

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Arrangiamenti di iperpiani e
polinomio cromatico di grafi

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Roberto Pagaria

Presentata da:
Riccardo Zaccaria

Anno Accademico 2023/2024

*Beauty is the first test:
there is no permanent place in the world
for ugly mathematics.*

Godfrey H. Hardy

*La bellezza è il requisito fondamentale:
al mondo non c'è un posto perenne
per la matematica brutta.*

Godfrey H. Hardy

Introduzione

In questa tesi studiamo nel primo capitolo gli arrangiamenti di iperpiani, rivolgendo particolare attenzione alle proprietà combinatorie; nel secondo i grafi, in particolare analizzando il problema della colorazione. Siamo interessati a notare i collegamenti tra questi due argomenti differenti. Infine nell'ultimo capitolo vediamo come applicazione lo studio delle colorazioni di carte geografiche.

Un arrangiamento di iperpiani \mathcal{A} è una collezione finita di sottospazi affini di codimensione uno in uno spazio vettoriale di dimensione finita l . Nella prima sezione vediamo alcune definizioni, in particolare come dato un arrangiamento \mathcal{A} e un iperpiano $H \in \mathcal{A}$, si costruiscono la cancellazione \mathcal{A}' e la restrizione \mathcal{A}'' rispetto ad H . Questa tecnica sarà centrale per molte dimostrazioni di questa tesi. Siamo interessati a definire una struttura di insieme parzialmente ordinato (poset) sull'insieme delle intersezioni tra gli iperpiani. Chiameremo questo insieme $L(\mathcal{A})$ e imponiamo la relazione d'ordine per inclusione inversa. In particolare il rango degli elementi corrisponderà alla codimensione e lo spazio vettoriale V di dimensione l sarà l'elemento minimale del poset $L(\mathcal{A})$. Dopo aver studiato alcune proprietà importanti del poset, definiamo la funzione di Möbius su $L(\mathcal{A})$. Vediamo come a partire da alcune proprietà, è possibile calcolare il valore della funzione data una coppia qualsiasi di elementi del poset. In seguito enunciamo e dimostriamo le formule di inversione di Möbius e un teorema che stabilisce il segno della funzione di Möbius al variare del rango degli elementi su cui è definita. A questo punto spostiamo la nostra attenzione sulla restrizione della funzione di Möbius $\mu(X) = \mu(V, X)$, così da poter definire il polinomio di Poincaré $\pi(\mathcal{A}, t)$ e il polinomio caratteristico $\chi(\mathcal{A}, t)$ di un arrangiamento. Enunciamo e dimostriamo il teorema di cancellazione-restrizione (Teorema 1.30):

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \pi(\mathcal{A}', t) + t\pi(\mathcal{A}'', t).$$

Da questa formula si ricava una seconda versione differente del teorema che riguarda il polinomio caratteristico (Corollario 1.32).

$$\chi(\mathcal{A}, t) = \chi(\mathcal{A}', t) - \chi(\mathcal{A}'', t)$$

La formula di cancellazione-restrizione permette di dimostrare l'ultimo teorema del capitolo. Dato un arrangiamento reale \mathcal{A} definiamo il complementare $M(\mathcal{A})$ come segue:

$$M(\mathcal{A}) = V \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H.$$

Denotiamo $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ l'insieme delle componenti connesse (camere) di $M(\mathcal{A})$. Il Teorema 1.33, dimostrato da Zaslavsky, permette di calcolare il numero di camere di un arrangiamento.

$$|\mathcal{C}(\mathcal{A})| = \pi(\mathcal{A}, 1).$$

Perciò $|\mathcal{C}(\mathcal{A})|$ dipende solo dal polinomio di Poincaré di \mathcal{A} , quindi solo dalla struttura del poset $L(\mathcal{A})$.

Nel secondo capitolo spostiamo la nostra attenzione sui grafi: vediamo alcune definizioni importanti e stabiliamo un modo per associare ad ogni grafo un arrangiamento di iperpiani. In particolare ad un grafo G con l vertici associamo un l -arrangiamento $\mathcal{A}(G)$ in cui ad ogni lato del grafo corrisponde un iperpiano. Questo stabilisce il collegamento tra i due capitoli, che approfondiamo in seguito. Introduciamo il problema della colorazione di un grafo G . Una colorazione è una funzione che associa ai vertici di G un valore in modo che, se due vertici sono collegati da un lato, ad essi sono associati valori differenti. La funzione cromatica $\chi(G, t)$, definita sui numeri naturali, stabilisce al variare di t il numero di colorazioni possibili di G con t valori (colori). Vediamo com'è possibile stabilire intuitivamente la funzione cromatica in alcuni casi semplici: grafi senza lati e completi, ovvero i grafi dove ogni coppia di vertici è collegata da un lato. Tuttavia nella maggior parte dei casi questo calcolo è più complicato. Dato un grafo G definiamo la cancellazione G' e la restrizione G'' rispetto ad un lato e_0 di G . Si dimostra che per calcolare il polinomio cromatico di G è sufficiente conoscere quelli di G' e G'' . Questo risultato è conosciuto come teorema di cancellazione-restrizione cromatico (Proposizione 2.20).

$$\chi(G, t) = \chi(G', t) - \chi(G'', t)$$

Da questa formula segue facilmente per induzione che la funzione cromatica di un grafo G con l vertici sia un polinomio monico nella variabile t , di grado l . Per questo motivo la funzione cromatica è nota come polinomio cromatico. Il risultato successivo mette in mostra in maniera particolarmente evidente il collegamento tra teoria degli grafi e arrangiamenti di iperpiani. Infatti dimostriamo che dato un grafo G , il suo polinomio cromatico coincide con il polinomio caratteristico dell'arrangiamento $\mathcal{A}(G)$.

$$\chi(G, t) = \chi(\mathcal{A}(G), t)$$

Come corollario di questo teorema possiamo quindi stabilire che il polinomio cromatico ha alcune proprietà osservate per i polinomi caratteristici. Osserviamo che il teorema di cancellazione-restrizione cromatico permette di calcolare il polinomio cromatico di qualsiasi grafo, tuttavia il procedimento è spesso molto lungo. Infatti il costo computazionale cresce esponenzialmente all'aumentare del numero dei lati. Siamo quindi interessati a trovare metodi alternativi per semplificare i calcoli. Per questo motivo enunciamo il teorema di riduzione cromatica, che permette di calcolare il polinomio cromatico di un grafo riconducendosi a quello di sottografi sovrapposti su grafi completi. Questa proposizione ha il vantaggio di procedere più velocemente nel calcolo del polinomio, tuttavia ha il limite di considerare solo sottografi che si sovrappongono su grafi completi. Quindi in molti casi può risultare necessario utilizzare il teorema di cancellazione-restrizione per ricondursi a casi in cui è possibile effettuare il calcolo con il teorema di riduzione, come si può osservare esplicitamente nel capitolo tre. A questo punto dedichiamo una breve digressione ad alcuni sviluppi più recenti dello studio delle proprietà del polinomio cromatico: in particolare enunciamo la log-concavità della sequenza di coefficienti di un qualsiasi polinomio cromatico, dimostrata da June Huh nel 2012 [6] con metodi di geometria algebrica, che non approfondiamo. Osserviamo anche come questo implichi l'unimodalità della sequenza formata dai valori assoluti dei coefficienti. Così come il polinomio cromatico di un grafo corrisponde al polinomio caratteristico dell'arrangiamento di iperpiani associato, ci chiediamo se anche il polinomio di Poincaré acquisisce un significato in teoria dei grafi. Osserviamo che esiste e si può costruire esplicitamente una corrispondenza biunivoca tra le camere dell'arrangiamento e le orientazioni acicliche del grafo. Un'orientazione aciclica si ottiene stabilendo un'orientazione per ciascuno dei lati del grafo, in modo che esso non abbia cicli orientati. Denotiamo $AO(G)$ l'insieme delle orientazioni acicliche di un grafo G . Dal teorema di Zaslavsky segue che

$$|AO(G)| = \pi(\mathcal{A}(G), 1).$$

Questo stabilisce un ulteriore collegamento tra arrangiamenti di iperpiani e teoria dei grafi.

Nell'ultimo capitolo studiamo un'applicazione della teoria di colorazione dei grafi: la colorazione di carte geografiche. Data una cartina divisa in regioni, in quanti modi si può assegnare ad ognuna di esse un colore in modo che se due regioni sono confinanti, i colori siano diversi? È possibile affrontare questo problema studiando la colorazione di un grafo G costruito in questo modo: ad ogni regione della cartina corrisponde un vertice e se due regioni sono confinanti, i due vertici corrispondenti sono collegati da un lato. Calcolando

il polinomio cromatico del grafo possiamo stabilire il numero cromatico $k(G)$, cioè il numero minimo di colori necessario per ottenere almeno una colorazione. In seguito calcoliamo il numero di colorazioni della cartina utilizzando $k(G)$ colori. Osserviamo che il teorema dei quattro colori stabilisce che è possibile colorare qualsiasi carta geografica utilizzando quattro colori. Quindi in alcuni casi è particolarmente semplice individuare il numero cromatico: se il grafo G ha un sottografo H e $k(H) = 4$, allora $k(G) = 4$. Ci dedichiamo allo studio di tre esempi concreti di colorazione di carte geografiche, in ordine crescente di complessità nel calcolo del polinomio cromatico: le provincie dell'Emilia-Romagna, le regioni italiane e gli Stati nell'Unione Europea. Come abbiamo osservato prima, il calcolo dei polinomi cromatici può essere eseguito facilmente da un computer. Tuttavia siamo interessati ad effettuare esplicitamente i conti, utilizzando gli strumenti teorici introdotti nel capitolo precedente e un po' di pazienza nel trattare i vari casi, mettendo in evidenza tutti i passaggi intermedi. In questo modo risalta l'efficacia degli enunciati introdotti in precedenza nell'affrontare e semplificare esempi complessi.

Indice

Introduzione	i
1 Combinatoria di Arrangiamenti	1
1.1 Definizioni ed Esempi	1
1.2 Il poset $L(\mathcal{A})$	4
1.3 Funzione di Möbius	6
1.4 Il polinomio di Poincaré	8
2 Colorazioni di Grafi	13
2.1 Arrangiamenti Grafici e Polinomio Cromatico	13
2.2 Cancellazione-Restrizione	16
2.3 Riduzione Cromatica	20
2.4 Log-Concavità di $\chi(G, t)$	24
2.5 Orientazioni Acicliche	25
3 Colorazioni di Carte Geografiche	29
3.1 Emilia-Romagna	31
3.2 Italia	35
3.3 Unione Europea	36
Bibliografia	47

Capitolo 1

Combinatoria di Arrangiamenti

1.1 Definizioni ed Esempi

Iniziamo la trattazione fornendo alcune definizioni di base sugli arrangiamenti di iperpiani.

Definizione 1.1. *Sia \mathbb{K} un campo e sia $V_{\mathbb{K}}$ uno spazio vettoriale di dimensione l . Un'iperpiano H in $V_{\mathbb{K}}$ è un sottospazio affine di dimensione $(l - 1)$. Un arrangiamento di iperpiani $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{\mathbb{K}}, V_{\mathbb{K}})$ è un insieme finito di iperpiani in $V_{\mathbb{K}}$.*

Chiamiamo \mathcal{A} una l -arrangiamento se vogliamo enfatizzare la dimensione di V . In questo elaborato il campo preso in considerazione sarà sempre \mathbb{R} . Perciò se non è specificato consideriamo che gli arrangiamenti presi in considerazione siano reali e omettiamo \mathbb{R} nel pedice. Scriveremo che un arrangiamento è reale solo nel caso volessimo specificare che il risultato preso in considerazione vale solo per arrangiamenti di questo tipo. Denotiamo Φ_l il l -arrangiamento vuoto. Denotiamo con $|\mathcal{A}|$ la cardinalità di \mathcal{A} .

Scegliamo una base $\{e_1, \dots, e_l\}$ in V e $\{x_1, \dots, x_l\}$ la base duale tale che $x_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Ogni iperpiano $H \in \mathcal{A}$ è il nucleo di un polinomio α_H di grado 1 definito a meno di una costante. È conveniente scrivere $p \doteq q$ per $p, q \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_l]$ se $p = cq$ per qualche $c \in \mathbb{K}^*$. Perciò se $\ker(\alpha_H) = H = \ker(\beta_H)$, allora $\alpha_H \doteq \beta_H$.

Definizione 1.2. *Il prodotto*

$$Q(\mathcal{A}) = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_l]$$

è chiamato il polinomio di definizione di \mathcal{A} .

Conveniamo che $Q(\Phi_l) = 1$ è il polinomio che definisce la disposizione vuota. Osserviamo che $Q(\mathcal{A})$ è definita a meno di una costante moltiplicativa non nulla.

Definizione 1.3. Chiamiamo \mathcal{A} senza centro se $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H = \emptyset$. Se $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H \neq \emptyset$, chiamiamo \mathcal{A} centrato con centro T . Se \mathcal{A} è centrato, allora le coordinate possono essere scelte in modo che ogni iperpiano contienga l'origine. In questo caso chiamiamo \mathcal{A} centrale. Se \mathcal{A} è centrale, allora $Q(\mathcal{A})$ è un polinomio omogeneo di grado $|\mathcal{A}|$. Assumiamo che Φ_l sia centrale. Se vogliamo enfatizzare che una disposizione non sia necessariamente centrale la chiamiamo affine.

Definizione 1.4. Definiamo $L(\mathcal{A})$ l'insieme delle intersezioni non vuote di elementi di \mathcal{A} .

Osserviamo che $L(\mathcal{A})$ contiene V in quanto intersezione della collezione di iperpiani vuota.

Definizione 1.5. Sia \mathcal{A} una disposizione di iperpiani. Definiamo il sottoinsieme $N(\mathcal{A})$ in questo modo:

$$N(\mathcal{A}) = \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H = \{v \in V \mid Q(\mathcal{A})(v) = 0\}$$

e il complementare:

$$M(\mathcal{A}) = V \setminus N(\mathcal{A}).$$

In un arrangiamento reale assume una particolare rilevanza lo studio delle componenti connesse di $M(\mathcal{A})$:

Definizione 1.6. Sia \mathcal{A} un l -arrangiamento reale di iperpiani. Chiamiamo camere le componenti connesse di $M(\mathcal{A})$, considerato come spazio topologico con topologia indotta da quella euclidea su \mathbb{R}^l . Sia $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ l'insieme delle camere di \mathcal{A} . Ovviamente vale:

$$M(\mathcal{A}) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{A})} C.$$

Esempio 1.7. Di seguito forniamo alcuni esempi di arrangiamenti di iperpiani. L'unico 1-arrangiamento centrale consiste nell'iperpiano $\{0\}$. Un 1-arrangiamento affine consiste in un insieme finito di punti. Per $l = 2, 3$ usiamo x, y, z come coordinate di V . Un 2-arrangiamento centrale è un insieme finito di rette passante per l'origine. Poniamo \mathcal{A}_1 l'arrangiamento definito dal polinomio $xy(x+y)$. Un 2-arrangiamento affine è un insieme finito di rette affini nel piano. Un esempio di 2-arrangiamento senza centro è \mathcal{A}_2 definito da $xy(x+y-1)$. Un ulteriore esempio importante è il l -arrangiamento booleano \mathcal{B}_l , che contiene gli iperpiani coordinati in \mathbb{R}^l . Ha cardinalità l e il polinomio che lo definisce è $x_1 x_2 \dots x_l$.

Concludiamo il paragrafo con altre definizioni necessarie per due costruzioni importanti: cancellazione-restrizione e cono su un arrangiamento.

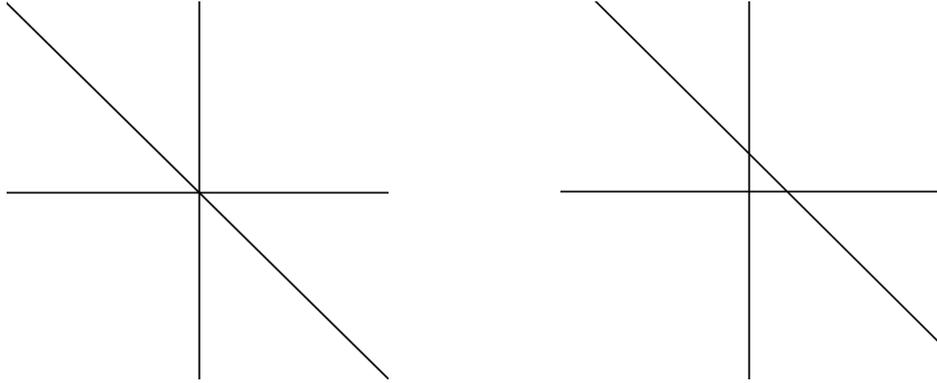


Figura 1.1: $Q(\mathcal{A}_1) = xy(x+y)$ e $Q(\mathcal{A}_2) = xy(x+y-1)$

Definizione 1.8. Sia (\mathcal{A}, V) un arrangiamento. Se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ è un sottoinsieme, allora si dice che (\mathcal{B}, V) è un sottoarrangiamento. Dato $X \in L(\mathcal{A})$ si definisce un sottoarrangiamento \mathcal{A}_X di \mathcal{A} in questo modo:

$$\mathcal{A}_X = \{H \in \mathcal{A} \mid X \subseteq H\}$$

Osserviamo che $\mathcal{A}_V = \Phi_l$ e se $X \neq V$ allora \mathcal{A}_X ha centro X .

Definizione 1.9. Definiamo un arrangiamento (\mathcal{A}^X, X) in X come:

$$\mathcal{A}^X = \{X \cap H \mid H \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_X \text{ e } X \cap H \neq \emptyset\}$$

Chiamiamo \mathcal{A}_X la restrizione di \mathcal{A} al sottospazio affine X .

Definizione 1.10. Sia \mathcal{A} un arrangiamento non vuoto e sia $H_0 \in \mathcal{A}$. Sia $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus H_0$ e $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}^{H_0}$. Chiamiamo $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ una tripla di arrangiamenti e H_0 l'iperpiano distinto.

Queste definizioni formalizzano il metodo di cancellazione e restrizione, fondamentale per dimostrare molte proposizioni su arrangiamenti di iperpiani. È valido per induzione sulla cardinalità di \mathcal{A} .

Definizione 1.11. Associamo ad un l -arrangiamento \mathcal{A} definito dal polinomio $Q(\mathcal{A})$ un $(l+1)$ -arrangiamento centrale $c\mathcal{A}$, detto il cono su \mathcal{A} . Sia $Q' \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_l]$ l'omogenizzato del polinomio $Q(\mathcal{A})$ e definiamo $Q(c\mathcal{A}) = x_0 Q'$. Chiamiamo $K_0 = \ker(x_0)$ l'iperpiano aggiunto.

Notiamo che $|c\mathcal{A}| = |\mathcal{A}| + 1$. Osserviamo che si può ritrovare \mathcal{A} in $c\mathcal{A}$ prendendo in considerazione il sottospazio affine $\ker(x_0 - 1)$ di $c\mathcal{A}$. Le intersezioni degli iperpiani di $c\mathcal{A}$ e questo sottospazio sono gli iperpiani di \mathcal{A} .

1.2 Il poset $L(\mathcal{A})$

Dato un arrangiamento \mathcal{A} , possiamo associare ad esso l'insieme parzialmente ordinato $L(\mathcal{A})$, che fornisce molte informazioni sulla struttura di \mathcal{A} .

Definizione 1.12. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento di iperpiani e $L = L(\mathcal{A})$ l'insieme delle intersezioni non vuote di elementi di \mathcal{A} . Definiamo un ordine parziale su L in questo modo:*

$$X \leq Y \iff Y \subseteq X.$$

Si noti che l'ordine è dato per inclusione inversa. Perciò V è l'unico elemento minimale. Se l'arrangiamento è centrale, anche l'elemento massimale è unico.

Definizione 1.13. *Definiamo una funzione rango su L in questo modo: $r(X) = \text{codim}X$. Quindi $r(V) = 0$ e $r(H) = 1$ per ogni $H \in \mathcal{A}$. Chiamiamo gli elementi di rango 1, cioè gli iperpiani di \mathcal{A} , atomi di L . Siano $X, Y \in L$. Definiamo il loro meet come $X \wedge Y = \cap\{Z \in L \mid X \cup Y \subseteq Z\}$. Se $X \cap Y \neq \emptyset$, definiamo il loro join come $X \vee Y = X \cap Y$.*

Dimostriamo alcune semplici proposizioni che saranno utili in seguito:

Osservazione 1.14. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento di iperpiani centrale e $L = L(\mathcal{A})$. Allora per ogni $X, Y \in L$, $X \vee Y$ è ben definito e la funzione rango soddisfa:*

$$r(X \wedge Y) + r(X \vee Y) \leq r(X) + r(Y). \quad (1.1)$$

Dimostrazione. Il risultato si ottiene dalla formula di Grassmann:

$$\dim(X + Y) + \dim(X \cap Y) = \dim(X) + \dim(Y)$$

e dalla disuguaglianza $\dim(X + Y) \leq \dim(X \wedge Y)$. □

Proposizione 1.15. *Tutti gli elementi massimali di $L(\mathcal{A})$ hanno lo stesso rango.*

Dimostrazione. Questo è ovvio se \mathcal{A} è un arrangiamento centrale, perché $L(\mathcal{A})$ ha un unico elemento massimale. Se \mathcal{A} è senza centro, allora può averne più di uno. Si osservi che se $T \in L(\mathcal{A})$ è un elemento massimale se e solo se per ogni $H \in \mathcal{A}$, $T \subset H$ oppure $T \cap H = \emptyset$. Questa condizione è invariante rispetto a trasformazioni lineari affini, perciò dato un elemento massimale, gli altri si ottengono tramite trasformazioni lineari affini. Quindi hanno tutti la stessa dimensione. □

La proposizione precedente permette di definire il rango di un arrangiamento.

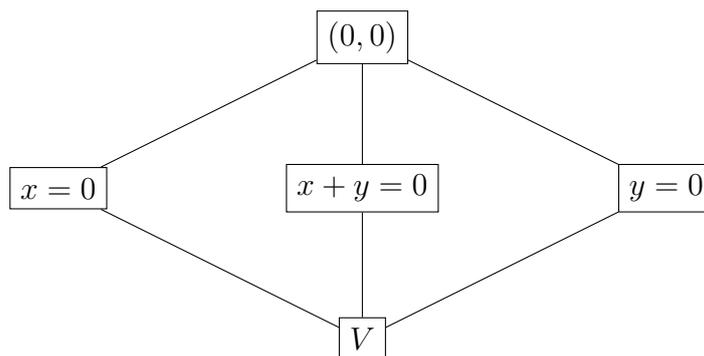


Figura 1.2: Diagramma di Hasse di $Q_1(\mathcal{A}) = xy(x+y)$.

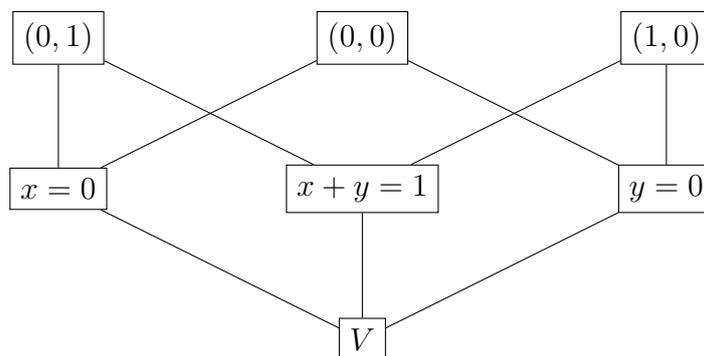


Figura 1.3: Diagramma di Hasse di $Q_2(\mathcal{A}) = xy(x+y-1)$.

Definizione 1.16. Il rango di \mathcal{A} , $r(\mathcal{A})$, è il rango di un elemento massimale di $L(\mathcal{A})$. Se \mathcal{A} è un arrangiamento centrale, denotiamo $T(\mathcal{A}) = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$ l'unico elemento massimale di $L(\mathcal{A})$.

Definiamo ora alcuni sottoposet e segmenti che saranno utili nelle proposizioni dei prossimi paragrafi:

Definizione 1.17. Dato un poset L e $X, Y \in L$ con $X < Y$ definiamo:

$$L_X = \{Z \in L \mid Z \leq X\}, \quad L^X = \{Z \in L \mid Z \geq X\}.$$

$$[X, Y] = \{Z \in L \mid X \leq Z \leq Y\} \quad [X, Y) = \{Z \in L \mid X \leq Z < Y\}.$$

Osservazione 1.18. Sia \mathcal{A} un arrangiamento e $X \in L(\mathcal{A})$. Allora:

1. $L(\mathcal{A})_X = L(\mathcal{A}_X)$,
2. $L(\mathcal{A})^X = L(\mathcal{A}^X)$,
3. Se $Y \in L$ e $X \leq Y$, allora $L((\mathcal{A}_Y)^X) = L(\mathcal{A}_Y)^X = [X, Y]$.

Si può visualizzare più facilmente il poset $L(\mathcal{A})$ di un arrangiamento \mathcal{A} tramite il suo diagramma di Hasse:

Definizione 1.19. Sia $L_p(\mathcal{A}) = \{X \in L(\mathcal{A}) \mid r(X) = p\}$. Il diagramma di Hasse di $L(\mathcal{A})$ ha vertici etichettati con gli elementi di $L(\mathcal{A})$ e disposti in livelli L_p con $p \geq 0$. Supponiamo $X \in L_p$ e $Y \in L_{p+1}$. Un lato nel diagramma di Hasse connette X e Y se $X \leq Y$.

Se \mathcal{A} è definito dal polinomio $Q(\mathcal{A})$, conviene a volte etichettare gli elementi di $L(\mathcal{A})$ con le loro equazioni. Nelle figure 1.2 e 1.3 vediamo qualche esempio di diagrammi di Hasse.

1.3 Funzione di Möbius

In questo paragrafo introduciamo la funzione di Möbius μ del poset $L(\mathcal{A})$. In seguito vediamo principalmente due risultati importanti: la formula di inversione e un teorema per determinare il segno di μ .

Definizione 1.20. Sia \mathcal{A} un arrangiamento e $L = L(\mathcal{A})$. Definiamo la funzione di Möbius $\mu_{\mathcal{A}} : L \times L \rightarrow \mathbb{Z}$ come segue:

- $\mu(X, X) = 1$ se $X \in L$,
- $\sum_{X \leq Z \leq Y} \mu(X, Z) = 0$ se $X, Y, Z \in L$ e $X < Y$,
- $\mu(X, Y) = 0$ in tutti gli altri casi.

Si noti che per X fissato i valori di $\mu(X, Y)$ si ottengono ricorsivamente da $\mu(X, Z)$ per $Z \in [X, Y)$. Segue l'unicità della funzione di Möbius.

Il primo risultato che vogliamo provare è la formula di inversione.

Lemma 1.21. Sia \mathcal{A} un arrangiamento e $L = L(\mathcal{A})$. Allora:

$$\sum_{X \leq Z \leq Y} \mu(Z, Y) = 0 \quad \text{se } X, Y \in L \text{ e } X < Y.$$

Dimostrazione. Scriviamo $L = \{X_1, \dots, X_l\}$ dove la numerazione è scelta in modo che se $X_i \leq X_j$ allora $i \leq j$. Sia A la matrice $r \times r$ tale che $(A)_{i,j} = \mu(X_i, X_j)$. Sia invece B la matrice $r \times r$ tale che $(B)_{i,j} = 1$ se $X_i \leq X_j$ e 0 altrimenti. Entrambe le matrici sono triangolari superiori e tutti i valori nelle diagonali sono 1. Segue dalla definizione di μ che $AB = I_r$, dove I_r è la matrice identità. Perciò $BA = Ir$, che implica l'enunciato. \square

Teorema 1.22 (Formula di inversione di Möbius). Siano f, g funzioni in $L(\mathcal{A})$ con valori in un gruppo abeliano. Allora:

$$g(Y) = \sum_{X \in L_Y} f(X) \iff f(Y) = \sum_{X \in L_Y} \mu(X, Y)g(X), \quad \forall Y \in L(\mathcal{A});$$

$$g(X) = \sum_{Y \in L^X} f(Y) \iff f(X) = \sum_{Y \in L^X} \mu(X, Y)g(Y), \quad \forall X \in L(\mathcal{A}).$$

Dimostrazione. Ognuna delle quattro implicazioni si dimostra usando le proprietà di μ date nella definizione e nel lemma precedente. Proviamo solo l'implicazione da sinistra a destra della prima formula, le altre si dimostrano in maniera simile.

$$\begin{aligned} \sum_{Z \in L_Y} \mu(Z, Y)g(Z) &= \sum_{Z \in L_Y} \mu(Z, Y) \sum_{X \in L_Z} f(X) \\ &= \sum_{X \in L_Y} \left(\sum_{X \leq Z \leq Y} \mu(Z, Y) \right) f(X) \\ &= f(Y) \end{aligned}$$

□

L'ultimo risultato importante che vogliamo provare in questo paragrafo è il seguente: se $X \leq Y$, il segno di $\mu(X, Y)$ dipende solo dal rango di X e Y .

Definizione 1.23. Per $X \in L$ definiamo $\mu(X) = \mu(V, X)$.

Per un arrangiamento centrale \mathcal{A} , poniamo $\mu(\mathcal{A}) = \mu(T(\mathcal{A}))$.

Chiaramente $\mu(V) = 1$, $\mu(H) = -1$ per ogni $H \in L$ e se $r(X) = 2$, allora $\mu(X) = |\mathcal{A}_X| - 1$. Questi sono i casi più semplici, non è possibile dare una formula generale per $\mu(X)$ che sia valida per tutti gli arrangiamenti.

Lemma 1.24. Sia \mathcal{A} un arrangiamento e $L = L(\mathcal{A})$. Supponiamo $Y \in L$ e $Y \neq V$. Allora per tutti gli elementi $Z \in L$

$$\sum_{X \vee Y = Z} \mu(V, X) = 0.$$

Dimostrazione. Si noti che $X \vee Y = Z$ implica $X \leq Z$, $Y \leq Z$ e $r(Z) \geq r(Y)$. Dimostriamo l'enunciato per induzione su $r(Z)$. Se $Z = Y$, allora la somma è $\sum_{X \leq Y} \mu(V, X) = 0$, poichè $Y \neq V$. Se $Z > Y$, allora

$$\begin{aligned} \sum_{X \vee Y = Z} \mu(V, X) &= \sum_{X \vee Y \leq Z} \mu(V, X) - \sum_{X \vee Y < Z} \mu(V, X) \\ &= \sum_{X \leq Z} \mu(V, X) - \sum_{W < Z} \left(\sum_{X \vee Y = W} \mu(V, X) \right). \end{aligned}$$

Il primo termine è zero per definizione, il secondo per ipotesi induttiva. □

Teorema 1.25. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento e $L = L(\mathcal{A})$. Consideriamo $X \in L, Y \in L$. Se $X \leq Y$, allora $\mu(X, Y) \neq 0$ e $\text{sign } \mu(X, Y) = (-1)^{r(X)-r(Y)}$.*

Dimostrazione. Poiché la funzione di Möbius del segmento $[X, Y]$ è la restrizione della funzione di Möbius $\mu_{\mathcal{A}}$, abbiamo $\mu(X, Y) = \mu((\mathcal{A}_Y)^X)$. Quindi è sufficiente dimostrare l'enunciato per una disposizione centrale \mathcal{A} e basta provare che $\mu(\mathcal{A}) \neq 0$ e $\text{sign} \mu(\mathcal{A}) = (-1)^{r(\mathcal{A})}$. Ragioniamo per induzione su $r(\mathcal{A})$. Se $r(\mathcal{A}) = 0$, il risultato è ovvio. Supponiamo $r(\mathcal{A}) \geq 1$. Scegliamo $H \in \mathcal{A}$ e applichiamo il Lemma 1.24 con $Y = H$ e $Z = T(\mathcal{A})$. Otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \mu(\mathcal{A}) + \sum_{X \in M} \mu(X) \\ &= \mu(\mathcal{A}) + \sum_{X \in M} \mu(\mathcal{A}_X) \end{aligned}$$

dove M è l'insieme di tutti gli elementi $X \in L$ tali che $X \neq T(\mathcal{A})$ ma $X \vee H = T(\mathcal{A})$. Se $X \in M$, allora:

$$\begin{aligned} r(\mathcal{A}) &= r(X \vee H) \\ &\leq r(X \vee H) + r(X \wedge H) \\ &\stackrel{(1.1)}{\leq} r(X) + r(H) \\ &= r(X) + 1 \end{aligned}$$

Perciò $r(X) = r(\mathcal{A}) - 1$ e quindi $r(\mathcal{A}_X) = r(\mathcal{A}) - 1$. Per induzione, $\mu(\mathcal{A}_X) \neq 0$ e $\text{sign} \mu(\mathcal{A}_X) = (-1)^{r(\mathcal{A}_X)} = (-1)^{r(\mathcal{A})-1}$. L'enunciato segue dall'equazione $\mu(\mathcal{A}) = -\sum_{X \in M} \mu(\mathcal{A}_X)$. \square

Osservazione 1.26. *Dal teorema precedente segue che per ogni $X \in L(\mathcal{A})$, $\mu(X) \neq 0$ e $\text{sign } \mu(X) = (-1)^{r(X)}$.*

1.4 Il polinomio di Poincaré

In questo paragrafo definiamo il polinomio di Poincaré e studiamo alcune delle sue proprietà.

Definizione 1.27. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento con poset delle intersezioni L e funzione di Möbius μ definiti come in precedenza. Sia t una variabile. Definiamo il polinomio di Poincaré di \mathcal{A} in questo modo:*

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \sum_{X \in L} \mu(X) (-t)^{r(X)}.$$

Segue dal Teorema 1.25 che $\pi(\mathcal{A}, t)$ ha tutti i coefficienti non negativi.

Prendiamo in considerazione alcuni esempi in cui è semplice calcolare $\pi(\mathcal{A}, t)$. Per $\mathcal{A} = \Phi_l$ arrangiamento vuoto, $\pi(\mathcal{A}, t) = 1$. Se \mathcal{A} è definita da $Q(\mathcal{A}) = xy(x + y)$, $\pi(\mathcal{A}, t) = 1 + 3t + 2t^2 = (1 + t)(1 + 2t)$. Se \mathcal{A} è definita da $Q(\mathcal{A}) = xy(x + y - 1)$, allora $\pi(\mathcal{A}, t) = 1 + 3t + 3t^2$. Il polinomio di Poincaré dell'arrangiamento Booleano \mathcal{B}_l è:

$$\pi(\mathcal{B}_l, t) = \sum_{p=0}^l \binom{l}{p} t^p = (1 + t)^l.$$

Se $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ è una tripla di arrangiamenti, è possibile calcolare $\pi(\mathcal{A}, t)$ partendo da $\pi(\mathcal{A}', t)$ e $\pi(\mathcal{A}'', t)$. Questo garantisce un metodo induttivo per calcolare $\pi(\mathcal{A}, t)$. Inoltre questo risultato è importante anche perché permette di calcolare il numero di camere di \mathcal{A} conoscendo $\pi(\mathcal{A}, t)$. Enunciamo ora due lemmi necessari a dimostrare il Teorema di Cancellazione-Restrizione. Il primo dei due è un'utile riformulazione di $\mu(X, Y)$.

Lemma 1.28. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento. Per $X, Y \in L$ con $X \leq Y$, sia $S(X, Y)$ l'insieme degli arrangiamenti centrali $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tali che $\mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{B}$ e $T(\mathcal{B}) = Y$. Allora:*

$$\mu(X, Y) = \sum_{\mathcal{B} \in S(X, Y)} (-1)^{|\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}_X|}. \quad (1.2)$$

Dimostrazione. Denotiamo $\nu(X, Y)$ il lato destro dell'equazione. Dobbiamo mostrare che ν rispetti le proprietà di definizione di μ . Notiamo che:

$$\bigcup_{X \leq Z \leq Y} S(X, Z) = \{\mathcal{B} \in \mathcal{A} \mid \mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_Y\}$$

dove l'unione è disgiunta. Quindi

$$\sum_{X \leq Z \leq Y} \nu(X, Z) = \sum_{\mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_Y} (-1)^{|\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}_X|} = \sum_{\mathcal{C}} (-1)^{|\mathcal{C}|},$$

dove \mathcal{C} è la famiglia di sottoinsiemi di $\mathcal{A}_Y \setminus \mathcal{A}_X$. Se $X = Y$, la sommatoria ha risultato 1. Se $X < Y$, allora \mathcal{A}_X è un sottoinsieme proprio di \mathcal{A}_Y , quindi il risultato della sommatoria è zero. \square

Dal Lemma 1.28 si ottiene una formula utile per calcolare $\pi(\mathcal{A}, t)$.

Lemma 1.29. *Sia \mathcal{A} un arrangiamento. Allora:*

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \sum_{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{|\mathcal{B}|} (-t)^{r(\mathcal{B})},$$

dove la sommatoria è indicizzata da tutti i sottoarrangiamenti centrali \mathcal{B} di \mathcal{A} .

Dimostrazione. Poniamo $S(X) = S(V, X)$. Dal Lemma 1.28 otteniamo:

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \sum_{X \in L} \mu(X)(-t)^{r(X)} = \sum_{X \in L} \left(\sum_{\mathcal{B} \in S(X)} (-1)^{|\mathcal{B}|} (-t)^{r(X)} \right).$$

Se $\mathcal{B} \in S(X)$, allora $T(\mathcal{B}) = X$, quindi $r(\mathcal{B}) = r(X)$. Il risultato segue dal fatto che ogni sottoarrangiamento centrale \mathcal{B} di \mathcal{A} compare in un solo $S(X)$. \square

Siamo ora pronti ad enunciare il Teorema di Cancellazione-Restrizione. Un risultato simile a quello che vedremo è stato dimostrato prima da Brylawski per arrangiamenti centrali, poi da Zaslavsky in generale.

Teorema 1.30 (Cancellazione-Restrizione). *Sia $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ una tripla di arrangiamenti, allora:*

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \pi(\mathcal{A}', t) + t\pi(\mathcal{A}'', t). \quad (1.3)$$

Dimostrazione. Usiamo la formula ottenuta nel Lemma 1.29. Denotiamo $H = H_0$ l'iperpiano distinto. Separiamo la somma su $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ in due somme: R' e R'' , dove R' è la somma sui \mathcal{B} che non contengono H e R'' è la somma sui \mathcal{B} che contengono H . Segue dal Lemma 1.29 con \mathcal{A}' al posto di \mathcal{A} che

$$R' = \pi(\mathcal{A}', t).$$

Prendiamo in considerazione $S(X, Y)$ definito come nel Lemma 1.28. Poiché $H \in \mathcal{B}$, $\mathcal{A}_H \subseteq \mathcal{B}$. Allora se $T(\mathcal{B}) = Y$, $\mathcal{B} \in S(H, Y)$. Poniamo $L'' = L(\mathcal{A}'')$. Allora

$$\begin{aligned} R'' &= \sum_{H \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{|\mathcal{B}|} (-t)^{r(\mathcal{B})} \\ &= \sum_{Y \in L''} \sum_{\mathcal{B} \in S(H, Y)} (-1)^{|\mathcal{B}|} (-t)^{r(Y)} \\ &= - \sum_{Y \in L''} \sum_{\mathcal{B} \in S(H, Y)} (-1)^{|\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}_H|} (-t)^{r(Y)} \\ &\stackrel{(1.2)}{=} - \sum_{Y \in L''} \mu(H, Y) (-t)^{r(Y)} \\ &= t\pi(\mathcal{A}'', t). \end{aligned}$$

L'uguaglianza tra la seconda e la terza riga vale perché $|\mathcal{A}_H| = 1$. L'ultima uguaglianza si ottiene poiché la funzione di Möbius μ'' di L'' è la restrizione di μ a L'' , quindi $\mu''(Y) = \mu(H, Y)$; inoltre la funzione rango r'' di L'' soddisfa $r(Y) = r''(Y) + 1$. \square

Definiamo ora un altro polinomio associato ad un arrangiamento \mathcal{A} , che si calcola a partire da $\pi(\mathcal{A}, t)$.

Definizione 1.31. *Definiamo il polinomio caratteristico di \mathcal{A} in questo modo:*

$$\chi(\mathcal{A}, t) = t^l \pi(\mathcal{A}, -t^{-1}) = \sum_{X \in \mathcal{L}} \mu(X) t^{\dim(X)}.$$

Si noti che $\chi(\mathcal{A}, t)$ è un polinomio monico di grado l . È evidente che viceversa si può calcolare facilmente $\pi(\mathcal{A}, t)$ sapendo $\chi(\mathcal{A}, t)$. Vedremo nel prossimo capitolo l'importanza del polinomio caratteristico nello studio di colorazioni di grafi. Enunciamo ora il Teorema di Cancellazione-Restrizione per il polinomio caratteristico.

Corollario 1.32. *Sia $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ una tripla di arrangiamenti, allora:*

$$\chi(\mathcal{A}, t) = \chi(\mathcal{A}', t) - \chi(\mathcal{A}'', t). \quad (1.4)$$

Dimostrazione. Poniamo $c = -t^{-1}$, cioè

$$t^l = (-1)^l (-t)^l = (-1)^l (-t^{-1})^{-l} = (-1)^l c^{-l} = (-c)^{-l}.$$

In questo modo possiamo utilizzare la formula del Teorema 1.30.

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{A}', t) - \chi(\mathcal{A}'', t) &= t^l \pi(\mathcal{A}', -t^{-1}) - t^{l-1} \pi(\mathcal{A}'', -t^{-1}) \\ &= (-1)^l c^{-l} \pi(\mathcal{A}', c) - (-1)^{l-1} c^{1-l} \pi(\mathcal{A}'', c) \\ &= (-1)^l c^{-l} [\pi(\mathcal{A}', c) + c \pi(\mathcal{A}'', c)] \\ &\stackrel{(1.3)}{=} (-c)^{-l} \pi(\mathcal{A}, c) \\ &= t^l \pi(\mathcal{A}, -t^{-1}) \\ &= \chi(\mathcal{A}, t). \end{aligned}$$

□

L'ultimo teorema di questo capitolo mostra come il Polinomio di Poincaré sia una funzione che permette di contare il numero di camere di un arrangiamento reale \mathcal{A} . Ricordiamo che il complemento $M(\mathcal{A})$ è un'unione disgiunta di camere

$$M(\mathcal{A}) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{A})} C.$$

Zaslavsky ha mostrato che il numero di camere è determinato dal polinomio di Poincaré come segue:

Teorema 1.33 (Zaslavsky). *Sia \mathcal{A} un arrangiamento reale. Allora*

$$|\mathcal{C}(\mathcal{A})| = \pi(\mathcal{A}, 1). \quad (1.5)$$

Dimostrazione. Se \mathcal{A} è vuoto, allora $|\mathcal{C}(\mathcal{A})| = 1 = \pi(\mathcal{A}, 1)$. Dal Teorema 1.30 segue che $\pi(\mathcal{A}, 1) = \pi(\mathcal{A}', 1) + \pi(\mathcal{A}'', 1)$. Se dimostriamo che

$$|\mathcal{C}(\mathcal{A})| = |\mathcal{C}(\mathcal{A}')| + |\mathcal{C}(\mathcal{A}''|),$$

il risultato è dimostrato per induzione. Chiamiamo P l'insieme delle camere di $\mathcal{C}(\mathcal{A}')$ che intersecano l'iperpiano distinto H , Q l'insieme delle camere di $\mathcal{C}(\mathcal{A}')$ che non intersecano H . Ovviamente $|\mathcal{C}(\mathcal{A}')| = |P| + |Q|$. L'iperpiano H divide ogni camera di P in due camere di $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ e lascia le camere di Q invariate. Perciò $|\mathcal{C}(\mathcal{A})| = 2|P| + |Q|$. Infine osserviamo che c'è una corrispondenza biunivoca tra P e $\mathcal{C}(\mathcal{A}'')$ data da $C \mapsto C \cap H$, quindi $|\mathcal{C}(\mathcal{A}'')| = |P|$. \square

Osserviamo che il Teorema 1.33 vale in alcuni semplici esempi che abbiamo già visto. Se \mathcal{A} è definito da $Q(\mathcal{A}) = xy(x + y)$, $\pi(\mathcal{A}, t) = 2t^2 + 3t + 1$, perciò $|\mathcal{C}(\mathcal{A})| = 6$. Effettivamente tre rette che passano dall'origine dividono il piano in 6 "spicchi". Invece se \mathcal{A} è l'arrangiamento definito da $Q(\mathcal{A}) = xy(x + y - 1)$, $\pi(\mathcal{A}, t) = 3t^2 + 3t + 1$, perciò $|\mathcal{C}(\mathcal{A})| = 7$. Infatti se la terza retta non contiene l'intersezione delle prime due, c'è una settima camera limitata triangolare che ha come vertici le intersezioni tra due delle tre rette dell'arrangiamento, come si vede in Figura 1.1.

Capitolo 2

Colorazioni di Grafi

2.1 Arrangiamenti Grafici e Polinomio Cromatico

Introduciamo alcune nozioni sui grafi, poi studiamo come questi si collegano agli arrangiamenti di iperpiani.

Definizione 2.1. *Un grafo $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ finito, semplice e non orientato è una coppia ordinata che consiste nell'insieme finito di vertici \mathcal{V} e l'insieme di lati \mathcal{E} , che è una collezione di sottoinsiemi T di \mathcal{V} tali che $|T| = 2$ per ogni $T \in \mathcal{E}$.*

In questo elaborato ogni grafo che prendiamo in considerazione è finito e semplice. Spesso conviene numerare i vertici del grafo, perciò poniamo $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, l\}$. Sia $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ l'insieme delle parti di \mathcal{V} . Poniamo $\mathcal{P}_2(\mathcal{V}) = \{T \in \mathcal{P}(\mathcal{V}) \mid |T| = 2\}$. Ovviamente

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathcal{V}). \quad (2.1)$$

Se vale l'uguaglianza in (2.1) diremo che il grafo è completo. In seguito denotiamo K_n il grafo completo con n vertici.

Definizione 2.2. *Sia $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un grafo. Un sottografo di G è una coppia $(\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ con $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ e $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E} \cap \mathcal{P}_2(\mathcal{V}')$.*

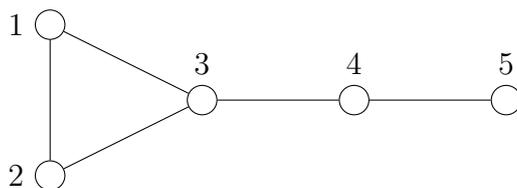


Figura 2.1: *Un grafo G finito semplice non orientato.*

Esempio 2.3. Consideriamo il grafo G mostrato in Figura 2.1. $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ con $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$. $H = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ con $\mathcal{V}' = \{1, 3, 4, 5\}$ e $\mathcal{E}' = \{\{1, 3\}, \{4, 5\}\}$ è un esempio di sottografo di G .

Ora definiamo un modo per associare ad ogni grafo un arrangiamento di iperpiani:

Definizione 2.4. Sia \mathbb{K} un campo e $V = \mathbb{K}^l$. Sia x_1, \dots, x_l una base per lo spazio duale V^* . Dato il grafo $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, definiamo un arrangiamento $\mathcal{A}(G)$ in questo modo:

$$\mathcal{A}(G) = \{\ker(x_i - x_j) \mid \{i, j\} \in \mathcal{E}\}.$$

$\mathcal{A}(G)$ si dice *arrangiamento grafico*.

Osservazione 2.5. È facile osservare che ad ogni grafo corrisponde un arrangiamento di iperpiani, ma molti arrangiamenti non corrispondono a nessun grafo. Infatti ad esempio è evidente che nessun 2-arrangiamento \mathcal{A} tale che $|\mathcal{A}| \geq 2$ è grafico. Più in generale dato un generico l -arrangiamento $\mathcal{A}(G)$ grafico, $|\mathcal{A}(G)| \leq \binom{l}{2}$, cioè la cardinalità dell'arrangiamento è sempre minore o uguale del numero massimo di lati di un grafo semplice con n vertici.

Siamo interessati a studiare il problema della colorazione dei grafi.

Definizione 2.6. Sia C un insieme finito di cardinalità n . Sia $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un grafo. Una colorazione di G tramite C è una mappa $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow C$ tale che $\varphi(i) \neq \varphi(j)$ se $\{i, j\} \in \mathcal{E}$.

Abbiamo definito in maniera formale una colorazione di un grafo con n colori.

Esempio 2.7. Consideriamo di nuovo il grafo G nella Figura 2.1 e $C = \{a, b, c\}$, allora la mappa $\varphi : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{a, b, c\}$ definita da $\varphi(1) = a$, $\varphi(2) = b$, $\varphi(3) = c$, $\varphi(4) = a$, $\varphi(5) = c$ è una colorazione di G . La mappa ψ tale che $\psi(1) = b$ e definita sugli altri vertici come φ non è una colorazione.

Definizione 2.8. Sia $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un grafo. La funzione cromatica $\chi(G, t)$ è una funzione definita sull'insieme degli interi non negativi in questo modo:

$$\chi(G, t) = \text{numero di colorazioni di } G \text{ con } t \text{ colori.}$$

In seguito dimostreremo che se G è un grafo con $|\mathcal{V}| = l$, la funzione cromatica è un polinomio monico di grado l . Perciò chiamiamo la funzione cromatica polinomio cromatico.

Definizione 2.9. Sia G un grafo. Definiamo il numero cromatico $k(G)$ l'unico numero naturale che rispetta le seguenti proprietà: $\chi(G, k(G)) \neq 0$ e $\chi(G, c) = 0$ per ogni $c < k(G)$, $c \in \mathbb{N}$.

Il numero cromatico indica il numero minimo di colori necessari affinché esista una colorazione del grafo G .

Osservazione 2.10. Osserviamo che per ogni numero naturale c tale che $c < k(G)$, $(t - c) \mid \chi(G, t)$. Invece $(t - k(G)) \nmid \chi(G, t)$. Perciò dato $\chi(G, t)$ scomposto in fattori primi (in \mathbb{Z}), si deduce immediatamente $k(G)$. Poiché per ogni grafo G , $k(G) > 0$, allora $t \mid \chi(G, t)$. Cioè il termine noto di ogni polinomio cromatico è nullo. Inoltre osserviamo che se H è un sottografo di G e $k(H) = c$, allora $k(G) \geq c$.

Definizione 2.11. Siano $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, $H = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ due grafi. Diciamo che G e H sono isomorfi e scriviamo $G \cong H$ se esiste una funzione biunivoca $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ tale che $\{\varphi(i), \varphi(j)\}$ è un lato di H se e solo se $\{i, j\}$ è un lato di G .

È evidente che se G e H sono isomorfi, $\chi(G, t) = \chi(H, t)$.

Definizione 2.12. Sia $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un grafo con n vertici. G si dice connesso se per ogni $\{i, j\} \in \mathcal{P}(\mathcal{V})$ esiste una successione di vertici i, \dots, j tale che se c, d sono elementi adiacenti della successione, allora $\{c, d\} \in \mathcal{E}$.

Definizione 2.13. Sia $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un grafo con n vertici e $i \in \mathcal{V}$ un vertice. La componente connessa di G che contiene i è il sottografo G_i di G ottenuto includendo i vertici j di G tali che vale la proprietà di connessione descritta nella Definizione 2.12 per $\{i, j\}$. Poniamo \mathcal{V}_i l'insieme di questi vertici. I lati del grafo G_i sono $\mathcal{E}_i = \{\{p, q\} \in \mathcal{E} \mid p, q \in \mathcal{V}_i\}$.

Osservazione 2.14. Sia G un grafo e G_1, \dots, G_p le sue componenti connesse. Allora:

$$\prod_{i=1}^p \chi(G_i, t). \quad (2.2)$$

Infatti le limitazioni sulle colorazioni di un grafo sono date solo dai lati, quindi componenti connesse differenti non si influenzano tra loro. Da questo segue che se G ha p componenti connesse, allora $t^p \mid \chi(G, t)$.

Inoltre se G ha una componente connessa G_1 costituita da un solo vertice consideriamo H il grafo costituito dall'unione disgiunta delle altre componenti connesse di G . Allora:

$$\chi(G, t) \stackrel{(2.2)}{=} \chi(G_1, t)\chi(H, t) = t\chi(H, t) \quad (2.3)$$

Definizione 2.15. *Un grafo si dice planare se può essere disegnato su un piano (o equivalentemente su una sfera) in modo che i lati non si incrocino tra loro.*

Prendendo in considerazione le definizioni precedenti il famoso teorema dei quattro colori, enunciato per la prima volta come congettura da Francis Guthrie nel 1852 e dimostrato tra il 1976 e 1989 da Appel e Haken, si può scrivere in questo modo:

Teorema 2.16 (Quattro colori). *Sia G un grafo planare. Allora*

$$\chi(G, 4) > 0.$$

Oppure equivalentemente $k(G) \leq 4$.

Di seguito ci sono alcuni esempi di grafi e il calcolo (semplice) dei rispettivi polinomi cromatici:

Esempio 2.17. *Se un grafo G ha l vertici e nessun lato, allora non ci sono restrizioni per la sua colorazione.*

$$\chi(G, t) = t^l$$

Questo grafo non è connesso, ha l componenti connesse G_i , $\chi(G_i, t) = t$ per ogni i .

Esempio 2.18. *Sia K_n il grafo completo con n vertici. Si vede facilmente che tutti i vertici devono avere colori differenti.*

$$\chi(K_n, t) = t(t-1) \dots (t-l+1). \quad (2.4)$$

Osserviamo che i grafi completi con quattro o meno vertici sono planari, quelli con cinque o più no.

2.2 Cancellazione-Restrizione

In alcuni casi non è così semplice stabilire il polinomio cromatico. Perciò introduciamo in metodo di cancellazione e restrizione per il calcolo del polinomio. In seguito stabiliremo la corrispondenza di questo metodo con quello analogo per gli arrangiamenti di iperipiani. Per prima cosa spieghiamo cosa significa la cancellazione e la restrizione su un grafo:

Definizione 2.19. *Sia $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, l\}$ e $\mathcal{E} \neq \emptyset$. Fissiamo un lato $e_0 = \{i, j\} \in \mathcal{E}$. La cancellazione $G' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ di G rispetto a e_0 è il sottografo definito da*

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V}, \quad \mathcal{E}' = \mathcal{E} \setminus \{e_0\}.$$

La contrazione G'' di G rispetto a e_0 è il grafo $G'' = (\mathcal{V}'', \mathcal{E}'')$, dove \mathcal{V}'' è l'insieme di cardinalità $l-1$ ottenuto identificando i e j in \mathcal{V} . Scriviamo $\mathcal{V}'' = \{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{l}\}$ dove $\bar{p} = \bar{q}$ se e solo se $p = q$ oppure $\{p, q\} = \{i, j\}$. Definiamo \mathcal{E}'' in questo modo:

$$\mathcal{E}'' = \{\{\bar{p}, \bar{q}\} \mid \{p, q\} \in \mathcal{E}'\}.$$

Ora introduciamo una proposizione importante sia dal punto di vista teorico, sia per effettuare calcoli espliciti del polinomio cromatico. Da un grafo complesso ci riconduciamo ad altri più semplici tramite cancellazione e restrizione.

Proposizione 2.20. *Sia $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un grafo con $\mathcal{E} \neq \emptyset$ e siano G' e G'' rispettivamente la cancellazione e la restrizione di G rispetto al lato e_0 . Allora:*

$$\chi(G', t) = \chi(G, t) + \chi(G'', t). \quad (2.5)$$

Dimostrazione. Supponiamo $e_0 = \{1, 2\}$. Ogni colorazione di G è anche una colorazione di G' . Quindi esiste una funzione iniettiva dall'insieme di tutte le colorazioni di G all'insieme di tutte le colorazioni di G' . Il complementare dell'immagine è esattamente uguale all'insieme delle colorazioni φ di G' tali che $\varphi(1) = \varphi(2)$. Questo insieme è in corrispondenza biunivoca con l'insieme di tutte le colorazioni di G'' . \square

Utilizzando la Proposizione 2.20 possiamo dimostrare un risultato enunciato nel paragrafo precedente.

Corollario 2.21. *Sia G un grafo con l vertici. Allora la funzione cromatica $\chi(G, t)$ è un polinomio monico in t di grado l .*

Dimostrazione. Dimostriamo questo enunciato per induzione sul numero di lati. Se non ci sono lati, $\chi(G, t) = t^l$. Supponiamo che G abbia almeno un lato. Ne fissiamo uno e lo chiamiamo e_0 . Consideriamo la cancellazione G' e la contrazione G'' rispetto a e_0 . Per ipotesi induttiva, $\chi(G', t)$ è un polinomio monico di grado l e $\chi(G'', t)$ è un polinomio di grado minore di l . Il risultato segue dalla Proposizione 2.20. \square

Abbiamo visto che le costruzioni di cancellazione G' e restrizione G'' su un grafo G sono molto utili. Studiamo gli arrangiamenti grafici corrispondenti $\mathcal{A}(G')$ e $\mathcal{A}(G'')$.

Proposizione 2.22. *Sia G un grafo e e_0 un lato di G . Siano G' e G'' la cancellazione e la restrizione di G rispetto a e_0 . Sia $H_0 \in \mathcal{A}(G)$ l'iperpiano corrispondente a e_0 . Scriviamo $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G)$. Denotiamo \mathcal{A}' e \mathcal{A}'' la cancellazione e la restrizione di \mathcal{A} rispetto a H_0 . Allora $\mathcal{A}(G') = \mathcal{A}'$ e $\mathcal{A}(G'') = \mathcal{A}''$.*

Dimostrazione. Assumiamo $e_0 = \{1, 2\}$. Allora $H_0 = \ker(x_1 - x_2)$. Chiaramente

$$\mathcal{A}(G') = \mathcal{A}(G) \setminus \{H_0\} = \mathcal{A}'$$

Denotiamo l'insieme dei vertici di G'' con $\{\bar{1} = \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{l}\}$. Scriviamo la base corrispondente per \mathbb{K}^{n-1} come $\bar{x}_1 = \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_l$. È naturalmente identificata con una base dello spazio duale H_0^* di H_0 . Otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(G'') &= \{\ker(\bar{x}_i - \bar{x}_j) \mid \{\bar{i}, \bar{j}\} \in \mathcal{E}''\} \\ &= \{\ker(\bar{x}_i - \bar{x}_j) \mid \{i, j\} \in \mathcal{E}'\} \\ &= \{\ker(\bar{x}_i - \bar{x}_j) \mid \ker(x_i - x_j) \in \mathcal{A}'\} \\ &= \mathcal{A}''. \end{aligned}$$

□

Abbiamo denotato χ sia il polinomio cromatico di un grafo G , sia il polinomio caratteristico dell'arrangiamento di iperpiani corrispondente $\mathcal{A}(G)$. Vogliamo ora dimostrare che questi due polinomi sono uguali.

Teorema 2.23. *Sia G un grafo e $\mathcal{A}(G)$ l'arrangiamento grafico corrispondente. Allora*

$$\chi(G, t) = \chi(\mathcal{A}(G), t). \quad (2.6)$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione sul numero di lati di G . L'uguaglianza vale se G non ha lati: $\chi(G, t) = t^l = \chi(\mathcal{A}(G), t)$. Il risultato segue da

$$\begin{aligned} \chi(G, t) &\stackrel{(2.5)}{=} \chi(G', t) - \chi(G'', t) \\ &= \chi(\mathcal{A}(G'), t) - \chi(\mathcal{A}(G''), t) \\ &= \chi(\mathcal{A}', t) - \chi(\mathcal{A}'', t) \\ &\stackrel{(1.4)}{=} \chi(\mathcal{A}, t), \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza tra la prima e la seconda riga vale per ipotesi induttiva, quella tra la seconda e la terza riga segue dalla Proposizione 2.22. □

Osservazione 2.24. *Abbiamo dimostrato che dato un grafo $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ con $|\mathcal{V}| = l$, il suo polinomio cromatico $\chi(G, t)$ è il polinomio caratteristico di un l -arrangiamento di iperpiani $\mathcal{A}(G)$. Perciò $\chi(G, t)$ ha le seguenti due proprietà, che seguono dalle definizioni di $\mathcal{A}(G)$ e di $\chi(\mathcal{A}(G), t)$.*

1. I coefficienti di $\chi(G, t)$ sono in maniera alternata positivi e negativi.

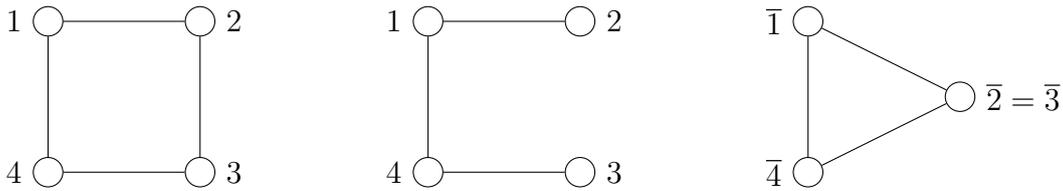


Figura 2.2: Cancellazione-restrizione su Q .

2. Il coefficiente di t^{n-1} è $-|\mathcal{E}|$.

Mostriamo un esempio di applicazione della Proposizione 2.20.

Esempio 2.25. Calcoliamo il polinomio cromatico del grafo Q a sinistra nella Figura 2.2. Poniamo $e_0 = \{2, 3\}$. La cancellazione Q' e la restrizione Q'' sono gli altri due grafi nella Figura 2.2.

$$\begin{aligned} \chi(Q, t) &\stackrel{(2.5)}{=} \chi(Q', t) - \chi(Q'', t) \\ &= t(t-1)^3 - t(t-1)(t-2) \\ &= t(t-1)(t^2 - 3t + 3). \end{aligned}$$

Possiamo intuire (e in seguito vedere esplicitamente in alcuni esempi) che il calcolo del polinomio cromatico di un grafo tramite la formula di cancellazione-restrizione (Proposizione 2.20) possa risultare un'operazione lunga e computazionalmente complessa. Vediamo nel dettaglio quanto lo sia effettivamente. Denotiamo $F(E)$ il massimo costo per il calcolo del polinomio cromatico di un grafo con al più E lati. Se $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ è un grafo con $|\mathcal{E}| = E$, la cancellazione G' rispetto ad uno dei lati di G è un grafo con $E - 1$ lati. La restrizione G'' ha al massimo $E - 1$ lati. Consideriamo anche il costo necessario a generare la lista dei lati di G'' , lineare in E . Perciò otteniamo

$$F(E) \leq 2F(E - 1) + E \quad (F(0) = 1).$$

Abbiamo mostrato che il polinomio cromatico di un grafo può essere calcolato ricorsivamente tramite un'algoritmo che ha costo $O(2^E)$. Ovviamente, nella maggior parte dei casi questa stima è molto pessimistica. Tuttavia ci sono dei casi in cui è esatta. Come esempio di questo basta pensare al grafo T_n , il grafo con $n + 1$ vertici allineati e n lati che collegano i vertici adiacenti. La cancellazione e la restrizione di T_n sono entrambe grafi con $n - 1$ lati. Quindi in questo caso il calcolo di $\chi(T_n, t)$ costa il doppio di quello di $\chi(T_{n-1}, t)$. Effettuiamo un altro calcolo del costo computazionale: in questo caso non più in funzione del numero dei lati, ma della somma del numero di vertici e lati. Poniamo

$$\gamma(G) = |\mathcal{V}| + |\mathcal{E}|.$$

Osserviamo che

$$\gamma(G') = \gamma(G) - 1;$$

$$\gamma(G'') \leq \gamma(G) - 2.$$

Denotiamo $h(t)$ il costo massimo per grafi H con $\gamma(H) \leq t$.

$$h(G) \leq h(G') + h(G'') \quad (\gamma(G) > 2)$$

Con le condizioni iniziali $h(0) = h(1) = 1$ questa ricorrenza ha come soluzione $h(\gamma) \leq F_\gamma$, con F_γ uguale al γ -esimo numero di Fibonacci. In questo caso il risultato che abbiamo ottenuto per il costo computazionale è

$$\begin{aligned} O(F_{\gamma(G)}) &= O\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{\gamma(G)}\right) \\ &= O(1.62^{\gamma(G)}). \end{aligned}$$

Questo secondo risultato contraddice il precedente, ma lo completa. Complessivamente, in base a quanto abbiamo visto, il costo computazionale risulta essere

$$O\left(\min(2^E, 1.62^{\gamma(G)})\right).$$

Nel caso G abbia pochi lati, la prima delle due formule fornisce un risultato minore (ad esempio se $|\mathcal{E}| = |\mathcal{V}|$). In caso contrario quando G ha molti lati la seconda formula dà un risultato minore. In seguito a questa analisi possiamo affermare che calcolare il polinomio cromatico di grafi in questo modo può essere una procedura molto lenta.

2.3 Riduzione Cromatica

Come abbiamo appena visto, se un grafo ha molti vertici e lati può risultare troppo lungo calcolare il polinomio cromatico con la formula di cancellazione-restrizione visti nella Proposizione 2.20. Siamo interessati a cercare un modo per calcolare il polinomio cromatico di un grafo riconducendoci al calcolo su alcuni sottografi.

Definizione 2.26. *Siano G, H due grafi e G_1, H_1 due sottografi rispettivamente di G e H tali che $G_1 \cong H_1$ e sia φ un isomorfismo tra G_1 e H_1 . Definiamo la sovrapposizione di G e H tramite φ il grafo*

$$GH = G \sqcup H / \sim,$$

Dove \sim è la relazione di equivalenza che identifica i vertici di G_1 con le loro immagini tramite φ in H_1 e i lati corrispondenti dei due sottografi.

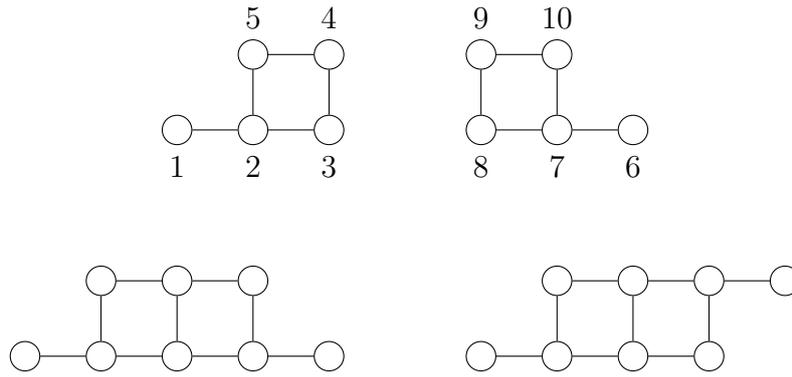


Figura 2.3: Sovrapposizioni non isomorfe di G e H in K_2 .

Se T è un grafo tale che $G_1 \cong H_1 \cong T$, diremo più semplicemente che GH è una sovrapposizione di G e H in T .

Osservazione 2.27. *La struttura di GH non dipende solo dalla scelta dei sottografi G_1, H_1 da identificare ma anche dalla scelta dell'isomorfismo tra i due sottografi. Consideriamo i grafi nella Figura 2.3. Sia G il grafo con i vertici numerati da 1 a 5, H il grafo con i vertici da 6 a 10. Consideriamo i sottografi $G_1 = (\mathcal{V}_{G_1}, \mathcal{E}_{G_1})$ con $\mathcal{V}_{G_1} = \{3, 4\}$, $\mathcal{E}_{G_1} = \{\{3, 4\}\}$ e $H_1 = (\mathcal{V}_{H_1}, \mathcal{E}_{H_1})$ con $\mathcal{V}_{H_1} = \{8, 9\}$, $\mathcal{E}_{H_1} = \{\{8, 9\}\}$. Osserviamo che $G_1 \cong H_1 \cong K_2$. Poniamo φ l'isomorfismo tra G_1 e H_1 tale che $\varphi(3) = 8$ e $\varphi(4) = 9$ e ψ l'isomorfismo $\psi(3) = 9$, $\psi(4) = 8$. Allora le sovrapposizioni di G e H tramite φ, ψ sono rispettivamente i grafi in basso a sinistra e in basso a destra in Figura 2.3 e non sono isomorfi tra loro.*

Enunciamo il Teorema di Riduzione Cromatica, che permette di calcolare il polinomio cromatico della sovrapposizione di grafi in sottografi completi K_n .

Teorema 2.28 (Riduzione Cromatica). *Siano G, H due grafi e GH una sovrapposizione di G e H in un sottografo completo K_n . Allora:*

$$\chi(GH, t) = \frac{\chi(G, t)\chi(H, t)}{\chi(K_n, t)}. \tag{2.7}$$

Dimostrazione. Dalla definizione 2.26 sappiamo che $GH = G \sqcup H / \sim$. Osserviamo che le colorazioni di GH corrispondono alle colorazioni di $G \sqcup H$ che assumono gli stessi valori sui due sottografi completi identificati di G e H . Perciò

$$\chi(GH, t) = \frac{\chi(G \sqcup H, t)}{\chi(K_n, t)} \stackrel{(2.2)}{=} \frac{\chi(G, t)\chi(H, t)}{\chi(K_n, t)}.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

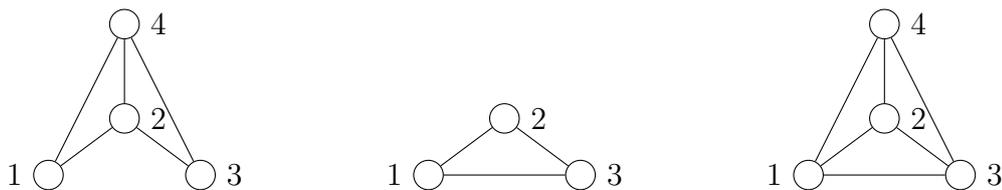


Figura 2.4: Sovrapposizione in un grafo non completo.

Osservazione 2.29. L'ipotesi del Teorema 2.28 che impone la sovrapposizione su un grafo completo non è rimovibile. Consideriamo i grafi in Figura 2.4. Sia G il grafo a sinistra, H quello al centro e GH la loro sovrapposizione ottenuta identificando i vertici con lo stesso numero di G e H e i lati corrispondenti. La sovrapposizione GH è il grafo a destra della Figura 2.4. Poniamo T il sottografo di GH dove G e H si sovrappongono e notiamo che T non è un grafo completo. Osserviamo che $H \cong K_3$, $GH \cong K_4$. Il sottografo T è ottenuto dalla sovrapposizione di due copie di K_2 in un K_1 , quindi per il Teorema 2.28 $\chi(T, t) = t(t-1)^2$. Allo stesso modo il grafo G è ottenuto dalla sovrapposizione di due copie di K_3 in un K_2 , quindi $\chi(G, t) = t(t-1)(t-2)^2$. Se valesse un risultato simile a quello del Teorema 2.28 per sovrapposizioni di grafi non completi otteniamo

$$\begin{aligned} t(t-1)(t-2)(t-3) &\stackrel{(2.4)}{=} \chi(K_4, t) = \frac{\chi(G, t)\chi(K_3, t)}{\chi(T, t)} \\ &= \frac{t(t-1)(t-2)^2 t(t-1)(t-2)}{t(t-1)^2} \\ &= t(t-2)^3. \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto una contraddizione, dovuta al fatto che in G i due vertici in basso non sono collegati da un lato, mentre in GH lo sono. Questo non può avvenire se la sovrapposizione avviene in un grafo completo, dove tutte le coppie di vertici sono collegate da un lato.

Vediamo ora due casi importanti in cui l'applicazione del Teorema 2.28 permette di calcolare il polinomio cromatico di un grafo (anche con molti vertici) rimuovendone uno alla volta. Questo metodo trova applicazioni molto concrete nel calcolo delle colorazioni delle mappe, come vedremo nel prossimo capitolo.

Osservazione 2.30. Sia $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ e $i \in \mathcal{V}$. Consideriamo il grafo $H = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ con $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \setminus \{i\}$, $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cap \mathcal{P}_2(\mathcal{V}')$.

1. Se il vertice i ha un solo lato

$$\chi(G, t) = (t-1)\chi(H, t). \quad (2.8)$$

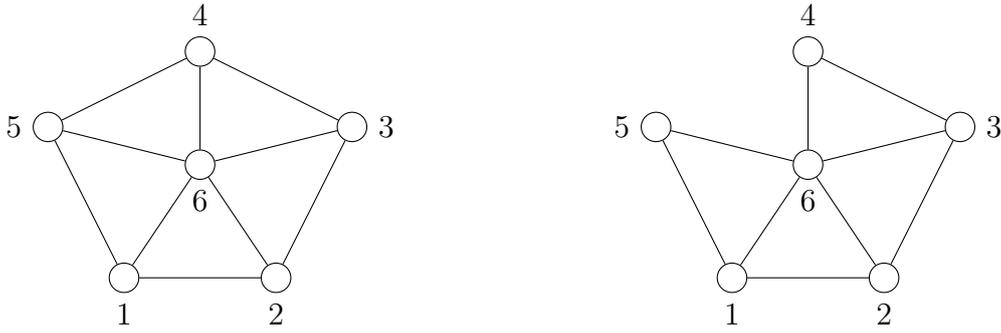


Figura 2.5: I grafi W_6 e W'_6 .

2. Se il vertice i ha esattamente due lati $\{i, j\}$ e $\{i, k\}$ ed esiste il lato $\{j, k\} \in \mathcal{E}$, allora

$$\chi(G, t) = (t - 2)\chi(H, t). \quad (2.9)$$

Sono entrambe semplici applicazioni del Teorema 2.28. Nel primo caso G è una sovrapposizione di K_2 e H in K_1 , nel secondo G è una sovrapposizione di K_3 e H in K_2 .

Concludiamo il paragrafo con un altro esempio di calcolo del polinomio cromatico dove utilizziamo i risultati mostrati in precedenza.

Esempio 2.31. Sia $n \geq 4$. Consideriamo i grafi $W_n = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$ e $\mathcal{E} = \{\{i, i + 1\}, \{1, n - 1\}, \{i, n\}, \{n - 1, n\}\}$, per ogni i da 1 a $n - 2$ e $W'_n = (\mathcal{V}, \mathcal{E}')$, $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \setminus \{\{n - 2, n - 1\}\}$, ovvero la cancellazione di W_n rispetto al lato $\{n - 2, n - 1\}$. In Figura 2.5 possiamo osservare la struttura dei grafi W_6 e W'_6 . È facile notare che $k(W'_n) = 3$. Invece $k(W_n)$ dipende da n : $k(W_n) = 3$ se n è dispari, $k(W_n) = 4$ se n è pari. Utilizzando ripetutamente l'uguaglianza (2.9) otteniamo

$$\chi(W'_n, t) = t(t - 1)(t - 2)^{n-2}. \quad (2.10)$$

Dimostriamo che per ogni $n \geq 4$ vale

$$\chi(W_n, t) = t[(t - 2)^{n-1} + (-1)^{n-1}(t - 2)]. \quad (2.11)$$

Procediamo per induzione sul numero di lati n . Analizziamo il caso $n = 4$ e osserviamo che $W_4 \cong K_4$. Perciò $\chi(W_4, t) = \chi(K_4, t)$.

$$\begin{aligned} \chi(W_4, t) &= \chi(K_4, t) \stackrel{(2.4)}{=} t(t - 1)(t - 2)(t - 3) \\ &= t(t - 2)[(t - 2)^2 - 1] \\ &= t[(t - 2)^3 - (t - 2)] \end{aligned}$$

Assumiamo che l'uguaglianza 2.11 valga per n , vediamo che vale anche per $n+1$. Per fare questo applichiamo il Teorema 2.20 su W_{n+1} rispetto al lato $\{n-2, n-1\}$. Ovviamente la cancellazione è W'_{n+1} . La restrizione è isomorfa a W_n , di cui sappiamo il polinomio cromatico per ipotesi induttiva.

$$\begin{aligned} \chi(W_{n+1}, t) &\stackrel{(2.5)}{=} \chi(W'_{n+1}, t) - \chi(W_n, t) \\ &\stackrel{(2.10)}{=} t(t-1)(t-2)^{n-1} - t[(t-2)^{n-1} + (-1)^{n-1}(t-2)] \\ &= t[(t-2)^n + (-1)^n(t-2)] \end{aligned}$$

Scriviamo esplicitamente $\chi(W_n, t)$ per $n = 5$ e $n = 6$ e osserviamo che i numeri cromatici sono $k(W_5) = 3$ e $k(W_6) = 4$, come suggerito in precedenza.

$$\chi(W_5, t) = t(t-1)(t-2)(t^2 - 5t + 7) \quad (2.12)$$

$$\chi(W_6, t) = t(t-1)(t-2)(t-3)(t^2 - 4t + 5) \quad (2.13)$$

2.4 Log-Concavit  di $\chi(G, t)$

Abbiamo visto negli altri paragrafi numerose propriet  del polinomio cromatico di un grafo. In questo apriamo una breve digressione per analizzarne un'altra, difficile da osservare e molto pi  difficile da dimostrare.

Definizione 2.32. Una sequenza a_0, \dots, a_d si dice unimodale se esiste un indice i tale che

$$a_0 \leq \dots \leq a_{i-1} \leq a_i \geq a_{i+1} \geq \dots \geq a_d.$$

Una sequenza crescente   unimodale perch  la Definizione 2.32   rispettata con $i = d$.

Definizione 2.33. Una sequenza a_0, \dots, a_d si dice log-concava se per ogni $0 < i < d$,

$$a_{i-1}a_{i+1} \leq a_i^2.$$

Vediamo alcuni esempi di sequenze log-concave.

Esempio 2.34. Prendiamo in considerazione la sequenza $1, 2, \dots, n-1, n, n-1, \dots, 1$.

$$(k-1)(k+1) = k^2 - 1 \leq k^2.$$

La condizione di log-concavit    rispettata.

Esempio 2.35. In questo esempio analizziamo la sequenza $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$.

$$\frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}} = \frac{(k+1)(n-k+1)}{k(n-k)} > 1$$

È facile notare che le sequenze degli esempi 2.34 e 2.35 sono anche unimodali. Questo avviene in generale per ogni sequenza log-concava con coefficienti positivi. Viceversa non è vero che ogni sequenza unimodale con coefficienti positivi sia log-concava. Si può facilmente costruire un controesempio: la sequenza $1, 2, 5, 1$ è unimodale ma non log-concava.

Proposizione 2.36. Sia a_0, \dots, a_d una sequenza tale che $a_i > 0$ per ogni $0 \leq i \leq d$. Allora la sequenza è unimodale.

Dimostrazione. Sia $I = \{i \in \{1, \dots, d\} \mid a_{i-1} > a_i\}$ e $H = \{i \in \{1, \dots, d\} \mid a_{i-1} \geq a_i\}$. Se $I = \emptyset$ la sequenza è crescente e quindi unimodale. Poniamo $h = \min(I)$. Devo provare che per ogni k tale che $h \leq k \leq d$, $k \in H$. Per assurdo esiste $t > h$ tale che $t \notin H$ e per ogni l tale che $h \leq l < t$, $l \in H$. Allora vale $a_{t-2} \geq a_{t-1} < a_t$, perciò $a_{t-1}^2 < a_t a_{t-2}$ e questo contraddice l'ipotesi di log-concavità. \square

Nel 1968 Read [8] enuncia la seguente congettura: la sequenza dei valori assoluti dei coefficienti di ogni polinomio cromatico è unimodale. Qualche anno dopo Stuart Hoggar [5] ipotizzò che la sequenza dei coefficienti fosse log-concava. Queste congetture sono rimaste tali fino al 2012, quando June Huh riuscì a dimostrarle utilizzando tecniche moderne di geometria algebrica.

Teorema 2.37 (June Huh). [6] Sia G un grafo e $\chi(G, t)$ il suo polinomio cromatico. Allora la sequenza dei coefficienti di $\chi(G, t)$ è log-concava.

Corollario 2.38. Sia G un grafo e $\chi(G, t)$ il suo polinomio cromatico. Allora la sequenza dei valori assoluti dei coefficienti di $\chi(G, t)$ è unimodale.

Si invita il lettore ad osservare queste proprietà nei polinomi cromatici di grafi che abbiamo visto e soprattutto in quelli del capitolo successivo, dove prendiamo in considerazione grafi con più vertici e lati ed è quindi più facile notarle.

2.5 Orientazioni Acicliche

Mostriamo come il Teorema 2.23 permetta di calcolare rapidamente il numero di camere di un arrangiamento grafico.

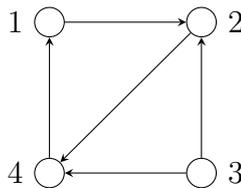


Figura 2.6: Un grafo orientato.

Osservazione 2.39. Sia \mathcal{A} un arrangiamento in \mathbb{R}^l . Il numero di camere dell'arrangiamento grafico $\mathcal{A}(G)$ è $(-1)^l \chi(G, -1)$. Infatti:

$$|\mathcal{C}(\mathcal{A}(G))| \stackrel{(1.5)}{=} \pi(\mathcal{A}(G), 1) = (-1)^l \chi(\mathcal{A}(G), -1) \stackrel{(2.6)}{=} (-1)^l \chi(G, -1).$$

Siamo interessati a trovare un significato in teoria dei grafi al numero $|\mathcal{C}(\mathcal{A}(G))|$ di camere di un arrangiamento grafico $\mathcal{A}(G)$. Otteniamo un risultato che permette di contare il numero di orientazioni acicliche dei grafi. La dimostrazione originale di R.Stanley [9] non riguarda gli arrangiamenti di iperpiani. La prima dimostrazione che riguarda gli arrangiamenti grafici è di C.Greene [3] [4].

Definizione 2.40. Sia G un grafo. Un orientazione di G consiste nell'assegnare una direzione ad ogni lato $\{i, j\}$, denotata da $i \rightarrow j$ o $j \rightarrow i$. Un orientazione è detta aciclica se non ci sono cicli orientati. Denotiamo con $AO(G)$ l'insieme di tutte le orientazioni acicliche di G .

Esempio 2.41. L'orientazione in Figura 2.6 non è aciclica perché contiene il ciclo orientato $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$.

Lemma 2.42. Sia G un grafo e $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G)$. Allora esiste una corrispondenza biunivoca tra $AO(G)$ e $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Dimostrazione. Sia $\omega \in AO(G)$. Sia $i \in V$, denotiamo $p_i(\omega)$ il numero di vertici che possono essere raggiunti dal vertice i percorrendo i lati nella direzione dell'orientazione. Consideriamo il punto $p(\omega) = (p_1(\omega), \dots, p_l(\omega)) \in \mathbb{R}^l$. Sia $\{i, j\} \in \mathcal{E}$. Definiamo i semispazi

$$H_{ij}^+ = \{(x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^l \mid x_i > x_j\},$$

$$H_{ij}^- = \{(x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^l \mid x_i < x_j\}.$$

Se $i \rightarrow j$, allora ogni vertice che può essere raggiunto da j può essere raggiunto da i . Allora $p_i(\omega) \geq p_j(\omega)$. Poiché l'orientazione è aciclica, è impossibile raggiungere i da j . Quindi abbiamo:

$$i \rightarrow j \text{ in } \omega \Leftrightarrow p_i(\omega) > p_j(\omega) \Leftrightarrow p(\omega) \in H_{ij}^+,$$



Figura 2.7: Orientazioni non acicliche di Q .

$$j \rightarrow i \text{ in } \omega \Leftrightarrow p_j(\omega) > p_i(\omega) \Leftrightarrow p(\omega) \in H_{ij}^-.$$

Quindi $p(\omega) \notin \ker(x_i - x_j)$, ovvero $p(\omega) \in M(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^l \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ ed esiste un'unica camera $C(\omega) \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ che contiene $p(\omega)$. Otteniamo

$$C(\omega) \subseteq H_{ij}^+ \Leftrightarrow i \rightarrow j \text{ in } \omega$$

$$C(\omega) \subseteq H_{ij}^- \Leftrightarrow j \rightarrow i \text{ in } \omega.$$

Mostriamo che la corrispondenza $\omega \mapsto C(\omega)$ da $AO(G)$ a $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ sia biunivoca. È ovvio dalle ultime equazioni che la mappa sia iniettiva. Per provare che sia suriettiva consideriamo $C \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ e mostriamo che esiste $\omega \in AO(G)$ tale che $C = C(\omega)$. Scegliamo un punto $p = (p_1, \dots, p_l) \in C$. Definiamo una direzione su ogni lato $\{i, j\}$ in questo modo:

$$i \rightarrow j \Leftrightarrow p_i > p_j \Leftrightarrow p \in H_{ij}^+$$

$$j \rightarrow i \Leftrightarrow p_i < p_j \Leftrightarrow p \in H_{ij}^-.$$

Queste formule mostrano che

$$C(\omega) \subseteq H_{ij}^+ \Leftrightarrow p \in H_{ij}^+$$

$$C(\omega) \subseteq H_{ij}^- \Leftrightarrow p \in H_{ij}^-$$

Segue che $p \in C(\omega)$ e quindi $C = C(\omega)$. □

Utilizzando l'Osservazione 2.39 e il Lemma 2.42, otteniamo il seguente teorema di R.P.Stanley:

Teorema 2.43. *Il numero di orientazioni acicliche di G è $(-1)^l \chi(G, -1)$.*

Esempio 2.44. *Il grafo Q ha $16 = 2^4$ orientazioni. Due di esse, mostrate in Figura 2.7, non sono acicliche. Le altre 14 orientazioni sono acicliche. Calcolare $|AO(Q)|$ utilizzando il Teorema 2.43 fornisce lo stesso risultato:*

$$|AO(Q)| = \chi(Q, -1) = (-1)(-1-1)(1+3+3) = 14.$$

Capitolo 3

Colorazioni di Carte Geografiche

Introduciamo ora un problema importante che trattiamo in questo capitolo: la colorazione delle mappe. Data una cartina con Stati o regioni diversi e fissato un numero di colori, quanti sono i modi per colorare ognuna delle porzioni con un colore in modo che se due di esse sono confinanti, la loro colorazione sia differente? Per studiare questo problema ci riconduciamo ai grafi: data una cartina consideriamo un grafo dove ogni vertice rappresenta una regione da colorare e il confine tra due regioni corrisponde ad un lato che collega i due vertici del grafo corrispondenti. Quindi studiamo il problema equivalente della colorazione dei grafi. Si osservi che il grafo ottenuto da una cartina composta da regioni connesse è planare. Poniamo G il grafo ottenuto da una cartina in questo modo, siamo interessati a determinare:

1. il numero cromatico $k(G)$
2. il polinomio cromatico $\chi(G, t)$
3. il numero di colorazioni del grafo con $k(G)$ colori
4. il numero di orientazioni acicliche di G .

Abbiamo visto nel capitolo 2 che tutte queste informazioni si ricavano dal polinomio cromatico $\chi(G, t)$. Infatti il numero cromatico si stabilisce per definizione, il numero di colorazioni con $k(G)$ colori è $\chi(G, k(G))$. Il numero di orientazioni acicliche di G è $(-1)^l \chi(G, -1)$, come abbiamo visto nel Teorema 2.43. Riportiamo [2] tre esempi del calcolo di polinomi cromatici di grafi ottenuti da carte geografiche: gli Stati degli Stati Uniti (US), poi le regioni di Canada (CA) e Francia (FR).

$$\begin{aligned}
\chi(US, t) = & t^{50} - 105t^{49} + \\
& + 5404t^{48} - 181689t^{47} + \\
& + 4487296t^{46} - 86797239t^{45} + \\
& + 1369003119t^{44} - 18100363324t^{43} + \\
& + 204677484054t^{42} - 2009741557171t^{41} + \\
& + 17339117549604t^{40} - 132682763002081t^{39} + \\
& + 907423360476887t^{38} - 5581169381630167t^{37} + \\
& + 31031575427165032t^{36} - 156643500973559120t^{35} + \\
& + 720455907112532420t^{34} - 3028205766124900090t^{33} + \\
& + 11660587916045449786t^{32} - 41218581559720380212t^{31} + \\
& + 133971262465065322950t^{30} - 400893632262902775367t^{29} + \\
& + 1105490166090074304464t^{28} - 2811013847987117591939t^{27} + \\
& + 6593222714427581969721t^{26} - 14265139633481475975539t^{25} + \\
& + 28463416059570443463946t^{24} - 52346700555134790196556t^{23} + \\
& + 88655379811509518107152t^{22} - 138105582619332483057236t^{21} + \\
& + 197572598030181111248913t^{20} - 259057209010976705704331t^{19} + \\
& + 310574028340459418761423t^{18} - 339434199963516594330980t^{17} + \\
& + 336994442997740949240778t^{16} - 302626296141859413511498t^{15} + \\
& + 244548011549333689537938t^{14} - 176716253459552869763068t^{13} + \\
& + 11332396101201077670232t^{12} - 63883998375551455822512t^{11} + \\
& + 31284178773965469140544t^{10} - 13106541029265128508800t^9 + \\
& + 4603738556785058047232t^8 - 1318612298697138044928t^7 + \\
& + 295742443634384435712t^6 - 48705983353199143936t^5 + \\
& + 5236695782665893888t^4 - 275716645154500608t^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi(CA, t) = & t(t-1)^6(t-2)^3(t^2-3t+3) = \\
& = t^{12} - 15t^{11} + 102t^{10} - 415t^9 + 1122t^8 - 2115t^7 + \\
& + 2834t^6 - 2697t^5 + 1785t^4 - 782t^3 + 204t^2 - 24t
\end{aligned}$$



Created with paintmaps.com

Figura 3.1: *Una colorazione delle province in Emilia-Romagna con tre colori.*

$$\begin{aligned} \chi(FR, t) = & t^{12} - 23t^{11} + 241t^{10} - 1519t^9 + \\ & + 6400t^8 - 18927t^7 + 40082t^6 - 60751t^5 + \\ & + 64540t^4 - 45656t^3 + 19328t^2 - 3696t \end{aligned}$$

In questo capitolo vediamo tre esempi di colorazioni di cartine in ordine crescente di difficoltà: le 9 province dell'Emilia-Romagna, le 20 regioni dell'Italia e i 27 Stati dell'Unione Europea. In alcuni casi analizzeremo anche alcuni sottografi di particolare rilevanza dei rispettivi grafi di queste cartine. Come vedremo la difficoltà non dipende dal numero di regioni da colorare ma da come esse siano collegate fra loro, cioè dai loro confini (i lati del grafo corrispondente).

3.1 Emilia-Romagna

Il primo esempio riguarda il calcolo del polinomio cromatico del grafo in Figura 3.2, ottenuto dalla cartina delle province in Emilia-Romagna¹ come spiegato in precedenti

¹La cartina dell'Emilia-Romagna in Figura 3.1 è realizzata tramite il sito <https://paintmaps.com/map-charts/156c/Emilia-Romagna-map-chart>.

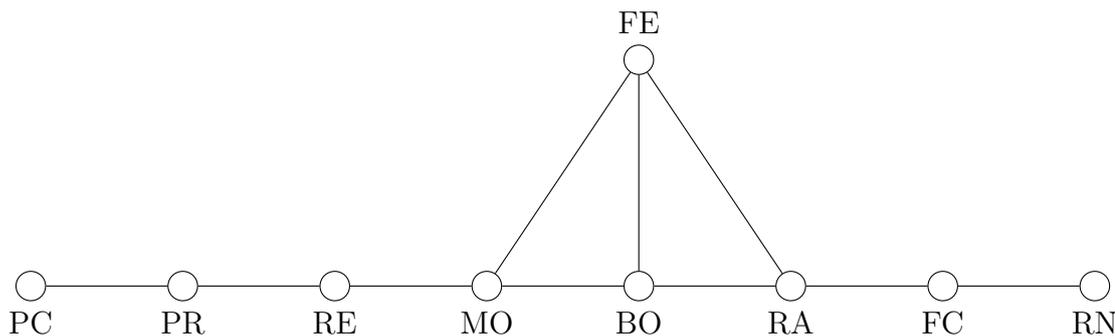


Figura 3.2: Il grafo ER delle provincie in Emilia-Romagna.

za. In questo caso il calcolo è abbastanza semplice: utilizziamo l'uguaglianza (2.8) per rimuovere uno alla volta i vertici con un solo lato (e il lato stesso), aggiungendo ogni volta al polinomio cromatico un fattore $(t - 1)$. In questo modo eliminiamo prima Piacenza e Rimini, poi Parma e Forlì-Cesena, infine Reggio-Emilia. Resta da calcolare il polinomio cromatico del sottografo che ha come vertici le provincie rimanenti (Modena, Bologna, Ravenna, Ferrara) e come lati gli stessi che collegano questi quattro vertici in ER . Denotiamo C questo sottografo di ER . Si nota facilmente che C si ottiene dalla sovrapposizione di due K_3 in un K_2 , perciò dal Teorema 2.28 (Riduzione Cromatica) si ottiene:

$$\chi(C, t) \stackrel{(2.7)}{=} \frac{(\chi(K_3, t))^2}{\chi(K_2, t)} = \frac{t^2(t-1)^2(t-2)^2}{t(t-1)} = t(t-1)(t-2)^2.$$

Perciò da quanto appena visto calcoliamo il polinomio cromatico di G :

$$\begin{aligned} \chi(ER, t) &= (t-1)^5 \chi(C, t) \\ &= t(t-1)^6(t-2)^2 \\ &= t^9 - 10t^8 + 43t^7 - 104t^6 + \\ &\quad + 155t^5 - 146t^4 + 85t^3 - 28t^2 + 4t. \end{aligned}$$

Quindi il numero cromatico è $k(ER) = 3$, il numero di colorazioni di ER con 3 colori è

$$\chi(ER, 3) = 2^6 \cdot 3 = 192.$$

Infine, il numero di orientazioni acicliche di ER è

$$|AO(ER)| = -\chi(G, -1) = 2^6 \cdot 3^2 = 576.$$



Figura 3.3: *Cartina delle regioni in Italia.*

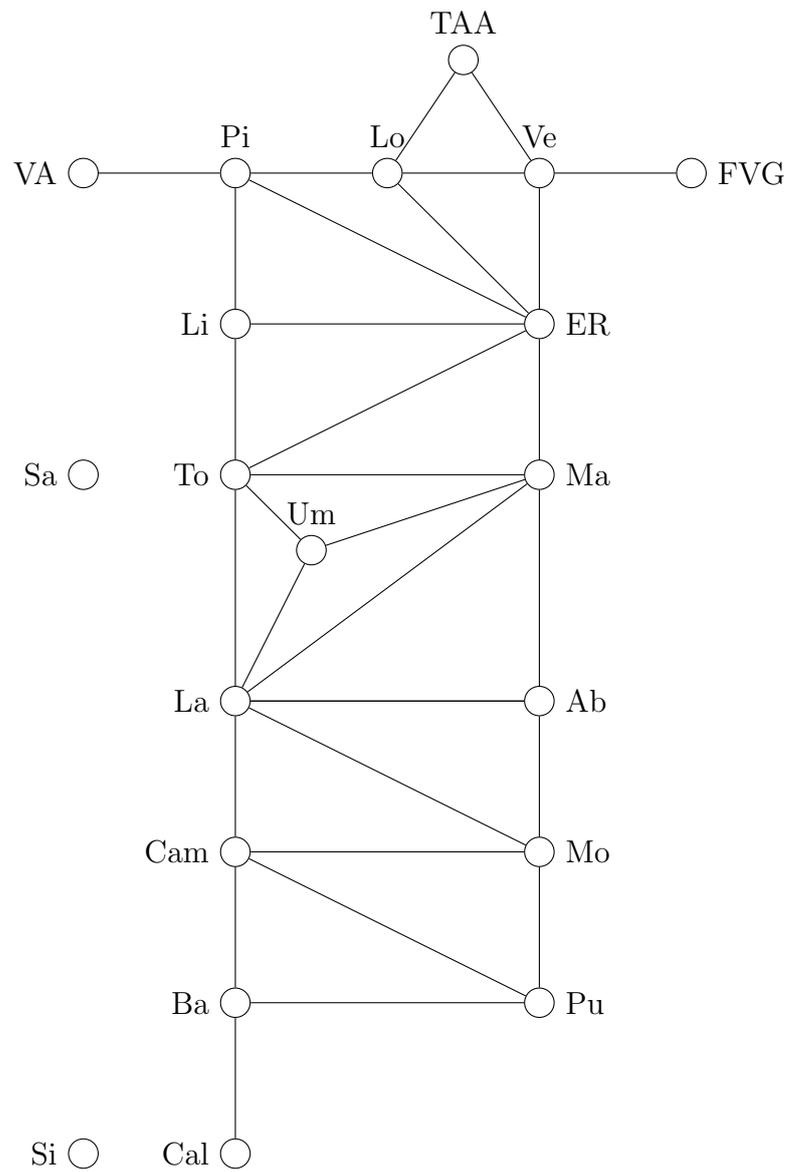


Figura 3.4: *Il grafo I delle regioni italiane.*

3.2 Italia

In questo secondo esempio analizziamo la cartina² delle regioni italiane. Osserviamo che in questo caso deduciamo facilmente il numero cromatico di I , senza calcolarne il polinomio cromatico. Per prima cosa notiamo che il grafo I in Figura 3.4 ha un sottografo $C \cong K_4$ (si tratta del grafo che ha per vertici le regioni Toscana, Marche, Umbria, Lazio e tutti i lati tra questi vertici). Perciò $k(I) \geq k(K_4) = 4$. Inoltre, siccome il grafo I è planare, segue dall Teorema 2.16 (Teorema dei quattro colori) che $k(I) \leq 4$. Otteniamo che $k(I) = 4$. Procediamo con il calcolo del polinomio cromatico di I . Per prima cosa utilizziamo, come nel caso precedente, l'uguaglianza (2.8) per rimuovere i vertici con un solo lato (in questo caso 3: Valle d'Aosta, Friuli Venezia-Giulia e Calabria) e i lati corrispondenti, aggiungendo un fattore $(t-1)^3$. In seguito, l'uguaglianza (2.3) permette di rimuovere i vertici senza lati (corrispondenti alle isole Sicilia e Sardegna) aggiungendo per ognuna un fattore t al polinomio cromatico. Infine tramite l'uguaglianza (2.9) possiamo rimuovere altre 11 regioni, aggiungendo per ognuna un fattore $(t-2)$. In particolare rimuoviamo (in questo ordine): a nord Trentino Alto-Adige, Veneto, Lombardia, Piemonte, Liguria, Emilia-Romagna; a sud Basilicata, Puglia, Campania, Molise, Abruzzo. A questo punto rimane solo il sottografo $C \cong K_4$ menzionato prima, di cui sappiamo calcolare il polinomio cromatico con l'uguaglianza (2.4). Quindi otteniamo

$$\chi(I, t) = t^2(t-1)^3(t-2)^{11}\chi(C, t) = t^3(t-1)^4(t-2)^{12}(t-3).$$

Sviluppando il polinomio risulta

$$\begin{aligned} \chi(I, t) = & t^{20} - 31t^{19} + 450t^{18} - 4062t^{17} + 25533t^{16} - 118587t^{15} + \\ & + 421328t^{14} - 1169432t^{13} + 2566608t^{12} - 4478672t^{11} + \\ & + 6212096t^{10} - 6808320t^9 + 5822208t^8 - 3802368t^7 + \\ & + 1830912t^6 - 612352t^5 + 126976t^4 - 12288t^3. \end{aligned}$$

Ora che abbiamo calcolato il polinomio cromatico, calcoliamo il numero di colorazioni della cartina con 4 colori e orientazioni acicliche (questo calcolo risulta più veloce prendendo $\chi(I, t)$ scomposto).

$$\chi(I, 4) = 4^3 \cdot 3^4 \cdot 2^{12} = 21233664$$

$$|AO(I)| = \chi(I, -1) = (-1)^3(-2)^4(-3)^{12}(-4) = 34012224$$

Prima di passare all'esempio successivo, osserviamo che nonostante $k(I) = 4$, si può colorare quasi tutta la cartina dell'Italia con soli tre colori. Infatti il quarto colore serve

²La cartina dell'Italia in Figura 3.3 è presa dal sito <https://cartinadatieuropa.it/italia/cartina>.

solamente in C . Ad esempio possiamo utilizzare il quarto colore solo per l'Umbria. Formalizziamo questo ragionamento: sia I^* il sottografo di I che ha come vertici tutte le regioni italiane tranne l'Umbria e tutti i lati in I tra quei vertici. Con lo stesso procedimento di prima otteniamo che

$$\chi(I^*, t) = t^2(t-1)^3(t-2)^{11}\chi(K_3, t) = t^3(t-1)^4(t-2)^{12}.$$

Questo vale perché alla fine il grafo che rimane è un K_3 , invece di un K_4 . Osserviamo, tramite il calcolo esplicito con il polinomio cromatico, che il numero di colorazioni di I^* con 4 colori è lo stesso di I .

$$\chi(I^*, 4) = 4^3 \cdot 3^4 \cdot 2^{12} = 21233664 = \chi(I, 4)$$

Intuitivamente possiamo aspettarci questo risultato perché una volta fissati i tre colori diversi delle regioni confinanti con l'Umbria, bisogna utilizzare necessariamente il quarto per questa regione e quindi c'è una sola opzione possibile. La differenza rispetto a prima è che esistono colorazioni di I^* con tre soli colori: $\chi(I, 3) = 0$ e

$$\chi(I^*, 3) = 3^3 \cdot 2^4 = 432$$

Come ci si poteva aspettare, il numero di colorazioni è molto diminuito rispetto a quello calcolato prima con 4 colori. Per completezza concludiamo con il calcolo del numero di orientazioni acicliche di I^* .

$$|AO(I^*)| = -\chi(I, -1) = -(-1)^3(-2)^4(-3)^{12} = 8503056$$

Rispetto a prima manca un fattore $(t-3)$ nel polinomio cromatico, quindi un fattore 4 nel calcolo delle orientazioni acicliche.

3.3 Unione Europea

In questo ultimo esempio studiamo le colorazioni della cartina degli Stati nell'Unione Europea³. Consideriamo il grafo in Figura 3.6 e procediamo inizialmente come nei casi precedenti. Appliciamo l'uguaglianza (2.8) per eliminare uno alla volta i vertici con un lato. Elenchiamo i dieci vertici cancellati in questo modo: a nord la Danimarca, a nord-est Estonia, Lettonia e Lituania, a sud-ovest: Portogallo e Spagna; a sud-est Grecia, Bulgaria e Romania; infine in Scandinavia eliminiamo la Finlandia (osserviamo che in questo caso potevamo scegliere equivalentemente la Svezia). In seguito l'uguaglianza

³La cartina dell'UE in Figura 3.5 è presa dal sito <https://european-union.europa.eu/easy-read.it>



Figura 3.5: *Cartina degli Stati nell'Unione Europea.*

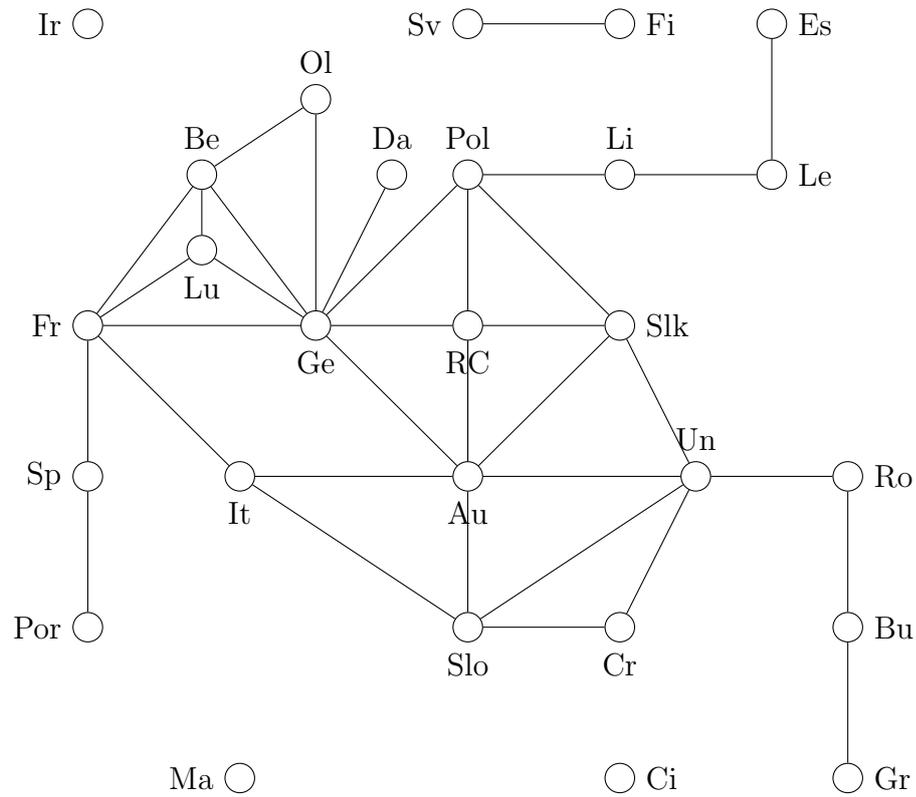


Figura 3.6: Il grafo UE degli Stati nell'Unione Europea.

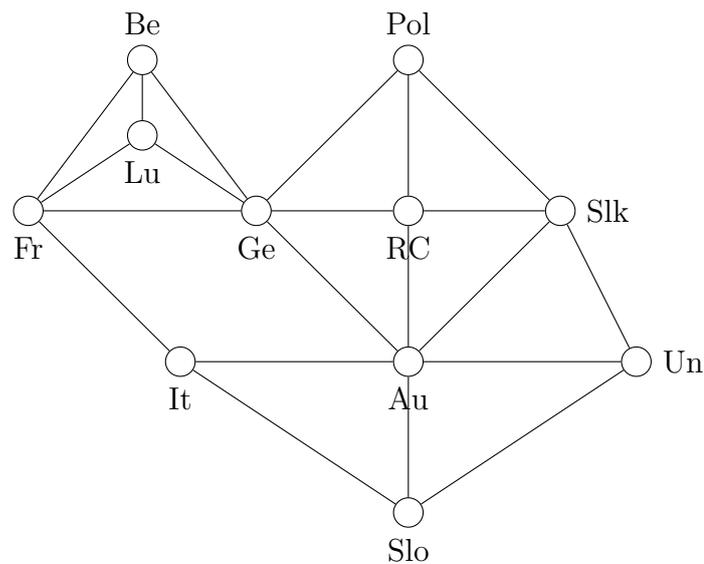


Figura 3.7: Il sottografo UEC di UE.

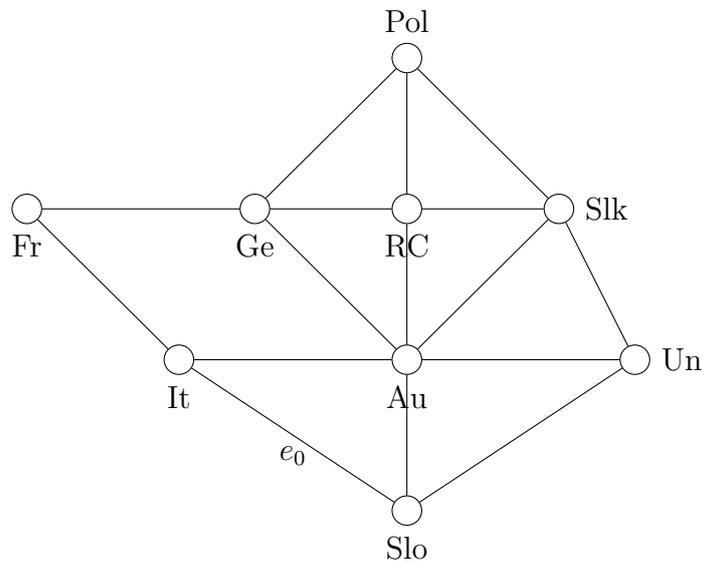
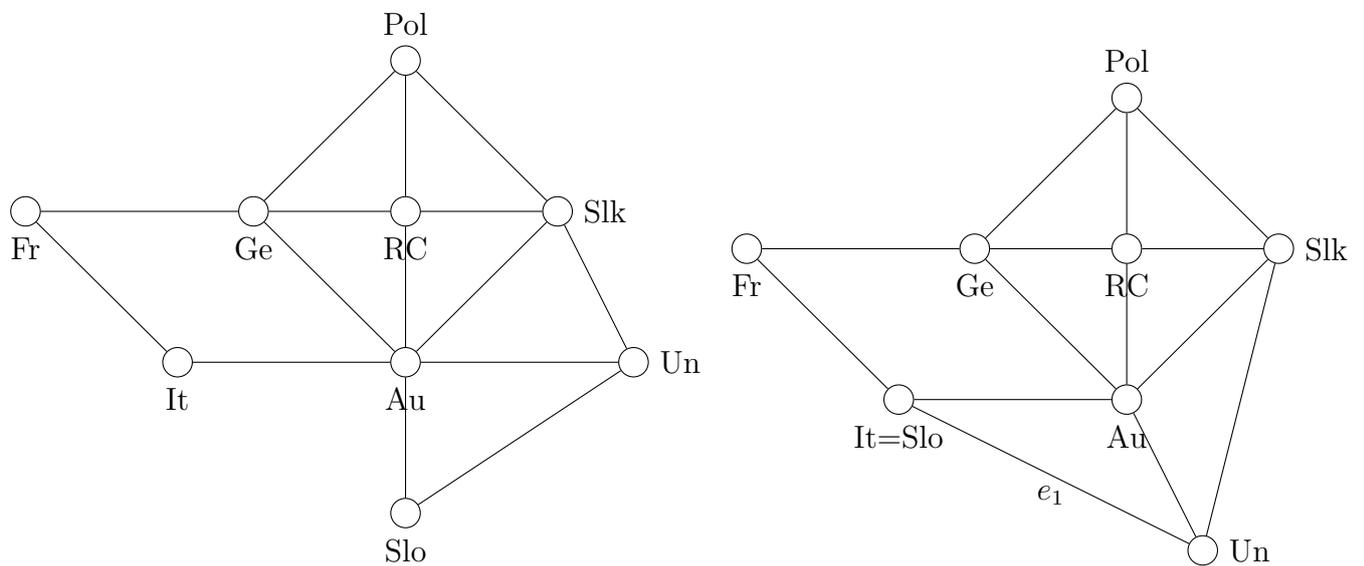


Figura 3.8: Il sottografo UEC^* di UEC .



(a) Il grafo G_1 , cancellazione di UEC^* rispetto al lato e_0 .

(b) Il grafo H_1 , restrizione di UEC^* rispetto al lato e_0 .

Figura 3.9: Cancellazione e restrizione di UEC^* rispetto al lato e_0 .

(2.3) ci permette di rimuovere i quattro vertici senza lati: Irlanda, Svezia, Malta e Cipro; mentre per (2.9) togliamo i due vertici che corrispondono ad Olanda e Croazia. Da queste prime osservazioni risulta che

$$\chi(UE, t) = t^4(t-1)^{10}(t-2)^2\chi(UEC, t), \quad (3.1)$$

dove UEC (Unione Europea centrale) è il sottografo di UE in Figura 3.7 che rimane dopo aver cancellato i vertici elencati prima. Osserviamo che UEC si ottiene sovrapponendo un K_4 (il sottografo che ha come vertici Francia, Germania, Lussemburgo, Belgio) con UEC^* (in Figura 3.8) in un K_2 (il sottografo che ha come vertici Francia e Germania). Per il Teorema 2.28 vale

$$\chi(UEC, t) = \frac{\chi(K_4, t)\chi(UEC^*, t)}{\chi(K_2, t)} = (t-2)(t-3)\chi(UEC^*, t).$$

Calcoliamo $\chi(UEC^*, t)$ applicando più volte la Proposizione 2.20 per ricondurci a grafi in cui è possibile il calcolo diretto del polinomio cromatico con tecniche esposte nel Capitolo 2. Siano i grafi G_1, H_1 in Figura 3.9 la cancellazione e la restrizione di UEC^* rispetto al lato e_0 , che collega Italia e Slovenia. Per non appesantire la notazione nominiamo i vertici delle restrizioni allo stesso modo di quelli del grafo iniziale. Prenderemo in considerazione molti grafi procedendo con il metodo di cancellazione-restrizione cromatico. Nominiamo G_i quelli di cui calcoliamo direttamente $\chi(G_i, t)$ e H_i i grafi da scomporre ulteriormente. Notiamo che in questo è necessario effettuare numerose scomposizioni prima di ottenere il risultato, perché il numero elevato di lati rispetto ai vertici rende complicato trovare casi in cui applicare il Teorema 2.28. In questo primo passaggio

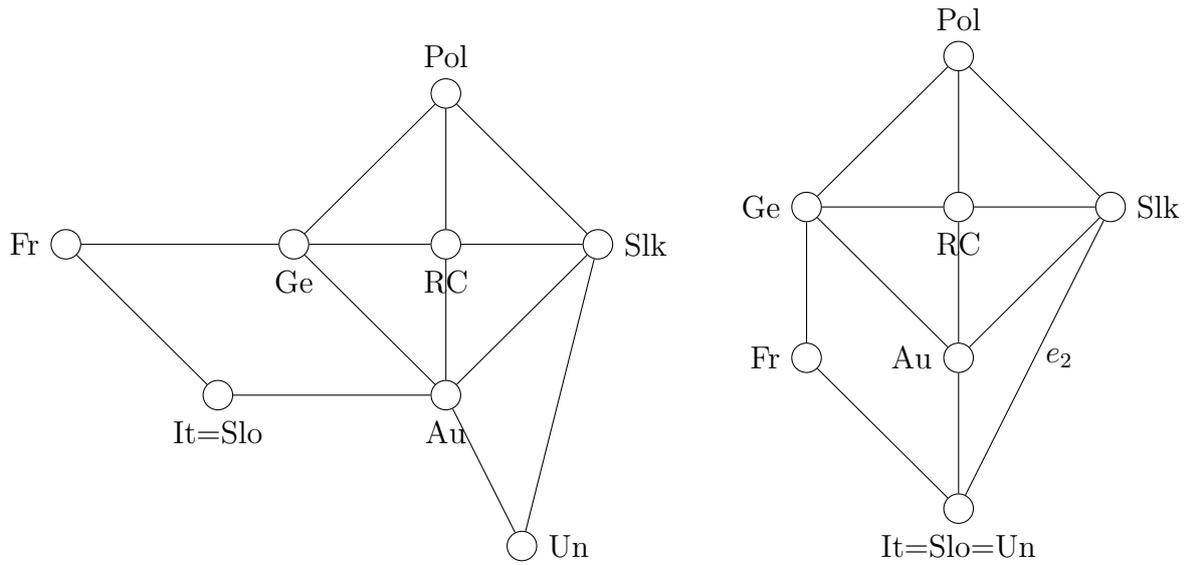
$$\chi(UEC^*, t) = \chi(G_1, t) - \chi(H_1, t).$$

Siamo in grado di calcolare direttamente $\chi(G_1, t)$. Osserviamo che G_1 si ottiene sovrapponendo un grafo Q con un W_5 in K_2 , poi sovrapponendo due volte il sottografo ottenuto con un K_3 in K_2 . Perciò, per il Teorema 2.28

$$\chi(G_1, t) = \frac{\chi(Q, t)\chi(W_5, t)(\chi(K_3, t))^2}{(\chi(K_2, t))^3} = t(t-1)(t-2)^3(t^2-3t+3)(t^2-5t+7).$$

Procediamo con la scomposizione: siano G_2 e H_2 i grafi in Figura 3.10, ovvero la cancellazione e la restrizione di H_1 rispetto al lato e_1 , indicato in Figura 3.9b. Otteniamo

$$\begin{aligned} \chi(UEC^*, t) &= \chi(G_1, t) - \chi(H_1, t) \\ &= \chi(G_1, t) - (\chi(G_2, t) - \chi(H_2, t)) \\ &= \chi(G_1, t) - \chi(G_2, t) + \chi(H_2, t). \end{aligned}$$



(a) Il grafo G_2 , cancellazione di H_1 rispetto al lato e_1 .

(b) Il grafo H_2 , restrizione di H_1 rispetto al lato e_1 .

Figura 3.10: Cancellazione e restrizione di H_1 rispetto al lato e_1 .

Calcoliamo $\chi(G_2, t)$: G_2 è un sottografo di G_1 ottenuto con le stesse sovrapposizioni di prima, ma con un K_3 in meno.

$$\chi(G_2, t) = \frac{\chi(Q, t)\chi(W_5, t)\chi(K_3, t)}{(\chi(K_2, t))^2} = t(t-1)(t-2)^2(t^2-3t+3)(t^2-5t+7).$$

Continuiamo con lo stesso procedimento. Consideriamo i grafi G_3 e H_3 in Figura 3.11 (scriviamo $\bar{I}t$ invece di $It = Slo = Un = Slk$ in Figura 3.11b e nelle successive). G_3 e H_3 sono rispettivamente la cancellazione e la restrizione di H_2 rispetto al lato e_2 , indicato in Figura 3.10b. Calcoliamo $\chi(G_3, t)$.

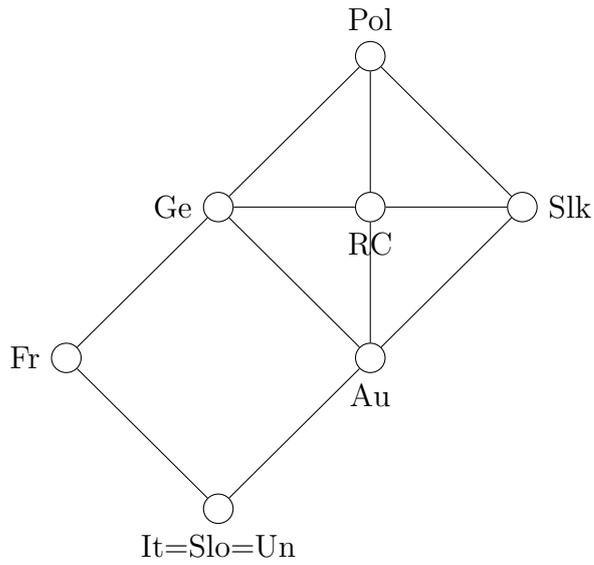
$$\chi(G_3, t) = \frac{\chi(Q, t)\chi(W_5, t)}{\chi(K_2, t)} = t(t-1)(t-2)(t^2-3t+3)(t^2-5t+7).$$

Reiteriamo scomponendo H_3 nei grafi in Figura 3.12. G_4 è la cancellazione rispetto al lato e_3 indicato in Figura 3.11b, invece H_4 è la restrizione rispetto allo stesso lato. Come nei casi precedenti, procediamo con il calcolo di $\chi(G_4, t)$.

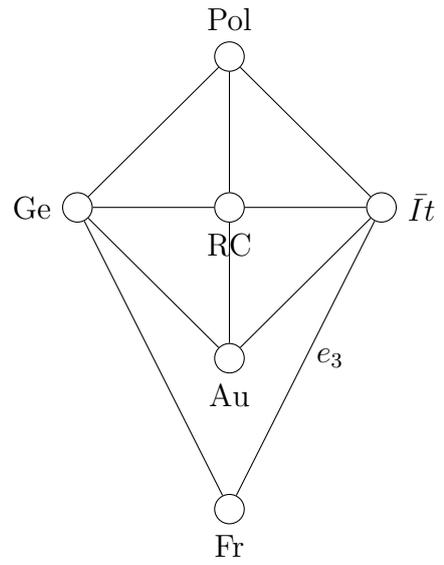
$$\chi(G_4, t) = \frac{\chi(K_2, t)\chi(W_5, t)}{\chi(K_1, t)} = t(t-1)^2(t-2)(t^2-5t+7).$$

Infine scomponiamo H_4 in G_5 e G_6 , i grafi in Figura 3.13. Osserviamo che $G_5 \cong W_5$, perciò

$$\chi(G_5, t) = \chi(W_5, t) = t(t-1)(t-2)(t^2-5t+7).$$

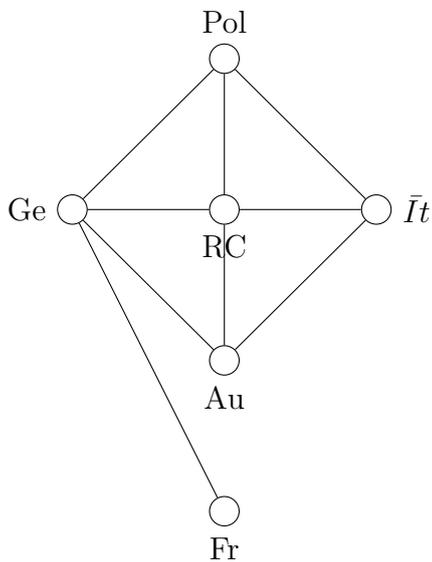


(a) Il grafo G_3 , cancellazione di H_2 rispetto al lato e_2 .

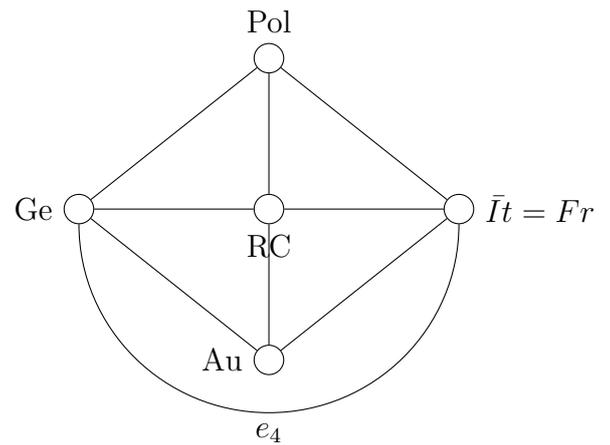


(b) Il grafo H_3 , restrizione di H_2 rispetto al lato e_2 .

Figura 3.11: Cancellazione e restrizione di H_2 rispetto al lato e_2 .

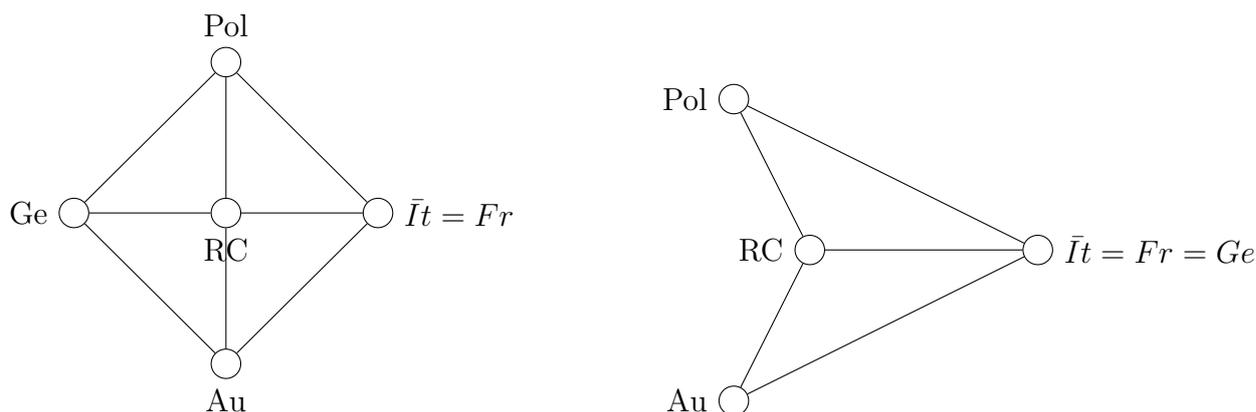


(a) Il grafo G_4 , cancellazione di H_3 rispetto al lato e_3 .



(b) Il grafo H_4 , restrizione di H_3 rispetto al lato e_3 .

Figura 3.12: Cancellazione e restrizione di H_3 rispetto al lato e_3 .



(a) Il grafo G_5 , cancellazione di H_4 rispetto al lato e_4 .

(b) Il grafo G_6 , restrizione di H_4 rispetto al lato e_4 .

Figura 3.13: Cancellazione e restrizione di H_4 rispetto al lato e_4 .

Notiamo che G_6 si ottiene sovrapponendo due copie di K_3 in un K_2 .

$$\chi(G_6, t) = \frac{(\chi(K_3, t))^2}{\chi(K_2, t)} = t(t-1)(t-2)^2.$$

Riassumendo:

$$\begin{aligned} \chi(UEC^*, t) &= \sum_{i=1}^6 (-1)^{i+1} \chi(G_i, t) = \\ &= t(t-1)(t-2)(t^6 - 13t^5 + 72t^4 - 218t^3 + 383t^2 - 375t + 163) = \\ &= t^9 - 16t^8 + 113t^7 - 460t^6 + 1181t^5 - 1960t^4 + 2054t^3 - 1239t^2 + 326t. \end{aligned}$$

Osservando il polinomio cromatico di UEC^* deduciamo che $k(UEC^*) = 3$. Calcoliamo il numero di colorazioni di UEC^* con tre colori.

$$\begin{aligned} \chi(UEC^*, 3) &= 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \\ &= 6 \end{aligned}$$

Notiamo che vale

$$\chi(UEC^*, 3) = 3!.$$

Data una colorazione UEC^* con tre colori, le altre cinque si ottengono riordinandoli. Vediamo in Figura 3.14 una colorazione di UEC^* , unica a meno di scambiare tra loro i colori. Calcoliamo anche il numero di orientazioni acicliche di UEC^* .

$$\begin{aligned} |AO(UEC^*)| &= -\chi(UEC, -1) = \\ &= -2 \cdot (-3) \cdot 1225 = \\ &= 7350 \end{aligned}$$

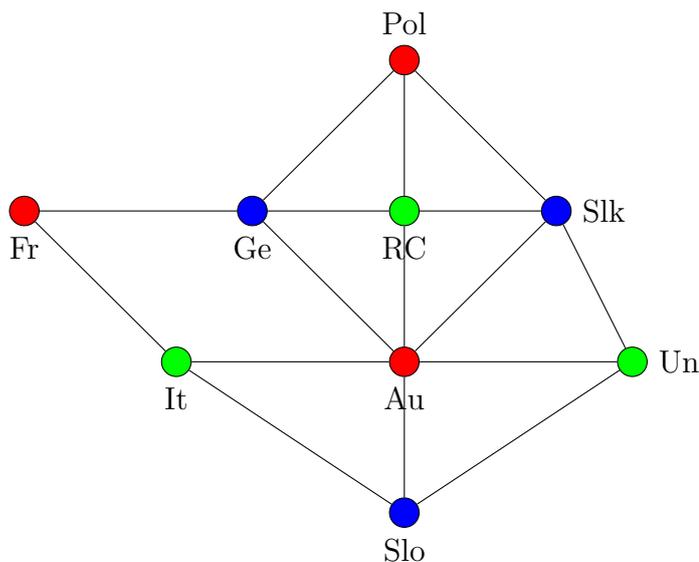


Figura 3.14: Una colorazione di UEC^* con tre colori.

Procediamo con il calcolo di $\chi(UEC, t)$. Conoscendo $\chi(UEC^*, t)$, il risultato richiesto si ottiene facilmente.

$$\begin{aligned}\chi(UEC, t) &= (t-2)(t-3)\chi(UEC^*, t) = \\ &= t(t-1)(t-2)^2(t-3)(t^6 - 13t^5 + 72t^4 - 218t^3 + 383t^2 - 375t + 163) = \\ &= t^{11} - 21t^{10} + 199t^9 - 1121t^8 + 4159t^7 - 10625t^6 + \\ &+ 18940t^5 - 23269t^4 + 18845t^3 - 9064t^2 + 1956t.\end{aligned}$$

Osservando il polinomio cromatico di UEC deduciamo che $k(UEC) = 4$. Questo risultato è coerente con quello che si ricava osservando direttamente il grafo, che ha un sottografo isomorfo a K_4 (quello che ha come vertici Francia, Lussemburgo, Belgio e Germania). Calcoliamo il numero di colorazioni di UEC con quattro colori.

$$\begin{aligned}\chi(UEC, 4) &= 4 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 55 = \\ &= 2640\end{aligned}$$

Svolgiamo anche il calcolo del numero di orientazioni acicliche di UEC .

$$\begin{aligned}|AO(UEC)| &= -\chi(UEC, -1) = \\ &= -2 \cdot (-3)^2 \cdot (-4) \cdot 1225 = \\ &= 88200\end{aligned}$$

Poiché abbiamo calcolato $\chi(UEC, t)$, ricordando l'equazione (3.1) riusciamo a calcolare $\chi(UE, t)$.

$$\begin{aligned}
\chi(UE, t) &= t^4(t-1)^{10}(t-2)^2\chi(UEC, t) = \\
&= t^5(t-1)^{11}(t-2)^4(t-3)(t^6 - 13t^5 + 72t^4 - 218t^3 + 383t^2 - 375t + 163) = \\
&= t^{27} \\
&\quad - 35t^{26} \\
&\quad + 582t^{25} \\
&\quad - 6116t^{24} \\
&\quad + 45574t^{23} \\
&\quad - 256122t^{22} \\
&\quad + 1127181t^{21} \\
&\quad - 3981398t^{20} \\
&\quad + 11475548t^{19} \\
&\quad - 27293118t^{18} \\
&\quad + 53949093t^{17} \\
&\quad - 88978432t^{16} \\
&\quad + 122591394t^{15} \\
&\quad - 140882818t^{14} \\
&\quad + 134467839t^{13} \\
&\quad - 105803094t^{12} \\
&\quad + 67846931t^{11} \\
&\quad - 34866227t^{10} \\
&\quad + 14007161t^9 \\
&\quad - 4235920t^8 \\
&\quad + 906472t^7 \\
&\quad - 122320t^6 \\
&\quad + 7824t^5.
\end{aligned}$$

Osservazione 3.1. $\chi(UE, t)$ è scritto in questo modo per evidenziare la proprietà di log-concavità della sequenza dei coefficienti.

Anche in questo caso in numero cromatico è $k(UE) = 4$. Calcoliamo il numero di

colorazioni con quattro colori.

$$\begin{aligned}\chi(UE, 4) &= 4^4 \cdot 3^{10} \cdot 2^2 \cdot 2640 = \\ &= 60466176 \cdot 2640 = \\ &= 159630704640\end{aligned}$$

Come potevamo prevedere aggiungere gli Stati con meno confini aumenta di molto il numero di colorazioni del grafo. Per concludere calcoliamo il numero di orientazioni acicliche di UE :

$$\begin{aligned}|AO(UE)| &= -\chi(UE, -1) = \\ &= 812851200.\end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] M. Baker: *Hodge theory in combinatorics*. Bull. Am. Math. Soc. **55**, 57–80 (2018)
- [2] R. Besset, J. Canizales, J.S. Chahal, T. Fackrell, V. Rico: *How many ways to color the map of America?*. arXiv:1908.05694v1 [math.HO] (2019).
- [3] C. Greene: *Acyclic orientations*. High. comb. D. Reidel, 65–68 (1977).
- [4] C. Greene, T. Zaslavsky: *On the interpretation of Whitney numbers through arrangements of hyperplanes, zonotopes, non-Radon partitions, and orientations of graphs*. Trans. Am. Math. Soc. **280**, 97–126 (1983).
- [5] S. Hoggar: *Chromatic polynomials and logarithmic concavity*. J. Comb. Th. Series B **16**, 248–254 (1974).
- [6] J. Huh: *Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs*. J. Am. Math. Soc. **25**, 907–927 (2012).
- [7] P. Orlik, H. Terao: *Arrangements of Hyperplanes*, Springer, 1992.
- [8] R. C. Read: *An introduction to chromatic polynomials*. J. Comb. Th. **4**, 52–71 (1968).
- [9] R. P. Stanley: *Acyclic orientation of graph*. Discrete Math. **5**, 171–178 (1973).
- [10] H. S. Wilf: *Algorithms and Complexity*, Internet Edition, 1994.

Ringraziamenti

In conclusione ritengo doveroso esprimere la mia gratitudine a tutte le persone che mi hanno supportato nella stesura della tesi e in generale negli ultimi tre anni.

Per prima cosa desiero ringraziare il Relatore di questa tesi, il professor Roberto Pagaria, per la sua pazienza e disponibilità nel seguirmi durante tutto il percorso, dalla scelta degli argomenti, ai suggerimenti per migliorare il mio elaborato. In particolare ho molto apprezzato i ricevimenti passati ad approfondire gli aspetti più complessi degli argomenti che stavo studiando e la precisione nelle correzioni delle bozze, sia dal punto di vista dei contenuti, sia della forma.

Un sentito grazie va alla mia famiglia: i miei genitori Antonio e Paola, mio fratello Leonardo e i nonni Aurelio e Vilma. A loro va la mia infinita gratitudine per avere sempre creduto in me e per avermi appoggiato in ogni modo possibile.

Voglio ringraziare anche tutti gli amici che mi sono stati vicini in questi anni: sia quelli incontrati in dipartimento, che hanno contribuito a rendere l'esperienza universitaria molto gradevole, sia gli altri con cui ho condiviso i momenti di svago. Un grazie particolarmente sentito va ad Alessandro, che tra le altre cose mi ha spesso aiutato a gestire gli aspetti più complessi della scrittura della tesi in linguaggio Latex.

Arrivato alla fine di questo percorso, mi sento molto grato e orgoglioso di quanto fatto. Scrivere questa tesi è stata un'esperienza estremamente stimolante a cui mi sono dedicato con interesse, dedizione e impegno.

Un ultimo ringraziamento va ai lettori, che spero apprezzeranno questo mio lavoro.