

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea in Astronomia

EMISSIONE DI BREMSSTRAHLUNG E APPLICAZIONI ASTROFISICHE

Tesi di laurea

Presentata da:

Riccardo Mancini

Relatore:

Chiar.ma Prof.ssa Marcella Brusa

Anno accademico 2023 – 2024

INDICE

Abstract	3
1. Introduzione alla Bremsstrahlung.....	4
1.1 <i>Bremsstrahlung da singola interazione</i>	<i>4</i>
1.2 <i>Bremsstrahlung in un plasma</i>	<i>6</i>
2. Bremsstrahlung in casi reali	8
2.1. <i>Bremsstrahlung termica.....</i>	<i>8</i>
2.2. <i>Bremsstrahlung relativistica.....</i>	<i>12</i>
3. Applicazioni Astrofisiche e sfide aperte	14
3.1. <i>Intracluster medium (ICM)</i>	<i>14</i>
3.2. <i>Regioni HII</i>	<i>15</i>
3.3. <i>Darkstrahlung.....</i>	<i>16</i>
3.4. <i>Gravitational Bremsstrahlung.....</i>	<i>17</i>
3.5. <i>Terrestrial Gamma Ray Flash.....</i>	<i>18</i>
Bibliografia.....	20

ABSTRACT

Questa tesi esamina la transizione free-free, in cui una particella libera e carica interagisce con il campo magnetico di un'altra particella, subendo una deviazione e perdendo velocità. La variazione di energia che ne risulta viene bilanciata dall'emissione di radiazione, un processo noto come *bremssstrahlung*, termine tedesco che significa "radiazione di frenamento". Questo meccanismo è cruciale nello studio dei plasmi astrofisici, nubi di gas molto caldo ($T > 10^6$ K) dove la transizione free-free è la principale sorgente di emissione perché l'idrogeno è completamente ionizzato e gli elettroni liberi hanno energie cinetiche elevate.

L'elaborato è suddiviso in due parti: la prima metà offre una descrizione dei meccanismi in chiave fisico-matematica della radiazione di *bremssstrahlung*. Nel Capitolo 1 viene innanzitutto trattato il singolo evento, analizzando il fenomeno nella sua forma più semplice. Successivamente, viene considerato un elettrone all'interno di una nube reale, composta da un numero elevato di particelle e interazioni; vengono quindi presentate le formule necessarie per il calcolo dei principali parametri descrittivi del fenomeno. Il Capitolo 2 introduce la distribuzione delle velocità per una nube reale in equilibrio termico, in cui le velocità delle particelle sono descritte dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann. Nei sottoparagrafi si approfondisce il tema dell'autoassorbimento e del tempo di raffreddamento nel caso di nubi dense e opache alla radiazione. Infine, viene analizzato il caso di un sistema relativistico in cui gli elettroni viaggiano a velocità prossime a quella della luce.

La seconda parte dell'elaborato si concentra su temi già trattati in letteratura. In particolare, il Capitolo 3 offre una panoramica su alcune applicazioni, descrivendo l'emissione nell'ISM (Mezzo Interstellare) e nell'ICM (Mezzo Intracluster), con un focus su alcuni casi reali. Gli ultimi tre paragrafi esplorano invece gli studi più recenti, i quali in alcuni casi, si addentrano nel campo delle ipotesi ancora da dimostrare. Solo gli anni futuri e ulteriori ricerche potranno confermare o smentire le teorie descritte in questa sezione.

1. INTRODUZIONE ALLA BREMSSTRAHLUNG

1.1 Bremsstrahlung da singola interazione

L'emissione di bremsstrahlung avviene quando una particella elettricamente carica, deviata dal campo generato da un'altra carica, perde energia cinetica ed emette radiazione; per questo motivo è chiamata radiazione di frenamento. Il caso più comune è quello di un elettrone che interagisce con il campo di un protone all'interno di una nube di plasma astrofisico (Figura 1).

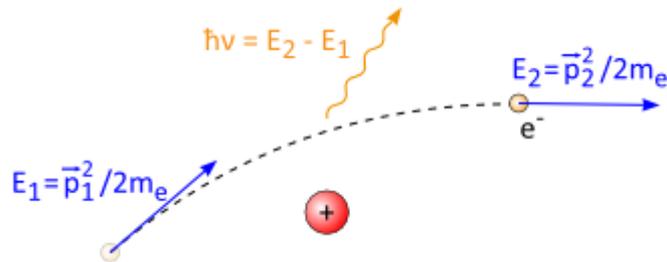


Figura 1 – Emissione di un fotone per bremsstrahlung da parte di un elettrone

In questo capitolo viene presentata una trattazione fisico-matematica finalizzata a quantificare l'energia irradiata per unità di frequenza a seguito di una singola interazione.

Si considera un elettrone libero, di carica e^- , che attraversa con velocità relativa v un campo elettrico generato da una particella carica (Ze^+). Si definisce x come la distanza tra le due particelle e b come il parametro di impatto, ossia la distanza minima che si verificherebbe tra le due in assenza di deflessione dovuta all'interazione stessa (Figura 2).

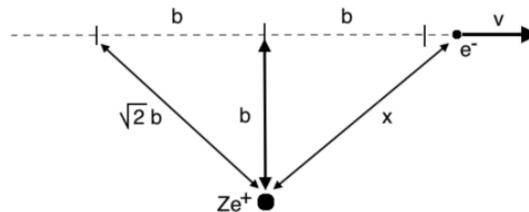


Figura 2 – Schema di interazione tra uno ione e un elettrone

Nel sistema di riferimento dello ione Ze^+ , l'elettrone subisce classicamente una forza coulombiana pari a

$$F = m_e a(t) = - \frac{Ze^2}{x(t)^2}$$

Formula 1

L'accelerazione così ottenuta viene sostituita nella formula di Larmor (Formula 2), che, derivata dalle equazioni di Maxwell, descrive la potenza emessa sotto forma di radiazione da una particella che subisce una variazione di velocità:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{2q^2 a(t)^2}{3c^3} = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{Ze^2}{m_e x(t)^2} \right)^2 = \frac{2Z^2 e^6}{3c^3} \frac{1}{m_e^2 x(t)^4}$$

Formula 2

Si osserva che la potenza emessa è inversamente proporzionale al quadrato della massa e alla quarta potenza della distanza tra le due particelle. Inoltre, la potenza massima si verifica quando $x(t)$ è pari al parametro di impatto.

Da ciò si deduce che la radiazione diventa più significativa in caso di:

1. particelle leggere;
2. urti ravvicinati.

Pertanto, viene trascurato l'effetto di rallentamento esercitato dall'elettrone sul protone, data la maggiore massa di quest'ultimo, nonostante tale effetto sia comunque presente. Inoltre, viene utilizzata l'approssimazione impulsiva ponendo $x \sim b$ costante per un tempo caratteristico di interazione $\Delta t \sim 2b/v$, così da considerare solo gli urti ravvicinati.

Con queste ipotesi è possibile riscrivere la Formula 2, esplicitando l'energia e integrando nel tempo.

$$P\Delta t = E \sim \frac{4Z^2 e^6}{3c^3 m_e^2} \frac{1}{b^3 v}$$

Formula 3

Si deduce che:

- A parità di b , l'energia totale emessa è minore per gli elettroni più veloci, poiché il tempo d'interazione tra le cariche è inferiore;
- A parità di v , l'energia totale emessa aumenta molto al diminuire del parametro d'impatto.

Nel grafico di Figura 3a è riportato l'andamento dell'emissione in funzione del tempo. Si può osservare una lieve asimmetria nella curva, attribuibile al fatto che, dopo l'urto, l'elettrone ha già perso parte della sua velocità a causa dell'interazione. La linea rossa rappresenta la stessa funzione, calcolata però sotto l'ipotesi di approssimazione impulsiva.

La trasformata di Fourier di questa funzione rappresenta la distribuzione spettrale, ovvero la potenza di emissione in funzione della frequenza, come illustrato in Figura 3b.

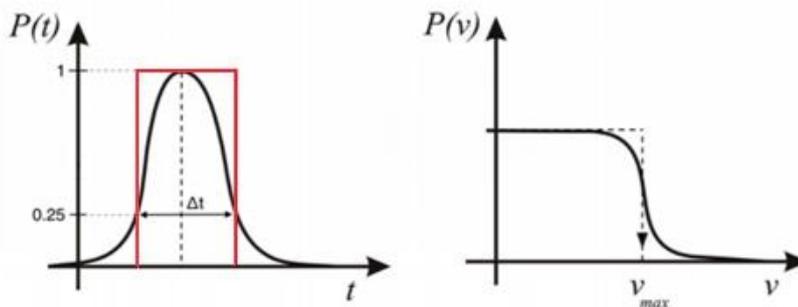


Figura 3a – Grafico di emissione in funzione del tempo

Figura 3b – Trasformata di Fourier del grafico 3a

Dal grafico in Figura 3b si evince chiaramente che l'andamento dell'emissione è pressoché costante fino a una certa frequenza caratteristica, detta di cutoff, oltre la quale decresce esponenzialmente:

$$v_{max} \sim \frac{1}{2\Delta t} = \frac{v}{4b}$$

Formula 4

Al fine di ottenere l'energia emessa per unità di frequenza viene derivata l'energia per la frequenza ottenendo:

$$\frac{dE}{dv} \simeq \frac{P\Delta t}{v_{\max}} \sim \frac{16Z^2 e^6}{3c^2 m_e^2 b^2 v^2} \propto \frac{Z^2}{b^2 v^2}$$

Formula 5

La Formula 5 quindi quantifica l'energia irradiata per unità di frequenza causata da una singola interazione.

1.2 Bremsstrahlung in un plasma

Si procede ora a generalizzare quanto esposto nel paragrafo precedente, considerando il caso di una nube di plasma costituita da elettroni e ioni liberi, con densità n_e e n_i rispettivamente. L'obiettivo è calcolare l'irradianza totale della nube dovuta alla bremsstrahlung, risultante dalla somma dei numerosi urti analoghi a quello già descritto.

Per fare questo è necessario calcolare inizialmente il numero di urti per unità di tempo che avvengono per ogni elettrone nella nube.

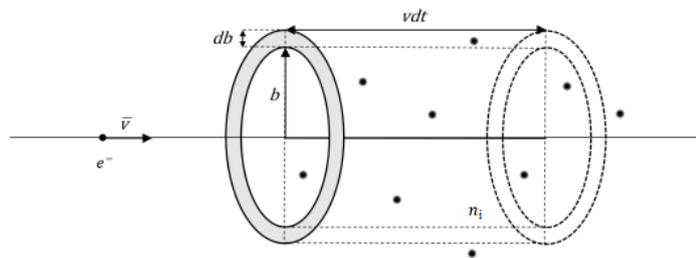


Figura 4 – Rappresentazione di un elettrone che attraversa una nube di ioni

Si considera una densità di elettroni n_e che attraversa una regione di spazio vdt , interagendo con un numero di ioni, con densità n_i , proporzionale alla sezione ottenuta tra il parametro d'impatto b e $b + db$. Il numero di urti N per unità di volume può quindi essere espresso come:

$$\frac{dN}{dV} = 2\pi n_i n_e v b db dt$$

Formula 6

Per calcolare l'energia totale (J_{br}) emessa da queste interazioni, viene moltiplicata la Formula 5 per la Formula 6 integrando nella sezione d'urto considerata:

$$J_{br}(v, \nu) = \frac{dN dE}{dV dt dv} = \frac{32\pi e^6 Z^2}{3c^3 m_e^2 v} n_e n_i \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{db}{b} = \frac{32\pi e^6 Z^2}{3c^3 m_e^2 v} n_e n_i \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right)$$

Formula 7

In particolare, considerando una nube di idrogeno ionizzato con $n_e \approx n_i$ e $Z = 1$ viene semplificata la Formula 7:

$$J_{br}(v, \nu) \propto \frac{n_e^2}{v}$$

L'emissività aumenta con il quadrato della densità numerica delle particelle nel plasma, poiché cresce il numero di interazioni, e diminuisce con l'aumento della velocità, rendendo meno efficiente l'emissione conseguente all'interazione.

Inoltre, sebbene in prima approssimazione l'emissione sembri non dipendere esplicitamente dalla frequenza ν , tale dipendenza è in realtà implicita nel parametro d'impatto b , come verrà descritto nella sezione seguente.

1.2.1 Sezione d'urto e parametro di impatto

In questo paragrafo vengono definiti i limiti di integrazione b_{\min} e b_{\max} nell'integrale della Formula 7, e viene illustrata la dipendenza della frequenza dalla scelta del parametro d'impatto b .

L'integrale della Formula 7, in teoria, dovrebbe essere calcolato tra infinito e zero per considerare tutti gli urti, dal più vicino al più distante. Tuttavia, vengono introdotte alcune considerazioni che limitano la scelta b_{\min} e b_{\max} , evitando così che l'integrale diverga date le approssimazioni utilizzate.

- L'estremo superiore viene scelto in modo tale che la frequenza ν_{\max} sia esattamente al cutoff, considerando ragionevolmente tutte le frequenze al di sotto di quella massima, dalla Formula 4 consegue che $b_{\max} = v/4\nu_{\max}$.
- Invece, per il limite minimo, $b = 0$ implicherebbe che l'elettrone urti nella stessa posizione lo ione, scambiando più di tutta l'energia cinetica che possiede. Se il plasma non è relativistico, il limite inferiore classico della sezione d'urto è la sezione alla quale l'elettrone nel tempo Δt perde completamente la sua velocità, ossia pari a:

$$\Delta v = a\Delta t = \frac{2Ze^2}{m_e b v} < v \rightarrow b_{\min, \text{class}} \equiv \frac{2Ze^2}{m_e v^2}$$

Formula 8

Alternativamente è possibile calcolare una distanza minima quantistica legata al principio di indeterminazione di Heisenberg ponendo come $\Delta x \sim b$ e $\Delta p \sim m_e v$:

$$\Delta x \Delta p > \hbar \rightarrow b_{\min, \text{quant}} \equiv \frac{\hbar}{m_e v}$$

Formula 9

Il rapporto tra il limite quantistico e quello classico è quindi:

$$\frac{(b_{\min})_{\text{quant}}}{(b_{\min})_{\text{class}}} \approx \frac{\frac{\hbar}{m_e v}}{\frac{2Ze^2}{m_e v^2}} = \frac{h\nu c}{4\pi Z^2 e^2 c} \approx \frac{137\nu}{Zc}$$

Formula 10

Questo rapporto mostra come, in condizioni in cui $\nu < 0.01c$, il limite classico domina su quello quantistico. Si può ora considerare il caso di equilibrio termodinamico in cui $\frac{1}{2}m_e v^2$

$= 3/2 kT$ e quindi in cui $v = \sqrt{3kT/m}$. Ne risulta che nelle regioni III¹, in cui la $T \sim 10^4$ K, il parametro d'impatto usato è quello classico, mentre, per gli ammassi di galassie, dove $T \sim 10^7$ K, si deve usare quello quantistico.

2. BREMSSTRAHLUNG IN CASI REALI

2.1. Bremsstrahlung termica

In questo capitolo viene applicata la Formula 7 a un plasma otticamente sottile² e all'equilibrio termico, nel quale, quindi, la velocità delle particelle è descritta dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann (Formula 11).

$$f(v)dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv$$

Formula 11

In Figura 5a sono riportati due esempi di distribuzione di Maxwell-Boltzmann che rappresentano due plasmi all'equilibrio termico a temperature T_1 e $T_2 > T_1$. In Figura 5b si osserva invece l'emissività specifica dei due plasmi alle diverse temperature. Si nota come, all'aumentare della temperatura, l'intensità di emissione diminuisce ma aumenta la frequenza massima di emissione.

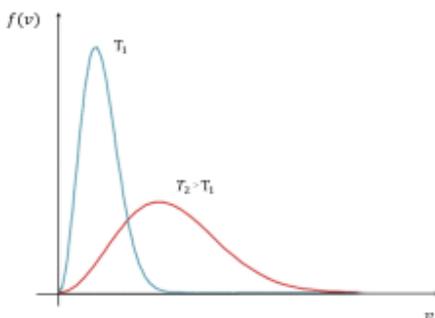


Figura 5a – Distribuzione di Maxwell-Boltzmann a differente T

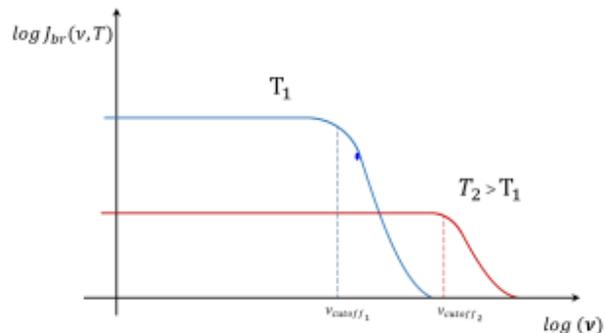


Figura 5b – Emissività specifica a differente T

Quando un plasma è all'equilibrio termico, la distribuzione di velocità delle particelle è descritta dalla Formula 11 e l'emissione è detta di bremsstrahlung termica.

Inserendo nella Formula 7 la distribuzione di velocità descritta è possibile ottenere un'equazione per calcolare l'emissività specifica di bremsstrahlung nel caso di un plasma termico. Per tenere conto della deviazione quantistica viene sostituito il logaritmo del parametro di impatto con il fattore di Gaunt correttivo, che tiene conto della deviazione quantistica rispetto alla trattazione semiclassica pari a

$$g_{ff} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right)$$

Formula 12

L'andamento del fattore di Gaunt è riportato in Figura 6.

¹ Questi sistemi sono trattati in modo specifico nel Capitolo 3.

² Questa scelta permette di considerare che la radiazione prodotta non venga autoassorbita dalla nube stessa. Caso trattato in modo specifico nel paragrafo 2.1.2

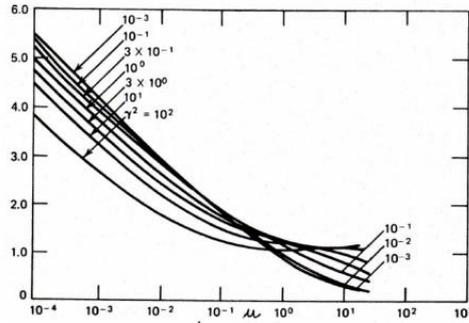


Figura 6 – Rapporto tra il fattore di Gaunt (ordinate) e il valore dell'energia come $h\nu/kT$ (ascisse)

Il fattore di Gaunt ha valore intorno a 10-15 nel dominio radio, leggermente superiore a 1 alle energie più elevate. Per ottenere l'emissività totale di una nube all'equilibrio termico, ripresa la Formula 7, viene integrata su tutte le velocità e inserito il fattore di Gaunt medio \bar{g}_{br} . Si ottiene così:

$$J_{br}(\nu, T) = \int_{\nu_{min}}^{\infty} f(\nu) J_{br}(\nu, \nu) d\nu = 6.8 \cdot 10^{-38} T^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{h\nu}{kT}} n_e n_i Z^2 \bar{g}_{br}(\nu, T)$$

Formula 13

In un caso astrofisico è possibile considerare il plasma interamente costituito da idrogeno, con una densità degli elettroni pari a quella dei protoni, e quindi semplificare la Formula 13 con $\bar{g}_{ff} = 10$, $Z = 1$ e $n_e = n_i$

$$J_{br}(\nu, T) = 6.8 \cdot 10^{-37} e^{-\frac{h\nu}{kT}} n_e^2 T^{-\frac{1}{2}}$$

Formula 14

Come precedentemente affrontato per l'evento singolo viene ora calcolata la frequenza di cutoff per poi valutare l'energia totale emessa per bremsstrahlung termica.

Essendo l'emissività J_{br} proporzionale al termine $e^{-h\nu/kT}$, essa è tendenzialmente costante (tralasciando il cambiamento derivato dal fattore di Gaunt) sin quando $\nu \approx kT/h$. Per frequenze superiori il fattore esponenziale diventa dominante e si ha la caduta di emissività. Viene definita la frequenza di cutoff come il valore per cui l'esponenziale vale $1/e$, quindi l'argomento $h\nu/kT = 1$:

$$\nu_{cutoff} = \frac{kT}{h} = 2.08 \cdot 10^{10} T$$

Formula 15

Utilizzando nuovamente gli esempi citati alla fine del Capitolo 1, nel caso delle regioni di HII, la Formula 15 restituisce un cutoff nell'infrarosso per $T \sim 10^4$ K e $\nu_{cutoff} = 2.08 \times 10^{14}$ Hz, invece negli ammassi di galassie con $T \sim 10^8$ K, $\nu_{cutoff} = 2.08 \times 10^{18}$ Hz, cade nei raggi X.

Integrando l'emissività specifica in tutte le frequenze fino a quella di cutoff si ottiene l'emissività bolometrica, approssimabile al rettangolo in Figura 7.

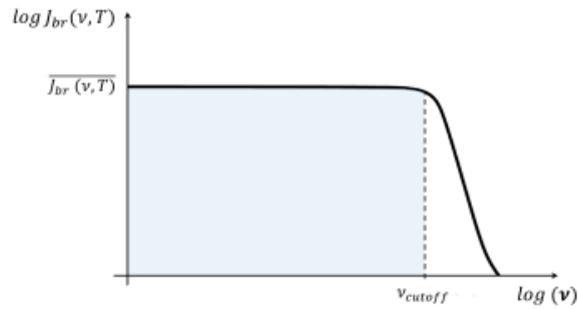


Figura 7 – Grafico tra il logaritmo dell'emissività specifica in relazione al logaritmo della frequenza di emissione. L'area celeste delimitata tra 0 e la frequenza di cut-off rappresenta in approssimazione l'energia emessa

In questa approssimazione l'emissività dipende solo dalla temperatura

$$J_{br}(T) = \frac{dE}{dt dV} = \int_0^{\infty} J_{br}(v, T) dv \approx 2.4 \cdot 10^{-27} T^{\frac{1}{2}} n_e n_i Z^2 \bar{g}_{br}(T)$$

Formula 16

Si noti che, sebbene la radiazione di bremsstrahlung del singolo evento (trattata nel Capitolo 2) emetta un'unica radiazione, di fatto polarizzata, il caso a più urti risultata non polarizzato, poiché gli elettroni sono caratterizzati da un moto disordinato, quindi ciascuno di essi ha una direzione del vettore polarizzazione differente.

Il calcolo dell'energia irradiata in Formula 16 è necessario per calcolare il tempo di raffreddamento della nube.

2.1.1 Tempo di raffreddamento

È possibile ora dividere l'energia termica totale di una nube di plasma per l'emissività totale appena ottenuta (Formula 16), al fine di calcolare il tempo necessario alla nube per raffreddarsi a causa dell'emissione prodotta.

$$t_{raff} = \frac{E_{termica}^{tot}}{J_{br}(T)} \approx \frac{\frac{3}{2} (n_e + n_i) kT}{J_{br}(T)} \sim \frac{3 n_e kT}{J_{br}(T)} \approx \frac{6 \cdot 10^3}{n_e \bar{g}_{br}} T^{\frac{1}{2}} \quad [yr]$$

Formula 17

Risulta evidente che il tempo di raffreddamento è dipendente dalla densità delle particelle e dalla temperatura. In particolare, per le regioni HII con $n_e \sim 10^{2-3}$ particelle/cm³ e $T \sim 10^4$ K si ottengono tempi nell'ordine di 10³ anni, al contrario con $n_e \sim 10^{-3}$ particelle/cm³ e $T \sim 10^7$ K si ottengono tempi di 10¹⁰ anni.

2.1.2 Autoassorbimento

All'inizio del Capitolo 2, è stata ammessa l'ipotesi di un plasma otticamente sottile per semplificare il calcolo dell'emissione di Bremstrahlung termica, trascurando il fattore di autoassorbimento nel caso di nube opaca.

In questa sezione viene considerata la possibilità che i fotoni emessi vengano riassorbiti da altri elettroni, diminuendo la radiazione emessa e riscaldando nuovamente il plasma. Questo fenomeno è detto *free-free absorption*; maggiore è la densità del plasma, più la nube diventa opaca alla radiazione. Viene utilizzata la legge di Kirchhoff per il trasporto radiativo (Formula 18), che stabilisce una relazione tra $j(\nu, T)$ l'emissività della nube, $B_{bb}(\nu, T)$ la brillantezza di corpo nero e $\mu(\nu, T)$ l'assorbimento della nube.

$$\frac{j(\nu, T)}{\mu(\nu, T)} = B_{bb}(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Formula 18

Viene considerato il plasma isotropico e definita la sua emissività per unità di angolo solido pari a $j(\nu, T) = J_{br}(\nu, T)/4\pi$. Si ottiene:

$$\mu(\nu, T) = \frac{J_{br}(\nu, T)}{4\pi B(\nu, T)} = \frac{1}{4\pi} \frac{J_{br}(\nu, T)}{2h \frac{\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}} \propto T^{-1/2} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) n_e n_i Z^2 \nu^{-3}$$

Formula 19

Il coefficiente di assorbimento è inversamente proporzionale al cubo della frequenza, per cui la Formula 19 mostra che per alte frequenze l'assorbimento è trascurabile. In particolare, nelle basse frequenze, nel caso in cui $h\nu \ll kT$ si è nel regime di Rayleigh-Jeans³, da cui

$$\mu(\nu, T) \approx 0.0018 T^{-\frac{3}{2}} Z^2 n_e n_i \nu^{-2} \bar{g}_{br}(T)$$

Formula 20

Avendo definito il coefficiente di assorbimento possiamo ora definire l'emissività totale di una nube reale che emette per bremsstrahlung termica con autoassorbimento. Definiamo lo spessore ottico della nube come $\tau = \mu(\nu, T)l$, con l dimensione lineare della nube e utilizziamo la Formula 18 del trasporto radiativo per esplicitare la brillantezza di bremsstrahlung come:

$$B_{br}(\nu, T) = \frac{J_{br}(\nu, T)}{4\pi\mu(\nu, T)} (1 - e^{-\tau(\nu, T)}) = B_{bb}(\nu, T) (1 - e^{-\tau(\nu, T)})$$

$$\propto \frac{\nu^3}{\left(\frac{h\nu}{kT} - 1\right)} (1 - e^{-\tau(\nu, T)})$$

Formula 21

È possibile distinguere, nel regime di Rayleigh-Jeans, due diversi regimi di brillantezza all'aumentare della frequenza:

- Regime otticamente spesso ($\tau \gg 1$) in cui si registra un aumento quadratico della brillantezza rispetto alla frequenza, dovuto al fatto che la radiazione viene ancora assorbita in modo molto efficace (Figura 8, [1]). In particolare

$$B_{br}(\nu, T) = \frac{2kT\nu^2}{c^2} \propto T\nu^2$$

Formula 22

³ La funzione di Rayleigh-Jeans approssima la legge di Planck a basse frequenze.

- Regime otticamente sottile ($\tau \ll 1$) in cui la radiazione non interagisce più con la nube e lo spettro di brillantezza rimane costante (Figura 8, [2]). Per frequenze molto alte, in cui i fotoni raggiungono energie comparabili a quelle degli elettroni, si ha il cutoff (Figura 8, [3]). Nella Formula 23 viene sostituita la dipendenza di τ con quella di μ ottenuta nella Formula 18:

$$B_{br}(\nu, T) = \frac{2kT\nu^2}{c^2} \tau \propto T\nu^2 \tau \propto T\nu^2 T^{-\frac{3}{2}} \nu^{-2} \propto T^{-1/2} \nu^0$$

Formula 23

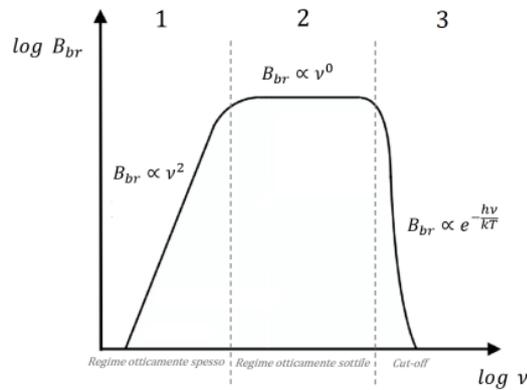


Figura 8 – Rappresentazione logaritmica dell'emissione di bremsstrahlung al variare della frequenza

2.2. Bremsstrahlung relativistica

Nel caso in cui gli elettroni viaggino a velocità prossime a quelle dei fotoni $v \sim c$, è necessario individuare una nuova funzione che descriva la funzione di velocità degli elettroni relativistici da inserire poi nella Formula 7, e, come nel caso termico, risolvere l'integrale per tutte le energie considerate.

L'emissività per bremsstrahlung relativistica in funzione di ν per una data velocità v è:

$$J_{br}(\nu, v) = \frac{32\pi}{3} \frac{e^6}{c^3 m_e v} n_e n_i Z^2 \ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right)$$

Formula 24

Scompare la dipendenza dalla temperatura essendo il plasma non più termico.

La distribuzione di energia relativistica segue una legge di potenza e quindi la densità numerica degli elettroni viene riscritta come:

$$n_e(E) = n_{e,0} E^{-\delta}$$

Formula 25

E individua l'energia della particella mentre δ è detto indice spettrale della distribuzione. Viene sostituita la distribuzione di energia delle particelle (Formula 25) nella Formula 24 e integrata in tutte le energie (Formula 26).

$$J_{br,rel}(\nu) \propto \int_{h\nu}^{\infty} n_e(E) n_i Z^2 dE \approx \int_{h\nu}^{\infty} E^{-\delta} dE \approx \frac{E^{-\delta+1}}{1-\delta} \approx \nu^{-(\delta-1)}$$

Formula 26

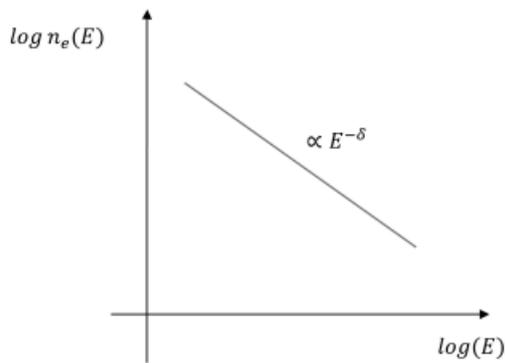


Figura 9a – distribuzione di energia di elettroni relativistici

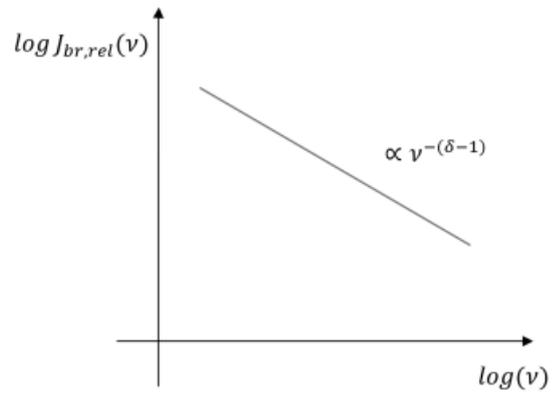


Figura 9b – distribuzione spettrale dell'emissività

Si deduce che l'emissività di bremsstrahlung relativistica è proporzionale all'energia delle particelle e che segue la stessa distribuzione a legge di potenza delle particelle ma con una pendenza minore, come è ben visibile in Figura 9b.

Mediamente i plasmi relativistici emettono per bremsstrahlung nelle frequenze della radiazione gamma.

3. APPLICAZIONI ASTROFISICHE E SFIDE APERTE

3.1. Intracluster medium (ICM)

Le più grandi strutture conosciute nell'universo sono gli ammassi di galassie, centinaia o migliaia di galassie tenute insieme gravitazionalmente. Tra di esse permea il mezzo intracuster, gas caldo intergalattico che costituisce la sorgente più luminosa in banda X del cielo.

Questo gas rarefatto è a temperature tipiche tra i 10^7 e i 10^8 K, e ha una densità di circa $n_e \sim 10^{-3}$ particelle/cm³ distribuito in regioni dell'ordine dei Mpc. Quindi è estremamente caldo e poco denso, quindi come previsto dalla Formula 15 e 17, ha tempi di raffreddamento nell'ordine di 10^{10} anni e una frequenza di cutoff di 10^{18} Hz. Questo implica che:

- Essendo il tempo necessario a raffreddarsi paragonabile all'età dell'universo, questo mezzo virtualmente non si raffredda mai.
- La frequenza di cutoff cade nella banda X, ed essendo distribuito su grandi scale la luminosità risultante è molto grande, rendendolo l'oggetto più luminoso in tale banda nel cielo.

Viene riportata di seguito a titolo esemplificativo un'analisi reale derivata dallo spettro di emissione dell'Ammasso della Chioma:

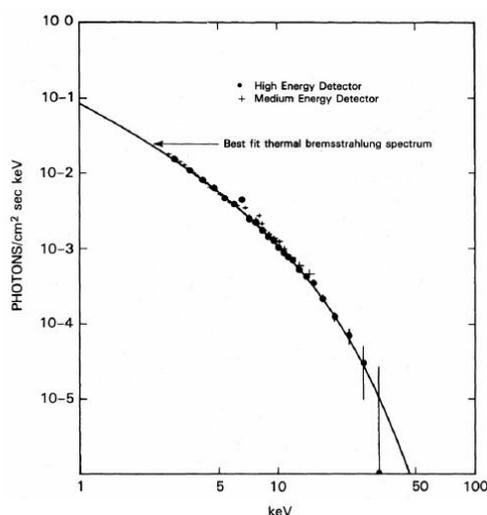


Figura 10 – Spettro di emissione dell'Ammasso della Chioma tra 1 e 100 keV ottenuto dall'High Energy Astrophysical Observatory (HEAO-1)

Dallo spettro di emissione è possibile ricavare la frequenza di cutoff che è direttamente legata alla temperatura. Essendo il cutoff a circa 4 keV è possibile definire una $\nu_{\text{cutoff}} \sim 10^{18}$ Hz e quindi una temperatura pari a 10^8 K. Una volta calcolata la temperatura è possibile ricavare una stima della densità elettronica n_e , misurando la dimensione lineare l^4 e la luminosità in banda X L_x dell'ammasso:

$$L_x \sim J_{\text{br}}(T)l^3 \approx 2.4 \cdot 10^{-27} T^{1/2} n_e^2 l^3$$

⁴ Viene approssimato il volume della nube a un cubo di dimensione l .

dove l sono le dimensioni lineari caratteristiche dell'ammasso. In questo caso quindi utilizziamo $L_x = 10^{44}$ erg/s, $l = 10^6$ pc, $T = 10^8$ K, ottenendo $n_e \approx 10^{-3}$ particelle/cm³. Dalla densità numerica n_e ottenuta viene stimata la massa del gas:

$$M_{\text{gas}} \approx l^3 n_e m_H \approx 10^{14} M_{\odot}$$

Formula 28

Infine, viene stimato il tempo di raffreddamento:

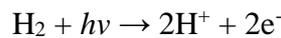
$$t_{\text{raff}} \approx \frac{6 \cdot 10^3}{n_e g_{\text{ff}}} T^{\frac{1}{2}} \approx 6 \cdot 10^3 \frac{\sqrt{10^8}}{10^{-3}} \sim 10^{10} \text{yr}$$

Formula 29

Si può pertanto considerare il tasso di interazioni sufficientemente basso perché il raffreddamento non avvenga e il gas continui a emettere per bremsstrahlung.

3.2. Regioni HII

Nell'intorno di stelle molto giovani e calde, di classe O e B, si trovano delle nubi di gas che vengono ionizzate dal flusso di fotoni UV prodotti da questi oggetti. Il mezzo interstellare (ISM), che circonda questo tipo di stelle, viene quindi scaldato e prende il nome di *warm ionized medium* (WIN). La radiazione è sufficientemente energetica da permettere la fotoionizzazione dell'idrogeno molecolare secondo la seguente reazione:



In queste zone, è possibile osservare sia l'emissione in riga del processo inverso di ricombinazione sia l'emissione continua di bremsstrahlung degli elettroni rallentati dal campo prodotto dai protoni. Generalmente queste regioni sono situate nei bracci delle galassie a spirale, dove il gas freddo permette formazione stellare, ne sono esempi nella Via Lattea la Nebulosa di Orione e la Nebulosa Aquila.

Le dimensioni lineari di queste regioni di HII sono legate all'equilibrio tra le due reazioni, di ionizzazione e ricombinazione degli elettroni. Questo spazio è detto sfera di Störmgren e il suo raggio è:

$$R_s \propto \frac{3}{4\pi} S_* n_e^{-2/3}$$

Formula 30

dove S_* rappresenta il flusso di fotoni e n_e la densità del mezzo.

Le regioni di HII hanno tempi di permanenza piuttosto brevi, dettati sia dalla breve vita delle stelle così calde, sia dalla velocità con cui il plasma riesce a raffreddarsi.

Infatti, se si considera una densità media di $n_e \sim 10^2$ particelle/cm², $T \sim 10^4$ K è possibile calcolare con la Formula 17 tempi caratteristici di raffreddamento $t_{\text{raff}} \sim 10^3$ anni. Questo vuol dire che, se si osserva una regione HII, la sorgente di ionizzazione deve essere ancora attiva.

Inoltre, è possibile calcolare la frequenza di cutoff di queste regioni che dalla Formula 15 cade intorno ai 10^{14} Hz e quindi nella banda infrarossa.

A titolo di esempio, in Figura 11 viene riportata una nota immagine della Nebulosa di Orione, M42.



Figura 11 -Un'immagine ottica (a sinistra) rivela nubi di gas e polvere nella Nebulosa di Orione; un'immagine infrarossa (a destra) rivela nuove stelle che brillano al suo interno.

La Nebulosa di Orione è una delle regioni HII più conosciute e studiate. Dallo spettro di emissione riportato in Figura 12, è possibile individuare la frequenza di turnover⁵, che si trova intorno a $\nu_{turnover} = 1 \text{ GHz}$. Da essa, utilizzando la Formula 28, si può calcolare la densità media delle particelle del plasma, risultante in circa $n_e = 2 \cdot 10^2 \text{ particelle cm}^{-3}$. La presenza di polveri, che emettono nell'infrarosso, maschera la frequenza di cutoff della nube, la quale si troverebbe a circa $\nu_{cutoff} = 10^{14} \text{ Hz}$, indicando una temperatura (Formula 15) di circa $T = 10^4 \text{ K}$.

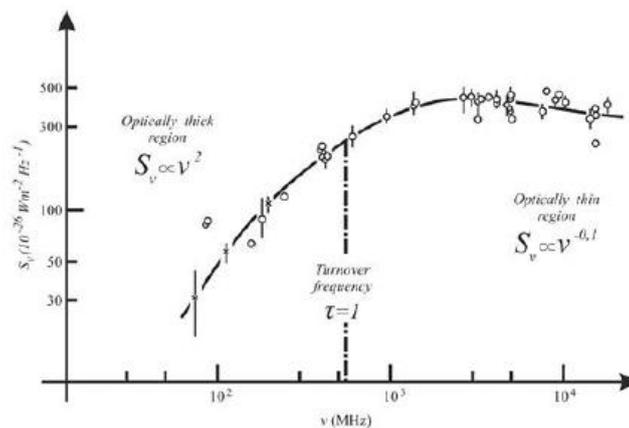


Figura 12 – Spettro di emissione di bremsstrahlung della nube di plasma di M42

3.3. Darkstrahlung

Questo concetto è stato introdotto per descrivere un meccanismo attraverso il quale particelle oscure potrebbero emettere radiazione elettromagnetica ordinaria attraverso un processo simile alla radiazione di bremsstrahlung, ma coinvolgendo fotoni oscuri o altre particelle del “settore oscuro”.

⁵ Rappresenta la frequenza che separa il regime otticamente spesso da quello otticamente sottile.

Recenti pubblicazioni si concentrano sul comportamento teorico delle particelle al di fuori del Modello Standard (BSM - *Beyond the Standard Model*), in cui i fotoni ordinari e i fotoni oscuri (questi ultimi solo teorizzati) potrebbero interagire attraverso un meccanismo di mescolamento cinetico. Quest'ultimo è ipotizzato come risultato delle simmetrie di gauge tra i due bosoni coinvolti.

$$L_{\text{mixing}} = -\frac{\epsilon}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Formula 31

Dove il termine ϵ rappresenta la costante di accoppiamento tra le due particelle, viene riportato per semplicità solo il termine di mescolamento, assunto sulla base delle simmetrie del gruppo di gauge elettromagnetico $U(1)$ e $U'(1)$.

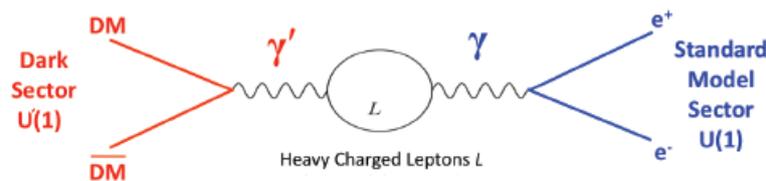


Figura 13 - - Diagramma di Feynman dell'interazione tra il fotone oscuro A' e la produzione della coppia e^+e^-

Qualora ciò avvenisse, due particelle oscure potrebbero emettere un fotone oscuro tramite Darkstrahlung. Questo fotone oscuro potrebbe poi trasformarsi in un fotone ordinario e decadere in una coppia elettrone-positrone (Figura 13).

Gli esperimenti più recenti mirano a quantificare un possibile eccesso di coppie elettrone-positrone rispetto a quanto previsto dalla Elettrodinamica Quantistica (QED) per la materia ordinaria in esperimenti di decadimento controllato.

Determinare se esista un'interazione tra materia ordinaria e materia oscura rappresenta una possibilità per investigare indirettamente la materia oscura e potrebbe fornire indicazioni cruciali sulla formazione delle strutture su larga scala nell'universo e su molti altri fenomeni cosmologici.

3.4. Gravitational Bremsstrahlung

L'interazione gravitazionale tra due stelle che passano vicine l'una all'altra non solo devia le loro traiettorie, ma produce anche onde gravitazionali. Queste onde possono essere considerate analoghe alla radiazione elettromagnetica di bremsstrahlung prodotta quando un elettrone si avvicina a uno ione, e per questo motivo si parla di radiazione gravitazionale di bremsstrahlung.

Analogamente, alla radiazione free-free, la *gravitational bremsstrahlung* descrive la radiazione gravitazionale emessa quando particelle massicce o sistemi di particelle (come stelle o buchi neri) sono accelerate in un campo gravitazionale, producendo onde gravitazionali.

Sebbene il modello matematico dettagliato sia particolarmente complesso e non rientri negli scopi di questo elaborato, è importante notare che le radiazioni di frenamento rimangono un campo astrofisico ancora in fase di studio.

I sistemi binari con buchi neri rotanti sono una delle principali fonti di onde gravitazionali, ma studi recenti sembrano dimostrare che anche singole interazioni tra masse possano produrre onde gravitazionali. In Figura 14 viene presentato uno schema di interazione pressoché identico a un meccanismo di bremsstrahlung elettromagnetica.

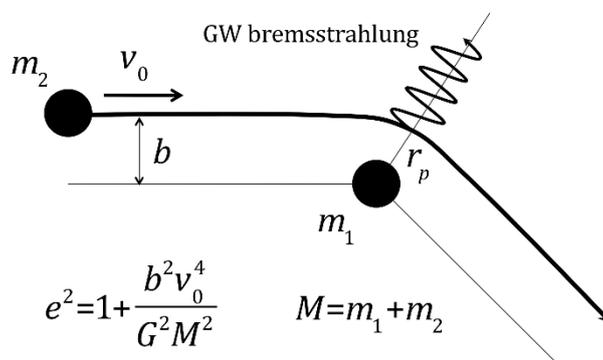


Figura 14 – Scattering di un buco nero di massa \$m_2\$ su un altro di massa \$m_1\$ che induce l'emissione di onde gravitazionali

Nella formula, \$e\$ indica l'eccentricità dell'orbita. In questo caso, incontri iperbolici tra buchi neri, con velocità relative nell'ordine di \$\sim 0,1c\$, a distanze di circa \$\sim 10^{-4}\$ UA e con *redshift* compresi tra \$z \in [0, 0,5]\$, produrrebbero *burst* di onde gravitazionali *una tantum*, con frequenze ben all'interno della sensibilità dell'esperimento LISA⁶.

Di conseguenza, sarebbe possibile osservare eventi che attraversano la banda di sensibilità, scompaiono nel rumore e riappaiono successivamente, man mano che il buco nero si allontana dall'incontro ravvicinato. Si tratta di un'onda gravitazionale molto diversa dagli *inspiral*⁷ dei buchi neri binari, con una forma d'onda che, in linea di principio, può essere facilmente rilevata e distinta come *burst*.

3.5. Terrestrial Gamma Ray Flash

I lampi di raggi gamma terrestri (TGF) sono rapidi ed intensi impulsi di fotoni ad alta energia generati durante i temporali o in presenza di intensi campi elettrici. Questi fotoni sono prodotti dalla bremsstrahlung di elettroni ad alta energia, accelerati dal campo elettrico presente nei temporali. I TGF hanno durate estremamente brevi, nell'ordine di un decimo di millisecondo.

La maggior parte dei modelli teorici si basa su processi relativistici di valanga di elettroni, noti come *relativistic runaway electron avalanche* (RREA), che spiegano la produzione di un gran numero di elettroni ad alta energia, con osservazioni che rivelano fino a circa \$\sim 10^{18}\$ fotoni generati probabilmente attraverso fenomeni di bremsstrahlung.

⁶ Laser Interferometer Space Antenna (LISA), una missione spaziale attualmente in fase di progetto presso l'Agenzia Spaziale Europea (ESA), come parte del programma Cosmic Vision, da spedire in orbita nel 2035.

⁷ Descrive i percorsi di una coppia di stelle che perdono energia e si muovono a spirale l'una verso l'altra.

Gli ultimi rilevamenti ottenuti con il Fermi Gamma-Ray Space Telescope (FGST), hanno rivelato la produzione di questi lampi X o Gamma, anche a seguito di eventi estremi, come l'eruzione del vulcano Hunga Tonga–Hunga Ha'apai nel 2022.

Anche l'Agenzia Spaziale Italiana ha lanciato il satellite AGILE⁸ per studiare i TGF. In particolare, uno studio condotto su circa un migliaio di TGF ha ricostruito un profilo relativistico di emissione, dal quale si deduce che gli elettroni possono essere accelerati a velocità prossime a quelle della luce anche in condizioni terrestri (Figura 15).

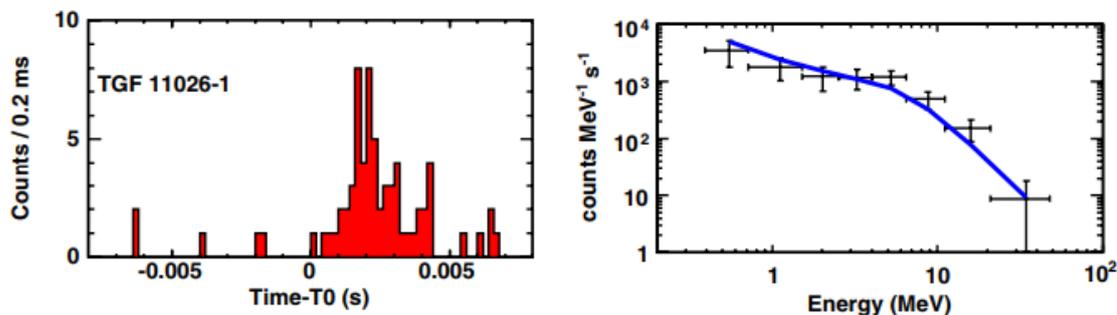


Figura 15 - Distribuzione dell'energia dei fotoni emessi durante i TGF registrati dal satellite AGILE

L'energia totale irradiata dai TGFs sopra i 100 keV è $E_{\text{TGF}}=40$ kJ, e i dati spettrali possono essere descritti da un modello a legge di potenza basato sulla bremsstrahlung di elettroni relativistici con un'energia di cutoff dei fotoni di $E_{\text{cutoff}}=10$ MeV.

Queste radiazioni sono oggetto di studio perché, sebbene statisticamente poco frequenti, potrebbero avere un impatto sull'esposizione alle radiazioni degli equipaggi e dei passeggeri degli aerei.

⁸ Astro-rivelatore Gamma a Immagini Leggero.

BIBLIOGRAFIA

- [1] D. Dallacasa, *Processi di radiazione e MHD*. Dispense.
- [1] P. Benaglia, *Radio emission from massive protostellar objects*. RevMexAA (Serie de Conferencias), 40, 211-216 (2011)
- [1] G. G. M. Tielens, *The Physics and Chemistry of the Interstellar Medium*. Cambridge University Press (2005).
- [2] E. Ceccotti. *Processi di radiazione e MHD*. Appunti. (2017)
- [3.1] M. J. Henriksen, R. F. Mushotzky, *The X-ray Spectrum of the Coma Cluster of Galaxies*. NASA/Goddard Space Flight Center (1985)
- [3.3] P. Tantirangsri, D. Samart, C. Pongkitivanichkul, *Dark photon Bremsstrahlung and ultra-high-energy cosmic ray*. Physics of the Dark Universe, 44 (2022)
- [3.3] D. Kim, J. Park, S. Shin, *Searching for boosted dark matter via dark-photon Bremsstrahlung*. Physical Review, D 100, 035033 (2019)
- [3.3] J. S. Bolton, Andrea Caputo, H. Liu, M. Viel, *Comparison of Low-Redshift Lyman- α Forest Observations to Hydrodynamical Simulations with Dark Photon Dark Matter*. Physical Review Letters, 129, 211102 (2022)
- [3.4] M. M. Riva , F. Vernizzi , L. K. Wong, *Gravitational Bremsstrahlung from spinning binaries in the post-Minkowskian expansion*. Physical Review Letters. 106, 044013 (2022)
- [3.4] E. Herrmann, J. Parra-Martinez , M. S. Ruf , M. Zeng, *Gravitational Bremsstrahlung from Reverse Unitarity*. Physical Review Letters, 126, 201602 (2021)
- [3.4] K. S. Thorne and S. J. Kovacs, *The generation of gravitational waves. I. Weak-field sources*. The Astrophysical Journal, 200, 245 (1975)
- [3.4] S. J. Kovacs and K. S. Thorne, *The generation of gravitational waves. 4. Bremsstrahlung*. The Astrophysical Journal, 224, 62 (1978).
- [3.4] G. U. Jakobsen, G. Mogull, Jan Plefka, J. Steinhoff, *Classical Gravitational Bremsstrahlung from a Worldline Quantum Field Theory*. Physical Review Letters, 126, 201103 (2021)
- [3.4] J. Garcia-Bellido, S. Nesseris, *Gravitational wave energy emission and detection rates of Primordial Black Hole hyperbolic encounters*. Physics of the Dark Universe, 21 61-69 (2018)
- [3.5] M. S. Briggs & Co, *Electron-positron beams from terrestrial lightning observed with Fermi GBM*. Journal of Geophysical Research Letters, 38, 2 (2011)
- [3.5] M. S. Briggs, S. Lesage, C. Schultz, B. Mailyan, R. H. Holzworth, *A Terrestrial Gamma-Ray Flash From the 2022 Hunga Tonga–Hunga Ha’apai Volcanic Eruption*. Journal of Geophysical Research Letters, 49, 14 (2022)
- [3.5] M. Tavani et al., *Terrestrial Gamma-Ray Flashes as Powerful Particle Accelerators*, Physical Review Letters, 106,1 (2011)