ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Matematica

Coomologia di de Rham e isomorfismo con la coomologia singolare

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Andrea Petracci

Presentata da:
Emanuele Pazzini

Anno Accademico 2023/2024

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è quello di analizzare il legame tra la topologia di una varietà e il suo complesso delle forme differenziali. Questo legame è espresso dal Teorema di de Rham, che si va a collocare in quella famiglia di teoremi che evidenziano un legame tra proprietà topologiche e differenziali delle varietà, quali i teoremi di Poincaré-Hopf o di Riemann-Roch. Nel primo capitolo introduciamo il problema in un contesto più semplice, analizzando il caso di 1-forme su aperti di $\mathbb{R}^n$, dando una prima debole versione del teorema di de Rham e mostrando come questo possa essere usato per il calcolo del primo gruppo di coomologia. Nel secondo capitolo diamo una definizione generale di forme differenziali su varietà, introducendo strumenti della teoria dei fasci tramite i quali potremo costruire per ogni k intero non negativo il fascio Ω^k_M delle k-forme differenziali su M. Nella seconda parte del capitolo costruiamo il differenziale esterno, che nel complesso coomologico delle forme giocherà il ruolo di differenziale. Il ponte tra la coomologia delle forme differenziali e la coomologia delle catene singolari è la possibilità di integrare le prime lungo le seconde. Per questa ragione nel terzo capitolo affrontiamo l'argomento dell'integrazione di forme. Più nello specifico, inizieremo definendo il concetto di orientabilità per una varietà differenziabile e vedremo come questo sia caratterizzabile attraverso il fascio delle forme di grado massimo. La possibilità di definire l'integrale di forme a supporto compatto su varietà orientate è un semplice argomento di partizioni dell'unità, che discutiamo nella seconda sezione. Concludiamo il terzo capitolo dando una dimostrazione del classico Teorema di Stokes, che generalizza il teorema fondamentale del calcolo integrale dell'analisi reale in una variabile. Nel quarto capitolo introduciamo finalmente la coomologia di de Rham, definendo forme chiuse ed esatte e sfruttando la semplice osservazione che tutte le forme esatte sono chiuse, vale a dire che per il differenziale esterno d vale la relazione $d \circ d = 0$. Nella prima sezione del capitolo ci dedichiamo esclusivamente a due risultati: la coomologia dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ e il classico teorema di Mayer-Vietoris. Queste proprietà della coomologia di de Rham sono tutto quello che serve per poter dimostrare il Teorema di de Rham. L'obiettivo della seconda sezione è quello di mostrare una versione del Teorema di Stokes che in questa tesi abbiamo denominato Teorema di Stokes per l'integrazione su catene, e che ci permetterà di dimostrare la buona positura della forma bilineare

$$H^k_{dR}(M) \times H_k(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad ([\omega], [c]) \mapsto \int_c \omega$$

e dell'omomorfismo di de Rham associato $\mathfrak{I}_M \colon H^k_{dR}(M) \to H^k(M, \mathbb{R})$, che definiamo nella terza sezione. Una volta dimostrato che quest'ultimo sia un isomorfismo, i risultati classici della topologia algebrica come la dualità di Poincaré, il teorema di Künneth e soprattutto l'invarianza per omotopia seguono. A questo punto avremo dimostrato quindi che la coomologia del complesso delle forme, costruito tramite strumenti differenziali, è in realtà un invariante topologico. Concludiamo la tesi mostrando qualche esempio di come l'utilizzo delle forme permetta di trovare piuttosto facilmente generatori per i gruppi di coomologia di varietà. L'importanza di questi esempi risiede nel fatto che, come nel caso del toro e dello spazio proiettivo complesso, questo permetta a sua volta di determinare l'anello di coomologia (a coefficienti reali) della varietà.

Indice

Introduzione **i**

1 Il caso delle 1-forme su aperti di $\mathbb{R}^n$ **1**

1.1 1-forme su aperti di $\mathbb{R}^n$ 1

1.2 Un primo accenno al Teorema di de Rham 6

2 Forme differenziali **9**

2.1 Forme differenziali su varietà 9

2.2 Differenziale esterno 16

3 Integrazione di forme su varietà **21**

3.1 Orientabilità 21

3.2 Integrazione 23

3.3 Teorema di Stokes 25

4 Coomologia **29**

4.1 Coomologia di de Rham 29

4.2 Integrazione di catene 34

4.3 Il teorema di de Rham 37

Bibliografia **47**

Capitolo 1

Il caso delle 1-forme su aperti di $\mathbb{R}^n$

1.1 1-forme su aperti di $\mathbb{R}^n$

Definizione 1.1.1. Dati un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, una *1-forma di classe* C^k su U è una applicazione $\omega\colon U \to (\mathbb{R}^n)^*$ della forma $\omega(x) = \sum_{k=1}^n \omega_i(x)dx_i$ dove le $\omega_i\colon U \to \mathbb{R}$ sono funzioni C^k e i dx_i sono gli elementi della base duale alla base canonica di $\mathbb{R}^n$. Se le ω_i sono continue, diremo che ω è una (1-)forma continua.

Quindi quello che una 1-forma fa è associare ad ogni punto del dominio U un elemento del duale con una certa regolarità C^k muovendosi lungo i punti di U. L'idea dietro alle più generali k-forme, che tratteremo a partire dalla Sezione 2.1, sarà analoga: ad ogni punto assoceremo non più un funzionale lineare, ma una forma multilineare alternante.

Definizione 1.1.2. Data ω una 1-forma su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, diremo che:

- ω è *esatta* se esiste $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 tale che $df = \omega$, con df il differenziale di f;
- ω è *localmente esatta* se esiste $\{U_\lambda\}_\lambda$ ricoprimento aperto di U tale che $\omega_{|U_\lambda}$ è esatta per ogni λ;
- ω è *chiusa* se è di classe C^1 e per ogni $1 \leq i, j \leq n$ vale
$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}.$$

Nota. Nel seguito, per *cammino* in uno spazio topologico X intenderemo una funzione continua $\gamma\colon [a, b] \to X$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.

Definizione 1.1.3. Data una forma localmente esatta ω su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e un cammino $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$, diremo che una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ è una *primitiva di ω lungo*

γ se f è continua e soddisfa la seguente condizione: per ogni $t \in [a,b]$, esiste V intorno di $\gamma(t)$ in U tale che $\omega_{|V}$ sia esatta con primitiva $F\colon V \to \mathbb{R}$ e $f_{|\gamma^{-1}(V)} = F \circ \gamma_{|\gamma^{-1}(V)}$.

Proposizione 1.1.4. Data una 1-forma localmente esatta ω su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e un cammino continuo $\gamma\colon [a,b] \to U$, esiste una primitiva di ω lungo γ e questa è unica a meno di una costante additiva.

Dimostrazione. Sia $\{U_\lambda\}_\lambda$ un ricoprimento aperto tale che $\omega_{|U_\lambda}$ sia localmente esatta per ogni λ. Siccome $[a,b]$ è uno spazio metrico compatto e γ è continuo, per il teorema del numero di Lebesgue [Man15, Teorema 11.23] esistono $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ tali che $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ per ogni $i = 0, \ldots, n-1$ e per qualche U_i nel ricoprimento; osserviamo che $\gamma(t_{i+1}) \in U_i \cap U_{i+1}$. Sia F_i una primitiva di $\omega_{|U_i}$; a meno di sommare una costante a F_{i+1} possiamo assumere $F_i(t_{i+1}) = F_{i+1}(t_{i+1})$. Definiamo ora $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(t) = F_i(\gamma(t))$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$. La funzione così definita è continua ed è una primitiva di ω lungo γ. Se g è un'altra primitiva di ω lungo γ, per definizione ogni $t \in [a,b]$ ammette un intorno su cui $f - g$ è costante. Ma allora $f - g$ è localmente costante su un insieme connesso, dunque è costante. □

Diamo ora la definizione di integrale di una 1-forma lungo un cammino:

Definizione 1.1.5. Sia ω una 1-forma su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\gamma\colon [a,b] \to U$ un cammino; diamo le seguenti definizioni di *integrale di ω lungo γ*:

1. se ω è localmente esatta, poniamo

$$\int_\gamma \omega := f(b) - f(a). \tag{1.1}$$

   dove f è una primitiva di ω lungo γ;

2. se γ è C^1 a tratti, poniamo

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))\, dt. \tag{1.2}$$

Osservazione 1.1.6. Le due definizioni di integrale date in (1.1) e (1.2) sono ben poste. Nel caso in cui ω sia localmente esatta, l'esistenza di una primitiva f di ω lungo γ è garantita dalla Proposizione 1.1.4, da cui segue anche che la quantità $f(b) - f(a)$ non dipende dalla primitiva considerata. Per la seconda basta osservare che l'integrando è una funzione almeno continua, dunque integrabile. Inoltre, le definizioni sono compatibili. Infatti, dati ω localmente esatta e γ un cammino C^1 a tratti, possiamo considerare $U_0, \ldots, U_n$ aperti tali che $\omega_{|U_i}$ sia esatta e una sequenza di punti $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$

tali che $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$. Come nella Proposizione 1.1.4, sia f la primitiva data da $f(t) = F_i(\gamma(t))$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Allora

$$\int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))\, dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (F_i \circ \gamma)'(t)\, dt = f(b) - f(a).$$

Osservazione 1.1.7. Nel caso particolare in cui ω sia una forma esatta con primitiva F su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiaro che, fissato un cammino $\gamma\colon [a, b] \to U$, una primitiva di ω lungo questo cammino è la composizione $F \circ \gamma$. Allora vale anche che $\int_\gamma \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. In particolare vale quindi che se ω è esatta in U, il suo integrale lungo un qualsiasi cammino chiuso in U è nullo.

Esempio 1.1.8. Su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ consideriamo la 1-forma $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$. Questa è chiusa, perché è C^1 e vale $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{-y}{x^2+y^2}) = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2})$. Tuttavia non è esatta: per vederlo basta integrare la forma lungo il cammino chiuso $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, ottenendo $\int_\gamma \omega = 2\pi \neq 0$. L'Osservazione 1.1.7 ci dice allora che ω non può essere esatta.

Esempio 1.1.9. Imitando l'Esempio 1.1.8 possiamo definire forme chiuse ma non esatte su $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$: basta considerare $\omega_i = \frac{-y+y_i}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}dx + \frac{x-x_i}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}dy$ (con $p_i = (x_i, y_i)$) e restringerla ad U. Come sopra, queste forme sono chiuse ma non esatte.

Vogliamo ora dare una caratterizzazione delle forme chiuse; ricordiamo il seguente risultato.

Lemma 1.1.10. Sia ω una 1-forma chiusa su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ stellato. Allora ω è esatta.

Dimostrazione. Fissato $\overline{x}$ il punto rispetto al quale U è stellato, per ogni $x \in U$ sia $\gamma_x\colon [0, 1] \to U$, $\gamma_x(t) = \overline{x} + t(x - \overline{x})$. Vogliamo mostrare che la funzione data da $F\colon U \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{\gamma_x} \omega$$

è una primitiva di ω in U. Per ogni $1 \leq k \leq n$ e $x \in U$ fissati, definiamo $G_k(t) = \omega_k(\gamma_x(t))$. Allora

$$G_k'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_k}{\partial x^i}(\gamma_x(t)) \cdot (x_i - \overline{x}_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k}(\gamma_x(t)) \cdot (x_i - \overline{x}_i)$$

da cui

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}(\omega_j(\gamma_x(t)) \cdot (x_j - \overline{x}_j))\, dt \\
&= \int_0^1 \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^k}[\omega_j(\overline{x} + t(x - \overline{x}))] \cdot (x_j - \overline{x}_j) + \omega_k(\overline{x} + t(x - \overline{x})) \right\} dt \\
&= \int_0^1 G'(t)t + G(t)\, dt = 1 \cdot G_k(1) - 0 \cdot G_k(0) \\
&= \omega_k(x)
\end{aligned}
$$

□

Proposizione 1.1.11. Una 1-forma ω definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiusa se e solo se è di classe C^1 e localmente esatta.

Dimostrazione. Se ω è chiusa, basta applicare il Lemma 1.1.10 ad ogni palla aperta contenuta in U. Viceversa, sia $\{U_\lambda\}_\lambda$ un ricoprimento aperto di U tale che per ogni λ $\omega_{|U_\lambda}$ è esatta su U_λ con primitiva F_λ, di classe C^2 perché ω è di classe C^1. Allora per ogni λ vale che

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$$

da cui la tesi. □

Teorema 1.1.12. Sia ω una 1-forma localmente esatta su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e siano γ_1, γ_2 : $[a, b] \to U$ due cammini omotopi (tramite un'omotopia a estremi fissati). Allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Dimostrazione. Sia $\delta\colon [0, 1] \times [0, 1] \to U$ un'omotopia ad estremi fissati tra γ_1 e γ_2 e sia $\{U_\lambda\}_\lambda$ un ricoprimento aperto tale che $\omega_{|U_\lambda}$ sia esatta per ogni λ. Siccome δ è continua con dominio uno spazio metrico compatto, per il teorema del numero di Lebesgue esistono due sequenze $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ e $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ tali che per ogni $0 \leq i, j \leq n - 1$, valga $\delta([t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]) \subset U_{\lambda_{i,j}}$ per qualche $\lambda_{i,j}$. Possiamo quindi considerare, per ogni i, j, una primitiva di $\omega_{|U_{\lambda_{i,j}}}$, $F_{i,j}\colon U_{\lambda_{i,j}} \to \mathbb{R}$. Fissato j, a meno di sommare una costante possiamo assumere $F_{i,j} \circ \delta_{|\{t_{i+1}\} \times [s_j, s_{j+1}]} = F_{i+1,j} \circ \delta_{|\{t_{i+1}\} \times [s_j, s_{j+1}]}$ e definire $f_j\colon [a, b] \times [s_j, s_{j+1}] \to \mathbb{R}$, $f_j(t, s) = F_{i,j}(\delta(t, s))$ per $t \in [t_i, t_{i+1}]$. In questo modo, per ogni s fissato $f(\cdot, s)$ è una primitiva di ω lungo $\delta(\cdot, s)$. Per concludere, a meno di sommare delle costanti possiamo assumere $f_j(\cdot, s_{j+1}) = f_{j+1}(\cdot, s_{j+1})$ per ogni $j < n$ (sono entrambe primitive di ω lungo $\delta(\cdot, s_{j+1})$ e incollando otteniamo una funzione $f\colon [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ tale che $f(\cdot, s)$ è una primitiva di ω lungo $\delta(\cdot, s)$ per ogni $s \in [0, 1]$).

Ma δ è un'omotopia ad estremi fissati, dunque $\int_{\delta(\cdot,s)} \omega = f(1,s) - f(0,s)$ non dipende da s. La tesi segue. □

Teorema 1.1.13. Sia ω una 1-forma localmente esatta su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora sono equivalenti le seguenti:

1. ω è esatta;

2. per ogni cammino chiuso $\gamma \colon [0,1] \to U$, si ha che $\int_\gamma \omega = 0$.

Dimostrazione. Se ω è esatta su U allora possiamo considerare una sua primitiva $F \colon U \to \mathbb{R}$ (unica a meno di costante additiva) e ottenere che per ogni γ cammino chiuso, $\int_\gamma \omega = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0$. Viceversa supponiamo sia vera (2). Fissati $x, y \in U$ definiamo $\Omega(U,x,y)_{\text{aff}}$ l'insieme dei cammini dal punto x al punto y tali che esistano $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ con $\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}$ parallelo ad uno degli assi cartesiani di $\mathbb{R}^n$. Allora per ipotesi, per ogni $\gamma \in \Omega(U,x,x)_{\text{aff}}$, $\int_\gamma \omega = 0$. Fissiamo ora $x_0 \in U$ e definiamo $F \colon U \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{\gamma_x} \omega$ con $\gamma_x \in \Omega(U,x_0,x)_{\text{aff}}$. Osserviamo che la buona positura della funzione, cioè l'indipendenza dal cammino scelto, è garantita da (2). Mostriamo ora che $\frac{\partial F}{\partial x_j} = \omega_j$ per ogni $j = 1, \dots, n$: siano $x \in U$ e $h \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ tali che la palla aperta di raggio $|h|$ e centro x sia contenuta in U e consideriamo il cammino $\gamma(t) = x + the_j$. Allora $\gamma_x * \gamma \in \Omega(U, x_0, x + he_j)$ e

$$F(x+he_j) - F(x) = \int_\gamma \omega = \int_0^1 \omega_j(x+the_j)h\,dt = \int_0^h \omega_j(x+se_j)\,ds.$$

Per continuità di ω_j, per il teorema della media integrale applicato alla funzione $[0,h] \ni s \mapsto \omega_j(x+se_j) \in \mathbb{R}$ esiste $0 < \xi < h$ tale che $\frac{1}{h}\int_0^h \omega_j(x+se_j)\,ds = \omega_j(x+\xi e_j)$. Sempre per continuità di ω_j abbiamo allora che $\frac{\partial F}{\partial x_j} = \omega_j$, da cui la tesi. □

Due conseguenze dirette del risultato precedente e del Teorema 1.1.12 sono i seguenti corollari.

Corollario 1.1.14. Siano ω una 1-forma localmente esatta su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso, $x_0 \in U$ un punto e $\mathcal{F}$ un insieme di cammini chiusi in U con punto base x_0 le cui classi di omotopia generano $\pi_1(U, x_0)$. Allora ω è esatta se e solo se $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni $\gamma \in \mathcal{F}$.

Corollario 1.1.15. Se ω è una 1-forma localmente esatta su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ semplicemente connesso, allora ω è esatta.

1.2 Un primo accenno al Teorema di de Rham

Gli ultimi risultati nella sezione precedente evidenziano un legame tra la topologia dell'aperto U (e in particolare il suo tipo di omotopia) e il comportamento delle forme definite su U. L'obiettivo di questa tesi sarà proprio di esprimere in forma rigorosa e più completa la natura di questo legame. Concludiamo questo capitolo approfondendo questo aspetto riformulandolo in termini più espliciti, dando una prima (debole) versione del più generale teorema di de Rham.

Definizione 1.2.1. Dato un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, indichiamo con $Z^1(U)$ lo spazio vettoriale reale delle 1-forme localmente esatte su U e con $B^1(U)$ quello delle 1-forme esatte. Il *primo gruppo di coomologia di de Rham di* U è il quoziente $H^k_{dR}(U) = \frac{Z^1(U)}{B^1(U)}$.

Definizione 1.2.2. Se G è un gruppo, definiamo il *sottogruppo derivato* di G come il sottogruppo G' generato dall'insieme dei commutatori $aba^{-1}b^{-1}$ e l'*abelianizzato* di G come il gruppo quoziente G/G'.

Ricordiamo che se U è connesso per archi allora c'è un isomorfismo tra il primo gruppo di omologia singolare a coefficienti in $\mathbb{Z}$ di U e l'abelianizzazione del gruppo fondamentale di U in un punto x_0, ottenuto a partire dall'omomorfismo $h\colon \pi_1(U, x_0) \to H_1(U, \mathbb{Z})$ che vede i cammini chiusi come 1-cicli [Hat02, Teorema 2A.1]. In questa sezione identificheremo quindi $H_1(U, \mathbb{Z})$ con $\pi_1(U, x_0)^{\mathrm{ab}}$ e diremo che due cammini chiusi sono *omologhi* in U se sono equivalenti in $H_1(U, \mathbb{Z})$. Vale il seguente:

Teorema 1.2.3. Se ω è una 1-forma localmente esatta su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e se γ_1 e γ_2 sono cammini omologhi in U allora $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

Dimostrazione. Preso $\gamma \in \Omega(U, \gamma_1(0), \gamma_2(0))$, definiamo $\tilde{\gamma} := \gamma_1 * \gamma * i(\gamma_2) * i(\gamma)$. Siccome γ_1 e γ_2 sono omologhi, la classe di omologia di $\tilde{\gamma}$ è banale ed esistono quindi cammini $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_r, \beta_r \in \Omega(U, \gamma_1(0), \gamma_1(0))$ tali che $\tilde{\gamma}$ sia omotopo a $\alpha_1 * \beta_1 * i(\alpha_1) * i(\beta_1) * \cdots * \alpha_k * \beta_k * i(\alpha_k) * i(\beta_k)$. Allora per il Teorema 1.1.12

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\alpha_i * \beta_i * i(\alpha_i) * i(\beta_i)} \omega = 0. \qquad \square$$

Da questo teorema possiamo raffinare il Corollario 1.1.14:

Corollario 1.2.4. Sia ω una 1-forma localmente esatta su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso e sia $\mathcal{F}$ un insieme di cammini chiusi le cui classi di omologia generano il gruppo abeliano $H_1(U, \mathbb{Z})$. Allora ω è esatta se e solo se $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni $\gamma \in \mathcal{F}$.

Osservazione 1.2.5. Fissata una 1-forma localmente esatta ω su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e fissato un punto $x \in U$, possiamo definire una funzione $\int \omega \colon \Omega(U, x, x) \to \mathbb{R}$, $\gamma \mapsto \int_\gamma \omega$.

Proposizione 1.2.6. Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto e connesso, allora la mappa descritta nell'Osservazione 1.2.5 induce un omomorfismo iniettivo di spazi vettoriali reali

$$\mathfrak{I} \colon H^1_{dR}(U) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(U, \mathbb{Z}), \mathbb{R}), \ [\omega] \mapsto \int_{(\cdot)} \omega.$$

Dimostrazione. Grazie all'Osservazione 1.1.7 e al Teorema 1.2.3 sappiamo che la mappa descritta sopra è ben posta come omomorfismo da $H^1_{dR}(U)$ in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(U, \mathbb{Z}), \mathbb{R})$. Se $\mathcal{F}$ è un insieme di cammini chiusi in U le cui classi di omologia generano $H_1(U, \mathbb{Z})$ e se ω è una forma localmente esatta tale che $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni $\gamma \in \mathcal{F}$, per il Corollario 1.2.4 ω è esatta, dunque nulla in coomologia. Quindi la mappa $\mathfrak{I}$ è un omomorfismo iniettivo. $\square$

Un fatto che dimostreremo più avanti è che l'omomorfismo descritto sopra è in realtà biettivo. L'obiettivo principale di questa tesi è quello di estendere questo risultato, dimostrando più in generale che la coomologia delle k-forme su varietà differenziabili è isomorfa alla coomologia singolare a coefficienti in $\mathbb{R}$. Questo risultato è solitamente noto come Teorema di de Rham.

Esempio 1.2.7. Anche senza appellarci al più generale Teorema di de Rham, l'iniettività dell'applicazione $\mathfrak{I}$ ci dà già informazioni sufficienti per calcolare il primo gruppo di coomologia degli aperti degli Esempi 1.1.8 e 1.1.9: per il primo, sappiamo che $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, dunque $\mathrm{Hom}(H_1(U, \mathbb{Z}), \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ e abbiamo trovato una forma chiusa ma non esatta su U, dunque $H^1_{dR}(U) \cong \mathbb{R}$. Allo stesso modo nel secondo, $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$, quindi $\mathrm{Hom}(H_1(U, \mathbb{Z}), \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$ e abbiamo trovato n forme chiuse ma non esatte su U le cui classi di coomologia sono linearmente indipendenti, dunque $H^1_{dR}(U) \cong \mathbb{R}^n$.

Esempio 1.2.8. Vogliamo calcolare il primo gruppo di coomologia dell'aperto $U = \mathbb{R}^3 \setminus C$ con $C = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$; per farlo sfrutteremo la forma dell'Esempio 1.1.8. Siano $V = ((0, +\infty) \times \mathbb{R}) \setminus \{(1, 0)\}$ con coordinate (r, z) e $\omega = \frac{-z}{(r-1)^2+z^2} dz + \frac{r-1}{(r-1)^2+z^2} dr$. Detto γ il generatore del gruppo fondamentale di V otteniamo che ω è chiusa ma non è esatta, in quanto $\int_\gamma \omega \neq 0$ e dunque la sua classe di coomologia genera $H^1_{dR}(V)$. Osserviamo che la funzione $f \colon (0, 1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(r, z) = \arctan(\frac{z}{r-1})$ è tale che $\omega_{|(0,1)\times\mathbb{R}} = df$. Consideriamo una funzione $\rho \colon (0, +\infty) \to [0, 1]$ di classe C^∞ con $\rho^{-1}((0, 1]) = (0, \frac{3}{4})$, e $\rho_{|(0, \frac{1}{2})} \equiv 1$ e definiamo $\tilde{f} \colon V \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(r, z) = \begin{cases} \rho(r) f(r, z) & \text{se } 0 < r < 1 \\ 0 & \text{se } r > \frac{3}{4} \end{cases}$$

e $\tilde{\omega} = \omega - d\tilde{f}$. Per $r \in (0, \frac{1}{2})$, si ha che $\tilde{f}(r,z) = f(r,z)$, quindi la 1-forma $\tilde{\omega} = \omega - df$ definita su V è uguale a 0 se ristretta a $(0, \frac{1}{2}) \times \mathbb{R}$; inoltre $\tilde{\omega}$ è chiusa e vale $[\omega] = [\tilde{\omega}]$ in coomologia, in quanto $\omega - \tilde{\omega} = d\tilde{f} \in B^1(V)$. Osserviamo che la classe di omotopia del cammino chiuso $\gamma\colon [0,1] \to V$, $\gamma(t) = \frac{1}{2}(\cos(2\pi t) + 1, \sin(2\pi t))$ genera $\pi_1(V, (\frac{3}{2}, 0))$ e che $\int_\gamma \tilde{\omega} = \int_\gamma \omega = 2\pi$. Per finire, definiamo su U la 1-forma τ data da $\tau(x,y,z)(v) = \tilde{\omega}(\varphi(x,y,z))(d\varphi_{(x,y,z)}(v))$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$, con $\varphi\colon U \to V, (x,y,z) \mapsto (\sqrt{x^2+y^2}, z)$, che ha differenziale

$$d\varphi_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa è ancora C^∞. Inoltre è ancora localmente esatta. Infatti, se $A \subseteq V$ è un aperto e $g\colon A \to \mathbb{R}$ è tale che $dg = \tilde{\omega}_{|A}$ allora $g \circ \varphi\colon \varphi^{-1}(A) \to \mathbb{R}$ è tale che

$$\begin{aligned}
&d(g \circ \varphi)(x,y,z)(v) \\
&\quad = \frac{\partial g}{\partial r}(\varphi(x,y,z))\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx(v) + \frac{\partial g}{\partial r}(\varphi(x,y,z))\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy(v) + \frac{\partial g}{\partial z}(\varphi(x,y,z))dz(v) \\
&\quad = \tilde{\omega}(\varphi(x,y,z))\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}v_1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}v_2\ ,\ v_3\right) \\
&\quad = \tilde{\omega}(\varphi(x,y,z))(d\varphi_{(x,y,z)}(v)) = \tau_{|\varphi^{-1}(A)}(x,y,z)(v).
\end{aligned}$$

Dunque τ è ancora chiusa. Infine τ è non nullo in coomologia, perché detto $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to U$, $\tilde{\gamma}(t) = \frac{1}{2}(\cos(2\pi t) + 1, 0, \sin(2\pi t))$ il cammino chiuso la cui classe di omotopia genera $\pi_1(U, (\frac{3}{2}, 0, 0))$, vale che $\tau(\tilde{\gamma}(t))(\tilde{\gamma}'(t)) = \tilde{\omega}(\varphi(\tilde{\gamma}(t))(d\varphi_{\tilde{\gamma}(t)}\tilde{\gamma}'(t)) = \tilde{\omega}(\gamma(t))(\gamma'(t))$, da cui $\int_{\tilde{\gamma}} \tau = \int_\gamma \tilde{\omega} = 2\pi \neq 0$. Ma $H_1(U, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, dunque $H^1_{dR}(U) \cong \mathbb{R}$.

Capitolo 2

Forme differenziali

2.1 Forme differenziali su varietà

Vogliamo ora dare una definizione di forma differenziale che sia adeguata ad una qualsiasi varietà differenziabile M. Nel seguito, un multi indice I sarà una collezione di indici crescenti, cioè $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$. Sia $(U, (x^i))$ una carta locale per M, $V \subseteq U$ un aperto e per ogni $p \in V$ fissato definiamo $dx_p^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_p^{i_k}$ la k-forma multilineare alternante su T_pM che vale 1 su $(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}|_p)$ o su una sua permutazione pari, -1 su una sua permutazione dispari e 0 altrimenti. Con un po' di algebra lineare è facile mostrare che l'insieme $\{dx_p^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_p^{j_k}\}_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n}$ forma una base di $\mathrm{Alt}_k(T_pM)$, l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale delle k-forme multilineari alternanti su T_pM. Fissato $V \subseteq U$, denotiamo con dx^I la funzione $V \ni p \mapsto dx_p^I = dx_p^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_p^{i_k} \in \mathrm{Alt}_k(T_pM)$ e data una funzione $f \colon V \to \mathbb{R}$ definiamo la moltiplicazione di dx^I per f come segue: $(f dx^I)(p) = f(p) dx_p^I$. Con queste possiamo definire $\Omega_U^k(V)$ come il $C^\infty(V)$-modulo libero con base $\{dx^I \mid I \subseteq \{1, \ldots, n\}, |I| = k\}$. Se fossimo in $\mathbb{R}^n$, potremmo fermarci qui: una k-forma differenziale sarebbe un qualunque elemento di $\Omega_{\mathbb{R}^n}^k(V)$, dove la carta locale che stiamo usando è $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$. Tuttavia anche in questo caso non sarebbe chiaro cosa succede ad una forma quando si cambiano coordinate. Nel caso di varietà differenziabili il problema è ancora più evidente: se vogliamo poter definire una forma differenziale su tutta la varietà definendola sulle carte della sua struttura differenziabile, dobbiamo assicurarci che sulle intersezioni di domini coordinati la definizione che abbiamo dato sia consistente. Per poterlo fare, introduciamo un po' di terminologia e qualche risultato dalla teoria dei fasci:

Definizione 2.1.1. Sia R un anello commutativo. Un *prefascio* $\mathcal{F}$ di R-moduli su uno spazio topologico X è il dato di:

- per ogni U aperto di X, un R-modulo $\mathcal{F}(U)$;

- per ogni coppia di aperti $U, V \subseteq X$ con $U \subseteq V$, un omomorfismo di R-moduli $\rho_{V,U} \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$;

tali che valgano le seguenti proprietà:

1. per ogni aperto $U \subseteq X$, $\rho_{U,U} = id_{\mathcal{F}(U)}$;

2. se $W \subseteq U \subseteq V$ sono aperti di X allora $\rho_{U,W} \circ \rho_{V,U} = \rho_{V,W}$.

Brevemente, un prefascio su X è un funtore controvariante $\mathcal{F}$ dalla categoria $\mathrm{Op}(X)$ degli aperti di X con i morfismi dati dalle inclusioni nella categoria degli R-moduli. Gli elementi di $\mathcal{F}(U)$ si chiamano *sezioni* di $\mathcal{F}$ su U e gli omomorfismi $\rho_{U,V}$ *omomorfismi di restrizione*. In modo del tutto analogo si può dare la definizione di prefasci di gruppi abeliani, anelli, spazi vettoriali, eccetera. Se $U \subseteq X$ è aperto e $\mathcal{F}$ è un prefascio su X indichiamo con $\mathcal{F}_{|U}$ la restrizione del funtore $\mathcal{F}$ agli aperti di U; questo è un prefascio su U.

In caso si stiano trattando più prefasci contemporaneamente useremo la notazione $\rho^{\mathcal{F}}_{V,U}$ per indicare i morfismi $\rho_{V,U}$ relativi al prefascio $\mathcal{F}$. Se $s \in \mathcal{F}(V)$ e $U \subseteq V$ useremo anche la notazione $s_{|U} \coloneqq \rho_{V,U}(s) \in \mathcal{F}(U)$

Definizione 2.1.2. Un prefascio $\mathcal{F}$ su uno spazio topologico X si dice *fascio* se per ogni aperto $U \subseteq X$ e per ogni ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di U valgono le seguenti:

1. se $f \in \mathcal{F}(U)$ è tale che $\rho_{U,U_i}(f) = 0$ per ogni i allora $f = 0$;

2. se $\{f_i\}$ è una collezione di sezioni con $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ per ogni i e se per ogni i e j vale che $\rho_{U_i,U_i \cap U_j}(f_i) = \rho_{U_j,U_i \cap U_j}(f_j)$, allora esiste $f \in \mathcal{F}(U)$ tale che $\rho_{U,U_i}(f) = f_i$.

Osserviamo che la (1) implica l'unicità della sezione f in (2).

Esempio 2.1.3. Data una funzione continua tra spazi topologici $f \colon X \to Y$ e un fascio $\mathcal{F}$ su X, possiamo definire il fascio *immagine diretta* o *pushforward* su Y, indicato con $f_*\mathcal{F}$, ponendo per ogni aperto $U \subseteq Y$, $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ e per ogni coppia di aperti $U, V \subseteq Y$ con $U \subseteq V$, $\rho^{f_*\mathcal{F}}_{V,U} = \rho^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V),f^{-1}(U)}$. Si verifica che $f_*\mathcal{F}$ è un fascio.

Esempio 2.1.4. Se M è una varietà differenziabile, possiamo considerare il fascio C^k_M che all'aperto $U \subseteq M$ associa l'anello delle funzioni su U a valori in $\mathbb{R}$ di classe C^k.

Definizione 2.1.5. Se $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sono prefasci su uno spazio topologico X, un *omomorfismo di prefasci* è una collezione, per ogni aperto $U \subseteq X$, di omomorfismi $\varphi_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ che commutino con gli omomorfismi di restrizione di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$. Un omomorfismo di prefasci si dirà essere un isomorfismo se ogni φ_U lo è. Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono fasci si parlerà di *omomorfismi di fasci*.

Esempio 2.1.6. Dato un prefascio $\mathcal{F}$ su uno spazio topologico X, definiamo la *spiga dei germi* di $\mathcal{F}$ nel punto $x \in X$ come il limite diretto

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

Il *germe di* $s \in \mathcal{F}$ *in* x è la classe di equivalenza di s in $\mathcal{F}_x$. Per ogni sottoinsieme $Y \subseteq X$ definiamo $\Gamma(Y, \mathcal{F})$ come l'insieme delle funzioni $f \colon Y \to \coprod_{y \in Y} \mathcal{F}_y$ che soddisfano:

1. $f(y) \in \mathcal{F}_y$ per ogni $y \in Y$;
2. per ogni $y_0 \in Y$, esistono un intorno aperto V di y_0 in Y e un elemento $s \in \mathcal{F}(V)$ tali che per ogni $y \in V$ valga $f(y) = s_y$.

Chiaramente $U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{F})$ definisce un prefascio su X, e ogni $s \in \mathcal{F}(V)$ con $V \subseteq X$ aperto definisce un elemento di $\Gamma(V, \mathcal{F})$ dato dalla funzione $x \mapsto s_x$, quindi abbiamo un omomorfismo di prefasci $\phi \colon \mathcal{F} \to \Gamma(-, \mathcal{F})$. Non è difficile mostrare che $\Gamma(-, \mathcal{F})$ è in realtà un fascio, detto il *fascificato* di $\mathcal{F}$ e che $\phi \colon \mathcal{F} \to \Gamma(-, \mathcal{F})$ è un isomorfismo di prefasci se e solo se $\mathcal{F}$ è un fascio.

Esempio 2.1.7. Dati due fasci $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ su uno spazio topologico X e un omomorfismo di fasci $\phi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, possiamo considerare i prefasci $\mathrm{Ker}\ \phi(U) = \mathrm{Ker}\ \phi_U$ e $\overline{\mathrm{Im}\ \phi}(U) = \mathrm{Im}\ \phi_U$, con U aperto in X, con i morfismi di restrizione dati da quelli di $\mathcal{F}$ per $\mathrm{Ker}\ \phi$ e di $\mathcal{G}$ per $\overline{\mathrm{Im}\ \phi}$. Il prefascio $\mathrm{Ker}\ \phi$ è un fascio, mentre $\overline{\mathrm{Im}\ \phi}$ in generale non lo è; per questo al suo posto si considera il fascio $\mathrm{Im}\ \phi := \Gamma(-, \overline{\mathrm{Im}\ \phi})$.

Definizione 2.1.8. Sia $\mathcal{A}$ un fascio di anelli su uno spazio topologico X. Un *prefascio di* $\mathcal{A}$*-moduli su* X è il dato di:

- per ogni aperto U di X, un $\mathcal{A}(U)$-modulo $\mathcal{F}(U)$;
- per ogni coppia di aperti U e V di X con $U \subseteq V$, un omomorfismo di gruppi abeliani $\rho_{V,U} \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$;

tali che valgano le seguenti proprietà:

1. per ogni aperto U di X, $\rho_{U,U} = id_{\mathcal{F}(U)}$;
2. se $W \subseteq U \subseteq V$ sono aperti di X allora $\rho_{U,W} \circ \rho_{V,U} = \rho_{V,W}$;
3. se $U \subseteq V$ sono aperti di X e consideriamo $s \in \mathcal{F}(V)$ e $a \in \mathcal{A}(V)$ allora $\rho^{\mathcal{A}}_{V,U}(a)\rho^{\mathcal{F}}_{V,U}(s) = \rho^{\mathcal{F}}_{V,U}(as)$.

In particolare, un prefascio di $\mathcal{A}$-moduli $\mathcal{F}$ su X è un prefascio di gruppi abeliani su X (dimenticandosi, per ogni $U \subseteq X$ aperto, della moltiplicazione per elementi di $\mathcal{A}(U)$ in $\mathcal{F}(U)$). Un *fascio di $\mathcal{A}$-moduli* è un prefascio di $\mathcal{A}$-moduli su X che sia un fascio di gruppi abeliani. Uno *spazio anellato* è il dato di uno spazio topologico X e di un fascio di anelli $\mathcal{A}$ su X. Se $(X, \mathcal{A})$ è uno spazio anellato e $\mathcal{F}$,$\mathcal{G}$ sono fasci di $\mathcal{A}$-moduli, un *omomorfismo di fasci di $\mathcal{A}$-moduli* è un omomorfismo di fasci di gruppi abeliani φ tale che per ogni aperto U, φ_U sia un omomorfismo di $\mathcal{A}(U)$-moduli.

Esempio 2.1.9. Se $(U, (x^i))$ è una carta locale per una varietà M e $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, definiamo il prefascio Ω^k_U come segue:

- ad un aperto $V \subseteq M$ associamo il $C^\infty_M(V)$-modulo $\Omega^k_U(V)$ definito all'inizio del paragrafo;
- se $V \subseteq U$ sono aperti di M e $i\colon V \hookrightarrow U$ è l'inclusione, definiamo l'omomorfismo di restrizione come la composizione $\rho_{U,V}(\omega) = \omega_{|V} := \omega \circ i$.

La dimostrazione che sia un fascio è piuttosto semplice: se $V \subseteq U$, $\{V_\lambda\}$ è un ricoprimento aperto di V e $\sum_I f_I dx^I \in \Omega^k_U(V)$ è una sezione tale che $\omega_{|V_\lambda} = \sum_I f_{I|V_\lambda} dx^I_{|V_\lambda} = 0$ per ogni λ, siccome le $dx^I_{|V_\lambda}$ formano una base per $\Omega^k_U(V)$, $f_{I|V_\lambda} = 0$ per ogni λ, quindi $f_I = 0$ su V perché C^∞_U è un fascio; questo dimostra la (1) nella definizione di fascio. Per la (2), sia $\{\omega_\lambda\}$ con $\omega_\lambda = \sum_I f^{(\lambda)}_I dx^I \in \Omega^k_U(V_\lambda)$ e $\omega_{\lambda|U_\lambda \cap U_\mu} = \omega_{\mu|U_\lambda \cap U_\mu}$, cioè $f^{(\lambda)}_{I|U_\lambda \cap U_\mu} = f^{(\mu)}_{I|U_\lambda \cap U_\mu}$; di nuovo, sfruttando il fatto che C^∞_U è un fascio, questo implica che $f^{(\lambda)}_I = f^{(\mu)}_I$.

Il teorema che ci permetterà di definire le k-forme globali su una varietà M è il seguente.

Teorema 2.1.10. Sia $\{U_i\}_{i \in J}$ un ricoprimento aperto di uno spazio anellato $(X, \mathcal{A})$ e supponiamo di avere per ogni i un fascio di $\mathcal{A}_{|U_i}$-moduli $\mathcal{F}_i$ su U_i e per ogni coppia di indici i, j un isomorfismo di fasci di $\mathcal{A}_{|U_i \cap U_j}$-moduli $\varphi_{ij}\colon \mathcal{F}_{i|U_i \cap U_j} \to \mathcal{F}_{j|U_i \cap U_j}$ tali che valgano $\varphi_{ii} = \mathrm{id}$ e $\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$ su $U_i \cap U_j \cap U_k$. Allora esiste ed è unico a meno di isomorfismo il fascio di $\mathcal{A}$-moduli $\mathcal{F}$ su X tale che per ogni i ci sia un isomorfismo $\psi_i\colon \mathcal{F}_{|U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_i$ per cui valga $\psi_j = \varphi_{ij} \circ \psi_i$ su $U_i \cap U_j$.

Dimostrazione. Usiamo la notazione $U_{ij} := U_i \cap U_j$ (analogamente nel caso ci siano più indici). Se $V \subseteq X$ è aperto definiamo

$$\mathcal{F}(V) = \left\{ (s_i)_{i \in J} \in \prod_{k \in J} \mathcal{F}_k(V \cap U_k) \mid \varphi_{ij}(s_{i_{|V \cap U_{ij}}}) = s_{j_{|V \cap U_{ij}}} \right\}.$$

Le operazioni su questo insieme possono essere definite componente per componente. Se $V \subseteq X$ è aperto, $a \in \mathcal{A}(V)$ e $s = (s_i)_i \in \mathcal{F}(U)$ poniamo poi $as = (a_{|U_i} s_i)_i$ e se $V \subseteq U$ è aperto definiamo $\rho_{U,V}((s_i)_i) = (\rho^{\mathcal{F}_i}_{U \cap U_i, V \cap U_i}(s_i))_i$. Questo è un fascio di $\mathcal{A}$-moduli su X. Fissato $k \in J$, vediamo che $\mathcal{F}_{|U_k} \cong \mathcal{F}_k$: preso $V \subseteq U_k$, definiamo $\psi_V \colon \mathcal{F}_k(V) \to \mathcal{F}_{|U_k}(V)$, $s \mapsto (\varphi_{ki}(s_{|V \cap U_i}))_i$. Il fatto che $\psi_V(s)$ stia in $\mathcal{F}(V)$ è garantito dalla relazione di cociclo che soddisfano le φ_{ij} e che ψ_V sia un isomorfismo è ovvio. Per finire, se $\mathcal{G}$ è un altro fascio con degli isomorfismi $g_k \colon \mathcal{G}_{|U_k} \to \mathcal{F}_k$ tali che $g_j = \varphi_{ij} \circ g_i$ su U_{ij} allora per ogni $V \subseteq X$ possiamo definire l'omomorfismo $g_V \colon \mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(V)$, $s \mapsto (g_k(s_{|V \cap U_k}))_{k \in J}$. Che $g_V(s) \in \mathcal{F}(V)$ segue dal fatto che per definizione i g_k commutano con le restrizioni e dalla relazione $g_j = \varphi_{ij} \circ g_i$ su U_{ij}:

$$\varphi_{ij}(g_i(s_{|V \cap U_i})_{|V \cap U_{ij}}) = \varphi_{ij}(g_i(s_{|V \cap U_{ij}})) = g_j(s_{|V \cap U_{ij}}).$$

La g_V così definita è un isomorfismo per ogni V. □

Adesso possiamo finalmente definire il fascio delle k-forme differenziali su una qualunque varietà M.

Teorema 2.1.11. Sia M una varietà differenziabile e sia $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ la sua struttura differenziabile. Per ogni k, valgono le seguenti:

1. per ogni coppia di indici α e β esiste un isomorfismo $f_{\alpha\beta} \colon \Omega^k_{U_\alpha | U_{\alpha\beta}} \to \Omega^k_{U_\beta | U_{\alpha\beta}}$;
2. esiste ed è unico a meno di isomorfismo il fascio Ω^k_M di C^∞_M-moduli su M tale che per ogni α esista un isomorfismo $g_\alpha \colon \Omega^k_{M|U_\alpha} \to \Omega^k_{U_\alpha}$ per cui valga $f_{\alpha\beta} \circ g_\alpha = g_\beta$ su $U_{\alpha\beta}$ per ogni α e β.

Dimostrazione. Siano $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) due carte locali per M e $V \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$ un aperto. Per definizione, per ogni multi indice I e per ogni $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ fissato vale che $dx^I_{\alpha,p} = \sum\limits_J a_J dx^J_{\beta,p}$, $a_J \in \mathbb{R}$. L'isomorfismo da $\Omega^k_{U_\alpha}(V)$ a $\Omega^k_{U_\beta}(V)$ è allora dato dalla matrice di cambio base da $\{dx^I_{\alpha,p}\}_I$ a $\{dx^J_{\beta,p}\}_J$, dove le a_J sono funzioni C^∞ di p perché

$$a_J = dx^I_{\alpha,p}\left(\frac{\partial}{\partial x^J_\beta}|_p\right) = \det \begin{pmatrix} dx^{i_1}_{\alpha,p}(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}_\beta}|_p) & \cdots & dx^{i_1}_{\alpha,p}(\frac{\partial}{\partial x^{j_k}_\beta}|_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dx^{i_k}_{\alpha,p}(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}_\beta}|_p) & \cdots & dx^{i_k}_{\alpha,p}(\frac{\partial}{\partial x^{j_k}_\beta}|_p) \end{pmatrix}$$

e la matrice scritta è una sottomatrice di $\mathrm{Jac}_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})$ che è una funzione C^∞. Il fatto che gli isomorfismi siano dati dalle matrici di cambio base ci garantisce inoltre che sia verifica la relazione di cociclo del Teorema 2.1.10. □

Definizione 2.1.12. Il fascio descritto nel Teorema 2.1.11 è il *fascio delle k-forme su M*. Se $\omega \in \Omega^k_M(U)$ diremo che k è il *grado* di ω.

Osservazione 2.1.13. Se la varietà M ha dimensione n e $k > n$, il fascio Ω^k_M è nullo.

In virtù della precedente osservazione diremo che una forma ha *grado massimo* se il suo grado coincide con la dimensione della varietà.

Nota. Nel seguito scriveremo $\Omega^k(M)$ al posto di $\Omega^k_M(M)$, sottintendendo il fatto che il fascio che stiamo considerando sia su M.

Definizione 2.1.14. Se ω è una k-forma su una varietà M e X è un campo di vettori su M, definiamo la *contrazione di ω con X* come la $(k-1)$-forma definita, dati $Y_1, \dots, Y_{k-1}$ campi di vettori su M, da

$$\iota_X \omega(Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}).$$

Definizione 2.1.15. Date $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^h(M)$, definiamo il loro *prodotto wedge* puntualmente: $(\omega \wedge \eta)(p) = \omega_p \wedge \eta_p$ per ogni $p \in M$.

Osservazione 2.1.16. Il prodotto wedge di forme eredita le proprietà del prodotto wedge definito sulle applicazioni multilineari alternanti. Se ω, ω', η e ξ sono forme differenziali su M valgono le seguenti proprietà:

- Bilineare: se $f, g \in C^\infty(M)$, $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^h(M)$ allora

$$(f\omega + g\omega') \wedge \eta = f(\omega \wedge \eta) + g(\omega' \wedge \eta);$$

- Associativa:

$$\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi;$$

- Anticommutativa: se ω è una k-forma e η è una h-forma, vale

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kh} \eta \wedge \omega.$$

Inoltre, il prodotto wedge di forme è compatibile con i morfismi di restrizione del fascio Ω^k_M. Si rimanda a [Lee13, Proposizione 14.11].

Osservazione 2.1.17. Fissata una carta locale (U, φ), se $\omega_{|U} = \sum_I f_I dx^I$ e $\eta_{|U} = \sum_J g_J dx^J$ allora vale che

$$(\omega \wedge \eta)_{|U} = \sum_{I,J} f_I g_J dx^I \wedge dx^J$$

Definizione 2.1.18. Data $F\colon M \to N$ C^∞ e $\omega \in \Omega^k_N(V)$, definiamo il *pullback* di ω tramite F come la forma $F^*\omega \in \Omega^k_M(F^{-1}(V))$ data da

$$(F^*\omega)_p(v_1,\dots,v_k) = \omega_{F(p)}(dF_p(v_1),\dots,dF_p(v_k))$$

per ogni $p \in F^{-1}(V)$ e per ogni $v_1,\dots,v_k \in T_pM$.

Proposizione 2.1.19. Se $F\colon M \to N$ è una funzione C^∞ valgono le seguenti:

1. $F^*\colon \Omega^k_N(V) \to \Omega^k_M(F^{-1}(V))$ è $\mathbb{R}$-lineare;

2. se ω e η sono forme su N allora $F^*(\omega\wedge\eta) = F^*\omega \wedge F^*\eta$;

3. in coordinate locali,

$$\begin{aligned}F^*(&\sum_{1\le i_i<\dots<i_k\le n} \omega_{i_1\cdots i_k} dy^{i_1}\wedge\cdots\wedge dy^{i_k})\\ &= \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} (\omega_{i_1\cdots i_k}\circ F) d(y^{i_1}\circ F)\wedge\cdots\wedge d(y^{i_k}\circ F).\end{aligned}$$

4. F^* è compatibile con i morfismi di restrizione dei fasci Ω^k_M e Ω^k_N.

Dimostrazione. L'unica non banale è la (3): per ogni $p \in U$ e per ogni $v_1,\dots,v_n \in T_pM$ si ha che

$$\begin{aligned}&(F^*\omega)_p(v_1,\dots,v_k)\\ &\quad= \sum_I \omega_I(F(p)) dy^I(dF_p(v_1),\dots dF_p(v_k))\\ &\quad= \sum_I \omega_I(F(p)) d(y^{i_1}\circ F)\wedge d(y^{i_k}\circ F)(v_1,\dots,v_k).\end{aligned}$$

□

Osservazione 2.1.20. Un caso particolare di (3) nella Proposizione 2.1.19 è il seguente: siano M ed N della stessa dimensione e ω forma differenziale su N di grado massimo. Siano poi $(U,(x^i))$ una carta locale per M, $(V,(y^i))$ una carta locale per N ed $F\colon M\to N$ differenziabile con $F(U)\subseteq V$. Allora, ricordando che $dF^i = \sum\limits_{j=1}^n \frac{\partial F^i}{\partial x^j}dx^j$, si ha che

$$F^*(f dy^1\wedge\ldots\wedge dy^n) = (f\circ F)\det(\mathrm{Jac}(F)) dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n,$$

dove con $\mathrm{Jac}(F)$ si intende la matrice jacobiana di F vista in coordinate locali.

Osservazione 2.1.21. Le proprietà (1) e (4) della Proposizione 2.1.19 ci dicono che $F\colon M\to N$ induce un omomorfismo di fasci di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali $\Omega^k_N \to F_*\Omega^k_M$.

2.2 Differenziale esterno

Vogliamo ora estendere la nozione di differenziale di funzioni C^∞ (che sono gli elementi di $\Omega^0(M)$) alle forme differenziali di qualunque grado. Iniziamo definendolo su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ con la seguente formula:

$$d\left(\sum_J \omega_J dx^J\right) = \sum_J d\omega_J \wedge dx^J \tag{2.1}$$

dove J è una famiglia di indici strettamente crescenti.

Nota. La definizione e i risultati che mostreremo valgono anche per $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$, e dunque anche per varietà con bordo.

Proposizione 2.2.1. Dato $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, valgono le seguenti:

1. d è $\mathbb{R}$-lineare;
2. se ω è una k-forma e η è una h-forma, $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$;
3. $d \circ d = 0$;
4. d commuta con il pullback: se U è un aperto di $\mathbb{R}^n$, V è un aperto di $\mathbb{R}^m$, $F \colon U \to V$ è una funzione C^∞ e $\omega \in \Omega^k_{\mathbb{R}^n}(V)$, allora
$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

Dimostrazione. La linearità è ovvia. Per mostrare 2, grazie alla linearità ci basta verificare l'uguaglianza quando $\omega = f\ dx^I$, $\eta = g\ dx^J$. Prima però osserviamo che $d(h\ dx^I) = dh \wedge dx^I$ anche quando la famiglia di indici I non è strettamente crescente: quando in I appare una ripetizione, questo è ovvio; altrimenti basta considerare σ una permutazione degli indici tale che σI sia crescente, da cui

$$d(h\ dx^I) = d((\mathrm{sgn}\sigma) h\ dx^J) = \mathrm{sgn}\sigma\ d(h\ dx^J) = \mathrm{sgn}\sigma\ dh \wedge dx^J = dh \wedge dx^I.$$

A questo punto si ha che

$$\begin{aligned}
&d((f\ dx^I) \wedge (g\ dx^J)) \\
&\qquad = d(fg\ dx^I \wedge dx^J) \\
&\qquad = d(fg) \wedge dx^I \wedge dx^J \\
&\qquad = (g\ df + f\ dg) \wedge dx^I \wedge dx^J \\
&\qquad = f\ dg \wedge dx^I \wedge dx^J + (df \wedge dx^I) \wedge g dx^J \\
&\qquad = (-1)^k \omega \wedge d\eta + d\omega \wedge \eta.
\end{aligned}$$

La (3) segue dalla (2):

$$d(df \wedge dx^I) = d(df) \wedge dx^I - df \wedge d(dx^I) = 0$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $d(df) = 0$ con f funzione. Il caso generale segue per linearità. Infine, presa $\omega = f\ dx^I$ ed $F \colon M \to N$ si ha che

$$\begin{aligned}
&d(F^*(f\ dx^I)) \\
&\qquad = d((f \circ F)\ d(x^{i_1} \circ F) \wedge \ldots \wedge d(x^{i_k} \circ F)) \\
&\qquad = d(f \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \ldots \wedge d(x^{i_k} \circ F) \\
&\qquad = F^*(du \wedge dx^I) \\
&\qquad = F^*(d(f\ dx^I))
\end{aligned}$$

e l'uguaglianza segue di nuovo per linearità. □

A questo punto è facile estendere il differenziale esterno su una varietà qualunque, sul modello di quello definito per $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.2.2. Sia M una varietà differenziabile (con o senza bordo). Per ogni k e per ogni aperto $V \subseteq M$ esiste un'unica funzione $d_V \colon \Omega^k_M(V) \to \Omega^{k+1}_M(V)$, che soddisfi le seguenti:

1. d è $\mathbb{R}$-lineare;
2. se ω è una k-forma e η è una h-forma, $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$;
3. $d \circ d = 0$;
4. se $f \in C^\infty(V) = \Omega^0_M(V)$, df è il differenziale di f definito, per ogni campo di vettori X su M, da $df(X) = X(f)$.

Dimostrazione. Vediamo l'esistenza: se (U, φ) è una carta locale per M e $\omega \in \Omega^k(M)$, definiamo

$$d(\omega_{|U}) = \varphi^*(d((\varphi^{-1})^*\omega))) = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I$$

con $\sum\limits_I \omega_I\ dx^I$ la scrittura locale di ω rispetto a $\varphi = (x^i)$. Per prima cosa osserviamo che questa definizione non dipende dalla carta scelta: se (V, ψ) è una carta locale, sull'intersezione $U \cap V$ si ha che

$$(\varphi \circ \psi^{-1})^* d((\varphi^{-1})^*\omega) = d(\varphi \circ \psi^{-1})^*(\varphi^{-1})^*\omega = d(\psi^{-1})^*\omega$$

da cui segue che $\psi^* d((\psi^{-1})^*\omega) = \varphi^* d((\varphi^{-1})^*\omega)$, cioè la definizione è indipendente dalla scelta della carta (dove ovviamente sto restringendo ω all'intersezione delle carte). A questo punto le proprietà 1 - 4 seguono dalla Proposizione 2.2.1.

Per mostrare l'unicità, iniziamo osservando che un operatore d che soddisfa le ipotesi del teorema è locale, ovvero date ω_1 e ω_2 tali che $\omega_1 = \omega_2$ su un aperto U, si ha che $d(\omega_{1|U}) = d(\omega_{2|U})$: poniamo $\eta = \omega_2 - \omega_1$ e siano $p \in U$ e $\psi\colon M \to \mathbb{R}$ una bump function C^∞ con supporto contenuto in U e tale che $\psi \equiv 1$ su un certo intorno di p contenuto in U. Allora $\psi\eta$ è nulla su tutto M e si ha che $d(\psi\eta) = d\psi \wedge \eta + \psi\ d\eta = \psi \wedge d\eta = 0$ perché ψ è identicamente 1 in un intorno di p. Ma allora $d\omega_{1|p} = d\omega_{2|p}$ e dalla generalità di p segue l'uguaglianza su tutto U. Sia ora D un operatore che soddisfa le proprietà nell'enunciato e mostriamo che $D\omega = d\omega$ per ogni $\omega \in \Omega^k(M)$ e per ogni k, dove d è l'operatore descritto sopra. L'uguaglianza per le funzioni viene direttamente dalla (1), mentre per forme del tipo $df^1 \wedge \ldots \wedge df^k$ si ha che

$$\begin{aligned}
&D(df^1 \wedge \ldots \wedge df^k) \\
&\quad = D(Df^1 \wedge \ldots \wedge Df^k) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} Df^1 \wedge \ldots \wedge DDf^i \wedge \ldots \wedge Df^k && \text{Grazie alla (2)} \\
&\quad = 0. && \text{Grazie alla (3)}
\end{aligned}$$

Se ω è una forma qualsiasi, fissato $p \in M$ e (U, φ) una carta locale attorno a p, sappiamo che $\omega_{|U} = \sum_I \omega_I\ dx^I$. Sia $\tilde{\omega} = \sum_I \tilde{\omega}_I\ d\tilde{x}^I \in \Omega^k(M)$ ottenuta tramite funzioni bump C^∞ a partire da $\omega_I, x_1, \ldots, x_n$ in modo che valga $\omega_{|V} = \tilde{\omega}_{|V}$ in un intorno $V \subseteq U$ di p (per $d\tilde{x}^i$ intendiamo il differenziale della funzione $\tilde{x}^i\colon M \to \mathbb{R}$. Su V, questo coincide con la 1-forma dx^i della base di $\Omega^1_M(V)$). Per quanto osservato sopra, D è un operatore locale, dunque $D(\omega_{|V}) = D(\tilde{\omega}_{|V})$ e da questo segue che

$$\begin{aligned}
(D\omega)_p = (D\tilde{\omega})_p &= (D \sum_I \tilde{\omega}_I\ d\tilde{x}^I)_p \\
&= (\sum_I D\tilde{\omega}_I \wedge d\tilde{x}^I + \tilde{\omega}_I \wedge Dd\tilde{x}^I)_p \\
&= (\sum_I d\tilde{\omega}_I \wedge d\tilde{x}^I)_p \\
&= (\sum_I \omega_I \wedge dx^I)_p = (d\omega)_p.
\end{aligned}$$

□

Osservazione 2.2.3. $d\colon \Omega^k_M \to \Omega^{k+1}_M$ è un omomorfismo di fasci di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali.

Osservazione 2.2.4. Usando coordinate locali e le proprietà del pullback è facile osservare che se $F\colon M \to N$ è C^∞ e ω è una k-forma su N, vale $dF^*\omega = F^*d\omega$. In particolare vale che $d(\omega_{|U}) = d(i^*\omega) = i^*d\omega = (d\omega)_{|U}$ con U aperto di N e $i\colon U \hookrightarrow N$ l'inclusione.

Capitolo 3

Integrazione di forme su varietà

3.1 Orientabilità

Di nuovo, iniziamo il paragrafo con un po' di algebra lineare. Fissato uno spazio vettoriale reale V di dimensione $n \geq 1$, ricordiamo che dare un'orientazione a V significa scegliere una delle due classi di equivalenza rispetto alla seguente relazione di equivalenza sull'insieme delle basi di V: $\{v_1, \ldots, v_n\} \sim \{w_1, \ldots, w_n\}$ se e solo se la corrispondente matrice di cambio base ha determinante positivo. È facile osservare che $\sim$ è una relazione di equivalenza con due classi di equivalenza. Uno spazio vettoriale orientato sarà dunque il dato di uno spazio vettoriale V e di una delle due classi date da $\sim$. Spostiamoci ora su una varietà liscia M e consideriamo due carte locali $(U, (x^i))$, $(V, (y^j))$ con $U \cap V \neq \varnothing$. Sui rispettivi aperti coordinati, le coordinate locali definiscono dei riferimenti locali per il fibrato tangente $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_i$ e $\{\frac{\partial}{\partial y^j}\}_j$, ovvero per ogni punto p nei rispettivi domini una base per T_pM. Cosa succede quando $p \in U \cap V$? In questo caso abbiamo due basi per lo stesso spazio vettoriale, dunque ha senso chiedersi chi sia la matrice di cambio base: se $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{j,i} \frac{\partial}{\partial y^j}|_p$ allora calcolando entrambi i lati nella funzione $y^j \colon U \cap V \to \mathbb{R}$ otteniamo che $a_{j,i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$ e cioè che la matrice di cambio base non è altri che lo jacobiano della mappa di cambio di coordinate $\psi \circ \varphi^{-1}$ con $\psi = (y^j)$, $\varphi = (x^i)$. Tutto questo giustifica la seguente definizione.

Definizione 3.1.1. Definiamo la seguente relazione di equivalenza sulla struttura differenziabile di una varietà connessa M: due carte locali (U, φ), (V, ψ) sono equivalenti se e solo se il determinante dello jacobiano di $\psi \circ \varphi^{-1}$ è maggiore di zero in ogni punto di $\varphi(U \cap V)$. In questo caso diremo che le due carte sono *equiorientate*. È chiaro che, fissato un punto $p \in M$, questa definizione riflette la definizione di orientabilità data per spazi vettoriali su T_pM. Un atlante $\mathcal{A}$ si dirà essere un *atlante orientato* se ogni coppia di carte in $\mathcal{A}$ è equiorientata e due atlanti si diranno essere *equiorientati* se la loro unione è ancora un atlante orientato. La relazione di equiorientabilità fra atlanti è una relazione di equivalenza. Diremo che una varietà connessa M è *orientabile* se ammette un atlante orientato. Se M è orientabile, un'*orientazione su M* è la scelta di una classe di equivalenza data dalla relazione di equiorientabilità. Una carta locale si dirà essere *orientata positivamente* se appartenente a questa classe, *orientata negativamente* altrimenti. Per convenzione, nel caso in cui la varietà abbia dimensione 0, un'orientazione per M è la scelta di una funzione che associ ad ogni punto ± 1.

Teorema 3.1.2. Una varietà differenziabile M è orientabile se e solo se esiste una forma differenziabile di grado massimo mai nulla.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante orientato per M e sia $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ una partizione dell'unità subordinata agli aperti coordinati dell'atlante. Definiamo $\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha dx^1_\alpha \wedge \cdots \wedge dx^n_\alpha$. Allora, in un intorno di ogni $p \in M$ si ha che ω è somma di un numero finito di termini mai nulli e multipli positivi l'uno dell'altro, essendo $dx^1_\alpha \wedge \cdots \wedge dx^n_\alpha = \det(\mathrm{Jac}(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}))dx^1_\beta \wedge \cdots \wedge dx^n_\beta$ con $\det(\mathrm{Jac}(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}))$ positivo per ipotesi. Dunque ω è una forma definita globalmente e mai nulla.

Viceversa, data $\omega \in \Omega^n_M(M)$ mai nulla e detta $\mathcal{A}$ la struttura differenziabile di M poniamo $\mathcal{A}^+ = \{(U, \varphi) \in \mathcal{A} \mid \omega(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}) > 0\}$. Che $\mathcal{A}^+$ sia un atlante segue dal fatto che se $p \in M$ e (V, ψ) è una carta in p con dominio connesso allora o $(V, \psi) \in \mathcal{A}^+$ oppure possiamo considerare $(V, \overline{\psi}) \in \mathcal{A}^+$ con $\overline{\psi} = (x^1, x^2, \ldots, x^n, x^{n-1})$ e $(x^i) = \psi$. Che $\mathcal{A}^+$ sia orientato segue banalmente dal fatto che se $(U, \varphi), (V, \psi)$ sono carte in $\mathcal{A}^+$ allora

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right) = \det(\mathrm{Jac}(\varphi \circ \psi^{-1})) \cdot \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$$

su $U \cap V$, da cui segue che $\det(\mathrm{Jac}(\varphi \circ \psi^{-1}))$ è positivo. □

Una forma come quella nell'enunciato del Teorema 3.1.2 viene chiamata *forma di volume*.

Osservazione 3.1.3. Se M è una varietà di dimensione n orientata da una forma di volume ω e $(U, (x^i))$ è una carta locale, la n forma $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ è una n-forma mai nulla su U, dunque deve esistere $f \in C^\infty(U)$ tale che $f\omega_{|U} = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Ma

$$1 = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}) = f\omega(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}),$$

dunque $(U, (x^i))$ è orientata se e solo se $f > 0$.

Quanto discusso finora si applica anche a varietà con bordo. A priori però, non è detto che se M è una varietà con bordo orientata, il suo bordo ∂M sia a sua volta una varietà (senza bordo) orientata. Il seguente lemma risolve questo problema.

Lemma 3.1.4. Siano U_0, U_1 aperti di $\mathbb{H}^n$ con $U_i \cap \mathbb{H}^n \neq \varnothing$ e sia $F\colon U_0 \to U_1$ un diffeomorfismo con determinante dello jacobiano sempre positivo. Allora la restrizione $F_{|U_0\,\cap\,\partial\mathbb{H}^n}\colon U_0 \cap \partial\mathbb{H}^n \to U_1 \cap \partial\mathbb{H}^n$ è un diffeomorfismo (se visto come mappa da $\mathbb{R}^{n-1}$ in sé) con determinante dello jacobiano sempre positivo.

Dimostrazione. Si rimanda a [AT11, Lemma 4.5.8]. □

Da questo otteniamo che se M è una varietà orientata e $\mathcal{A}$ è un atlante orientato, la restrizione delle carte locali di $\mathcal{A}$ a ∂M dà un atlante orientato per ∂M.

Definizione 3.1.5. Sia M una varietà con bordo orientata e sia $\mathcal{A}$ un suo atlante orientato. Definiamo l'*orientazione indotta* su ∂M da M nel modo seguente: se M ha dimensione pari, scegliamo l'orientazione su ∂M tale che l'intersezione delle carte di $\mathcal{A}$ con ∂M dia un atlante positivo; altrimenti scegliamo l'orientazione opposta.

La ragione di questa convenzione sarà chiara quando tratteremo il Teorema di Stokes.

3.2 Integrazione

Abbiamo ora tutti gli strumenti per definire l'integrazione su varietà e per dimostrare il classico teorema di Stokes.

Definizione 3.2.1. Dati un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e una n-forma $\eta = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ a supporto compatto definita su U, poniamo

$$\int_U \eta = \int_U f\, dx^1 \ldots dx^n$$

dove al secondo membro stiamo usando il classico integrale di Lebesgue.

Per estendere alle varietà la definizione di integrazione di forme a supporto compatto, iniziamo dal seguente lemma.

Lemma 3.2.2. Sia ω una forma di grado massimo su una varietà M con supporto compatto e contenuto nell'intersezione di due carte locali equiorientate $(U, \varphi), (V, \psi)$. Allora

$$\int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*\omega = \int_{\psi(V)} (\psi^{-1})^*\omega.$$

Dimostrazione. Iniziamo scrivendo

$$(\varphi^{-1})^*\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \quad \text{e} \quad (\psi^{-1})^*\omega = g dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$$

con $f \in C^\infty(\varphi(U))$ e $g \in C^\infty(\psi(V))$. Siccome $(\psi^{-1})^*\omega = (\varphi \circ \psi^{-1})^*(\varphi^{-1})^*\omega$, l'Osservazione 2.1.20 ci dice che

$$g = \det \operatorname{Jac}(\varphi \circ \psi^{-1}) \cdot f \circ (\varphi \circ \psi^{-1}).$$

Siccome le carte considerate sono equiorientate, $\det \operatorname{Jac}(\varphi \circ \psi^{-1}) > 0$. Questo, assieme al fatto che il supporto di ω è contenuto nell'intersezione dei domini delle carte, ci dice che

$$\begin{aligned}\int_{\psi(V)} (\psi^{-1})^*\omega = \int_{\psi(U\cap V)} (\psi^{-1})^*\omega &= \int_{\psi(U\cap V)} g\, dy^1 \dots dy^n \\ &= \int_{\psi(U\cap V)} \det \operatorname{Jac}(\varphi \circ \psi^{-1}) \cdot f \circ (\varphi \circ \psi^{-1})\, dy^1 \dots dy^n \\ &= \int_{\varphi(U\cap V)} f\, dx^1 \dots dx^n \\ &= \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*\omega.\end{aligned}$$

□

Il lemma precedente ci permette di definire l'integrale di una forma di grado massimo a supporto contenuto in un'unica carta locale (U, φ) ponendo:

$$\int_M \omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*\omega.$$

Questa definizione è ben posta sulle carte equiorientate a (U, φ) grazie al Lemma 3.2.2, mentre avrà segno opposto se si considera una carta locale con orientazione opposta rispetto a (U, φ). Nel caso più generale di una forma ω a supporto compatto su M, abbiamo bisogno del seguente lemma.

Lemma 3.2.3. Siano $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}, \{(V_\beta, \varphi_\beta)\}$ due ricoprimenti di $\operatorname{supp} \omega$ con carte equiorientate e siano $\{\rho_\alpha\}, \{\rho_\beta\}$ due partizioni dell'unità subordinate rispettivamente al primo e al secondo ricoprimento. Allora

$$\sum_\alpha \int_M \rho_\alpha \omega = \sum_\beta \int_M \rho_\beta \omega.$$

Dimostrazione. Osserviamo intanto che la somma nell'enunciato è sempre finita, perché per definizione la famiglia dei supporti delle ρ_α è localmente finita (stessa cosa per le ρ_β) e il supporto di ω è compatto.

Per ogni α, abbiamo che

$$\int_M \rho_\alpha \omega = \int_M \left(\sum_\beta \rho_\beta\right) \rho_\alpha \omega = \sum_\beta \int_M \rho_\beta \rho_\alpha \omega$$

e sommando su α otteniamo

$$\sum_{\alpha} \int_M \rho_\alpha \omega = \sum_{\alpha,\beta} \int_M \rho_\beta \rho_\alpha \omega$$

e siccome il supporto di ciascun $\rho_\beta \rho_\alpha \omega$ è contenuto nel dominio di un'unica carta, il suo integrale non dipende dalla carta scelta per calcolarlo. Allo stesso modo otteniamo che

$$\sum_{\beta} \int_M \rho_\beta \omega = \sum_{\alpha,\beta} \int_M \rho_\beta \rho_\alpha \omega$$

da cui segue la tesi. □

Possiamo adesso dare la seguente definizione.

Definizione 3.2.4. Sia ω una forma di grado massimo a supporto compatto su una varietà orientabile M, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante orientato per M e $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_\alpha\}$. L'*integrale di ω su M* è

$$\sum_{\alpha} \int_M \rho_\alpha \omega.$$

Nel caso di varietà 0 dimensionali, una forma di grado massimo è semplicemente una funzione a valori in $\mathbb{R}$. Se $\sigma\colon M \to \{\pm 1\}$ è la funzione che definisce l'orientazione in ciascun punto, definiamo l'integrale di f su M come $\sum\limits_{p \in M} \sigma(p) f(p)$.

Il Lemma 3.2.3 ci dice che, fissata un'orientazione per la varietà M, questa definizione è ben posta

Osservazione 3.2.5. Sia M una varietà compatta orientata e sia ω una forma volume. Allora $\int_M \omega > 0$. Infatti possiamo considerare un atlante $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ orientato e una partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}$ subordinato a questo atlante. Grazie all'Osservazione 3.1.3, sappiamo che $\omega_{|U_\alpha} = f_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n$ con le f_α positive, dunque per definizione

$$\int_M \omega = \sum_{\alpha} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (\rho_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}) \cdot (f_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}) dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n$$

e questo è maggiore di 0 perché le ρ_α lo sono.

3.3 Teorema di Stokes

Teorema 3.3.1 (di Stokes)**.** Sia M una varietà n dimensionale con bordo e orientata e sia ω una forma di grado $n-1$ a supporto compatto. Allora

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega_{|\partial M}$$

Dimostrazione. Sia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante orientato per M tale che per ogni α, φ_α sia un diffeomorfismo di U_α con $\mathbb{R}^n$ o con $\mathbb{H}^n$ che preserva l'orientazione. Per prima cosa osserviamo che se il teorema vale per $\mathbb{R}^n$ e per $\mathbb{H}^n$ allora vale anche per M: presa $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata a $\{U_\alpha\}$, per linearità basta verificare che il teorema valga per ogni $\rho_\alpha\omega$:

$$
\begin{aligned}
\int_M d(\rho_\alpha\omega) = \int_{U_\alpha} d(\rho_\alpha\omega) &= \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (\varphi^{-1})^*(d(\rho_\alpha\omega)) \\
&= \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} d(\varphi^{-1})^*(\rho_\alpha\omega) \\
&= \int_{\partial\varphi_\alpha(U_\alpha)} (\varphi^{-1})^*(\rho_\alpha\omega) \\
&= \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha\cap\partial M)} (\varphi^{-1})^*(\rho_\alpha\omega) \\
&= \int_{\partial M} \rho_\alpha\omega.
\end{aligned}
$$

Ci basta quindi dimostrare il teorema per $\mathbb{R}^n$ e per $\mathbb{H}^n$. Per linearità e a meno di cambiare coordinate, possiamo supporre $\omega = f\ dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}$, da cui

$$
\begin{aligned}
d\omega &= df \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} \\
&= (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.
\end{aligned}
$$

Segue che

$$
\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n \right) dx^1 \ldots dx^{n-1} = 0
$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che f è a supporto compatto, dunque l'integrale tra parentesi è nullo. Si ha quindi che $\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0 = \int_{\partial\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\varnothing} \omega$. Per finire, mostriamo il teorema per $\mathbb{H}^n$: in questo caso, presa

$$
\omega = \sum_{i=1}^{n} g_i(x', x^n) dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n
$$

vale che

$$
\omega_{|\partial\mathbb{H}^n} = g_n(x', 0) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}
$$

da cui

$$
\int_{\partial\mathbb{H}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_n(x', 0) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}.
$$

Calcoliamo ora $\int_{\mathbb{H}^n} d\omega$, iniziando dal fatto che

$$\begin{aligned} d\omega &= d(\sum_{i=1}^{n} g_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x^j} dx^j) dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial g_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Per ogni $1 \leq j \leq n-1$, essendo g_j a supporto compatto, vale che

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial g_j}{\partial x^j} dx^1 \dots dx^n = \int_0^{+\infty} (\int_{\mathbb{R}^{n-2}} (\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g_j}{\partial x^j} dx^j) dx^1 \dots \widehat{dx^j} \dots dx^{n-1}) dx^n = 0$$

e inoltre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial g_n}{\partial x^n}(x', x^n) dx^n = -g_n(x', 0).$$

Da queste segue che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial g_n}{\partial x^n} dx^1 \dots dx^n \\ &= (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial g_n}{\partial x^n} dx^n \right) dx^1 \dots dx^{n-1} \\ &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_n(x', 0) dx^1 \dots dx^{n-1} = \int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo potuto eliminare il $(-1)^n$ grazie alla definizione data di orientazione indotta sul bordo. $\square$

Osservazione 3.3.2. Se decidessimo di definire l'orientazione indotta sul bordo come l'intersezione di un atlante orientato per M con ∂M anche nel caso di varietà di dimensione dispari, la formula di Stokes diventerebbe

$$\int_M d\omega = (-1)^n \int_{\partial M} \omega_{|\partial M}.$$

La ragione per questa scelta non è (solamente) estetica, ma è una conseguenza del seguente risultato, che dà un modo alternativo di indurre un'orientazione sul bordo di una varietà.

Teorema 3.3.3. *Sia M una varietà orientata con o senza bordo ed S una sottovarietà di codimensione 1 di M. Se N è un campo vettoriale su M lungo S mai tangente ad S, allora la sottovarietà ammette un'unica orientazione tale che per ogni $p \in S$, $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ è una base orientata per T_pS se e solo se $\{N_p, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ è una base orientata per T_pM. Inoltre, se ω è una forma volume per M e $i\colon S \hookrightarrow M$ è l'inclusione, $i^*(\iota_N \omega)$ è una forma volume per S che induce la stessa orientazione di quella descritta sopra.*

Dimostrazione. Si rimanda a [Lee13, Proposizione 15.21] □

L'orientazione su S definita nel teorema è quella da cui deriva la formula di Stokes senza segni, quando $S = \partial M$ e il campo considerato è quello sempre uscente da ∂M.

Capitolo 4

Coomologia

4.1 Coomologia di de Rham

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n e indichiamo con $d^k \colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ il differenziale esterno sulle k-forme globali. La relazione $d^{k+1} \circ d^k = 0$ ci dice che $\text{Im } d^k \subseteq \text{Ker } d^{k+1}$. Diamo le seguenti definizioni.

Definizione 4.1.1. Se ω è una k-forma su M, diremo che ω è *esatta* se $\omega \in \text{Im } d^{k-1}$, mentre diremo che è *chiusa* se $\omega \in \text{Ker } d^{k+1}$. Definiamo il *$k$-esimo gruppo di coomologia di de Rham* come lo spazio vettoriale quoziente

$$H^k_{dR}(M) = \frac{\text{Ker } d^k}{\text{Im } d^{k-1}}.$$

Osservazione 4.1.2. Gli $H^k_{dR}(M)$ hanno una struttura di spazio vettoriale reale.

Osservazione 4.1.3. È chiaro che varietà differenziabili diffeomorfe abbiano gruppi di coomologia isomorfi per ogni k. Il risultato principale di questa tesi sarà dimostrare che la coomologia di de Rham di una varietà differenziabile è un invariante molto più forte, e più nello specifico che è isomorfa alla classica coomologia singolare (a coefficienti in $\mathbb{R}$), che è un invariante omotopico.

Osservazione 4.1.4. Se $M = \coprod_{\alpha \in \mathcal{A}} M_\alpha$ con gli M_α aperti, vale $H^k_{dR}(M) = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} H^k_{dR}(M_\alpha)$.

Proposizione 4.1.5. Sia M una varietà differenziabile e sia $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ l'insieme delle sue componenti connesse. Allora vale che $H^0_{dR}(M) = \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$. In altre parole, $H^0_{dR}(M)$ conta le componenti connesse della varietà.

Dimostrazione. Iniziamo dimostrando che, se M è connessa, allora $H^0_{dR}(M) = \mathbb{R}$: ricordiamo che, per definizione, $H^0_{dR}(M) = \text{Ker } d^0$ con $d^0 \colon \Omega^0(M) = C^\infty(M) \to \Omega^1(M)$ il differenziale di funzioni. Ma una funzione f soddisfa $df = 0$ se e solo se è localmente costante, ed essendo M connesso, f deve essere costante globalmente. Da questo segue che $H^0_{dR}(M) = \mathbb{R}$. Adesso, se M è l'unione di più componenti connesse, l'Osservazione 4.1.4 ci dice che $H^0_{dR}(M) = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} H^0_{dR}(M_\alpha) = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{R}$ come voluto. □

Proposizione 4.1.6. Se M è una varietà di dimensione n compatta, senza bordo e orientata allora $H^n_{dR}(M) \neq 0$.

Dimostrazione. Siccome M è orientata, per il Teorema 3.1.2 esiste $\omega \in \Omega^n(M)$ mai nulla. Assumiamo per assurdo che ω sia nulla in coomologia, vale a dire che esista $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$ tale che $d\alpha = \omega$. Ricordiamo che per l'Osservazione 3.2.5 deve essere $\int_M \omega > 0$. Ma allora

$$0 < \int_M \omega = \int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha = 0$$

(perché $\partial M = \varnothing$ per ipotesi) da cui l'assurdo. Dunque $[\omega]$ è un elemento non nullo di $H^n_{dR}(M)$. □

Uno dei risultati necessari alla costruzione dell'isomorfismo tra la coomolgia di de Rham e la coomologia singolare è la coomologia di $\mathbb{R}^n$. Facciamo innanzitutto la seguente osservazione.

Osservazione 4.1.7. Sia $F\colon M \to N$ una funzione di classe C^∞ e sia $F^*\colon \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ il suo pullback sulle k-forme. Siccome $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$, abbiamo che

$$F^*(\text{Ker } d^k_N) \subseteq \text{Ker } d^k_M \quad \text{e} \quad F^*(\text{Im } d^{k-1}_N) \subseteq \text{Im } d^{k-1}_M,$$

dunque è ben posto l'omomorfismo indotto

$$H^k(N) \ni [\omega] \mapsto [F^*\omega] \in H^k(M).$$

Chiameremo questa mappa il *l'omomorfismo indotto da F in coomologia* o *pullback* e lo indicheremo sempre con F^*.

Teorema 4.1.8. Sia M una varietà differenziabile e sia $\pi\colon M \times \mathbb{R} \to M$ la proiezione sul primo fattore. Per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ fissato, indichiamo con $\sigma_{t_0}\colon M \to M \times \mathbb{R}$ la sezione $\sigma_{t_0}(p) = (p, t_0)$. Allora $\pi^*\colon H^\bullet_{dR}(M) \to H^\bullet_{dR}(M \times \mathbb{R})$ è un isomorfismo con inversa $\sigma^*_{t_0}\colon H^\bullet_{dR}(M \times \mathbb{R}) \to H^\bullet_{dR}(M)$.

Dimostrazione. Vogliamo costruire un operatore di omotopia tra Id e $\pi^* \circ \sigma^*_{t_0}$ (a livello delle forme), cioè un omomorfismo $\mathbb{R}$-lineare $K\colon \Omega^k(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^{k-1}(M \times \mathbb{R})$ tale che valga

$$(K \circ d^k + d^{k-1} \circ K)\omega = (id - \pi^* \circ \sigma^*_{t_0})\omega \tag{4.1}$$

per ogni $\omega \in \Omega^k(M \times \mathbb{R})$. Ricordiamo che $T_{(q,s)}(M \times \mathbb{R}) \cong T_qM \oplus T_s\mathbb{R}$ e che $T_s\mathbb{R} = \mathrm{Span}(\frac{\partial}{\partial t}|_s)$. Definiamo

$$(K\omega)_{(p,t)} = \int_{t_0}^{t} (\omega \lrcorner \frac{\partial}{\partial t})_{(p,s)}\, ds.$$

Siccome il differenziale esterno è locale, ci basta mostrare la (4.1) su aperti della forma $U \times \mathbb{R}$ con (U, φ) carta locale per M. In coordinate locali, una k-forma su $U \times \mathbb{R}$ è combinazione lineare di forme del tipo $f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ e $f\ dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}}$. Se $\omega = f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$, $K\omega = 0$ mentre

$$\begin{aligned} Kd\omega &= K\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right) \\ &= \left(\int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial t}(p,s)\, ds\right)\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\ &= f(p,t) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} - f(p,t_0) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\ &= (\mathrm{Id} - \pi^* \circ \sigma_{t_0}^*)\omega. \end{aligned}$$

Quindi in questo caso la (4.1) è soddisfatta. Sia ora $\omega = f\ dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}}$. In questo caso $(\pi^* \circ \sigma_{t_0}^*)(\omega) = 0$ e $dK\omega = \omega - Kd\omega$. □

Corollario 4.1.9. La coomologia di $\mathbb{R}^n$ è

$$H^k_{dR}(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $n = 1$, sappiamo grazie alla Proposizione 4.1.5 che $H^0_{dR}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Siccome $\mathbb{R}$ ha dimensione 1, tutte le 1-forme sono banalmente chiuse. Vediamo che sono anche esatte: data $\omega = f\ dx$, ci basta definire

$$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

ottenendo che $dg = \omega$. Possiamo quindi concludere per induzione sfruttando il Teorema 4.1.8. □

Osservazione 4.1.10. Il Corollario 4.1.9 ci permette di generalizzare la Proposizione 1.1.11 che avevamo mostrato per 1-forme su aperti di $\mathbb{R}^n$: se ω è una k-forma chiusa su M, possiamo ricoprire M di aperti coordinati con domini diffeomorfi ad $\mathbb{R}^n$. La restrizione di ω a ciascun dominio è allora esatta, dunque ω è localmente esatta. Il viceversa è ovvio.

Osservazione 4.1.11. Sia M una varietà di dimensione n. Il Corollario 4.1.9 ci permette di dimostrare che la successione di fasci di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali

$$C^\infty_M \xrightarrow{d^0} \Omega^1_M \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} \Omega^n_M \longrightarrow 0$$

è esatta, cioè che vale l'uguaglianza tra fasci Ker $d^k = \text{Im } d^{k-1}$ per ogni k. Nella dimostrazione della Proposizione 4.1.5 abbiamo inoltre osservato che Ker d^0 è uguale al fascio delle funzioni localmente costanti, che indichiamo con $\underline{\mathbb{R}}_M$. Questo coincide con il fascificato del prefascio che ad ogni aperto $U \subseteq M$ associa $\mathbb{R}$ e viene solitamente chiamato *fascio costante*. Abbiamo quindi che la seguente successione è ancora esatta

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{R}}_M \xrightarrow{\varepsilon} \Omega^0_M = C^\infty_M \xrightarrow{d^0} \Omega^1_M \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} \Omega^n_M \longrightarrow 0$$

con ε l'inclusione. Questa successione prende il nome di *risoluzione di de Rham.*

Il secondo strumento di cui avremo bisogno è una versione della successione di Mayer-Vietoris. Per ottenerla, data una varietà M fissiamo due aperti U_0 e U_1 tali che $M = U_0 \cup U_1$ e consideriamo le seguenti mappe di inclusione

$$\begin{tikzcd} & U_0 \arrow[dr, "i_0"] & \\ U_0 \cap U_1 \arrow[ur, "j_0"] \arrow[dr, "j_1"'] & & M \\ & U_1 \arrow[ur, "i_1"'] & \end{tikzcd}$$

da cui passando ai pullback al livello delle forme otteniamo il seguente diagramma commutativo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali

$$\begin{tikzcd} & \Omega^k_M(U_0) \arrow[dl, "j_0^*"] & \\ \Omega^k_M(U_0 \cap U_1) & & \Omega^k_M(M) \arrow[ul, "i_0^*"'] \arrow[dl, "i_1^*"] \\ & \Omega^k_M(U_1) \arrow[ul, "j_1^*"'] & \end{tikzcd}$$

Teorema 4.1.12. La successione corta

$$0 \to \Omega^k_M(M) \xrightarrow{i_0^* \oplus i_1^*} \Omega^k_M(U_0) \oplus \Omega^k_M(U_1) \xrightarrow{j_0^* - j_1^*} \Omega^k_M(U_0 \cap U_1) \to 0 \tag{4.2}$$

è esatta

Dimostrazione. L'esattezza in $\Omega^k_M(M)$ è ovvia. In $\Omega^k_M(U_0) \oplus \Omega^k_M(U_1)$, abbiamo che se $\omega = (i_0^*\tau, i_1^*\tau) = (\tau_{|U_0}, \tau_{|U_1})$ allora $(j_0^* - j_1^*)(\omega) = 0$. Viceversa se (η_1, η_2) è tale che $(j_0^* - j_1^*)(\eta_1, \eta_2) = 0$ allora le due forme coincidono su $U_0 \cap U_1$, dunque per proprietà di fascio esiste $\xi \in \Omega^k_M(M)$ tale che $(i_0^* \oplus i_1^*)(\xi) = (\eta_1, \eta_2)$. Resta l'esattezza in $\Omega^k_M(U_0 \cap U_1)$.

Fissata $\omega \in \Omega^k_M(U_0 \cap U_1)$ e $\{\rho_0, \rho_1\}$ partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_0, U_1\}$, definiamo $\eta \in \Omega^k_M(U_0)$,

$$\eta = \begin{cases} \rho_1 \omega & \text{su } U_0 \cap U_1 \\ 0 & \text{su } U_0 \setminus \text{supp } \rho_1 \end{cases}$$

e definiamo $\eta' \in \Omega^k_M(U_1)$,

$$\eta' = \begin{cases} -\rho_0 \omega & \text{su } U_0 \cap U_1 \\ 0 & \text{su } U_1 \setminus \text{supp } \rho_0. \end{cases}$$

Allora

$$(j_0^* - j_1^*)(\eta, \eta') = \eta_{|U_0 \cap U_1} - \eta'_{|U_0 \cap U_1} = \rho_1 \omega + \rho_0 \omega = \omega.$$

□

Ricordiamo il seguente teorema di algebra omologica.

Teorema 4.1.13. Sia

$$0 \to A^\bullet \xrightarrow{F} B^\bullet \xrightarrow{G} C^\bullet \to 0 \tag{4.3}$$

una successione esatta corta di complessi coomologici. Allora esistono $\delta^k \colon H^k(C) \to H^{k+1}(A)$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$ tali che la successione

$$\cdots \longrightarrow H^k(A) \xrightarrow{F^*} H^k(B) \xrightarrow{G^*} H^k(C) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(A) \longrightarrow \cdots$$

è esatta.

Dimostrazione. Sia $[\gamma] \in H^k(C)$. Per definizione, se indichiamo con d_C il differenziale del complesso $C^\bullet$, abbiamo che $d_C \gamma = 0$. Ma l'esattezza della 4.3 ci dice che $G^k \colon B^k \to C^k$ è suriettiva, dunque esiste $\beta \in B^k$ tale che $G^k(\beta) = \gamma$. Siccome deve essere $d^k_C \circ G^k = G^{k+1} \circ d^k_B$ e $d^k_C(\gamma) = 0$, $G^{k+1}(d^k_B \beta) = 0$, cioè $d_B \beta \in \text{Ker } G^{k+1}$. Di nuovo, l'esattezza di 4.3 ci dice che $\text{Im } F^{k+1} = \text{Ker } G^{k+1}$, dunque esiste $\alpha \in A^{k+1}$ tale che $F^{k+1}(\alpha) = d_B \beta$. Per finire, mostriamo che questo α è chiuso: basta usare il fatto che $F^{k+2} \circ d^k_A = d^{k+1}_B \circ F^{k+1}$, da cui $(F^{k+2}(d_A \alpha)) = d^{k+1}_B(F^{k+1}(\alpha)) = d^{k+1}_B \beta = 0$ e siccome F^{k+2} è iniettiva (sempre per esattezza di 4.3), deve essere $d^{k+1}_A \alpha = 0$. Poniamo allora $\delta^k([\gamma]) = [\alpha]$. Si può dimostrare che questo omomorfismo è ben posto ed è quello cercato ([AT11, Teorema 5.1.23]). □

Osservazione 4.1.14. L'esattezza della successione (4.2) ci dice che esistono omomorfismi di connessione $\delta^k \colon H^k_{dR}(U_0 \cap U_1) \to H^{k+1}_{dR}(M)$ tali che

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{k-1}_{dR}(U_0)\oplus H^{k-1}_{dR}(U_1) \arrow[r] & H^{k-1}_{dR}(U_0\cap U_1) \arrow[dll, "\delta"] \\
H^k_{dR}(M) \arrow[r] & H^k_{dR}(U_0)\oplus H^k_{dR}(U_1) \arrow[r] & H^k_{dR}(U_0\cap U_1) \arrow[dll, "\delta"] \\
H^{k+1}_{dR}(M) \arrow[r] & H^{k+1}_{dR}(U_0)\oplus H^{k+1}_{dR}(U_1) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

sia una successione esatta. L'omomorfismo di connessione di questa successione, detta *successione di Mayer Vietoris*, sarà fondamentale nello studio del Teorema di de Rham, quindi andiamo a studiare come è fatto. Sia $[\omega] \in H^k_{dR}(U_0 \cap U_1)$. Al livello delle forme, ω è immagine tramite $i_0^* - i_1^*$ di una coppia di forme (η_0, η_1) e queste sono tali che $(i_0^* - i_1^*)(d\eta_0, d\eta_1) = (d\eta_0)_{|U_0\cap U_1} - (d\eta_1)_{|U_0\cap U_1} = 0$. Esiste dunque una forma chiusa α su M tale che $\alpha_{|U_0} = d\eta_0$ e $\alpha_{|U_1} = d\eta_1$, e dunque $\delta([\omega]) = [\alpha]$. Se $\{\rho_0, \rho_1\}$ è una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_0, U_1\}$, possiamo prendere $\eta_0 = \rho_1\omega$ e $\eta_1 = -\rho_0\omega$ come nella dimostrazione del Teorema 4.1.12 e siccome ω è chiusa, otteniamo che la forma

$$\alpha = \begin{cases} \rho_1\omega & \text{su } U_0 \\ -\rho_0\omega & \text{su } U_1 \end{cases} \tag{4.4}$$

soddisfa $\alpha_{|U_0} = \rho_1\omega = d(\rho_1\omega)$ e $\alpha_{|U_1} = -\rho_0\omega = -d(\rho_0\omega)$, dunque

$$\delta([\omega]) = \begin{cases} [\rho_1\omega] & \text{su } U_0 \\ [-\rho_0\omega] & \text{su } U_1 \end{cases} \tag{4.5}$$

4.2 Integrazione di catene

L'obiettivo di questa sezione è quello di mostrare la *formula di Stokes per l'integrazione su catene*, in analogia con il Teorema di Stokes classico (Teorema 3.3.1); questa ci permetterà di definire, nella sezione successiva, l'isomorfismo di de Rham tra la coomologia di de Rham e la coomologia singolare a coefficienti in $\mathbb{R}$. Iniziando ricordando le principali definizioni della coomologia singolare.

Definizione 4.2.1. Chiamiamo *k-simplesso standard* il sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$ definito da

$$\Delta^k = \left\{ x \in \mathbb{R}^k \mid x = \sum_{i=1}^k t_i e_i \ , \ \sum_{i=1}^k t_i \leq 1 \right\}.$$

Un *k-simplesso singolare in M* sarà una mappa continua $\sigma\colon \Delta^k \to M$. Denotiamo con $C_k(M)$ lo spazio vettoriale reale libero sull'insieme dei k-simplessi singolari. Per $j \in \{1, \cdots, k\}$ definiamo

- $\partial_0\Delta^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x = \sum_{i=1}^k t_i e_i \ , \ \sum_{i=1}^k t_i = 1\}$,
- $\partial_j\Delta^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^k t_i e_i \ , \ \sum_{i=1}^k t_i = 1\}$

e diciamo che $\partial_i\Delta^k$ è la *i-esima faccia* di Δ^k. Per ogni $j \in \{1, \dots, k\}$ possiamo allora definire $F_{i,k}\colon \Delta^{k-1} \to \partial_i\Delta^k$, detta la *i-esima mappa di faccia*, nel seguente modo:

- $F_{0,k}(x_1, \dots, x_{k-1}) = (1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i, x_1, \dots, x_{k-1})$,
- $F_{j,k}(x_1, \dots, x_{k-1}) = (x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_{k-1})$.

Per finire, definiamo la *mappa di bordo* $\partial\colon C_k(M) \to C_{k-1}(M)$ come

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma \circ F_{i,k}$$

sui simplessi singolari, ed estendiamo per linearità.

Nota. Nel seguito useremo liberamente teoria e risultati dell'omologia e della coomologia singolare. Per i dettagli a riguardo si rimanda a [Hat02].

Definizione 4.2.2. Un *k-simplesso singolare di classe C^∞* (o *liscio*) *su M* è una funzione $\sigma\colon \Delta^k \to M$ di classe C^∞, cioè tale che per ogni punto di Δ^k esistano un intorno aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e una funzione $\eta\colon U \to M$ di classe C^∞ tali che $\eta_{|\Delta^k} = \sigma$. Definiamo il *complesso delle catene singolari di classe C^∞* (o *lisce*) come il complesso $(C_\bullet^\infty(M), \partial)$, con $C_k^\infty(M)$ lo spazio vettoriale reale libero sull'insieme dei simplessi singolari lisci. Questo è un sottocomplesso di $(C_\bullet(M), \partial)$ e possiamo quindi considerarne i gruppi di omologia, che indichiamo con $H_k^\infty(M)$.

Teorema 4.2.3. L'inclusione di complessi $i\colon C_\bullet^\infty(M) \hookrightarrow C_\bullet(M)$ induce un isomorfismo $H_k^\infty(M) \xrightarrow{\cong} H_k(M)$ in omologia.

Dimostrazione. Si rimanda a [Lee13, Teorema 18.7]. □

Definizione 4.2.4. Siano M una varietà differenziabile, ω una k-forma e $\sigma\colon \Delta^k \to M$ di classe C^∞. Definiamo *l'integrale di ω su σ* come

$$\int_\sigma \omega := \int_{\text{int } \Delta^k} (\sigma_{|\text{int } \Delta^k})^* \omega$$

dove con int Δ^k intendiamo la parte interna di Δ^k. Se c è una catena singolare C^∞, $c = \sum_i a_i \sigma_i$, definiamo

$$\int_c \omega := \sum_i a_i \int_{\sigma_i} \omega.$$

Osservazione 4.2.5. Nonostante l'integranda nella Definizione 4.2.4 sia definita solo nell'interno del simplesso, questa si estende facilmente ad una forma su tutto Δ^k. Questo perché σ è definita su tutto Δ^k e su $\mathrm{int}(\Delta^k)$ vale la formula (3) della Proposizione 2.1.19, dunque posso estendere $(\sigma_{|\Delta^k})^*\omega$ su $\partial\Delta^k$.

Vale una versione del Teorema 3.3.1 per le catene.

Teorema 4.2.6 (Teorema di Stokes per l'integrazione su catene)**.** Sia M una varietà differenziabile, ω una $(k-1)$-forma e c una k-catena singolare liscia. Allora

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Dimostrazione. Per linearità ci basta mostrare il teorema quando c è un simplesso singolare liscio $\sigma\colon \Delta^k \to M$. Inoltre essendo $\sigma^*\omega$ una $(k-1)$-forma su Δ^k, questa si scrive come $\sum_{i=1}^k a_i(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k$ dove il cappuccio indica che dx^i non è presente nel prodotto wedge. Sempre per linearità dell'integrale è quindi sufficiente mostrare il teorema quando $\sigma^*\omega = a(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k$. In questo caso abbiamo che $\sigma^*d\omega = d\sigma^*\omega = (-1)^{i-1}\frac{\partial a}{\partial x^i}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$. La formula che vogliamo provare è quindi

$$(-1)^{i-1}\int_{\Delta^k} \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dx^1 \cdots dx^k = \sum_{j=0}^{k} \int_{\Delta^{k-1}} F_{j,k}^*(a(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k) \tag{4.6}$$

con $F_{j,k}\colon \Delta^{k-1} \to \Delta^k$ la j-esima mappa di faccia di Δ^k come descritta nella Definizione 4.2.1. Applicando il Teorema di Fubini, per il primo membro dell'uguaglianza in (4.6) vale

$$\begin{aligned}\int_{\Delta^k} \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dx^1 \cdots dx^k &= \int_A \left(\int_0^{1-\sum_{j\neq i} x_j} \frac{\partial a}{\partial x^i} dx^i \right) dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^k \\ &= \int_A a(x^1, \dots, x^{i-1}, 1 - \sum_{j\neq i} x_j, x^{i+1}, \dots, x^k) \\ &\quad - a(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^k))\, dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^k\end{aligned} \tag{4.7}$$

dove A è il $(k-1)$-simplesso ottenuto da Δ^k omettendo la i-esima coordinata, che può essere identificato con Δ^{k-1} tramite il diffeomorfismo

$$\psi\colon A \to \Delta^{k-1},\ (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^k) \mapsto (x^1, \dots, x^{i-1}, x^k, x^{i+1}, \dots, x^{k-1}).$$

Questo diffeomorfismo ha determinante $(-1)^{i-1}$ dunque l'ultimo membro della (4.7) diventa

$$\begin{aligned}(-1)^{i-1}\int_{\Delta^{k-1}} &(a(x^1, \dots, x^{i-1}, 1 - \sum_{j\neq i} x_j, x^{i+1}, \dots, x^k) \\ &- a(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^k))\, dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^k.\end{aligned}$$

Per definizione delle mappe di faccia, abbiamo che $F_{j,k}^* dx^i \neq 0$ se e solo se $j = 0$ oppure $j = i$, dunque per il membro di destra della (4.6) vale

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k} \int_{\Delta^{k-1}} & F_{j,k}^*(a(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k) \\ &= \int_{\Delta^{k-1}} a(1 - \sum_{j \neq i} x^j, x^1, \ldots, x^{k-1})\, dx^1 \cdots dx^{k-1} + \\ &(-1)^i \int_{\Delta^{k-1}} a(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^i, \ldots, x^{k-1})\, dx^1 \cdots dx^{k-1}.\end{aligned}$$

da cui segue l'uguaglianza in (4.6). □

4.3 Il teorema di de Rham

Per prima cosa, ricordiamo il seguente teorema

Teorema 4.3.1 (Teorema dei coefficienti universali)**.** Siano G un gruppo abeliano, $C_\bullet$ un complesso di catene di gruppi abeliani liberi con gruppi di omologia $H_n(C)$ e siano $H^n(C,G)$ i gruppi di coomologia del complesso delle cocatene $\mathrm{Hom}(C_\bullet, G)$. Per ogni n si ha una sequenza esatta corta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(C), G) \longrightarrow H^n(C,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n(C), G) \longrightarrow 0.$$

Dimostrazione. Si rimanda a [Hat02, Teorema 3.2] □

In questa tesi saremo interessati al caso $G = \mathbb{R}$. In questo caso, essendo $\mathbb{R}$ un gruppo abeliano iniettivo, vale che $\mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(C), \mathbb{R}) = 0$ per ogni n. Quindi per il Teorema 4.3.1, $H^n(C, \mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}(H_n(C), \mathbb{R})$ e nel seguito identificheremo questi due gruppi.

I Teoremi 4.2.6 e 4.2.3 ci garantiscono la buona positura della seguente funzione

$$\mathfrak{I}_M \colon H^k_{dR}(M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H_k(M), \mathbb{R}),\ [\omega] \mapsto \int_{(\bullet)} \omega,$$

dove definiamo

$$\left(\int_{(\bullet)} \omega\right)([c]) = \int_{\tilde{c}} \omega$$

con $\tilde{c}$ una catena singolare liscia equivalente a c. Se $\tilde{c}$ e $\tilde{c}'$ sono due catene lisce entrambe equivalenti a c in omologia, allora $\tilde{c}' = \tilde{c} + \partial \tilde{b}$ con $\tilde{b}$ liscia, da cui

$$\int_{\tilde{c}'} \omega = \int_{\tilde{c}} \omega + \int_{\partial \tilde{b}} \omega = \int_{\tilde{c}} \omega$$

perché ω è chiusa. Se invece ω e ω' sono equivalenti in coomologia, abbiamo che $\omega' = \omega + d\eta$, da cui

$$\int_{\tilde{c}} \omega' = \int_{\tilde{c}} \omega + \int_{\tilde{c}} d\eta = \int_{\tilde{c}} \omega + \int_{\partial \tilde{c}} \eta = \int_{\tilde{c}} \omega$$

perché $\tilde{c}$ è chiusa, dunque $\partial \tilde{c} = 0$. Da questo segue che l'omomorfismo $\mathfrak{I}_M$, che chiamiamo *omomorfismo di de Rham*, è ben posto. Nel seguito, dato un aperto U di una varietà M, scriveremo $\mathfrak{I}_U$ per indicare l'omomorfismo di de Rham tra i gruppi $H^k_{dR}(U)$ e $H^k(U;\mathbb{R})$. Per prima cosa mostriamo la naturalità.

Proposizione 4.3.2. Valgono le seguenti:

1. Se $F\colon M \to N$ è una funzione di classe C^∞, il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} H^k_{dR}(N) & \xrightarrow{F^*} & H^k_{dR}(M) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{I}_N} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{I}_M} \\ H^k(N,\mathbb{R}) & \xrightarrow{F^*} & H^k(M,\mathbb{R}) \end{array}$$

2. Dati U_0, U_1 aperti di M tali che $U_0 \cup U_1 = M$, siano δ l'omomorfismo di connessione della successione di Mayer-Vietoris per la coomologia di de Rham e ∂^* quello per la coomologia singolare. Allora il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} H^k_{dR}(U_0 \cap U_1) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}_{dR}(M) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{I}_{U_0 \cap U_1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{I}_M} \\ H^k(U_0 \cap U_1,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\partial^*} & H^{k+1}(M,\mathbb{R}) \end{array}$$

Dimostrazione. Per la prima, sia ω una k-forma su N. Allora per ogni k-simplesso singolare liscio $\sigma\colon \Delta^k \to M$ vale che

$$\begin{aligned}(F^*\mathfrak{I}_N([\omega]))([\sigma]) &= F^*\left(\int_{(\bullet)} \omega\right)(\sigma) = \left(\int_{(\bullet)} \omega\right)(F \circ \sigma) \\ &= \int_{F\circ\sigma} \omega = \int_{\Delta^k} (F\circ\sigma)^*\omega = \int_\sigma F^*\omega = \mathfrak{I}_M(F^*[\omega])([\sigma]).\end{aligned}$$

Per linearità, abbiamo mostrato la (1). Per la (2), iniziamo osservando che siccome stiamo identificando $H^k(M,\mathbb{R})$ con $\mathrm{Hom}(H_k(M),\mathbb{R})$, l'omomorfismo di connessione ∂^* della coomologia singolare è semplicemente l'omomorfismo duale dell'omomorfismo di connessione dell'omologia singolare, cioè $\partial^*\varphi = \varphi \circ \partial_*$ per ogni $\varphi \in \mathrm{Hom}(H_k(M),\mathbb{R})$. Dunque per mostrare la (2) dobbiamo verificare che per ogni $\omega \in H^k_{dR}(U_0 \cap U_1)$ e per ogni $c \in H_{k+1}(M,\mathbb{R})$ vale che $\mathfrak{I}_M(\delta([\omega]))([c]) = \partial^*(\mathfrak{I}_{U_0\cap U_1}([\omega]))([c]) = \mathfrak{I}_{U_0\cap U_1}([\omega])(\partial_*([c]))$. Nell'Osservazione 4.1.14 abbiamo mostrato che, prese $\eta_0 \in \Omega^k_M(U_0)$ e $\eta_1 \in \Omega^k_M(U_1)$

tali che $\eta_{0|U_0\cap U_1} - \eta_{1|U_0\cap U_1} = \omega$ e $\alpha \in \Omega^{k+1}(M)$ tale che $\alpha_{|U_0} = d\eta_0$ e $\alpha_{|U_1} = d\eta_1$, vale $\delta([\omega]) = [\alpha]$. Per l'omomorfismo ∂_* dell'omologia singolare invece, consideriamo $b_0 \in C_k(U_0)$ e $b_1 \in C_k(U_1)$ tali che $b_0 + b_1$ sia omologo a c e $a \in C_{k+1}(U_0 \cap U_1)$ tale che $a = \partial b_0 = -\partial b_1$; allora $\partial_*([c]) = [a]$. A meno di cambiare rappresentanti possiamo assumere che a e c siano lisci, da cui

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_M(\delta([\omega]))([c]) &= \int_c \alpha = \int_{b_0} \alpha + \int_{b_1} \alpha = \int_{b_0} d\eta_0 + \int_{b_1} d\eta_1 \\ &= \int_{\partial b_0} \eta_0 + \int_{\partial b_1} \eta_1 = \int_a \eta_0 - \int_a \eta_1 = \int_a \omega = \mathfrak{I}_{U_0\cap U_1}([\omega])(\partial_*([c]))\end{aligned}$$

□

Teorema 4.3.3. Sia M una varietà di dimensione n e $\mathcal{P}$ una famiglia di aperti di M che soddisfi le seguenti condizioni:

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$
2. se U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$ sono elementi di $\mathcal{P}$ anche $U_1 \cup U_2$ lo è;
3. se $\{U_\alpha\} \subseteq \mathcal{P}$ è una famiglia numerabile di aperti a due a due disgiunti allora $\coprod_\alpha U_\alpha \in \mathcal{P}$;
4. se $U \subseteq M$ è un aperto diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$ allora $U \in \mathcal{P}$.

Allora $M \in \mathcal{P}$.

Dimostrazione. Iniziamo dimostrando per induzione che se $U_1, \dots, U_k$ sono tali che tutte le loro intersezioni stanno in $\mathcal{P}$ allora $U_1 \cup \dots \cup U_k \in \mathcal{P}$, dove il passo base è l'ipotesi (2). Supponendo sia vero per $k-1$, abbiamo che $U = U_1 \cup \dots \cup U_{k-1} \in \mathcal{P}$ e

$$U \cap U_k = \bigcup_{i=1}^{k-1} (U_i \cap U_k) \in \mathcal{P}$$

da cui $U \cup U_k \in \mathcal{P}$.

Mostriamo adesso che se $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}$ è una famiglia numerabile localmente finita di aperti a chiusura compatta tale che $U_{\lambda_1} \cap \dots \cap U_{\lambda_k} \in \mathcal{P}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ in $\mathbb{N}$, allora $U = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{P}$. Poniamo $I_0 = \{0\}$, $W_0 = U_0$ e per $k > 0$ definiamo per induzione

$$I_k = (\{k\} \cup \{j \in \mathbb{N} \mid j > k, U_j \cap W_{k-1} \neq \varnothing\}) \smallsetminus \bigcup_{i=0}^{k-1} I_i,$$

$$W_k = \bigcup_{j\in I_k} U_j$$

con la convenzione $W_k = \varnothing$ se $I_k = \varnothing$. Mostriamo che ogni I_k è un insieme finito e che W_k è un aperto a chiusura compatta in $\mathcal{P}$: per $k = 0$ è vero e supponiamo sia vero per $k-1$; allora $\overline{W_{k-1}}$ è compatto, dunque interseca solo un numero finito di U_λ perché $\{U_\lambda\}$ è una famiglia localmente finita. Quindi I_k è finito e W_k è unione finita di aperti a chiusura compatta, dunque è a chiusura compatta ed è un elemento di $\mathcal{P}$ (per quanto visto all'inizio della dimostrazione se W_k non è vuoto, per l'ipotesi (1) se lo è). Per costruzione, $\bigcup_k I_k = \mathbb{N}$, da cui $\bigcup_k W_k = U$. Sia ora h tale che $W_k \cap W_h \neq \varnothing$. Allora deve essere $h = k-1$; infatti se per assurdo fosse $h < k-1$, dovrebbe esistere $j \in I_k, j \geq k > h+1$ tale che $U_j \cap W_k \neq \varnothing$. Ma allora si avrebbe che $j \in I_0 \cap \ldots \cap I_{h+1}$, che è assurdo per definizione degli I_h. Inoltre, $W_k \cap W_{k-1}$ è unione finita di intersezioni di coppie di elementi della famiglia $\{U_i\}$ e quindi è un elemento di $\mathcal{P}$. Poniamo adesso

$$V_p = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} W_{2j} \quad \text{e} \quad V_d = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} W_{2j+1}. \tag{4.8}$$

Per costruzione, V_p e V_d sono unione disgiunta e numerabile di elementi di $\mathcal{P}$, dunque appartengono a $\mathcal{P}$. Inoltre vale che

$$V_p \cap V_q = \bigcup_{i\geq 1} W_{2i} \cap W_{2i-1}$$

cioè è unione numerabile di elementi di $\mathcal{P}$ a due a due disgiunti e quindi è un elemento di $\mathcal{P}$. Abbiamo così che U è un elemento di $\mathcal{P}$.

Vediamo adesso che se (U,φ) è una carta locale per M allora $U \in \mathcal{P}$. Poniamo $V = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ e consideriamo un ricoprimento aperto, localmente finito e numerabile $\{W_j\}$ di V tale che ogni elemento del ricoprimento sia della forma

$$W_j = (a_1,b_1) \times \cdots \times (a_n,b_n)$$

per opportuni intervalli aperti e limitati $(a_i,b_i) \subset \mathbb{R}$. Possiamo inoltre supporre che la chiusura dei W_j sia contenuta in V. Ma i W_j sono diffeomorfi a $\mathbb{R}^n$ e anche le loro intersezioni finite lo sono. Allora $\{\varphi^{-1}(W_j)\}$ è un ricoprimento aperto, numerabile e localmente finito di U i cui elementi sono a chiusura compatta e tale che ogni intersezione finita è diffeomorfa ad $\mathbb{R}^n$, cioè ogni intersezione finita sta in $\mathcal{P}$. Allora anche U è un elemento di $\mathcal{P}$.

Infine, abbiamo che M è un elemento di $\mathcal{P}$. Infatti possiamo considerare un atlante numerabile e localmente finito $\{(W_j,\varphi_j)\}$ di M fatto di aperti coordinati a chiusura compatta. Siccome l'intersezione di aperti coordinati è ancora un aperto coordinato, l'unione dei W_j, che è proprio M, è un elemento di $\mathcal{P}$. $\square$

Teorema 4.3.4 (Teorema di de Rham)**.** Per ogni varietà differenziabile M, l'omomorfismo di de Rham è un isomorfismo.

Dimostrazione. Indichiamo con $\mathcal{P}$ la famiglia contenente l'insieme vuoto e gli aperti $U \subseteq M$ tali per cui $\mathfrak{I}_U$ è un isomorfismo.

Per prima cosa osserviamo che se $\{U_\alpha\}$ è una famiglia di aperti di M disgiunti a due a due e tali che ciascun U_α sta in $\mathcal{P}$, allora $U = \coprod_\alpha U_\alpha \in \mathcal{P}$, grazie all'Osservazione 4.1.4 e alla Proposizione 4.3.2. Infatti per ogni α possiamo considerare l'inclusione $i_\alpha \colon U_\alpha \hookrightarrow \coprod_\alpha U_\alpha$ ottenendo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc}
H^k_{dR}(\coprod_\alpha U_\alpha) & \xrightarrow{i^*_\alpha} & H^k_{dR}(U_\alpha) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{I}_{\coprod_\alpha U_\alpha}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{I}_{U_\alpha}} \\
H^k(\coprod_\alpha U_\alpha, \mathbb{R}) & \xrightarrow{i^*_\alpha} & H^k(U_\alpha, \mathbb{R}).
\end{array}$$

Da questo otteniamo

$$\begin{array}{ccc}
H^k_{dR}(\coprod_\alpha U_\alpha) & \xrightarrow{\prod_\alpha i^*_\alpha} & \prod_\alpha H^k_{dR}(U_\alpha) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{I}_{\coprod_\alpha U_\alpha}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \prod_\alpha \mathfrak{I}_{U_\alpha}} \\
H^k(\coprod_\alpha U_\alpha, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\prod_\alpha i^*_\alpha} & \prod_\alpha H^k(U_\alpha, \mathbb{R}).
\end{array}$$

e siccome $\prod_\alpha i^*_\alpha$ e $\prod_\alpha \mathfrak{I}_{U_\alpha}$ sono isomorfismi, deve esserlo anche $\mathfrak{I}_{\coprod_\alpha U_\alpha} \colon H^k_{dR}(\coprod_\alpha U_\alpha) \to H^k(\coprod_\alpha U_\alpha, \mathbb{R})$.

Vediamo ora che se U, V e $U \cap V$ sono elementi di $\mathcal{P}$, anche $U \cup V$ lo è. Usando la successione lunga di Mayer-Vietoris per entrambe le coomologie otteniamo il seguente diagramma esatto per colonne e commutativo grazie alla Proposizione 4.3.2

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
H^k_{dR}(U) \oplus H^k_{dR}(V) & \xrightarrow{\mathfrak{I}_U \oplus \mathfrak{I}_V} & H^k(U, \mathbb{R}) \oplus H^k(V, \mathbb{R}) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
H^k_{dR}(U \cap V) & \xrightarrow{\mathfrak{I}_{U \cap V}} & H^k(U \cap V, \mathbb{R}) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
H^{k+1}_{dR}(U \cup V) & \xrightarrow{\mathfrak{I}_{U \cup V}} & H^{k+1}(U \cup V, \mathbb{R}) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
H^{k+1}_{dR}(U) \oplus H^{k+1}_{dR}(V) & \xrightarrow{\mathfrak{I}_U \oplus \mathfrak{I}_V} & H^{k+1}(U, \mathbb{R}) \oplus H^{k+1}(V, \mathbb{R}) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
H^{k+1}_{dR}(U \cap V) & \xrightarrow{\mathfrak{I}_{U \cap V}} & H^{k+1}(U \cap V, \mathbb{R}) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Per il lemma dei cinque, $\mathfrak{I}_{U\cup V}$ è un isomorfismo.

Per finire, nel caso di sottospazi aperti $U \subseteq M$ diffeomorfi ad $\mathbb{R}^n$, il Corollario 4.1.9 per la coomologia di de Rham e l'invarianza per omotopia della coomologia singolare ci dicono che $H^k_{dR}(U) = H^k(M, \mathbb{R}) = 0$ per ogni $k \neq 0$ dunque $\mathfrak{I}_U$ è banalmente un isomorfismo in questo caso. Nel caso di $k = 0$, siccome entrambi i gruppi di coomologia hanno dimensione 1, ci basta mostrare che $\mathfrak{I}_U$ non è l'omomorfismo nullo. Ricordiamo che un elemento di $H^0_{dR}(U)$ è una funzione localmente costante, mentre $H^0(U, \mathbb{R})$ è generato da un qualunque simplesso $\sigma\colon \Delta^0 = \{0\} \to U$. Quindi prendendo f la funzione costante uguale a 1 su U, abbiamo che $\mathfrak{I}_U([f])([\sigma]) = \int_\sigma f = (f \circ \sigma)(0) = 1$, da cui $\mathfrak{I}_U$ è non nullo e quindi necessariamente un isomorfismo.

Abbiamo quindi che $\mathcal{P}$ soddisfa tutte le ipotesi del Teorema 4.3.3, dunque $M \in \mathcal{P}$, cioè $\mathfrak{I}_M\colon H^k_{dR}(M) \to H^k(M, \mathbb{R})$ è un isomorfismo per ogni k. □

Osservazione 4.3.5. Osserviamo che date due forme chiuse ω e η di grado rispettivamente k e h, anche il loro prodotto wedge è chiuso. Infatti $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta = 0$. Inoltre, se $\omega = \omega' + d\varphi$ e η è chiusa, vale che $\omega \wedge \eta = \omega' \wedge \eta + d(\varphi \wedge \eta)$.

Definizione 4.3.6. L'Osservazione 4.3.5 ci dice che è ben posta l'applicazione bilineare

$$\wedge\colon H^k_{dR}(M) \times H^h_{dR}(M) \to H^{k+h}_{dR}(M), ([\omega], [\eta]) \mapsto [\omega \wedge \eta].$$

Lo chiamiamo *prodotto cup in coomologia di de Rham.* Definiamo *l'algebra di coomologia di de Rham della varietà M* come lo spazio vettoriale reale graduato

$$H^\bullet_{dR}(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} H^k_{dR}(M)$$

con il prodotto dato dal prodotto cup.

È possibile dimostrare che l'isomorfismo di de Rham $\mathfrak{I}_M\colon H^k_{dR}(M) \to H^k(M, \mathbb{R})$ soddisfa $\mathfrak{I}_M([\omega \wedge \eta]) = \mathfrak{I}_M([\omega]) \smile \mathfrak{I}_M([\eta])$ dove $\smile$ è il prodotto cup in coomologia singolare. In questo modo, l'omomorfismo di de Rham diventa un isomorfismo tra le $\mathbb{R}$-algebre graduate $H^\bullet_{dR}(M)$ e $H^\bullet(M, \mathbb{R})$. Si rimanda a [GH94, Pag.59-60].

Di seguito, ci poniamo il problema di trovare generatori dei gruppi di coomologia per qualche esempio di varietà e vediamo come questo ci permetta anche di calcolarne l'algebra di coomologia. Negli esempi daremo direttamente i gruppi di coomologia degli spazi, senza dimostrazione. Questo perché una volta noto il Teorema 4.3.4, il calcolo effettivo della coomologia può essere fatto tramite i soliti strumenti della (co)omologia singolare. Un possibile riferimento per questi calcoli è [Hat02].

Esempio 4.3.7. Ricordiamo che la coomologia della sfera $\mathbb{S}^n$ è data da

$$H^k_{dR}(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0, n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ci basterà dunque trovare una forma non esatta di grado n. Ricordando il Teorema 3.3.3 e considerando $\mathbb{S}^n$ come sottovarietà di codimensione 1 di $\mathbb{R}^{n+1}$, ci basta considerare la forma volume $\omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n+1}$ su $\mathbb{R}^{n+1}$. Identifichiamo il tangente ad $\mathbb{S}^n$ in $x = (x^1, \ldots, x^{n+1})$ con l'iperpiano perpendicolare al vettore x e definiamo $N = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n}$. La forma

$$\eta = \iota_N \omega = \sum_{i=1}^{n+1} x^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^{n+1}$$

è allora una forma volume, dunque genera $H^n_{dR}(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$ grazie all'Osservazione 4.1.6.

Prima del prossimo esempio, facciamo un'osservazione importante.

Osservazione 4.3.8. Sia M una varietà di dimensione n orientata, compatta e senza bordo e siano $\omega_1, \ldots, \omega_k$ forme differenziali chiuse tali che $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$ sia una forma volume per M. Allora per ogni $i_1 < \cdots < i_k$ in $\{1, \ldots, n\}$ vale che $\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k}$ non è esatta. Infatti, sia per assurdo $\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k} = d\alpha$ per qualche $(k-1)$-forma α. Dato un multi indice $J = \{j_1 < \cdots < j_k\}$ scriviamo $\omega_J = \omega_{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_k}$. Allora se $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ vale che $d(\alpha \wedge \omega_{I^c}) = d\alpha \wedge \omega_{I_c} = \pm \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$. Ma quest'ultima è una forma volume per ipotesi, e quindi non può essere esatta per l'Osservazione 4.1.6.

Esempio 4.3.9. Ricordiamo che la coomologia del toro $\mathbb{T}^n = \prod_{i=1}^n \mathbb{S}^1$ è data da $H^k_{dR}(\mathbb{T}^n) \cong \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ per ogni $0 \le k \le n$. In questo esempio, cercheremo generatori di $H^1_{dR}(\mathbb{T}^n)$ che soddisfino l'ipotesi dell'Osservazione 4.3.8. Per iniziare, consideriamo su $\mathbb{S}^1$ le due carte locali $\varphi \colon \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{1\} \to (0, 2\pi), \varphi^{-1}(\theta) = e^{i\theta}$ per ogni $\theta \in (0, 2\pi)$ e $\psi \colon \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{-1\} \to (-\pi, \pi), \psi^{-1}(\theta) = e^{i\theta}$ per ogni $\theta \in (-\pi, \pi)$ e osserviamo che, su $\mathbb{S}^1 \smallsetminus \{\pm 1\}$, $d\varphi = d\psi$, dunque possiamo considerare la forma ω data dall'incollamento di $d\varphi$ e $d\psi$. Questa forma è chiusa perché localmente esatta. Mostriamo che non è esatta: consideriamo il cammino $\gamma \colon [0,1] \to S^1, t \mapsto e^{i2\pi t}$. Allora abbiamo che

$$\int_\gamma \omega = \int_{[0,1]} \gamma^* \omega = \int_{(0,1)} \gamma^* d\varphi = \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0)) = 2\pi \neq 0.$$

Adesso vogliamo portare ω su $\mathbb{T}^n$. Sia $\pi_i \colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^1$ la proiezione sull'i-esimo fattore. Possiamo allora definire le forme $\omega_i = \pi_i^* \omega$, che sono ancora chiuse perché pullback e differenziale esterno commutano. Inoltre sono ancora non esatte. Per vederlo, consideriamo l'embedding $p_i\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{T}^n, z \mapsto (1,\dots,z,\dots,1)$ dove z è nell'i-esima coordinata. Allora

$$\int_{p_i\circ\gamma} \omega_i = \int_{(0,2)} (\pi_i \circ p_i \circ \gamma)^*\omega = 2\pi \neq 0.$$

Vogliamo mostrare che le classi di coomologia di queste 1-forme generano $H^1_{dR}(\mathbb{T}^n)$. Ci basta controllare che siano linearmente indipendenti, e per questo basta osservare che

$$\int_{p_i\circ\gamma} \omega_j = 2\pi\delta_{ij}$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker. Da questo segue che se $\sum_{i=1}^{n} a_i[\omega_i] = 0$ allora, integrando, deve essere $a_i = 0$ per ogni i. Vediamo adesso che $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n$ è una forma volume su $\mathbb{T}^n$. Tornando su $\mathbb{S}^1$, definiamo su $\mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$ il campo $V = (\varphi^{-1})_*\frac{\partial}{\partial x}$ e su $\mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$ il campo $W = (\psi^{-1})_*\frac{\partial}{\partial x}$. Su $\mathbb{S}^1 \setminus \{\pm 1\}$, deve essere $V = aW$ da cui $a = V(\psi) = \frac{\partial(\psi\circ\varphi)}{\partial x} = 1$, dunque possiamo incollare V e W sulla circonferenza. Chiamiamo G il nuovo campo. Ricordando che $T_p\mathbb{T}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} T_{\pi_i(p)}\mathbb{S}^1$, posso considerare su $\mathbb{T}^n$ il campo G_i uguale a G nella i-esima componente e 0 nelle altre. Osserviamo che $\omega_i(G_j) = \delta_{i,j}$. Allora vale che

$$\omega_1 \wedge\cdots\wedge \omega_n(G_1,\dots,G_n) = 1.$$

Da questo segue che $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n$ è una n-forma mai nulla su M, dunque è una forma volume su $\mathbb{T}^n$. L'Osservazione 4.3.8 ci dice allora che, per k fissato, le forme $\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_k}$ danno elementi non nulli e linearmente indipendenti in coomologia, ed essendo proprio $\binom{n}{k}$ formano una base per $H^k_{dR}(\mathbb{T}^n)$. Questo ci dice anche che $H^\bullet_{dR}(\mathbb{T}^n) \cong H^\bullet(\mathbb{T}^n,\mathbb{R}) \cong \bigwedge^\bullet(\mathbb{R}^n)$, l'algebra esterna di $\mathbb{R}^n$.

Esempio 4.3.10. Per finire, studiamo i generatori della coomologia del proiettivo complesso $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ che ricordiamo essere

$$H^k_{dR}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k \text{ è pari e } 0 \leq k \leq 2n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La strategia sarà la stessa seguita per il toro: cercheremo un generatore per $H^2_{dR}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ e otterremo quelli di grado più alto come sue potenze. Partiamo dalla 2-forma simplettica standard su $\mathbb{C}^{n+1}$ data da $\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^{n+1} dx^i \wedge dy^i$ con $z_i = x_i + iy_i \in \mathbb{C}$, x_i, y_i le coordinate reali. È chiaro che questa sia chiusa. Osserviamo poi che

$$
\begin{aligned}
\tilde{\omega}^n &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^{n+1}} dx^{\sigma(1)} \wedge dy^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(n+1)} \wedge dy^{\sigma(n+1)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^{n+1}} (-1)^{2 \ \mathrm{sgn}(\sigma)} dx^1 \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n+1} \wedge dy^{n+1} \\
&= (n+1)! \ dx^1 \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n+1} \wedge dy^{n+1}
\end{aligned}
$$

e questa è una $(2n+2)$-forma mai nulla su $\mathbb{C}^{n+1}$. Sia ora $\pi \colon \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ la proiezione al quoziente e sia $d\pi_z$ il suo differenziale. Definiamo adesso, per ogni $z \in \mathbb{S}^{2n+1}$ e $v_1, v_2 \in T_{[z]}\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $\omega_{[z]}(v_1, v_2) = \tilde{\omega}_z(w_1, w_2)$ con $d\pi_z(w_i) = v_i$. Questa è ben posta e definisce quindi una 2-forma chiusa sul proiettivo. Inoltre, ω^n è una $2n$-forma mai nulla in quanto indotta su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ da $\tilde{\omega}^n$. Dunque $[\omega^k] \in H^{2k}_{dR}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ è non nulla per ogni $0 \leq k \leq n$ e abbiamo i generatori cercati. In questo caso abbiamo allora che $H^\bullet_{dR}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \cong \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^{n+1})}$ con deg $x = 2$.

Bibliografia

[AT11] Marco Abate e Francesca Tovena. *Geometria differenziale*. Vol. 54. Unitext. La Matematica per il 3+2. Springer, Milan, 2011, pp. xiv+465. ISBN: 978-88-470-1919-5. DOI: `10.1007/978-88-470-1920-1`. URL: `https://doi.org/10.1007/978-88-470-1920-1`.

[GH94] Phillip Griffiths e Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. Reprint of the 1978 original. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994, pp. xiv+813. ISBN: 0-471-05059-8. DOI: `10.1002/9781118032527`. URL: `https://doi.org/10.1002/9781118032527`.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, pp. xii+544. ISBN: 0-521-79540-0.

[Lee13] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Second. Vol. 218. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2013, pp. xvi+708. ISBN: 978-1-4419-9981-8.

[Man15] Marco Manetti. *Topology*. Italian. Vol. 91. Unitext. La Matematica per il 3+2. Springer, Cham, 2015, pp. xii+309. ISBN: 978-3-319-16957-6. DOI: `10.1007/978-3-319-16958-3`. URL: `https://doi.org/10.1007/978-3-319-16958-3`.