

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di fisica e Astronomia
Corso di Laurea Triennale in Astronomia

Equazioni di stato della materia in astrofisica

Tesi di Laurea

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Marcella Brusa

Presentata da:
Salvatore Francesco Belluardo

Anno Accademico 2023-2024

*Siamo parte di un vasto sistema
interconnesso, come nodi in una
rete cosmica.*

-Harlow Shapley

Indice

Termodinamica statistica	4
1.1 Sistemi microcanonici	4
1.2 Entropia microcanonica S_{mc}	5
1.3 Gas perfetto	6
1.4 Gas degenere	7
Stelle	9
2.1 EdS negli interni stellari	9
2.1.1 Caso non relativistico	10
2.1.2 Caso relativistico	10
2.2 Parametro di degenerazione	11
2.3 Diagramma $\text{Log}T - \text{Log}\rho$	12
Cosmologia	14
3.1 Metrica di Friedmann-Robertson-Walker	14
3.2 Fluidi cosmici	14
3.3 Equazioni di Friedmann	15
3.4 EdS in cosmologia	16
APPENDICE	18

Abstract

Le equazioni di stato (EdS) svolgono un ruolo rilevante in fisica e in astrofisica. In questa tesi vogliamo esplorare il loro ruolo, partiremo dalla derivazione teorica abbracciando il mondo della Termodinamica statistica con l'applicazione in due casi di nostro particolare interesse. Dopodichè, si analizzerà il loro ruolo negli interni stellari e vedremo come ci aiuteranno a comprendere la struttura delle stelle e la loro evoluzione. Infine, ci addentreremo nel mondo affascinante della Cosmologia e vedremo come, tali equazioni, possano darci informazioni sulla storia del nostro Universo.

Capitolo 1

Termodinamica statistica

Per una data quantità di sostanza contenuta in un sistema termodinamico, la temperatura (T), il volume (V) e la pressione (p) non sono quantità indipendenti; esse sono legate da una relazione la cui forma generale è la seguente,

$$f(p, V, T) = 0 \tag{1.0.1}$$

ed essa è chiamata *equazione di stato* (EdS). La sua forma dipende dalle proprietà della sostanza che si considera. Ciascuna delle tre variabili che compaiono nella relazione sopra considerata può essere espressa in funzione delle altre due risolvendo l'equazione (1.0.1) rispetto alla variabile che ci interessa. Quindi lo stato del sistema è completamente determinato da due qualunque delle tre quantità p , V e T . Esse ricoprono un ruolo molto importante sia in fisica che in astrofisica. Partiremo da un'analisi generale avvalendoci di alcuni principi dettati dalla meccanica statistica per poi ricavarne le EdS di nostro particolare interesse.

1.1 Sistemi microcanonici

Iniziamo con il fissare le condizioni al contorno. Immaginiamo di avere un sistema in cui energia totale, volume e numero di particelle siano specificati e fissati e che, tale sistema, sia isolato.

Lo spazio delle fasi (SdF) avrà una dimensione fissata, precisamente $2n$ con $n = 3N$ se non ci sono vincoli, con N il numero di particelle. Come modello consideriamo, per esempio, un gas di N particelle in una scatola di volume V , con Hamiltoniana,

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \tag{1.1.1}$$

con U un potenziale due-corpi e $\vec{r}_i \in V$.

Se l'energia E è fissata, allora la situazione di equilibrio deve essere descritta da una distribuzione di probabilità che è costante sulla superficie di energia. Siamo, quindi, portati a definire, in tutto lo spazio delle fasi Γ , *l'ensemble microcanico*, che è specificato dalla seguente distribuzione di probabilità,

$$\rho(\xi) =: \frac{1}{\omega(E)} \delta(H(\xi) - E) \tag{1.1.2}$$

con

$$(\xi^i) \equiv (q^i, p_i)$$

Assumiamo, adesso, di non aver definito l'energia in un modo molto preciso, cioè diciamo che: $E \leq H(\xi) \leq E + \Delta E$ per qualche "piccolo" ΔE , cioè nel limite termodinamico $\Delta E/E \rightarrow 0$.

Possiamo assumere, dunque, che l'appropriata distribuzione per descrivere la configurazione di equilibrio del nostro sistema è data da,

$$\rho(\xi) = \begin{cases} [\Gamma(E)]^{-1}, & \text{per } E \leq H(\xi) \leq E + \Delta E \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.1.3)$$

dove,

$$\Gamma(E) =: \int_E^{E+\Delta E} dE' \omega(E') \simeq \omega(E) \Delta E \equiv \frac{\partial \Sigma}{\partial E} \Delta E \quad (1.1.4)$$

1.2 Entropia microcanonica S_{mc}

Nell'insieme microcanonico, l'**entropia** è data da,

$$S_{mc} = S(E, V, N) =: k_B \ln(\Gamma(E)) \quad (1.2.1)$$

dove k_B è una costante di dimensioni [energia/temperatura] che si può dimostrare essere proprio la *costante di Boltzmann*. È interessante vederne il limite termodinamico. Sotto tale condizione, può essere espressa in un modo alternativo

$$S =: k_B \ln \omega(E) \quad (1.2.2)$$

Inoltre, all'equilibrio, l'entropia è additiva, ossia

$$S_{mc}^{tot} = S_{mc}^{(1)} + S_{mc}^{(2)} \quad (1.2.3)$$

e, quindi, in queste condizioni abbiamo che

$$s_{mc} = s_{td}$$

Adesso che abbiamo identificato la (1.2.1) come l'entropia termodinamica, possiamo procedere con la differenziazione di tale espressione, per cui si ha,

$$dS(E, V, N) = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V, N} dE + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{E, N} dV + \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{E, V} dN \quad (1.2.4)$$

Si può dimostrare (non tratteremo in questo contesto tale dimostrazione, in quanto piuttosto avanzata) che

$$\frac{1}{T_i} = \left(\frac{\partial S_i}{\partial E_i} \right)_{V_i, N_i} \quad (1.2.5)$$

con $i = 1, 2$, e usando quest'espressione sopra, si ottengono,

$$\begin{aligned}\frac{p}{T} &= \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{E,N} \\ \frac{\mu}{T} &= - \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{V,E}\end{aligned}\tag{1.2.6}$$

che sono proprio le EdS della termodinamica classica. Adesso vogliamo analizzare due esempi: *gas perfetto* e *gas degenere*.

1.3 Gas perfetto

Consideriamo un gas non relativistico in uno spazio tridimensionale, possiamo riscrivere l'entropia nel seguente modo,

$$S = \frac{N}{N_0} S_0 + N k_B \ln \left[\frac{V}{V_0} \left(\frac{E}{E_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{N}{N_0} \right)^{-\frac{3}{2}} \right]\tag{1.3.1}$$

dove

$$S_0 = \frac{3}{2} N_0 k_B \left[1 + \ln \left(\frac{4\pi m}{3h^2} \right) \right] + N_0 k_B \ln \left[V_0 \left(\frac{E_0}{N_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right]\tag{1.3.2}$$

è l'entropia di un qualsiasi sistema di riferimento scelto. Da qui si possono derivare le equazioni di stato associate, in particolare troviamo l'espressione per l'energia,

$$\frac{1}{T} = \frac{3 N k_B}{2 E} \Rightarrow E = \frac{3}{2} N k_B T\tag{1.3.3}$$

e per la pressione,

$$\frac{p}{T} = \frac{N k_B}{V} \Rightarrow p = \frac{N k_B T}{V}\tag{1.3.4}$$

L'ultima espressione si può derivare, in modo del tutto naturale, partendo dall'espressione generale della pressione per un gas, cioè

$$P = \frac{1}{3} m \int_0^\infty N(v) v^2 dv\tag{1.3.5}$$

che ci dice che la pressione è funzione della distribuzione di velocità delle particelle del gas. Nel caso del gas perfetto, la distribuzione di velocità è quella di **Maxwell-Boltzmann** che, in generale, vale

$$\frac{N(v) dv}{N} = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^3} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \frac{4\pi v^2 dv}{\alpha^3}\tag{1.3.6}$$

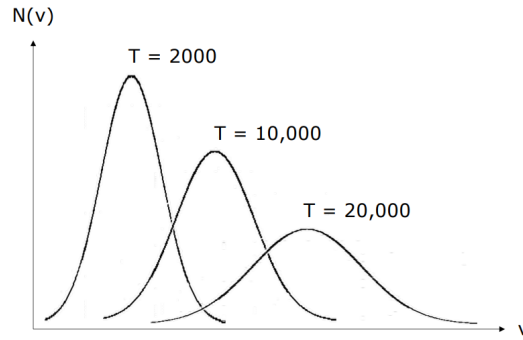


Figura 1: Distribuzione Maxwell-Boltzmann

dove $\alpha = \sqrt{2k_B T/m}$ ed è il valore più probabile di velocità che le particelle possano assumere e, si osservi, dipende dalla temperatura. La forma di tale distribuzione è quella in **Figura 1**. Si osservi che se la temperatura cresce, il valore di α (il picco) si sposta a valori via via più alti e la distribuzione diventa sempre più larga.

Inserendo la (1.3.6) nella (1.3.5) e risolvendo l'integrale si ottiene precisamente la (1.3.4) mostrando, quindi, che le particelle di un gas perfetto seguono la distribuzione (1.3.6).

1.4 Gas degenere

Esistono dei casi in cui, però, la distribuzione precedentemente discussa non può essere trattata a causa di due fattori: *principio di indeterminazione di Heisenberg* e *principio di esclusione di Pauli*. Il principio di indeterminazione è il seguente,

$$\Delta \vec{r} \Delta \vec{p} \sim \frac{h}{2\pi} \quad (1.4.1)$$

con $\vec{r} = (x, y, z)$ e ci dice che non si possono conoscere con esattezza e simultaneamente l'impulso e la posizione di una particella.

Adesso, immaginando nello spazio delle fasi una celletta di volume $\Delta \vec{r} \Delta \vec{p} \sim h^3$, il principio di esclusione enuncia che in questo volume possono essere presenti al più due elettroni ma con spin opposto. Tali effetti quantistici diventano rilevanti quando la lunghezza d'onda associata alle particelle ($\lambda = h/(2mk_B T)^{1/2}$) non è più trascurabile rispetto alla distanza tra le particelle stesse. In tale contesto, il gas si dice *degenere*.

Ovviamente, parliamo ancora di gas e parliamo ancora di distribuzione di velocità delle particelle, ma è abbastanza intuitivo pensare che la forma della distribuzione non è più quella trattata per i gas perfetti. Infatti, nel caso qui in esame, si usa la distribuzione di **Fermi-Dirac**, cioè

$$N_p dp = \frac{8\pi}{h^3} p^2 dp \quad (1.4.2)$$

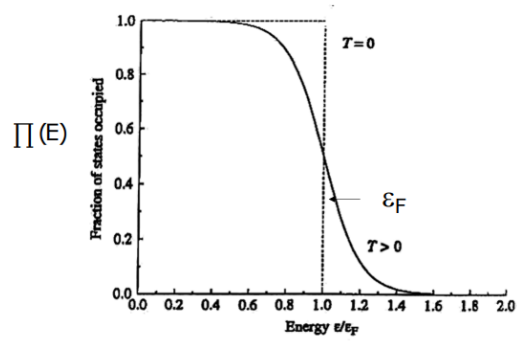


Figura 2: Distribuzione di Fermi-Dirac, con ϵ_F essere l'energia di Fermi

dove la (1.3.5) è, per forza di cose, espressa in termini di impulsi e non di velocità. La forma della (1.4.2) è mostrata in **Figura 2**.

Capitolo 2

Stelle

Le EdS giocano un ruolo cruciale nelle stelle, in particolare la terza delle sette equazioni che descrivono gli interni stellari è proprio un'equazione di Stato che ci permette di ottenere molte informazioni, non solo sulla struttura ma anche sulla fase evolutiva in cui si trova la stella attraverso il diagramma $\text{Log}T - \text{Log}\rho$.

2.1 EdS negli interni stellari

Nelle stelle, tale equazione, caratterizza direttamente la pressione, composta dalla pressione del gas più la pressione di radiazione effettuata dai fotoni. In generale, dunque, si ha

$$P = P_{gas} + \frac{aT^4}{3} \quad (2.1.1)$$

dove a è una costante. Analizziamo, adesso, la pressione del gas.

Assumiamo di avere un gas perfetto, l'equazione di stato è la (1.3.4). Vogliamo esprimerla in termini più consoni per gli interni stellari, considerando una quantità chiamata *peso molecolare medio* μ , diventando la seguente,

$$P_{gas} = \rho \frac{k_B T}{\mu H} \quad (2.1.2)$$

dove H è la massa del protone, e

$$\mu = \frac{\bar{m}}{m_H} = \frac{1}{\sum_j \frac{(1+Z_j)}{A_j} X_j} = \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z}$$

in cui X è l'abbondanza in percentuale in massa dell'idrogeno, Y quella dell'elio e Z dei metalli più pesanti dell'elio.

Adesso, cerchiamo una EdS per il caso degenere. Nel capitolo precedente, abbiamo visto che un gas si dice *degenere* quando non si possono più trascurare gli effetti quantistici, in particolare quando non si rispetta più la condizione di non degenerazione. Tale condizione, viene fuori assumendo che la distanza media delle particelle (r) sia maggiore della lunghezza d'onda associata ad esse, ottenendo così,

$$T > 2.4 \cdot 10^{-22} \frac{\rho^{2/3}}{m} \quad (2.1.3)$$

quindi, quando viene soddisfatta tale relazione siamo nel regime dei gas perfetti, altrimenti no. Inoltre, si osservi la sua dipendenza dalla massa delle particelle, in particolare masse maggiori fanno più fatica ad entrare nel regime degenere a differenza delle masse minori. Per trovare l'EdS in questa situazione, riscriviamo la (1.3.5) in funzione dei momenti, quindi

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty N(p) p v dp \quad (2.1.4)$$

adesso bisogna inserire la (1.4.2) dentro l'integrale, dovendo distinguere due casi: *caso non relativistico* e *caso relativistico*.

2.1.1 Caso non relativistico

In tale contesto, abbiamo $p_0 \ll m_e c$, quindi possiamo assumere tranquillamente $p = mv$, per cui la (2.1.4) diventa,

$$P = \frac{8\pi}{3h^3 m} \int_0^{p_0} p^4 dp = \frac{8\pi}{3h^3 m} \frac{p_0^5}{5}$$

con p_0 il *momento di Fermi* cioè il massimo impulso possibile assumibile dalle particelle (per questo l'integrale non va ad infinito) e vale,

$$p_0 = \left[\frac{3h^3 \rho}{8\pi \mu_e H} \right]^{1/3}$$

e sostituendo sopra si ottiene,

$$P = k_1 \rho^{5/3} \quad (2.1.5)$$

dove $k_1 = 10^{13} \mu_e^{-5/3}$ e si osserva che non c'è alcuna dipendenza dalla temperatura.

2.1.2 Caso relativistico

Questa volta abbiamo $p_0 \sim m_e c$, allora si ha che,

$$p = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \rightarrow v = \frac{p}{m} \left(1 + \frac{p^2}{m^2 c^2} \right)^{-1/2}$$

dove si ottiene il seguente integrale,

$$P = \frac{8\pi}{3mh^3} \int_0^{p_0} \frac{p^4 dp}{\left(1 + \frac{p^2}{m^2 c^2} \right)^{1/2}}$$

che porta alla EdS nel caso relativistico, ossia

$$P = k_2 \rho^{4/3} \quad (2.1.6)$$

con $k_2 = 1.2 \cdot 10^{15} \mu_e^{-4/3}$, e anche in questo caso nessuna dipendenza, come ci si aspettava, dalla temperatura.

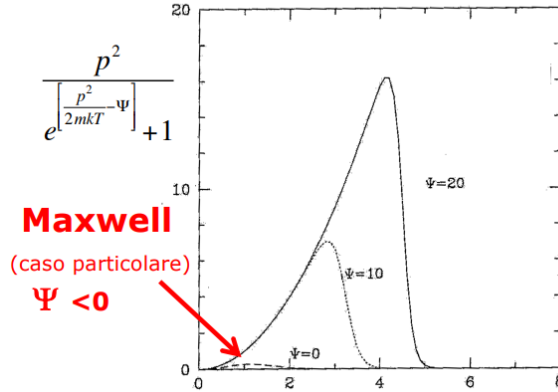


Figura 3: Distribuzione generalizzata in funzione del parametro Ψ

2.2 Parametro di degenerazione

Come già detto nel capitolo precedente, a seconda del tipo di gas con cui abbiamo a che fare le particelle seguono una distribuzione di velocità diversa. Adesso ci chiediamo se è possibile generalizzare la forma della distribuzione.

Per procedere bisogna introdurre il *parametro di degenerazione* Ψ che è un numero reale che dipende dalla densità e dalla temperatura del gas, infatti

$$\Psi \propto \frac{1}{k_B T} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}$$

- Se Ψ numero piccolo negativo \rightarrow bassa degenerazione (Maxwell)
- Se Ψ numero grande positivo \rightarrow alta degenerazione (Fermi-Dirac)

Dunque, la distribuzione generalizzata sarà la seguente,

$$N_p dp = \frac{8\pi}{h^3} \frac{p^2}{e^{\left(\frac{p^2}{2mk_B T} - \Psi\right)} + 1} dp \quad (2.2.1)$$

dunque per $\Psi \ll 0$ si ha assenza di degenerazione, mentre per $\Psi \gg 0$ si ha degenerazione totale. Dalla forma della distribuzione mostrata in **figura 3** si osservi come la distribuzione di Maxwell lavori in un regime in cui il numero di particelle è talmente piccolo rispetto ai possibili stati energetici che non risente del principio di esclusione di Pauli.

2.3 Diagramma $\text{Log}T - \text{Log}\rho$

Questo piano è molto importante per descrivere lo stato della materia negli interni stellari e, più precisamente, permette di sapere quale componente di pressione prevale in un determinato strato della stella. I vari regimi sono delimitati da delle rette che mi identificano in quale regione domina un tipo di pressione invece di un'altra. Procediamo prima dalla retta che separa la pressione di radiazione con quella del gas; basterà uguagliare $P_{gas} = P_{rad}$, cioè fare,

$$\frac{k_B \rho T}{\mu H} = \frac{aT^4}{3}$$

dove si otterrà, dopo aver fatto il passaggio in logaritmi,

$$\text{Log}T = \frac{1}{3}\text{Log}\rho + 7.57 \quad (2.3.1)$$

Applichiamo lo stesso ragionamento quando un gas passa da perfetto a degenere, quindi

$$\frac{k_B \rho T}{\mu_e H} = k_1 \rho^{5/3}$$

che ci porta a

$$\text{Log}T = \frac{2}{3}\text{Log}\rho + 4.88 \quad (2.3.2)$$

E, infine, si ottiene una retta che separa il caso relativistico da quello non relativistico che, per forza di cose, sarà una retta costante in cui non c'è dipendenza dalla temperatura, quindi

$$k_1 \rho^{5/3} = k_2 \rho^{4/3}$$

che ci porta a

$$\text{Log}\rho = 3\text{Log}\frac{k_2}{k_1} = 6.6 \quad (2.3.3)$$

mettendo insieme tutte le rette nel diagramma $\text{Log}T - \text{Log}\rho$, si forma il piano in **Figura 4**. Come già accennato, tale diagramma riserva una certa importanza in quanto, in base al regime di pressione dominante, ci permette anche di farci un'idea nel capire in quale fase evolutiva si trova la stella in esame, il tutto è riassunto nella **figura 5**.

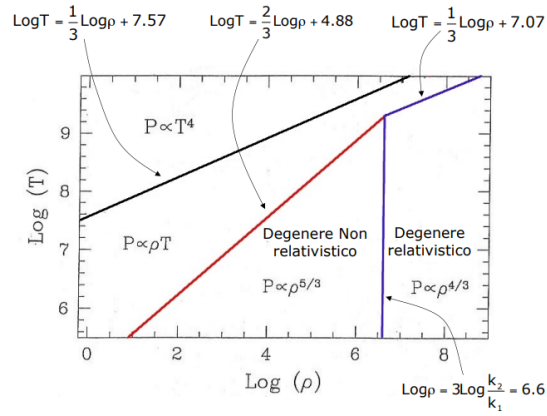


Figura 4: Diagramma $\text{Log}T - \text{Log}\rho$ completo

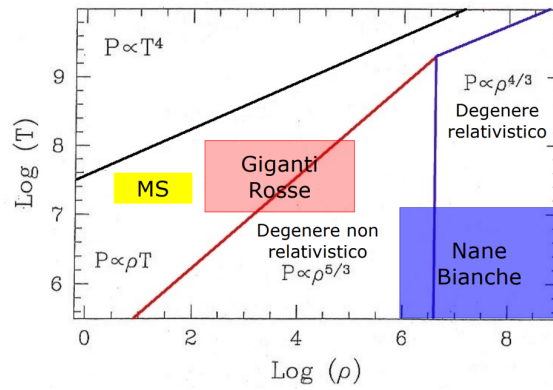


Figura 5: Evoluzione stellare e diagramma $\text{Log}T - \text{Log}\rho$

Capitolo 3

Cosmologia

In cosmologia, immaginiamo il nostro universo riempito da un fluido (che sarebbero stelle, galassie, etc.), e l'imposizione di una EdS per tale fluido ci porta a delle considerazioni interessanti. Tuttavia, bisogna introdurre una serie di concetti legati alla cosmologia per comprendere al meglio le conclusioni che si trarranno.

3.1 Metrica di Friedmann-Robertson-Walker

In relatività generale il concetto di *metrica* gioca un ruolo importante, in tale contesto definiamo la *metrica cosmologica*,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \equiv -dt^2 + a^2(t)dr^2 \quad (3.1.1)$$

detta anche metrica **Friedmann-Robertson-Walker** (FRW), dove a viene chiamato *fattore di scala/cosmologico* e k *costante di curvatura*, e può valere $k = 0, \pm 1$. In base al valore assunto abbiamo tre differenti modelli di universo. Infatti, per $k = 0$ **universo piatto**, per $k = +1$ **universo chiuso** e per $k = -1$ **universo aperto**. Le osservazioni suggeriscono che il nostro universo è molto vicino a $k = 0$ e che la distanza tra le galassie aumenta nel tempo, mentre la loro dimensione tipica rimane uguale. Possiamo, dunque, dire che l'universo è in espansione con le galassie lontane che si allontanano più rapidamente da noi.

3.2 Fluidi cosmici

Per prima cosa, scriviamo le equazioni di campo di Einstein che sono le seguenti,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu} \quad (3.2.1)$$

In cosmologia, come già accennato precedentemente, le galassie le possiamo interpretare come un fluido massivo che ha una quadrivelocità U^μ . Nell'equazione (3.2.1) il termine $T_{\mu\nu}$ viene chiamato *tensore energia-impulso* che per un fluido vale,

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho, p, p, p) \quad (3.2.2)$$

dove $\rho = \rho(t)$ e $p = p(t)$ sono rispettivamente densità e pressione propria del fluido. Inoltre, la (3.2.1) soddisfa la seguente relazione,

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$$

e, di conseguenza, per coerenza matematica deve valere la seguente condizione,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

Tale equazione è importante, perchè la sua componente 0 implica la conservazione dell'energia, infatti

$$-\nabla_\mu T_0^\mu = \dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (3.2.3)$$

dove $H = \dot{a}/a$ è la *funzione di Hubble* e $\dot{a} = da/dt$ la (3.2.3) si può, infatti, riscrivere

$$\frac{d}{dt}(a^3\rho) = -p\frac{d}{dt}(a^3) \quad (3.2.4)$$

dove il LHS è l'energia totale contenuta in un cubetto del fluido e il RHS il lavoro fatto dalla pressione sul volumetto.

3.3 Equazioni di Friedmann

Prima di vedere il ruolo dell'EdS in Cosmologia, inoltre, è doveroso fare un brevissimo cenno alle *equazioni di Friedmann*. Si ottengono risolvendo le (3.2.1) assumendo la metrica FRW, ottenendo le seguenti

$$G_{00} = 8\pi G_N T_{00} \rightarrow 3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] = 8\pi G_N \rho \quad (3.3.1)$$

$$G_{ii} = 8\pi G_N T_{ii} \rightarrow 3 \frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G_N (\rho + 3p)$$

La prima seleziona le possibili condizioni iniziali $a(t_0) = a_0$ e $\dot{a}(t_0) = \dot{a}_0$ per la seconda che è la vera e propria equazione dinamica per il fattore di scala $a = a(t)$. Adesso, definiamo il parametro di decelerazione $q = -a\ddot{a}/\dot{a}^2$ e il parametro di densità $\Omega = \frac{8\pi G_N \rho}{3H^2} = \frac{\rho}{\rho_{cr}}$, possiamo riscrivere le equazioni di Friedmann nel seguente modo,

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2} \quad (3.3.2)$$

da cui concludiamo

- $\rho < \rho_c \leftrightarrow \Omega < 1 \leftrightarrow k = -1$
- $\rho = \rho_c \leftrightarrow \Omega = 1 \leftrightarrow k = 0$
- $\rho > \rho_c \leftrightarrow \Omega > 1 \leftrightarrow k = +1$

che identificano i modelli descritti in precedenza.

3.4 EdS in cosmologia

Adesso, possiamo impostare un'equazione di stato per il fluido cosmico e vedere a quali conclusioni arriviamo. Immaginiamo, una EdS di questo tipo

$$p = \omega\rho \quad (3.4.1)$$

con ω essere una costante. La conservazione dell'energia (3.2.3) si legge, quindi,

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a} \rightarrow \rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad (3.4.2)$$

I fluidi cosmici possono essere riempiti da **polvere** e **radiazione**. Il primo caso è quello più semplice, in quanto non è presente alcuna forza eccetto quella di gravità e, di conseguenza, $\omega = 0$ (dato che, per l'appunto, $p = 0$), quindi la (3.4.2) sarà,

$$\rho_{dust} \propto a^{-3} \quad (3.4.3)$$

Per quanto riguarda la radiazione, immaginiamo un gas di fotoni all'interno di un cubetto di fluido dove i fotoni sbattono sulle pareti, inoltre sono distribuiti in modo tale da essere omogenei ed isotropi. Poichè la massa totale è trascurabile, la traccia del tensore energia-momento sarà

$$T = -\rho + 3p = 0$$

da cui si ottiene,

$$p = \frac{1}{3}\rho \rightarrow \omega = \frac{1}{3}$$

e quindi avremo

$$\rho_{radiation} \propto a^{-4} \quad (3.4.4)$$

Questi sono i casi più comuni, tuttavia esiste un'altra possibile sorgente che è data dalla cosiddetta **Energia oscura o di vuoto** e l'EdS del fluido sarà la seguente,

$$\rho = -p = \frac{\Lambda}{8\pi G_N} \rightarrow \omega = -1 \rightarrow \rho_\Lambda \propto 1 \quad (3.4.5)$$

dove Λ è la *costante cosmologica*.

Come detto in precedenza, le osservazioni suggeriscono che il nostro universo è vicino a $k = 0$, applicando in tale modello le EdS appena studiate per la ρ usandole nelle equazioni di Friedmann troviamo l'andamento del fattore di scala in funzione del tempo e questo ci permette di avere un'idea sull'evoluzione dell'universo.

Infatti, per un universo piatto dominato da polvere si ha,

$$\begin{cases} \rho_{dust} \sim a^{-3} \rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sim a^{-3} \\ a\dot{a}^2 \sim 1 \rightarrow a\dot{a} \sim dt \end{cases} \longrightarrow a \sim t^{2/3} \quad (\omega = 0) \quad (3.4.6)$$

Per un universo piatto dominato da radiazione, invece,

$$\begin{cases} \rho_{rad} \sim a^{-4} \rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sim a^{-4} \\ a^2 \dot{a}^2 \sim 1 \rightarrow ada \sim dt \end{cases} \longrightarrow a \sim t^{1/2} \quad (\omega = 1/3) \quad (3.4.7)$$

Infine, includendo il termine di energia oscura, avremo

$$\begin{cases} \rho_{\Lambda} \sim 1 \rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sim \frac{\Lambda}{3} \\ \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \sim \frac{\dot{a}}{a} = H_0 \end{cases} \longrightarrow a \sim e^{H_0 t} \quad (3.4.8)$$

Quest'ultimo modello viene anche chiamato Universo di **de Sitter**. Osserviamo, dunque, che le soluzioni alle equazioni di Friedmann per polvere e radiazione mostrano un comportamento comune: l'universo sarebbe iniziato da una singolarità ($a = 0$) e avrebbe continuato ad espandersi (almeno fino a raggiungere un fattore di scala massimo). Questa previsione era in accordo con la legge di Hubble, che divenne la base del modello del Big Bang caldo.

APPENDICE

La visione attuale dell'Universo divide la sua storia in due parti: una fase iniziale dietro il velo della superficie di ultimo scattering, che è più comunemente modellata all'interno del paradigma dell'inflazione e una fase successiva durante la quale le strutture visibili su larga scala sono emerse ed è descritta dal modello fenomenologico Λ CDM.

Radiazione cosmica di fondo a microonde

Molte osservazioni hanno confermato che l'Universo è riempito con una radiazione reliquia quasi omogenea chiamata *radiazione cosmica di fondo a microonde* (CMB). Si crede che questa radiazione sia stata generata nei tempi molto antichi, quando materia e radiazione si sono disaccoppiate sulla superficie dell'ultimo scattering. Osservando la (3.4.3) e la (3.4.4) vediamo che l'Universo doveva essere molto più denso e caldo durante le sue prime fasi. A quelle alte energie, il cammino libero medio dei fotoni era molto corto poichè avevano abbastanza energia per produrre coppie di particelle (di carica opposta) e i fotoni erano in equilibrio termico con elettroni e positroni. Quando l'energia dei fotoni diminuì al di sotto della soglia per la produzione di coppie, i fotoni divennero essenzialmente liberi e questi sono i segnali di luce più antichi che possiamo rilevare ora ad una temperatura di circa $3K$. Un risultato sorprendente è l'omogeneità della CMB, infatti supponiamo di guardare in due direzioni opposte nel cielo; la luce che riceviamo ora da quelle direzioni avrà avuto origine da luoghi molto distanti, e ci si chiede come tali punti possano essere stati alla stessa temperatura. Dalla metrica FRW, troviamo che i coni luce sono definiti dall'equazione,

$$ds^2 = 0 \rightarrow dt = a dr \rightarrow dr = \frac{dt}{a}$$

Supponiamo di piazzare noi stessi a $r = 0$ e integrare l'espressione sopra da $t = -t_s$ ai giorni nostri $t = 0$, si ottiene

$$r_s = \int_{-t_s}^0 \frac{dt}{a(t)}$$

Se l'Universo è dominato da materia o radiazione, si otterrà

$$r_s \sim t_s^{1-\alpha}$$

con $0 < \alpha < 1$, per cui la distanza propria percorsa da fotoni è

$$R \sim a(-t_s)r_s = t_s$$

Inoltre, dato che la funzione di Hubble $H = \dot{a}/a \sim t^{-1}$ si ottiene che *l'orizzonte delle particelle*

$$R_H \sim \frac{1}{H(-t_s)} \sim t_s$$

crebbe col tempo. Facendo ragionamenti analoghi in un Universo dominato da energia oscura, alla fine si ottiene che,

$$R \sim e^{H_0 t_s} r_s \sim \frac{1}{H_0}$$

Questi ultimi risultati dimostrano l'omogeneità della CMB mostrando che l'Universo iniziò molto piccolo, abbastanza da permettere a tutte le sue parti di entrare in contatto causale. Successivamente, subì una fase iniziale di rapida espansione (quasi esponenziale), chiamata inflazione, durante la quale lo stato iniziale della materia fu quasi congelato e la CMB ebbe origine dopo la fine dell'inflazione.

Modello Λ CDM

Come abbiamo già detto, alcune osservazioni ci hanno portato ad immaginare lo stato attuale dell'Universo come spazialmente piatto, con $\Omega \approx 1$, corrispondente ad una densità media

$$\rho_0 = \rho_c \simeq 10^{-29} \text{g/cm}^3$$

In particolare, sono state identificate tre diverse fonti che contribuiscono a ρ_0 :

- **Materia regolare,**

$$\frac{\rho_{matter}}{\rho_0} \simeq 5\%$$

- **Materia oscura,**

$$\frac{\rho_{DM}}{\rho_0} \simeq 25\%$$

- **Energia oscura,**

$$\frac{\rho_{DE}}{\rho_0} \simeq 70\%$$

Questi sono gli ingredienti di tale modello che mostra come materia ed energia oscura sono i più grandi puzzle ancora da risolvere nella cosmologia attuale.

Bibliografia

- [1] *Fermi, Termodinamica (Boringhieri)*
- [2] *G. Morandi, F. Napoli, E. Ercolessi, Statistical Mechanics*
- [3] *Dispense "Statistical mechanics", E. Ercolessi (2024)*
- [4] *Dispense del corso "Astrofisica Stellare", G. Ferraro (2024)*
- [5] *Appunti del corso "Astrofisica Stellare" (2024)*
- [6] *Dispense del corso "Elementi di teoria della relatività generale", R. Casadio (2024)*
- [7] *Appunti del corso "Elementi di teoria della relatività generale" (2024)*