ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

L'Integrale di Daniell

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Bonfiglioli

Presentata da:
Edoardo Borsari

Anno Accademico 2023/2024

A Mamma e Papà

Introduzione

Il legame tra integrazione e differenziazione fu compreso da Gottfried Wilhelm Leibniz e Isaac Newton anche se, al tempo, non era ancora ben fondato il concetto di funzione. Nel 1823, il matematico Cauchy, nel suo lavoro “*Résumé des leçons données à l’École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*”, definì l’integrale di una funzione continua partizionando un intervallo $[a, b]$ in n parti uguali:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

e considerando la somma

$$S = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}),$$

oggi meglio nota come una “somma di Cauchy-Riemann”. L’integrale è definito performando il limite di tale somma al tendere di n a $+\infty$. In questo contesto si inserisce il lavoro del matematico Peter Gustav Lejeune Dirichlet: egli cercò di capire quanto l’ipotesi di continuità potesse essere indebolita, con l’obiettivo di integrare funzioni con una infinità di discontinuità.

Georg Friedrich Bernhard Riemann fu fortemente influenzato da Dirichlet; sotto la sua guida, Riemann diede la sua definizione di integrale, che successivamente diventò noto come “Integrale di Riemann”. Così come Cauchy, anche Riemann, considerò un intervallo $[a, b]$ partizionato in n parti (non necessariamente uguali):

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Per $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, definendo $\delta_k := x_k - x_{k-1}$ e prendendo $\epsilon_k \in [0, 1]$ arbitrario, Riemann considerò la somma

$$S = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1} + \epsilon_k \cdot \delta_k) \cdot \delta_k.$$

Se la somma tende (per $n \rightarrow +\infty$) ad un limite finito indipendentemente dalla scelta degli ϵ_k , tale limite è per definizione l’integrale di f . Poi fu la volta di Jean-Gaston Darboux:

nel 1875 sviluppò condizioni necessarie e sufficienti affinché una funzione sia Riemann-integrabile. Considerò solamente funzioni limitate. Brevemente, data una partizione $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dell'intervallo $[a, b]$ tale che

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

Darboux definì le ben note somme superiori e somme inferiori; per $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, M_i e m_i sono così definiti:

$$M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x);$$

$$m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x);$$

le somme superiori e inferiori sono rispettivamente definite come

$$M(P) := \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}),$$

$$m(P) := \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Date queste definizioni, definì l'integrale superiore $\overline{\int_a^b} f(x) dx$ come l'inf di $M(P)$ e quello inferiore $\underline{\int_a^b} f(x) dx$ come il sup di $m(P)$ al variare di P . Non solo, Darboux ritoccò anche l'idea di Riemann, arrivando a formulare un importante criterio per la Riemann-integrabilità. Tuttavia sorse subito un importante problema con l'integrale di Riemann: come si estende in più dimensioni? Cioè, considerata una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, e dato un dominio $A \subset \mathbb{R}^2$, quale può essere il significato di una scrittura come

$$\int_A f(x, y) dx dy?$$

Il primo che cercò di estendere l'integrale di Riemann in dimensioni maggiori fu il matematico francese Marie Ennemond Camille Jordan; nella sua definizione di integrale, si percepisce qualche rudimento di teoria della misura. Per un sottoinsieme E del piano e una partizione P del piano in rettangoli coordinati, sia S la somma delle aree dei rettangoli definiti dalla partizione P che sono strettamente contenuti in E e sia S' la somma delle aree dei rettangoli contenenti sia punti di E che punti del suo complementare. La quantità $S + S'$ è la somma delle aree dei rettangoli che coprono E . Con queste idee si arriva facilmente al concetto di insieme Jordan-misurabile; in seguito, il Jordan sviluppò il suo concetto di integrale in modo molto simile a quanto visto per Darboux, coinvolgendo però gli insiemi Jordan-misurabili.

Il notissimo integrale di Lebesgue, mirava poi a risolvere i punti deboli di quello di Riemann, così come era già stato tentato, e in parte fatto, da Jordan. I principali problemi legati all'integrale di Riemann che Lebesgue riuscì a risolvere sono:

1. la definizione dell'integrale di Riemann non si estende facilmente in dimensioni più alte;
2. ci sono funzioni differenziabili con derivata limitata, la cui derivata non è Riemann-integrabile (ad esempio, la funzione di Volterra);
3. il limite di una successione di funzioni Riemann-integrabili potrebbe non essere Riemann-integrabile.

Ecco il momento in cui Daniell entra in scena: durante il periodo in cui Lebesgue stava sviluppando la sua teoria, la nozione di misura iniziò a diventare più astratta; le proprietà da richiedere ad insiemi e funzioni per la teoria dell'integrazione iniziano ad essere molto chiare. Nel frattempo, matematici italiani e francesi iniziano ad interessarsi a quelli che noi oggi chiamiamo **funzionali**. Essi sono la chiave della teoria sviluppata dall'attore protagonista di questa Tesi: Percy John Daniell (1889-1946). Egli mirava a rendere la teoria dell'integrazione ancora più astratta, estendendola a funzioni di "elementi di arbitraria natura", come egli stesso dichiara nell'introduzione al suo principale lavoro:

"In this paper a theory is developed which is independent of the nature of the elements. They may be points in space of a denumerable number of dimensions or curves in general or classes of events so far as the theory is concerned."

In questa Tesi, ci sono due punti fondamentali che emergono più di tutti:

1. l'integrale di Daniell non è **un** integrale, bensì una **classe** di integrali;
2. la costruzione di essi è completamente dissociata, almeno in un primo momento, dalla teoria della misura.

Il secondo punto è davvero cruciale: come vedremo, non si necessita di alcun rudimento di teoria della misura per definire **gli** integrali di Daniell. La domanda che viene subito in mente è la seguente: perché, didatticamente, non viene insegnata prima la teoria di Daniell e poi la teoria di Lebesgue? La domanda è legittima poiché, come vedremo, i teoremi classici dell'integrazione seguono più rapidamente nelle Teorie di Daniell. Questo è dovuto al fatto che, nelle applicazioni, la teoria della misura si rivela essere il principale attore; anche usando la strada di Daniell, si rende necessario, alla fine, ricondursi alla nozione di misura. In un contesto moderno, l'integrale di Daniell trova applicazioni nella teoria della misura su gruppi topologici compatti.

Ora illustriamo brevemente quello che verrà dettagliatamente sviluppato nella Tesi. Fissato un insieme X , si considera una famiglia T_0 di funzioni $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, chiusa

rispetto a combinazioni lineari (ben poste) e agli operatori che indicheremo $\vee, \wedge$ (ossia sup e inf). Ecco che subito intervengono i funzionali; si prende un funzionale $I : T_0 \rightarrow \mathbb{R}$ e si richiede che esso soddisfi tre proprietà: linearità, positività (ossia se $f \geq 0$, allora $I(f) \geq 0$) e il fatto che, presa una successione di funzioni $\{f_n\}$ puntualmente convergente in modo monotono decrescente alla funzione nulla, si abbia $\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = 0$. Un tale funzionale lo chiameremo I -integrale e avrà un ruolo chiave nello sviluppo della nostra teoria.

Successivamente, definiremo un'altra famiglia di funzioni, denotata con T_1 , nel modo seguente:

$$T_1 := \left\{ f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid \text{esiste una successione } \{f_n\}_n \subset T_0 \text{ tale che } f_n \nearrow f \right\}.$$

Alcuni risultati, un po' tecnici (ma non concettualmente difficili) permettono di **estendere** il nostro I -integrale, usando proprio T_1 ; ossia, si considera un altro funzionale $I_1 : T_1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definito nel seguente modo: se $f \in T_1$ e $\{f_n\}_n$ è una successione di funzioni in T_0 tale che $\{f_n\} \nearrow f$, allora poniamo

$$I_1(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n).$$

Si può mostrare che questa definizione è ben posta. Gli stessi risultati che permettono di vedere che tale definizione è ben posta permettono anche di vedere che I_1 è **monotono**, cioè se $f, g \in T_1$ sono tali che $f \leq g$, allora $I_1(f) \leq I_1(g)$. Inoltre, usando banali proprietà dei limiti, si vede facilmente che I_1 è "lineare" (solo rispetto a scalari non negativi). Inoltre, con non poca fatica, ma usando idee elementari, si prova la seguente proprietà: se $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e si ha una successione di funzioni $\{f_n\} \subset T_1$ che converge puntualmente e in modo monotono crescente a f , allora $f \in T_1$ e inoltre

$$I_1(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_1(f_n). \quad (1)$$

Fatto ciò saremo pronti per dare la definizione di integrale di Daniell, dove si deve notare, crucialmente, che dipende tutto da T_0 e dall' I -integrale fissati inizialmente! Si prende una generica $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e si definiscono la quantità seguenti:

$$\bar{I}(f) := \inf\{I_1(\psi) : f \leq \psi, \psi \in T_1\} \quad \text{e} \quad \underline{I}(f) := -\bar{I}(-f). \quad (2)$$

Chiaramente ciò è ben posto se l'insieme $\{\psi \in T_1 : f \leq \psi\}$ è non vuoto; altrimenti si pongono banalmente $\bar{I}(f) := +\infty$ e $\underline{I}(f) := -\infty$. Si dice che f è Daniell-integrabile se $\bar{I}(f) = \underline{I}(f) < \infty$ e tale valore si indica con $\int f$. La classe delle funzioni Daniell-integrabili è indicata con L ; quindi abbiamo in sostanza un funzionale

$$\int : L \rightarrow \mathbb{R}.$$

Importante è osservare che, senza difficoltà, si vede che $\int$ estende il funzionale I , nel senso che, se $f \in T_0$, allora $f \in L$ e vale

$$\int f = I(f).$$

Come già detto ormai a più riprese, tutto parte da T_0 e dall' I -integrale fissati. L'integrale di Daniell non è altro che l'estensione di tale funzionale, alla classe delle funzioni Daniell-integrabili.

Alcune proprietà su $\bar{I}$ e $\underline{I}$ definiti come in (2) seguono in modo puramente tecnico dalle definizioni date: ad esempio si prova che preso $c \geq 0$ reale, si ha $\bar{I}(cf) = c\bar{I}(f)$, oppure che $\bar{I}(f + g) \leq \bar{I}(f) + \bar{I}(g)$. Tali risultati non hanno necessità di alcuna compressione concettuale, ma sono solo strumenti che torneranno utili nel proseguimento della Tesi, per provare teoremi di ben più alta caratura. Ad esempio, saremo in grado di dimostrare che L è un reticolo vettoriale esteso di funzioni (ossia ha le stesse proprietà di T_0) e che l'integrale di Daniell $\int$ è lineare su esso. Questo risultato, che concluderà il secondo Capitolo, sarà un perno fondamentale per la nostra trattazione. Lo scopo del secondo Capitolo è quello di iniziare ad immergere il lettore nelle idee di Daniell, facendo entrare in scena gli attori protagonisti del nostro lavoro e di provare risultati tecnici che ci servono come trampolino di lancio per il prosieguo.

L'inizio del terzo Capitolo ha lo scopo di far vedere alcuni risultati classici dell'Analisi, che usualmente vengono enunciati nelle teorie dell'integrale di Lebesgue. Più in dettaglio ci impegneremo a mostrare:

1. il Teorema della convergenza monotona per l'integrale di Daniell;
2. il Lemma di Fatou per l'integrale di Daniell;
3. il Teorema della convergenza dominata per l'integrale di Daniell.

A tale fine, ingredienti fondamentali che garantiranno la buona positura degli enunciati (e che seguono dalle parti tecniche del capitolo precedente), sono: la monotonia dell'integrale di Daniell e l'esistenza del limite integrale (ossia se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni in L monotona crescente, allora esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$). Il Teorema della convergenza monotona afferma che, se si possiede una successione di funzioni $\{f_n\} \subset L$ puntualmente convergente in modo monotono crescente ad una funzione f e se si richiede che $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$ è finito, allora $f \in L$ e $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$. Chiaramente, tale Teorema vale anche per le successioni monotone decrescenti, e questo è l'ultimo tassello mancante per provare che l'integrale di Daniell $\int$ è un **I -integrale**. Il Teorema della convergenza monotona servirà anche per provare il Lemma di Fatou, ossia: se $\{f_n\}$ è una successione

di funzioni non negative in L e il $\liminf \int f_n < \infty$, allora $\liminf f_n \in L$ e

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n.$$

Questo risultato seguirà, oltre che dal Teorema della convergenza monotona, da un altro enunciato, che si prova senza troppi problemi: presa una successione di funzioni $\{f_n\} \subset L$ non negative, allora $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \in L$. Il Lemma di Fatou e la linearità dell'integrale di Daniell fanno seguire, in modo quasi immediato, il Teorema della convergenza dominata: data una successione di funzioni $\{f_n\} \subset L$ tali che $|f_n| \leq g$ per una qualche $g \in L$, se tale successione converge puntualmente ad una funzione f , allora $f \in L$ e si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f.$$

A questo punto, ci impegneremo a studiare dei criteri per stabilire se una funzione è Daniell-integrabile; ad esempio si prova che una funzione f è Daniell-integrabile se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste una funzione $f_\epsilon \in T_0$ tale che $\bar{I}(|f - f_\epsilon|) < \epsilon$. Per provare il secondo risultato, che caratterizza le funzioni Daniell-integrabili (e che nella Tesi è chiamato **Teorema di Caratterizzazione**), si introduce il concetto di funzione nulla: una funzione $f \in L$ è nulla se $\int |f| = 0$. Data questa definizione, si prova senza troppi problemi che se si ha una funzione f nulla e una funzione g tale che $|g| \leq |f|$, allora g è una funzione nulla. Sempre con l'obiettivo di provare il Teorema di Caratterizzazione, di cui a breve riporteremo l'enunciato, si introduce una nuova famiglia di funzioni:

$$T_2 := \left\{ f \in L \mid \text{esiste } \{f_n\}_n \subset T_1 \text{ tale che } f_n \searrow f \right\}.$$

Da questa definizione seguirà in modo abbastanza diretto un risultato che afferma che, presa una funzione in T_2 , non solo possiamo trovare una successione di funzioni in T_1 che converge in modo monotono decrescente (puntualmente) ad essa, ma possiamo trovare una successione siffatta i cui termini, valutati sul funzionale I_1 , sono finiti. A questo punto si vedrà il Teorema di Caratterizzazione: una funzione $f \in L$ se e solo se è possibile scrivere tale funzione come $f = g - h$, ove $g \in T_2$ e h è una funzione nulla non negativa. Si noti che una delle due implicazioni è banale per le proprietà delle funzioni Daniell-integrabili; l'altra non lo è affatto ma la prova è abbastanza tecnica e in linea con i risultati precedenti.

Fino a questo punto le idee sono semplici e chiare; la grande assente, a sorpresa (visto come viene didatticamente introdotta la teoria dell'integrazione astratta) è la **misura**. Ce ne occuperemo in modo accurato in una sezione del terzo Capitolo della Tesi; i primi concetti che introdurremo saranno quelli di funzione Daniell-misurabile e di insieme Daniell-misurabile. Una funzione $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è Daniell-misurabile se per ogni $\phi \in L$ si

ha $\phi \wedge f \in L$. Un insieme $A \subseteq X$ è Daniell-misurabile se la sua funzione caratteristica χ_A è Daniell-misurabile. Da queste definizioni, in poche righe, si provano due proprietà delle funzioni Daniell-misurabili, che torneranno più volte nel proseguimento del Capitolo:

1. se f e g sono Daniell-misurabili, allora anche $f \vee g$ e $f \wedge g$ lo sono;
2. se si possiede una successione di funzioni Daniell-misurabili, non negative e convergenti puntualmente ad una funzione, allora anche quest'ultima è Daniell-misurabile.

Risultati trovati nelle sezioni precedenti permetteranno di mostrare una caratterizzazione delle funzioni Daniell-misurabili: una funzione f è Daniell-misurabile se e solo se $\phi \wedge f \in L$, per ogni $\phi \in T_0$. Ed ecco finalmente, il primo (vero) risultato di teoria della misura: denotata $A(X)$ la famiglia degli insiemi Daniell-misurabili, allora tale famiglia è un σ -ring; se inoltre la funzione caratteristica χ_X è Daniell-misurabile (ossia l'insieme X è Daniell-misurabile), allora essa è anche una σ -algebra (si ricordi che alla base di tutto ciò vi è sempre un insieme X , una famiglia T_0 e un I -integrale fissati).

Il primo vero legame tra la teoria di Daniell (basata sui funzionali) e la teoria della misura è racchiuso nel seguente Teorema, la cui prova è in realtà abbastanza semplice: si supponga che l'insieme X sia Daniell-misurabile. Definiamo la seguente funzione $\mu : A(X) \rightarrow [0, +\infty]$

$$\mu(E) = \begin{cases} \int \chi_E, & \text{se } \chi_E \text{ è integrabile} \\ +\infty, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora tale funzione è una misura. Questo risultato, è uno dei pilastri su cui si basa forse il principale teorema di questa Tesi, a cui dedicheremo ampio spazio, specie per la sua lunga dimostrazione: il **Teorema di Daniell-Stone**. L'importanza di questo risultato, sta nel fatto che riassume perfettamente la connessione che c'è tra l'integrale costruito da Daniell e quello costruito mediante la teoria della misura: sono la stessa cosa! Anticipiamone l'enunciato:

Teorema di Daniell-Stone. Sia T_0 un reticolo vettoriale esteso di funzioni su un insieme X con la proprietà che $\chi_X \wedge \varphi \in T_0$ per ogni $\varphi \in T_0$. Sia I un I -integrale su T_0 . Sia $A(X)$ la σ -algebra degli insiemi Daniell-misurabili e μ la misura su $A(X)$ definita come sopra. Si consideri infine una funzione $\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Allora φ è μ -integrabile (e il suo integrale è finito) se e solo se tale funzione è Daniell-integrabile; in tale caso vale

$$\int \varphi = \int_X \varphi d\mu,$$

ove il primo è l'integrale secondo Daniell, il secondo è l'integrale rispetto alla misura μ .

L'ipotesi iniziale permetterà subito di concludere che χ_X è una funzione Daniell-misurabile. Ma, a questo punto, i teoremi sopra introdotti ci assicurano che $A(X)$ sia effettivamente una σ -algebra e μ sia effettivamente una misura. Come già detto, la dimostrazione di questo risultato comporterà molto lavoro e seguirà da diversi lemmi. Il primo step consiste nel provare che, data una funzione $f \in L$, essa è μ -misurabile; per fare ciò ci si può ricondurre, usando la parte positiva e negativa di una funzione, a dimostrarlo per funzioni non negative. Successivamente, presa una funzione $f \in L$ non negativa, si vuole provare che è μ -integrabile; a tal fine, per $k, n \in \mathbb{N}$, si definiscono gli insiemi

$$E_{k,n} := \{t \in X : f(t) > k2^{-n}\},$$

e si definisce la seguente famiglia di funzioni:

$$\varphi_n := 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^{2n}} \chi_{E_{k,n}}.$$

Non è difficile vedere che le funzioni così definite sono Daniell-integrabili e un risultato puramente tecnico prova che tale successione di funzioni è monotona crescente; non solo, essa converge anche puntualmente a f . Tutto ciò premesso, usando il Teorema di convergenza monotona di Beppo Levi (la versione classica), si conclude il primo passo del Teorema, cioè che

$$\int f = \int_X f \, d\mu.$$

Con idee simili si fa vedere il viceversa del Teorema, sempre per funzioni non negative. L'estensione a funzioni arbitrarie seguirà poi da banali ragionamenti tecnici.

Fino a questo punto, tutto è rimasto molto astratto: nel Capitolo conclusivo della Tesi ci poniamo come obiettivo quello di illustrare due applicazioni della teoria di Daniell:

1. l'integrale di Lebesgue è di Daniell;
2. l'estensione del Problema di Dirichlet (associato al Laplaciano nel piano).

La prima di queste applicazioni presenta un titolo provocatorio: la cosa è voluta, e ha come obiettivo quello di far comprendere al lettore che la costruzione di Daniell non è alla fine così lontana dalla realtà o, quanto meno, dal programma didattico di Analisi Matematica insegnato nelle università; infatti, quanto meno nel caso unidimensionale, è possibile costruire l'integrale di Lebesgue "alla Daniell". Nella trattazione si prenderà $X = \mathbb{R}$ e T_0 l'insieme delle funzioni a supporto compatto. Si considera inoltre il funzionale $Leb : T_0 \rightarrow \mathbb{R}$, definito come $Leb(f) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx$, ove quest'ultimo è l'integrale secondo Lebesgue. Com'è ovvio che sia, a questo punto, il primo passo sarà quello di

provare che Leb è un I -integrale, così che la teoria di Daniell si applichi. A questo punto abbiamo l'esistenza di una σ -algebra $A(\mathbb{R})$ e una misura μ . Faremo vedere che tale misura (ristretta agli insiemi Lebesgue-misurabili) è proprio quella di Lebesgue.

Nella seconda sezione del capitolo useremo la teoria di Daniell per cercare una soluzione del Problema di Dirichlet; in altre parole, si cerca una funzione $u \in C^2(D; \mathbb{R}) \cap C(\bar{D}; \mathbb{R})$, ove $D \subset \mathbb{R}^2$ è aperto limitato, che soddisfi le due seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{per } (x, y) \in D \\ u(x, y) = g(x, y) & \text{per } (x, y) \in \partial D. \end{cases}$$

Per la nostra trattazione aggiungeremo qualche ipotesi sull'insieme D . A questo punto, fissato un punto $x \in D$, definiremo il funzionale $I_x : C(\partial D; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$I_x(g) := u_g(x),$$

ove u_g è la soluzione del Problema di Dirichlet per la condizione iniziale data dalla funzione g considerata. Usando alcuni risultati di Analisi quali il Principio del massimo debole e l'unicità della soluzione del Problema di Dirichlet, si prova che, per ogni $x \in D$, I_x è un I -integrale. A questo punto si applica la teoria di Daniell: si considera una funzione $f \in \bigcap_{x \in D} L_x$ e si definisce la funzione $v_f : D \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$v_f(x) := \int_x f,$$

ove $\int_x$ è l'integrale di Daniell ottenuto estendendo l' I -integrale I_x . L'ultimo risultato della nostra Tesi proverà il fatto che la richiesta che $f \in \bigcap_{x \in D} L_x$ è superflua: è sufficiente richiedere che $f \in L_x$ per un qualche $x \in D$; in tale caso, inoltre, tale funzione v_f è **armonica**. Questa condizione la rende un'ottima candidata per essere soluzione del Problema di Dirichlet iniziale; il problema è che tale funzione potrebbe aver perso continuità sul bordo. La prova di questo ultimo risultato è abbastanza impegnativa e racchiude l'utilizzo di molti risultati visti precedentemente.

Indice

Introduzione	i
1 Preliminari e notazioni	1
1.1 Alcune note di teoria della misura	1
1.2 Risultati sul Problema di Dirichlet	4
2 L'integrale di Daniell	7
2.1 Prime definizioni	7
2.2 Definizione dell'integrale di Daniell	9
2.3 Proprietà dell'integrale di Daniell	15
3 Teoremi classici dell'integrazione per l'integrale di Daniell	19
3.1 Teoremi classici dell'integrazione	19
3.2 Proprietà delle funzioni Daniell-integrabili	25
3.3 Dall'integrale alla misura	30
3.3.1 Il Teorema di Daniell-Stone	35
4 Applicazioni	41
4.1 L'integrale di Lebesgue è di Daniell	41
4.2 Estensione del Problema di Dirichlet	43
Bibliografia	49

Capitolo 1

Preliminari e notazioni

1.1 Alcune note di teoria della misura

Definizione 1.1 (σ -ring). Sia X un insieme; denotiamo con $P(X)$ l'insieme delle parti di X . Una famiglia di sottoinsiemi di X , $R(X) \subset P(X)$ si dice ring se per ogni $E, F \in R(X)$ si ha

- $E \cup F \in R(X)$;
- $E \setminus F \in R(X)$.

Inoltre, se $R(X)$ soddisfa l'ulteriore proprietà:

- se $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset R(X)$ allora $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n \in R(X)$,

allora chiamiamo $R(X)$ un σ -ring.

Osservazione 1.2. Sia $R(X)$ un σ -ring. Se $E, F \in R(X)$, allora si ha anche che $E \cap F \in R(X)$. Basta usare la definizione osservando che

$$E \cap F = E \setminus (E \setminus F).$$

Definizione 1.3 (σ -algebra). Sia X un insieme; denotiamo con $P(X)$ l'insieme delle parti di X . Una famiglia di sottoinsiemi di X , $A(X) \subset P(X)$ si dice σ -algebra se

- $X \in A(X)$;
- se $E \in A(X)$ allora $X \setminus E \in A(X)$;
- se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A(X)$ allora $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in A(X)$.

Definizione 1.4 (Pre-misura). Sia $R(X)$ un ring. Una funzione $\mu : R(X) \rightarrow [0, +\infty]$ è detta pre-misura se

1. $\mu(\emptyset) = 0$;

2. se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di insiemi disgiunti in $R(X)$ tale che $\bigcup_n E_n \in R(X)$ allora

$$\mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n).$$

Se $\mu(X) < \infty$ oppure X è unione di una successione di insiemi $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset R(X)$ tale che $\mu(E_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora diciamo che tale pre-misura è σ -finita.

Definizione 1.5 (Misura). Sia $A(X)$ una σ -algebra. Una funzione $\mu : A(X) \rightarrow [0, +\infty]$ è detta misura se è una pre-misura pensata $A(X)$ come un ring.

Definizione 1.6 (Funzione a gradini). Sia X un insieme, $A(X)$ una σ -algebra di X e μ una misura su X . Dato $A \in A(X)$, una funzione $s : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ si dice a gradini se esistono $A_1, \dots, A_p \in A(X)$ contenuti a due a due disgiunti ed esistono $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}$ tali che

$$s = \sum_{k=1}^p c_k \chi_{A_k},$$

dove con χ_{A_k} indichiamo la funzione caratteristica sull'insieme A_k , cioè

$$\chi_{A_k}(t) = \begin{cases} 1, & \text{per } t \in A_k \\ 0, & \text{per } t \notin A_k. \end{cases}$$

Definizione 1.7 (Funzione misurabile). Sia X un insieme, $A(X)$ una σ -algebra di X e μ una misura su X . Dato $A \in A(X)$ e $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$, sono equivalenti i seguenti fatti:

- $f^{-1}([-\infty, c]) \in A(X)$ per ogni $c \in [-\infty, +\infty]$;
- $f^{-1}([-\infty, c]) \in A(X)$ per ogni $c \in [-\infty, +\infty]$;
- $f^{-1}([c, +\infty]) \in A(X)$ per ogni $c \in [-\infty, +\infty]$;
- $f^{-1}([c, +\infty]) \in A(X)$ per ogni $c \in [-\infty, +\infty]$.

Se inoltre $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tali condizioni sono equivalenti a

- $f^{-1}([a, b]) \in A(X)$ per ogni $-\infty \leq a < b \leq +\infty$;
- $f^{-1}(\Omega) \in A(X)$ per ogni $\Omega \subset \mathbb{R}$ aperto euclideo.

Se una delle seguenti condizioni equivalenti è soddisfatta, allora f si dice essere μ -misurabile.

Definizione 1.8 (Integrale associato ad una misura). *Sia X un insieme, $A(X)$ una σ -algebra di X e μ una misura su X . Dato $A \subset X$ e $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$, denotiamo con $f_+ := \max\{f, 0\}$ (parte positiva di f) e $f_- := \max\{-f, 0\}$ (parte negativa di f). Osserviamo che $f = f_+ - f_-$ e che $|f| = f_+ + f_-$.*

1. Sia dato $A \in A(X)$ e $s : A \rightarrow [0, +\infty]$ a gradini, $s = \sum_{k=1}^p c_k \chi_{A_k}$, con $A_1, \dots, A_k$ come nella definizione precedente e $c_1, \dots, c_k$ reali non negativi. Definiamo

$$\int_A s \, d\mu := \sum_{k=1}^p c_k \mu(A_k),$$

con la convenzione $0 \cdot (+\infty) := 0$.

2. Dato $A \in A(X)$ e $f : A \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile, si pone:

$$\int_A f \, d\mu := \sup \left\{ \int_A \varphi \, d\mu : 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \text{ a gradini} \right\}.$$

3. Siano dati $A \in A(X)$ e $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ misurabile. Consideriamo come in 2 $\int_A f_+ \, d\mu$ e $\int_A f_- \, d\mu$; se questi numeri estesi non sono entrambi $+\infty$ allora si pone:

$$\int_A f \, d\mu := \int_A f_+ \, d\mu - \int_A f_- \, d\mu.$$

Teorema 1.9 (Convergenza monotona di Beppo Levi). *Sia X un insieme, $A(X)$ una σ -algebra di X e μ una misura su X . Siano inoltre $A \in A(X)$ e $f, f_n : A \rightarrow [0, +\infty]$ misurabili soddisfacenti le seguenti proprietà:*

1. $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ su A per ogni $n \in \mathbb{N}$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ puntualmente su A .

Allora vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu.$$

Per il capitolo di applicazioni abbiamo bisogno di ricordare il seguente enunciato.

Teorema 1.10 (di Dini¹). *Se X è uno spazio topologico compatto e $\{f_n\}_n$ è una successione monotona di funzioni continue su X che converge puntualmente ad una qualche funzione continua f , allora tale convergenza è anche uniforme.*

Ci servirà anche la seguente definizione e il seguente enunciato.

¹Si veda ad esempio [6].

Definizione 1.11 (Misura completa). *Sia X un insieme e sia $A(X)$ una σ -algebra di X . Sia $\mu : A(X) \rightarrow [0, +\infty]$ una misura su X . Diciamo che tale misura è completa se per ogni insieme $E \in A(X)$ tale che $\mu(E) = 0$ si ha che se $F \subset E$ allora $F \in A(X)$.*

Teorema 1.12. ²*Sia M la σ -algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue su $\mathbb{R}$ e sia B la σ -algebra di Borel. Allora la misura di Lebesgue $m : M \rightarrow [0, +\infty]$ è completa. Inoltre, se $A(X)$ è un'altra σ -algebra di $\mathbb{R}$ e se $\mu : A(X) \rightarrow [0, +\infty]$ è un'altra misura completa tale che $\mu = m$ su B , allora $M \subset A(X)$ e $\mu = m$ su M .*

1.2 Risultati sul Problema di Dirichlet

Teorema 1.13 (Principio del massimo debole³). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato. Sia $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ tale che*

$$\Delta u(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in \Omega.$$

Allora

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \text{ per ogni } x \in \overline{\Omega}.$$

In particolare si ha

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Corollario 1.14 (Principio del minimo debole). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato. Sia $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ tale che*

$$\Delta u(x) \leq 0 \text{ per ogni } x \in \Omega.$$

Allora

$$u(x) \geq \min_{\partial\Omega} u \text{ per ogni } x \in \overline{\Omega}.$$

In particolare si ha

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Dimostrazione. Basta applicare il teorema precedente a $-u$. □

Corollario 1.15. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato. Sia $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ tale che*

$$\Delta u(x) = 0 \text{ per ogni } x \in \Omega.$$

Allora

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \text{ per ogni } x \in \overline{\Omega}.$$

²Si veda ad esempio [6].

³Si veda ad esempio [4].

Da questi segue:

Teorema 1.16 (Unicità del Problema di Dirichlet⁴). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato. Siano $u_1, u_2 \in C^2(\Omega; \mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ soluzioni del seguente Problema di Dirichlet:*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & \text{per } x \in \Omega, \\ u(x) = \varphi(x) & \text{per } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

con $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$, $\varphi \in C(\partial\Omega; \mathbb{R})$ assegnate. Allora $u_1 = u_2$ su $\overline{\Omega}$.

Teorema 1.17 (Disuguaglianza di Harnack⁵). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ connesso e sia $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ armonica e non negativa. Se $V \subset \Omega$ è aperto tale che $\overline{V} \subset \Omega$, allora esiste una costante $C > 0$ che dipende solo da Ω e da V tale che*

$$\sup_{x \in V} u(x) \leq C \inf_{x \in V} u(x).$$

Teorema 1.18 (Teorema di Harnack⁶). *Sia $G \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme connesso e limitato. Sia $u_n : G \rightarrow \mathbb{R}$ una successione crescente di funzioni armoniche. Allora è vera una delle due seguenti:*

- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$ è finito per ogni $x \in G$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$ è infinito per ogni $x \in G$.

Inoltre, nel caso in cui sia vera la prima, si ha che il limite puntuale

$$u := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n,$$

è una funzione armonica.

⁴Si veda ad esempio [4].

⁵Si veda ad esempio [5].

⁶Si veda ad esempio [1].

Capitolo 2

L'integrale di Daniell

2.1 Prime definizioni

In questa sezione si introducono alcune notazioni preliminari necessarie per definire l'Integrale di Daniell. Denotiamo $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ l'insieme dei numeri reali estesi; preso X un insieme qualunque, definiamo $\overline{\mathbb{R}}^X$ nel seguente modo:

$$\overline{\mathbb{R}}^X := \{f \mid f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}\}.$$

Inoltre denotiamo

$$(f \wedge g)(t) := \inf\{f(t), g(t)\} \quad t \in X,$$

$$(f \vee g)(t) := \sup\{f(t), g(t)\} \quad t \in X.$$

Sia $T_0 \subseteq \overline{\mathbb{R}}^X$ una classe di funzioni che è chiusa rispetto a $\vee$, $\wedge$ e combinazioni lineari, cioè per ogni $f, g \in T_0$ e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha che $af + bg \in T_0$ e anche $f \wedge g, f \vee g$ sono elementi di T_0 .

Se le funzioni considerate fossero a valori reali, si direbbe che T_0 è un *reticolo vettoriale*; essendo tuttavia funzioni che possono assumere valori reali estesi, si parlerà allora di reticolo vettoriale *esteso*. Bisogna però chiarire il caso in cui la somma di due termini risulta della forma “ $+\infty - \infty$ ”. Se $f, g \in T_0$, definiamo

$$P := \{t \in X : f(t) = \infty, g(t) = -\infty \text{ oppure } f(t) = -\infty, g(t) = \infty\}.$$

Per ogni $c \in \overline{\mathbb{R}}$, richiediamo quindi che anche la seguente funzione sia in T_0 :

$$h(t) = \begin{cases} f(t) + g(t), & \text{per } t \notin P \\ c, & \text{per } t \in P. \end{cases}$$

Quindi, per ogni $f, g \in T_0$, definiamo la loro somma come segue:

$$h(t) = \begin{cases} f(t) + g(t), & \text{per } t \notin P \\ 0, & \text{per } t \in P. \end{cases}$$

Infine, se $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni in $\overline{\mathbb{R}}^X$ e $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, scriveremo semplicemente $\{f_n\} \nearrow f$ se la successione di funzioni è puntualmente monotona crescente e converge puntualmente alla funzione f . Allo stesso modo indicheremo $\{f_n\} \searrow f$ se la successione di funzioni è puntualmente monotona decrescente e converge puntualmente alla funzione f .

Passiamo ora all'introduzione di uno degli attori principali nella costruzione dell'Integrale di Daniell.

Definizione 2.1 (I-integrale). Sia $I : T_0 \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che I è un **I-integrale**, se per ogni $f, g \in T_0$, $a, b \in \mathbb{R}$, e per ogni successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T_0$ valgono le seguenti tre proprietà:

1. $I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$;
2. $\{f_n\} \searrow 0$ implica $\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = 0$;
3. se $0 \leq f$ allora $0 \leq I(f)$.

Osservazione 2.2. Un I-integrale $I : T_0 \rightarrow \mathbb{R}$ è monotono, cioè se $f, g \in T_0$ con $f \leq g$, allora $I(f) \leq I(g)$. Infatti se $f \leq g$ allora in particolare $0 \leq g - f$, quindi dalla proprietà 3 segue $0 \leq I(g - f)$, e dalla 1 si ha $I(f) \leq I(g)$.

Osservazione 2.3. Sia dato un I-integrale $I : T_0 \rightarrow \mathbb{R}$ e sia data una successione monotona crescente di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T_0$. Allora esiste (eventualmente in senso esteso)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n).$$

Infatti per la monotonia di I si ha che $\{I(f_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione monotona crescente e allora è ben noto che il limite esiste (eventualmente esteso).

Osservazione 2.4. Notiamo che un reticolo vettoriale è in particolare uno spazio vettoriale reale di funzioni. Si verifica in modo diretto che:

- $f \wedge g = f + g - (f \vee g)$;
- $f \vee g = (f - g) \vee 0 + g$.

Quindi è chiaro che uno spazio vettoriale reale di funzioni L è anche un reticolo vettoriale se presa $h \in L$ si ha che $h \vee 0 \in L$ (si noti che questo equivale a richiedere che $h^+ \in L$ ogni volta che $h \in L$). Infatti a quel punto per la seconda identità sopra-riportata abbiamo che prese $f, g \in L$, essendo L uno spazio vettoriale si ha $h := f - g \in L$ e quindi $h \vee 0 \in L$ e $f \vee g = (f - g) \vee 0 + g \in L$. Ma allora usando invece la prima identità si ha anche che $f \wedge g \in L$.

Osservazione 2.5. Sia L un reticolo vettoriale (esteso) di funzioni; se $f \in L$ allora anche $|f| \in L$. Infatti se $f \in L$, la sua parte positiva è definita da $f^+ := f \vee 0 \in L$ e si ha quindi che $|f| = f^+ + (-f)^+ \in L$.

Osservazione 2.6. Se L è uno spazio vettoriale reale di funzioni tale che $f \in L$ implica $|f| \in L$, allora L è un reticolo vettoriale esteso. Infatti per l'Osservazione 2.4 precedente basta provare che presa $f \in L$, allora $f^+ \in L$: ma $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|) \in L$, essendo L uno spazio vettoriale reale.

2.2 Definizione dell'integrale di Daniell

In questa sezione, sia $T_0 \subset \overline{\mathbb{R}}^X$ un reticolo vettoriale esteso e $I : T_0 \rightarrow \mathbb{R}$ un I -integrale secondo le definizioni introdotte sopra.

Definizione 2.7. Definiamo $T_1 \subset \overline{\mathbb{R}}^X$ nel modo seguente:

$$T_1 := \left\{ f \in \overline{\mathbb{R}}^X : \text{esiste una successione } \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T_0 \text{ tale che } \{f_n\} \nearrow f \right\}.$$

Osservazione 2.8. T_1 non è necessariamente un reticolo vettoriale esteso. Infatti T_1 è chiuso rispetto alla somma, $\wedge, \vee$: se $f, g \in T_1$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sono successioni in T_0 tali che $\{f_n\} \nearrow f$ e $\{g_n\} \nearrow g$, allora vale che $\{f_n + g_n\} \nearrow f + g$, $\{f_n \vee g_n\} \nearrow f \vee g$ e $\{f_n \wedge g_n\} \nearrow f \wedge g$, dove le successioni riportate sono in T_0 , essendo quest'ultimo un reticolo vettoriale esteso. Riguardo il prodotto per scalari, T_1 è solo chiuso (in modo ovvio) rispetto al prodotto per scalari non negativi, ma non è necessariamente vero che lo sia per scalari negativi.

Lemma 2.9. Siano $f \in T_1$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni in T_0 tale che $\{f_n\} \nearrow f$; sia inoltre $h \in T_0$ tale che $h \leq f$. Allora

$$I(h) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n),$$

dove tale limite può eventualmente essere infinito.

Dimostrazione. Notiamo preliminarmente che il $\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n)$ esiste (eventualmente esteso) per la monotonia di $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e quella di I . Anzi, più precisamente si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} I(f_n). \quad (2.1)$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo $h_n := f_n \wedge h$. Essendo T_0 chiuso rispetto a $\wedge$ si ha che $h_n \in T_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e chiaramente $h_n \leq f_n$. Grazie alla crescita della successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, in particolare la successione $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente. Inoltre si osserva che

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} h_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} (f_n \wedge h) = \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \right) \wedge h = f \wedge h = h. \quad (2.2)$$

dove la prima uguaglianza è la definizione di h_n , la seconda segue dal fatto che h non dipende da n , la terza segue dal fatto che la successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona crescente e converge a f , quindi vale che $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = f$ e l'ultima segue dall'ipotesi $h \leq f$.

Quindi dalla (2.2), per la crescenza della successione $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si ha che $\{h_n\} \nearrow h$. Ma allora si ha che $\{h - h_n\} \searrow 0$ e per la proprietà 2 della Definizione 2.1 segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(h - h_n) = 0. \quad (2.3)$$

Poiché la successione $\{h - h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona decrescente, allora per la Osservazione 2.2 abbiamo che anche $\{I(h - h_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona decrescente e quindi

$$0 \stackrel{(2.3)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} I(h - h_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} (I(h) - I(h_n)) = I(h) - \sup_{n \in \mathbb{N}} I(h_n), \quad (2.4)$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $I(h)$ non dipende da n e dal fatto che $\inf_{n \in \mathbb{N}} (-I(h_n)) = -\sup_{n \in \mathbb{N}} I(h_n)$; in definitiva vale

$$I(h) \stackrel{(2.4)}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} I(h_n). \quad (2.5)$$

Dal fatto che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $h_n \leq f_n$, per la monotonia di I si ha che $I(h_n) \leq I(f_n)$. Ne segue che, passando al sup, si ha

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} I(h_n) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} I(f_n). \quad (2.6)$$

Ma allora questo ci permette di concludere, osservando che si ha

$$I(h) \stackrel{(2.5)}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} I(h_n) \stackrel{(2.6)}{\leq} \sup_{n \in \mathbb{N}} I(f_n) \stackrel{(2.1)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n),$$

che è ciò che volevasi provare. $\square$

Lemma 2.10. *Siano $f, g \in T_1$ con $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successioni in T_0 tali che $\{f_n\} \nearrow f$ e $\{g_n\} \nearrow g$. Se $g \leq f$ allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(g_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n).$$

Dimostrazione. Per l'Osservazione 2.3 sappiamo che i limiti in entrambi i membri dell'enunciato esistono (eventualmente estesi).

Per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha che $g_m \in T_0$ e $g_m \leq g \leq f$. Quindi per il Lemma 2.9 si ha che

$$I(g_m) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n),$$

Facendo tendere $m \rightarrow +\infty$, si ottiene

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I(g_m) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n), \quad (2.7)$$

usando il Teorema del Confronto, che è lecito usare in quanto i limiti di entrambi i membri esistono: il secondo membro della (2.7) infatti non dipende da m mentre l'esistenza del limite del primo membro era già stata chiarita all'inizio della prova. $\square$

Corollario 2.11. *Siano $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni di funzioni in T_0 che convergono puntualmente in modo monotono crescente alla stessa funzione $f \in T_1$. Allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(g_n).$$

Dimostrazione. Segue in modo immediato dal Lemma 2.10 scambiando anche i ruoli di $f = g$ in tale lemma. $\square$

A questo punto siamo pronti ad estendere il funzionale I da cui siamo partiti.

Definizione 2.12. *Sia $I_1 : T_1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definito nel modo seguente: se $f \in T_1$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni in T_0 tali che $\{f_n\} \nearrow f$, allora poniamo*

$$I_1(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n).$$

Osservazione 2.13. La definizione è ben posta: infatti, una tale successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ esiste per definizione di T_1 e $\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n)$ esiste (eventualmente esteso!) per la Osservazione 2.3. Infine per Corollario 2.11 tale limite non dipende dalla successione di funzioni in T_0 che converge puntualmente e in modo monotono crescente a f .

Osservazione 2.14. Se $f \in T_0$, allora $f \in T_1$ e banalmente $I_1(f) = I(f)$. Infatti come successione che verifica la definizione prendiamo $f_n = f \in T_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questo implica che I_1 è un prolungamento di I .

Osservazione 2.15. Ricordiamo che T_1 è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per scalari non negativi. Osserviamo inoltre che I_1 si comporta bene rispetto tali operazioni. Infatti, siano $f, g \in T_1$; per definizione esistono $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in T_0 tali che $\{f_n\} \nearrow f$ e $\{g_n\} \nearrow g$, da cui $\{f_n + g_n\} \nearrow f + g \in T_1$ e quindi

$$I_1(f + g) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n + g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} I(g_n) = I_1(f) + I_1(g).$$

Inoltre se $c \in \mathbb{R}, c \geq 0$, allora $\{cf_n\} \nearrow cf \in T_1$ e

$$I_1(cf) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(cf_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = cI_1(f).$$

Osservazione 2.16 (Monotonia di I_1 su T_1). Il funzionale I_1 è monotono su T_1 , cioè date $f, g \in T_1$ tali che $f \leq g$, allora vale $I_1(f) \leq I_1(g)$. In particolare, data una successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T_1$ monotone crescenti, allora esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} I_1(f_n)$. È esattamente il contenuto del Lemma 2.10.

Lemma 2.17. *Sia $f \in \overline{\mathbb{R}^X}$ e sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in T_1 tale che $\{f_n\} \nearrow f$. Allora $f \in T_1$ e*

$$I_1(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_1(f_n).$$

Dimostrazione. Per la Osservazione 2.16 si ha che l'enunciato è ben posto data l'esistenza del limite riportato.

Sia $r \in \mathbb{N}$. Dato che $f_r \in T_1$, esiste una successione $\{f_{r,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ in T_0 tale che $\{f_{r,k}\}_{k \in \mathbb{N}} \nearrow f_r$ (anche qua si rende necessario esplicitare che stiamo trattando un limite nella variabile k). Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo

$$g_n := \sup\{f_{r,k} : r, k \leq n\}.$$

Osserviamo e giustifichiamo le seguenti affermazioni:

1. $g_n \in T_0$: infatti, possiamo riscrivere g_n usando le notazioni introdotte nella prima sezione come

$$g_n = \vee_{r,k \leq n} \{f_{r,k}\}.$$

Dato che T_0 è un reticolo vettoriale esteso, esso è chiuso rispetto all'operazione di $\vee$ di un numero finito di suoi elementi e quindi $g_n \in T_0$.

2. Osserviamo che $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T_0$ è monotona crescente per costruzione e quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n \in T_1$ per definizione di T_1 .
3. $g_n \leq f_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Essendo $\{f_{r,k}\}_k \nearrow f_r$ si ha $f_{r,k} \leq f_r$ per ogni k (e per ogni r); ne segue

$$g_n = \sup\{f_{r,k} : r, k \leq n\} \leq \sup\{f_r : r \leq n\} = f_n,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla monotonia di $\{f_n\}_n$.

Da (3) si ottiene puntualmente, facendo tendere $n \rightarrow +\infty$, la seguente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f, \quad (2.8)$$

dove è stato usato il Teorema del Confronto: i limiti di ambo i membri esistono, il primo per (2), il secondo per ipotesi.

Ora, se $r, n \in \mathbb{N}$ sono tali che $r \leq n$, allora per definizione di g_n , si ha che $f_{r,n} \leq g_n$ e quindi, mandando $n \rightarrow +\infty$, si ha anche la seguente stima punto per punto

$$f_r = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{r,n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g_n, \quad (2.9)$$

ove ancora una volta è stato usato il Teorema del Confronto con ragionamenti analoghi al caso precedente.

Visto che quest'ultima vale per ogni $r \in \mathbb{N}$, possiamo combinare la (2.8) e la (2.9), mandare $r \rightarrow +\infty$ nella (2.9) (usando al solito il Teorema del Confronto, la cui buona positura è garantita dagli stessi ragionamenti fatti sopra) e ottenere

$$f = \lim_{r \rightarrow \infty} f_r \stackrel{(2.9)}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \stackrel{(2.8)}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f,$$

ovvero tutte le disuguaglianze sono in realtà delle uguaglianze. In particolare abbiamo trovato che la successione monotona crescente $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T_0$ converge a f , quindi $f \in T_1$ per definizione di T_1 . Inoltre per (3) avevamo $g_n \leq f_n$, quindi per il Lemma 2.10 si ha che

$$I(g_n) = I_1(g_n) \leq I_1(f_n), \quad (2.10)$$

dove la prima uguaglianza segue dall'Osservazione 2.14.

Quindi mandando $n \rightarrow +\infty$, usando il fatto che sopra abbiamo provato che $\{g_n\} \nearrow f$ e quindi usando la definizione di I_1 , otteniamo

$$I_1(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(g_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I_1(f_n), \quad (2.11)$$

dove il teorema del Confronto è applicabile per Osservazione 2.16. Adesso fissiamo $r \in \mathbb{N}$; per costruzione $f_{r,n} \leq g_n$ per ogni $r \leq n$ e allora per tali n si ha che $I(f_{r,n}) \leq I(g_n)$ per monotonia di I e mandando $n \rightarrow +\infty$, si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_{r,n}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(g_n). \quad (2.12)$$

Ricordando quindi che per definizione di I_1 si ha che $I_1(f_r) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_{r,n})$ otteniamo

$$I_1(f_r) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_{r,n}) \stackrel{(2.12)}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} I(g_n) \stackrel{(2.11)}{=} I_1(f).$$

Adesso mandando $r \rightarrow +\infty$, e usando il Teorema del Confronto, si ottiene

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I_1(f_r) \leq I_1(f). \quad (2.13)$$

Riassumendo si ha

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I_1(f_r) \stackrel{(2.13)}{\leq} I_1(f) \stackrel{(2.11)}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} I_1(f_n);$$

ma allora queste sono tutte uguaglianze e si è provata la tesi. $\square$

Definizione 2.18 (Integrale di Daniell). Sia $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$; consideriamo i seguenti casi:

1. Se non esiste alcuna funzione $\psi \in T_1$ tale che $f \leq \psi$, poniamo simbolicamente

$$\bar{I}(f) := +\infty \quad \text{e} \quad \underline{I}(f) := -\infty.$$

2. Se invece l'insieme $\{\psi \in T_1 : f \leq \psi\}$ è non vuoto, poniamo

$$\bar{I}(f) := \inf\{I_1(\psi) : f \leq \psi, \psi \in T_1\} \quad \text{e} \quad \underline{I}(f) := -\bar{I}(-f).$$

(Attenzione: nella definizione di $\underline{I}$ si potrebbe ricadere nel caso 1). Diciamo che $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ è integrabile secondo Daniell se

$$\bar{I}(f) = \underline{I}(f) < \infty,$$

e in tale caso indichiamo tale valore con $\int f$. Indichiamo la classe di funzioni integrabili secondo Daniell con L , più precisamente:

$$L := \left\{ f \in \overline{\mathbb{R}}^X : -\infty < \underline{I}(f) = \bar{I}(f) < \infty \right\}.$$

Di conseguenza l'operatore definito in precedenza può anche essere pensato come

$$\int : L \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Osservazione 2.19. La seguente osservazione potrebbe sembrare banale: notiamo che la nozione di Integrale di Daniell dipende dalla classe di funzioni T_0 e dal funzionale I inizialmente fissati. Quindi si potrebbe dire che, più che un integrale, quello di Daniell è una classe di integrali. Uno degli obiettivi dei prossimi capitoli sarà quello di mostrare che quello di Lebesgue non è altro che un sotto-caso di quello di Daniell.

Osservazione 2.20. L'operatore $\int$ estende l'operatore I ; più precisamente, se $f \in T_0$ allora $f \in L$ e vale:

$$\int f = I(f).$$

Infatti, richiamando l'Osservazione 2.14 si ha che $f \in T_1$ e $I_1(f) = I(f)$. Mostriamo quindi che $\bar{I}(f) = I_1(f)$: chiaramente $I_1(f) \in \inf\{I_1(\psi) : f \leq \psi, \psi \in T_1\}$, quindi basta provare che se $\psi \in T_1$ tale che $f \leq \psi$ allora $I_1(f) \leq I_1(\psi)$, ma questo è ovvio perché I_1 è monotono.

Inoltre, visto che T_0 è un reticolo vettoriale esteso, $-f \in T_0$ e quindi:

$$\underline{I}(f) = -\bar{I}(-f) = -I_1(-f) = -I(-f) = I(f),$$

ove l'ultima uguaglianza è per linearità di I . Riassumendo $\bar{I}(f) = \underline{I}(f) = I(f)$ che conclude.

Osservazione 2.21. Sia $f \in T_1$; allora

$$\bar{I}(f) = I_1(f).$$

Segue dai ragionamenti contenuti nella Osservazione 2.20. Si noti però che non possiamo, a priori, concludere nulla su $\underline{I}(f)$ poiché non è detto che T_1 sia chiuso rispetto all'opposto di funzioni.

2.3 Proprietà dell'integrale di Daniell

In questa sezione ci preoccupiamo di mettere in luce alcune proprietà dell'integrale di Daniell; in particolare proveremo che la classe di funzioni integrabili secondo Daniell è un reticolo vettoriale esteso di funzioni e che l'operatore di integrazione $\int$ è lineare su tale classe.

L'importanza del prossimo lemma non va sottovalutata: esso sarà alla base di molti risultati successivi.

Lemma 2.22. *Sia $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ e siano $f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X$. Allora si hanno le seguenti:*

1. $\bar{I}(cf) = c\bar{I}(f)$;
2. $\bar{I}(f + g) \leq \bar{I}(f) + \bar{I}(g)$;
3. se $f \leq g$ allora $\bar{I}(f) \leq \bar{I}(g)$;
4. se $\underline{I}(f)$ è finito, allora $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$;
5. $\bar{I}(f \vee g) + \bar{I}(f \wedge g) \leq \bar{I}(f) + \bar{I}(g)$;
6. $\bar{I}(|f|) - \underline{I}(|f|) \leq \bar{I}(f) - \underline{I}(f)$.

Dimostrazione. 1. Se $c \geq 0$, per avere la tesi basta osservare la veridicità delle seguenti uguaglianze (si noti che T_1 è chiuso rispetto alla moltiplicazione per $c \geq 0$):

$$\begin{aligned} \bar{I}(cf) &= \inf\{I_1(\psi) : cf \leq \psi, \psi \in T_1\} \\ &= \inf\{I_1(c\psi) : cf \leq c\psi, c\psi \in T_1\} \\ &= c \inf\{I_1(\psi) : f \leq \psi, \psi \in T_1\} = c\bar{I}(f). \end{aligned}$$

2. Se uno degli insiemi $\{I_1(\psi) : f \leq \psi, \psi \in T_1\}$ o $\{I_1(\psi) : g \leq \psi, \psi \in T_1\}$ è vuoto, per definizione si pone $\bar{I}(f)$ o $\bar{I}(g)$ come $+\infty$ e la disuguaglianza segue banalmente.

Assumiamo $\{I_1(\psi) : f \leq \psi, \psi \in T_1\}$ e $\{I_1(\psi) : g \leq \psi, \psi \in T_1\}$ siano entrambi non vuoti e siano quindi $\psi_1, \psi_2 \in T_1$, arbitrarie, tali che $f \leq \psi_1$ e $g \leq \psi_2$. Allora dato che T_1 è chiuso rispetto alla somma, si ha $\psi_1 + \psi_2 \in T_1$, con ovviamente $f + g \leq \psi_1 + \psi_2$ e perciò

$$\bar{I}(f + g) \leq I_1(\psi_1 + \psi_2) = I_1(\psi_1) + I_1(\psi_2), \quad (2.14)$$

ove la prima stima segue per definizione di $\bar{I}$, la seconda uguaglianza segue dalla linearità di I_1 .

Adesso, visto che ψ_1, ψ_2 sono arbitrarie in T_1 , con le condizioni $f \leq \psi_1$ e $g \leq \psi_2$, si ha che la quantità al primo membro è maggiorata dalla valutazione in I_1 di una

qualunque coppia di funzioni ove la prima sta in $\{I_1(\psi) : f \leq \psi, \psi \in T_1\}$ e la seconda in $\{I_1(\psi) : g \leq \psi, \psi \in T_1\}$.

Formalmente possiamo ragionare così: pensiamo a ψ_2 nella (2.14) fissata, e passiamo all'estremo inferiore per l'insieme $\{I_1(\psi) : f \leq \psi, \psi \in T_1\}$, ottenendo che

$$\bar{I}(f + g) \leq \bar{I}(f) + I_1(\psi_2). \quad (2.15)$$

Adesso passiamo all'estremo inferiore nella (2.15) per l'insieme $\{I_1(\psi) : g \leq \psi, \psi \in T_1\}$, ottenendo che

$$\bar{I}(f + g) \leq \bar{I}(f) + \bar{I}(g).$$

3. Se $\psi \in T_1$ soddisfa $g \leq \psi$ allora $f \leq \psi$ e quindi per definizione $\bar{I}(f) \leq I_1(\psi)$. Quindi $\bar{I}(f)$ è un minorante per l'insieme $\{I_1(\psi) : g \leq \psi, \psi \in T_1\}$, ed essendo l'estremo inferiore il più grande dei minoranti segue la stima.

4. Indichiamo con 0 la funzione identicamente nulla. Notiamo che per la struttura di spazio vettoriale di T_0 , $0 \in T_0$ e quindi per l'Osservazione 2.20 si ha $\bar{I}(0) = \underline{I}(0) = 0$. Allora notiamo anche che $0 = \bar{I}(0) = \bar{I}(f - f)$ e per (2) abbiamo che

$$0 = \bar{I}(f - f) \leq \bar{I}(f) + \bar{I}(-f) = \bar{I}(f) - \underline{I}(f),$$

da cui la tesi.

5. Siano $\psi_1, \psi_2 \in T_1$ tali che $f \leq \psi_1$ e $g \leq \psi_2$. Allora si ha che $f \wedge g \leq \psi_1 \wedge \psi_2$ e $f \vee g \leq \psi_1 \vee \psi_2$. Inoltre osserviamo che banalmente $\psi_1 \wedge \psi_2 + \psi_1 \vee \psi_2 = \psi_1 + \psi_2$. Quindi per definizione si ha

$$\bar{I}(f \wedge g) + \bar{I}(f \vee g) \leq I_1(\psi_1 \wedge \psi_2) + I_1(\psi_1 \vee \psi_2). \quad (2.16)$$

Tuttavia per linearità di I_1 si ha anche

$$I_1(\psi_1 \wedge \psi_2) + I_1(\psi_1 \vee \psi_2) = I_1(\psi_1 + \psi_2) = I_1(\psi_1) + I_1(\psi_2).$$

Adesso ragionando come in (2), poichè $\psi_1, \psi_2 \in T_1$ tali che $f \leq \psi_1$ e $g \leq \psi_2$ erano arbitrarie, abbiamo la tesi partendo da (2.16).

6. È facile verificare che $|f| = f \vee (-f)$ e $-|f| = f \wedge (-f)$, quindi per la proprietà (5) si ha

$$\bar{I}(|f|) + \bar{I}(-|f|) = \bar{I}(f \vee (-f)) + \bar{I}(f \wedge (-f)) \leq \bar{I}(f) + \bar{I}(-f),$$

da cui segue la proprietà (6). La prova è conclusa. $\square$

Adesso ci proponiamo di provare che L è un reticolo vettoriale esteso di funzioni a valori reali estese e che l'integrale di Daniell $\int$ è lineare. Prima di fare ciò, osserviamo che senza difficoltà si riesce a vedere che

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad (2.17)$$

e

$$f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|). \quad (2.18)$$

Teorema 2.23. *L è un reticolo vettoriale esteso di funzioni e l'Integrale di Daniell $\int$ è lineare su di esso.*

Dimostrazione. Per le identità (2.17) e (2.18) ci basta provare che L è chiuso rispetto alla somma, al prodotto per scalari e al valore assoluto per concludere che L è un reticolo vettoriale esteso.

Intanto proviamo che L è chiuso rispetto al prodotto per scalari. Sia infatti f una funzione integrabile e $c \in \mathbb{R}$.

Caso 1: Se c è non negativo, allora per il Lemma 2.22 abbiamo

$$\bar{I}(cf) = c\bar{I}(f) = c \int f,$$

e

$$\underline{I}(cf) = -\bar{I}(c(-f)) = c(-\bar{I}(-f)) = c\underline{I}(f) = c \int f,$$

dove la seconda uguaglianza segue sempre da Lemma 2.22 e le altre per definizione. Quindi $cf \in L$ e $\int cf = c \int f$.

Caso 2: Se c è negativo, usando gli stessi ragionamenti si ha

$$\bar{I}(cf) = (-c)\bar{I}(-f) = c\underline{I}(f) = c \int f,$$

e

$$\underline{I}(cf) = -\bar{I}(-cf) = c\bar{I}(f) = c \int f.$$

Quindi $cf \in L$ e $\int cf = c \int f$.

Adesso proviamo che L è chiuso rispetto alla somma. Siano $f, g \in L$; per il Lemma 2.22 si ha

$$\bar{I}(f + g) \leq \bar{I}(f) + \bar{I}(g) = \int f + \int g. \quad (2.19)$$

Ancora usando il Lemma 2.22 si ha

$$-\underline{I}(f + g) = \bar{I}(-f - g) \leq \bar{I}(-f) + \bar{I}(-g) = -\underline{I}(f) - \underline{I}(g),$$

ove la prima e l'ultima uguaglianza sono per definizione. In altri termini abbiamo che

$$\underline{I}(f) + \underline{I}(g) \leq \underline{I}(f + g). \quad (2.20)$$

Ma allora

$$\int f + \int g \stackrel{(2.20)}{\leq} \underline{I}(f + g) \leq \bar{I}(f + g) \stackrel{(2.19)}{\leq} \int f + \int g,$$

dove la disuguaglianza centrale segue da Lemma 2.22. Ma allora quelle sono tre uguaglianze e dunque $f + g \in L$ e $\int (f + g) = \int f + \int g$.

Il fatto che $f \in L$ implica $|f| \in L$ segue direttamente Lemma 2.22, infatti:

$$0 \leq \bar{I}(|f|) - \underline{I}(|f|) \leq \bar{I}(f) - \underline{I}(f) = 0,$$

quindi $\bar{I}(|f|) = \underline{I}(|f|)$ e questo conclude. □

Capitolo 3

Teoremi classici dell'integrazione per l'integrale di Daniell

3.1 Teoremi classici dell'integrazione

In questa sezione presenteremo i teoremi classici dell'integrazione per l'integrale di Daniell, in particolare:

- il Teorema della convergenza monotona per l'integrale di Daniell;
- il Lemma di Fatou per l'integrale di Daniell;
- il Teorema della convergenza dominata per l'integrale di Daniell.

Osservazione 3.1. (Monotonia dell'integrale di Daniell) Siano $f, g \in L$ tali che $f \leq g$. Allora si ha $\int f \leq \int g$. Segue direttamente dal Lemma 2.22 dopo aver notato che, per definizione, se $f \in L$, allora $\bar{I}(f) = \int f$.

Osservazione 3.2. (Esistenza del limite integrale) Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni in L monotona crescente; allora esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$ (eventualmente esteso). Segue direttamente dall'osservazione precedente e dalla ben nota esistenza del limite per successioni monotone.

Teorema 3.3 (Convergenza monotona). *Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni in L tale che $f_n \nearrow f$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$ è finito, allora $f \in L$ e $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$.*

Dimostrazione. Preliminarmente osserviamo che l'enunciato è ben posto per l'Osservazione 3.2. Si ha che $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots \leq f$. Quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $-f \leq -f_n$; per il punto (3) del Lemma 2.22

$$\bar{I}(-f) \leq \bar{I}(-f_n) = \int -f_n, \quad (3.1)$$

ovvero, per definizione di $\underline{I}$, $\int f_n \leq \underline{I}(f)$. Adesso possiamo far tendere $n \rightarrow \infty$ e usare il Teorema del confronto (i limiti in entrambi i membri esistono come già osservato) ottenendo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \leq \underline{I}(f). \quad (3.2)$$

Adesso fissiamo $\epsilon > 0$ arbitrario. Consideriamo la successione di funzioni $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, così costruita:

$$g_1 = f_1, \quad 0 \leq g_n = f_n - f_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > 1.$$

Richiamando la Definizione 2.18 e usando la caratterizzazione dell'estremo inferiore è possibile affermare che esiste una successione $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in T_1$, tale che

$$g_1 \leq \psi_1, \quad 0 \leq g_2 \leq \psi_2, \quad \dots, \quad 0 \leq g_n \leq \psi_n,$$

con la proprietà che

$$I_1(\psi_n) \leq \int g_n + \frac{\epsilon}{2^n}, \quad (3.3)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo la funzione $\rho_n := \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n$. Notiamo che, poiché $\psi_n \geq 0$ per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, per come è definita, $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione monotona crescente di funzioni in T_1 (si ricordi che T_1 è chiuso rispetto alla somma di suoi elementi). Inoltre, osserviamo che vale

$$f_n = f_1 + (f_2 - f_1) + \dots + (f_n - f_{n-1}) \leq \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n = \rho_n. \quad (3.4)$$

Sia $\psi \in T_1$ tale che $f \leq \psi$; si osservi che una tale funzione deve necessariamente esistere: se per assurdo non esistesse, allora richiamando la definizione di integrale di Daniell si avrebbe che $\bar{I}(f) = +\infty$ e $\underline{I}(f) = -\infty$. Ma sempre secondo quella definizione si ha anche che $\bar{I}(-f) = -\underline{I}(f) = +\infty$; ma dalla (3.1) sappiamo che $\bar{I}(-f) \leq \int (-f_n) < \infty$ giacché $f_n \in L$.

Definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione $\phi_n := \psi \wedge \rho_n$. Per l'Osservazione 2.8 si ha che $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione in T_1 e per costruzione è monotona crescente. Inoltre sappiamo anche che $f_n \stackrel{(3.4)}{\leq} \rho_n$ e che $f_n \leq f \leq \psi$; quindi ne deduciamo che

$$f_n \leq \phi_n \leq \psi. \quad (3.5)$$

Notiamo quindi che la successione $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oltre ad essere monotona crescente è limitata dall'alto, e richiamando il Lemma 2.17 abbiamo che il limite puntuale di tale successione, che esiste, definisce una funzione in T_1 . Quindi puntualmente si ha

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \stackrel{(3.5)}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n. \quad (3.6)$$

Notiamo che, anche per il fatto che $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n \in T_1$, si ha

$$I_1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n \right) \stackrel{(3.6)}{\in} \{I_1(g) : f \leq g, g \in T_1\}, \quad (3.7)$$

ma allora per definizione si ha

$$\bar{I}(f) \leq I_1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n \right).$$

Allora usando il Lemma 2.17 si conclude che

$$\bar{I}(f) \leq I_1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_1(\phi_n). \quad (3.8)$$

Richiamando l'additività di I_1 notiamo che

$$\begin{aligned} I_1(\rho_n) &= I_1(\psi_1) + \cdots + I_1(\psi_n) \stackrel{(3.3)}{\leq} \\ &\stackrel{(3.3)}{\leq} \left(\int f_1 + \frac{\epsilon}{2} \right) + \left(\int (f_2 - f_1) + \frac{\epsilon}{4} \right) + \cdots + \left(\int (f_n - f_{n-1}) + \frac{\epsilon}{2^n} \right). \end{aligned}$$

Inoltre poiché $\phi_n \leq \rho_n$, usando la monotonia di I_1 si ha

$$I_1(\phi_n) \leq I_1(\rho_n); \quad (3.9)$$

dunque per la linearità dell'integrale di Daniell si ha

$$I_1(\phi_n) \stackrel{(3.9)}{\leq} I_1(\rho_n) \leq \int f_n + \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \cdots + \frac{\epsilon}{2^n} \right) \leq \int f_n + \epsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n + \epsilon,$$

ove l'ultima stima segue direttamente dal fatto che $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione monotona crescente in L e l'integrale di Daniell, come osservato, è monotono. Ma allora, mandando $n \rightarrow +\infty$, si trova

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1(\phi_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n + \epsilon, \quad (3.10)$$

e quindi

$$\bar{I}(f) \stackrel{(3.8)}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} I_1(\phi_n) \stackrel{(3.10)}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n + \epsilon,$$

dove questo vale per ogni $\epsilon > 0$. Quindi mandando $\epsilon \rightarrow 0^+$ si trova che

$$\bar{I}(f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n. \quad (3.11)$$

In conclusione si ha dunque che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \stackrel{(3.2)}{\leq} \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \stackrel{(3.11)}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n,$$

dove la disuguaglianza centrale segue da un punto del Lemma 2.22. Ma quindi questo prova che $f \in L$ e che $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f$ che è quello che volevasi provare (si ricordi che per ipotesi $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n < \infty$). $\square$

Osservazione 3.4. Il teorema precedente vale anche per successioni monotone decrescenti, usando la stessa dimostrazione una volta considerata una nuova successione ottenuta da quella data moltiplicando i termini per -1 .

Proposizione 3.5. *L'integrale di Daniell $\int$ è un $I -$ integrale.*

Dimostrazione. Basta verificare la Definizione 2.1: la prima condizione è verificata perché abbiamo già provato che $\int$ è lineare. La terza proprietà segue invece dall'Osservazione 3.1. Infine la seconda segue proprio dall'Osservazione 3.4. $\square$

Per la prova degli ultimi due risultati che vogliamo riportare in questa sezione, necessitiamo del seguente lemma.

Lemma 3.6. *Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni non negative in L ; allora si ha che $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \in L$.*

Dimostrazione. Per $n \in \mathbb{N}$, definiamo:

$$\psi_n := f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n.$$

Per il Teorema 2.23, si ha $\psi_n \in L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre è del tutto evidente che $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione decrescente di funzioni non negative e che quindi la successione $\{-\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione crescente di funzioni limitate dall'alto da zero. Ma allora per la monotonia dell'integrale di Daniell, sappiamo che $\{\int -\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione monotona crescente e limitata dall'alto dal numero 0. Ma allora passando al limite (il quale esiste per la Osservazione 3.2) si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int -\psi_n \leq 0 < \infty.$$

Quindi per il Teorema 3.3 si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\psi_n \in L.$$

Ma allora per il Teorema 2.23 si ha anche

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} -\psi_n \in L,$$

cioè

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = -\lim_{n \rightarrow \infty} -\psi_n \in L,$$

ove la prima uguaglianza è del tutto evidente per costruzione. $\square$

Notazione: nel seguito, per brevità, indicheremo semplicemente

$$\liminf f_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf f_n.$$

Teorema 3.7 (Lemma di Fatou per l'integrale di Daniell). *Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni non negative in L . Se $\liminf \int f_n < \infty$ allora $\liminf f_n \in L$ e vale*

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n.$$

Dimostrazione. Notiamo che l'enunciato è ben posto perché $\liminf$ di una successione esiste sempre e il primo membro della disuguaglianza, dopo aver provato che $\liminf f_n \in L$, esiste.

Definiamo $\psi_n := \inf_{k \geq n} f_k$; una piccola variazione del Lemma 3.6 ci dice che $\psi_n \in L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre è evidente che, per costruzione, $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione monotona crescente e che $\psi_n \leq f_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi, per la proprietà di monotonia dell'integrale di Daniell si ha che

$$\int \psi_n \leq \int f_n, \quad (3.12)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare, essendo la successione $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ monotona crescente possiamo affermare, per l'Osservazione 3.2, che esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n$; ma se questo esiste, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n = \liminf \int \psi_n. \quad (3.13)$$

Inoltre dalla (3.12), usando il Teorema del confronto per $\liminf$ si ha che

$$\liminf \int \psi_n \leq \liminf \int f_n. \quad (3.14)$$

Quindi, mettendo tutto insieme si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n \stackrel{(3.13)}{=} \liminf \int \psi_n \stackrel{(3.14)}{\leq} \liminf \int f_n < \infty. \quad (3.15)$$

Quindi per il Teorema 3.3 si ha che $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n \in L$ e

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n \stackrel{(3.15)}{\leq} \liminf \int f_n.$$

Ma per definizione di $\liminf$ vale $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \liminf f_n$, che conclude. $\square$

Concludiamo questa sezione con uno dei più classici teoremi della teoria della misura.

Teorema 3.8 (Convergenza dominata). *Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni in L tali che $|f_n| \leq g$ per una qualche $g \in L$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ puntualmente, allora $f \in L$ e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f.$$

Dimostrazione. Osserviamo che $0 \leq f_n + g \leq 2g$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ora, per il Teorema 2.23 poiché $g \in L$, si ha $2g \in L$; inoltre sempre per Teorema 2.23, visto che $f_n, g \in L$ si ha $f_n + g \in L$. Quindi per la monotonia dell'integrale di Daniell si ha

$$\int (f_n + g) \leq \int 2g,$$

ove per quanto detto entrambi gli integrali esistono. Allora per il Teorema del confronto per $\liminf$ si ha

$$\liminf \int (f_n + g) \leq \liminf \int 2g = \int 2g < \infty.$$

Quindi per il Lemma di Fatou

$$f + g = \liminf (f_n + g) \in L,$$

e per il Teorema 2.23 si ha quindi che

$$f = (f + g) - g \in L.$$

Inoltre, sempre per il Lemma di Fatou e la linearità dell'integrale di Daniell (si noti che gli integrali nel seguito esistono tutti!) si ha

$$\begin{aligned} \int f + \int g &= \int (f + g) = \int \liminf (f_n + g) \leq \\ &\leq \liminf \int (f_n + g) = \liminf \int f_n + \int g. \end{aligned}$$

Sottraendo $\int g$ ad entrambi i membri (non crea problemi tanto è finito!) si trova

$$\int f \leq \liminf \int f_n. \quad (3.16)$$

Ma usando lo stesso argomento con $-f_n + g$ si ottiene in modo analogo

$$\begin{aligned} -\int f + \int g &= \int (-f + g) = \int \liminf (-f_n + g) \leq \\ &\leq \liminf \int (-f_n + g) = -\limsup \int f_n + \int g; \end{aligned}$$

sottraendo $\int g$ ad entrambi i membri si trova quindi

$$\limsup \int f_n \leq \int f. \quad (3.17)$$

Quindi in conclusione si ha

$$\int f \stackrel{(3.16)}{\leq} \liminf \int f_n \leq \limsup \int f_n \stackrel{(3.17)}{\leq} \int f,$$

dove la disuguaglianza centrale è un fatto ben noto. Ma allora chiaramente si ha che esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$ e che vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f,$$

il che conclude. □

3.2 Proprietà delle funzioni Daniell-integrabili

Fino a questo momento, abbiamo introdotto il concetto di integrale secondo Daniell e abbiamo visto alcuni risultati classici della teoria dell'integrazione, che vengono formulati allo stesso modo quando si sviluppa la teoria dell'integrale di Lebesgue.

Nel precedente capitolo abbiamo anche definito chi sono le funzioni Daniell integrabili; si evince facilmente che è difficile verificare che una funzione sia Daniell-integrabile usando soltanto la definizione. Per tale motivo, in questa sezione, vediamo qualche criterio che caratterizza tale classe di funzioni.

Teorema 3.9. *Per ogni $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ si ha che $f \in L$ se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $f_\epsilon \in T_0$ tale che $\bar{I}(|f - f_\epsilon|) < \epsilon$.*

Dimostrazione. Mostriamo l'implicazione da destra verso sinistra; useremo più volte e implicitamente il contenuto dell'Osservazione 2.20. Sia $\epsilon > 0$ e sia $f_\epsilon \in T_0$ come da ipotesi. Allora osserviamo che, banalmente,

$$f = f_\epsilon + f - f_\epsilon \leq f_\epsilon + |f - f_\epsilon|;$$

quindi usando il Lemma 2.22 si ha

$$\bar{I}(f) \leq I(f_\epsilon) + \bar{I}(|f - f_\epsilon|) < I(f_\epsilon) + \epsilon. \quad (3.18)$$

Ma allo stesso modo si ha

$$-f = -f_\epsilon - f + f_\epsilon \leq -f_\epsilon + |f - f_\epsilon|;$$

quindi usando il Lemma 2.22 si ha che

$$\bar{I}(-f) \leq I(-f_\epsilon) + \bar{I}(|f - f_\epsilon|) < I(-f_\epsilon) + \epsilon. \quad (3.19)$$

Per il Lemma 2.22 sappiamo che $0 \leq \bar{I}(f) - \underline{I}(f)$ (notare che l'ipotesi del suddetto Lemma è verificata per le disuguaglianze appena viste¹), e quindi si ha

$$\begin{aligned} 0 \leq \bar{I}(f) - \underline{I}(f) &= \bar{I}(f) + \bar{I}(-f) \stackrel{(3.18)}{\leq} \\ &\stackrel{(3.18)}{\leq} I(f_\epsilon) + \epsilon + \bar{I}(-f) \stackrel{(3.19)}{\leq} \\ &\stackrel{(3.19)}{\leq} I(f_\epsilon) + I(-f_\epsilon) + 2\epsilon = 2\epsilon, \end{aligned}$$

¹Supponendo per assurdo che $\underline{I}(f)$ non fosse finito si arriverebbe ad una contraddizione usando le stime trovate sopra.

ove nella prima uguaglianza si è usata la definizione di $\underline{I}$, nell'ultima si è usata la linearità di I . Dato che $\epsilon > 0$ è arbitrario, si conclude dalla precedente che f è Daniell-integrabile.

Viceversa, assumiamo che $f \in L$. Allora per la caratterizzazione dell'estremo inferiore sappiamo che per ogni $\epsilon > 0$ esiste una funzione $\psi \in T_1$, con $f \leq \psi$, tale che

$$\bar{I}(f) \leq I_1(\psi) < \bar{I}(f) + \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.20)$$

Inoltre dall'Osservazione 2.21 sappiamo che

$$\bar{I}(\psi) = I_1(\psi). \quad (3.21)$$

Inoltre, visto che $f \leq \psi$, possiamo anche dire

$$\bar{I}(|\psi - f|) = \bar{I}(\psi - f) \stackrel{(3.21)}{\leq} I_1(\psi) + \bar{I}(-f) = I_1(\psi) - \underline{I}(f), \quad (3.22)$$

dove nella disuguaglianza è stato usato il Lemma 2.22.

Dato che $f \in L$, sappiamo che $\bar{I}(f) = \underline{I}(f)$ e quindi

$$\bar{I}(|\psi - f|) \stackrel{(3.22)}{\leq} I_1(\psi) - \underline{I}(f) = I_1(\psi) - \bar{I}(f) \stackrel{(3.20)}{<} \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.23)$$

Adesso ricordiamo che, per definizione, dire che $\psi \in T_1$ vuole dire che esiste una successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in T_0 che convergono in modo monotono crescente a ψ . Inoltre per definizione si ha

$$I_1(\psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n),$$

ma questo in particolare dice che $I_1(\psi)$ è l'estremo superiore della famiglia monotona crescente $\{I(f_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ (si ricordi che I era monotono per definizione). Quindi questo ci permette di affermare che, poiché $\psi \in T_1$, per la caratterizzazione dell'estremo superiore, esiste $f_\epsilon \in T_0$ tale che $f_\epsilon \leq \psi$ e

$$I_1(\psi) - \frac{\epsilon}{2} < I(f_\epsilon). \quad (3.24)$$

Dalla Osservazione 2.14 abbiamo che $f_\epsilon \in T_1$ e

$$I_1(f_\epsilon) = I(f_\epsilon), \quad (3.25)$$

e chiaramente

$$|\psi - f_\epsilon| = \psi - f_\epsilon. \quad (3.26)$$

Inoltre ricordiamo che T_1 è chiuso rispetto alla somma e che si comporta bene rispetto a tali operazioni (vedasi Osservazione 2.15) e che, essendo T_0 un reticolo vettoriale esteso, $-f_\epsilon \in T_0$. Usiamo queste informazioni per ottenere

$$\begin{aligned} I_1(|\psi - f_\epsilon|) &\stackrel{(3.26)}{=} I_1(\psi + (-f_\epsilon)) = I_1(\psi) + I_1(-f_\epsilon) \stackrel{(3.25)}{=} \\ &\stackrel{(3.25)}{=} I_1(\psi) + I(-f_\epsilon) = I_1(\psi) - I(f_\epsilon) \stackrel{(3.24)}{<} \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

ove nell'ultima uguaglianza si è usata la linearità di I . Da quest'ultima, usando il solito Lemma 2.22 si ha

$$\bar{I}(|f - f_\epsilon|) \leq \bar{I}(|f - \psi| + |\psi - f_\epsilon|) \leq \bar{I}(|f - \psi|) + \bar{I}(|\psi - f_\epsilon|) < \epsilon,$$

dove più precisamente si è usato il Lemma 2.22 punto 3 nella prima disuguaglianza e il punto 2 nella seconda. Ma questo conclude. $\square$

Definizione 3.10. Una funzione $f \in L$ si dice **nulla** se $\int |f| = 0$.

Osservazione 3.11. La definizione è ben posta perché se $f \in L$, essendo L un reticolo vettoriale esteso, segue che $|f| \in L$ e quindi $|f|$ è Daniell-integrabile.

Proposizione 3.12. Sia $f \in L$ una funzione nulla e $g \in \bar{\mathbb{R}}^X$ tale che $|g| \leq |f|$; allora g è una funzione nulla.

Dimostrazione. Notare che $g \vee 0 \geq 0$ e quindi per il Lemma 2.22

$$0 \leq \underline{I}(g \vee 0). \tag{3.27}$$

Inoltre $|g| = (g \vee 0) + (-g \vee 0) \geq (g \vee 0)$, quindi per il Lemma 2.22 (punto 3) si ha

$$\bar{I}(g \vee 0) \leq \bar{I}(|g|), \tag{3.28}$$

e per ipotesi anche

$$\bar{I}(|g|) \leq \bar{I}(|f|). \tag{3.29}$$

Dato che f è nulla vale

$$\bar{I}(|f|) = \int |f| = 0. \tag{3.30}$$

Riassumendo abbiamo trovato che

$$0 \stackrel{(3.27)}{\leq} \underline{I}(g \vee 0) \leq \bar{I}(g \vee 0) \stackrel{(3.28)}{\leq} \bar{I}(|g|) \stackrel{(3.29)}{\leq} \bar{I}(|f|) \stackrel{(3.30)}{=} \int |f| = 0,$$

ove nella prima disuguaglianza si è ancora usato il Lemma 2.22 (punto 4). Ma allora queste in realtà sono uguaglianze, ovvero $g \vee 0 \in L$ e

$$\int (g \vee 0) = 0.$$

In modo del tutto analogo si ragiona per $-g \vee 0$, ottenendo che $-g \vee 0 \in L$ e

$$\int (-g \vee 0) = 0.$$

Ma allora per il Teorema 2.23 si ha $g = (g \vee 0) - ((-g) \vee 0) \in L$ e

$$\int |g| = \int (g \vee 0) + \int (-g \vee 0) = 0,$$

cioè g è una funzione nulla. $\square$

Definizione 3.13. Definiamo $T_2 \subset L$ nel seguente modo:

$$T_2 := \left\{ f \in L : \text{esiste } \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T_1 \text{ tale che } \{f_n\} \searrow f \right\}.$$

Osservazione 3.14. Si ha $T_0 \subset T_1 \cap L \subset T_2 \subset L$. La prima inclusione segue dalla Osservazione 2.14 e dalla Osservazione 2.20. La terza è ovvia. Anche la seconda è ovvia: se $f \in T_1 \cap L$ allora $f \in T_2$ prendendo come successione di funzioni in T_1 che verificano la definizione precedente quella data da $f_n := f$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Proposizione 3.15. Sia $f \in T_2$; allora esiste una successione di funzioni $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T_1$ con $I_1(\phi_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $\{\phi_n\} \searrow f$.

Dimostrazione. Dato che $f \in T_2$ esiste una successione $\{\psi_n\} \subset T_1$ tale che $\{\psi_n\} \searrow f$. Notiamo che, poiché $f \in L$, abbiamo $\int f = \bar{I}(f) < \infty$; inoltre, usando la caratterizzazione dell'estremo inferiore per $\bar{I}$, esiste una funzione $\phi \in T_1$ tale che $f \leq \phi$ e

$$\bar{I}(f) \leq I_1(\phi) \leq \bar{I}(f) + 1 < \infty. \quad (3.31)$$

Sappiamo che $f \leq \psi_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che $f \leq \phi$; di conseguenza abbiamo

$$f \leq \phi \wedge \psi_n \leq \psi_n,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dato che $\{\psi_n\} \searrow f$, concludiamo che $\{\phi \wedge \psi_n\} \searrow f$. Inoltre, per monotonia di I_1

$$I_1(\phi \wedge \psi_n) \leq I_1(\phi) \stackrel{(3.31)}{\leq} \bar{I}(f) + 1 < \infty,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi la successione $\{\phi \wedge \psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni in T_1 (che è chiuso rispetto a $\wedge$) convergente in modo monotono decrescente a f e con $I_1(\phi \wedge \psi_n) < \infty$. $\square$

Vediamo ora un risultato che caratterizza le funzioni Daniell-integrabili.

Teorema 3.16 (di Caratterizzazione). Sia data $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$. Allora $f \in L$ se e solo se $f = g - h$, dove $g \in T_2$ e h è una funzione nulla non negativa.

Dimostrazione. Assumiamo che $f = g - h$, dove $g \in T_2$ e h è una funzione nulla non negativa. Per un risultato precedente è noto che, siccome $g, h \in L$, allora $f \in L$.

Viceversa assumiamo $f \in L$. Allora $\int f = \bar{I}(f) < \infty$ e, per definizione di $\bar{I}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste una funzione $\phi_n \in T_1$ tale che $f \leq \phi_n$ e

$$\bar{I}(f) \leq I_1(\phi_n) \leq \bar{I}(f) + \frac{1}{n}. \quad (3.32)$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo

$$g_n := \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n.$$

Notiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $g_n \leq \phi_n$ e che $g_n \in T_1$ (essendo T_1 chiuso rispetto a $\wedge$). Notiamo inoltre che $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione monotona decrescente di funzioni e che, poiché $f \leq \phi_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $f \leq g_n$. Allora, per la monotonia dell'operatore I_1 , si ha $I_1(g_n) \leq I_1(\phi_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; quindi dalla (3.32) si ottiene

$$I_1(g_n) \leq \bar{I}(f) + \frac{1}{n}, \quad (3.33)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Tuttavia, ricordando la definizione di $\bar{I}$ e ricordando che, come già osservato, $g_n \in T_1$ e $f \leq g_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\bar{I}(f) \leq I_1(g_n), \quad (3.34)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Riassumendo si è trovato che

$$-\infty < \bar{I}(f) \stackrel{(3.34)}{\leq} I_1(g_n) \stackrel{(3.33)}{\leq} \bar{I}(f) + \frac{1}{n} < \infty, \quad (3.35)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Tuttavia, siccome $g_n \in T_1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $I_1(g_n) < \infty$, si ha che $g_n \in L$ e $I_1(g_n) = \int g_n$. Inoltre, dalla (3.33), performando il limite per $n \rightarrow +\infty$ (il quale esiste per monotonia dell'operatore I_1 e decrescenza della successione delle g_n) si ottiene che $\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \leq \bar{I}(f) < \infty$ e dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} I_1(g_n) < \infty. \quad (3.36)$$

Poniamo adesso $g := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ come limite puntuale (che esiste). Per il Teorema 3.3, che avevamo osservato valere anche per successioni monotone decrescenti di funzioni, si ha che $g \in L$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n = \int g. \quad (3.37)$$

Inoltre $g \in T_2$ per definizione di T_2 . Adesso performiamo il limite per $n \rightarrow +\infty$ nella (3.35) (il che è lecito) ed otteniamo

$$\bar{I}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_1(g_n). \quad (3.38)$$

Riassumendo, abbiamo trovato che

$$\int f = \bar{I}(f) \stackrel{(3.38)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} I_1(g_n) \stackrel{(3.36)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \stackrel{(3.37)}{=} \int g. \quad (3.39)$$

Inoltre, siccome $f \leq g_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, mandando $n \rightarrow +\infty$ si ottiene banalmente che $f \leq g$; quindi, posta $h := g - f$, si ha che $0 \leq h$. Inoltre, siccome L è chiuso rispetto alla

somma dei suoi elementi, $h \in L$ (e anche $|h| \in L$) e per linearità dell'integrale di Daniell si ha

$$\int |h| = \int h = \int g - \int f \stackrel{(3.39)}{=} 0.$$

Dunque h è una funzione nulla e $f = g - h$, ove $g \in T_2$ e h è una funzione nulla non negativa. Ma ciò conclude. $\square$

3.3 Dall'integrale alla misura

Nelle sezioni precedenti abbiamo descritto una procedura che, sostanzialmente, estendendo un funzionale lineare ci ha permesso di definire una particolare classe di integrali (di Daniell); con questa tecnologia siamo riusciti anche a dimostrare i più classici teoremi della teoria della misura. Adesso vogliamo provare che, in realtà, tale costruzione è la stessa che si fa mediante la teoria della misura.

Sia X un insieme, $T_0 \subset \overline{\mathbb{R}}^X$ un reticolo vettoriale esteso di funzioni e $I : T_0 \rightarrow \mathbb{R}$ un I -integrale. Sia L la famiglia delle funzioni Daniell-integrabili per la scelta del reticolo vettoriale esteso e dell' I -integrale fatte. Come sempre indicheremo con $\int$ l'integrale di Daniell. Inoltre, dato $A \subseteq X$, denotiamo $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione caratteristica sull'insieme A , data da

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & \text{per } t \in A \\ 0, & \text{per } t \notin A. \end{cases}$$

Per iniziare, introduciamo il concetto di funzione Daniell-misurabile e di insieme Daniell-misurabile.

Definizione 3.17. *Diciamo che una funzione $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ è Daniell-misurabile se per ogni $\phi \in L$ si ha $\phi \wedge f \in L$.*

Definizione 3.18. *Diciamo che un insieme $A \subseteq X$ è Daniell-misurabile se la sua funzione caratteristica χ_A è Daniell-misurabile.*

Usando queste definizioni andiamo a vedere il seguente risultato:

Lemma 3.19. *Siano $f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X$. Allora:*

1. *se f e g sono funzioni Daniell-misurabili, allora anche $f \vee g$ e $f \wedge g$ lo sono;*
2. *se $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}^X$ è una successione di funzioni Daniell-misurabili, non negative e convergenti puntualmente ad f , allora anche f è Daniell-misurabile.*

Dimostrazione. Per provare il primo punto, consideriamo una funzione $\phi \in L$. Siccome f e g sono Daniell-misurabili, allora entrambe $f \wedge \phi$ e $g \wedge \phi$ sono funzioni in L . Inoltre si ha, per la chiusura di L rispetto a $\wedge$, che

$$(f \wedge g) \wedge \phi = (f \wedge \phi) \wedge (g \wedge \phi) \in L.$$

Similmente, siccome L è chiuso rispetto a $\vee$, si ha

$$(f \vee g) \wedge \phi = (f \wedge \phi) \vee (g \wedge \phi) \in L.$$

Proviamo ora il secondo punto. Sia $\phi \in L$; allora, siccome $0 \leq f_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo $|f_n \wedge \phi| \leq |\phi|$. Inoltre, per il Teorema 2.23, sappiamo che $|\phi| \in L$. Adesso notiamo che, puntualmente, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \wedge \phi = f \wedge \phi$. Quindi, per il Teorema 3.8, si ha

$$f \wedge \phi = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \wedge \phi \in L.$$

Per l'arbitrarietà della funzione $\phi \in L$ scelta, questo conclude che f è una funzione Daniell-misurabile. $\square$

Vediamo ora un altro risultato che caratterizza le funzioni Daniell-misurabili.

Lemma 3.20. *Sia $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ non negativa. Si ha che $\phi \wedge f \in L$ per ogni $\phi \in T_0$ se e solo se f è una funzione Daniell-misurabile.*

Dimostrazione. Assumiamo che $\phi \wedge f \in L$ per ogni $\phi \in T_0$. Vogliamo provare che $\phi \wedge f \in L$ per ogni $\phi \in T_1$ con $I_1(\phi) < \infty$. Siccome $\phi \in T_1$, per definizione di T_1 , esiste una successione di funzioni $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T_0$ tale che $\{\phi_n\} \nearrow \phi$; dunque $\phi_n \wedge f \in L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma per l'Osservazione 2.20 si ha che $\phi_n \in L$ e per l'Osservazione 3.1 si ha che $\{\int \phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione monotona crescente. Allo stesso modo, anche $\{\int (\phi_n \wedge f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione monotona crescente. Inoltre è banale osservare, come già fatto più volte, che siccome $\phi \in T_1$ e $I_1(\phi) < \infty$, si ha che $\phi \in L$ e $\int \phi = I_1(\phi) < \infty$.

Dato che, banalmente, si ha $\phi_n \wedge f \leq \phi_n \leq \phi$, allora per l'Osservazione 3.1 abbiamo $\int (\phi_n \wedge f) \leq \int \phi_n \leq \int \phi$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi, mandando $n \rightarrow +\infty$ (l'esistenza dei limiti è garantita per quanto detto), si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int (\phi_n \wedge f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n \leq \int \phi < \infty.$$

Ma allora, per il Teorema 3.3, abbiamo $\phi \wedge f = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n \wedge f \in L$. Questo prova che $\phi \wedge f \in L$ per ogni funzione Daniell-integrabile $\phi \in T_1$.

Adesso proviamo che $\phi \wedge f \in L$ per ogni funzione $\phi \in T_2$. Siccome $\phi \in T_2$, si ha una successione $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T_1$ tale che $\{\phi_n\} \searrow \phi$. Per la Proposizione 3.15 possiamo

scegliere la successione $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T_1$ in modo tale che $I_1(\phi_n) < \infty$; quindi, per quanto abbiamo già provato, abbiamo $\phi_n \wedge f \in L$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Richiamando che $T_2 \subset L$, sappiamo che $\phi \in L$. Siccome f è non negativa è facile riconoscere che

$$\phi \wedge 0 \leq \phi \wedge f \leq \phi_n \wedge f \leq \phi_1 \wedge f, \quad (3.40)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma per il Teorema 2.23 abbiamo che $\phi \wedge 0 \in L$. Ma abbiamo anche che $\phi_1 \wedge f \in L$, siccome $\phi_1 \in T_1$, per quanto già provato. Ma allora, dalla (3.40), abbiamo che $\{\phi_n \wedge f\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione monotona di funzioni in L limitate dall'alto da funzioni in L , e dunque, usando il Teorema 3.8 ne deduciamo che il limite puntuale $\phi \wedge f = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n \wedge f \in L$. Ma allora abbiamo proprio dimostrato che $\phi \wedge f \in L$ per ogni funzione $\phi \in T_2$.

Adesso sia $\phi \in L$. Per il Teorema 3.16 abbiamo che $\phi = \psi - h$, per una qualche funzione $\psi \in T_2 \subset L$ e per una qualche funzione nulla e non negativa $h \in L$. Per quanto appena provato abbiamo $\psi \wedge f \in L$. Inoltre, si verifica in modo diretto che

$$\begin{aligned} 0 &\leq \psi \wedge f - \phi \wedge f \\ &= \frac{1}{2} (\psi + f - |\psi - f|) - \frac{1}{2} (\phi + f - |\phi - f|) \\ &= \frac{1}{2} (\psi - \phi + |\phi - f| - |\psi - f|) \\ &\leq \frac{1}{2} (\psi - \phi + |\psi - \phi|) = \psi - \phi = h. \end{aligned}$$

Siccome h è una funzione nulla, per la Proposizione 3.12 si ha che $\psi \wedge f - \phi \wedge f$ è anche una funzione nulla. Ma ora notiamo che, in modo del tutto ovvio

$$\phi \wedge f = \psi \wedge f - (\psi \wedge f - \phi \wedge f),$$

ove $\psi \wedge f - \phi \wedge f$ è una funzione nulla (e quindi in particolare sta in L) non negativa e, come già detto, $\psi \wedge f \in L$. Ma allora per il Teorema 2.23 si ha che $\phi \wedge f \in L$. Siccome ϕ è stata scelta arbitrariamente in L , concludiamo che f è una funzione Daniell-misurabile.

Il viceversa segue dal fatto più volte osservato che $T_0 \subset L$, quindi se $\phi \wedge f \in L$, per ogni $\phi \in L$ (cioè f è Daniell-misurabile), allora $\phi \wedge f \in L$, per ogni $\phi \in T_0$, il che conclude. $\square$

Facciamo riferimento al Capitolo 1 per le definizioni di σ -ring (Definizione 1.1) e σ -algebra (Definizione 1.3).

Teorema 3.21. *Sia $A(X)$ la famiglia di tutti gli insiemi Daniell-misurabili. Allora $A(X)$ è un σ -ring. Inoltre se X è un insieme Daniell-misurabile, allora $A(X)$ è una σ -algebra.*

Dimostrazione. Per mostrare che $A(X)$ è un σ -ring, è sufficiente mostrare che $A(X)$ è chiuso rispetto

1. alla differenza insiemistica;
2. alle unioni al più numerabili.

Per provare 1, siano $A, B \in A(X)$. Abbiamo bisogno di un lemma:

Lemma 3.22. *Per ogni $\phi \in L$, vale*

$$\phi \wedge \chi_{A \setminus B} = \phi \wedge \chi_A - \phi \wedge (\chi_A \wedge \chi_B) + \phi \wedge 0. \quad (3.41)$$

Dimostrazione. Sia $t \in X$. Se $\phi(t) \leq 0$, siccome le funzioni caratteristiche sono tutte funzioni non negative, si ha per verifica diretta che

$$(\phi \wedge \chi_{A \setminus B})(t) = \phi(t) = (\phi \wedge \chi_A)(t) - (\phi \wedge (\chi_A \wedge \chi_B))(t) + (\phi \wedge 0)(t).$$

Se $\phi(t) \geq 0$ e $t \in A \setminus B$, allora si osserva che $(\phi \wedge \chi_{A \setminus B})(t) = \min\{\phi(t), 1\}$, e

$$(\phi \wedge \chi_A)(t) - (\phi \wedge (\chi_A \wedge \chi_B))(t) + (\phi \wedge 0)(t) = \min\{\phi(t), 1\} - 0 + 0 = \min\{\phi(t), 1\}.$$

Se $\phi(t) \geq 0$ e $t \in A \cap B$, allora $(\phi \wedge \chi_{A \setminus B})(t) = 0$, e

$$(\phi \wedge \chi_A)(t) - (\phi \wedge (\chi_A \wedge \chi_B))(t) + (\phi \wedge 0)(t) = \min\{\phi(t), 1\} - \min\{\phi(t), 1\} + 0 = 0.$$

Infine, se $\phi(t) \geq 0$ e $t \notin A$, allora $(\phi \wedge \chi_{A \setminus B})(t) = 0$, e anche

$$(\phi \wedge \chi_A)(t) - (\phi \wedge (\chi_A \wedge \chi_B))(t) + (\phi \wedge 0)(t) = 0.$$

Quindi, abbiamo provato che per ogni $t \in X$, la (3.41) vale. $\square$

Ma ora, siccome $A, B \in A(X)$, sappiamo per definizione che χ_A, χ_B sono Daniell-misurabili. In particolare, se $\phi \in L$, allora sappiamo già che $\phi \wedge 0 \in L$, ma abbiamo anche $\phi \wedge \chi_A \in L$; inoltre abbiamo che $\phi \wedge (\chi_A \wedge \chi_B) = (\phi \wedge \chi_A) \wedge \chi_B \in L$, siccome $(\phi \wedge \chi_A) \in L$ e χ_B è Daniell-misurabile. In altre parole, stiamo dicendo che ogni termine del membro di destra della (3.41) è in L ; ma allora per il Teorema 2.23 si ha in particolare che $\phi \wedge \chi_{A \setminus B} \in L$. Valendo tutto ciò per ogni funzione $\phi \in L$, la funzione $\chi_{A \setminus B}$ è Daniell-misurabile e quindi $A \setminus B$ è un insieme Daniell-misurabile.

Invece, per provare 2, supponiamo di avere $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A(X)$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo che

$$\chi_{\cup_{i=1}^n A_i} = \chi_{A_1} \vee \chi_{A_2} \vee \cdots \vee \chi_{A_n},$$

e tale funzione è Daniell-misurabile per il Lemma 3.19 (si noti che questo prova la chiusura di $A(X)$ per unioni finite, perché effettivamente $\cup_{i=1}^n A_i$ è Daniell-misurabile!). Ma ora osserviamo che $\{\chi_{\cup_{i=1}^n A_i}\} \nearrow \chi_{\cup_{i=1}^{\infty} A_i}$ e dunque, ancora per il Lemma 3.19, deduciamo che $\chi_{\cup_{i=1}^{\infty} A_i}$ è una funzione Daniell-misurabile. Ma questo allora dice che, per definizione, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ è un insieme Daniell-misurabile. Quindi $A(X)$ è un σ -ring.

Il resto dell'enunciato è banale: X è un insieme Daniell-misurabile e quindi, per la definizione di σ -algebra, $A(X)$ è una σ -algebra. $\square$

Facciamo riferimento al Capitolo 1 per le definizioni di pre-misura (Definizione 1.4) e di misura (Definizione 1.5). Adesso siamo pronti per associare all'integrale di Daniell una misura.

Teorema 3.23. *Sia X un insieme Daniell-misurabile e sia $A(X)$ la famiglia di tutti gli insiemi Daniell-misurabili. Sia $\mu : A(X) \rightarrow [0, +\infty]$ definita nel seguente modo: preso $E \in A(X)$ poniamo*

$$\mu(E) = \begin{cases} \int \chi_E, & \text{se } \chi_E \text{ è integrabile} \\ +\infty, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora μ è una misura.

Dimostrazione. Stante il Teorema 3.21, l'enunciato è ben posto perché $A(X)$ è una σ -algebra. Ora dobbiamo effettivamente provare che μ è non negativa affinché abbia senso la definizione che abbiamo dato. Se $E \in A(X)$, allora banalmente si ha $0 \leq \chi_E$. Quindi, per l'Osservazione 3.1, se χ_E è integrabile, abbiamo

$$0 \leq \int \chi_E = \mu(E) \in [0, +\infty[.$$

Inoltre, poiché banalmente $\chi_{\emptyset} = 0$ e sappiamo che, ai sensi del Teorema 2.23, l'integrale di Daniell è lineare, abbiamo anche

$$\mu(\emptyset) = \int \chi_{\emptyset} = \int 0 = 0.$$

Adesso facciamo vedere che μ è numerabilmente additiva. Prendiamo $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi disgiunti in $A(X)$ tale che $\mu(E_n)$ è finita per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siccome sono insiemi disgiunti si ha che

$$\chi_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}. \quad (3.42)$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{E_n} < \infty$, allora per il Teorema 3.3, si ha

$$\chi_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} \in L. \quad (3.43)$$

Si noti che, ancora per Teorema 3.3, vale la terza delle seguenti uguaglianze

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \int \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} \stackrel{(3.42)}{=} \int \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Se invece $\sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{E_n} = +\infty$, allora proviamo che $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = +\infty$. Se non fosse così, per come è definita μ , abbiamo che $\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} \in L$; inoltre è ben noto che, per ogni $N \in \mathbb{N}$, si ha

$$\chi_{\bigcup_{n=1}^N E_n} \leq \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n};$$

quindi per l'Osservazione 3.1 abbiamo

$$\int \chi_{\bigcup_{n=1}^N E_n} \leq \int \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}. \quad (3.44)$$

Inoltre, siccome gli E_n sono disgiunti, abbiamo $\chi_{\bigcup_{n=1}^N E_n} = \sum_{n=1}^N \chi_{E_n}$ per ogni $N \in \mathbb{N}$. Quindi per linearità dell'integrale di Daniell, provata nel Teorema 2.23, si ha

$$\sum_{n=1}^N \int \chi_{E_n} = \int \chi_{\bigcup_{n=1}^N E_n}. \quad (3.45)$$

Mettendo tutto insieme, per ogni $N \in \mathbb{N}$, si trova che

$$\sum_{n=1}^N \int \chi_{E_n} \stackrel{(3.45)}{=} \int \chi_{\bigcup_{n=1}^N E_n} \stackrel{(3.44)}{\leq} \int \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} < \infty.$$

Ma adesso, performando il limite per $N \rightarrow +\infty$ (si noti che esso esiste), si trova che $\sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{E_n} < +\infty$. Tuttavia questo è contraddittorio. Concludiamo che μ è una misura. $\square$

Facciamo il punto della situazione: abbiamo definito una misura sul nostro insieme X e l'integrale di Daniell $\int$ sulla classe delle funzioni integrali secondo Daniell $L \subset \overline{\mathbb{R}}^X$. Il teorema che presentiamo nella sezione successiva stabilisce una connessione tra l'integrale di Daniell e tale misura.

3.3.1 Il Teorema di Daniell-Stone

Si faccia riferimento al Capitolo 1 per le definizioni opportune sull'integrale associato ad una misura astratta.

Teorema 3.24 (Daniell-Stone). *Sia T_0 un reticolo vettoriale esteso di funzioni su un insieme X con la proprietà che $\chi_X \wedge \varphi \in T_0$ per ogni $\varphi \in T_0$. Sia I un I -integrale su T_0 . Sia $A(X)$ la σ -algebra degli insiemi Daniell-misurabili e μ la misura su $A(X)$ definita come nel Teorema 3.23. Si consideri infine una funzione $\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Allora φ è*

μ -integrabile (e il suo integrale è finito²) se e solo se tale funzione è Daniell-integrabile; in tale caso vale

$$\int \varphi = \int_X \varphi d\mu,$$

ove il primo è l'integrale secondo Daniell, il secondo è l'integrale rispetto alla misura μ .

Dimostrazione. L'enunciato è ben posto: infatti, l'ipotesi che $\chi_X \wedge \varphi \in T_0$ per ogni $\varphi \in T_0$ insieme al Lemma 3.20 ci permette di concludere che χ_X è una funzione Daniell-misurabile (ossia X è un insieme Daniell-misurabile); a questo punto i Teoremi 3.21 e 3.23 garantiscono che la famiglia degli insiemi Daniell-misurabili $A(X)$ sia una σ -algebra e che la funzione del Teorema 3.23 sia una misura. Ora dobbiamo collegare tale σ -algebra e tale misura all'integrale di Daniell. A tal fine ci servono vari lemmi.

Lemma 3.25. *Sia $f \in L$; allora f è μ -misurabile.*

Dimostrazione. Usando la parte positiva e la parte negativa di una funzione, è facile vedere che ogni funzione in L si scrive come differenza di due funzioni non negative; quindi è sufficiente considerare funzioni non negative in L . Senza perdita di generalità, sia $f \in L$, $f \geq 0$; denotiamo

$$E_a := \{t \in X : f(t) > a\}.$$

Siccome $f \geq 0$, se $a \leq 0$, allora $E_a = X \in A(X)$. Quindi, assumiamo $a > 0$. Sia

$$g = \frac{1}{a}f - \left(\left(\frac{1}{a}f \right) \wedge \chi_X \right).$$

Ma per il Teorema 2.23 abbiamo che anche $\frac{1}{a}f \in L$ e dunque, essendo χ_X Daniell-misurabile, per definizione, anche $(\frac{1}{a}f) \wedge \chi_X \in L$. E dunque per il Teorema 2.23 otteniamo che $g \in L$.

Sia ora $t \in X$. Se $t \in E_a$, allora $a < f(t)$; ma questo implica che $\chi_X(t) < \frac{1}{a}f(t)$ e quindi $0 < g(t)$. Se $t \notin E_a$, allora $f(t) \leq a$ e dunque $\frac{1}{a}f(t) \leq \chi_X(t)$. Quindi $(\frac{1}{a}f) \wedge \chi_X = \frac{1}{a}f$ e, pertanto, $g(t) = 0$.

In altre parole $0 < g(t)$ se e solo se $t \in E_a$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo

$$\varphi_n := \chi_X \wedge ng.$$

Per il Teorema 2.23 abbiamo che $ng \in L$ siccome $g \in L$; ma essendo χ_X Daniell-misurabile si ha che φ_n è una funzione Daniell-misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi

²Secondo le definizioni date nel Capitolo 1 potrebbe accadere che l'integrale di φ sia esteso; tuttavia, secondo Daniell, l'integrale non può esserlo; quindi questa ipotesi è necessaria.

abbiamo che $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni Daniell-misurabili monotona crescente e tale che, per quanto provato sopra, converge puntualmente a χ_{E_a} . Ma allora per il Lemma 3.19 si ha che χ_{E_a} è una funzione Daniell-misurabile il che significa, per definizione, che $E_a \in A(X)$. Questo conclude la prova. $\square$

Proposizione 3.26. *Sia $f \in L$ non negativa, allora f è integrabile rispetto a μ .*

La dimostrazione seguirà da vari lemmi. Per $k, n \in \mathbb{N}$, definiamo:

$$E_{k,n} := \{t \in X : f(t) > k2^{-n}\}. \quad (3.46)$$

Per il Lemma 3.25 sappiamo che $E_{k,n} \in A(X)$ e dunque, per definizione, $\chi_{E_{k,n}}$ è Daniell-misurabile. Per il Teorema 2.23 abbiamo che

$$2^n k^{-1} f \in L,$$

e quindi

$$\chi_{E_{k,n}} \stackrel{(3.46)}{=} \chi_{E_{k,n}} \wedge (2^n k^{-1} f) \in L. \quad (3.47)$$

A questo punto, definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$, la seguente successione di funzioni

$$\varphi_n := 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^{2n}} \chi_{E_{k,n}}. \quad (3.48)$$

Per il Teorema 2.23 e la (3.47) si ha che $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L$.

Lemma 3.27. *La successione di funzioni $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sopra definita è monotona crescente.*

Dimostrazione. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$. Notiamo che, per verifica diretta, si ha

$$\varphi_{n+1} = 2^{-(n+1)} \sum_{k=1}^{2^{2(n+1)}} \chi_{E_{k,n+1}} = 2^{-n} \sum_{j=1}^{2^{2(n+1)-1}} \frac{1}{2} (\chi_{E_{2j,n+1}} + \chi_{E_{2j-1,n+1}}). \quad (3.49)$$

Inoltre, se $t \in E_{j,n}$, allora

$$f(t) > j2^{-n} = (2j)2^{-(n+1)},$$

il che significa che $t \in \chi_{E_{2j,n+1}}$. Similmente, se $t \in E_{j,n}$, allora

$$f(t) > j2^{-n} > (2j-1)2^{-(n+1)},$$

e quindi $t \in \chi_{E_{2j-1,n+1}}$. Ma quindi questo prova che $E_{j,n} \subset E_{2j,n+1}$ e $E_{j,n} \subset E_{2j-1,n+1}$.

Da queste abbiamo banalmente

$$\chi_{E_{j,n}} \leq \chi_{E_{2j,n+1}} \quad \text{e} \quad \chi_{E_{j,n}} \leq \chi_{E_{2j-1,n+1}}.$$

Queste disuguaglianze insieme alla (3.49) permettono di scrivere

$$\begin{aligned} 2^{-n} \sum_{j=1}^{2^{2(n+1)}-1} \frac{1}{2} (\chi_{E_{2j,n+1}} + \chi_{E_{2j-1,n+1}}) &\geq \\ 2^{-n} \sum_{j=1}^{2^{2(n+1)}-1} \frac{1}{2} (\chi_{E_{j,n}} + \chi_{E_{j,n}}) &\geq \\ 2^{-n} \sum_{j=1}^{2^{2n}} \chi_{E_{j,n}} &= \varphi_n. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi trovato che $\varphi_{n+1} \geq \varphi_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ che conclude. $\square$

Lemma 3.28. *La successione di funzioni $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sopra definita converge puntualmente a f .*

Dimostrazione. Fissiamo $t \in X$. Si noti che il limite puntuale esiste per il lemma precedente. Ci sono tre casi.

Caso 1: Se $f(t) = 0$, allora per ogni $k, n \in \mathbb{N}$ abbiamo che $\chi_{E_{k,n}}(t) = 0$. Ma allora, dalla definizione delle φ_n , deduciamo che $\varphi_n(t) = 0$ e dunque $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t)$.

Caso 2: Se $f(t) > 0$ e $f(t)$ è finito, allora esiste chiaramente $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > N$, abbiamo $2^n > f(t)$. Fissiamo un tale $n > N$ e poniamo

$$K := \max\{k \in \mathbb{N} : f(t) > 2^{-n}k\}.$$

Notiamo che se $k > K$, allora $2^{-n}k \geq f(t)$ e quindi $t \notin E_{k,n}$. Ma questo allora dice che $\chi_{E_{k,n}} = 0$ per $k > K$. Quindi abbiamo, richiamando la definizione delle φ_n , che

$$f(t) - \varphi_n(t) = f(t) - 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^{2n}} \chi_{E_{k,n}}(t) = f(t) - 2^{-n} \sum_{k=1}^K \chi_{E_{k,n}}(t). \quad (3.50)$$

Ad ogni modo sappiamo che $t \in E_{k,n}$ quando $k < K$. Perciò, per ogni $k < K$ abbiamo che $\chi_{E_{k,n}}(t) = 1$. Tuttavia per la definizione di K , sappiamo anche che $f(t) \leq 2^{-n}(K+1)$. Quindi

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(t) - \varphi_n(t) \stackrel{(3.50)}{=} f(t) - 2^{-n} \sum_{k=1}^K \chi_{E_{k,n}}(t) = \\ &= f(t) - 2^{-n}K \leq 2^{-n}(K+1) - 2^{-n}K = 2^{-n}. \end{aligned}$$

Facciamo tendere $n \rightarrow +\infty$ (il limite esiste) e concludiamo che $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t)$.

Caso 3: se $f(t) = +\infty$, allora $\varphi_n(t) = 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^{2n}} \chi_{E_{k,n}}(t) = 2^{-n} 2^{2n} = 2^n$ e quindi performandone il limite per $n \rightarrow +\infty$ concludiamo che $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t)$.

Questo conclude la prova. $\square$

Abbiamo quindi fatto vedere che $\{\varphi_n\} \nearrow f$. Finalmente, proviamo che

$$\int f = \int_X f \, d\mu.$$

Si noti che, per il Teorema 3.3, la linearità dell'integrale di Daniell (Teorema 2.23) e la definizione di μ si ha

$$\begin{aligned} \int f &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} \chi_{E_{k,n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} \int \chi_{E_{k,n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} \mu(E_{k,n}). \end{aligned}$$

Notiamo che però φ_n sono funzioni a gradini per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi, per la definizione di integrale associato ad una misura astratta, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} \mu(E_{k,n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n \, d\mu.$$

Osserviamo che per i lemmi dimostrati, la successione di funzioni $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ soddisfa tutte le ipotesi del Teorema di convergenza monotona di Beppo Levi (Teorema 1.9) e quindi deduciamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Ma dunque è stato proprio provato che

$$\int f = \int_X f \, d\mu.$$

Ora facciamo vedere il viceversa del teorema per funzioni non negative. Sia $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ con $f \geq 0$ μ -integrabile nei sensi delle definizioni date nel Capitolo 1, con integrale rispetto a μ finito.

Per ogni $k, n \in \mathbb{N}$, consideriamo $E_{k,n}$ come in (3.46) e per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo la successione di funzioni $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ come in (3.48). Notiamo che, se $t \in E_{k,n}$, allora abbiamo che $k2^{-n} < f(t)$ e quindi $1 < \frac{2^n}{k} f(t)$. Per tali motivi si ha

$$\chi_{E_{k,n}} \leq \frac{2^n}{k} f \chi_{E_{k,n}} \leq \frac{2^n}{k} f.$$

Siccome l'integrale di f rispetto a μ è finito e l'integrale rispetto ad una misura astratta è lineare, si ha per ogni $n, k \in \mathbb{N}$

$$\mu(E_{k,n}) = \int_X \chi_{E_{k,n}} \, d\mu \leq \frac{2^n}{k} \int_X f \, d\mu < \infty,$$

quindi $\chi_{E_{k,n}} \in L$ per definizione di μ . Allora per il Teorema 2.23 si ha che $\varphi_n \in L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per quanto provato nei lemmi precedenti abbiamo che $\{\varphi_n\} \nearrow f$.

Ora, usando lo stesso argomento trattato sopra, si ha, per il Teorema della convergenza monotona di Beppo Levi, che

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n \, d\mu.$$

E usando gli stessi ragionamenti si trova anche che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n.$$

Quindi applicando anche il Teorema 3.3 abbiamo

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Ne deduciamo che f è Daniell-integrabile e che i due integrali coincidono.

Se $f \in L$ è una funzione arbitraria, non necessariamente non negativa, possiamo scrivere f come differenza di due funzioni non negative

$$f = f \vee 0 - (-f) \vee 0,$$

che sono integrabili per il Teorema 2.23 e si trova che f è integrabile anche rispetto a μ . Similmente se f è una funzione arbitraria μ -integrabile (con integrale rispetto a μ finito), non necessariamente non negativa, si può scrivere come differenza di due funzioni non negative μ -integrabili e quindi f risulterà Daniell-integrabile. Questo conclude la prova del Teorema di Daniell-Stone. $\square$

Capitolo 4

Applicazioni

4.1 L'integrale di Lebesgue è di Daniell

Conderiamo $X = \mathbb{R}$. Sia T_0 l'insieme delle funzioni su $\mathbb{R}$ continue e a supporto compatto, ove per supporto si intende la chiusura topologica dei punti in cui la funzione non si annulla. In questa sezione denoteremo l'integrale di Lebesgue di una funzione f come $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$. Si ricordi che una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e a supporto compatto è sommabile (secondo Lebesgue).

Consideriamo il funzionale $Leb : T_0 \rightarrow \mathbb{R}$, dato da $Leb(f) := \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$. Visto che la potenza dell'integrale di Daniell è evitare la Teoria della Misura, osserviamo che per definire il funzionale Leb basta solo l'integrale di Riemann, poiché una funzione continua a supporto compatto contenuto in $[a, b]$ è Riemann-integrabile su $[a, b]$ e i suoi integrali di Riemann e di Lebesgue coincidono. Vogliamo provare che esso è un I -integrale, ai sensi della definizione data nei capitoli precedenti. La prima e la terza proprietà di I -integrale (linearità e positività) sono ovvie per ragioni elementari di Analisi. Si tratta di provare la seconda:

Proposizione 4.1. *Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T_0$ tale che $\{f_n\} \searrow 0$; allora $\lim_{n \rightarrow \infty} Leb(f_n) = 0$.*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T_0$ come nell'enunciato. Siccome f_1 ha supporto compatto, allora dovranno esistere $a, b \in \mathbb{R}$ tali che f_1 è zero fuori da $[a, b]$. Siccome la successione è monotona decrescente e tende a 0, cioè per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $0 \leq f_n \leq f_1$, allora anche le funzioni f_n sono tutte nulle al di fuori di $[a, b]$. Quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_a^b f_n(x) dx \leq \int_a^b \sup_{t \in [a, b]} f_n(t) dx = (b - a) \sup_{t \in [a, b]} f_n(t),$$

ove nella prima uguaglianza è stato usato il fatto che $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{[a, b]} f_n(x) dx = \int_a^b f_n(x) dx$, per note ragioni di Analisi, stanti le ipotesi che si hanno sulle f_n (do-

ve l'ultimo è l'integrale secondo Riemann). Per concludere è sufficiente provare che $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [a, b]} f_n(t) = 0$, cioè che la successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a 0. Questo segue dal Teorema di Dini riportato nel Capitolo 1. $\square$

Dunque l'integrale di Lebesgue ristretto alle funzioni continue a supporto compatto è di fatto la restrizione di un particolare integrale di Daniell definito su tale T_0 . Dai Teoremi 3.21 e 3.23, sappiamo che esistono una σ -algebra $A(\mathbb{R})$ ed una misura μ su $\mathbb{R}$ definite opportunamente.

Teorema 4.2. μ (ristretta agli insiemi misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$) è la misura di Lebesgue.

Dimostrazione. Denotiamo la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ con m . Si ricordi che dato X uno spazio topologico, la σ -algebra di Borel è la più piccola σ -algebra su X che contiene (tutti) gli aperti (e quindi tutti i chiusi). Facciamo vedere che $A(\mathbb{R})$ contiene la σ -algebra di Borel di $\mathbb{R}$. Essendo tale spazio topologico secondo numerabile con base numerabile data dagli intervalli aperti (a, b) al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, è sufficiente far vedere che tali intervalli aperti stanno in $A(\mathbb{R})$ (ed usare la chiusura delle σ -algebre rispetto alle unioni numerabili).

Sia $J = (a, b)$ un intervallo aperto. Costruiamo una successione di funzioni continue che incrementano verso χ_J . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2n}{b-a}(x-a), & \text{per } x \in [a, a + \frac{b-a}{2n}] \\ 1, & \text{per } x \in [a + \frac{b-a}{2n}, b - \frac{b-a}{2n}] \\ \frac{2n}{b-a}(b-x), & \text{per } x \in [b - \frac{b-a}{2n}, b] \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si verifica che $\{f_n\} \nearrow \chi_J$ e chiaramente $f_n \in T_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque, per definizione, $\chi_J \in T_1$. Sia Leb_1 l'estensione del funzionale Leb su T_1 , secondo la Definizione 2.12. Facciamo un po' di conti (dove ancora useremo indistintamente l'integrale secondo Lebesgue e quello secondo Riemann, tanto coincidono stanti le ipotesi sulle nostre funzioni). Si ha

$$\begin{aligned} Leb_1(\chi_J) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^{a + \frac{b-a}{2n}} \frac{2n}{b-a}(x-a) dx + \int_{a + \frac{b-a}{2n}}^{b - \frac{b-a}{2n}} 1 dx + \int_{b - \frac{b-a}{2n}}^b \frac{2n}{b-a}(b-x) dx \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{b-a}{4n} \right) + \left(b-a - \frac{b-a}{n} \right) + \left(\frac{b-a}{4n} \right) \right] = b-a. \end{aligned}$$

Ma siccome $\chi_J \in T_1$, per definizione di integrale di Daniell abbiamo $\chi_J \in L$. Non solo, ma abbiamo direttamente che $\int \chi_J = Leb_1(\chi_J)$ (ove $\int$ è secondo Daniell). Ma allora χ_J è

Daniell-misurabile perchè L è chiuso rispetto a $\wedge$ (Teorema 2.23). Quindi per definizione $J \in A(\mathbb{R})$ e siccome J era arbitrario, questo conclude che $A(\mathbb{R})$ contiene la σ -algebra di Borel. Inoltre, la misura ottenuta dal Teorema 3.23, soddisfa

$$\mu(J) = \int \chi_J = b - a = m(J).$$

Dunque μ corrisponde a m quando viene ristretta agli intervalli aperti, e cioè quando è ristretta alla σ -algebra di Borel.

Dal Teorema 1.12 di Teoria della Misura, per concludere la prova, è sufficiente dimostrare che μ è completa (per la definizione si veda Capitolo 1).

Lemma 4.3. *La misura μ è completa.*

Dimostrazione. Sia $A \in A(X)$ tale che $\mu(A) = 0$. Sia $B \subset A$. Siccome $B \subset A$, si ha che $0 \leq \chi_B \leq \chi_A$. Si noti anche che, per come è fatta la misura μ , la quale era stata costruita nel Teorema 3.23, siccome $\mu(A) = 0$, χ_A è Daniell-integrabile. Quindi in definitiva abbiamo

$$0 \leq \underline{Leb}(\chi_B) \leq \overline{Leb}(\chi_B) \leq \overline{Leb}(\chi_A) = \int \chi_A = \mu(A) = 0,$$

ove le prime tre disuguaglianze sono ovvie per quanto detto sopra (e si sono usate le definizioni date per $\bar{I}$, $\underline{I}$ quando è stato definito l'integrale di Daniell, nei capitoli precedenti). Quindi le disuguaglianze sono in realtà uguaglianze, ed abbiamo quindi ottenuto che $\chi_B \in L$ con $\mu(B) = \int \chi_B = 0$. In particolare si ha che $B \in A(X)$ e B ha misura nulla. $\square$

Abbiamo quindi concluso che la misura μ (ristretta agli insiemi Lebesgue misurabili) coincide con la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ e che l'integrale di Daniell costruito in tal modo estende l'integrale di Lebesgue. $\square$

4.2 Estensione del Problema di Dirichlet

Consideriamo il seguente Problema di Dirichlet associato al Laplaciano in dimensione 2. Supponiamo di avere un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ aperto e limitato. Denotiamo la frontiera topologica di D con ∂D . Sia $g : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Sia $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile due volte. Denotiamo con Δ il Laplaciano, ossia il seguente operatore differenziale

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Notiamo che Δ è lineare. Vogliamo trovare una funzione $u \in C^2(D; \mathbb{R}) \cap C(\overline{D}; \mathbb{R})$ che soddisfi le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{per } (x, y) \in D, \\ u(x, y) = g(x, y) & \text{per } (x, y) \in \partial D. \end{cases}$$

Definizione 4.4 (Funzione armonica). Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ aperto. Sia $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile due volte; essa si dice armonica se

$$\Delta u(x, y) = 0 \text{ per } (x, y) \in D.$$

Per il resto della sezione, assumeremo che $D \subset \mathbb{R}^2$ sia aperto, connesso e limitato, tale che per ogni funzione g continua su ∂D , si abbia una soluzione $u_g \in C^2(D; \mathbb{R}) \cap C(\overline{D}; \mathbb{R})$, che soddisfa il Problema di Dirichlet sopra riportato¹. Sia $x \in D$ arbitrario e definiamo il funzionale $I_x : C(\partial D; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dato da

$$I_x(g) := u_g(x).$$

Siccome $C(\partial D; \mathbb{R})$ è un reticolo vettoriale di funzioni, soddisfa le condizioni richieste per quello che abbiamo denotato con T_0 . Vogliamo adesso provare che I_x è un I -integrale, secondo la definizione data nei capitoli precedenti.

Osservazione 4.5. I_x è ben posto. Segue dal Teorema di Unicità della soluzione del Problema di Dirichlet. Vedasi Teorema 1.16.

Teorema 4.6. Per ogni $x \in D$, I_x come definito è un I -integrale.

Dimostrazione. Sia $x \in D$. Per verificare la prima condizione della definizione di I -integrale, consideriamo due arbitrarie funzioni $g_1, g_2 \in C(\partial D; \mathbb{R})$ e $a, b \in \mathbb{R}$; siano u_1 la soluzione del Problema di Dirichlet con condizione al bordo g_1 e u_2 quella corrispondente alla condizione al bordo g_2 . Per la linearità del Laplaciano si ha

$$\Delta (au_1 + bu_2) = a\Delta u_1 + b\Delta u_2 = 0,$$

sui punti di D . Inoltre, si ha

$$au_1 + bu_2 = ag_1 + bg_2,$$

sui punti di ∂D . Per il Teorema di Unicità 1.16 si ha dunque che $u_{ag_1+bg_2} = au_{g_1} + bu_{g_2}$ su $\overline{D}$, e quindi

$$I_x(ag_1 + bg_2) = u_{ag_1+bg_2}(x) = au_{g_1}(x) + bu_{g_2}(x) = aI_x(g_1) + bI_x(g_2).$$

¹Ad esempio $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$, dove si prova esistere sempre una siffatta soluzione.

Per l'arbitrarietà di $g_1, g_2 \in C(\partial D; \mathbb{R})$, deduciamo che I_x è lineare, e quindi la prima proprietà della definizione di I -integrale è soddisfatta. Per provare la proprietà 3, usiamo il Principio del minimo debole (Teorema 1.14). Sia $g \in C(\partial D; \mathbb{R})$ tale che $g \geq 0$. Sappiamo che $u_g = g$ su ∂D . Dunque si ha

$$0 \leq \min_{\partial D} g = \min_{\partial D} u_g = \min_{\bar{D}} u_g \leq u_g(x) = I_x(g),$$

che mostra la proprietà 3.

Per concludere, sia $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(\partial D; \mathbb{R})$ tale che $\{g_n\} \searrow 0$; allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo $0 \leq g_n - g_{n+1}$, e dunque per la proprietà già provate si ha

$$0 \leq I_x(g_n - g_{n+1}) = I_x(g_n) - I_x(g_{n+1}).$$

Da questa, siccome $I_x(g_{n+1}) \geq 0$, essendo $g_{n+1} \geq 0$, abbiamo

$$0 \leq I_x(g_{n+1}) \leq I_x(g_n).$$

Inoltre, dato che $u_{g_n} = g_n$ su ∂D , per il Principio del massimo debole (Teorema 1.13) si ha

$$0 \leq I_x(g_n) = u_{g_n}(x) \leq \max_{\bar{D}} u_{g_n} = \max_{\partial D} u_{g_n} = \max_{\partial D} g_n.$$

Poiché $\{g_n\} \searrow 0$, si ha anche $\{\max_{\partial D} g_n\} \searrow 0$; quindi, performando il limite per $n \rightarrow +\infty$ nella precedente stima, si ottiene che $\lim_{n \rightarrow \infty} I_x(g_n) = 0$. Questo conclude. $\square$

Adesso si applica la teoria di Daniell. Per ogni $x \in D$ c'è un reticolo vettoriale esteso di funzioni L_x , ossia funzioni Daniell-integrabili secondo il funzionale definito; in altre parole, come visto nei capitoli precedenti, il funzionale I_x si estende ad un integrale di Daniell $\int_x : L_x \rightarrow \mathbb{R}$. Andiamo adesso a definire una funzione che potrà essere vista come soluzione del Problema di Dirichlet considerato in partenza, con condizioni più generali al bordo e che spiegheremo in un secondo momento.

Sia $f \in \bigcap_{x \in D} L_x$; definiamo la funzione $v_f : D \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$v_f(x) := \int_x f.$$

Notiamo che la condizione $f \in \bigcap_{x \in D} L_x$ significa che f è Daniell-integrabile secondo tutti gli integrali sopra definiti, al variare di $x \in D$, quindi v_f ha perfettamente senso. Adesso andiamo a dimostrare un risultato che ci dice che la condizione $f \in \bigcap_{x \in D} L_x$ è superflua: è sufficiente richiedere che f sia Daniell-integrabile per un solo elemento di D .

Per provare questo risultato necessitiamo del Teorema 1.17 (Disugaglianza di Harnack) e del Teorema 1.18 (Teorema di Harnack).

Concludiamo quindi, con il seguente risultato:

Teorema 4.7. *Se $x \in D$ e $f \in L_x$; allora $f \in L_y$ per ogni $y \in D$. Inoltre, in tale caso, v_f è armonica su D .*

Questo giustifica il perché abbiamo detto che v_f può essere vista come soluzione del Problema di Dirichlet da cui siamo partiti; il problema è che v_f potrebbe aver perso la continuità sul bordo. Tale problema viene discusso approfonditamente nei lavori del matematico Wiener².

Dimostrazione. Sia $x \in D$ e assumiamo che $f \in L_x$. Sia $T_{1,x}$ l'estensione di T_0 come nella Definizione 2.7. Notiamo che in tale definizione non c'è una reale dipendenza da x , ma ne teniamo traccia per ricordarci che stiamo lavorando con uno specifico integrale di Daniell. Trattiamo prima il caso in cui $f \in T_{1,x}$. Per definizione, esiste una successione di funzioni $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(\partial D; \mathbb{R})$ tale che $\{g_n\} \nearrow f$. In tale caso, essendo $f \in T_{1,x}$, sappiamo che

$$\int_x f = I_{1,x}(f); \quad (4.1)$$

dunque si ha, per definizione di I_1 , che

$$\int_x f \stackrel{(4.1)}{=} I_{1,x}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_x(g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{g_n}(x).$$

Siccome $f \in L_x$, sappiamo che $\int_x f < \infty$. Per il Teorema di Harnack (Teorema 1.18), siccome $\int_x f = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{g_n}(x) < \infty$, ne deduciamo che $\int_y f = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{g_n}(y) < \infty$ per ogni $y \in D$. Quindi $f \in L_y$ per ogni $y \in D$. Non solo, ma il limite puntuale $v_f = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ è armonico su D .

Adesso consideriamo il caso generale in cui $f \in L_x$. Sia $I_{1,x}$ come nella Definizione 2.12. Richiamiamo il fatto che $f \in L_x$ se e solo se

$$\bar{I}_x(f) = \underline{I}_x(f) = -\bar{I}_x(-f) < \infty,$$

e tale valore comune è denotato con $\int_x f$. Ma per la definizione di $\bar{I}_x$, essendo un estremo superiore, abbiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste una funzione $g_n \in T_{1,x}$ con $f \leq g_n$ e

$$I_{1,x}(g_n) \leq \int_x f + \frac{1}{n}, \quad (4.2)$$

ed esiste una funzione h_n tale che $-h_n \in T_1$ con $-f \leq -h_n$ e

$$I_{1,x}(-h_n) \leq \int_x (-f) + \frac{1}{n}. \quad (4.3)$$

²Per ulteriori approfondimenti si veda [7].

Siccome f è Daniell-integrabile, $I_{1,x}(g_n)$ e $I_{1,x}(-h_n)$ sono finiti. Inoltre, siccome g_n e $-h_n$ sono funzioni in $T_{1,x}$, sono entrambe Daniell-integrabili; ma non solo, sappiamo anche che

$$I_{1,x}(g_n) = \int_x g_n \quad \text{e} \quad I_{1,x}(-h_n) = \int_x -h_n = - \int_x h_n,$$

per linearità dell'integrale di Daniell. Siccome $T_{1,x}$ è chiuso rispetto a $\vee$ e a $\wedge$, a meno di doverle manipolare con tali operatori, non è restrittivo assumere che $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente e $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente. Notiamo anche che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$h_n \leq f \leq g_n,$$

e per quello che abbiamo fatto vedere nel caso speciale, abbiamo che entrambe v_{g_n} e v_{h_n} sono armoniche. Per monotonia dell'integrale di Daniell, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $y \in D$, abbiamo che

$$v_{h_n}(y) = \int_y h_n \leq \int_y g_n = v_{g_n}(y).$$

Dunque $v_{h_n} \leq v_{g_n}$.

Siccome D è aperto, esiste $a > 0$ tale che la $\overline{B_a(x)} \subset D$, ove $B_a(x)$ è la palla di raggio a aperta centrata nel punto x . Siccome il Laplaciano è lineare e v_{g_n}, v_{h_n} sono armoniche su D è anche armonica $v_{g_n} - v_{h_n}$ su D , per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dalla Disuguaglianza di Harnack otteniamo, per ogni $y \in V$, che

$$0 \leq v_{g_n}(y) - v_{h_n}(y) \leq \sup_{x \in B_a(x)} (v_{g_n} - v_{h_n}) \leq C \inf_{x \in B_a(x)} (v_{g_n} - v_{h_n}) \leq C(v_{g_n}(x) - v_{h_n}(x)), \quad (4.4)$$

per ogni $x \in B_a(x)$. Inoltre dalla (4.2) e dalla (4.3) sappiamo che

$$0 \leq v_{g_n}(x) - v_{h_n}(x) = \int_x g_n - \int_x h_n \leq \int_x f + \int_x (-f) + \frac{2}{n} = \frac{2}{n},$$

per ogni $x \in B_a(x)$. Usandola insieme alla (4.4), otteniamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $y \in B_a(x)$ si ha

$$0 \leq v_{g_n}(y) - v_{h_n}(y) \leq \frac{2C}{n}. \quad (4.5)$$

Siccome le successioni delle g_n e delle h_n sono monotone, per monotonia dell'integrale di Daniell, anche le successioni delle v_{h_n} e delle v_{g_n} lo sono e quindi esistono due funzioni $v_1, v_2 : B_a(x) \rightarrow \mathbb{R}$ definite come il limite puntuale su $B_a(x)$ delle v_{h_n} e delle v_{g_n} . Si noti che a priori questi limiti puntuali potrebbero essere estesi; tuttavia la (4.5) a quel punto sarebbe contraddittoria se, per un qualche punto di $B_a(x)$, uno tra v_1 o v_2 (o entrambi) fossero estesi (performando il limite per $n \rightarrow +\infty$). Ma dalla (4.5) deduciamo, performando il limite, che $v_1 = v_2 =: v$ su $B_a(x)$. La successione delle $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ era crescente, quindi lo è anche quella delle v_{h_n} ; inoltre queste sono armoniche

e il loro limite puntuale v ha valori in $\mathbb{R}$. Per il Teorema di Harnack v è armonica su $B_a(x)$. Non solo, ma per ogni $n \in \mathbb{N}$, dato che $h_n \leq f \leq g_n$, per ogni $y \in B_a(x)$ abbiamo

$$v_{h_n}(y) \leq \underline{I}_y(f) \leq \bar{I}_y(f) \leq v_{g_n}(y).$$

Siccome $v_{h_n}(y)$ e $v_{g_n}(y)$ convergono allo stesso limite $v(y)$, al tendere di $n \rightarrow +\infty$, deduciamo chiaramente che $f \in L_y$ e che $v_f(y) = \int_y f = v(y)$. Siccome $y \in B_a(x)$ è arbitrario, concludiamo che v_f è definita ed uguale a v su $B_a(x)$, e dunque, essendo v armonica, lo è anche v_f .

Sia ora $z \in D$ arbitrario. Siccome D è connesso in $\mathbb{R}^2$ è anche connesso per archi, quindi possiamo prendere un cammino dal punto x al punto z . In ogni punto di tale cammino si può considerare una palla aperta centrata in tale punto con un certo raggio; siccome D è limitato, tale cammino sarà compatto in $\mathbb{R}^2$ e per tanto estraiamo un numero finito di tali palle che coprono il cammino; a questo punto possiamo ripetere l'argomento fatto sopra su ciascuna di esse. Ne deduciamo dunque che v_f è armonica in un intorno del cammino che congiunge i punti x e z ed è anche Daniell-integrabile rispetto a I_z , cioè $f \in L_z$. Questo ci fa concludere che $f \in L_z$ per ogni $z \in D$. In altre parole, abbiamo provato che $f \in L_x$ per qualche $x \in D$ implica che $f \in L_y$ per ogni $y \in D$. Inoltre, siccome v_f è armonica in un intorno di un qualunque cammino che congiunge ogni coppia di punti di D , ne deduciamo che v_f è armonica su D . $\square$

Bibliografia

- [1] W. Rudin: “Real and Complex Analysis”. Third edition. McGraw-Hill Book Co.: New York, 1987.
- [2] P.J. Daniell: “Annals of Mathematics”, Mathematics Department, Princeton University, Vol. 19, No. 4, pp. 279-294, (Jun., 1918).
- [3] A.D.Clercq: “THE DANIELL INTEGRAL: INTEGRATION WITHOUT MEASURE”, ResearchGate, pp. 2–30, 43–46, (2022).
- [4] V. Martino: *Complementi di analisi matematica*, Dispensa, Anno Accademico 2023/2024. Disponibile all'url <https://virtuale.unibo.it>
- [5] L.C. Evans: “Partial differential equations”, grad. Studies in Math volume 19, 1998.
- [6] G. de Barra: “Measure theory and integration”, John Willy and sons, 1981.
- [7] N. Wiener: “Discontinuous boundary conditions and the dirichlet problem”, “Transactions of the American”, Mathematical Society, 25(3):307–314, 1923.

Ringraziamenti

Voglio ringraziare prima di tutto i miei genitori che, non solo mi hanno sostenuto economicamente negli studi, ma mi hanno sempre permesso, in questi tre anni, di concentrarmi unicamente sull'università, mettendomi nelle condizioni di poter avere un buon percorso accademico.

Ringrazio il mio relatore Prof. Andrea Bonfiglioli per la disponibilità e l'aiuto fornitomi durante la stesura della tesi.

Ringrazio Sara che in questi tre anni mi ha sempre aiutato e sostenuto; lei più di tutti mi ha supportato nei momenti di difficoltà (e il cui aiuto servirà ancora).

Ringrazio Elena, Davide e Sofia per i bei momenti che ci hanno accompagnato in questi tre anni; per le risate durante le lezioni fatte insieme e per il sostegno che ci siamo vicendevolmente forniti.

Ringrazio, in generale, tutti i miei amici, che mi hanno dato la cosa più importante da tenere in mente durante gli studi: lo svago. Svagarsi e uscire a divertirsi è parte integrante dello studio, perchè allevia la stanchezza e libera la mente.

La Laurea Triennale in Matematica ti insegna prima di tutto a ragionare; quante volte, in questi tre anni, c'è stato detto che la matematica è difficile; chiunque esca da questo percorso sa perfettamente che questo è vero solo in parte. La matematica è difficile sì, ma molto dipende da chi te la insegna; durante questi tre anni tutti noi abbiamo interagito con due tipi di persone: chi la matematica te la vuole insegnare e chi, invece, vuole renderla il più difficile possibile. Voglio dire un grazie ai primi, perchè se oggi sono qui a scrivere i ringraziamenti della mia Tesi è merito vostro: grazie a voi mi è stata data per davvero la possibilità di imparare.