Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Risoluzione dell'equazione di D'Alembert nel caso elettromagnetico

Relatore:
Prof. Roberto Balbinot

Presentata da:
Elena Calzolaio

Anno Accademico 2023/2024

Abstract

Questa tesi affronta la risoluzione dell'equazione di D'Alembert nel contesto dell'elettromagnetismo, esplorando soluzioni basate sulle onde piane e le loro generalizzazioni. Il lavoro inizia con una panoramica sulla relatività ristretta, concentrandosi sulle trasformazioni di Lorentz e sul formalismo tensoriale. Questi concetti gettano le basi per la formulazione delle equazioni di Maxwell in forma covariante, portando allo studio del tensore del campo elettromagnetico, in particolare degli scalari da esso derivati, e dell'invarianza di gauge nell'elettromagnetismo. Il cuore della tesi è la derivazione della soluzione dell'onda piana per le equazioni omogenee di Maxwell, per poi generalizzare tale soluzione al caso di una sovrapposizione delle stesse attraverso un integrale di Fourier. In entrambi i casi emergono le proprietà delle onde elettromagnetiche, confermando l'adeguatezza e la coerenza del formalismo matematico caratteristico della relatività speciale nella descrizione dei fenomeni elettromagnetici.

Indice

1 Relatività ristretta **1**

1.1 Trasformazioni di Lorentz e spazio-tempo di Minkowsky 2

1.2 Calcolo tensoriale 4

2 Elettromagnetismo **8**

2.1 Sorgenti 8

2.2 Potenziali e trasformazioni di gauge 11

2.3 Tensore del campo elettromagnetico 12

2.4 Equazioni di Maxwell in forma covariante 13

2.5 Lagrangiana del campo elettromagnetico 15

3 Risoluzione delle equazioni omogenee **17**

3.1 Onde piane 17

3.2 Sovrapposizione di onde piane 21

3.3 Normalizzazione 26

Conclusioni **29**

Bibliografia **30**

Capitolo 1

Relatività ristretta

Nel 1905 Albert Einstein pubblica l'articolo scientifico *Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento* all'interno del quale vengono poste le fondamenta della teoria della relatività ristretta.

Al momento della pubblicazione di tale articolo vi erano due principali incongruenze da risolvere tra la teoria elettromagnetica, sintetizzata da James Clerk Maxwell nel *Trattato sull'elettromagnetismo* pubblicato nel 1873, e la meccanica newtoniana.

La prima incongruenza nasce dalla necessità di chiarire quali leggi di trasformazione collegano due sistemi di riferimento inerziali. Per sistema di riferimento si intende un sistema di coordinate per determinare la posizione degli oggetti nello spazio e un orologio che indichi il tempo legato al sistema. Se un sistema di riferimento è inerziale il moto libero dei corpi al suo interno è rettilineo uniforme. Secondo il *principio di relatività*, la cui validità è suggerita dall'esperienza, le leggi fisiche devono essere invarianti rispetto a un cambiamento di coordinate. In meccanica newtoniana la validità di tale principio è garantita dalle trasformazioni di Galileo, secondo le quali il tempo scorre alla stessa maniera in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Tuttavia, le equazioni di Maxwell non sono invarianti rispetto a tali trasformazioni, bensì rispetto a trasformazioni di Lorentz, in cui il tempo non rimane invariato.

La seconda incongruenza riguarda la velocità con la quale si propaga un segnale fisico. In meccanica classica si presuppone che le interazioni abbiano una velocità di propagazione infinita, in quanto dipendenti solo dalle coordinate spaziali dei corpi coinvolti. Ad ogni modo, l'elettromagnetismo suggerisce che tale assunzione sia imprecisa in quanto le onde elettromagnetiche nel vuoto si propagano a velocità finita corrispondente a $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$, a prescindere dal sistema di riferimento che si sta considerando. Se si suppone l'esistenza di una velocità massimale di propagazione del segnale, ne consegue che non possa esistere un moto con una velocità maggiore, inoltre, per il principio di relatività questa deve essere la stessa in tutti i sistemi di riferimento, pertanto la legge di composizione delle velocità enunciata da Galileo risulta inadeguata. [3]

A partire da tali incongruenze Einstein formula i due postulati della relatività ristretta:

1. **Postulato della relatività**: Le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi inerziali

2. **Postulato della costanza della velocità della luce**: la velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali

1.1 Trasformazioni di Lorentz e spazio-tempo di Minkowsky

La relatività ristretta necessita un linguaggio che esprima coerentemente i suoi postulati. In primo luogo introduciamo il concetto di evento.

Un evento

$$x^\alpha = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{x}) \tag{1.1}$$

è una quaterna di numeri definita dall'istante ($x^0 = ct$) e dalla posizione ($x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$) in cui avviene. Lo spazio delle coordinate in cui vengono espressi gli eventi è una varietà quadridimensionale chiamata *spazio-tempo di Minkowsky* (**M**). Definiamo quindi l'intervallo invariante all'interno di tale varietà come

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \tag{1.2}$$

ove $\eta_{\alpha\beta}$ è la matrice metrica tale che

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Nell'Eq.(1.2) e nel seguito si usa la convenzione di Einstein secondo la quale gli indici ripetuti vengono sommati.

Si noti che l'intervallo in Eq.(1.2) non è definito positivo, al contrario della metrica euclidea $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ definita in $\mathbf{R}^3$. Tale caratteristica, alla luce del secondo postulato, conferisce allo spazio-tempo di Minkowsky una struttura causale (si veda Fig. 1.1) in relazione al segno di ds^2 interposto tra due eventi:

- $ds^2 < 0$ (intervallo *spacelike*) implica che i due eventi non possono essere legati da una relazione di causa-effetto in quanto la distanza che li separa è superiore a quella che potrebbe percorrere la luce nello stesso tempo;

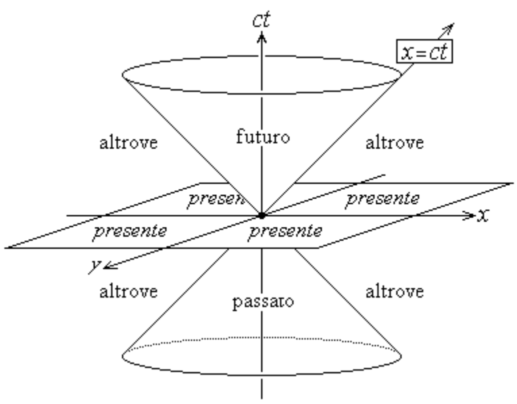

Figura 1.1 Rappresentazione della struttura causale dello spazio-tempo di Minkowsky

- $ds^2 > 0$ (intervallo *timelike*) implica che i due eventi possono essere legati da una relazione di causa-effetto in quanto la distanza che li separa è inferiore a quella che potrebbe percorrere la luce nello stesso tempo;

- $ds^2 = 0$ (intervallo *lightlike*) implica che i due eventi sono legati attraverso un'emissione luminosa e individua in **M** il "cono luce", che separa gli eventi *spacelike* da quelli *timelike.*

A questo punto è necessario definire delle trasformazioni in **M** dal sistema di riferimento S a S' che conservino l'intervallo definito nell'Eq.(1.2). Tali trasformazioni devono essere lineari, ovvero del tipo $x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} x^{\beta}$ ($\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ è la matrice della trasformazione), in quanto ci si riferisce a sistemi di riferimento inerziali: le trasformazioni di Lorentz rispettano queste caratteristiche.

Si definisca una trasformazione di Lorentz come una trasformazione lineare che soddisfa la relazione:

$$\eta_{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu} = \eta_{\mu\nu} \tag{1.4}$$

Si dimostra che se l'Eq. (1.4) viene soddisfatta, allora ds^2 viene conservato, infatti in S'

$$ds'^2 = \eta_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} \tag{1.5}$$

e applicando le trasformazioni di Lorentz a dx'^{α} e dx'^{β} per passare al sistema di riferimento S si ottiene

$$ds'^2 = \eta_{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{1.6}$$

e sostituendo l'Eq. (1.4)

$$ds'^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = ds^2 \tag{1.7}$$

Come volevasi dimostrare l'intervallo viene conservato.

Una generica trasformazione di Lorentz, supponendo che gli assi di S e S' siano paralleli, ha la seguente forma:

$$\Lambda^{0}{}_{0} = \gamma,\ \Lambda^{0}{}_{i} = \Lambda^{i}{}_{0} = -\beta_i\gamma,\ \Lambda^{i}{}_{i} = \delta_{ij} + \frac{(\gamma-1)^2}{\beta}\beta_i\beta_j \tag{1.8}$$

ove $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ è il fattore lorentziano e $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$ è il rapporto tra la velocità relativa dei due sistemi di riferimento e la velocità della luce nel vuoto.

Nel caso di un boost lungo l'asse x, ovvero di un sistema di riferimento S' che si muove rispetto a un sistema S con velocità parallela all'asse x, la forma matriciale della trasformazione è la seguente:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ove alla riga 0 viene indicata la trasformazione della coordinata temporale e nelle righe successive quella delle coordinate spaziali.

Tempo proprio

Nella precedente sezione abbiamo definito l'intervallo invariante in **M** (si veda Eq. (1.2)).

Definiamo *tempo proprio* di un corpo il tempo segnato da un orologio solidale con il moto dello stesso.

Da un punto di vista fisico, possiamo immaginare di osservare in un sistema di riferimento inerziale S un orologio che si muove di moto vario. In ogni istante si può trovare un sistema di riferimento inerziale S' solidale con l'orologio, ovvero in cui l'orologio è in quiete. Rispetto ad S, in un intervallo di tempo dt, l'orologio percorre una distanza pari a $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Ci domandiamo dunque quale sia l'intervallo di tempo dt' segnato dall'orologio, ovvero il tempo proprio.

Per l'invarianza dell'intervallo

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2 = ds'^2 \tag{1.9}$$

Esplicitando dt' si ottiene

$$dt' = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}} = \frac{ds}{c} \tag{1.10}$$

da cui si evince che ds corrisponde al tempo proprio riscalato di un fattore c.

Per concludere, è possibile riscrivere l'Eq. (1.10) in funzione del fattore lorentziano γ nel modo seguente:

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma} \tag{1.11}$$

1.2 Calcolo tensoriale

Per il postulato della relatività le leggi della fisica devono avere la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali: si presenta la necessità di trovare una forma matematica che espliciti tale invarianza. Il calcolo tensoriale si propone di cercare relazioni e quantità invarianti rispetto a trasformazioni di sistemi di coordinate, per cui risulta lo strumento matematico più efficace. In particolare, siamo interessati alla definizione di vettori, tensori e scalari rispetto a trasformazioni di Lorentz. [1]

Tensori

Si riporti una generica trasformazione di Lorentz in forma differenziale

$$dx'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}dx^{\nu} \tag{1.12}$$

Ricordando che

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}dx^{\nu} \tag{1.13}$$

e confrontando le due espressioni possiamo concludere che

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \tag{1.14}$$

Si definisce *scalare* (o tensore di rango $(0,0)$) un oggetto $\Phi(x)$ di una sola componente il quale è invariante per trasformazioni di Lorentz, ovvero $\Phi(x) \xrightarrow{L} \Phi'(x') = \Phi(x)$. Un esempio di scalare è il tempo proprio nello spazio di Minkowsky, definito nell'Eq. (1.2).

Si definisce *quadrivettore controvariante* (o tensore di rango $(1,0)$) un oggetto a quattro componenti $A^\mu(x) = (A^0, A^2, A^2, A^3)$ tali che, data una trasformazione di Lorentz (indicata come L) delle coordinate $x \xrightarrow{L} x'$, si trasformano nel seguente modo:

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \tag{1.15}$$

Un esempio di *quadrivettore controvariante* è la quadriposizione, introdotta nell'Eq. (1.1), o il quadrimomento, definito come

$$P^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{P}) \tag{1.16}$$

ove si ricorda che $E = m\gamma c^2$ e $\vec{P} = m\gamma\vec{v}$ nel caso si abbia un oggetto massivo.

Si definisce *quadrivettore covariante* (o tensore di rango $(0,1)$) un oggetto a quattro componenti $A_\mu(x) = (A_0, A_2, A_2, A_3)$ tali che, data una trasformazione delle coordinate $x \xrightarrow{L} x'$, si trasformano nel seguente modo:

$$A'_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu(x) \tag{1.17}$$

ove si indica $\Lambda_\mu{}^\nu = (\Lambda^\nu{}_\mu)^{-1}$ come l'inversa della matrice di trasformazione.

Prendiamo come esempio di *quadrivettore covariante* il quadrigradiente, definito come

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}) \tag{1.18}$$

e studiamo come si trasforma. Applichiamo il quadrigradiente a uno scalare $\Phi(x)$

$$\frac{\partial \Phi'(x')}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \tag{1.19}$$

Ragionando in analogia con l'Eq. (1.17) si può dire che

$$(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \tag{1.20}$$

corrispondente alla stessa matrice precedentemente riportata in Eq. (1.17).

Si noti che la distinzione tra quadrivettore controvariante e covariante è una peculiarità delle trasformazioni di Lorentz, in quanto trasformazioni non ortogonali. A questo proposito, riscriviamo l'Eq. (1.4) in forma matriciale:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \tag{1.21}$$

La matrice metrica η non corrisponde alla matrice identità, per questo motivo Λ^T e Λ^{-1} differiscono. Invece, in $\mathbf{R^3}$ le matrici di rotazione, corrispondenti alle trasformazioni che conservano la metrica euclidea, sono ortogonali; per questo motivo in $\mathbf{R^3}$ non è possibile distinguere vettori controvarianti da covarianti.

Applicando il determinante ad entrambi i membri dell'Eq. (1.21) si ottiene

$$(det\Lambda)^2 = 1 \tag{1.22}$$

che permette di distinguere due casi:

- $det\Lambda = 1$, trasformazioni di Lorentz *proprie*, ovvero si possono ottenere variando i parametri in maniera continua a partire dall'identità
- $det\Lambda = -1$, trasformazioni di Lorentz *improprie*.

Infine, un generico *tensore* di rango (m, n) si definisce come un oggetto con m indici alti e n indici bassi la cui legge di trasformazione è

$$T'^{j_1,\dots,j_m}_{i_1,\dots,i_n}(x') = \Lambda^{j_1}{}_{\alpha_1}\dots\Lambda^{j_m}{}_{\alpha_m}\Lambda_{i_1}{}^{\beta_1}\dots\Lambda_{i_n}{}^{\beta_n}T^{\alpha_1,\dots,\alpha_m}_{\beta_1,\dots,\beta_n} \tag{1.23}$$

in modo tale da saturare gli indici.

L'Eq. (1.23) rende più chiaro il motivo per cui il linguaggio tensoriale è il più adeguato in relatività speciale. Infatti, se due tensori sono uguali in un sistema di coordinate, ne consegue che lo siano in tutti gli altri, in quanto si trasformano allo stesso modo.

Algebra tensoriale

Definiamo ora una serie di proprietà dei tensori:

1. La combinazione lineare di tensori dello stesso rango $\alpha R^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p} + \beta S^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}$ con α e β numeri reali è un tensore dello stesso rango;
2. In un tensore posso contrarre un indice alto con un indice basso, per cui se ho un tensore di rango (p, q) ottengo un tensore di rango $(p - 1, q - 1)$;
3. Dati due tensori di rango (m, n) e (m', n'), il loro prodotto diretto ha rango $(m + m', n + n')$;
4. La derivata di un tensore è ancora un tensore per la linearità delle trasformazioni di Lorentz.

Applicando tali proprietà si può effettuare l'innalzamento o l'abbassamento degli indici. Dato A^α, tensore di rango $(1, 0)$, si vuole renderlo di rango (0,1) nel seguente modo:

$$\eta_{\alpha\beta}A^\alpha = A_\alpha \tag{1.24}$$

in cui per prodotto diretto otteniamo un tensore di rango $(1, 2)$ che per contrazione diviene di rango $(0, 1)$. Si osservi che esplicitando le componenti del quadrivettore A_α otteniamo

$$A_\alpha = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) \tag{1.25}$$

ove la componente temporale rimane invariata, mentre quelle spaziali cambiano di segno. Si può procedere in maniera analoga partendo da un tensore di rango $(0, 1)$.

A questo punto è possibile definire il prodotto scalare tra un vettore controvariante A^α e uno covariante B_α come segue

$$A^\alpha B_\alpha = \eta_{\alpha\mu}A^\alpha B^\mu = A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 \tag{1.26}$$

Si dimostra che tale quantità è scalare, infatti

$$A'^\alpha B'_\alpha = \Lambda^\alpha{}_\nu\Lambda_\alpha{}^\mu A^\nu B_\mu \tag{1.27}$$

ove si può notare che

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\nu}\Lambda_{\alpha}{}^{\mu} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{1.28}$$

e sostituendo nell'Eq. (1.27) si ottiene

$$A'^{\alpha}B'_{\alpha} = \delta^{\mu}_{\nu}A^{\nu}B_{\mu} = A^{\mu}B_{\mu} \tag{1.29}$$

Avendo definito un prodotto scalare è possibile costruire all'interno di **M** la norma invariante come segue

$$A^{\alpha}A_{\alpha} = (A^0)^2 - |\vec{A}|^2 \tag{1.30}$$

Si noti che tale norma non è definita positiva, ma, in analogia a quanto visto in Fig. 1.1, fornisce una classificazione assoluta dei quadrivettori in relazione al segno della stessa. Un quadrivettore si dice *timelike* se la norma è positiva, *lightlike* se è nulla e *spacelike* se è negativa.

Esempi

Nella seguente sezione riportiamo degli scalari di Lorentz rilevanti.

Innanzitutto, consideriamo il quadrigradiente definito in Eq. (1.18) e calcoliamone la norma:

$$\partial^{\alpha}\partial_{\alpha} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla})(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \nabla^2 \tag{1.31}$$

Osserviamo che l'ultimo termine corrisponde all'operatore di D'Alembert, il quale, in quanto norma di un quadrivettore, risulta essere uno scalare di Lorentz, quindi invariante. Si indica l'operatore d'alembertiano con la seguente notazione:

$$\partial^{\alpha}\partial_{\alpha} = \Box \tag{1.32}$$

Consideriamo ora il quadrimpulso, definito in Eq. (1.16), la norma è

$$P^{\alpha}P_{\alpha} = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{P}|^2 \tag{1.33}$$

Ipotizziamo di vedere una particella muoversi in un dato sistema di riferimento S con velocità $\vec{v}$. Possiamo considerare il sistema di riferimento S' di quiete della particella in cui $\vec{v}$ è istantaneamente nulla. Equagliamo le norme dei due quadrimpulsi e otteniamo

$$\frac{E^2}{c^2} - |\vec{P}|^2 = m^2c^2 \tag{1.34}$$

ovvero la relazione di conservazione dell'energia relativistica. Si noti che la norma in questo caso è positiva, per cui si evince che lo deve essere in ogni sistema di riferimento, dunque, il quadrimpulso è un vettore *timelike.*

Infine, definiamo la misura nello spazio di Minkowsky

$$d^4x = cdtd^3x \tag{1.35}$$

la quale, in seguito a una trasformazione di Lorentz delle coordinate, trasforma

$$d^4x' = J(x)d^4x \tag{1.36}$$

ove $J(x) = |det\Lambda|$ è il determinante della matrice di trasformazione. Ricordando l'Eq. (1.22) possiamo concludere che

$$d^4x' = d^4x \tag{1.37}$$

Per cui la misura come definita in Eq. (1.35) è invariante per trasformazioni di Lorentz.

Capitolo 2

Elettromagnetismo

La teoria dell'elettromagnetismo è sintetizzata dalle equazioni di Maxwell, le quali, nel vuoto, hanno la seguente forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{2.4}$$

ove il campo elettrico **E** e il campo magnetico **B** sono generati da una distribuzione di carica, descritta dalla densità di carica ρ, e una densità di corrente indicata come $j = \rho\mathbf{v}$, ove **v** è il campo di velocità delle cariche nello spazio. Le quantità indicate in grassetto sono quantità vettoriali.

Nel capitolo precedente è stato affrontato il calcolo tensoriale, ora ci chiediamo se queste equazioni siano esprimibili in forma tensoriale. Innanzitutto, notiamo che **E** e **B** non sono tensori. Effettivamente, se in un sistema di riferimento **B** è nullo, è possibile trovare un altro sistema in cui tale affermazione cessa di essere vera; analogamente può accadere con **E**. Tuttavia, è possibile trovare, a partire da **B** ed **E**, quantità tensoriali attraverso le quali la Lorentz invarianza sia manifesta in quanto già intrinseca nel formalismo.

2.1 Sorgenti

Definiamo la carica elettrica dq contenuta in un volume d^3x come

$$dq = \rho d^3\mathbf{x} \tag{2.5}$$

e la corrente elettrica I attraverso una superficie infinitesima $d\boldsymbol{\sigma}$ come

$$dI = \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \tag{2.6}$$

Ci chiediamo quale sia la relazione esistente tra ρ e **j**. In primo luogo applichiamo l'operatore divergenza ∇ all'Eq. (2.4); ricordando che la divergenza del rotore è nulla si ottiene

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c}\nabla \cdot \mathbf{j} \tag{2.7}$$

Quindi, deriviamo rispetto al tempo l'Eq. (2.3)

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.8}$$

Confrontando le Eq. (2.7) e (2.8) otteniamo l'*equazione di continuità* della carica elettrica

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{2.9}$$

L'Eq. (2.9) è di grande rilevanza in quanto il suo significato fisico è di individuare una quantità conservata: la carica elettrica. A questo proposito riscriviamo l'Eq. (2.9) in forma integrale:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{j} d^3\mathbf{x} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho d^3\mathbf{x} \tag{2.10}$$

e applichiamo il Teorema di Gauss al primo membro dell'uguaglianza in Eq. (2.10)

$$\int_S \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho d^3\mathbf{x} \tag{2.11}$$

che, ricordando le Eq. (2.5) e (2.6) corrisponde a

$$I = -\frac{dQ}{dt} \tag{2.12}$$

ove I è la carica che fluisce attraverso S e Q la carica contenuta in V. Dal momento in cui V tende all'infinito, ovvero prendiamo tutta la carica contenuta nell'universo, I diviene nulla poichè non c'è flusso di corrente all'infinito, per cui l'Eq. (2.12) diviene

$$\frac{dQ_{tot}}{dt} = 0 \tag{2.13}$$

la quale implica che Q_{tot} sia costante.

Consideriamo ora il caso in cui le sorgenti siano puntiformi e definiamo ρ e $\mathbf{j}$ attraverso la delta di Dirac:

$$\rho = \sum_n e_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n(t)) \tag{2.14}$$

$$\mathbf{j} = \sum_n \rho_n \mathbf{v}_n(t) = \sum_n e_n \mathbf{v}_n(t)\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n(t)) \tag{2.15}$$

ove $\mathbf{z}_n$ indica la traiettoria dell'n-esima particella e $\mathbf{v}_n(t) = \frac{d\mathbf{z}_n(t)}{dt}$.

Si ricorda che la delta di Dirac è definita come

$$\int d^n x f(x) \delta^n(x - x') = f(x') \tag{2.16}$$

Formulazione coviariante

L'obiettivo di questa sezione è esprimere attraverso un quadrivettore le grandezze definite nelle Eq. (2.14) e (2.15).

Definiamo la *quadricorrente* J^μ come

$$J^\mu(x) = (\rho c, \mathbf{j}) = \sum_n e_n \frac{dz_n^\mu}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n(t)) \tag{2.17}$$

e ci chiediamo se questa si trasformi come un quadrivettore.

In primo luogo, è necessario definire la delta di Dirac nello spazio di Minkowsky come segue:

$$\delta^4(x^\mu - x'^\mu) = \delta(ct - ct')\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tag{2.18}$$

Inoltre, riportiamo una proprietà della delta utile nel seguito:

$$\delta(a) = \frac{\delta(x)}{|a|} \tag{2.19}$$

Riscriviamo ora l'Eq. (2.17) inserendo il fattore δ dipendente dal tempo

$$J^\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \delta(t - t') \sum_n e_n \frac{dz_n^\mu}{dt'} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n(t)) \tag{2.20}$$

e applicando la proprietà in Eq. (2.19) per ottenere la δ come in Eq. (2.18), abbiamo infine:

$$J^\mu(x) = c \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \sum_n e_n \frac{dz_n^\mu}{dt'} \delta^4(x^\mu - z_n^\mu) \tag{2.21}$$

Cambiamo variabile da t' a s, l'intervallo invariante definito in Eq. (1.2)

$$J^\mu(x) = c \int_{-\infty}^{+\infty} ds \sum_n e_n \frac{dz_n^\mu}{ds} \delta^4(x^\mu - z_n^\mu) \tag{2.22}$$

Possiamo riconoscere l'Eq. (2.22) come la forma covariante della quadricorrente in quanto, dipendendo dal quadrivettore $\frac{dz_n^\mu}{dt'}$ e da scalari, trasforma come un quadrivettore.

Dimostriamo ora che tale forma soddisfa l'equazione di continuità (Eq. (2.9)) espressa in forma covariante come segue:

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \tag{2.23}$$

In primo luogo, sostituiamo l'Eq. (2.22):

$$\partial_\mu J^\mu(x) = c \int_{-\infty}^{+\infty} ds \sum_n e_n \frac{dz_n^\mu}{ds} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta^4(x^\mu - z_n^\mu) = -c \int_{-\infty}^{+\infty} ds \sum_n e_n \frac{dz_n^\mu}{ds} \frac{\partial}{\partial z_n^\mu} \delta^4(x^\mu - z_n^\mu) \tag{2.24}$$

Risolvendo l'integrale si ottiene

$$\partial_\mu J^\mu(x) = -c \sum_n e_n [\delta^4(x^\mu - z^\mu)]_{s=-\infty}^{s=+\infty} \tag{2.25}$$

ma notiamo che per $s = \pm\infty$ la delta non ha supporto, per cui $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$.

2.2 Potenziali e trasformazioni di gauge

Le equazioni di Maxwell possono essere riscritte in funzione dei *potenziali elettromagnetici*. Osservando l'Eq. (2.1) notiamo come $\mathbf{B}$ sia un vettore solenoidale, ciò implica

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{2.26}$$

ove $\mathbf{A}$ è una funzione nota come *potenziale vettore*. Sostituiamo ora l'Eq. (2.26) nell'Eq. (2.2)

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times (\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0 \tag{2.27}$$

e notiamo che $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ è invece irrotazionale, per cui può essere espresso come

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\phi \tag{2.28}$$

ove si indica con ϕ il *potenziale scalare*. In questo modo è possibile esprimere anche il campo $\mathbf{E}$ in funzione dei potenziali:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi \tag{2.29}$$

Riportiamo per completezza le Eq. (2.3) e (2.4) in funzione dei potenziali:

$$\nabla^2\phi + \frac{1}{c}\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -4\pi\rho \tag{2.30}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{2.31}$$

Le Eq. (2.26) e (2.29) non definiscono in maniera univoca i campi, infatti se applico una trasformazione di questo tipo al potenziale vettore

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \tag{2.32}$$

con χ funzione arbitraria, $\mathbf{B}$ va in se stesso come segue:

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{B} \tag{2.33}$$

Se ripeto la stessa operazione con $\mathbf{E}$, noto che non va in se stesso

$$\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla\phi = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi = \mathbf{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi \tag{2.34}$$

Da ciò si può evincere che la trasformazione in Eq. (2.32) deve avvenire simultaneamente alla trasformazione del potenziale scalare indicata di seguito:

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{2.35}$$

Le trasformazioni in Eq. (2.32) e (2.35), dette *trasformazioni di gauge*, sono rilevanti in quanto lasciano invariati i campi, e quindi le equazioni di Maxwell. Per questo motivo costituiscono una simmetria per l'elettromagnetismo, che si dice essere una *teoria di gauge*.

Formulazione covariante

I potenziali scalare e vettore possono essere rappresentati come un unico quadrivettore: il *quadripotenziale*

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}) \tag{2.36}$$

attraverso il quale è possibile rappresentare le trasformazioni di gauge in Eq. (2.32) e (2.35) in forma covariante

$$A \longrightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi \tag{2.37}$$

2.3 Tensore del campo elettromagnetico

Come evidenziato all'inizio del capitolo, ci si propone di esprimere i campi elettrico e magnetico attraverso un'unica quantità tensoriale, il *tensore del campo elettromagnetico* che ora definiamo

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{2.38}$$

ove A^μ è stato definito in Eq. (2.36) e $F^{\mu\nu}$ è un tensore di rango $(2,0)$ tale che

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

Innanzitutto, possiamo osservare che, in virtù dell'Eq. (2.38), $F^{\mu\nu}$ è un tensore antisimmetrico poichè

$$F^{\nu\mu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu = -(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -F^{\mu\nu} \tag{2.40}$$

Inoltre, è invariante per trasformazioni di gauge, infatti

$$F^{\mu\nu} \longrightarrow F'^{\mu\nu} = \partial^\mu(A^\nu - \partial^\nu\chi) - \partial^\nu(A^\mu - \partial^\mu\chi) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu\partial^\nu\chi + \partial^\nu\partial^\mu\chi = F^{\mu\nu} \tag{2.41}$$

Le sue componenti in termini dei campi sono espresse come

$$F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -\partial_i\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t} = E^i \tag{2.42}$$

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\epsilon^{ijk} B^k \tag{2.43}$$

Attraverso $F^{\mu\nu}$ è possibile definire il tensore duale

$$F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \tag{2.44}$$

ove $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ è il tensore totalmente antisimmetrico che estende allo spazio-tempo di Minkowsky il simbolo di Levi-Civita, ed è definito come

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} +1, & \mu\nu\alpha\beta \text{ permutazione pari di 0123} \\ -1, & \mu\nu\alpha\beta \text{ permutazione dispari di 0123} \\ 0, & \text{due indici uguali} \end{cases} \tag{2.45}$$

Per cui $F^{*\mu\nu}$ assume la seguente forma

$$F^{*\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

In termini dei campi è possibile esprimere $F^{*\mu\nu}$ come

$$F^{*i0} = B^i \tag{2.47}$$

$$F^{*ij} = \epsilon^{ijk} E^k \tag{2.48}$$

A partire dai tensori definiti in Eq. (2.39) e (2.46), è possibile costruire le quantità invarianti $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ e $F^{*\mu\nu}F_{\mu\nu}$, le quali in termini dei campi possono essere espresse come

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \tag{2.49}$$

$$F^{*\mu\nu}F_{\mu\nu} = -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \tag{2.50}$$

Come conseguenza delle Eq. (2.49) e (2.50), si ha che se **E** e **B** sono ortogonali e/o hanno lo stesso modulo in un sistema di riferimento inerziale, allora ciò varrà per tutti i sistemi di riferimento inerziali.

2.4 Equazioni di Maxwell in forma covariante

Abbiamo definito tutti gli strumenti necessari per poter esprimere le equazioni di Maxwell attraverso un formalismo più adeguato ai nostri scopi.

L'espressione covariante per le equazioni non omogenee (Eq. (2.3) e (2.4)) è

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \tag{2.51}$$

infatti, per $\nu = 0$ abbiamo

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_i E^i = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} j^0 = 4\pi\rho \tag{2.52}$$

corrispondente all'Eq. (2.3). Per $\nu = i$, invece, si ottiene

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = -\partial_0 E^i + \epsilon^{ijk}\partial_j B^k = -\frac{1}{c}\frac{\partial E^i}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})^i = \frac{4\pi}{c} j^i \tag{2.53}$$

che corrisponde all'Eq. (2.4).

Per quanto riguarda le equazioni omogenee, ovvero le Eq. (2.1) e (2.2), si ha la seguente espressione covariante:

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} = 0 \tag{2.54}$$

Per $\nu = 0$ si ottiene

$$\partial_\mu F^{*\mu 0} = \partial_i B^i = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2.55}$$

ove nell'ultima uguaglianza ritroviamo l'Eq. (2.1). Per $\nu = i$ si ha

$$\partial_\mu F^{*\mu i} = \partial_0 F^{*0i} + \partial_j F^{*ji} \tag{2.56}$$

che in termini dei campi equivale a

$$\epsilon^{ijk}\partial_j E^k + \partial_0 B^i = (\nabla \times \mathbf{E})^i + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}^i}{\partial t} = 0 \tag{2.57}$$

ove nell'ultima uguaglianza riotteniamo l'Eq. (2.2).

Ricordando l'Eq. (2.38), riscriviamo ora l'Eq. (2.51) come espressione del quadripotenziale:

$$\Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} j^\nu \tag{2.58}$$

Condizioni di gauge fixing

Le trasformazioni di gauge possono rivelarsi uno strumento utile per semplificare le equazioni di Maxwell. Se si considera l'Eq. (2.58) si intuisce che i calcoli sarebbero molto semplificati se si ponesse

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{2.59}$$

in quanto ci si riduce a

$$\Box A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \tag{2.60}$$

La condizione imposta in Eq. (2.59) è nota come *gauge di Lorentz* ed è una condizione che specifica la trasformazione di gauge che si vuole applicare all'equazione. Si può dimostrare che è sempre possibile trovare una trasformazione di gauge che soddisfi tale condizione, ovvero che dato $\partial_\mu A^\mu \neq 0$, esiste χ tale per cui $\partial_\mu A'^\mu = 0$, infatti

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu(A^\mu - \partial^\mu \chi) = \partial_\mu A^\mu - \Box\chi = 0 \tag{2.61}$$

L'Eq. (2.61) è verificata solo se

$$\Box\chi = \partial_\mu A^\mu \tag{2.62}$$

ed è possibile dimostrare che tale equazione ha sempre soluzione. La determinazione del gauge rimane comunque non univoca in quanto il sistema lineare

$$\begin{cases} \Box A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \\ \partial_\mu A^\mu = 0 \end{cases} \tag{2.63}$$

non ha un'unica soluzione. Effettivamente, se applico una trasformazione di Lorentz al potenziale noto che

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu(A^\mu - \partial^\mu \xi) = 0 \tag{2.64}$$

la quale è soddisfatta solo se

$$\Box\xi = 0 \tag{2.65}$$

la cui soluzione corrisponde alle funzioni armoniche. Abbiamo dunque ottenuto la classe delle trasformazioni che soddisfa il gauge di Lorentz.

Le condizioni introdotte in Eq. (2.59) e (2.65) permettono di ridurre il problema a due sole componenti indipendenti. Tale condizione è consistente con quanto ci si aspetta nelle onde elettromagnetiche, le quali sono trasversali alla direzione di propagazione e dunque la loro determinazioni dipende solo da due direzioni.

Possono essere imposte altre condizioni di gauge, in particolare citiamo la condizione di gauge di Coulomb

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{2.66}$$

e di gauge temporale

$$A^0 = \phi = 0 \tag{2.67}$$

Si noti in particolare che la condizione in Eq. (2.66) permette di eliminare le componenti longitudinali del campo. Le Eq. (2.66) e (2.67) sono non covarianti, a differenza del gauge di Lorentz, per questo motivo risulta spesso conveniente fissare il gauge di Lorentz, in quanto assicura l'invarianza delle equazioni.

2.5 Lagrangiana del campo elettromagnetico

Le equazioni omogenee (Eq. (2.54)), la cui risoluzione è di interesse nella presente trattazione, possono essere ricavate anche a partire dalla densità di lagrangiana che descrive il campo elettromagnetico libero che si propaga nel vuoto; la riportiamo di seguito:

$$\mathscr{L}_{em} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \tag{2.68}$$

Dalla meccanica hamiltoniana è noto che è possibile ricavare le equazioni del moto, anche note come *equazioni di Eulero-Lagrange*, a partire dal *principio di minima azione*. Consideriamo, infatti, la variazione infinitesima del campo ϕ

$$\phi \longrightarrow \phi + \delta\phi \tag{2.69}$$

ove $\delta\phi = 0$ nella frontiera $\partial\Omega$ del dominio spazio-temporale Ω che consideriamo.

Definiamo l'integrale d'azione come

$$S = \int_\Omega d^4x \mathscr{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \tag{2.70}$$

Il principio di Hamilton richiede che la variazione infinitesima dell'azione sia nulla, ossia $\delta S = 0$. Da tale condizione è possibile ottenere le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} = 0 \tag{2.71}$$

Nel caso del campo elettromagnetico il campo ϕ corrisponde al potenziale elettromagnetico definito in Eq. (2.36). Riscriviamo dunque l'Eq. (2.71) in questo caso

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathscr{L}_{em}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial\mathscr{L}_{em}}{\partial A_\nu} = 0 \tag{2.72}$$

Ricaviamo il primo termine

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathscr{L}_{em}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathscr{L}_{em}}{\partial F_{\alpha\beta}} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right] \tag{2.73}$$

Ricordando l'Eq. (2.38), il primo fattore è

$$\frac{\partial\mathscr{L}_{em}}{\partial F_{\alpha\beta}} = -\frac{1}{8\pi} F^{\alpha\beta} \tag{2.74}$$

mentre il secondo fattore è

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \delta^\beta_\mu \delta^\alpha_\nu \tag{2.75}$$

Unendo i due fattori si ottiene

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}_{em}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{8\pi}\partial_\mu[F^{\alpha\beta}(\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \delta^\beta_\mu \delta^\alpha_\nu)] = -\frac{1}{8\pi}\partial_\mu[F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}] = -\frac{1}{4\pi}\partial_\mu F^{\mu\nu} \tag{2.76}$$

Per quanto riguarda il secondo termine dell'Eq. (2.72), notiamo che, poichè la lagrangiana non dipende direttamente dal potenziale A^ν, è nullo.

Dunque l'Eq. (2.72) diviene

$$-\frac{1}{4\pi}\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{2.77}$$

Confrontando tale risultato con l'Eq. (2.51), notiamo che corrispondono quando $j^\nu = 0$, ovvero quando si ha unn campo elettromagnetico libero; abbiamo dunque ottenuto quanto ci aspettavamo.

Aggiungiamo ora all'Eq. (2.68) il termine che riporta il contributo delle sorgenti

$$\mathscr{L}_{em} = -\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c}j_\mu A^\mu \tag{2.78}$$

e osserviamo tale lagrangiana. Affinchè le equazioni del moto siano Lorentz invarianti $\mathscr{L}$ deve essere uno scalare, inoltre deve essere anche gauge invariante. Applichiamo dunque al potenziale la trasformazione di gauge

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi \tag{2.79}$$

Notiamo che, applicando l'Eq. (2.41) nella quale si dimostra la gauge invarianza del tensore elettromagnetico, si ottiene

$$\mathscr{L}'_{em} = \mathscr{L}_{em} + \frac{1}{c}j_\mu \partial^\mu \chi \tag{2.80}$$

ove riscriviamo l'ultimo termine

$$\frac{1}{c}j_\mu \partial^\mu \chi = \frac{1}{c}\partial^\mu(j_\mu \chi) - \frac{1}{c}(\partial^\mu j_\mu)\chi \tag{2.81}$$

Il primo termine non contribuisce in quanto la lagrangiana è invariante se si aggiunge una quadridivergenza. Il secondo si annulla solo se è verificata l'equazione di continuità. Dunque, notiamo che la conservazione della carica elettrica è strettamente correlata alla gauge invarianza della lagrangiana.

Capitolo 3

Risoluzione delle equazioni omogenee

Il campo elettromagnetico può esistere anche in assenza di sorgenti, ossia quando $j^\nu = 0$, e può propagarsi nel vuoto. In questo caso si parla di onde elettromagnetiche.

In questo capitolo ci si pone l'obiettivo di risolvere le equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti riportate in Eq. (2.63). In un primo momento si considera la soluzione nella forma di un'onda piana, per poi considerare la soluzione più generale come sovrapposizione di onde piane.

3.1 Onde piane

Riscriviamo l'Eq. (2.63) in forma covariante, ricordando la definizione del box nelle Eq. (1.31) e (1.32)

$$\Box A^\nu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial A^\nu}{\partial t^2} - \nabla^2 A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \tag{3.1}$$

la quale nel caso di assenza di sorgenti ($j^\nu = 0$) si riduce a

$$\Box A^\nu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial A^\nu}{\partial t^2} - \nabla^2 A^\nu = 0 \tag{3.2}$$

che ha come soluzione un'onda piana la cui equazione generica è la seguente:

$$A^\nu = a^\nu(\mathbf{k})e^{ik_\alpha x^\alpha} + a^{*\nu}(\mathbf{k})e^{-ik_\alpha x^\alpha} \tag{3.3}$$

Indichiamo con $a^\nu = (a^0, \mathbf{a})$ una generica ampiezza quadridimensionale con componenti dipendenti dalla direzione dell'onda $\mathbf{k}$, le cui caratteristiche saranno specificate in seguito; $k^\alpha = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k})$ è il *vettore di polarizzazione*. Svolgendo il prodotto scalare all'esponente ottengo

$$e^{ik_\alpha x^\alpha} = e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \tag{3.4}$$

la quale corrisponde ad un'onda piana di pulsazione ω e vettore d'onda $\mathbf{k}$.

Trascuriamo ora il secondo termine in Eq. (3.3), in quanto può essere trattato in maniera analoga a quanto faremo ora. Innanzitutto, applichiamo il quadrigradiente ad A^ν

$$\partial_\mu A^\nu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} = ia^\nu(\mathbf{k})k_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} e^{ik_\alpha x^\alpha} = ia^\nu(\mathbf{k})k_\alpha \delta^\alpha_\mu e^{ik_\alpha x^\alpha} = (ik_\mu)A^\nu \tag{3.5}$$

e analogamente $\partial^\mu A^\nu = (ik^\mu)A^\nu$.

Riscriviamo ora l'Eq. (3.2) sostituendovi l'Eq. (3.3)

$$\Box A^{\nu} = \partial^{\mu}\partial_{\mu}A^{\nu} = (ik^{\mu})(ik_{\mu})A^{\nu} = -(k^{\mu}k_{\mu})A^{\nu} \tag{3.6}$$

Quest'ultima è nulla solo se $k^{\mu}k_{\mu} = 0$, quindi se k^{μ} è un vettore nullo ossia *lightlike*, secondo la distinzione introdotta alla fine del paragrafo 1.2. Tale caratteristica implica che

$$\frac{\omega^2}{c^2} - |\mathbf{k}|^2 = 0 \tag{3.7}$$

per cui

$$\omega = c|\mathbf{k}| \tag{3.8}$$

e la velocità di gruppo $v_g = \frac{d\omega}{d|\mathbf{k}|} = c$ pertanto, le onde elettromagnetiche nel vuoto si propagano alla velocità della luce nel vuoto c.

A questo punto ci chiediamo se tale soluzione rispetta la condizione di gauge di Lorentz

$$\partial_{\mu}A^{\mu} = ik_{\mu}a^{\mu}(\mathbf{k})e^{ik_{\alpha}x^{\alpha}} = 0 \tag{3.9}$$

e notiamo che tale equazione è soddisfatta solo se $k^{\mu}a_{\mu}(\mathbf{k}) = 0$, per cui si ottiene

$$k^0a^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{a} = 0 \tag{3.10}$$

da cui

$$a^0 = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}{\frac{\omega}{c}} \tag{3.11}$$

Dunque, affinchè il gauge di Lorentz rimanga valido è necessario stabilire una relazione tra le componenti dell'ampiezza a^{ν}.

Come abbiamo visto alla fine del paragrafo 2.4, il gauge di Lorentz non impone una trasformazione univoca, per cui consideriamo le funzioni armoniche ξ tali che

$$\Box\xi = 0 \tag{3.12}$$

e la trasformazione di gauge

$$A^{\mu} \longrightarrow A'^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu}\xi \tag{3.13}$$

Definiamo la funzione ξ come

$$\xi = \xi_0 e^{ik_{\alpha}x^{\alpha}} \tag{3.14}$$

e poichè k^{μ} è un vettore nullo si dimostra che soddisfa l'Eq. (3.12), infatti

$$\Box\xi = -(k^{\mu}k_{\mu})\xi = 0 \tag{3.15}$$

In virtù dell'Eq. (3.13) riscriviamo A'^{μ} come segue

$$A'^{\mu} = a^{\mu}(\mathbf{k})e^{ik^{\alpha}x_{\alpha}} - ik^{\mu}\xi_0 e^{ik^{\alpha}x_{\alpha}} = e^{ik^{\alpha}x_{\alpha}}(a^{\mu} - ik^{\mu}\xi_0) = a'^{\mu}(\mathbf{k})e^{ik^{\alpha}x_{\alpha}} \tag{3.16}$$

Si noti che A'^{μ} in ultimo mantiene la forma di un'onda piana con ampiezza a'^{μ} ridefinita, la quale, ricordando l'Eq. (3.7) e (3.10), verichiamo che soddisfa il gauge di Lorentz

$$k_{\mu}a'^{\mu} = k_0a'^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{a'} = k_{\mu}a^{\mu} - ik_{\mu}k^{\mu}\xi_0 = 0 \tag{3.17}$$

Poichè anche nel caso di a'^μ vale $k_\mu a'^\mu = 0$, possiamo scrivere la relazione tra le componenti di a'^μ come

$$a'^0 = \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{a}'}{k^0} \tag{3.18}$$

Tuttavia, dall'Eq. (3.16), deduciamo che

$$a'^0 = a^0 - ik^0\xi_0 \tag{3.19}$$

in cui ξ_0 è un parametro libero, per cui posso sempre sceglierlo tale che $a'^0 = 0$, quindi

$$\xi_0 = \frac{a^0}{ik^0} \tag{3.20}$$

Dal momento in cui a'^0 è nullo allora $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{a}' = 0$, di conseguenza $\mathbf{k}$ è ortogonale a $\boldsymbol{a}'$.

L'implicazione delle precedenti considerazioni è che, scegliendo ξ_0 come in Eq.(3.20), le uniche componenti dell'onda non nulle sono quelle trasverse alla sua direzione di propagazione; possiamo infatti scomporre $\boldsymbol{a}'$ in una componente longitudinale e una trasversale a $\mathbf{k}$ come $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}'_L + \boldsymbol{a}'_T$, ma poichè $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{a}'_L = 0$, dunque $a'^\mu = (0, \boldsymbol{a}'_T)$. Tale fatto è estremamente significativo in quanto vuol dire che le componenti trasverse al moto sono le uniche rilevanti dal momento che sono non nulle indipendentemente dal gauge in cui ci si pone. Ciò vuol dire che la componente temporale e quella longitudinale al moto non sono componenti *fisiche*.

Giunti a queste conclusioni, è possibile aggiungere ulteriori dettagli alle considerazioni fatte nel paragrafo 2.3 riguardo agli scalari $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ e $F^{*\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Riprendendo l'Eq. (2.38) e l'espressione dell'onda piana introdotta in Eq. (3.3), indichiamo il tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ come

$$F^{\mu\nu} = i(a^\nu k^\mu - a^\mu k^\nu)e^{ik_\alpha x^\alpha} \tag{3.21}$$

Da cui

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -(a^\nu k^\mu - a^\mu k^\nu)(a_\nu k_\mu - a_\mu k_\nu)e^{2ik_\alpha x^\alpha} = 0 \tag{3.22}$$

Tale espressione è nulla poichè $k^\mu k_\mu = 0$ e $k^\mu a_\mu = 0$, dunque dall'Eq. (2.49) notiamo che

$$|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}| \tag{3.23}$$

indipendentemente dal sistema di riferimento scelto, poichè discende dallo scalare $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$.

Sviluppando il secondo scalare otteniamo

$$F^{*\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(a_\alpha k_\beta - a_\beta k_\alpha)(a_\nu k_\mu - a_\mu k_\nu)e^{2ik_\alpha x^\alpha} = 0 \tag{3.24}$$

il quale si annulla, in quanto abbiamo il prodotto tra un oggetto antisimmetrico ($\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$) e uno simmetrico ($(a_\alpha k_\beta - a_\beta k_\alpha)(a_\nu k_\mu - a_\mu k_\nu)$). Analogamente al caso precedente, ricordando l'Eq. (2.50), dall'Eq. (3.24) consegue

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{3.25}$$

Dunque, $\mathbf{E}$ è perpendicolare a $\mathbf{B}$ e, come nel caso precedente, tale proposizione è valida indipendentemente dal sistema di riferimento scelto.

In aggiunta, osserviamo che entrambi gli invarianti sono nulli, in questo caso si parla di *campo di radiazione.*

A titolo esemplificativo, consideriamo il caso in cui $\mathbf{k} \parallel z$, dunque $k^\mu = (k^0, 0, 0, k^3)$. Visto che k^μ è un vettore nullo, $(k^0)^2 - (k^3)^2 = 0$, per cui $k^3 = k^0$. Prendendo $A^\mu = a^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}$ in modo tale che venga soddisfatto il gauge di Lorentz, dall'Eq. (3.10) consegue che $a^0 = \frac{k^3 a^3}{k^0}$. A questo punto, come in Eq. (3.20), imponiamo una trasformazione attraverso una funzione armonica tale che $a'^0 = 0$, e conseguentemente anche $a'^3 = 0$ in quanto $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{a}' = k_3 a'^3 = 0$. Rimangono non nulle solo le componenti a'^1 e a'^2, ovvero le componenti lungo x e y, per cui trasverse a $\mathbf{k}$. Abbiamo così ritrovato in questo caso particolare le caratteristiche ottenute in precedenza.

Ricordiamo ora l'Eq. (2.51), che in assenza di sorgenti diviene

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{3.26}$$

e sostituiamovi l'Eq. (3.21)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -k_\mu (a^\nu k^\mu - a^\mu k^\nu) e^{ik_\alpha x^\alpha} \tag{3.27}$$

alla fine otteniamo

$$k_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{3.28}$$

Per $\nu = 0$, applicando l'Eq. (2.42), si ha

$$k_i F^{i0} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{3.29}$$

la quale implica che $\mathbf{E}$ è perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda. Per $\nu = i$, applicando le Eq. (2.42), (2.43) e (3.7) si ha

$$k_0 F^{0i} + k_j F^{ji} = |\mathbf{k}|\mathbf{E} + \mathbf{k} \times \mathbf{B} = 0 \tag{3.30}$$

da cui

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \tag{3.31}$$

Dalle equazioni omogenee in Eq. (2.54) possiamo invece notare che

$$k_\mu F^{*\mu\nu} = 0 \tag{3.32}$$

e ricordando l'Eq. (2.47), nel caso di $\nu = 0$, possiamo riscriverla come

$$k_\mu F^{*\mu 0} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{3.33}$$

Dalle Eq. (3.29), (3.31) e (3.33) notiamo che, non solo $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono perpendicolari tra di loro, come si era visto in Eq. (3.25), ma che sono perpendicolari anche alla direzione di propagazione, ovvero abbiamo che le onde elettromagnetiche sono *onde trasversali.* Pertanto evinciamo che $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{k}$ costituiscono una terna di vettori ortogonali.

In conclusione, a partire dall'equazione dell'onda piana come soluzione delle equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti, abbiamo ottenuto le proprietà che ci aspettavamo di ritrovare nel caso di onde elettromagnetiche. Ciò conferma la consistenza della trattazione matematica di tale problema, suggerendo che l'onda piana è un buon punto di partenza per una risoluzione coerente dell'equazione d'alembertiana $\Box A^\nu = 0$.

3.2 Sovrapposizione di onde piane

La soluzione proposta nel precedente paragrafo è una soluzione particolare; è di nostro interesse estendere tale trattazione al caso generale. La soluzione generale dell'Eq. (3.2) è infatti una sovrapposizione di onde piane, rappresentabile attraverso un integrale di Fourier come segue

$$A^\mu = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \delta(k^\mu k_\mu) a^\mu(\mathbf{k}) e^{ik_\alpha x^\alpha} \tag{3.34}$$

ove $\delta(k^\mu k_\mu)$ è una delta di Dirac inserita per assicurarsi che venga soddisfatta la condizione in Eq. (3.7).

Vogliamo ora assicurarci che A^μ sia reale per cui è necessario richiedere che

$$a^{*\mu}(\mathbf{k}) = a^\mu(-\mathbf{k}) \tag{3.35}$$

in cui l'asterisco indica il complesso coniugato di $a^\mu(\mathbf{k})$. Imponendo tale simmetria è assicurato che nello svolgimento dell'integrale i termini immaginari vengano cancellati.

All'interno dell'integrale separiamo i termini con $k^0 > 0$ e $k^0 < 0$. Per questo è necessario introdurre la funzione a gradino di Heaviside

$$\theta(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 & z > 0 \end{cases} \tag{3.36}$$

Riscriviamo l'Eq. (3.34) utilizzando l'Eq. (3.36) come segue

$$A^\mu = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \delta(k^\mu k_\mu) [\theta(k^0) a^\mu(\mathbf{k}) e^{ik_\alpha x^\alpha} + \theta(-k^0) a^\mu(\mathbf{k}) e^{ik_\alpha x^\alpha}] \tag{3.37}$$

e nel secondo addendo effettuiamo un cambiamento di variabile $k^0 \to -k^0$ per cui, applicando l'Eq. (3.35), si hanno le seguenti trasformazioni

$$a^\mu(\mathbf{k}) \to a^{*\mu}(\mathbf{k}) \tag{3.38}$$

$$\theta(-k^0) \to \theta(k^0) \tag{3.39}$$

$$e^{ik_\alpha x^\alpha} \to e^{-ik_\alpha x^\alpha} \tag{3.40}$$

Procedendo con la sostituzione, dall'Eq. (3.37) si ottiene

$$A^\mu = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \delta(k^\mu k_\mu) \theta(k^0) [a^\mu(\mathbf{k}) e^{ik_\alpha x^\alpha} + a^{*\mu}(\mathbf{k}) e^{-ik_\alpha x^\alpha}] \tag{3.41}$$

Sviluppiamo ora la delta di Dirac sfruttando la seguente proprietà della funzione: se la delta dipende da una funzione delle coordinate, dati i punti x_i tali che $g(x_i) = 0$ e indicando $g'(x_i)$ come la derivata prima di tale funzione, si ha

$$\delta[g(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} \tag{3.42}$$

Pertanto, riscriviamo $\delta(k^\mu k_\mu)$:

$$\delta(k^\mu k_\mu) = \delta[(k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2] = \delta[(k^0 + |\mathbf{k}|)(k^0 - |\mathbf{k}|)] = \frac{1}{2|\mathbf{k}|}[\delta(k^0 + |\mathbf{k}|) + \delta(k^0 - |\mathbf{k}|)] \quad (3.43)$$

All'interno dell'Eq. (3.41) la funzione $\delta(k^\mu k_\mu)$ viene moltiplicata per $\theta(k^0)$, ciò vuol dire che solo il secondo addendo dell'Eq. (3.43) ha supporto in quanto k^0 deve essere necessariamente positivo, dunque otteniamo che

$$\delta(k^\mu k_\mu)\theta(k^0) = \frac{1}{2|\mathbf{k}|}\delta(k^0 - |\mathbf{k}|) \quad (3.44)$$

Sostituiamo l'Eq. (3.44) nell'Eq. (3.41)

$$A^\mu = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2}\frac{1}{2|\mathbf{k}|}\delta(k^0 - |\mathbf{k}|)[a^\mu(\mathbf{k})e^{ik_\alpha x^\alpha} + a^{*\mu}(\mathbf{k})e^{-ik_\alpha x^\alpha}] \quad (3.45)$$

È ora possibile integrare su k^0 sfruttando le proprietà della delta, per cui $k^0 = |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}$ e si ottiene

$$A^\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2}\frac{1}{2\frac{\omega}{c}}[a^\mu(\mathbf{k})e^{ik_\alpha x^\alpha} + a^{*\mu}(\mathbf{k})e^{-ik_\alpha x^\alpha}] \quad (3.46)$$

Introduciamo ora una costante di normalizzazione, che verrà calcolata formalmente nel paragrafo 3.3

$$A^\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{2\pi c^2}{\omega}}[a^\mu(\mathbf{k})e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + a^{*\mu}(\mathbf{k})e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}] \quad (3.47)$$

Nel precedente paragrafo si era riflettuto sulla polarizzazione delle onde elettromagnetiche, in particolare sulle componenti rilevanti fisicamente. Vogliamo quindi trovare un modo formale per rappresentare anche in questo caso tali caratteristiche. In primo luogo, introduciamo un insieme completo di quadrivettori ortonormali $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})$ con $\lambda = 0, 1, 2, 3$ dipendenti dalla direzione di propagazione $\mathbf{k}$. Le ϵ devono dunque soddisfare la relazione di ortonormalità [1]

$$\epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(\mathbf{k}) = \eta^{\lambda\lambda'} \quad (3.48)$$

e quella di completezza

$$\sum_{\lambda=0}^{3}\sum_{\lambda'=0}^{3}\eta_{\lambda\lambda'}\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_\nu^{(\lambda')}(\mathbf{k}) = \eta_{\mu\nu} \quad (3.49)$$

ove η è stata introdotta nell'Eq. (1.3).

Gli ϵ sono versori nello spazio di Fourier associato allo spazio-tempo, per cui sono versori nello spazio-tempo duale.

Definiamo $\epsilon_\mu^{(0)}$ attraverso il quadrivettore unitario di tipo tempo n_μ

$$\epsilon_\mu^{(0)}(\mathbf{k}) = n_\mu \quad \text{con} \quad n_\mu n^\mu = 1 \quad (3.50)$$

[1]Per semplificare la notazione, con il punto si indicheremo il prodotto lorentziano.

Gli altri elementi sono qudrivettori di tipo spazio, di cui scegliamo $\epsilon_\mu^{(3)}(\mathbf{k})$ ortogonale a n_μ

$$\epsilon^{(3)}(\mathbf{k}) \cdot n = 0 \tag{3.51}$$

e giacente nel piano individuato da k_μ e n_μ

$$\epsilon_\mu^{(3)} = \alpha k_\mu + \beta n_\mu \tag{3.52}$$

Considerando l'Eq. (3.51) e (3.52) abbiamo

$$\epsilon^{(3)}(\mathbf{k}) \cdot n = \alpha k_\mu n^\mu + \beta n_\mu n^\mu = 0 \tag{3.53}$$

ma poichè n_μ è un quadrivettore unitario possiamo riscrivere l'Eq. (3.53) come

$$\alpha k_\mu n^\mu + \beta = 0 \tag{3.54}$$

ed esplicitando β

$$\beta = -\alpha k_\mu n^\mu \tag{3.55}$$

Dunque possimamo riscrivere $\epsilon_\mu^{(3)}$ come

$$\epsilon_\mu^{(3)}(\mathbf{k}) = \alpha[k_\mu - (k_\mu n^\mu) n_\mu] \tag{3.56}$$

Ricordando l'Eq. (3.48), sappiamo che $\epsilon^{(3)} \cdot \epsilon^{(3)} = -1$ da cui

$$\epsilon^{(3)} \cdot \epsilon^{(3)} = \alpha^2 [k_\mu - (k_\mu n^\mu) n_\mu][-k^\mu + (k_\mu n^\mu) n^\mu] = -\alpha^2 (k_\mu n^\mu)^2 = -1 \tag{3.57}$$

ove la penultima uguaglianza segue dall'Eq. (3.7). Possiamo dunque esplicitare α, che con una scelta di segno arbitraria diviene

$$\alpha = \frac{1}{k_\mu n^\mu} \tag{3.58}$$

Sostituendo nell'Eq. (3.56) si ha

$$\epsilon_\mu^{(3)}(\mathbf{k}) = \frac{[k_\mu - (k_\mu n^\mu) n_\mu]}{k_\mu n^\mu} \tag{3.59}$$

Determiniamo ora gli altri due vettori della base ortonormale, $\epsilon^{(1)}$ e $\epsilon^{(2)}$, i quali sono quadrivettori di tipo spazio ortogonali a k_μ e n_μ. Sfruttando l'Eq. (3.49) possiamo ricavare in funzione di k_μ e n_μ un'espressione esplicita che descriva tali componenti

$$\eta_{\mu\nu} = \epsilon_\mu^{(0)} \epsilon_\nu^{(0)} - \sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \epsilon_\nu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) - \epsilon_\mu^{(3)} \epsilon_\nu^{(3)} \tag{3.60}$$

Per cui riscriviamo

$$\eta_{\mu\nu} = n_\mu n_\nu - \sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \epsilon_\nu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) - \frac{[k_\mu - (k_\mu n^\mu) n_\mu]}{k_\mu n^\mu} \frac{[k_\nu - (k_\mu n^\mu) n_\nu]}{k_\mu n^\mu} \tag{3.61}$$

e in definitiva

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_\nu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = -\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{(k\cdot n)^2} + \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{k\cdot n} \tag{3.62}$$

Riportiamo un esempio di come possono essere determinati i versori della base ortonormale. Prendiamo $n^\mu = (1,0,0,0)$ con gli assi $k^\mu = (|\mathbf{k}|,0,0,|\mathbf{k}|)$. Considerando l'Eq. (3.50), $\epsilon^{(0)} = (1,0,0,0)$ mentre in virtù dell'Eq. (3.59)

$$\epsilon^{(3)} = \frac{(|\mathbf{k}|,0,0,|\mathbf{k}|) - |\mathbf{k}|(1,0,0,0)}{|\mathbf{k}|} = (0,0,0,1) \tag{3.63}$$

Possiamo completare la base ricordando l'Eq. (3.62) ottenendo $\epsilon^{(1)} = (0,1,0,0)$ e $\epsilon^{(2)} = (0,0,1,0)$.

Avendo definito la base $\{\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\}$, le ampiezze $a_\mu(\mathbf{k})$ possono essere scomposte

$$a_\mu(\mathbf{k}) = \sum_{\lambda=0}^{3} a_{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \tag{3.64}$$

e in questo caso la condizione di Lorentz $k^\mu a_\mu = 0$ fa sì che

$$0 = a_{(0)}\epsilon^{(0)}\cdot k + a_{(1)}\epsilon^{(1)}\cdot k + a_{(2)}\epsilon^{(2)}\cdot k + a_{(3)}\epsilon^{(3)}\cdot k \tag{3.65}$$

ove, ricordando l'Eq. (3.59) e il fatto che $\epsilon^{(1)}$ e $\epsilon^{(2)}$ sono ortogonali a k^μ, possiamo riscrivere

$$0 = a_{(0)}k\cdot n - a_{(3)}\frac{(k\cdot n)^2 - k^2}{k\cdot n} = a_{(0)}k\cdot n - a_{(3)}k\cdot n \tag{3.66}$$

da cui possiamo concludere che

$$a_{(0)}(\mathbf{k}) = a_{(3)}(\mathbf{k}) \tag{3.67}$$

A questo punto è possibile riscrivere l'Eq. (3.47) come segue

$$A^\mu = \sum_{\lambda=0}^{3}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{2\pi c^2}{\omega}}\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})[a_{(\lambda)}(k)e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + a^*_{(\lambda)}(\mathbf{k})e^{-i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}] \tag{3.68}$$

Quella appena indicata è la forma generale del quadripotenziale in assenza di sorgenti scomposto attraverso la base ortonormale $\{\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\}$.

A partire dal quadripotenziale possiamo chiederci quale sia l'espressione dei campi in questo caso e se rispetta le caratteristiche ritrovate alla fine del paragrafo precedente. In primo luogo riportiamo le equazioni di Maxwell scritte nella forma vettoriale in assenza di sorgenti

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{3.69}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{3.70}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 0 \tag{3.71}$$

$$\nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = 0 \tag{3.72}$$

Ricordando la seguente proprietà

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \tag{3.73}$$

e applicando il rotore all'Eq. (3.70) otteniamo

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = 0 \tag{3.74}$$

In virtù delle Eq. (3.69) e (3.72) possiamo riscrivere l'Eq. (3.74) come

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{3.75}$$

Con un procedimento analogo si ottiene la stessa equazione per il campo magnetico

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{3.76}$$

Possiamo osservare che tali equazioni hanno la stessa forma dell'Eq. (3.2), perciò la loro soluzione può essere scritta in forma analoga a quella del quadripotenziale in Eq. (3.47) come

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{2\pi c^2}{\omega}} [\mathscr{E}(\mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \mathscr{E}^*(\mathbf{k}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}] \tag{3.77}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{2\pi c^2}{\omega}} [\mathscr{B}(\mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \mathscr{B}^*(\mathbf{k}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}] \tag{3.78}$$

Dalle Eq. (3.69) e (3.71) possiamo evincere che le ampiezze $\mathscr{E}(\mathbf{k})$ e $\mathscr{B}(\mathbf{k})$ sono ortogonali alla direzione di propagazione $\mathbf{k}$, infatti

$$\mathbf{k} \cdot \mathscr{E}(\mathbf{k}) = 0 \tag{3.79}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathscr{B}(\mathbf{k}) = 0 \tag{3.80}$$

Sostituendo tali relazioni nell'Eq. (3.70) otteniamo un'espressione totalmente analoga all'Eq. (3.31), infatti

$$\mathscr{B}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \times \mathscr{E}(\mathbf{k}) \tag{3.81}$$

da cui consegue che

$$|\mathscr{E}(\mathbf{k})| = |\mathscr{B}(\mathbf{k})| \tag{3.82}$$

Considerando il gauge temporale, introdotto nell'Eq. (2.66), e applicandolo all'Eq. (2.29), si ha

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{3.83}$$

Vi possiamo sostituire le tre componenti spaziali dell'Eq. (3.47) ricavando

$$\mathscr{E}(\mathbf{k}) = i\frac{\omega}{c}\mathbf{a}(\mathbf{k}) \tag{3.84}$$

Per quanto riguarda il campo magnetico, poichè $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, si ha

$$\mathscr{B}(\mathbf{k}) = i\mathbf{k} \times \mathbf{a}(\mathbf{k}) \tag{3.85}$$

Anche in questa trattazione emerge che il campo magnetico, il campo elettrico e la direzione di propagazione dell'onda costituiscono una terna di vettori ortogonali avendo ottenuto espressioni totalmente analoghe a quelle trovate nel precedente paragrafo.

Visto che le componenti di interesse sono solo le trasverse a $\mathbf{k}$, consideriamo solo i versori di polarizzazione che con $\mathbf{k}$ costituiscono una terna ortogonale, quindi ϵ_1 e ϵ_2. Inoltre, data l'Eq. (3.64), sostituendola nelle Eq. (3.84) e (3.85), è possibile riscrivere infine le Eq. (3.77) e (3.78) come segue

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\lambda=1}^{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{2\pi c^2}{\omega}} \frac{i\omega}{c} \boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\mathbf{k}) [a_\lambda(\mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} - a_\lambda^*(\mathbf{k}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}] \tag{3.86}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\lambda=1}^{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{2\pi c^2}{\omega}} i [\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\mathbf{k})] [a_\lambda(\mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} - a_\lambda^*(\mathbf{k}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}] \tag{3.87}$$

Abbiamo così trovato le espressioni dei campi, che sono quantità vettoriali, in funzione delle tre componenti spaziali del potenziale. In questo modo, viene confermato che la risoluzione dell'equazione di D'Alembert attraverso una sovrapposizione di onde piane nello spazio di Fourier, è una descrizione coerente rispetto al caso semplice in cui si considera un'ona piana, in quanto emergono le stesse proprietà fisiche ritrovate nel paragrafo 3.1.

3.3 Normalizzazione

L'obiettivo della presente trattazione è la risoluzione dell'equazione

$$\Box A^\nu = 0 \tag{3.88}$$

Come indicato nel precedente paragrafo, un'insieme di soluzioni di tale equazione è quello delle onde piane

$$u_k = u_0 e^{ik_\alpha x^\alpha} = u_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \tag{3.89}$$

ove ricordiamo che $k_\mu k^\mu = 0$. Inoltre, imponiamo una relazione che le onde piane debbono soddisfare una relazione analoga a quella imposta in Eq. (3.35)

$$u_k^* = u_{-k} \tag{3.90}$$

A questo punto, è possibile definire un prodotto scalare tra due soluzioni dell'equazione di D'Alembert attraverso un integrale esteso su un'ipersuperficie $t = const$

$$(f_1, f_2) = -i \int_t d^3x \{f_1(\partial_t f_2^*) - (\partial_t f_1) f_2^*\} \tag{3.91}$$

Il prodotto scalare si conserva nel tempo, ovvero

$$\frac{d}{dt}(f_1, f_2) = 0 \tag{3.92}$$

Vogliamo ora che le onde piane siano ortonormali rispetto al prodotto scalare sopra definito, per cui

$$(u_k, u_{k'}) = 0 \quad \text{se} \quad k \neq k' \tag{3.93}$$

Innanzitutto indichiamo f e f^* come

$$f = Ae^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \tag{3.94}$$

$$f^* = A^* e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \tag{3.95}$$

e le loro derivate rispetto al tempo $\partial_t f = \frac{\partial f}{\partial t}$ e $\partial_t f^* = \frac{\partial f*}{\partial t}$ come

$$\partial_t f = -i\omega f \tag{3.96}$$

$$\partial_t f^* = i\omega f^* \tag{3.97}$$

Sostituiamo le precedenti equazioni nell'Eq. (3.91) e otteniamo

$$(f_1, f_2) = -i \int_t d^3x \{f_1(i\omega_2 f_2^*) - (-i\omega_1 f_1) f_2^*\} = \int_t d^3x (\omega_1 + \omega_2) f_1 f_2^* \tag{3.98}$$

Utilizzando le Eq. (3.94) e (3.95), riscriviamo $f_1 f_2^*$ come

$$f_1 f_2^* = |A|^2 e^{-i[(\omega_1 - \omega_2)t - (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{x}]} \tag{3.99}$$

Inserendo il termine appena ottenuto nell'Eq. (3.98) si ha

$$\begin{aligned}(f_1, f_2) = \int d^3x (\omega_1 + \omega_2)|A|^2 e^{-i[(\omega_1 - \omega_2)t - (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{x}]} = \\ = |A|^2 (\omega_1 + \omega_2) e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} \int d^3x e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{x}}\end{aligned} \tag{3.100}$$

Rimane da risolvere l'integrale $\int d^3x e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{x}}$, in particolare è possibile dimostrare che questo è strettamente correlato con la delta di Dirac nel seguente modo

$$\int d^3x e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \tag{3.101}$$

e sostituendo nell'Eq. (3.100) si ottiene

$$(f_1, f_2) = |A|^2 (\omega_1 + \omega_2) e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \tag{3.102}$$

Se $f_1 = f_2$, affinchè le funzioni siano ortonormali, è necessario richiedere che $(f_1, f_2) = \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$, inoltre si avrà che $\omega_1 = \omega_2$, per cui

$$|A|^2 2\omega_1 (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \tag{3.103}$$

Ciò implica infine che, con un'arbitraria scelta di segno, un'onda piana debba avere la seguente ampiezza per garantire la normalizzazione

$$|A| = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_1}} \propto \frac{1}{4\sqrt{\omega}} \tag{3.104}$$

omettendo nell'ultima parte la dipendenza da π e il pedice in ω_1.

Riprendendo ora l'Eq. (3.46), all'inizio dell'integrale la costante moltiplicativa è $\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{c}{2\omega}$. Il nostro obiettivo è riscriverla in modo tale da riscalare le ampiezze $a^\mu(\mathbf{k})$ di un fattore proporzionale a $\frac{1}{4\sqrt{\omega}}$, cosìcchè la normalizzazione venga soddisfatta. Riscriviamo allora tale fattore

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{c}{2\omega} \propto \frac{c}{8\omega} = \frac{c}{2\sqrt{\omega}}\frac{1}{4\sqrt{\omega}} \tag{3.105}$$

e notiamo che possiamo confrontare il primo fattore dell'ultima espressione con quello dell' Eq. (3.47) come segue

$$\frac{c}{2\sqrt{\omega}} \propto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{2\pi c^2}{\omega}} \tag{3.106}$$

In conclusione, abbiamo ottenuto formalmente il motivo per cui è necessario modificare il fattore moltiplicativo nella soluzione generale dell'equazione di D'Alembert. Tale aspetto ha una rilevanza dal punto di vista matematico in quanto lavoriamo con un sistema ortonormale, ovvero con il sistema delle onde piane.

Conclusioni

Nella presente tesi si è messo in luce come la formulazione relativistica dell'elettromagnetismo sia coerente con la sua fenomenologia. In particolare, a partire dalla trattazione del *framework* matematico della relatività speciale, prestando attenzione soprattutto al formalismo tensoriale, si è visto come quest'ultimo sia perfetta espressione dei due postulati della relatività: un'equazione tensoriale mantiene la stessa forma, indipendentemente da trasformazioni di Lorentz. Successivamente, si è visto che l'elettromagnetismo, di interesse in questo lavoro, sia esprimibile attraverso il formalismo tensoriale introducendo oggetti quali il quadripotenziale, il tensore del campo elettromagnetico e la quadricorrente, utili per la riformulazione delle equazioni di Maxwell. Si è visto così, che tali equazioni in assenza di sorgenti, avendo fissato il gauge di Lorentz, hanno la stessa forma dell'equazione di D'Alembert, la quale può essere risolta attraverso le onde piane. In un primo momento, risolvendo la suddetta equazione attraverso una singola onda piana, emergono le proprietà delle onde elettromagnetiche, in particolare applicando l'equazione dell'onda piana agli scalari associati al tensore del campo elettromagnetico. Estendendo la trattazione a una sovrapposizione di onde piane attraverso una trasformata di Fourier, tali proprietà vengono evidenziate in maniera del tutto analoga.

A partire da considerazioni essenzialmente matematiche, quindi, è stato possibile derivare aspetti fisicamente rilevanti nella teoria elettromagnetica, rendendo la riformulazione di tale teoria in ambito relativistico estremamente consistente. In questo caso, la matematica e la fisica si sono rivelate completamente complementari, in quanto la prima, in maniera particolarmente evidente nella riformulazione delle equazioni di Maxwell, porta alla luce la natura relativistica di tale teoria, prima semplicemente nascosta; gli aspetti fisici, invece, permettono di confermare l'aderenza alla realtà delle soluzioni proposte matematicamente.

Bibliografia

[1] Vincenzo Barone. *Relatività. Principi e applicazioni.* First Edition. Bollati Boringhieri, 2004. ISBN: 978-88-339-5757-9.

[2] John D. Jackson. *Classical Electrodynamics.* Third Edition. Wiley, 1998. ISBN: 978-0-471-30932-1.

[3] Lev D. Landau e Evgenij M.Lif˘sits. *Teoria dei campi.* Second Edition. Editori Riuniti Edizioni Mir, 1976.

[4] Fritz Rohrlich. *Classical Charged Particles.* Third Edition. World Scientific Publishing, 2007. ISBN: 978-981-270-004-9.

[5] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory.* Second Edition. Cambridge University Press, 1996. ISBN: 978-0-521-47814-4.