ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

La Funzione Gamma di Eulero:

proprietà e relazioni con altre funzioni speciali

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Vittorio Martino

Presentata da:
Leonardo Tura

Anno Accademico 2023/2024

A Batillo, che ride ancora

Introduzione

Il contenuto principale di questa tesi è la funzione Gamma di Eulero. Essa è intitolata al matematico svizzero Leonhard Euler (1707 - 1783), che ne propose la prima formulazione a Christian Goldbach(1690 - 1764) in una lettera datata 13 ottobre 1729. Questa conteneva la risposta di Eulero ad un problema che aleggiava negli ambienti matematici centroeuropei già dal diciassettesimo secolo. In quel periodo, infatti, si cercava di interpolare formule definite per i soli numeri interi a funzioni lisce (definite sui numeri reali), che in qualche modo generalizzassero con continuità le identità discrete. La funzione presa in considerazione era $n!$ e, nella già citata lettera, Eulero la estese come prodotto infinito:

$$n! = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{1+\frac{n}{k}} \right) = \lim_{m \to +\infty} \left(\frac{m!(m+1)^n}{\prod_{k=1}^{m}(n+k)} \right).$$

Tuttavia, questa soluzione non era di facile manipolazione, quindi Eulero proseguì gli studi fino ad ottenere una formulazione integrale, che presentò nuovamente a Goldbach in un'altra lettera datata 8 gennaio 1730 in cui propose:

$$n! = \int_0^1 (-\ln(x))^n \, \mathrm{d}x.$$

Con un semplice cambio di variabili nell'integrale si ottiene la funzione Gamma come viene definita al giorno d'oggi:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t.$$

Questa "nuova" notazione è dovuta a Adrien Marie Legendre (1752 - 1833) che definì questa funzione integrale di Eulero del secondo tipo, mentre l'integrale di Eulero del primo tipo è ora chiamato funzione Beta di Eulero che vedremo successivamente nella trattazione. Il nome dato da Legendre deriva dal fatto che l'approccio integrale di Eulero al problema è partito proprio dalla funzione Beta, che è fondamentalmente connessa alla funzione Gamma con la relazione:

$$B(x,\, y) = \int_0^1 t^{x-1} \,(1-t)^{y-1} \, \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Sempre dovuta a Legendre è la formula di duplicazione per la funzione Gamma che ci permetterà di semplificare delle espressioni contenenti questa funzione. Innanzitutto, la trattazione mostrerà che la funzione Gamma può avere argomento complesso e che addirittura è olomorfa, proprietà che garantisce, ad esempio, che sia una funzione liscia. Inoltre, mostreremo che il suo dominio può essere prolungato a tutto il piano complesso a patto di avere dei poli sugli interi negativi.

Una cosa importante da tenere a mente è che, siccome l'insieme dei numeri naturali non ha punti di accumulazione in $\mathbb{C}$, ci sono infiniti modi di interpolare la funzione $n!$. Uno dei modi più comuni è proprio la funzione Gamma per le sue molteplici proprietà, ma in questa trattazione non ci soffermeremo sui motivi di questa scelta né inizieremo il percorso con un problema di interpolazione, invece partiremo proprio dalla definizione di Legendre della funzione Gamma e otterremo il suo estendere la funzione fattoriale come una "fortunata" proprietà.

Un'altra formula su cui ci soffermeremo è la Formula di Riflessione di Eulero:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad \text{dove } \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Qui la variabile di Gamma è $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Questa formula ha come conseguenza il valore di $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, che $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ ha un comportamento periodico, fatto di certo non scontato dalla definizione, e inoltre che la sua reciproca è una funzione intera (olomorfa su tutto $\mathbb{C}$). Per chiudere la sezione sulla funzione Gamma introdurremo la Formula Integrale di Eulero Generalizzata, il cui nome non è ufficiale, ma sta ad indicare una formula che permette di ricavare i valori di molti integrali definiti, che si ottengono per cambio di variabili dall'integrale che definisce la funzione Gamma:

$$\frac{\Gamma(z)}{n\,|p|^z}\cos(\alpha z) = \int_0^{+\infty} u^{nz-1} e^{-au^n} \cos\left(bu^n\right)\, du.$$
$$\frac{\Gamma(z)}{n\,|p|^z}\sin(\alpha z) = \int_0^{+\infty} u^{nz-1} e^{-au^n} \sin\left(bu^n\right)\, du.$$

Nella sezione dedicata spiegheremo il significato delle costanti n; a; b; α; p. Nel quarto capitolo tratteremo un'altra funzione speciale, che mostreremo avere anch'essa profonde relazioni con la funzione Gamma. Si tratta della funzione Zeta di Riemann introdotta dal matematico tedesco Bernhard Riemann (1826 - 1866) nella sua pubblicazione " Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse" (Sulla quantità di numeri primi al di sotto di una certa grandezza) del 1859. La funzione Zeta è definita nel modo seguente:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^z}\right).$$

Dove nuovamente z è un numero complesso; infatti la grande idea di Riemann è stato studiare questa funzione dal punto di vista dell'analisi complessa. Curiosamente questa funzione è al centro di un altro problema, detto Problema di Basilea, proposto da Pietro Mengoli(1626 - 1686) nel 1644 e risolto ancora da Eulero tra il 1734 e il 1735. L'enunciato del problema è semplice, infatti si richiede il risultato esatto della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si nota subito che questa somma corrisponde a $\zeta(2)$ ed Eulero ottenne il sorprendente risultato esatto $\frac{\pi^2}{6}$.

Nella *paper* sopracitata di Riemann è presente anche un altro problema, quest'ultimo tutt'ora aperto, detto Congettura di Riemann, che recita:

Gli zeri non banali della funzione Zeta di Riemann si trovano tutti sulla retta $x = \dfrac{1}{2}$.

Espressa in questa maniera non sembra molto significativa ma ha un profondo legame con la distribuzione dei numeri primi e in particolare la funzione che conta la quantità di primi minori di x. Tuttavia, non andremo ad esaminare la Congettura di Riemann in questa trattazione, ma mostreremo un legame più semplice tra la funzione Zeta e i numeri primi:

$$\zeta(z) = \prod_p \left(\frac{1}{1-p^{-z}}\right).$$

Dove il prodotto sulla destra è su tutti i numeri primi. Ricollegandosi al nostro argomento principale mostreremo due relazioni tra la funzione Zeta e la funzione Gamma (che sono tuttavia collegate come viene mostrato in [5]), ovvero:

$$\zeta(z) = \pi^{z-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)} \zeta(1-z)$$

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\, \mathrm{d}x.$$

Il secondo risultato vale solo per i numeri complessi con parte reale maggiore di uno. Questo verrà generalizzato a un risultato valido su tutto $\mathbb{C}$ che ci permetterà, in conclusione, di ottenere il valore della funzione Zeta su tutti i numeri interi, quindi in particolare di risolvere il Problema di Basilea. Nell'ultimo capitolo di applicazioni, oltre all'appena citata soluzione al problema di Basilea, troveremo il valore di alcuni integrali definiti con primitiva non esprimibile in termini di funzione elementari. Infine, studieremo il volume delle palle n-dimensionali, collegato anche alla definizione di misura di Hausdorff, e il modulo di Gamma per valori puramente complessi, dove il calcolo di valori esatti risulta impossibile.

Indice

Capitolo 1

Preliminari e notazioni

1.1 Risultati di Analisi Complessa

Per mostrare che la funzione in esame è olomorfa e per definirla su tutto il piano complesso avremo bisogno di alcuni risultati preliminari di Analisi Complessa (tutte le dimostrazioni non portate in questa sezioni sono comunque presenti in [1]):

Definizione 1.1 (Funzione olomorfa). *Sia $f : U \to \mathbb{C}$ con $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Allora f è olomorfa in $z_0 \in U$ se esiste ed è finito:*

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right).$$

Se per ogni $z \in U$ f è olomorfa in z allora si dice che f è olomorfa in U.

Teorema 1.2 (Teorema di Goursat). *Sia $f : U \to \mathbb{C}$ con $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto semplicemente connesso e f olomorfa su U. Allora per ogni $T \subseteq U$ con T triangolo vale:*

$$\int_{\partial T} f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{1.1}$$

Si può estendere questo teorema per avere una condizione necessaria e sufficiente sull'olomorfia di f, con ipotesi di continuità, a patto che la condizione (1.1) valga per un triangolo qualsiasi:

Teorema 1.3 (Teorema di Morera). *Sia f una funzione continua su un disco aperto D tale che per ogni $T \subseteq D$ con T triangolo valga (1.1). Allora f è olomorfa su D.*

Dimostrazione. Questo risultato segue semplicemente dalla dimostrazione che una funzione olomorfa su un disco è primitivabile, nella dimostrazione si usa solamente la condizione (1.1). Siccome f è primitivabile esiste F tale che $F'(z) = f(z)$ quindi F è olomorfa e in particolare è due volte derivabile allora f è derivabile e da ciò segue che anche f è olomorfa. □

Da questo segue il teorema che useremo per mostrare effettivamente che la funzione Gamma è olomorfa, prima dobbiamo enunciare il seguente Lemma:

Lemma 1.4. *Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni olomorfe che converge uniformemente a f su ogni compatto di U. Allora f è olomorfa in U.*

Dimostrazione. Sia D un disco tale che $\overline{D} \subseteq U$ allora $\displaystyle\int_{\partial T} f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0.$ per ogni $T \subseteq D$ da (1.2). Siccome f_n converge uniformemente a f allora:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{\partial T} f_n(z)\,\mathrm{d}z\right) = \int_{\partial T} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Posso scambiare il limite con l'integrale siccome la convergenza è uniforme. Allora f è olomorfa in U per (1.3). $\square$

Teorema 1.5. *Sia $F : U \times [0;1] \to \mathbb{C}$ con $U \subseteq \mathbb{C}$. Se F soddisfa le seguenti proprietà:*

1. *$F(z,s)$ è olomorfa in z per ogni s.*
2. *F è continua su $U \times [0;1]$.*

Allora $f(z) = \displaystyle\int_0^1 F(z,s)\,\mathrm{d}s$ è olomorfa su U.

Dimostrazione. Basta dimostrare che f è olomorfa su ogni disco $D \subseteq U$. Consideriamo la somma di Riemann di F su una partizione di $[0;1]$ con n intervalli di lunghezza $\dfrac{1}{n}$:

$$f_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(F\left(z,\frac{k}{n}\right)\right)$$

Consideriamo la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ allora dall'ipotesi (1) segue che f_n è olomorfa su U per ogni $n \in \mathbb{N}$. Mostriamo che su ogni disco con $\overline{D} \subseteq U$ f_n converge uniformemente a f, infatti, F è uniformemente continua (rispetto alla coordinata s) su $D \times [0;1]$ per il Teorema di Heine-Cantor. Allora dalla definizione di funzione uniformemente continua, fissata $\epsilon > 0$:

$$\exists\,\delta = \delta(\epsilon) > 0 \quad \text{tale che:} \quad \sup_{z\in D}(F(z,s_1) - F(z,s_2)) < \epsilon; \quad |s_1 - s_2| < \delta$$

Prendiamo $n > \frac{1}{\delta}$ e $z \in D$, allora:

$$\begin{aligned}
|f_n(z) - f(z)| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(F\left(z,\frac{k}{n}\right)\right) - \int_0^1 F(z,s)\,\mathrm{d}s\right| = \\
&= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(F\left(z,\frac{k}{n}\right)\right) - \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} F(z,s)\,\mathrm{d}s\right)\right| = \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} F\left(z,\frac{k}{n}\right) - F(z,s)\,\mathrm{d}s\right)\right| \overset{(\heartsuit)}{\leq} \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \epsilon\,\mathrm{d}s\right) = \epsilon.
\end{aligned}$$

In ($\heartsuit$) abbiamo usato la disuguaglianza triangolare integrale e:

$$\left|\frac{k}{n} - s\right| \leq \left|\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \delta.$$

$\square$

Osservazione 1.6. Il teorema vale per un intervallo $[a; b]$ generico con leggere modifiche alla dimostrazione.

Definizione 1.7 (Prolungamento Analitico). *Siano F, f due funzioni olomorfe (quindi analitiche) rispettivamente su U e U' sottoinsiemi aperti di $\mathbb{C}$ con $U' \subset U$. Allora se $F\big|_{U'} \equiv f$, F si dice prolungamento analitico di f.*

Un prolungamento analitico è unicamente determinato per questo teorema:

Teorema 1.8. *Siano f e g funzioni olomorfe su U e $f \equiv g$ su un sottoinsieme aperto di U. Allora $f \equiv g$ su tutto U.*

Definizione 1.9. *Definiamo $\mathfrak{F}_a$ con $a > 0$ come la classe delle funzioni f che rispettano le seguenti proprietà:*

1. *f è olomorfa su $S_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z)| < a\}$.*
2. *$\exists A > 0$ tale che:*
$$|f(x+iy)| \leq \frac{A}{1+x^2} \quad \forall\, x+iy \in S_a.$$

Denoteremo inoltre la classe delle funzioni che appartengono a $\mathfrak{F}_a$ per un qualche a, $\mathfrak{F}$.

Osservazione 1.10. La funzione $f(z) = e^{-\pi z^2} \in \mathfrak{F}_a$ per ogni $a > 0$. Allora banalmente $f \in \mathfrak{F}$.

Definizione 1.11 (Trasformata di Fourier). *Sia $f \in \mathfrak{F}$, allora definiamo la trasformata di Fourier di f come:*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x}\, \mathrm{d}x.$$

Osservazione 1.12. Se $f \in \mathfrak{F}$ allora la trasformata di Fourier è ben definita (analogo al caso reale) e vale il teorema di inversione.

Teorema 1.13 (Formula di sommazione di Poisson). *Se $f \in \mathfrak{F}$. Allora vale:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (f(n)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\hat{f}(n)\right).$$

Definizione 1.14. *Si dice che $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ con U aperto di $\mathbb{C}$ ha un polo in z_0 se esiste $n \in \mathbb{N}_{>1}$ tale che:*

$$(z - z_0)^n f(z)$$

ha una singolarità rimovibile (ovvero che esiste un unico valore con cui estendere in maniera olomorfa f in z_0). Il minimo di tali n si dice ordine del polo. Inoltre, se l'insieme dei poli di una f non ha punti di accumulazione in U allora f si dice meromorfa.

Osservazione 1.15. Sia f meromorfa con un polo di ordine n in z_0. Sfruttiamo il fatto che $(z-z_0)^n f$ sia olomorfa in z_0 e scriviamo la sua espansione in serie di potenze centrata in z_0:

$$\begin{aligned}(z - z_0)^n f(z) &= a_0 + a_1(z - z_0) + \dots \\ \Rightarrow f(z) &= \frac{a_0}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z - z_0} + a_n + \dots\end{aligned}$$

Allora definiamo a_{n-1} il residuo di f in z_0 e scriviamo:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}(f(z)) = a_{n-1}.$$

Teorema 1.16 (Teorema dei residui). *Sia D un disco con $z_0 \in D$ e tale che $\bar{D} \subseteq U$ e sia $f : U \to \mathbb{C}$ una funzione meromorfa su U, aperto di $\mathbb{C}$, con un solo polo (contenuto in D) in z_0. Allora:*

$$\int_{\partial D} f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0}(f(z)).$$

1.2 Ulteriori risultati preliminari

Definizione 1.17. *Definiamo serie geometrica una serie in cui rapporto tra termini successivi è costante, quindi dato un $x \in \mathbb{R}$ (x è detto ragione della serie) sarà della forma:*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(x^k\right).$$

Proposizione 1.18. *Sia $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(x^k\right)$ con $x \in (0; +\infty)$. Allora:*

$$\lim_{n\to+\infty} (S_n(x)),$$

esiste finito se e solo se $x < 1$. In particolare:

$$\lim_{n\to+\infty} (S_n(x)) = \frac{1}{1-x}.$$

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che se $x \geq 1$ la serie diverge:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(x^k\right) \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1^k\right) = +\infty.$$

Ora invece consideriamo $x < 1$. $S_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ allora si vede facilmente che:

$$\frac{S_n(x) - 1}{x} = S_{n-1}(x) = S_n(x) - x^n.$$

Da questo segue che:

$$S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Allora siccome $x < 1$, $x^{n+1} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$:

$$S_n(x) \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{1}{1 - x} \in \mathbb{R}.$$

□

Definizione 1.19 (Polinomi e numeri di Bernoulli). *Sia $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 2\pi$. Allora, fissato $x \in \mathbb{C}$, definiamo $B_n(x)$ con l'equazione:*

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{B_n(x)}{n!} z^n\right).$$

Inoltre i numeri $B_n(0)$ sono chiamati numeri di Bernoulli e si indicano con B_n

Osservazione 1.20. Questa definizione è ben posta perchè $\dfrac{ze^{xz}}{e^z - 1}$ è analitica quando $|z| < 2\pi$.

Teorema 1.21. *$B_n(x)$ è un polinomio in x dato da:*

$$B_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\binom{n}{k} B_k x^{n-k}\right).$$

Dimostrazione.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{B_n(x)}{n!} z^n\right) = \frac{z}{e^z - 1} \cdot e^{xz} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{B_n}{n!} z^n\right)\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n!} z^n\right)\right).$$

Ora basta porre uguali i coefficienti di z^n perchè una funzione analitica possiede un'unica espansione in serie di potenze:

$$\frac{B_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{B_k}{k!} \cdot \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\right).$$

□

I numeri di Bernoulli si calcolano ricorsivamente sfruttando i seguenti Teoremi:

Teorema 1.22. *Se $n \geq 1$:*

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
& z\frac{e^{(x+1)z}}{e^z-1} - z\frac{e^{xz}}{e^z-1} = ze^{xz}. \\
& \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{B_n(x+1)-B_n(x)}{n!}z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{n!}z^{n+1}\right). \\
& \Rightarrow \frac{B_n(x+1)-B_n(x)}{n} = x^{n-1}.
\end{aligned}$$

□

Osservazione 1.23. Da questo segue direttamente che per ogni $n \geq 2$:

$$B_n(0) = B_n(1).$$

Teorema 1.24. *Se $n \geq 2$:*

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}B_k\right).$$

Dimostrazione. Dall'osservazione precedente:

$$B_n = B_n(1) \overset{(1.21)}{=} \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}B_k\right).$$

□

Poniamo $B_0 = 1$ (segue dal valore derivata prima di $\frac{ze^{xz}}{e^z-1}$ in $z = 0$), ora con il Teorema appena dimostrato possiamo calcolare ricorsivamente altri valori di B_n:

$$\begin{aligned}
& B_2 = 1 + \binom{2}{1}B_1 + B_2. \\
& \Rightarrow B_1 = -\frac{1}{2}. \\
& B_3 = 1 - \frac{1}{2}\binom{3}{1} + \binom{3}{2}B_2 + B_3. \\
& \Rightarrow B_2 = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Capitolo 2

La Funzione Gamma di Eulero

2.1 Definizione, buona positura e proprietà di base

L'argomento principale di questa trattazione è la funzione Gamma di Eulero, procediamo quindi a darne una definizione per poi mostrarne la buona positura:

Definizione 2.1 (**Funzione Gamma di Eulero**). *Sia* $z \in \mathbb{C}$ *tale che* $\mathrm{Re}(z) > 0$. *Allora possiamo definire la funzione Gamma di Eulero o integrale di Eulero del secondo tipo nel seguente modo:*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Osservazione 2.2. La funzione è definita sull'insieme $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \text{ tale che: } \mathrm{Re}(z) > 0\}$ mostriamo allora che su questo insieme l'integrale nella definizione precedente converge. Notiamo innanzitutto che basta mostrare il caso in cui $z \in \mathbb{R}^+$ infatti se $z \in \mathbb{C}^+$ otteniamo:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \leq \left|\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{+\infty} |t^{z-1}| e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Ora siccome $t \geq 0$ sfruttiamo le proprietà degli esponenti complessi, infatti $|t^{yi}| = 1$ per ogni $y \in \mathbb{R}$:

$$\Gamma(z) \leq \int_0^{+\infty} t^{\mathrm{Re}(z)-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Poniamo ora $x = \mathrm{Re}(z)$, per studiare la convergenza dell'integrale lo spezziamo nell'integrale tra 0 e 1 e l'integrale tra 1 e $+\infty$, iniziamo studiando la convergenza del primo, sfruttando il fatto che $e^{-t} \leq 1$ su $[0;1]$:

$$\lim_{\alpha \to 0} \left(\int_\alpha^1 t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \right) \leq \lim_{\alpha \to 0} \left(\int_\alpha^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t \right) = \lim_{\alpha \to 0} \left[\frac{t^x}{x} \right]_\alpha^1 = \frac{1}{x} < +\infty, \quad \forall x > 0. \tag{2.1}$$

Ora mostriamo la convergenza del secondo, notiamo che $e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{t^k}{k!}\right)$ e la somma è a termini tutti positivi, quindi $e^t \geq \frac{t^M}{M!}$ con $M >> x$. Da questo segue che $e^{-t} \leq \frac{M!}{t^M}$.

$$\begin{aligned} \lim_{\beta\to+\infty} \left(\int_1^\beta t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t\right) &\leq \lim_{\beta\to+\infty} \left(\int_1^\beta t^{x-M-1} M!\,\mathrm{d}t\right) = \\ = \lim_{\beta\to+\infty} \left(M! \left[\frac{t^{x-M}}{x-M}\right]_1^\beta\right) &= \frac{M!}{M-x} < +\infty \quad \forall\, x > 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Osservazione 2.3. Le proprietà di base della funzione Gamma sono:

- $\Gamma(1) = 1$ infatti:
$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} (-e^{-x}) + 1 = 1.$$
- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}^+$ infatti:
$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t}\,\mathrm{d}t \overset{\text{P. P.}}{=} \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} z t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \overset{(\diamondsuit)}{=} z\Gamma(z).$$
$$(\diamondsuit)\ \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} (-t^x e^{-x}) = 0.$$
  Questa proprietà definisce un'equazione funzionale per Γ:
$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \tag{2.3}$$
- $\Gamma(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$, poiché $e^{-t}t^{x-1} > 0, \quad \forall t \in (0; +\infty), \forall\, x \in \mathbb{R}^+$.

2.2 Proprietà analitiche della Funzione Gamma

Proposizione 2.4. *La funzione* Γ *è olomorfa su* $\mathbb{C}^+$.

Dimostrazione. Siccome l'olomorfia è una proprietà locale basta verificare che vale su ogni striscia $S_{\delta;\,M} = \{z \in \mathbb{C} \mid |\delta < \mathrm{Re}(z) < M\}$ dove $0 < \delta < M < +\infty$. Sfruttando (2.1) e (2.2):

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad F_\epsilon(z) = \int_\epsilon^{\frac{1}{\epsilon}} e^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t \quad \text{converge}\ \forall\, z \in S_{\delta;\,M} \tag{2.4}$$

Per il Teorema (1.5) allora F_ϵ è olomorfa per ogni $z \in S_{\delta;\,M}$ perchè la funzione $e^{-t}t^{z-1}$ è intera e continua su $\mathbb{C}^+ \times \left[\epsilon; \frac{1}{\epsilon}\right]$. Ora sfruttando il Lemma (1.4) basta mostrare che $F_\epsilon(z)$ converge uniformemente per $\epsilon \to 0$ a $\Gamma(z)$ su $S_{\delta;\,M}$:

$$\begin{aligned} |\Gamma(z) - F_\epsilon(z)| &\leq \left| \int_0^\epsilon e^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{\epsilon}}^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t \right| \overset{(\clubsuit)}{\leq} \\ &\leq \int_0^\epsilon e^{-t} t^{\mathrm{Re}(z)-1}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{\epsilon}}^{+\infty} e^{-t} t^{\mathrm{Re}(z)-1}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

In ($\clubsuit$) si usano le disuguaglianze triangolari, classica e integrale, e $|t^{z-1}| = t^{\mathrm{Re}(z)-1}$.

Ora questi due integrali tendono entrambi uniformemente a 0 per $\epsilon \to 0$, infatti (con $\epsilon < 1$):

$$\int_0^{\epsilon} e^{-t} t^{\mathrm{Re}(z)-1}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\epsilon} t^{\delta-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\epsilon^{\delta}}{\delta}.$$

$$\int_{\frac{1}{\epsilon}}^{+\infty} e^{-t} t^{\mathrm{Re}(z)-1}\,\mathrm{d}t \leq \int_{\frac{1}{\epsilon}}^{+\infty} e^{-t} t^{M-1}\,\mathrm{d}t \leq C \int_{\frac{1}{\epsilon}}^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t. \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$$

Abbiamo sfruttato il fatto che $\dfrac{t^{M-1}}{e^{-\frac{t}{2}}}$ è una funzione limitata su $\left(\frac{1}{\epsilon}, +\infty\right)$ (C è una costante positiva adeguata). Tutto ciò mostra che Γ è una funzione olomorfa su $\mathbb{C}^+$. $\square$

Tuttavia, ci si può chiedere se sia possibile estendere Γ su un insieme più grande di $\mathbb{C}^+$ e la risposta è affermativa.

Teorema 2.5. *La funzione $\Gamma(z)$, definita su $\mathbb{C}^+$ come in precedenza, ammette un prolungamento analitico su $\mathbb{C}$ con poli semplici su $\mathbb{Z}_{\leq 0}$.*

Dimostrazione. Basta estendere la funzione Γ ad ogni semipiano $\mathbb{C}_{>m} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > -m\}$ con $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Per $m = 1$ definisco:

$$F_1(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Siccome Γ è olomorfa su $\mathbb{C}^+$, F_1 sarà meromorfa su $\mathbb{C}_{>-1}$ con un polo semplice in $z = 0$. Continuiamo iterando il procedimento su m, definendo per ogni m:

$$F_m = \frac{\Gamma(z+m)}{\prod_{k=0}^{m-1}(z+k)}.$$

Come in precedenza F_m è una funzione meromorfa su $\mathbb{C}_{>-m}$ con poli sugli interi negativi tra $-m$ e 0. Ora sfruttando l'equazione funzionale di Γ (2.3) abbiamo $F_m \equiv \Gamma$ su $\mathbb{C}^+$ e, inoltre, $F_m \equiv F_k$ sull'interserzione dei loro domini. Allora F_m è un prolungamento analitico di Γ. Siccome $m \in \mathbb{N}_{>0}$ è arbitrario, Γ ammette un prolungamento analitico (vedi figura (2.1)) su $\mathbb{C}$ con poli sugli interi non positivi. $\square$

2.3 Rappresentazioni alternative della Funzione Gamma

Per comodità usiamo la notazione $\hat{\mathbb{C}}$ per indicare $\mathbb{C}$ senza gli interi non positivi.

Definizione 2.6 (Limite di Eulero). *Sia $z \in \hat{\mathbb{C}}$ allora definiamo $\Gamma_E(z)$ come segue:*

$$\Gamma_E(z) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n! n^z}{\prod_{k=0}^{n}(z+k)} \right) \tag{2.5}$$

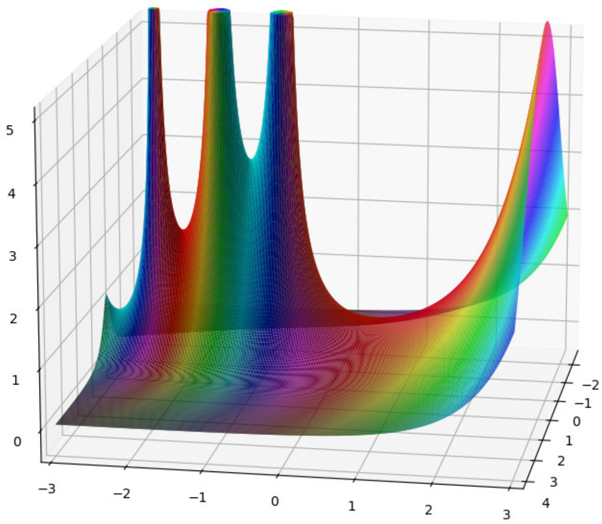

Figura 2.1: *Grafico del prolungamento analitico della funzione Gamma (in modulo)*

Definizione 2.7 (Prodotto infinito di Weierstrass). *Sia ancora $z \in \hat{\mathbb{C}}$ allora definisco $\Gamma_W(z)$ come segue:*

$$\Gamma_W(z) = \left(z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right) \right)^{-1} \tag{2.6}$$

dove γ è la costante di Eulero-Mascheroni:

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} \left(\frac{1}{m} \right) - \ln(n) \right)$$

Mostriamo che queste definizioni sono equivalenti:

Proposizione 2.8. *Per ogni $z \in \hat{\mathbb{C}}$:*

$$\Gamma(z) \overset{(1)}{=} \Gamma_E(z) \overset{(2)}{=} \Gamma_W(z).$$

Dimostrazione. Iniziamo mostrando (1):

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Per definizione, $e^{-t} = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)$.

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^{+\infty} t^{z-1}\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t \overset{(\star)}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^n t^{z-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) \overset{(\clubsuit)}{=}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(n^z\int_0^1 u^{z-1}(1-u)^n\,\mathrm{d}u\right).\end{aligned}$$

$(\star)$ $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t^{z-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\chi_{(0;\,n)}(t)\,\mathrm{d}t\right) \overset{\text{conv. unif.}}{=} \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$

$(\clubsuit)$ cambio di variabili: $u = \frac{t}{n}$.

Studiamo ora l'integrale $\int_0^1 u^{z-1}(1-u)^n\,\mathrm{d}u$ per farlo integriamo n volte per parti (P.P.):

$$\begin{aligned}&\int_0^1 u^{z-1}(1-u)^n\,\mathrm{d}u \overset{\text{P. P.}}{=} \underbrace{\left[\frac{u^z}{z}(1-u)^n\right]_0^1}_{=0} + \frac{n}{z}\int_0^1 u^z(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u \overset{\text{P. P.}}{=} \dots \overset{\text{P. P.}}{=}\\ &\overset{\text{P. P.}}{=} \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n-1}(z+k)}\int_0^1 u^{z+n-1}\,\mathrm{d}u = \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n-1}(z+k)}\left[\frac{u^{z+n}}{z+n}\right]_0^1 = \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(z+k)}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Andando a sostituire (2.7) nel limite precedente otteniamo:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n!n^z}{\prod_{k=0}^{n}(z+k)}\right) = \Gamma_E(z). \tag{2.8}$$

Così (1) è dimostrato, passiamo a (2) partendo dalla definizione in forma di limite:

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n!n^z}{\prod_{k=0}^{n}(z+k)}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^z}{z}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{z+k}\right)\right) \overset{(\heartsuit)}{=}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^z}{z}\prod_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}\right)\right).\end{aligned}$$

$$(\heartsuit)\ \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{z+k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{1+\frac{z}{k}}\right)\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}\right).$$

Ora sfruttiamo il fatto che $n^{-z} = e^{-z\ln(n)}$ e prendiamo il reciproco degli estremi della serie di uguaglianze precedente (supponiamo ora che $\Gamma(z) \neq 0$, lo mostreremo poi nel Corollario (2.13)):

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)} &= z\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-z\ln(n)}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)\right) \overset{(\diamondsuit)}{=}\\ &= z\lim_{n\to+\infty}\left(e^{\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)-\ln(n)\right)z}\prod_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right)\right) = ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right).\end{aligned}$$

$(\diamondsuit)\, e^{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)} = \prod_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{z}{k}}\right)$ abbiamo moltiplicato per il primo membro e diviso per il secondo.

Questo conclude la dimostrazione poichè abbiamo mostrato $\Gamma(z) = \Gamma_W(z)$. □

Osservazione 2.9. Dalla rappresentazione di Eulero di Gamma segue che $\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\bar{z})$, infatti:

$$\Gamma(\bar{z}) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n!n^{\bar{z}}}{\prod_{k=0}^{n}(\bar{z}+k)}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n!\overline{n^{z}}}{\prod_{k=0}^{n}\left(\overline{z+k}\right)}\right) = \overline{\Gamma(z)}.$$

2.4 Formula di Riflessione di Eulero

Lemma 2.10. *Sia $a \in \mathbb{C}$ con $0 < \mathrm{Re}(a) < 1$. Allora vale la seguente espressione:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} \frac{v^{a-1}}{1+v}\,\mathrm{d}v = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}. \tag{2.9}$$

Dimostrazione. Chiamiamo $I(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}x$ mostriamo che i due integrali in (2.9) sono uguali:

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(a-1)x}e^{x}}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}x. \overset{\text{C. di v.}}{=} \int_{0}^{+\infty} \frac{v^{a-1}}{1+v}\,\mathrm{d}v.$$

Cambio di variabili: $e^{x} = v$. Ora possiamo calcolare $I(a)$ con il teorema dei residui sul rettangolo γ con base $[-R;\, R]$ e altezza $[0;\, 2\pi i]$. Consideriamo ora $\dfrac{e^{az}}{1+e^{z}}$ questa è una funzione meromorfa con un polo semplice in πi. Calcoliamo il suo residuo in questo punto:

$$\lim_{z\to\pi i}\left((z-\pi i)\frac{e^{az}}{1+e^{z}}\right) = \lim_{z\to\pi i}\left(\frac{z-\pi i}{1+e^{z}}e^{az}\right) \overset{(\star)}{=} -e^{a\pi i}.$$

$(\star)\ 1+e^{z} = 1-e^{z-\pi i} = 1-(1+(z-\pi i)+o(z-\pi i)) = z-\pi i+o(z-\pi i)$, per $z \to \pi i$.

Ora applicando il teorema dei residui:

$$\int_{\gamma} \frac{e^{az}}{1+e^{z}}\,\mathrm{d}z = -2\pi i e^{a\pi i}.$$

Possiamo spezzare l'integrale su γ negli integrali sui quattro lati del rettangolo (li chiameremo γ_1; γ_2; γ_3 e γ_4 con il primo sull'asse reale e poi in senso antiorario). Notiamo subito che per $R \to +\infty$ gli integrali su γ_2 e γ_4 si annullano infatti (caso γ_2 l'altro è analogo):

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^{az}}{1+e^{z}}\,\mathrm{d}z \le \sup_{z\in\gamma_2}\left(\left|\frac{e^{az}}{1+e^{z}}\right|\right) 2\pi i \xrightarrow{R\to+\infty} 0.$$

Infatti $\lim_{R\to+\infty}\left(\left|\frac{e^{az}}{1+e^z}\right|\right)=0$. Ora $\gamma_3(t)=2\pi i-t$ con $t\in[-R;R]$, allora possiamo calcolare l'integrale ricordando che $\int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R} f(\gamma_3(t))\gamma_3'(t)\,\mathrm{d}t$ e $\gamma_3'(t)=-1$:

$$\int_{\gamma_3}\frac{e^{az}}{1+e^z}\,\mathrm{d}z=-\int_{-R}^{R}\frac{e^{2a\pi i}e^{-at}}{1+e^{2\pi i-t}}\,\mathrm{d}t=-e^{2a\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{e^{at}}{1+e^t}\,\mathrm{d}t\xrightarrow{R\to+\infty}-e^{2a\pi i}I(a).$$

Chiaramente:

$$\int_{\gamma_1}\frac{e^{az}}{1+e^z}\,\mathrm{d}z\xrightarrow{R\to+\infty}I(a).$$

Allora otteniamo:

$$\begin{aligned}
&I(a)-e^{2a\pi i}I(a)=-2\pi i e^{a\pi i}.\\
&\Rightarrow I(a)=\frac{2\pi i-e^{a\pi i}}{e^{2a\pi i}-1}=\frac{2\pi i}{e^{a\pi i}-e^{-a\pi i}}=\\
&=\frac{2\pi i}{i\sin(a\pi)+i\sin(a\pi)}=\frac{\pi}{\sin(\pi a)}.\\
&\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{v^{a-1}}{1+v}\,\mathrm{d}v=\frac{\pi}{\sin(\pi a)},\qquad\forall a\in S_{0;1}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.11 (Formula di riflessione di Eulero). *Per ogni $z\notin\mathbb{Z}$ vale:*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}.\tag{2.10}$$

Dimostrazione.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\int_0^{+\infty}t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\cdot\int_0^{+\infty}u^{-z}e^{-u}\,\mathrm{d}u\overset{\text{C. di v.}}{=}$$

(Cambio di variabile: $u=tv$)

$$\begin{aligned}
&=\int_0^{+\infty}t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\cdot\int_0^{+\infty}(tv)^{-z}e^{-tv}t\,\mathrm{d}u\overset{\text{Tonelli}}{=}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}t^ze^{-t}t^{-z}v^{-z}e^{-tv}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}v=\\
&=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-t(v+1)}v^{-z}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}v=\int_0^{+\infty}v^{-z}\left[-\frac{e^{-t(v+1)}}{v+1}\right]_0^{+\infty}\mathrm{d}v=\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{v^{-z}}{v+1}\,\mathrm{d}v\overset{(\spadesuit)}{=}\frac{\pi}{\sin(\pi(1-z))}\overset{(\heartsuit)}{=}\frac{\pi}{\sin(\pi z)}.
\end{aligned}$$

($\spadesuit$) Poniamo $-z=a-1;\Rightarrow\mathrm{Re}(z)\in(0;1)$ e usiamo il Lemma (2.10).

($\heartsuit$) $\sin(\pi(1-z))=\dfrac{e^{i\pi-i\pi z}-e^{-i\pi-i\pi z}}{2i}=\dfrac{-e^{-i\pi z}+e^{i\pi z}}{2i}=\dfrac{2i\sin(\pi z)}{2i}=\sin(\pi z)$.

Quindi la formula vale sulla striscia $S_{0;1}=\{z\in\mathbb{C}|0<\mathrm{Re}(z)<1\}$ e per il prolungamento analitico di Γ, (2.10) vale per ogni z in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. □

Osservazione 2.12. Questo teorema ci dà un modo semplice per calcolare $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, infatti se $z = \frac{1}{2}$ in (2.10):

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \pi.$$

Siccome abbiamo mostrato nelle proprietà di base che Γ è una funzione positiva su $\mathbb{R}^+$; abbiamo che:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Corollario 2.13. *La funzione* $\frac{1}{\Gamma(z)}$ *è intera su* $\mathbb{C}$ *con zero semplici sugli interi non positivi.*

Dimostrazione. Dalla formula (2.11) segue che:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \Gamma(1-z)\frac{\sin(\pi z)}{\pi}$$

Ora $\Gamma(1-z)$ ha poli semplici sugli interi positivi che sono cancellati dagli zero semplici di $\sin(\pi z)$, quindi questa funzione si annulla solo sugli interi non positivi ed è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ come prodotto di funzioni olomorfe. □

2.5 Formula Integrale di Eulero generalizzata

Proposizione 2.14. *Sia* $p = a + bi = |p|\, e^{\alpha i} \in \mathbb{C}^*$ *e* $n \in \mathbb{N}_{>0}$. *Allora valgono le seguenti formule:*

$$\frac{\Gamma(z)}{n\,|p|^z}\cos(\alpha z) = \int_0^{+\infty} u^{nz-1}e^{-au^n}\cos\left(bu^n\right)\,\mathrm{d}u.$$
$$\frac{\Gamma(z)}{n\,|p|^z}\sin(\alpha z) = \int_0^{+\infty} u^{nz-1}e^{-au^n}\sin\left(bu^n\right)\,\mathrm{d}u.$$

Dimostrazione.

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \overset{\text{C. di v.}}{=} (\text{Cambio di variabile: } t = pu^n)$$
$$= \int_0^{+\infty} p^z n u^{nz-n} e^{-pu^n} u^{n-1}\,\mathrm{d}u = np^z \int_0^{+\infty} u^{nz-1}e^{-pu^n}\mathrm{d}u.$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(z)}{np^z} = \int_0^{+\infty} u^{nz-1}e^{-pu^n}\mathrm{d}u. \tag{2.11}$$

Ora lo stesso ragionamento vale considerando $\bar{p}$:

$$\frac{\Gamma(z)}{n\bar{p}^z} = \int_0^{+\infty} u^{nz-1}e^{-\bar{p}u^n}\mathrm{d}u. \tag{2.12}$$

Così possiamo sommare o sottrarre (2.11) e (2.12):

$$\frac{\Gamma(z)}{np^z} \pm \frac{\Gamma(z)}{n\bar{p}^z} = \int_0^{+\infty} u^{nz-1}e^{-pu^n} \pm u^{nz-1}e^{-\bar{p}u^n}\,\mathrm{d}u.$$
$$\Rightarrow \frac{\Gamma(z)}{n}\left(\frac{1}{\bar{p}^z} \pm \frac{1}{p^z}\right) = \int_0^{+\infty} u^{nz-1}\left(e^{-\bar{p}u^n} \pm e^{-pu^n}\right)\,\mathrm{d}u.$$

Notiamo che $\left(\frac{1}{\bar{p}^z} \pm \frac{1}{p^z}\right) = \frac{e^{i\alpha z} \pm e^{-i\alpha z}}{|p|^z}$ e che

$$e^{-(a+bi)u^n} \pm e^{-(a-bi)u^n} = e^{-au^n}\left(e^{-biu^n} \pm e^{biu^n}\right).$$

Consideriamo l'espressione con la somma ($e^{i\alpha z} + e^{-i\alpha z} = 2\cos(\alpha z)$):

$$\frac{\Gamma(z)}{n\,|p|^z}\cos(\alpha z) = \int_0^{+\infty} u^{nz-1}e^{-au^n}\cos\left(bu^n\right)\,\mathrm{d}u. \tag{2.13}$$

E analogamente con la differenza:

$$\frac{\Gamma(z)}{n\,|p|^z}\sin(\alpha z) = \int_0^{+\infty} u^{nz-1}e^{-au^n}\sin\left(bu^n\right)\,\mathrm{d}u. \tag{2.14}$$

□

Capitolo 3

La Funzione Beta e la Formula di duplicazione di Legendre

3.1 Definizione e proprietà di base

Definizione 3.1 (Funzione Beta). *Siano* $z_1;\ z_2 \in \mathbb{C}^+$*. Allora definiamo funzione Beta o integrale di Eulero del primo tipo:*

$$B\left(z_1,\ z_2\right) = \int_0^1 t^{z_1-1}\left(1-t\right)^{z_2-1}\ \mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

Osservazione 3.2. La funzione Beta è ben posta, infatti, come nel caso della funzione Gamma, basta mostrarlo per $x,\ y \in \mathbb{R}^+$. Spezziamo l'integrale in due parti:

$$B\left(x,\ y\right) = \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\left(1-t\right)^{y-1}\ \mathrm{d}t}_{(i)} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}\left(1-t\right)^{y-1}\ \mathrm{d}t}_{(ii)}.$$

Iniziamo studiando l'integrale (i); qui $1-t \geq \frac{1}{2}$ su $\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$. Allora:

$$\frac{1}{2^y}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t < +\infty, \quad \forall\, x > 0.$$

Analogamente per (ii); $t \geq \frac{1}{2}$ su $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$. Allora:

$$\frac{1}{2^x}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-t)^{1-y}}\,\mathrm{d}t < +\infty, \quad \forall\, y > 0.$$

Osservazione 3.3. Le proprietà di base della funzione Beta sono:

- Beta è una funzione simmetrica:

$$B\left(z_1,\ z_2\right) = \int_0^1 t^{z_1-1}\left(1-t\right)^{z_2-1}\ \mathrm{d}t \overset{\text{C. di v.}}{=} \int_0^1 u^{z_2-1}\left(1-u\right)^{z_1-1}\ \mathrm{d}u = B\left(z_2,\ z_1\right).$$

- Per ogni z_1; z_2 in $\mathbb{C}^+$ vale:

$$B\left(z_1,\, z_2\right) = \frac{\Gamma\left(z_1\right)\Gamma\left(z_2\right)}{\Gamma\left(z_1 + z_2\right)} \tag{3.2}$$

Dimostrazione.

$$\Gamma\left(z_1\right)\Gamma\left(z_2\right) = \int_0^{+\infty} t^{z_1-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \cdot \int_0^{+\infty} u^{z_2-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u =$$
$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{z_1-1}e^{-t}u^{z_2-1}e^{-u}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}u \overset{\text{C. di v.}}{=}$$
$$\left(\text{Cambio di variabili: } y = \frac{t}{x};\ x = \frac{u}{1-y}\right)$$
$$\overset{\text{C. di v.}}{=} \int_0^1\int_0^{+\infty} (xy)^{z_1-1}e^{-xy}x^{z_2-1}(1-y)^{z_2-1}e^{-x(1-y)}|-x|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^1\int_0^{+\infty} x^{z_1+z_2-1}y^{z_1-1}(1-y)^{z_2-1}e^{-xy-x(1-y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^1\int_0^{+\infty} x^{z_1+z_2-1}e^{-x}y^{z_1-1}(1-y)^{z_2-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^1 y^{z_1-1}(1-y)^{z_2-1}\,\mathrm{d}y \cdot \int_0^{+\infty} x^{z_1+z_2-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = B(z_1,z_2)\Gamma(z_1+z_2).$$
$$\Rightarrow B(z_1,z_2) = \frac{\Gamma\left(z_1\right)\Gamma\left(z_2\right)}{\Gamma\left(z_1 + z_2\right)}.$$

□

- Per ogni z_1; z_2 in $\mathbb{C}^+$ vale anche:

$$B(z_1+1,\, z_2) = \frac{z_1}{z_1+z_2}B(z_1,\, z_2)$$

Dimostrazione.

$$B(z_1+1,\, z_2) \overset{(3.2)}{=} \frac{\Gamma(z_1+1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1+z_2+1)} = \frac{z_1\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{(z_1+z_2)\Gamma(z_1+z_2)} = \frac{z_1}{z_1+z_2}B(z_1,\, z_2).$$

□

Analogamente si mostra che:

$$B(z_1,\, z_2+1) = \frac{z_2}{z_1+z_2}B(z_1,\, z_2)$$

- Sia $z \in \mathbb{C}$ con $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$. Allora vale:

$$B(z,\, 1-z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\Gamma(1)} = \Gamma(z)\Gamma(1-z) \overset{(2.10)}{=} \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

3.2 Formula di duplicazione di Legendre

Proposizione 3.4. *Sia $z \in \mathbb{C}^+$. Allora vale la seguente formula detta di duplicazione di Legendre:*

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right). \tag{3.3}$$

Dimostrazione. Consideriamo $B(z,\, z) \overset{(3.2)}{=} \dfrac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)}$:

$$B(z,\, z) = \int_0^1 (t(1-t))^{z-1}\, \mathrm{d}t \overset{\text{C. di v.}}{=} \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \left(\frac{u+1}{2}\cdot\frac{1-u}{2}\right)^{z-1} \mathrm{d}u =$$

$$\left(\text{Cambio di variabili: } t = \frac{u+1}{2}\right)$$

$$= 2^{1-2z}\int_{-1}^1 \left(1-u^2\right)^{z-1}\, \mathrm{d}u = 2^{2-2z}\int_0^1 \left(1-u^2\right)^{z-1}\, \mathrm{d}u =$$

$$\left(\text{Cambio di variabili: } u = \sqrt{v}\right)$$

$$\overset{\text{C. di v.}}{=} 2^{1-2z}\int_0^1 v^{-\frac{1}{2}}(1-v)^{z-1}\, \mathrm{d}v = 2^{1-2z}B\left(\frac{1}{2},\, z\right) = 2^{1-2z}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(z)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}.$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} = 2^{1-2z}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(z)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}.$$

$$\overset{(\star)}{\Longrightarrow} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\frac{1}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}.$$

$$\Rightarrow \Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

$(\star)$ $\Gamma(z) \neq 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}^+$.

$\square$

Capitolo 4

La Funzione Zeta di Riemann e legami con la Funzione Gamma

4.1 La Funzione Zeta di Riemann

Definizione 4.1 (**Funzione Zeta di Riemann**). *Sia* $z \in \mathbb{C}_{>1}$. *Allora definiamo la funzione Zeta di Riemann nel modo seguente:*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^z} \right).$$

Osservazione 4.2. La definizione data è ben posta, infatti (come nei casi precedenti):

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \left| \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}} \right| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}}.$$

$$\Rightarrow |\zeta(z)| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^z} \right) \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left| \frac{1}{n^z} \right| \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}} \right).$$

Questa serie converge se e solo se $\mathrm{Re}(z) > 1$ e, in particolare, converge uniformemente su $\mathbb{C}_{>1}$. Ora la funzione n^{-z} è olomorfa su $\mathbb{C}$ quindi anche $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{n^z} \right)$ lo è per ogni $m \in \mathbb{N}$, allora sfruttando il Lemma (1.4) ζ è olomorfa su $\mathbb{C}_{>1}$.

Proposizione 4.3. *Sia* $z \in \mathbb{C}_{\geq 1}$. *Allora:*

$$\zeta(z) = \prod_{p} \left(\frac{1}{1 - p^{-z}} \right). \tag{4.1}$$

Dove il prodotto nel secondo membro è fatto su tutti i numeri primi.

Dimostrazione. Siano $M; N \in \mathbb{N}$ con $M > N$, inoltre considero $n \leq N$, per il teorema fondamentale dell'aritmetica esisteranno $p_1; \ldots; p_k \leq n$ numeri primi e $m_1; \ldots; m_k \leq$

M, tali che $n = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ per un qualche $k \in \mathbb{N}$. Allora:

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n^z}\right) \leq \prod_{p \leq N}\left(1+\frac{1}{p^z}+\cdots+\frac{1}{p^{Mz}}\right) = \prod_{p\leq N}\left(\sum_{m=0}^{M}\left(\frac{1}{p^{mz}}\right)\right) \leq$$
$$\leq \prod_{p\leq N}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{p^{mz}}\right)\right) = \prod_{p\leq N}\left(\frac{1}{1-p^{-z}}\right) \leq \prod_{p}\left(\frac{1}{1-p^{-z}}\right).$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^z}\right) \leq \prod_{p}\left(\frac{1}{1-p^{-z}}\right).$$

Nel primo passaggio abbiamo solamente utilizzato il teorema fondamentale dell'aritmetica, poi la somma della serie geometrica (1.18) e nell'ultimo passaggio il teorema della permanenza del segno. Ora dimostriamo la disuguaglianza inversa, sfruttando ancora il teorema fondamentale dell'aritmetica e la permanenza del segno:

$$\prod_{p\leq N}\left(\sum_{m=0}^{M}\left(\frac{1}{p^{mz}}\right)\right) = \prod_{p\leq N}\left(1+\frac{1}{p^z}+\cdots+\frac{1}{p^{Mz}}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^z}\right).$$
$$\Rightarrow \prod_{p}\left(\frac{1}{1-p^{-z}}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^z}\right).$$

□

Corollario 4.4. *Per ogni $z \in \mathbb{C}_{\geq 1}$ la funzione ζ è diversa da zero.*

Dimostrazione. Usando la proposizione precendente basta notare che per ogni $z \in \mathbb{C}_{\geq 1}$:

$$\frac{1}{1-p^{-z}} \neq 0.$$

□

Definizione 4.5 (Funzione Theta). *Sia $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Allora definiamo la funzione Theta come:*

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(e^{-\pi n^2 t}\right).$$

Osservazione 4.6. Questa funzione è ben posta per ogni $t > 0$, infatti basta notare che:

$$\theta(t) = e^{\pi t}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(e^{-n^2}\right) \leq e^{\pi t}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(e^{-n}\right) = 2\frac{e^{\pi t}}{1-e} + e^{\pi t} < +\infty.$$

Ora vorremmo riconoscere il teorema (1.13) in termini di θ quindi chiamiamo $f(x) = e^{-\pi x^2 t}$, innanzitutto notiamo che per ogni $t > 0$ $f \in \mathfrak{F}$ e calcoliamo ora la sua trasformata di Fourier ricordando il seguente risultato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi}\,\mathrm{d}x = e^{-\pi\xi^2}. \tag{4.2}$$

Allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2 t} e^{-2\pi i x\xi}\, \mathrm{d}x \overset{\text{C. di v.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-\pi y^2} e^{-2\pi i y \frac{\xi}{\sqrt{t}}}\, \mathrm{d}x \overset{(4.2)}{=} e^{-\pi\left(\frac{\xi}{\sqrt{t}}\right)^2} t^{-\frac{1}{2}} = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi\frac{\xi^2}{t}}.$$

$\Big($Cambio di variabili: $x\sqrt{t} = y\Big)$.

Quindi dalla formula di sommazione di Poisson:

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(e^{-\pi n^2 t}\right) \overset{(1.13)}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(t^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi\frac{n^2}{t}}\right) = t^{-\frac{1}{2}} \theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

Dagli estremi di questa uguaglianza otteniamo l'equazione funzionale per la funzione Theta:

$$\theta(t) = \frac{\theta\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}}. \tag{4.3}$$

Osservazione 4.7. Valgono le seguenti stime:

- $\theta(t) = \frac{c}{\sqrt{t}}$ per $t \to 0$ con $c > 0$, questo segue dall'equazione funzionale (4.3) e da:

$$\theta\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow{t\to 0} c$$

  Questo limite esiste finito poichè $\theta\left(\frac{1}{t}\right)$ è una funzione crescente ed è limitata in un intorno destro di 0 in quanto:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(e^{-\pi\frac{n^2}{t}}\right) \overset{(t<1)}{\leq} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(e^{-\pi n^2}\right) < +\infty.$$

- $|\theta(t) - 1| \leq C e^{-\pi t}$ per $t \to +\infty$ con $C > 0$:

$$|\theta(t) - 1| = \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(e^{-\pi n^2 t}\right) - 1\right| = 2 \underbrace{\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-\pi n^2 t}\right)\right|}_{>0} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-\pi n^2 t}\right) \leq$$

$$\leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-\pi n t}\right) = 2e^{-\pi t} \frac{e^{\pi t}}{1 - e^{-\pi t}} = e^{-\pi t} C.$$

Teorema 4.8. *Se $z \in \mathbb{C}_{>1}$. Allora vale la seguente uguaglianza:*

$$\pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^{\frac{z}{2}-1} \left(\theta(u) - 1\right) \mathrm{d}u. \tag{4.4}$$

Dimostrazione. Iniziamo mostrando che vale:

$$\pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) n^{-z} = \int_0^{+\infty} u^{\frac{z}{2}-1} e^{-\pi n^2 u}\, \mathrm{d}u, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Ma questa segue direttamente dalla formula (2.13) con $z = \frac{z}{2}$; $n = 1$; $a = \pi n^2$; $b = 0$; $\alpha = 0$.

Ora ricordiamo che:

$$\frac{\theta(u) - 1}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-\pi n^2 u}\right)$$

Questa e l'osservazione (4.7) ci dicono che l'integrale in (4.4) è assolutamente convergente (per $u \to 0$ l'integranda è minore o uguale a $c \cdot u^{\frac{z}{2}-1}\left(u^{-\frac{1}{2}} - 1\right)$ con $\mathrm{Re}(z) > 1$ e per $u \to +\infty$ l'integranda è minore di $Ce^{-\pi t}u^{\frac{z}{2}}$ quindi l'integrale converge assolutamente). Allora possiamo sommare su n l'espressione (4.5) e scambiare sommatoria e integrale per il Teorema di Beppo Levi (tutti i termini della sommatoria sono positivi):

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^{\frac{z}{2}-1}\left(\theta(u) - 1\right) \mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u^{\frac{z}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} \,\mathrm{d}u\right) =$$
$$= \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n^{-z}\right) = \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z).$$

□

Definizione 4.9 (Funzione Xi di Riemann). *Sia $z \in \mathbb{C}_{>1}$. Allora definiamo funzione Xi di Riemann la seguente:*

$$\xi(z) = \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z). \tag{4.6}$$

Osservazione 4.10. La funzione Xi appena definita è ben posta per il Teorema appena dimostrato ed è olomorfa su $\mathbb{C}_{>1}$ perchè prodotto di funzioni olomorfe.

Teorema 4.11. *La funzione ξ ammette un prolungamento analitico su tutto $\mathbb{C}$ come funzione meromorfa con poli semplici in $z = 0; 1$. Inoltre vale la seguente equazione funzionale per ξ:*

$$\xi(z) = \xi(1 - z), \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}. \tag{4.7}$$

Per la dimostrazione di questo teorema si veda [1].

Teorema 4.12. *La funzione Zeta di Riemann ammette un prolungamento meromorfo su $\mathbb{C}$ con un solo polo in $z = 1$. In particolare il prolungamento analitico è definito nel modo seguente:*

$$\zeta(z) = \pi^{\frac{z}{2}}\frac{\xi(z)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)} \tag{4.8}$$

Dimostrazione. Ricordiamo innanzitutto che dal Corollario (2.13) $\frac{1}{\Gamma(z)}$ è una funzione intera con zero semplici sugli interi non positivi. Inoltre dal Teorema (4.11) sappiamo che ξ ammette un prolungamento meromorfo con poli semplici in $z = 0$ e $z = 1$. Allora lo zero di $\dfrac{1}{\Gamma(z)}$ in $z = 0$ cancella il polo di ξ nello stesso punto. Quindi ζ definita in questo modo è meromorfa su $\mathbb{C}$ con un polo in $z = 1$. □

Corollario 4.13 (Formula di Riflessione per la funzione Zeta). *Per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0, 1$ vale la seguente formula di Riflessione per la funzione Zeta di Riemann:*

$$\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \pi^{-\frac{1-z}{2}}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z) \tag{4.9}$$

Dimostrazione. Questa formula segue direttamente dall'equazione funzionale di ξ trovata nel Teorema (4.11) e dal prolungamento meromorfo della funzione ζ. □

Osservazione 4.14. Notiamo che entrambi i membri della formula (4.9) fanno $+\infty$ se $z = 0$ o $z = 1$. In particolare questa formula ci dice che la funzione ζ è simmetrica rispetto all'asse $x = \frac{1}{2}$ nel piano complesso xy e inoltre ci permette di studiare gli zero della funzione Zeta su $\mathbb{C}_{<0}$. Infatti riscriviamo (4.9) nel modo seguente:

$$\zeta(z) = \pi^{z-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}\zeta(1-z) \tag{4.10}$$

Allora abbiamo che se $\mathrm{Re}(z) < 0$:

- $\zeta(1-z) \neq 0$ perché $\mathrm{Re}(1-z) > 1$ e ricordando il Corollario (4.4).
- $\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}_{<0}$.
- $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)} = 0$ se e solo se $z \in 2\mathbb{Z}_{<0}$.

Quindi la funzione ζ (fuori dalla striscia $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\}$ detta striscia critica) si annulla solamente sugli interi pari negativi.

Osservazione 4.15. Dalla formula di riflessione (2.11) e di duplicazione (3.3):

$$\begin{aligned}
&\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \overset{(2.11)}{=} \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)\sin\left(\pi\left(\frac{z+1}{2}\right)\right)}.\\
&\Rightarrow \frac{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)} = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)\sin\left(\pi\left(\frac{z+1}{2}\right)\right)} \overset{(3.3)}{=} \frac{\sqrt{\pi}2^{z-1}}{\Gamma(z)\sin\left(\pi\frac{z+1}{2}\right)}.\\
&\Rightarrow \zeta(z) = \pi^z 2^{z-1}\frac{\zeta(1-z)}{\Gamma(z)\sin\left(\frac{z+1}{2}\pi\right)}.
\end{aligned}$$

4.2 Relazione integrale tra Gamma e Zeta di Hurwitz

Definizione 4.16 (Funzione Zeta di Hurwitz). *Sia $z \in \mathbb{C}_{>1}$ e $a \in (0; 1]$. Allora definiamo la funzione Zeta di Hurwitz nel modo seguente:*

$$\zeta(z, a) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+a)^z}\right). \tag{4.11}$$

Osservazione 4.17. Nella definizione precedente se poniamo $a = 1$ riotteniamo la funzione Zeta di Riemann. Inoltre, la definizione è ben posta e la serie è assolutamente convergente per ogni $z \in \mathbb{C}_{>1}$ poichè:

$$\zeta(z,\, a) \leq \zeta(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}_{>1}.$$

Da questo segue anche che la Zeta di Hurwitz è una funzione olomorfa su $\mathbb{C}_{>1}$.

Proposizione 4.18. *Sia $z \in \mathbb{C}_{>1}$. Allora vale:*

$$\Gamma(z)\zeta(z,\, a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\, \mathrm{d}x. \tag{4.12}$$

In particolare se $a = 1$:

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\, \mathrm{d}x. \tag{4.13}$$

Dimostrazione. Mostriamo questo risultato per z reale, poi lo si può estendere a $z \in \mathbb{C}_{>1}$ come in [5]. Partiamo dalla definizione integrale della funzione Gamma:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{z-1}\, \mathrm{d}x \overset{\text{C. di v.}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-(n+a)t}(n+a)^z t^{z-1}\, \mathrm{d}t.$$

Allora possiamo portare $(n + a)^z$ a sinistra e sommare entrambi i membri su $n \in \mathbb{N}$:

$$\zeta(z,\, a)\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(n+a)t}t^{z-1}\, \mathrm{d}t \right).$$

Siccome l'integranda è positiva (inoltre $\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}e^{-at}}{1-e^{-t}} < +\infty$) possiamo scambiare serie ed integrale per il Teorema di Beppo Levi:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(n+a)t}t^{z-1}\, \mathrm{d}t \right) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-nt}\right)}_{=\frac{1}{1-e^{-t}}} e^{-at}t^{z-1}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}e^{-at}}{1-e^{-t}}.$$

□

Consideriamo ora una curva C detta Contorno di Hankel come in Figura (4.1):

Con C_1 con parametrizzazione $z = re^{\pi i}$ e C_3 con parametrizzazione $z = re^{-\pi i}$, con $r \in (\delta,\, +\infty)$. C_2 è un circonferenza intorno all'origine di raggio $\delta < 2\pi$.

Proposizione 4.19. *Sia $0 < a \leq 1$. Allora:*

$$I(z,\, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{s^{z-1}e^{as}}{1-e^s}\, \mathrm{d}s, \tag{4.14}$$

è una funzione intera rispetto alla coordinata z e inoltre vale:

$$\zeta(z,\, a) = \Gamma(1-z)I(z,\, a), \quad \forall z \in \mathbb{C}_{>1}. \tag{4.15}$$

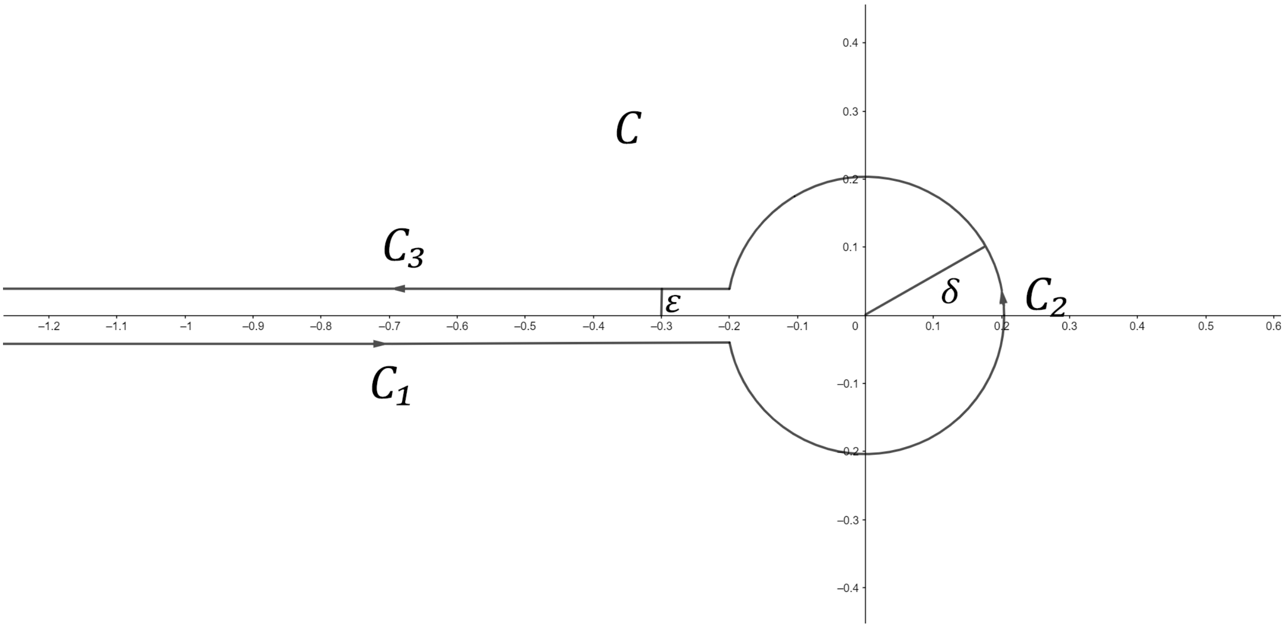

Figura 4.1: *Contorno di Hankel C*

Dimostrazione. Iniziamo mostrando che $I(z, a)$ è una funzione intera nella variabile z per ogni $0 < a \leq 1$. Consideriamo un disco compatto di raggio M e mostriamo che l'integrale lungo C_1 e C_3 converge uniformemente su questo disco. Siccome la funzione integranda è intera rispetto a z, l'integrale su C_2 converge sempre e questo prova che $I(z, a)$ è intera. Lungo C_1 abbiamo per $r \geq 1$:

$$|s^{z-1}| = r^{\mathrm{Re}(z)-1}|e^{-\pi i(\mathrm{Re}(z)-1+i\,\mathrm{Im}(z))}| = r^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{\pi\,\mathrm{Im}(z)} \leq r^{M-1}e^{\pi M}.$$

Analogamente, lungo C_3 per $r \geq 1$ vale $|s^{z-1}| \leq r^{M-1}e^{\pi M}$. Allora lungo entrambe le curve per ogni $r \geq 1$:

$$\left|\frac{s^{z-1}e^{as}}{1-e^s}\right| \leq \frac{r^{M-1}e^{\pi M}e^{-ar}}{1-e^{-r}} = \frac{r^{M-1}e^{\pi M}e^{(1-a)r}}{e^r-1}.$$

Ma $e^r - 1 > e^{\frac{r}{2}}$ per ogni $r > \ln(2)$, allora l'integranda è limitata superiormente da $Ar^{M-1}e^{ar}$, dove $A > 0$ dipende solo da M. Ora siccome

$$\int_{\delta}^{+\infty} r^{M-1}e^{ar}\,\mathrm{d}r,$$

converge se $\delta > 0$, allora gli integrali su C_1 e C_3 convergono uniformemente su ogni disco con $|z| \leq M$, quindi $I(z, a)$ è intera. Dimostriamo ora (4.15). Sia $g(s) = \dfrac{e^{as}}{1-e^s}$; allora su C_1 e C_3 abbiamo che $g(s) = g(-r)$ e su C_2 vale la parametrizzazione $s = \delta e^{i\theta}$ con

$\theta \in [-\pi; \pi]$. Allora vale:

$$\begin{aligned}
2\pi i I(z,\, a) &= \int_{+\infty}^{\delta} r^{z-1} e^{-\pi z} g(-r)\,\mathrm{d}r + \int_{-\pi}^{\pi} \delta^{z-1} e^{(z-1)i\theta} \delta e^{i\theta} g\left(\delta e^{i\theta}\right)\,\mathrm{d}\theta + \\
&+ \int_{\delta}^{+\infty} r^{z-1} e^{\pi z} g(-r)\,\mathrm{d}r = \\
&= 2i\sin(\pi s) \underbrace{\int_{\delta}^{+\infty} r^{z-1} g(-r)\,\mathrm{d}r}_{=:I_1(z,\,\delta)} + 2i \underbrace{\frac{\delta^z}{2i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\theta} g\left(\delta e^{i\theta}\right)\,\mathrm{d}\theta}_{=:I_2(z,\,\delta)}. \\
&\Rightarrow \pi I(z,\, a) = \sin(\pi z) I_1(z,\, \delta) + I_2(z,\, \delta). \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Mandiamo ora $\delta \to 0$ e otteniamo:

$$\lim_{\delta \to 0} \left(I_1(z,\, \delta)\right) = \int_0^{+\infty} \frac{r^{z-1} e^{-ar}}{1 - e^{-r}}\,\mathrm{d}r \overset{(4.12)}{=} \Gamma(z)\zeta(z,\, a). \quad \mathrm{Re}(z) > 1.$$

Inoltre mostriamo che $\lim_{\delta \to 0} \left(I_2(z,\, \delta)\right) = 0$, notiamo che $g(z)$ è olomorfa su $B_0(2\pi) = \{z \in C \mid |z| < 2\pi\}$ eccetto per un polo in $z = 0$. Allora $zg(z)$ è analitica su $B_0(2\pi)$, quindi è limitata, esiste pertanto $A > 0$ tale che $|g(z)| \leq \frac{A}{|z|}$ dove $|z| = \delta < 2\pi$, così possiamo stimare la norma di I_2:

$$|I_2(z,\, \delta)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\delta^{\mathrm{Re}(z)}}{2} e^{-\mathrm{Im}(z)\theta} \frac{A}{\delta}\,\mathrm{d}\theta \leq \pi \delta^{\mathrm{Re}(z)-1} A e^{\pi\,\mathrm{Im}(z)}.$$

Quindi se $\mathrm{Re}(z) > 1$ e $\delta \to 0$ segue che $I_2(z,\, a) \to 0$. Ora mandiamo al limite l'equazione (4.16):

$$\begin{aligned}
&\pi I(z,\, a) = sin(\pi z)\Gamma(z)\zeta(z,\, a). \\
&\overset{(2.10)}{\Rightarrow} \zeta(z,\, a) = \Gamma(1 - z) I(z,\, a).
\end{aligned}$$

□

Osservazione 4.20. Questa è una continuazione analitica della funzione Zeta di Hurwitz, infatti il secondo membro è una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ e coincide su $\mathbb{C}_{>1}$ con la definizione data in precedenza. Inoltre sappiamo che $\zeta(z,\, a)$ è olomorfa su $\mathbb{C}_{>1}$, quindi i poli della funzione $\Gamma(1 - z)$ che sono sugli interi positivi vengono cancellati da degli zero della funzione integrale $I(z,\, a)$. Il polo in $z = 1$ tuttavia rimane.

Corollario 4.21.

$$I(n,\, a) = \operatorname*{Res}_{z=0} \left(\frac{z^{n-1} e^{az}}{1 - e^z} \right).$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo fatto basta notare che l'integrale su C_1 e su C_3, come nel teorema, sono opposti quando $z = n$, quindi (sia D il disco di raggio $\delta < 2\pi$):

$$I(n,\, a) = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{C_2} \frac{z^{n-1} e^{az}}{1 - e^z}\,\mathrm{d}z \right) = \int_{\partial D} \frac{z^{n-1} e^{az}}{1 - e^z}\,\mathrm{d}z \overset{(1.16)}{=} \operatorname*{Res}_{z=0} \left(\frac{z^{n-1} e^{az}}{1 - e^z} \right).$$

□

Capitolo 5

Applicazioni

5.1 Applicazioni della Formula Integrale Generalizzata di Eulero

Le due formule (2.13) e (2.14) si possono sfruttare per il calcolo di integrali definiti di difficile stima.

Esempio 5.1 (**Integrale gaussiano**). La funzione $f(x) = e^{-x^n}$ non ammette una primitiva esprimibile in termini di funzioni elementari, tuttavia possiamo stimare il valore del suo integrale generalizzato tra 0 e $+\infty$, infatti possiamo usare l'equazione (2.13) con $z = \frac{1}{n}$; $a = 1$; $b = 0$ così $p = 1$ quindi $\alpha = 0$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^n} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0}. \tag{5.1}$$

Da questa equazione generale si può ricavare l'integrale della gaussiana $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$. Sfruttiamo il fatto che l'integranda è una funzione pari e otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x. = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x. = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Esempio 5.2 (**Integrali di Fresnel**). Sono detti integrali di Fresnel le due funzioni $S(x)$ e $C(x)$ definite nel modo seguente:

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(t^2\right) \, \mathrm{d}t. \tag{5.2}$$

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(t^2\right) \, \mathrm{d}t. \tag{5.3}$$

Calcoliamo $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$ usando (2.14) con $n = 2$; $z = \frac{1}{2}$; $a = 0$; $b = 1$ così $p = i$ e $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right) \, \mathrm{d}t = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Analogamente si mostra che $\lim_{x\to+\infty} C(x) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$.

Osservazione 5.3. Questo risultato si può generalizzare:

$$\int_0^{+\infty} \sin\left(t^n\right)\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \cos\left(t^n\right)\, \mathrm{d}t = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{2}} = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{2}}.$$

5.2 Volume della palla n-dimensionale

Definizione 5.4. *Sia $s \in [0; +\infty)$. Allora definiamo:*

$$\omega_s = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}.$$

Proposizione 5.5. *Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora ω_n coincide con la misura di Lebesgue di una palla di raggio unitario in $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità lo mostriamo nel caso della palla unitaria centrata nell'origine $B_1^n(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$, allora la tesi diventa:

$$\omega_n = \mathcal{L}^n\left(B_1^n(0)\right) = \int_{B_1^n(0)} 1\, \mathrm{d}x. \tag{5.4}$$

La dimostrazione è per induzione su n:

- Passo base: $n = 1$ allora:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = 2 = \mathcal{L}^1\left((-1;\, 1)\right)$$

- Passo induttivo: Supponiamo che (5.4) sia vera per n e mostriamo che vale anche per $n+1$:

$$B_1^{n+1}(0) = \left\{(x;\, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \|x\|^2 < 1 - y^2;\, |y| < 1\right\}.$$

$$\Rightarrow \int_{B_1^{n+1}(0)} 1\, \mathrm{d}x \overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{-1}^{1} \mathcal{L}^n\left(B^n_{\sqrt{1-y^2}}(0)\right) \mathrm{d}y \overset{(\heartsuit)}{=} \omega_n \int_{-1}^{1} \left(1-y^2\right)^{\frac{n}{2}}\, \mathrm{d}y.$$

$$(\heartsuit) \int_{B_r^n(0)} 1\, \mathrm{d}x = r^n \omega_n.$$

Ora calcoliamo ω_{n+1}:

$$\omega_{n+1} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+1\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)}\sqrt{\pi}.$$

Allora il rapporto tra ω_{n+1} e ω_n diventa:

$$\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)} \overset{(3.2)}{=} B\left(\frac{n}{2}+1,\, \frac{1}{2}\right).$$

Così ci resta solo da mostrare che $\int_{-1}^{1}\left(1-|y|^2\right)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{d}y = B\left(\frac{n}{2}+1,\,\frac{1}{2}\right)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-1}^{1}\left(1-|y|^2\right)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{d}y = 2\int_{0}^{1}\left(1-|y|^2\right)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{d}y \overset{\text{C. di v.}}{=} \int_{0}^{1}(1-t)^{\frac{n}{2}}t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = B\left(\frac{n}{2}+1,\,\frac{1}{2}\right).$$

(Cambio di variabile: $t = |y|^2$.)

□

Osservazione 5.6. Questa formula per il volume della palla si può semplificare sfruttando le proprietà di Γ a seconda che n sia pari o dispari:

- Se $n = 2k$:
$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{2k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2k}{2}+1\right)} = \frac{\pi^k}{\Gamma(k+1)} = \frac{\pi^k}{k!}$$

- Se $n = 2k+1$ il caso è un po' più complicato e possiamo sfruttare la formula di duplicazione di Legendre. Innanzitutto sostituiamo $\frac{z}{2}$ nella formula (3.3):
$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= 2^{z-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\right).\\ \Rightarrow \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}}\frac{\Gamma(z)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\right)}.\end{aligned} \tag{5.5}$$
Ora sostituiamo (5.5), con $z = 2k+1$, in ω_{2k+1}:
$$\omega_{2k+1} = \frac{2\pi^{\frac{2k+1}{2}}}{(2k+1)\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)} \overset{(5.5)}{=} \frac{\pi^k 2^{2k+1}}{\Gamma\left(2k+2\right)}\Gamma(k+1) = \frac{\pi^k 2^{2k+1} k!}{(2k+1)!}.$$

5.3 Modulo della funzione Gamma per valori complessi

Dall'osservazione (2.9) segue che:

$$|\Gamma(z)|^2 = \Gamma(z)\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(z)\Gamma\left(\bar{z}\right).$$

Da questo fatto possiamo ricavare il valore del modulo di Gamma per valori puramente immaginari, infatti:

Lemma 5.7. *Per ogni $y \in \mathbb{C}$ vale:*

$$|\Gamma(yi)|^2 = \frac{\pi}{y\sinh(\pi y)}.$$

Dimostrazione. Dall'osservazione appena fatta:

$$|\Gamma(yi)|^2 = \Gamma(yi)\Gamma(-yi) = \frac{\Gamma(yi)\Gamma(1-yi)}{-yi}.$$

Ora posso usare la formula di riflessione:

$$\frac{\Gamma(yi)\Gamma(1-yi)}{-yi} = \frac{\pi}{-yi\sin(\pi yi)} = \frac{\pi}{y\sinh(\pi y)}.$$

□

Osservazione 5.8. Questa lemma ci dice che $\Gamma(yi) \overset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Proposizione 5.9. *Per ogni $y \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$ vale:*

$$|\Gamma(1+n+yi)|^2 = \prod_{k=0}^{n}\left(k^2+y^2\right)\frac{\pi}{y\sinh(\pi y)}.$$

Dimostrazione. Riconduciamo questo caso al Lemma (5.7) sfruttando la proprietà elementare di Gamma ($\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$):

$$|\Gamma(1+n+yi)|^2 = \Gamma(1+n+yi)\Gamma(1+n-yi) = \prod_{k=0}^{n}(k+yi)\,\Gamma(yi)\prod_{k=0}^{n}(k-yi)\,\Gamma(-yi) =$$

$$= \prod_{k=0}^{n}((k+yi)(k-yi))\,\Gamma(yi)\Gamma(-yi) \overset{(5.7)}{=} \prod_{k=0}^{n}\left(k^2+y^2\right)\frac{\pi}{y\sinh(\pi y)}.$$

□

5.4 Calcolo di alcuni valori della Funzione Zeta di Hurwitz e soluzione del problema di Basilea

Iniziamo calcolando i valori della funzione Zeta di Hurwitz sugli interi negativi.

Osservazione 5.10. Abbiamo dimostrato che:

$$\zeta(-n,\,a) = \Gamma(n+1)I(-n,\,a) = n!I(-n,\,a) \overset{(4.21)}{=} n!\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{z^{-n-1}e^{az}}{1-e^z}\right)$$

Teorema 5.11. *Per ogni $n \geq 0$ abbiamo:*

$$\zeta(-n,\,a) = -\frac{B_{n+1}(a)}{n+1}. \tag{5.6}$$

Dimostrazione. Come ricordato nell'Osservazione (5.10) vale:

$$\zeta(-n,\,a) = n!\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{z^{-n-1}e^{az}}{1-e^z}\right).$$

Calcoliamo il residuo:

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{z^{-n-1}e^{az}}{1-e^{z}}\right) &= -\operatorname*{Res}_{z=0}\left(z^{-n-2}\frac{ze^{az}}{e^{z}-1}\right) \overset{(1.19)}{=} \\ &= -\operatorname*{Res}_{z=0}\left(z^{-n-2}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{B_m(a)}{m!}z^m\right)\right) \overset{(\star)}{=} -\frac{B_{n+1}(a)}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Il passaggio $(\star)$ è giustificato poichè moltiplicando z^{-n-2} otteniamo che l'unico termine della somma non primitivabile, e quindi con residuo non nullo, è quello per $m=n+1$. $\square$

Osservazione 5.12. Questo teorema ci dice che per $n \geq 1$ allora $B_{2n+1}(1) = B_{2n+1} = 0$ poichè la funzione Zeta di Riemann si annulla sugli interi negativi pari. I primi valori per interi negativi sono:

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}; \quad \zeta(-1) = -\frac{1}{12}; \quad \zeta(-2) = 0.$$

Inoltre, possiamo usare la formula trovata nell'osservazione (4.15) dell'equazione funzionale di Zeta per trovare i suoi valori sugli interi positivi:

$$\begin{aligned}&\zeta(2n) = \pi^{2n}2^{2n-1}\frac{\zeta(1-2n)}{\Gamma(2n)\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)} = \pi^{2^n}2^{2n-1}(-1)^n\frac{-B_{2n}}{(2n)!}.\\ &\Rightarrow \zeta(2n) = \pi^{2^n}2^{2n-1}(-1)^{n+1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}.\end{aligned}$$

Allora possiamo calcolare un valore esplicito per $\zeta(2)$. Questo è conosciuto storicamente come Problema di Basilea:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Bibliografia

[1] E. M. Stein, R. Shakarchi: *Complex Analysis (Princeton Lectures in Analysis, No. 2)*, Princeton University Press, 2003.

[2] H. J. Weber, G. B. Arfken: *Essential Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, 2003.

[3] E. Artin: *The Gamma Function*, Holt Reinhard and Winston, 1931.

[4] P. J. Davis: *Leonhard Euler's Integral: An Historical Profile of the Gamma Function*. The American Mathematical Monthly, "**66** (1959), pp. 849-869"

[5] T. Apostol: *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, 1976.

Ringraziamenti

Tante volte non ho detto grazie e non so se questo sia il luogo giusto per rimediare, ma, siccome è d'uso, tanto vale spendere due parole. Un grazie a tutti coloro che sono stati presenti in questi tre anni, un grazie per i bei momenti passati insieme, per i sorrisi e la presenza nei momenti di sconforto e che "mollo tutto e vado a fare filosofia" (o ingegneria, a seconda). Per le lezioni insieme e la pausa sigaretta che "vieni e stai a guardare". Per le passeggiate con il sole, con la pioggia tra i portici o con la neve (e un ginocchio poco stabile). Per le chiacchierate di notte sulle panchine e le strade, nel mio soggiorno e alla mia stanza. Per le feste, quando eravamo in venti in sessanta metri quadri (la notte dell'inganno) ai ritorni a casa al freddo e a piedi. Per le serate a bere che avevano un che di proibito e ribelle, al tenersi compagnia a pranzo. Per i momenti di silenzio e di raccoglimento, troppo pochi forse. Per l'amore che mi è stato dato, tanto, e che spero di aver ricambiato. Per la città che non mi è mai piaciuta perché ha avuto i suoi momenti. Per ciò che mi è stato trasmesso dentro l'università e fuori, e la poca matematica che ho imparato. Per chi c'è stato dal minuto zero e per le mie radici da cui mi fa sempre piacere tornare. Vi voglio tanto bene a tutti. Dovrei ringraziarvi più spesso forse.

Questo sentimento popolare, nasce da meccaniche divine