha v^2/c^2$. Confrontando la (1.5.4) con la (1.5.2), è chiaro che

$$\Delta T = 0 \iff \alpha = \frac{v^2}{2c^2}, \quad (1.5.5)$$

perciò se il braccio ac si accorciasse di $Lv^2/2c^2$ rispetto al braccio ab si potrebbe dar conto del risultato $\Delta N = 0$ al telescopio dell'interferometro. Analogamente scambiando i bracci in seguito alla rotazione. Lo stesso risultato si avrebbe se la variazione interessasse il braccio perpendicolare: la differenza di fase può essere compensata da variazioni contrarie delle dimensioni del corpo. In generale, se le dimensioni parallele cambiano di un fattore $1 + \delta$ e quelle perpendicolari di $1 + \epsilon$, allora

$$\Delta T = 0 \iff \epsilon - \delta = \frac{v^2}{2c^2} \quad (1.5.6)$$

dove ϵ e δ rimarrebbero indeterminati.

Benché introdotta dichiaratamente *ad hoc*, a Lorentz una tale ipotesi non appariva forzata o assurda perché intesa in maniera prettamente dinamica, ossia giustificata sulla base di forze intermolecolari, che ovviamente determinano la forma e le dimensioni di un corpo. Tuttavia, essendogli la natura di queste forze del tutto ignota, non aveva modo di inquadrare il fenomeno in maniera soddisfacente. Inoltre questa idea, modellata sul risultato di Michelson e Morley, non sarebbe riuscita a spiegare i risultati di esperimenti eseguiti con interferometri dai bracci di lunghezza diseguale, L_1 e L_2 . In questo caso, al variare della velocità rispetto all'etere da v a v' , la contrazione di Lorentz non basta a giustificare un risultato nullo. Ci aspetteremmo infatti uno spostamento di

$$\Delta N = \frac{L_1 - L_2}{\lambda} \left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{v'^2}{c^2} \right), \quad (1.5.7)$$

mentre si è continuato a ottenere $\Delta N = 0$. Questo risultato sarà spiegato adeguatamente solo dalla relatività speciale, che tiene conto della componente temporale, la cui omissione può dare spesso origine, come vedremo nelle Sezz. 2 e 3, a fraintendimenti e situazioni paradossali.

1.6 Einstein

La conciliazione di tutti questi risultati avvenne solo con il celebre articolo di Albert Einstein *Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento* [10]. In esso si deduce la forma completa delle cosiddette trasformazioni di Lorentz partendo da due postulati a prima vista in contrasto fra loro: (a) le stesse leggi dell'elettrodinamica e dell'ottica sono valide in tutti i sistemi di riferimento in cui vigono le equazioni della meccanica ("principio di relatività") e (b) la luce si propaga nello spazio vuoto sempre a una velocità definita c indipendentemente dallo stato di moto del corpo che la emette. Da queste due assunzioni si deriva una teoria semplice che rende superflua la supposizione tanto di un etere luminifero quanto di uno spazio stazionario assoluto e privilegiato rispetto agli altri sistemi di riferimento.

Seguendo la derivazione di [7], consideriamo due sistemi di riferimento S e S' in moto relativo con velocità $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$, in modo tale che i loro assi cartesiani coincidano al tempo $t = t' = 0$. Un punto P è definito da $(\mathbf{r}, t) = (x, y, z, t)$ in S e da $(\mathbf{r}', t') = (x', y', z', t')$ in S' . La velocità di P sarà in S

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad (1.6.1)$$

e in S'

$$\mathbf{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z) = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right) \quad (1.6.2)$$

Vogliamo trovare la relazione tra questi due insiemi di coordinate. La ipotizziamo lineare per l'omogeneità e l'isotropia dello spaziotempo; se così non fosse, potremmo avere un moto uniforme in un sistema e accelerato in un altro, e inoltre non sarebbe garantita la restituzione delle coordinate iniziali applicando la trasformazione inversa. Scriviamo dunque:

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \epsilon t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \delta x + \eta t \end{cases} \quad (1.6.3)$$

Abbiamo imposto l'invarianza delle dimensioni perpendicolari alla direzione del moto per evitare il presentarsi di situazioni paradossali. Basta immaginare due cilindri cavi identici di raggio a riposo uguale. Se uno di loro viene incontro all'altro con velocità diretta lungo l'asse comune, il suo raggio cambierebbe, aumentando o diminuendo. Scambiando i ruoli dei cilindri è semplice capire come in un sistema si verificherebbe un attraversamento di un cilindro da parte dell'altro che risulta assurdo nell'altro sistema.

Otteniamo dalle (1.6.3) le variazioni infinitesime

$$\begin{cases} dx' = \alpha dx + \epsilon dt \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \delta dx + \eta dt \end{cases} \quad (1.6.4)$$

dalle quali calcoliamo le componenti della velocità (1.6.2) in S' :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \left(\frac{\alpha dx + \epsilon dt}{\delta dx + \eta dt}, \frac{dy}{\delta dx + \eta dt}, \frac{dz}{\delta dx + \eta dt} \right) \\ \mathbf{u}' &= \left(\frac{\alpha u_x + \epsilon}{\delta u_x + \eta}, \frac{u_y}{\delta u_x + \eta}, \frac{u_z}{\delta u_x + \eta} \right). \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

Ora, se P è fermo in S' , dovrà muoversi in S con velocità $u_x \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{v} = v \hat{\mathbf{x}}$. Inserendo tali valori in (1.6.5):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\alpha v + \epsilon}{\delta v + \eta} \\ \frac{\epsilon}{\alpha} &= -v. \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

Analogamente, se P è fermo in S , si muoverà in S' con $u'_x \hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{v} = -v \hat{\mathbf{x}}$, perciò

$$-v = \frac{\epsilon}{\eta} \quad (1.6.7)$$

Ricaviamo la relazione tra i moduli $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$ e $|\mathbf{u}'| = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z}$ dalla (1.6.5):

$$\begin{aligned} u'^2 &= \frac{(\alpha u_x + \epsilon)^2 + u_y^2 + u_z^2}{(\delta u_x + \eta)^2} \\ u'^2 &= \frac{u^2 + [(\alpha^2 - 1)u_x^2 + 2\alpha\epsilon u_x + \epsilon^2]}{(\delta u_x + \eta)^2}. \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

Inserendovi le (1.6.6) e (1.6.7):

$$u'^2 = \frac{u^2 + [(\alpha^2 - 1)u_x^2 - 2\alpha^2 v u_x + \alpha^2 v^2]}{(\delta u_x + \alpha)^2}. \quad (1.6.9)$$

Combinando ora i due postulati di Einstein, deduciamo che se la luce ha velocità c in un sistema, avrà la stessa velocità in qualsiasi altro sistema indipendentemente dal loro moto relativo. Allora la (1.6.9) diventa, per un raggio di luce,

$$(\delta^2 c^2 - \alpha^2 + 1)u_x^2 + 2\alpha(\delta c^2 + \alpha v)u_x + \alpha^2 c^2 - c^2 - \alpha^2 v^2 = 0 \quad \forall u_x, \quad (1.6.10)$$

sicché ponendo uguali a 0 i coefficienti delle potenze di u_x otteniamo

$$\begin{cases} \delta^2 c^2 - \alpha^2 + 1 = 0 \\ 2\alpha(\delta c^2 + \alpha v) = 0 \\ \alpha^2 c^2 - c^2 - \alpha^2 v^2 = 0 \end{cases} \quad (1.6.11)$$

da cui, insieme alle (1.6.6) e (1.6.7),

$$\begin{cases} \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \delta = \mp \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \epsilon = \mp \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \eta = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (1.6.12)$$

Poiché per $c \rightarrow \infty$ le trasformazioni si devono ridurre a quelle di Galileo, e per $v \rightarrow 0$ dobbiamo avere $x' \rightarrow x$ e $t' \rightarrow t$, prendiamo i segni positivi. Inserendo i valori nelle (1.6.3) ricaviamo finalmente le trasformazioni di Lorentz tra i due sistemi:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1, \quad (1.6.13)$$

dove γ è detto fattore di Lorentz. Sostituendo v con $-v$ otteniamo le trasformazioni inverse, da S' a S :

$$\begin{cases} x' = \gamma(x + vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t + \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \quad (1.6.14)$$

Notiamo che, se abbiamo in S un fronte d'onda sferico di luce emesso a $t = 0$ dall'origine, di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0, \quad (1.6.15)$$

risulta dalle (1.6.14) che la sua equazione in S' è

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0, \quad (1.6.16)$$

il che significa che un fronte d'onda sferico emesso dalle origini coincidenti dei due sistemi al tempo $t = t' = 0$ avrà un raggio crescente a velocità c , in accordo col postulato della costanza della velocità della luce.

Esaminiamo ora cosa succede se proviamo a misurare la lunghezza di una sbarra in moto nella situazione vista sopra. Questa misura avrà significato solo se effettuata istantaneamente, vale a dire se coglie le due estremità della sbarra allo stesso momento. Consideriamo una sbarra parallela all'asse x e ferma rispetto a S , in cui ha lunghezza L_0 detta lunghezza propria. S' si muove rispetto a S con velocità $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$. Se la sbarra ha le estremità A e B nei punti x_A e x_B , allora $L_0 = x_B - x_A$. A questi corrispondono in S' i punti x'_A e x'_B , ricavati con le (1.6.13), e una lunghezza $L' = x'_B - x'_A$ misurata al tempo t' . In S allora avremo

$$\begin{cases} x_A = \gamma(x'_A + vt') \\ x_B = \gamma(x'_B + vt') \end{cases} \quad (1.6.17)$$

$$x_B - x_A = L_0 = \gamma(x'_B - x'_A) = \gamma L'. \quad (1.6.18)$$

Ne deriva che

$$L' = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (1.6.19)$$

relazione che esprime il fenomeno della contrazione delle lunghezze per un corpo in moto rispetto a un sistema stazionario, già ipotizzato da Lorentz (Sez. 1.5). È importante però capire che, diversamente da Lorentz, Einstein concepisce la contrazione come un fatto puramente cinematico, che non coinvolge forze molecolari o di altro tipo che modifichino la struttura atomica del corpo; al contrario, esso sembra dipendere semplicemente dalla differenza di prospettive da cui effettuiamo la misura, in particolare sul loro disaccordo temporale. Infatti, nell'esempio della sbarra, le misurazioni ai punti x'_A e x'_B , simultanee in S' al tempo t' , avvengono in S in due istanti differenti dati dalle (1.6.14):

$$\begin{cases} t_A = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x'_A \right) \\ t_B = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x'_B \right) \end{cases} \quad (1.6.20)$$

separati da un intervallo pari a

$$t_B - t_A = \frac{\gamma v}{c^2} (x'_B - x'_A) = \frac{v}{c^2} L_0. \quad (1.6.21)$$

Dunque non c'è contraddizione tra le misurazioni dell'uno e dell'altro sistema, perché secondo S l'osservatore in moto ha misurato prima x'_A e poi x'_B , e durante il tempo che ha separato le misurazioni la sbarra si è spostata verso $-x'$.

Concludiamo riportando le trasformazioni delle componenti della velocità che derivano direttamente dalle (1.6.5) e (1.6.12):

$$\begin{cases} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \\ u'_y = \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)} \\ u'_z = \frac{u_z}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)} \end{cases} \quad (1.6.22)$$

Da queste otteniamo le inverse sostituendo v con $-v$:

$$\begin{cases} u'_x = \frac{u_x + v}{1 + \frac{u_x v}{c^2}} \\ u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 + \frac{u_x v}{c^2})} \\ u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 + \frac{u_x v}{c^2})} \end{cases} \quad (1.6.23)$$

1.7 Aberrazione: interpretazione relativistica

Possiamo applicare i risultati della relatività speciale al fenomeno dell'aberrazione visto in Sez. 1.1, seguendo [26]. Consideriamo un raggio di luce che arriva all'osservatore con un'inclinazione α al sistema S e con un'inclinazione α' al sistema S' , in moto con velocità v rispetto a S . Nella formula (1.6.22) della composizione delle velocità, sostituiamo $u_x = -c \cos \alpha$, $u'_x = -c \cos \alpha'$, $u_y = c \sin \alpha$ e $u'_y = c \sin \alpha'$, così da ottenere

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v \cos \alpha}{c}} \quad \sin \alpha' = \frac{\sin \alpha}{\gamma(1 + \frac{v \cos \alpha}{c})} \quad (1.7.1)$$

le quali, applicate all'identità trigonometrica

$$\tan \frac{\alpha'}{2} = \frac{\sin \alpha'}{1 + \cos \alpha'} \quad (1.7.2)$$

ci danno

$$\tan \frac{\alpha'}{2} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \tan \frac{\alpha}{2} \quad (1.7.3)$$

Per raggi in partenza dagli osservatori basta sostituire nelle formule trovate c con $-c$.

1.8 Fizeau: interpretazione relativistica

Grazie alla formulazione einsteiniana anche il coefficiente di trascinamento di Fresnel (Sez. 1.2) trova un'interpretazione del tutto semplice e naturale nell'ambito esclusivo della cinematica, data per la prima volta da von Laue [33], che toglie il bisogno di immaginare un etere immobile parzialmente trascinato dal mezzo ottico. "Dal punto di vista relativistico tutto questo costituisce un'applicazione non legittima della cinematica ordinaria. Ciò che si deve affermare piuttosto è che, per un osservatore in quiete rispetto al mezzo, la luce si propaga normalmente con velocità c/n in tutte le direzioni"⁵. Se l'osservatore non è stazionario ma si muove con velocità v rispetto al mezzo, sarà sufficiente applicare la formula relativistica della composizione delle velocità (1.6.23), nel caso in cui la direzione del raggio coincide con quella del moto dell'osservatore rispetto al mezzo. Ponendo quindi $u'_x = u' = c/n$ e $u_x = u$, usando l'approssimazione $(1-x)^\alpha \approx 1 - \alpha x$ e ignorando il termine in v^2 , avremo

$$u = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{cn}} \approx \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{c}{n} + fv, \quad (1.8.1)$$

che coincide con la velocità che si avrebbe secondo l'ipotesi del trascinamento (1.2.1).

⁵[22], pp.27-28.

2 Paradosso dell'asta nel fienile

Per comprendere in maniera più profonda la natura del fenomeno della contrazione delle lunghezze, è utile esaminare un noto problema, conosciuto per lo più come paradosso dell'asta nel fienile (*pole and barn paradox*). Questa sezione è una rassegna delle sue molte varianti, la cui analisi può aiutarci a concepire il fenomeno non come qualcosa di illusorio, ma come una contrazione reale da ogni punto di vista e, almeno in principio, sperimentalmente verificabile.

2.1 Formulazione del paradosso

Per chiarezza, conviene trattare prima di ogni altra cosa il presupposto su cui si basano le risoluzioni presentate sotto, seguendo l'analisi generale di [18]. Tutti i paradossi che vedremo coinvolgono un corpo e un buco di qualche sorta. Questo significa che possono essere equivalentemente visti nei termini di una collisione. In particolare il problema nasce allorquando:

- (a) Da un sistema di riferimento S sembra non esserci collisione tra il corpo e il bordo del buco;
- (b) Da un altro sistema di riferimento S' sembra doversi verificare una collisione tra il corpo e il bordo del buco.

Il seguente preambolo è volto a chiarire che se (b) è vera, (a) deve necessariamente essere falsa in base alla teoria della relatività speciale. Immaginiamo dunque che avvenga una collisione in S' ; ciò significa che a un certo tempo t'_0 almeno un punto A del corpo ha le stesse coordinate spaziali di un punto B del bordo (x'_0, y'_0, z'_0) . Chiamiamo

$$e' = (x'_0, y'_0, z'_0, t'_0) \tag{2.1.1}$$

l'evento della collisione in S' .

Se i due sistemi sono inerziali e la teoria della relatività speciale si applica a entrambi, possiamo applicare a e' le trasformazioni di Lorentz (1.6.13) e ottenere in S un evento

$$e = (x_0, y_0, z_0, t_0). \tag{2.1.2}$$

Possiamo essere certi che e rappresenti la collisione in S ? Sì, perché le stesse trasformazioni si applicano agli eventi e alle coordinate spaziali dei punti; perciò se A in S' si trova al tempo t'_0 nel punto $P' = (x'_0, y'_0, z'_0)$, in S gli sarà associato un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ al tempo t_0 . Lo stesso dicasi per B . Ciò significa che sia A sia B si troveranno in S al punto P al tempo t_0 , vale a dire si verificherà in S una collisione, contraddicendo (a).

L'insieme delle proposizioni (a) e (b) costituisce quindi una contraddizione all'interno della cinematica della relatività speciale e questo fatto rappresenta la base sulla quale cercheremo delle soluzioni per le situazioni in cui sembrano valere entrambe. In particolare, come avremo modo di rilevare, questi paradossi possono presentarsi a prima vista qualora si trascuri la quarta coordinata, il tempo, e si ragioni esclusivamente in termini di contrazioni di Lorentz (1.6.19), anziché con le trasformazioni complete (1.6.13).

2.2 Versione di Rindler

Il primo a far notare il problema è Wolfgang Rindler [25], presentandolo nei termini di una sbarra rigida in moto che cade in una grata. Immaginiamo due sistemi di riferimento: S , a riposo rispetto

alla grata, e S' , a riposo rispetto alla sbarra e centrato sul suo estremo posteriore rispetto al moto. Per semplicità, consideriamo i seguenti valori: sia la sbarra sia il buco della grata hanno una lunghezza propria di $10m$, e la loro velocità relativa è tale da avere un fattore di Lorentz $\gamma = 10$. La sbarra si sta muovendo verso il buco.

Analizziamo ora la situazione dai diversi punti di vista dei due sistemi di riferimento. In S , la sbarra è in movimento e la sua lunghezza sarà dunque contratta in $L' = \frac{L}{\gamma} = 1m$, dove $L = 10m$ è la lunghezza propria. Ma essendo il buco fermo in S , esso conserva la sua lunghezza propria di $10m$. Ovviamente la sbarra così contratta deve cadere sotto l'azione della gravità. Ma in S' è il buco a muoversi con $\gamma = 10$ verso la sbarra, sicché la sbarra, lunga $10m$, si troverà a passare sopra un buco largo solo $1m$, continuando quindi il suo percorso senza impedimenti. Rindler individua la soluzione nella definizione di 'rigidità': ovviamente, se vale la contrazione delle lunghezze, la descrizione in S sarà corretta e bisognerà ammettere che in S' la sbarra non potrà esser detta rigida secondo l'usuale concezione classica, perché per cadere nel buco dovrà subire una deformazione e incurvarsi.

Procediamo a un'analisi formale del problema. Qui e avanti chiamiamo v la velocità relativa tra i due corpi e misuriamo x e x' lungo la direzione iniziale della sbarra (o asta che sia). Prendiamo come origine Q comune a S e S' l'estremo anteriore della sbarra, nel momento in cui questa inizia a cadere. Misuriamo qui per comodità z e z' verso il basso lungo il buco della grata. Possiamo allora scrivere le trasformazioni di Lorentz (1.6.13):

$$\begin{cases} z = z' \\ t = \gamma(t' + \frac{vx'}{c^2}) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

con $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$. In S' valgono per l'estremo posteriore della sbarra

$$\begin{cases} z = 0 & \text{se } t < 0 \\ z = \frac{1}{2}at^2 & \text{se } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.2.2)$$

dove a è l'accelerazione causata dalla gravità una volta che il punto in questione arriva all'orlo del buco (per semplicità non consideriamo la possibilità di un ribaltamento dell'asta, di modo che l'asta cada solo quando nessun punto della sua base tocca più la griglia).

Applicando ora (2.2.1) a (2.2.2) otteniamo

$$\begin{cases} z' = 0 & \text{se } x' < -\frac{c^2 t'}{v} \\ z' = \frac{1}{2}a\gamma^2(t' + \frac{vx'}{c^2})^2 & \text{se } x' \geq -\frac{c^2 t'}{v} \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Questo risultato è interessante perché Rindler vi individua una parabola il cui vertice si trova in $Q = (-\frac{c^2 t'}{v}, 0)$ e si muove lungo la sbarra con velocità $\frac{c^2}{v}$ a partire da $t' = 0$; in questo modo la sbarra scivola lungo la parabola. In altre parole, la sbarra ha la forma di una parte di parabola a ogni $t = \text{costante}$. Tenendo a mente la descrizione del moto in S , ne concludiamo che deve aver luogo una significativa compressione della sbarra che subisce quindi un incurvamento in S' , dal cui punto di vista non può certo esser detta rigida. Se ne trae un risultato generale che rappresenta una delle novità più notevoli della relatività: l'impossibilità del "corpo rigido" o del "fluido incompressibile", i quali per definizione trasmetterebbero segnali istantanei, quindi più veloci della luce⁶.

⁶[26], p. 36.

Rindler tratta brevemente in [26] anche un caso unidimensionale che è utile riportare perché getta luce sulla questione della propagazione istantanea del segnale e per chiarezza in vista delle successive versioni del problema. Consideriamo un uomo che porta orizzontalmente un'asta lunga $20m$ correndo verso un garage (o fienile che sia) lungo solo $10m$, con velocità tale da avere $\gamma = 2$. In fondo al garage si trova un blocco di cemento molto massivo e capace di fermare l'asta. Chiamiamo ancora S il sistema a riposo rispetto al garage e S' quello in moto con l'asta. In S l'asta assumerà una lunghezza di $\frac{20m}{\gamma} = 10m$. Quando l'asta entra nel garage e si arresta, tornerà alla sua lunghezza propria, spezzandosi o spaccando la porta. Ma, dal punto di vista di S' , sarà il garage a dimezzare la sua lunghezza in $5m$. Ferma restando la correttezza della descrizione in S , come potrà l'asta entrare tutta nel garage? La risposta sta nella finitezza della velocità di propagazione di tutti i segnali, prevista dalla relatività speciale. Quando l'estremo anteriore dell'asta urta contro il muro, l'informazione non è ancora arrivata al resto dell'asta. Anche se il segnale viaggiasse a c , dovrebbe percorrere per raggiungere l'estremo posteriore in S' i $20m$ dell'asta contro i soli $15m$ che la porta del garage deve percorrere affinché l'asta sia tutta contenuta al suo interno. Considerando $\gamma = 2$ si ha una velocità $v = 0.866c$ più che sufficiente, il che elimina il paradosso.

2.3 Rigidità e contrazione

La questione della rigidità è complessa ed è stata trattata più approfonditamente. Wells [34] fa notare che in base all'analisi di Rindler [25] si avrebbe la conclusione paradossale secondo cui la sbarra non risulterebbe più rigida nel sistema di riferimento in cui è a riposo: "se i concetti non relativistici di rigidità non valgono nel sistema a riposo, dove potrebbero mai valere?" Per trovare la forma della sbarra in S' , occorre tener conto del fatto che la velocità a cui si muove la sbarra sopra il buco è molto maggiore della velocità - finita - a cui si propaga la deformazione. È proprio quello che fanno van Lintel e Gruber [32], trattando quantitativamente il ritardo relativo a questa propagazione ed evitando la situazione in cui la sbarra cade interamente nel buco perdendo, in S' , la sua rigidità. Preliminarmente prendiamo in considerazione un problema più semplice, che ci permette di familiarizzare con i concetti che applicheremo al paradosso vero e proprio. Un'automobile si muove a velocità relativistica v lungo l'asse x e incontra un buco lungo la strada. L'automobile è dotata di una protuberanza in avanti che arriva quasi a toccare la strada. Chiamo d_0 la distanza propria tra la protuberanza e l'asse delle ruote anteriori e L_0 la larghezza propria del buco. In S solidale con la strada l'automobile è contratta e sembra dover cadere; in S' solidale con l'automobile il buco è più stretto e la protuberanza potrebbe già averlo attraversato quando lo raggiungono le ruote. Non appena questo avviene, si propaga uno sforzo orizzontalmente attraverso la vettura con velocità propria u_0 .

Iniziamo da S . Tenendo conto che la velocità relativa tra i due sistemi è v , occorre qui trasformare la velocità di propagazione secondo la (1.6.23):

$$u = \frac{u_0 + v}{1 + \frac{u_0 v}{c^2}}. \quad (2.3.1)$$

Lo sforzo raggiungerà la protuberanza alla distanza contratta $d = \frac{d_0}{\gamma}$ in un tempo

$$\Delta t = \frac{d}{u - v} \quad (2.3.2)$$

durante il quale l'automobile si è spostata di una distanza $\Delta x = v\Delta t$. Perciò attraverserà il buco a condizione che

$$v\Delta t > L_0 - d. \quad (2.3.3)$$

Inserendo (2.3.2) e (2.3.3):

$$\begin{aligned} L_0 &< \frac{u}{u-v} \frac{d_0}{\gamma} \\ L_0 &< \gamma \left(1 + \frac{v}{u_0}\right) d_0 \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Per larghezze minori di questa quantità, non c'è collisione tra l'orlo del buco e l'automobile.

Spostiamoci ora in S' . La larghezza del buco è contratta in $L' = \frac{L_0}{\gamma}$ e l'effetto del bordo sulle ruote anteriori giunge alla protuberanza dopo un tempo $\Delta t' = \frac{d_0}{u_0}$. Perciò l'automobile attraverserà il buco se:

$$\begin{aligned} \frac{d_0}{u_0} &> \frac{\left(\frac{L_0}{\gamma} - d_0\right)}{v} \\ L_0 &< \gamma \left(1 + \frac{v}{u_0}\right) d_0 \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

che è identica alla (2.3.4), mostrando la coerenza tra le due descrizioni. Notiamo come in quest'analisi la rigidità propria (ossia nel sistema di riferimento in cui il corpo rigido è a riposo) non viene intaccata dalla velocità del moto: la velocità relativa tra automobile e buco non fa sì che la protuberanza si pieghi.

Passiamo ora al paradosso della sbarra come trattato da Rindler [25]. Chiamo P e Q rispettivamente il punto in alto a destra e in basso a destra della sbarra. Rindler non dubita che la sbarra non sia rigida in S' perché, secondo van Lintel e Gruber, “assume che i punti P e Q siano immediatamente in caduta libera”. Ma poiché non si dà rigidità infinita, la sbarra si comprime sotto il suo stesso peso e ogni punto in cui è tolto il supporto (il che avviene quando tutta la base della sbarra non tocca più la grata) subisce un immediato moto verso il basso. Se questo spostamento è maggiore dello spazio necessario a scivolare dall'altra parte del buco, gli osservatori concorderanno sulla caduta della sbarra. Al fine di contemplare la possibilità che la sbarra - rigida - superi il buco, assumiamo che il suo bordo destro permetta lo spostamento in basso di Q previsto da S' .

Nella situazione appena descritta avviene una decompressione della sbarra che si distingue dalla sua caduta in S o dalla sua flessione in S' così come descritte da Rindler nella misura in cui egli trascura l'effetto di ritardo dato dalla propagazione dello sforzo da Q a P .

Procediamo all'analisi formale ponendoci prima in S solidale con la grata. Consideriamo ancora L_0 lunghezza propria della sbarra e dell'apertura del buco. La sbarra ha un'altezza H , che non varia tra i sistemi considerati. La velocità propria di propagazione dello sforzo è u_0 . Il supporto alla base della sbarra è tolto quando Q si trova a una distanza L_0/γ dal bordo sinistro del buco. Lo sforzo viaggia da Q a P in un tempo

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma \frac{H}{u_0} \quad (2.3.6)$$

dove $\Delta t'$ è il tempo di propagazione in S' , ossia il tempo proprio. La sbarra supera il buco prima che P sia interessato dallo sforzo se riesce a percorrere la distanza mancante nel tempo Δt , cioè:

$$L_0 - \frac{L_0}{\gamma} < v \frac{\gamma H}{u_0}$$

$$\gamma \frac{H}{L_0} \frac{v}{u_0} + \frac{1}{\gamma} > 1. \quad (2.3.7)$$

Spostiamoci in S' . Q è ancora a una distanza L/γ dal bordo sinistro. Abbiamo già visto che $\Delta t' = \frac{H}{u_0}$, durante il quale il bordo destro percorre $\Delta x' = v\Delta t'$ verso sinistra. La sbarra supera il buco se questa distanza è maggiore del divario mancante:

$$\frac{L_0 - \frac{L_0}{\gamma}}{\gamma} < v \frac{H}{u_0}$$

$$\gamma \frac{H}{L_0} \frac{v}{u_0} + \frac{1}{\gamma} > 1 \quad (2.3.8)$$

che, essendo identica alla (2.3.7), risolve il paradosso.

È interessante guardare quantitativamente a un caso specifico. Prendendo $u_0 = 6000ms^{-1}$, $L_0 = 0.25m$ e $\gamma = 4$, solo una lamina sottilissima di $H < 10^{-6}m$ cade interamente nel buco. Una sbarra come quella considerata impiegherebbe chilometri a spostarsi verso il basso.

Questo approccio ci ha quindi permesso di risolvere il paradosso senza creare nuove situazioni paradossali in cui la rigidità dipenderebbe dalla velocità relativa ad altri sistemi di riferimento. Nel caso di una sbarra simile a quella considerata, non si ha caduta ma solo una lievissima decompressione, la quale, se è piccola rispetto alle dimensioni atomiche, non le impedisce di superare il buco senza alcun impedimento.

2.4 Realtà del fenomeno

Per convincerci della realtà dell'effetto di sforzo che la contrazione di Lorentz può indurre su un corpo, è utile l'esperimento mentale pensato da Dewan e Beran [8] [9]. Due razzi identici R_1 e R_2 sono posizionati uno dietro l'altro lungo l'asse x a una distanza d_0 , con R_1 davanti a R_2 . I loro centri sono collegati da un filo teso in partenza. A $t = 0$ i razzi partono simultaneamente. Misurata dal sistema S in cui i razzi sono inizialmente a riposo la distanza che li separa resta costante, perché i razzi hanno velocità identiche a ogni istante. D'altra parte, il filo subirà in S una contrazione di Lorentz fino a rompersi. Proviamo ora a capire quello che succede in un sistema S' solidale con i razzi dopo che questi hanno smesso di accelerare e hanno raggiunto la velocità v , che è la velocità relativa tra i due sistemi. In S' si applicano le (1.6.13), in particolare

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right). \quad (2.4.1)$$

Questo significa che gli orologi usati per misurare i tempi in S' , sebbene vadano tutti allo stesso ritmo, sono però fuori fase tra loro visti da S . In altre parole, S li vede sincronizzati nel ritmo con cui si muovono le lancette, ma non nella lettura del quadrante; ciò è dovuto al termine $-\gamma \frac{vx}{c^2}$ presente nella (2.4.1). Ne deriva che in S' i razzi partono dalla posizione iniziale in tempi differenti, arrivando alla nuova velocità v separati da una distanza d'_f dovuta non solo a quella iniziale d_0 , ma anche allo sfasamento temporale tra le partenze:

$$\Delta t' = -\gamma \frac{vd_0}{c^2} \quad (2.4.2)$$

dove si è posto nella (1.6.13) $\Delta t = 0$, perché i razzi partono simultaneamente in S . Possiamo allora scrivere, sfruttando la (2.4.2),

$$d'_f = \frac{d_0}{\gamma} + v\Delta t' = \gamma d_0 > d_0 \quad (2.4.3)$$

il che significa che S' spiega la rottura del filo non con la contrazione di Lorentz (infatti in esso i razzi sono fermi), ma con una separazione fisica tra i razzi stessi⁷.

L'esempio appena visto è utile per rimarcare un punto importante: la contrazione delle lunghezze in relatività speciale non deve essere considerata qualcosa di apparente o metaforico; al contrario, essa è un fenomeno reale al pari di tutti gli altri che chiameremmo tali. Seguendo Arzelès [2], possiamo certamente affermare che non si tratta di un fenomeno assoluto e ciò che appare contratto in un sistema di riferimento appare diversamente in un altro; ma la sua natura relativa non ne inficia certo la realtà, esattamente come avviene per la velocità. La relatività ristretta ci costringe semplicemente a pensare alla forma di un corpo come pensiamo alla sua velocità. Se chiamiamo “reale” qualsiasi fenomeno che possiamo verificare misurando sperimentalmente delle quantità (almeno in linea di principio), basta guardare all'esperimento mentale riportato sopra per convincerci della realtà della contrazione di Lorentz. Qui più che in altri casi, infatti, è manifesta la necessità, impostaci dalla teoria, di cambiare l'idea di rigidità a cui siamo abituati: si è visto che la contrazione può produrre degli effetti di sforzo vero e proprio in un corpo.

L'opinione che la contrazione sia un fenomeno solo apparente può nascere anche dal suo legame col carattere relativo della simultaneità. Abbiamo d'altra parte insistito all'inizio di questa sezione sull'importanza della sua interconnessione essenziale con la controparte temporale. A questo proposito possiamo rifarci a un esperimento mentale ideato da Einstein [11]⁸, che mostra come la verifica della simultaneità possa essere fatta solo tramite regoli, senza orologi. Consideriamo in un sistema S due regoli A_1B_1 e A_2B_2 di uguale lunghezza propria L_0 , che si muovono con velocità di modulo uguale ma di direzioni opposte. Chiamo A^* e B^* rispettivamente i punti in cui si sovrappongono A_1 con A_2 e B_1 con B_2 : queste due sovrapposizioni sono simultanee in S per ragioni di simmetria. La distanza A^*B^* in S , cioè misurata con regoli a riposo rispetto a S , è allora $L = L_0/\gamma$. Diremo allora che la contrazione di Lorentz non è una proprietà di un solo regolo in sé, bensì una relazione, in linea di principio osservabile nel modo appena esposto, tra due regoli in moto relativo tra loro; non per questo sarà una proprietà meno reale.

2.5 Variante con rotazione

Shaw [28] ci presenta una versione diversa del paradosso, interessante perché non contempla accelerazioni e forze e la sua risoluzione avviene in ambito esclusivamente cinematico. Supponiamo che una sbarra di lunghezza propria $L = 10m$ si muova lungo l'asse x con velocità v in un sistema di riferimento S . Un tavolo con la superficie parallela all'asse x si muove solo lungo l'asse z con velocità u , in modo tale che a $t = 0$ la sbarra sia tutta contenuta in un buco nel tavolo largo appunto $d = 10m$. Se $\gamma = 10$, la lunghezza contratta della sbarra sarà $1m$ ed essa passerà senza problemi nel buco. Come al solito, analizziamo il moto dal punto di vista di S' solidale con la sbarra: qui avremo

⁷Nawrocki [21] obietta che in questo modo si finirebbe per dare una misura della velocità assoluta assumendo una distinzione osservabile tra la contrazione di intervalli spaziali e la contrazione di sbarre materiali. In realtà, come fa notare Dewan [9], la distanza tra i razzi non può essere considerata una lunghezza propria perché dipende dal tempo in tutti i sistemi di riferimento a parte S , rispetto al quale è in movimento. Il fraintendimento, come abbiamo visto, nasce dal trascurare lo sfasamento temporale e quindi la relatività della simultaneità.

⁸Riportato in Pauli [22].

una lunghezza di $10m$ a fronte della larghezza di solo $1m$ del buco, rendendo difficile immaginare la situazione descritta in S . Ma in questo caso basta guardare alle trasformazioni di Lorentz per capire in che modo essa avvenga: il tavolo in S' non è infatti parallelo all'asse x ma è inclinato di un angolo θ' , che in S è $\theta = 0$.

Ci avvaliamo ora della dettagliata analisi formale di Marx [19], che presenta la situazione esattamente nei termini appena visti. Chiamo x_1, x_2, x_3, x_4 rispettivamente gli estremi anteriore e posteriore della sbarra e del buco. Se non consideriamo la coordinata y , lungo cui non c'è moto, possiamo scrivere in S :

$$\begin{cases} x_1 = vt_1 & z_1 = 0 \\ x_2 = vt + L' & z_2 = 0 \\ x_3 = 0 & z_3 = ut \\ x_4 = d & z_4 = ut \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Applicando le (1.6.13) per S' solidale alla sbarra alle (2.5.1) otteniamo:

$$\begin{cases} x'_1 = 0 & z'_1 = 0 & t'_1 = \frac{t_1}{\gamma} \\ x'_2 = \gamma L' & z'_2 = 0 & t'_2 = \frac{t_2}{\gamma} - \frac{vL'}{\gamma c^2} \\ x'_3 = -vt'_3 & z'_3 = \frac{ut'_3}{\gamma} & t'_3 = \gamma t_3 \\ x'_4 = \frac{d}{\gamma} - vt'_4 & z'_4 = \frac{ut'_4}{\gamma} + \frac{vvd}{c^2} & t'_4 = \gamma(t_4 - \frac{vd}{c^2}) \end{cases} \quad (2.5.2)$$

Possiamo ora trovare la larghezza del buco in S' :

$$d' = \sqrt{(x'_4 - x'_3)^2 + (z'_4 - z'_3)^2} = d\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} \quad (2.5.3)$$

da cui vediamo che $d' < d \leq L$, ma poiché ora il tavolo è inclinato la sbarra passa lo stesso. Lo si può verificare anche calcolando la posizione dell'estremo anteriore del buco quando questo si trova sull'asse x' :

$$z'_4 = 0 \quad t'_4 = -\frac{\gamma vd}{c^2} \quad x'_4 = \gamma d \quad (2.5.4)$$

e poiché $d > L'$, $\gamma d > \gamma L'$, cioè $x'_4 > L$, mostrando che la sbarra riesce a passare.

Possiamo anche indicare quantitativamente l'inclinazione che ha permesso la risoluzione del paradosso⁹:

$$\tan \theta' = \left| \frac{z'_4 - z'_3}{x'_4 - x'_3} \right| = \frac{\gamma uv}{c^2}. \quad (2.5.5)$$

Introduciamo ora un sistema di riferimento S'' solidale col tavolo, quindi in moto lungo l'asse z con velocità u e fattore di Lorentz $\Gamma = (1 - \frac{u^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$. In questo caso l'applicazione delle (1.6.13) ci darà:

⁹Il calcolo dell'angolo non è presente in Marx [19], ma il risultato è riportato da Shaw [28].

$$\begin{cases} x_1'' = \frac{vt_1''}{\Gamma} & z_1'' = -ut_1'' & t_1'' = \Gamma t_1 \\ x_2'' = \frac{vt_2''}{\Gamma} + L' & z_2'' = -ut_2'' & t_2'' = \Gamma t_2 \\ x_3'' = 0 & z_3'' = 0 & t_3'' = t_3 \\ x_4'' = d & z_4'' = 0 & t_4'' = t_4 \end{cases} \quad (2.5.6)$$

È evidente che la sbarra risulta contratta e ancora parallela al tavolo.

Questa trattazione ha il pregio di illustrare la critica connessione tra contrazione di Lorentz e rotazione, come esempio del fatto generale che ciò che è vero in un sistema di riferimento deve esserlo in tutti gli altri, sebbene possiamo attribuirgli una spiegazione differente¹⁰. Infatti, se in S e in S'' la sbarra resterà parallela al tavolo e il passaggio nel buco sarà dovuto alla sua contrazione, in S' è la sua rotazione che lo permette. Ciò nulla toglie alla realtà del fenomeno; ma bisogna tenere a mente, come conclude Marx [19], che “il concetto di parallelismo tra corpi in moto relativo è un concetto relativo, e deve essere accuratamente definito per ogni esperimento e osservatore”.

2.6 Variante 3D

L'apparente paradosso è generalizzato da Martins [18] in un modo che esclude l'apporto di eventuali rotazioni alla sua risoluzione, ovvero considerando una sfera anziché una sbarra. La sfera si sta muovendo relativamente a un anello di raggio uguale, a riposo R_0 , con velocità perpendicolari, in modo tale che i loro centri si incontreranno in un punto O a un certo istante futuro. Poiché la sfera subisce una contrazione di Lorentz nella direzione del moto, sembra che riuscirà a passare dentro all'anello, che non è contratto nella sua apertura perché il moto avviene in direzione perpendicolare alla sua superficie. Chiamiamo S questo sistema di riferimento, centrato su O , rispetto al quale entrambi i corpi sono in movimento. Analizzando ora la stessa situazione da un sistema S' solidale alla sfera, l'anello apparirà ellittico perché in moto verso la sfera, con una dimensione contratta in una lunghezza minore di $2R_0$. Analogamente, in S'' solidale all'anello, la sfera sarà contratta nella direzione del moto verso l'anello, che non è ora quella del suo asse, ma invariata nella sezione trasversale. In S' e in S'' , dunque, sembra avvenire una collisione.

Una risoluzione qualitativa che guardi alla rotazione dei corpi è in questo caso impossibile, per cui procediamo a un'analisi quantitativa di ciò che accade. Per semplicità, ignoriamo la dimensione perpendicolare al piano del moto, che non presenta un comportamento diverso nei tre sistemi di riferimento considerati grazie alla natura della contrazione di Lorentz. La sfera e l'anello si ridurranno quindi rispettivamente a un cerchio e a due punti A e B che delimitano un buco.

Consideriamo in S l'origine in O , gli assi x e z lungo le direzioni rispettivamente del moto della sfera e dell'anello. Poniamo $t = 0$ il tempo al quale il centro C della sfera si incontra col centro dell'anello, punto medio fra A e B . Possiamo allora scrivere le equazioni del moto:

$$\begin{cases} x_A = -R_0 & z_A = v_A t \\ x_B = R_0 & z_B = v_A t \\ x_C = -v_C t & z_C = 0 \end{cases} \quad (2.6.1)$$

dove v_A e v_C sono rispettivamente la velocità dell'anello e della sfera. L'equazione della circonferenza della sfera a riposo, quindi in S' , sarebbe:

¹⁰Rindler [26] (p. 42) pone un'analogia con l'intuizione di Einstein dell'equivalenza tra la forza elettromagnetica subita da una particella in moto e la forza elettrica nel sistema in cui la particella è a riposo: in entrambi i casi interviene, a seconda del sistema di riferimento, una spiegazione diversa per il medesimo fenomeno.

$$(x' - x'_C)^2 + (z' - z'_C)^2 = R_0^2 \quad (2.6.2)$$

Applicando le (1.6.13) alla (2.6.2) otteniamo (la contrazione avviene solo lungo la direzione del moto e la lunghezza propria è quella misurata in S'):

$$\gamma^2(x - x_C)^2 + (z - z_C)^2 = R_0^2 \quad \gamma = \left(1 - \frac{v_C^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.6.3)$$

Possiamo sostituire x_C e z_C dalle (2.6.1) nella (2.6.3) e ottenere delle soluzioni reali:

$$\gamma^2(x + v_C t)^2 + z^2 = R_0^2 \quad (2.6.4)$$

Ora, se la sfera riesce ad attraversare l'anello, i punti A e B non soddisfaranno mai la (2.6.3). In caso contrario, sostituendo le coordinate (2.6.1) di A nella (2.6.4), otteniamo delle soluzioni reali:

$$\gamma^2(-R_0 + v_C t)^2 + (v_A t)^2 = R_0^2 \quad (2.6.5)$$

Ricordando la (2.6.3) possiamo scrivere l'equazione di secondo grado in t :

$$\left[v_C^2 + \left(1 - \frac{v_C^2}{c^2}\right)v_A^2\right]t^2 - 2R_0v_C t + \frac{v_C^2 R_0^2}{c^2} = 0 \quad (2.6.6)$$

Calcolo il determinante:

$$\begin{aligned} \Delta &= 4R_0^2v_C^2 - 4\left[v_C^2 + \left(1 - \frac{v_C^2}{c^2}\right)v_A^2\right]\frac{v_C^2 R_0^2}{c^2} \\ &= 4R_0^2v_C^2\left(1 - \frac{v_C^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right), \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

da cui risulta evidente che

$$\Delta > 0 \quad \iff \quad v_A, v_C < c \vee v_A, v_C > c. \quad (2.6.8)$$

Poiché le velocità dell'anello e della sfera non possono superare quella della luce, un urto avverrà sempre necessariamente (abbiamo sempre due soluzioni reali) e anche in S non ci sarà attraversamento, coerentemente con le descrizioni negli altri due sistemi. Ma vogliamo ora mostrare che ciò è vero in ogni sistema di riferimento e che quindi il risultato appena confermato è quello corretto. Procediamo per assurdo e supponiamo che la sfera riesca a entrare nell'anello, in modo che i loro centri coincidano. Il raggio della sfera sarà contratto in S :

$$R = \frac{R_0}{\gamma} = R_0\left(1 - \frac{v_C^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.6.9)$$

e, se supponiamo che $v_C \ll c$, possiamo utilizzare l'approssimazione $(1 - x)^\alpha \approx 1 - \alpha x$ e scrivere

$$R = R_0\left(1 - \frac{v_C^2}{2c^2}\right) \quad (2.6.10)$$

sicché nell'istante considerato la distanza tra l'anello (che, ricordiamo, non subisce contrazioni nel suo raggio) e il bordo della sfera sarà

$$d_x = R_0 - R = R_0 \frac{v_C^2}{2c^2}. \quad (2.6.11)$$

Questa distanza sarà percorsa dalla sfera in un tempo

$$t = \frac{d_x}{v_C} = R_0 \frac{v_C}{2c^2} \quad (2.6.12)$$

e nello stesso tempo l'anello salirà lungo l'asse z di

$$d_z = v_A t = R_0 \frac{v_C v_A}{2c^2}. \quad (2.6.13)$$

Se anche l'anello si allontanasse dalla sfera alla velocità della luce, potrebbe spostarsi solo di una distanza $d_z = R_0 \frac{v_C}{2c}$. Considerando la piccolezza di v_C che abbiamo usato per l'approssimazione (2.6.10), la frazione di raggio che l'anello riuscirà a percorrere sarà molto piccola e quindi si scontrerà con la sfera, che nello stesso tempo avanza della distanza che li separa. Riappare la condizione già espressa da (2.6.8) secondo cui la collisione può essere evitata solo se l'anello si muove a velocità superluminali mentre la sfera no. Vediamo dunque come il paradosso possa venire in questo caso risolto solo con considerazioni quantitative specifiche; infatti esso dipende in maniera essenziale dalla forma dell'equazione della contrazione di Lorentz. Se avessimo, anziché il γ previsto dalla teoria, un fattore di Lorentz

$$\gamma' = \left(1 - k \frac{v_C^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.6.14)$$

otterremmo, tramite passaggi analoghi a quelli che ci hanno portato alla (2.6.7), un determinante

$$\Delta' = a R_0^2 v_C^2 \left(1 - k \frac{v_C^2}{c^2}\right) \left(1 - k \frac{v_A^2}{c^2}\right) \quad (2.6.15)$$

che, per $k > 1$, può assumere valori negativi, permettendo dunque l'attraversamento dell'anello senza urti. Tuttavia la modifica del fattore di contrazione non si ripercuoterebbe sulle descrizioni di S' e S'' e il paradosso permarrrebbe.

2.7 Variante con circuito

In Sastry [27] troviamo un'altra situazione apparentemente paradossale dovuta alla contrazione delle lunghezze. Ancora una volta solo un'accurata analisi quantitativa ci consente di verificare la coerenza dei punti di vista da sistemi di riferimento diversi. Immaginiamo due binari conduttori paralleli connessi a un estremo da un generatore di tensione e una lampadina in serie. Il binario superiore presenta un divario di lunghezza propria L_0 , in cui è collegato a una sbarra conduttrice AB molto vicina al binario stesso. Scorre sui binari una spola formata da due sbarre verticali conduttrici C e D collegate orizzontalmente da materiale isolante, la cui lunghezza propria è sempre uguale a L_0 . Inizialmente la spola si trova interamente a sinistra del divario, in modo da chiudere il circuito e far accendere la lampadina. Il paradosso si presenta quando esaminiamo cosa succede quando la

spola si muove verso destra sui binari con velocità relativistica v : dal sistema S solidale coi binari la distanza CD sarà contratta e per un certo lasso di tempo passerà sotto il divario lasciando aperto il circuito; di contro, dal sistema S' solidale con la spola, il divario AB le viene incontro contratto, in modo che il contatto tra spola e binario superiore non venga mai interrotto. Nel primo caso, la lampadina si spegne per un tempo T_{off} finché la sbarra D non incontra B ; nel secondo caso, la lampadina sembra restare sempre accesa. Chiamiamo L e R gli eventi rispettivamente della fine del contatto tra C e A e dell'inizio del contatto tra D e B . Com'è ovvio, in S L avviene prima di R , mentre in S' R precede L . Una tale inversione della successione temporale tra due eventi può aver luogo solo se i due eventi sono separati da un intervallo di tipo spazio.

Cominciamo col comprendere perché la lampadina deve spegnersi, per un certo tempo T'_{off} , anche dal punto di vista di S' . Il punto cruciale è che il fatto, sicuramente vero, che il circuito rimanga chiuso a ogni istante non è condizione sufficiente per tenere accesa la lampadina, che si spegne se non riceve corrente in maniera continua. Per mantenere la continuità della corrente occorre non solo che il circuito non si apra, ma anche che l'impulso elettrico generato a R raggiunga A prima di L . In caso contrario, ci sarà un intervallo di tempo tra R e l'istante in cui in A riprende a scorrere corrente durante il quale la lampadina sarà spenta. Ciò non avviene, dunque, se il segnale elettromagnetico da B ad A , che parte in R , è abbastanza veloce da raggiungere l'evento L ; ma abbiamo già visto che l'intervallo tra L ed R deve essere di tipo spazio, il che esclude qualsiasi connessione fisica tra i due eventi. Quindi, qualsiasi sia la velocità del segnale (la quale dipenderà dai parametri del circuito in questione), esso raggiungerà A solo a L avvenuto, implicando lo spegnimento della lampada in quel frangente.

Messo in chiaro che al $T_{off} > 0$ in S corrisponde un T'_{off} anche in S' , e visto così come il paradosso viene meno, possiamo calcolare la relazione tra i due tempi e verificare che è quella che ci aspetteremmo dalla dilatazione di un tempo proprio. Non considereremo il tempo di percorrenza dei tratti verticali in A e B , perché non variano da un sistema all'altro. Ponendo $t_L = 0$, possiamo allora scrivere il tempo proprio di spegnimento della lampadina (a riposo in S) come la somma del tempo t_R che D impiega per raggiungere B e del tempo t_s impiegato dal segnale per raggiungere A :

$$\begin{aligned} T_{off} &= t_R + t_s = \frac{L_0 - L}{v} + \frac{L_0}{v_s} \\ &= L_0 \left(\frac{1}{v_s} + \frac{1}{v} \right) - \frac{L_0}{\gamma v} \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

dove $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$ e v_s è la velocità del segnale, per cui non serve un'espressione esplicita.

In S' invece, ponendo $t'_R = 0$, possiamo scrivere il tempo durante il quale la lampadina è spenta come la differenza tra il tempo t'_s impiegato dal segnale per raggiungere A e il tempo t'_L al quale C si stacca da A . È chiaro che

$$t'_L = \frac{L_0 - L}{v} = \frac{L_0 \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right)}{v}. \quad (2.7.2)$$

Per calcolare t'_s dobbiamo considerare una velocità del segnale v'_s in S' e uguagliare il suo percorso a quello compiuto dal AB :

$$v'_s t'_s = v t'_s + L$$

$$t'_s = \frac{L_0}{\gamma(v'_s - v)} \quad (2.7.3)$$

Sfruttando (2.7.2) e (2.7.3) possiamo infine scrivere:

$$\begin{aligned} T'_{off} &= t'_s - t'_L \\ &= \frac{L_0}{\gamma} \left(\frac{1}{v'_s - v} + \frac{1}{v} \right) - \frac{L_0}{v}. \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

Ricordando ora la formula della composizione della velocità (1.6.22), possiamo scrivere la velocità del segnale rispetto alla spola v_s in funzione della velocità del segnale rispetto ai binari v_s e della velocità relativa tra binari e spola v :

$$v'_s = \frac{v_s + v}{1 + \frac{v_s v}{c^2}} \quad (2.7.5)$$

Inserendo la (2.7.5) nella (2.7.4):

$$T'_{off} = \gamma \left[L_0 \left(\frac{1}{v_s} + \frac{1}{v} \right) - \frac{L_0}{\gamma v} \right] \quad (2.7.6)$$

il cui confronto con (2.7.1) ci dà immediatamente

$$T'_{off} = \gamma T_{off} \quad (2.7.7)$$

ossia la formula della dilatazione dei tempi, con T_{off} tempo proprio dell'inattività della lampada.

2.8 Analisi generale

Avendo guardato al paradosso della contrazione di Lorentz da diverse angolature tramite diverse varianti, possiamo concludere questa sezione generalizzando il problema dell'asta e del fienile nella sua forma elementare per ricavare la condizione fondamentale che dà origine alla situazione paradossale, seguendo [6]. Chiamiamo L_B e L_P le lunghezze proprie rispettivamente del fienile (*barn*) e dell'asta (*pole*), con $L_P > L_B$. L'asta si muove verso il fienile a velocità v . A differenza dell'esposizione di Rindler [26], vista sopra, il fienile è aperto anche sul retro e l'asta può uscirne continuando il suo percorso. Il sistema S è solidale col fienile, con $x = 0$ all'entrata; il sistema S' è solidale con l'asta, con $x' = 0$ alla sua estremità anteriore. Poniamo $t = t' = 0$ quando l'asta tocca l'ingresso del fienile (evento E_1).

Poniamoci in S . La lunghezza dell'asta si contrae in L_P/γ , perciò l'estremità posteriore dell'asta varca l'ingresso del fienile (evento E_2) al tempo $t_2 = L_P/\gamma v$. Ogni punto dell'asta impiega un tempo L_B/v ad attraversare il fienile, quindi l'estremità anteriore varca l'uscita (evento E_3) a $t_3 = L_B/v$. Infine, l'estremità posteriore esce dal fienile (evento E_4) a $t_4 = t_2 + t_3 = L_P/\gamma v + L_B/v$. Per passare a S' basta applicare le (1.6.13). I risultati sono riassunti in Tab. 1.

Evento	$S : (x, t)$	$S' : (x', t')$
E_1 : l'estremità anteriore dell'asta entra nel finile	$(0, 0)$	$(0, 0)$
E_2 : l'estremità posteriore dell'asta entra nel finile	$\left(0, \frac{L_P}{\gamma v}\right)$	$\left(-L_P, \frac{L_P}{v}\right)$
E_3 : l'estremità anteriore dell'asta esce dal finile	$\left(L_B, \frac{L_B}{v}\right)$	$\left(0, \frac{L_B}{\gamma v}\right)$
E_4 : l'estremità posteriore dell'asta esce dal finile	$\left(L_B, \frac{L_P}{\gamma v} + \frac{L_B}{v}\right)$	$\left(-L_P, \frac{L_P}{v} + \frac{L_B}{\gamma v}\right)$

Tab. 1: Coordinate spaziotemporali dei quattro eventi nei due sistemi di riferimento.

Ai fini di una descrizione generale che non dipenda da quantità specifiche, definiamo dei parametri adimensionali per la posizione e il tempo. Poniamo allora

$$\lambda = \frac{L_P}{L_B} \quad (2.8.1)$$

e, rispettivamente per S e S' ,

$$\tau_B = \frac{L_B}{v}, \quad \tau'_P = \frac{L_P}{v}. \quad (2.8.2)$$

Riscrivendo le coordinate dei quattro eventi nelle nuove scale otteniamo i risultati esposti in Tab. 2 e graficati nelle Figg. 8 e 9.

Evento	S	S'
E_1 : l'estremità anteriore dell'asta entra nel finile	$\frac{t_1}{\tau_B} = 0$	$\frac{t'_1}{\tau'_P} = 0$
E_2 : l'estremità posteriore dell'asta entra nel finile	$\frac{t_2}{\tau_B} = \frac{\lambda}{\gamma}$	$\frac{t'_2}{\tau'_P} = 1$
E_3 : l'estremità anteriore dell'asta esce dal finile	$\frac{t_3}{\tau_B} = 1$	$\frac{t'_3}{\tau'_P} = \frac{1}{\gamma\lambda}$
E_4 : l'estremità posteriore dell'asta esce dal finile	$\frac{t_4}{\tau_B} = \frac{\lambda}{\gamma} + 1$	$\frac{t'_4}{\tau'_P} = 1 + \frac{1}{\gamma\lambda}$

Tab. 2: Espressioni ottenute in funzione di λ , τ_B e τ'_P per i quattro eventi nei due sistemi di riferimento.

Considerando i valori in Tab. 2, vediamo che la condizione in S affinché l'asta sia tutta contenuta nel finile è

$$t_3 \geq t_2$$

$$\lambda = \frac{L_P}{L_B} \leq \gamma, \quad (2.8.3)$$

ossia, in Fig. 8, che ci si trovi nell'area del triangolo di vertici $(0, 0)$, $(\gamma, 1)$, $(0, 1)$ (il pregio di questa trattazione è l'indipendenza della sua validità da un valore particolare di γ). Tuttavia, per $\lambda < 1$, ciò è ovviamente quanto ci si aspetta, per cui il paradosso si ha solo nella regione $1 \leq x \leq \gamma$.

Analogamente, in S' l'asta sarà tutta all'interno del finile se

$$t'_3 \geq t'_2$$

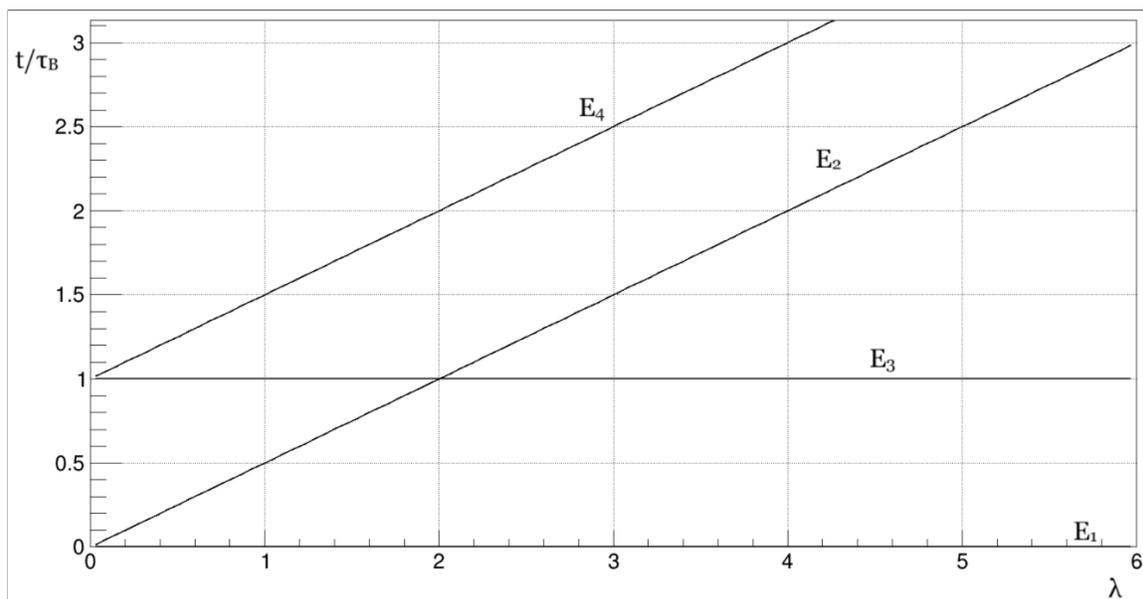


Fig. 8: Grafici delle funzioni $\frac{t}{\tau_B}(\lambda)$ della Tab. 2. Si è usato $\gamma = 2$.

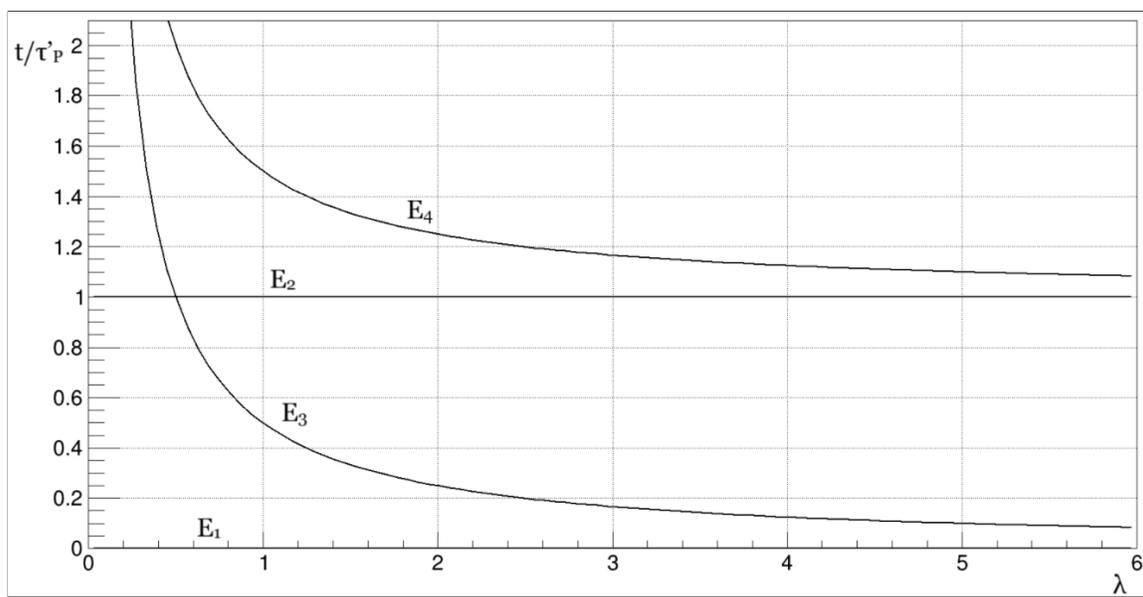


Fig. 9: Grafici delle funzioni $\frac{t}{\tau_P}(\lambda)$ della Tab. 2. Si è usato $\gamma = 2$.

$$\lambda = \frac{L_P}{L_B} \leq \frac{1}{\gamma}, \quad (2.8.4)$$

il che è facilmente verificabile dalla Fig. 9: E_2 interseca E_3 proprio in corrispondenza di $x = 1/\gamma$. Ma in questo caso $L_P < L_B$ e la situazione non è paradossale. Per $L_P > L_B$ ($\lambda > 1$) invece ciò non accade mai perché la curva di E_3 si trova sempre sotto la retta di E_2 : l'estremità anteriore esce sempre prima che entri quella posteriore.

Concludiamo riportando la condizione generale perché si verifichi il paradosso dell'asta e del fienile in qualsiasi variante esso si presenti:

$$1 \leq \lambda \leq \gamma. \tag{2.8.5}$$

3 Apparenza visiva della contrazione

Abbiamo finora discusso del fenomeno della contrazione delle lunghezze occupandoci di come un certo corpo *appaia* quando lo *osserviamo* da sistemi di riferimento diversi. Verrebbe dunque naturale pensare che, ponendoci nelle situazioni descritte, *vedremmo* gli oggetti effettivamente contratti, *vedremmo* una lunghezza minore di quella propria. Ebbene, occorre qui fare un'importante distinzione, dovuta a James Terrell e Roger Penrose, che tra il 1958 e il 1959 si occuparono della questione:

“C'è però una chiara distinzione tra osservare e vedere. Un'osservazione della forma di un oggetto che si muove rapidamente implica misurazioni simultanee della posizione di un numero di punti nell'oggetto. Se fatto per mezzo della luce, tutti i quanti dovrebbero lasciare la superficie simultaneamente, nel sistema dell'osservatore, ma arriveranno alla posizione dell'osservatore in tempi diversi. [...] Nel vedere l'oggetto, d'altro canto, o nel fotografarlo, tutti i quanti di luce arrivano simultaneamente all'occhio (o all'otturatore), dopo esser partiti dall'oggetto in tempi precedenti diversi. Questo deve chiaramente fare differenza tra la forma contratta che è in principio osservabile e l'aspetto visivo effettivo di un oggetto in moto rapido.”¹¹

3.1 Sfera

Penrose [23] si occupa esclusivamente di una sfera, dimostrando che essa mantiene un profilo circolare vista da qualsiasi sistema di riferimento. Stando a quanto visto finora, questo dovrebbe apparire controintuitivo. Lo stesso Einstein parla in [10] dell'aspetto che avrebbe una sfera rigida di raggio R in moto con velocità v rispetto a un sistema S e a riposo in un sistema S' . La sua equazione in S'

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2 \quad (3.1.1)$$

diventa in S

$$\frac{x^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + y^2 + z^2 = R^2 \quad (3.1.2)$$

che è ovviamente l'equazione di un ellissoide con assi $R/\gamma, R, R$.

Ancora una volta, occorre considerare il fenomeno tenendo conto di ciò che succede alle componenti temporali degli eventi. Potrebbe sembrare che, dato che le tangenti dall'osservatore alla sfera (considerata appiattita in un cerchio) sono tutte della stessa lunghezza, non dovremmo curarci della velocità finita della luce. Ma la luce che l'osservatore vede arrivare dalla parte anteriore della sfera parte da essa a un tempo successivo, nel sistema dell'osservatore, a quello in cui parte la luce dalla coda della sfera. Perciò la luce dalla parte posteriore raggiunge l'osservatore dal retro della sfera, e vi riesce perché questa, spostandosi continuamente, le lascia via libera. Agli occhi dell'osservatore, dunque, la lunghezza della sfera lungo la direzione del moto è più grande di quanto prevederemmo in base alla contrazione di Lorentz; se questa non avvenisse, la sfera apparirebbe anzi allungata.

In ottemperanza al principio di relatività (Sez. 1.6), consideriamo la situazione ponendo la sfera a riposo e l'osservatore in movimento. Se la sfera sta accelerando, rimanendo una sfera durante il suo moto, dovrà esserci a ogni istante un sistema di riferimento in cui essa è a riposo ed è sferica. Il problema è analogo a quello della rigidità visto in Sez. 2.3 nella misura in cui dobbiamo considerare

¹¹[31], p. 1041.

la finitezza della velocità della luce. Infatti la luce che giunge all'osservatore a un certo istante dal contorno della sfera è partita di lì da un istante del tempo della sfera, sicché l'accelerazione di questa è irrilevante. D'altra parte, un osservatore che sia fermo rispetto alla sfera vede ovviamente un contorno circolare. Bisogna dunque solo capire qual è la trasformazione del campo visivo in gioco quando si passa da un osservatore stazionario a uno in moto nella stessa posizione; questa dovrà essere una trasformazione che manda cerchi in cerchi. Ma abbiamo già esaminato un caso di questo genere: possiamo usare la formula (1.7.3) dell'aberrazione relativistica per un sistema S' che si muova con velocità v rispetto a S solidale con la sfera:

$$\tan \frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \tan \frac{\theta}{2}. \quad (3.1.3)$$

In questo modo, facendo una proiezione stereografica della sfera unitaria centrata sull'origine di S dal punto $\theta = \pi$, la (3.1.3) trasformerà cerchi in cerchi semplicemente espandendo il piano di proiezione del fattore $\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$.

3.2 Angoli piccoli

A estendere il discorso oltre la semplice sfera è Terrell [31]. Adoperiamo le coordinate angolari polari sferiche, cioè l'angolo polare θ e l'angolo azimutale ϕ , per descrivere le direzioni apparenti istantanee dell'oggetto in movimento in S sistema di riferimento dell'osservatore stazionario. Se questo è diretto lungo $\theta = 0$ con velocità v rispetto a S , l'osservatore riceverà un raggio di luce da un certo punto dell'oggetto in (θ, ϕ) . Poniamo che un osservatore S' in moto verso $\theta' = 0 = \theta$ con velocità v rispetto a S , quindi solidale con l'oggetto, sia a un certo istante nella posizione dell'osservatore stazionario. Qui e avanti intenderemo con S e S' ora i sistemi di riferimento, ora gli osservatori posti nelle loro rispettive origini. Possiamo applicare le forme (1.7.1) dell'equazione dell'aberrazione relativistica all'angolo polare per ottenere:

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right)} \quad \cos \theta = \frac{\cos \theta' - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta'} \quad (3.2.1)$$

L'angolo azimutale è invece lasciato invariato dalle trasformazioni di Lorentz:

$$\phi = \phi' \quad (3.2.2)$$

Consideriamo ora un'area rettangolare di lati infinitesimi sulla superficie centrata nell'origine dei sistemi di riferimento, orientata lungo le linee a θ e ϕ costanti. I suoi lati sottendono angoli di $d\theta$ e $\sin \theta d\phi$, che corrispondono in S' a $d\theta'$ e $\sin \theta' d\phi' = \sin \theta' d\phi$. Differenziando la (3.2.1) otteniamo

$$\frac{d\theta'}{d\theta} = \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right)} = \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right) = M \quad (3.2.3)$$

che corrisponde all'ingrandimento. Poiché vale anche

$$\frac{\sin \theta' d\phi'}{\sin \theta d\phi} = \frac{\sin \theta'}{\sin \theta} = M, \quad (3.2.4)$$

il rettangolo ha gli stessi rapporti tra lunghezza e larghezza in S e in S' . Essendo inoltre i lati ortogonali tra loro in entrambi i sistemi, è chiaro che la trasformazione (3.2.3) conserva la loro

forma. Ciò è sufficiente a garantire che la figura vista in S sarà identica a quella vista in S' a meno di un fattore di ingrandimento. Come già visto con Penrose, una sfera manterrà dunque il suo profilo circolare a dispetto della contrazione di Lorentz. Anche durante un'accelerazione, tutti gli osservatori a una certa posizione concorderanno istantaneamente sulla forma dell'oggetto, a qualunque velocità essi si muovano. In questo senso la forma "apparente" è lasciata invariata dalle trasformazioni di Lorentz, mentre la forma che deduciamo dalle misurazioni muta in base alla contrazione, che è dunque invisibile in senso proprio.

Vediamo cosa succede nel caso di una sbarra in moto in direzione della sua lunghezza. Abbiamo in particolare due sbarre tridimensionali di eguale lunghezza, A ferma rispetto al sistema S e B in moto con velocità elevata v in direzione $\theta = 0$, in modo che S le veda entrambe a $\theta = 90^\circ$ a un certo istante. Intenderemo con "faccia anteriore" e "faccia posteriore" della sbarra rispettivamente la faccia lunga rivolta verso l'osservatore e quella opposta alla prima. Al tempo precedente in cui la luce che raggiunge l'osservatore parte dalla faccia anteriore di B , entrambe le sue estremità lungo la direzione del moto erano alla stessa distanza da S , cosicché effettivamente S le vede come erano simultaneamente a un certo istante precedente, quindi a una lunghezza contratta rispetto a quella di A , che si trovava alla stessa distanza. Quando però la luce è partita dalla faccia posteriore di B , questa si trovava più a sinistra: ne consegue che ad S risulta visibile la faccia sinistra di B perpendicolare alla direzione del moto. Allora, più che una contrazione, l'effetto che abbiamo sulla visione della sbarra in movimento è quello di una rotazione.

Consideriamo ora un osservatore S' in moto verso $\theta' = 0 = \theta$ con velocità v rispetto ad S . La luce lo raggiunge a un angolo $\theta' = \arccos(v/c)$, e in questa direzione vede entrambe le sbarre. B risulterà ferma e ruotata di un angolo $\theta - \theta'$, dove θ è l'angolo a cui B si trova rispetto a S (nel momento in cui S la vede a $\theta = 90^\circ$). A si muoverà ovviamente con velocità $-v$ verso sinistra, ciononostante non apparirà contratta: all'istante in cui la luce è partita dalla sua estremità destra, questa si trovava molto più lontano da S' rispetto all'estremità sinistra quando la luce è partita da quest'ultima, perciò la sbarra viene allungata in modo tale che la lunghezza su cui agisce la contrazione di Lorentz appaia comunque normale.

Risulta dunque che entrambi gli osservatori vedono le stesse cose, salvo che per la distanza apparente. Due ipotetiche fotografie scattate da S e da S' sarebbero cioè identiche a meno di un ingrandimento dato dalla (3.2.4). Come nei vari paradossi studiati in Sez. 2, possono variare le interpretazioni che diamo dai diversi punti di vista, ma tutte le descrizioni di quanto accade risultano coerenti.

Abbiamo visto come un corpo in moto a velocità relativistica in direzione $\theta = 0$ apparirà ruotato di un angolo $\theta - \theta'$, dove θ è l'angolo a cui un osservatore stazionario vede il corpo e θ' è l'angolo a cui lo vede un osservatore solidale con il corpo, ubicato nella stessa posizione allo stesso tempo del primo osservatore. Le equazioni (3.2.1) mettono in relazione questi due angoli. Grazie a esse possiamo studiare qualche caso particolare:

- a) se $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, allora anche $\theta' = 0$ o $\theta' = \pi$, per cui $\theta - \theta' = 0$: la rotazione apparente è nulla;
- b) se $\theta = \pi/2$, abbiamo $\cos \theta' = v/c$ e $\sin \theta' = 1/\gamma$, cosicché, applicando la formula goniometrica di sottrazione:

$$\cos(\theta - \theta') = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' = \frac{1}{\gamma}, \quad (3.2.5)$$

ossia l'effetto della rotazione sull'oggetto sarà quantitativamente uguale a quello della contrazione di Lorentz. Tuttavia questa orientazione non ha niente di speciale, e l'aspetto dell'oggetto resta, come abbiamo visto, sempre normale;

c) se $\cos \theta = -v/c$, allora $\theta' = \pi/2$, e l'oggetto mostrerà solo la faccia anteriore.

Torniamo ora al caso di Penrose (Sez. 3.1). Per un oggetto dotato di simmetria rotazionale, non c'è rischio di confondere la rotazione con la contrazione. Immaginiamo una sfera a velocità v nell'istante in cui si trova a $\theta = \pi/2$. Se D è la lunghezza propria del suo diametro, rispetto a S osservatore stazionario esso sarà lungo D/γ . Tuttavia la distanza tra i punti visibili più lontani sulla sfera, che chiamiamo A e B , non è questa. Sappiamo che l'area visibile della sfera viene ruotata, rispetto al suo stato stazionario, di $(\theta - \theta')$; ci troviamo qui nel caso (b) visto sopra, quindi $\cos(\theta - \theta') = 1/\gamma$. Lungo la direzione del moto avremo dunque una distanza che risulta dalla proiezione della distanza contratta sulla direzione $\theta = 0$, cioè

$$\frac{D \cos(\theta - \theta')}{\gamma} = \frac{D}{\gamma^2}. \quad (3.2.6)$$

Lungo la direzione perpendicolare al moto il diametro non si contrae e proiettando avremo

$$D \sin(\theta - \theta') = D \sqrt{1 - \cos^2(\theta - \theta')} = D \frac{v}{c}. \quad (3.2.7)$$

Questa è la direzione lungo la quale l'osservatore vede la sfera, perciò la luce proveniente da B deve partirne a un tempo Dv/c^2 precedente all'istante in cui parte il raggio che parte da A , perché i due raggi arrivino simultaneamente all'osservatore. Durante questo tempo, la sfera, che si sta muovendo verso destra, ha percorso una distanza Dv^2/c^2 . Quindi la distanza tra A e B che viene effettivamente vista è

$$\frac{D}{\gamma^2} - D \frac{v^2}{c^2} = D, \quad (3.2.8)$$

il che significa che all'osservatore la sfera appare senza contrazione. Come abbiamo già detto, A risulta l'ultimo punto visibile perché la luce che parte dai punti dietro di esso viene fermata dalla sfera in moto; analogamente, B è visibile perché la sfera si sposta continuamente dal tragitto dei raggi che partono da lì.

È il caso di ribadire che all'origine del fenomeno della rotazione di Terrell c'è la finitezza della velocità della luce. Infatti, quello che vediamo è quello che esisteva a un tempo precedente alla visione, e non tutte le parti di uno stesso oggetto sono viste come erano allo stesso istante precedente; è questo che produce distorsioni, evidenti a velocità relativistiche, della forma dell'oggetto, che a seconda della situazione possono consistere in contrazioni, distorsioni o tagli. Il punto importante da tenere a mente è che queste dipendono dalla propagazione della luce rispetto all'osservatore e dalla collocazione spaziotemporale dell'atto visivo. La contrazione di Lorentz è sì un fenomeno reale (come abbiamo avuto modo di sottolineare in Sez. 2.4), ma risulta dalle osservazioni condotte tramite misure simultanee di vari punti; paradossalmente, essa ha l'effetto di restituire la forma normale a oggetti altrimenti allungati, come accadrebbe nel caso di un oggetto che viene direttamente incontro all'osservatore ($\theta = \pi$), ingrandito lungo la direzione del moto di un fattore calcolabile con la (3.2.3):

$$M = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}. \quad (3.2.9)$$

In generale, a qualunque θ , se un osservatore vede due punti di un oggetto stazionario che sono allo stesso angolo ma a distanze diverse, un altro osservatore in moto rispetto al primo vedrà i punti M volte più lontani da lui ed M volte più distanti fra loro. Ma la forma viene conservata, sicché la fotografia di un oggetto scattata da un osservatore è indipendente dal loro moto relativo, e la contrazione di Lorentz è, in senso proprio, invisibile.

3.3 Oggetti grandi

Boas [4] generalizza la discussione rimuovendo la restrizione, che dobbiamo porre all'analisi di Terrell, che l'oggetto sottenda angoli sufficientemente piccoli, così da far valere la (3.2.3). Come sempre consideriamo un sistema S stazionario e un sistema S' solidale con l'oggetto in moto a velocità v lungo gli assi comuni x e x' in modo che al tempo $t = t' = 0$ gli assi y e y' e gli assi z e z' coincidano.

Analizziamo il caso di una sfera (già visto in Sez. 3.1) di diametro proprio D_0 . Se tracciamo le tangenti alla sfera dall'origine di S' , rispetto a cui è a riposo, formeremo un cono circolare col vertice nell'origine O' , che contiene tutti i raggi di luce dalla sfera all'osservatore ad essa solidale, il quale vede sempre un profilo circolare nella stessa direzione. A $t = t' = 0$, entrambi gli osservatori sono raggiunti dagli stessi raggi di luce, che li raggiungeranno nell'evento $x = y = z = t = 0, x' = y' = z' = t' = 0$. Dato che la velocità della luce è ovviamente c in entrambi i sistemi, a un tempo negativo $t' < 0$ prima dell'arrivo in S' i raggi si trovavano sulla sfera

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (3.3.1)$$

e a un tempo negativo $t < 0$ in S sulla sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad (3.3.2)$$

legate fra loro dalle trasformazioni di Lorentz (1.6.13).

Poniamoci in S' . Se \mathbf{a}' è il versore dell'asse del cono, \mathbf{r}' è un vettore dall'origine O' a un punto del cono, $\kappa' = \cos(\mathbf{r}', \mathbf{a}')$ è il coseno della semiapertura del cono, $t' < 0$ è il parametro tempo, allora possiamo scrivere l'equazione del cono

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}' = |\mathbf{r}'| |\mathbf{a}'| \cos(\mathbf{r}', \mathbf{a}') = \kappa' r', \quad (3.3.3)$$

o in forma parametrica

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}' = -\kappa' c t', \quad r'^2 = c^2 t'^2. \quad (3.3.4)$$

I valori (r', t') che soddisfano queste equazioni rappresentano la storia della luce che arriva a O' a $t' = 0$. Applicandovi le trasformazioni di Lorentz (1.6.13), otteniamo la descrizione in S degli stessi raggi. Come visto in (3.3.2), abbiamo $r^2 = c^2 t^2$. Se poniamo $\mathbf{a}' = (l', m', n')$, la (3.3.4) diventa

$$\begin{aligned} l'x' + m'y' + n'z' &= -\kappa' c t' \\ l'\gamma(x - vt) + m'y + n'z &= -\kappa' c \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \\ x \left(l'\gamma - \kappa' \gamma \frac{v}{c} \right) + m'y + n'z &= -ct \left(\kappa' \gamma - \gamma l' \frac{v}{c} \right), \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

che può essere scritta come

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = lx + my + nz = -\kappa ct \quad (3.3.6)$$

dove $\mathbf{a} = (l, m, n)$ è un versore, con

$$\begin{cases} l = N (l'\gamma - \kappa' \gamma \frac{v}{c}) \\ m = Nm' \\ n = Nn' \\ \kappa = N (\kappa' \gamma - \gamma l' \frac{v}{c}) \end{cases} \quad (3.3.7)$$

e N è tale che $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Le equazioni (3.3.2) e (3.3.6) descrivono un cono circolare retto come quelle corrispondenti in S' : anche l'osservatore in O vede cioè un profilo circolare, benché la sfera appaia in diversa direzione ($\mathbf{a} \neq \mathbf{a}'$) e di diversa dimensione ($\kappa \neq \kappa'$), il che conferma i risultati delle sezioni precedenti. Anche da questa analisi infatti emerge che il motivo per cui non vediamo esplicitamente la contrazione di Lorentz è la trasformazione temporale. Se in S' tutta la luce è partita a uno stesso istante t' , in S in base alle (1.6.13) questo istante corrisponde a $t = \gamma(t' + vx'/c^2)$ e non è perciò unico perché dipende dai vari valori che x' assume sulla sfera. Quindi S non osserva tutta la sfera per com'è a uno stesso istante, condizione a cui la contrazione è misurabile. Se la sfera, in base alle misurazioni, diventa uno sferoide oblato, continua a sembrare una sfera agli occhi dell'osservatore.

Vediamo ora cosa succede, in una situazione analoga alla precedente, a un segmento di retta fermo in S' . Considero in S' il piano individuato dal segmento e dall'origine O' , di equazione

$$\mathbf{N}' \cdot \mathbf{r}' = 0 \quad (3.3.8)$$

dove \mathbf{N}' è il versore normale. Tutta la luce che arriva ad O' dal segmento a $t' = 0$ si è trovata, a un certo $t' < 0$ sull'intersezione del piano con la sfera $r'^2 = c^2 t'^2$ (3.3.1). Passando in S , gli stessi raggi sono a un certo t nell'intersezione tra la sfera $r^2 = c^2 t^2$ (3.3.2) e il piano ottenuto dalla trasformazione di Lorentz della (3.3.8). Se $\mathbf{N}' = (l', m', n')$, allora la (3.3.8) si trasforma in

$$l'\gamma(x - vt) + m'y + n'z = 0, \quad (3.3.9)$$

che possiamo scrivere nella forma

$$lx + my + nz = bt \quad (3.3.10)$$

ponendo

$$\begin{cases} l = Kl'\gamma \\ m = Km' \\ n = Kn' \\ b = Kl'\gamma v \end{cases} \quad K = \sqrt{l'^2 \gamma^2 + m'^2 + n'^2} \quad (3.3.11)$$

La (3.3.10) risulta essere un piano in S , che intersecato con la (3.3.2) lascia un'impronta al tempo t della luce che arriva in O a $t = 0$ tracciata sulla sfera centrata in O . Capiamo quindi che un segmento retto segna sulla sfera un arco di un suo cerchio maggiore; una sfera a riposo segna, col suo contorno circolare, un cerchio piccolo.

Consideriamo la (3.3.10). Si danno due casi:

- se $b = 0$, il piano contiene l'origine e la traccia lasciata sulla sfera è un cerchio massimo, perciò l'osservatore in O vede un segmento di retta. Dalle (3.3.11) è inoltre chiaro che $l' = 0$, dunque \mathbf{N}' è perpendicolare all'asse x' ; dunque il piano a cui \mathbf{N}' è normale contiene l'asse x' . In questo caso rientrano allora tutti i segmenti di retta a riposo in S' giacenti sul piano che contiene la direzione di moto. Il caso del segmento che si muove parallelamente alla sua lunghezza è stato approfondito in Sez. 3.2.
- se $b \neq 0$, consideriamo un segmento di retta a riposo in S' e parallelo all'asse y' , fuori dal piano (x', y') , che si muove in S perpendicolarmente alla sua lunghezza. La traccia sulla sfera sarà allora un cerchio piccolo (perché il piano non contiene l'origine) e O , in base a quanto detto sopra, vedrà una linea curva e non retta: infatti la sua parte più lontana sarà incurvata all'indietro rispetto al moto, sempre perché l'osservatore la vede a un tempo precedente rispetto a quello a cui appare l'estremità più vicina.

Abbiamo così provato che un qualsiasi oggetto a velocità relativistica subisce, agli occhi di un osservatore stazionario, deformazioni di vario tipo, che non ne rivelano la contrazione osservata tramite le misurazioni.

Bibliografia

- [1] V. ALLORI, M. DORATO, F. LAUDISA, AND N. ZANGHÌ, *La natura delle cose. Introduzione ai fondamenti e alla filosofia della fisica*, Carocci, 2005.
- [2] H. ARZELIÈS, *Relativistic Kinematics*, Pergamon, 1966.
- [3] S. BERGIA AND A. P. FRANCO, *Le strutture dello spaziotempo. Volume 1*, CLUEB, 2001.
- [4] M. L. BOAS, *Apparent shape of large objects at relativistic speeds*, American Journal of Physics, 29 (1961), pp. 283–286.
- [5] J. BRADLEY, Phil. Trans. Roy. Soc., 35 (1729), p. 637.
- [6] B. CAMERON REED, *A new graphical depiction of the barn and pole paradox*, American Journal of Physics, 89 (2021), pp. 927–929.
- [7] C. CHRISTODOULIDES, *The Special Theory Of Relativity. Foundations, Theory, Verification, Applications*, Springer, 2016.
- [8] E. DEWAN AND M. BERAN, *Note on stress effects due to relativistic contraction*, American Journal of Physics, 27 (1959), pp. 517–518.
- [9] E. M. DEWAN, *Stress effects due to lorentz contraction*, American Journal of Physics, 31 (1963), pp. 383–386.
- [10] A. EINSTEIN, *Zur elektrodynamik bewegter körper*, Annalen der Physik, 17 (1905), pp. 891–921.
- [11] ———, *Zum ehrenfestschen paradoxon*, Physikalische Zeitschrift, 12 (1911), pp. 509–510.
- [12] G. F. FITZGERALD, *The ether and the earth's atmosphere*, Science, 13 (1889), p. 390.
- [13] H. FIZEAU, *Sur les hypothèses relatives à l'éther lumineux*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences et belles-lettres, 33 (1851), pp. 349–355.
- [14] A.-J. FRESNEL, *Annales de Chimie et de Physique*, 9 (1818), pp. 57–66.
- [15] M. HOEK, *Determination de la vitesse avec laquelle est entraînée une onde lumineuse traversant un milieu en mouvement*, Verslagen en Mededeelingen, 2 (1868), pp. 189–194.
- [16] H. LORENTZ, *De relatieve beweging van de aarde en den aether*, Proc. K. Ned. Akad. Wet., 1 (1892), p. 74.
- [17] ———, *Versuch einer theorie der electrischen und optischen erscheinungen in bewegten körpern*, Teubner, (1895).
- [18] R. D. A. MARTINS, *Length paradox in relativity*, American Journal of Physics, 46 (1978), pp. 667–670.
- [19] E. MARX, *Lorentz contraction*, American Journal of Physics, 35 (1967), pp. 1127–1130.
- [20] A. MICHELSON AND E. MORLEY, *On the relative motion of the earth and the luminiferous ether*, American Journal of Science, 34 (1887), pp. 333–345.

- [21] P. J. NAWROCKI, *Stress effects due to relativistic contraction*, American Journal of Physics, 30 (1962), pp. 771–772.
- [22] W. PAULI, *Relativitätstheorie*, Teubner, 1921. Trad. it. Teoria della relatività, di P. Gulmanelli, Boringhieri, 1958.
- [23] R. PENROSE, *The apparent shape of a relativistically moving sphere*, Proc. Cambridge Phil. Soc., 55 (1959), pp. 137–139.
- [24] R. RESNICK, *Introduction to Special Relativity*, John Wiley & Sons, 1968. Trad. it. Introduzione alla relatività ristretta, a cura di A. Uguzzoni, Ambrosiana, 1979.
- [25] W. RINDLER, *Length contraction paradox*, American Journal of Physics, 29 (1959), pp. 365–366.
- [26] ———, *Essential Relativity. Special, General, and Cosmological*, Springer-Verlag, 1977.
- [27] G. P. SASTRY, *Is length contraction really paradoxical*, American Journal of Physics, 55 (1987), pp. 943–946.
- [28] R. SHAW, *Length contraction paradox*, American Journal of Physics, 30 (1962), p. 72.
- [29] L. SKLAR, *Space, Time, and Spacetime*, University of California, 1974.
- [30] J. STACHEL, *Fresnel's (dragging) coefficient as a challenge to 19th century optics of moving bodies*, in The universe of general relativity, A. J. Kox, ed., Birkhäuser, 2005, pp. 1–13.
- [31] J. TERRELL, *Invisibility of the lorentz contraction*, Physical Review, 116 (1959), pp. 1041–1045.
- [32] H. VAN LINTEL AND C. GRUBER, *The rod and hole paradox re-examined*, European Journal of Physics, 26 (2005), pp. 19–23.
- [33] M. VON LAUE, *Die mitführung des lichtes durch bewegte körper nach dem relativitätsprinzip*, Annalen der Physik, 328 (1907), pp. 989–990.
- [34] W. H. WELLS, *Length contraction paradox*, American Journal of Physics, 29 (1961), p. 858.