

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

**GRUPPI CRISTALLOGRAFICI PIANI:  
TEORIA E APPLICAZIONE ALLE  
OPERE DI M. C. ESCHER**

**Relatore:**  
**Prof. Alexandr Kamenchtchik**

**Presentata da:**  
**Elena Rainer**

Anno Accademico 2023/2024

## Sommario

I gruppi discreti di isometrie piane prendono il nome di gruppi cristallografici piani. Essi hanno avuto origine nell'ambito della classificazione dei cristalli, ma sono stati utilizzati anche in campo artistico da artisti come M. C. Escher, che hanno sfruttato la loro capacità di ricoprire in maniera uniforme e regolare tutto il piano per semplice ripetizione di un modulo. Nei primi tre capitoli di questa tesi saranno date delle informazioni riguardanti la teoria dei gruppi, le isometrie e i reticoli, utili a definire e classificare i 17 tipi di gruppi cristallografici piani. Infine saranno fatte delle brevi analisi di alcune delle opere di M. C. Escher che permetteranno di identificare nei suoi disegni i gruppi cristallografici piani utilizzati.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>6</b>
<b>1 Gruppi e rappresentazioni</b>	<b>7</b>
1.1 Definizione astratta di gruppo e sottogruppi . . . . .	7
1.1.1 Esempio 1: il gruppo $D_3$ . . . . .	8
1.1.2 Esempio 2: il gruppo $C_n$ . . . . .	9
1.2 Isomorfismi e affinità . . . . .	10
1.2.1 Esempio: il gruppo $S_3$ e il gruppo $D_3$ . . . . .	13
1.3 Rappresentazioni di un gruppo . . . . .	14
1.3.1 Esempio: il gruppo $D_3$ . . . . .	17
1.4 Azione di un gruppo su un insieme . . . . .	18
<b>2 Isometrie del piano euclideo</b>	<b>19</b>
2.1 Definizione di isometria e proprietà . . . . .	19
2.2 Classificazione delle isometrie nel piano euclideo . . . . .	23
2.3 Il Teorema di Chasles . . . . .	26
<b>3 Gruppi puntuali e reticoli</b>	<b>30</b>
3.1 Gruppi traslazionali e gruppi puntuali . . . . .	30
3.2 Reticoli . . . . .	31
<b>4 I gruppi cristallografici piani</b>	<b>36</b>
4.1 Proprietà dei gruppi cristallografici piani . . . . .	36
4.2 Classificazione dei gruppi cristallografici piani . . . . .	39
4.3 Riconoscimento dei gruppi cristallografici piani . . . . .	52
<b>5 Applicazione: <i>Mauritius Cornelius Escher</i></b>	<b>53</b>
5.1 La <i>Divisione regolare del piano</i> . . . . .	53
5.2 Il gruppo p111: <i>Pegasus</i> . . . . .	54
5.3 Il gruppo p211: <i>Lizards</i> . . . . .	55
5.4 Il gruppo p311: <i>Reptiles</i> . . . . .	56

5.5	Il gruppo p611: <i>Butterfly</i> . . . . .	57
5.6	Il gruppo p1g1: <i>Bulldogs</i> . . . . .	58
5.7	Il gruppo p2mg: <i>Crab</i> . . . . .	59
5.8	Il gruppo p4gm: <i>Bugs</i> . . . . .	60
<b>A</b>	<b>Applicazioni lineari da <math>\mathbb{R}^n</math> a <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>61</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>63</b>

# Introduzione

*Simmetria* è una parola di origine greca ed è composta da un derivato di *métron* (misura), e dal prefisso *syn* (con, insieme). Nella storia sono state evidenziate dal medico e architetto Claude Perrault (1613 - 1688) due nozioni di simmetria:

- una *simmetria degli antichi*, e
- una *nozione moderna di simmetria*.

La *simmetria degli antichi* è la simmetria dei Greci e dei Latini, fondata sul concetto di proporzione che, dal greco, indica una relazione di commisurazione numerica che permette di mettere in rapporto due elementi attraverso una misura comune. Infatti Platone, nel Timeo, descrive la proporzione nel modo seguente: ”è impossibile combinare bene due cose senza una terza: è necessario fra loro un legame che le unisca. E non c’è legame migliore di quello che fa di lui stesso e delle cose che unisce un tutto unico. Questa è la natura della proporzione”. Il concetto di simmetria fu anche fondamentale per i pitagorici, di cui Platone fu allievo. Per loro la simmetria si elevava fino ad assumere un significato mistico e religioso, che rivelava l’armonia dell’universo.

Un’altra *simmetria degli antichi* è la *symmetria* di Vitruvio (27 a.c.), da lui definita come ”accordo armonico tra le parti di una medesima opera e la rispondenza di proporzioni tra le singole parti e l’intera figura”. Quest’ultima è stata la nozione dominante durante tutto il Rinascimento. La simmetria vitruviana è quindi una composizione di elementi uniti insieme da una serie di corrispondenze numeriche e, una sua sintesi visiva, si trova nella famosa raffigurazione dell’uomo vitruviano, la cui immagine più nota è quella disegnata da Leonardo da Vinci (vedi Figura 1). In essa si vede il corpo umano inscritto nel cerchio, che simboleggia il Cielo e la perfezione divina, e nel quadrato, che rappresenta la Terra. L’uomo così rappresentato indica quindi la natura perfetta della creazione dell’uomo, che si trova in completa sintonia con Terra e Universo.

All’inizio dell’età moderna si delinea la cosiddetta *nozione moderna di simmetria*, la quale, secondo Perrault, è fondata su un ”rapporto d’uguaglianza tra parti contrapposte”, in cui per *parti contrapposte* si intendono parti che si corrispondono specularmente rispetto

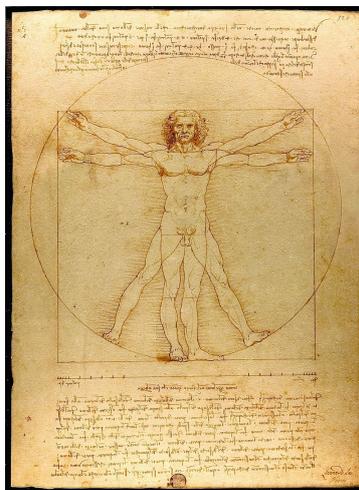


Figura 1: *L'uomo vitruviano disegnato da Leonardo Da Vinci.*

a un'asse o a un piano. Il senso moderno di simmetria nasce quindi con il concetto di *uguaglianza* tra le parti, che si distingue da quello di semplice ripetizione. Sarà proprio la *nozione moderna di simmetria* a gettare le basi per la nascita di una nozione scientifica di simmetria.

Nella prima metà dell'Ottocento inizia a formarsi quella che è nota come *nozione cristallografica di simmetria*, per cui una figura è definita simmetrica quando è composta di parti uguali (se considerate per sé stesse), disposte in modo che, sotto l'azione di determinate operazioni, si scambiano le relative posizioni lasciando invariata la figura nel suo insieme. L'ulteriore generalizzazione della nozione di simmetria si deve a uno sviluppo puramente matematico, cioè all'introduzione, da parte di Évariste Galois (1811 - 1832), del concetto algebrico di gruppo e allo sviluppo successivo della *teoria dei gruppi di trasformazione* nella seconda metà dell'Ottocento. Ad esempio, le operazioni che lasciano invariata una figura simmetrica soddisfano particolari condizioni che ci permettono di parlare di *gruppo di trasformazioni*.

Consideriamo adesso il problema di ricoprire indefinitivamente il piano con un certo motivo periodico. Lo studio dei gruppi di simmetria di questi motivi ripetuti ha portato alla conclusione che, nonostante le decorazioni del piano siano illimitate, esse sono limitate per quanto riguarda il tipo. Nel 1891 il cristallografo Evgraf Fedorov e, quasi contemporaneamente, il matematico A. M. Schoenflies, classificarono i gruppi di simmetria delle decorazioni lineari, chiamati *gruppi dei fregi*, e i gruppi di simmetria delle decorazioni del piano, chiamati *gruppi cristallografici piani*. Essi riuscirono a dimostrare che esistono solo 7 gruppi dei fregi e 17 gruppi cristallografici piani. Nel 1839 era inoltre già stato dimostrato dal mineralogista Johann Hessel che esistono solo 230 tipi diversi di gruppi cristallografici spaziali, risultato fondamentale nello studio dei cristalli.

La nozione di *gruppo di simmetria* ha trovato numerose applicazioni in diverse discipline.

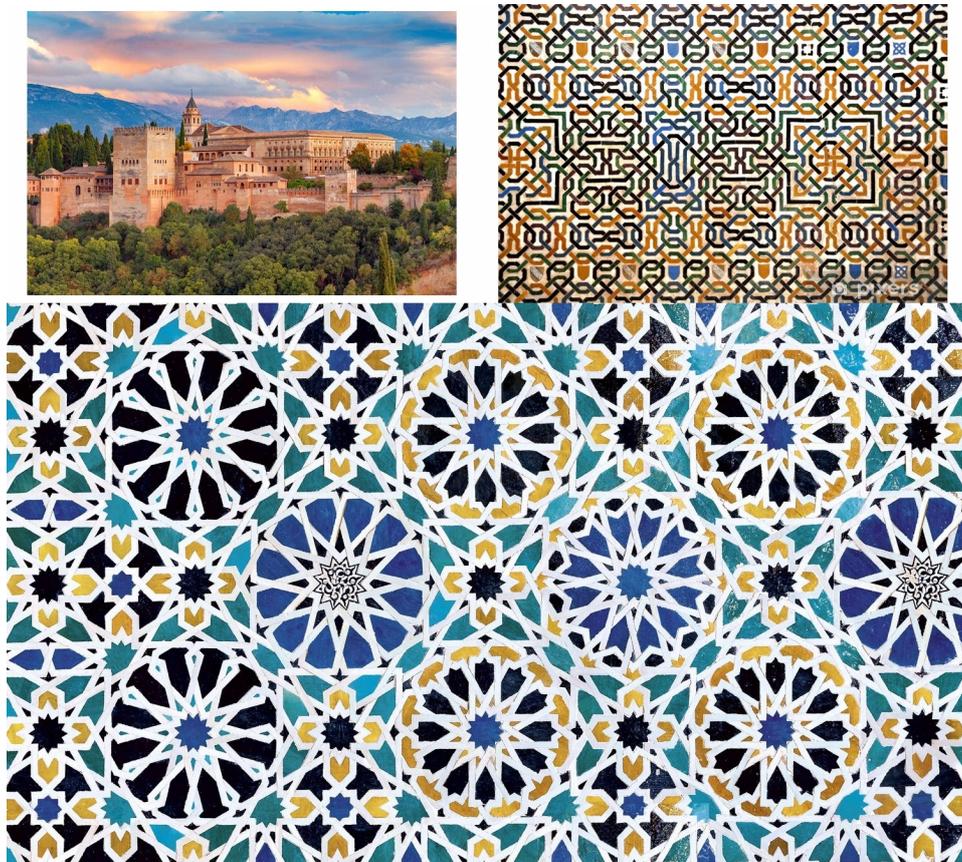


Figura 2: *In alto a sinistra si vede un'immagine della fortezza di Alhambra. Le altre due immagini rappresentano alcuni dei mosaici contenuti all'interno della fortezza.*

Ad esempio in chimica è risultata fondamentale per la classificazione delle molecole e in fisica le applicazioni della teoria dei gruppi riguardano soprattutto la fisica delle particelle. Da un punto di vista artistico l'arte araba si è resa protagonista nella realizzazione di mosaici e decorazioni sorprendenti. Un esempio è dato dalla fortezza dell'Alhambra (vedi Figura 2) che si trova in Granada, Spagna, dichiarata Patrimonio dell'umanità nel 1984. Essa risulta essere il solo monumento costruito prima della teoria dei gruppi a possedere un esempio di ognuno dei 17 gruppi cristallografici piani. Inoltre le decorazioni dell'Alhambra hanno ispirato artisti importanti, tra i quali Maurits Cornelius Escher. L'artista studiò attentamente i mosaici della fortezza e lesse numerosi libri di matematica, senza necessariamente capirli. Alla fine riuscì a realizzare 137 opere (più 14 in appendice) raccolte sotto l'album intitolato *Divisione regolare del piano*, di cui l'artista scrisse: *"Essa [la divisione regolare del piano] è la più ricca fonte di ispirazione da cui io abbia mai derivato le mie idee ed essa non è in nessun modo inaridita"*.

La tesi è strutturata come segue:

Nel primo capitolo si richiameranno alcune definizioni e proposizioni di teoria dei gruppi utili allo sviluppo della tesi. Verrà trattato il concetto di omomorfismo, affinità e spazio affine e, infine, la nozione di azione di un gruppo su un insieme.

Il secondo capitolo riguarderà il concetto di isometria in un piano euclideo e ne verrà fatta una classificazione attraverso il *Teorema di Chasles*.

Nel terzo capitolo si parlerà dei concetti di gruppo traslazionale e gruppo puntuale e verrà data una prima definizione di gruppo cristallografico piano. Verranno poi affrontati i reticoli, dei quali sarà fatta una classificazione.

Nel quarto capitolo verranno trattate alcune proprietà dei gruppi cristallografici piani attraverso due importanti teoremi, tra cui il *Teorema di restrizione cristallografica*. Saranno poi classificati i gruppi nei 17 tipi che li contraddistinguono e sarà dimostrata l'assenza di isomorfismi tra essi.

Nel quinto capitolo applicheremo le nozioni imparate ad alcune opere di M. C. Escher provenienti dall'album *Divisione regolare del piano* e riconosceremo nei suoi disegni alcuni dei gruppi cristallografici piani studiati.

# Capitolo 1

## Gruppi e rappresentazioni

In questo Capitolo verranno introdotte alcune nozioni elementari di teoria dei gruppi, tra cui i concetti di gruppo, di sottogruppo, di omomorfismo e isomorfismo, di affinità e gruppo affine, di rappresentazione e di azione di un gruppo su un insieme. Saranno infine proposti gli esempi utili dei gruppi diedrali e ciclici.

### 1.1 Definizione astratta di gruppo e sottogruppi

Gli argomenti di questo paragrafo sono stati trattati a partire da [[5] pagg. 9 - 15, 17].

**Definizione 1.1.1.** Sia un insieme  $\mathcal{G}$  di elementi  $g_1, g_2, \dots$  su cui è definita un'operazione binaria (per cui usiamo una notazione moltiplicativa) tale che:

$$\forall g_a, g_b \in \mathcal{G}, \exists g_c \in \mathcal{G} : g_a \cdot g_b = g_c. \quad (1.1)$$

La coppia  $(\mathcal{G}, \cdot)$  forma un gruppo se sono soddisfatte le seguenti proprietà:

1.  $\cdot$  è associativa:

$$(g_a \cdot g_b) \cdot g_c = g_a \cdot (g_b \cdot g_c) = g_a \cdot g_b \cdot g_c. \quad (1.2)$$

2. Esiste un elemento neutro  $\mathbb{1}$  chiamato *identità* tale che:

$$\forall g \in \mathcal{G} \quad g \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1} \cdot g = g. \quad (1.3)$$

3. Ad ogni elemento  $g$  dell'insieme corrisponde un altro elemento dell'insieme, che denotiamo con  $g^{-1}$  e chiamiamo *inverso*, tale che:

$$\forall g \in \mathcal{G}, \exists g^{-1} \in \mathcal{G} : g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = \mathbb{1}. \quad (1.4)$$

In generale non è permesso cambiare l'ordine di moltiplicazione tra elementi del gruppo, cioè  $g_a \cdot g_b \neq g_b \cdot g_a$ . Un gruppo in cui  $g_a \cdot g_b = g_b \cdot g_a$  per ogni elemento di  $\mathcal{G}$  è detto gruppo *abeliano* e si dice che i suoi elementi *commutano*.

Se un gruppo contiene un numero finito di elementi  $g_1, g_2, \dots, g_n$  viene detto gruppo finito e  $n$  è chiamato *ordine* del gruppo. Altrimenti si parla di gruppo infinito.

**Definizione 1.1.2** L'*ordine di un elemento*  $g$  di un gruppo  $(\mathcal{G}, \cdot)$  è il più piccolo numero intero positivo  $r$  tale che  $g^r = \mathbb{1}$ , dove  $g^r = \underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_{r \text{ volte}}$  e  $\mathbb{1}$  è l'elemento neutro del gruppo.

L'ordine di un elemento può essere *finito*, se  $r$  è finito, o *infinito*, se non esiste un numero  $r$  naturale tale che  $g^r = \mathbb{1}$ .

**Definizione 1.1.3.** Dato un insieme di elementi  $g$  che formano un gruppo  $\mathcal{G}$ , spesso è possibile selezionare un numero minore di elementi che, tra di essi, soddisfano la definizione di gruppo. Si dice che formano un *sottogruppo* di  $\mathcal{G}$ . Supponiamo che un gruppo  $\mathcal{G}$  contenga due sottogruppi  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{R}$  i cui elementi commutano, cioè  $h_a r_b = r_b h_a$ , con  $h_a$  che è un elemento di  $\mathcal{H}$  e  $r_b$  che è un elemento di  $\mathcal{R}$ . Se ogni elemento di  $\mathcal{G}$  può essere scritto unicamente come prodotto  $h_a r_a$ , allora  $\mathcal{G}$  è detto *prodotto diretto* di  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{R}$  e si scrive  $\mathcal{G} = \mathcal{H} \times \mathcal{R}$ . Ciò implica che l'unico elemento comune a entrambi i gruppi  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{R}$  debba essere l'identità.

### 1.1.1 Esempio 1: il gruppo $D_3$

L'insieme  $E, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$  forma un gruppo, dove  $E$  è l'identità, cioè una rotazione di un angolo nullo,  $R_1$  e  $R_2$  sono rotazioni rispettivamente di  $2\pi/3$  e di  $4\pi/3$  rispetto all'asse  $z$  e  $R_3, R_4, R_5$  sono rotazioni di  $\pi$  rispetto ai tre assi nel piano  $xy$  rappresentati nella Figura 1.1. Il gruppo viene chiamato  $D_3$  e geometricamente è il gruppo delle rotazioni che lasciano immutato un triangolo equilatero. Generalizzando,  $D_n$  prende il nome di *gruppo diedrale*.

Per visualizzare le rotazioni è utile etichettare i vertici del triangolo e seguire i loro movimenti. Ad esempio mostriamo che  $R_4 R_1 = R_3$ :

$$R_4 R_1 \begin{array}{c} \triangle \\ \text{1} \\ \text{2} \quad \text{3} \end{array} = R_4 \begin{array}{c} \triangle \\ \text{3} \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array} = \begin{array}{c} \triangle \\ \text{1} \\ \text{3} \quad \text{2} \end{array} = R_3 \begin{array}{c} \triangle \\ \text{3} \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array}$$

In questo modo è possibile verificare che l'insieme forma un gruppo usando una tabella moltiplicativa in cui le righe e le colonne sono etichettate dagli elementi del gruppo e le intersezioni danno il risultato della moltiplicazione tra due elementi. In questo caso otteniamo:

$D_3$	$E$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$
$E$	$E$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$
$R_1$	$R_1$	$R_2$	$E$	$R_4$	$R_5$	$R_3$
$R_2$	$R_2$	$E$	$R_1$	$R_5$	$R_3$	$R_4$
$R_3$	$R_3$	$R_5$	$R_4$	$E$	$R_2$	$R_1$
$R_4$	$R_4$	$R_3$	$R_5$	$R_1$	$E$	$R_2$
$R_5$	$R_5$	$R_4$	$R_3$	$R_2$	$R_1$	$E$

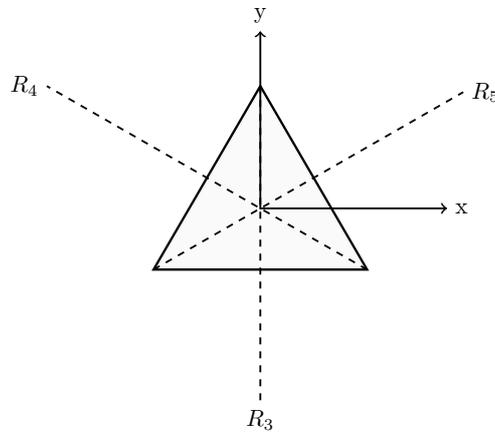


Figura 1.1: Schema con gli assi di rotazione di  $R_3, R_4, R_5$ .

Il gruppo  $D_3$  contiene numerosi sottogruppi:  $E, R_1, R_2$  (chiamato gruppo  $C_3$ );  $E, R_3$ ;  $E, R_4$  e  $E, R_5$  (isomorfi al gruppo  $C_2$ , formato da  $E$  e da una rotazione  $R$  di  $\pi$  rispetto all'asse  $z$ ).

### 1.1.2 Esempio 2: il gruppo $C_n$

Il gruppo  $C_n$ , chiamato anche *gruppo ciclico*, è un gruppo generato da un solo elemento  $g$ . Il gruppo viene definito dall'*ordine* dell'elemento  $g$ : se  $g$  è di ordine  $n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , allora gli elementi del gruppo saranno dati dalle  $n$  potenze di  $g$ ,  $C_n = \{g^0, g^1, \dots, g^{n-1}\} = \langle g \rangle$ . Si può osservare che ogni gruppo ciclico è anche abeliano. Infatti,  $\forall g \in C_n$  e  $\forall k, j \in \mathbb{N}$ , si ha:

$$g^k g^j = g^{k+j} = g^{k+k} = g^j g^k. \quad (1.5)$$

Un'altra importante proprietà di un gruppo ciclico è che anche ogni suo sottogruppo è ciclico. Per dimostrarlo consideriamo un gruppo ciclico  $\mathcal{G}$  con generatore  $g$  e un suo sottogruppo  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ .

Se  $\mathcal{H} = E = \langle E \rangle$ , con  $E = g^0$ , il sottogruppo è ciclico.

Se  $\mathcal{H} \neq E$ , allora deve esistere  $h$ , il più piccolo intero strettamente positivo tale che  $g^h \in \mathcal{H}$ . Richiediamo che sia strettamente positivo perchè, se  $\mathcal{H}$  è un sottogruppo, allora si ha anche  $g^{-h} \in \mathcal{H}$ . Quindi l'insieme  $\{k \in \mathbb{Z} : k > 0, g^k \in \mathcal{H}\}$  è non vuoto e quindi ammette un minimo.

Sia allora  $g^m$  un elemento di  $\mathcal{H}$  e dividiamo  $m$  per  $h$ . Avremo:

$$m = hq + r \quad \text{con } q, r \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq r < h. \quad (1.6)$$

Allora:

$$g^r = g^{m-hq} = g^m (g^h)^{-q} \in \mathcal{H}, \quad (1.7)$$

perché sia  $g^m$  che  $(g^h)^{-q}$  appartengono a  $\mathcal{H}$ .

Per la minimalità di  $h$ , dobbiamo avere  $r = 0$  e quindi  $m = hq$ . Avremo:

$$g^m = g^{hq} = (g^h)^q \in \langle g^h \rangle \quad (1.8)$$

e quindi  $\mathcal{H} \subseteq \langle g^h \rangle$ . Dato che  $\langle g^h \rangle \subseteq \mathcal{H}$ , concludiamo che  $\mathcal{H} = \langle g^h \rangle$ , che quindi è ciclico.

Un esempio di gruppo ciclico è, come anticipato nell'esempio precedente, il gruppo  $C_3$ , caratterizzato dall'insieme  $E, R_1, R_2$  con  $R_1$  e  $R_2$  che sono rispettivamente le rotazioni di angoli  $2\pi/3$  e  $4\pi/3$  rispetto all'asse  $z$ . La sua tavola moltiplicativa è la seguente:

$C_3 \backslash C_3$	$E$	$R_1$	$R_2$
$E$	$E$	$R_1$	$R_2$
$R_1$	$R_1$	$R_2$	$E$
$R_2$	$R_2$	$E$	$R_1$

## 1.2 Isomorfismi e affinità

Gli argomenti di questo paragrafo sono stati trattati a partire da [[5] pagg. 16, 19 - 21] e da [[3]].

Talvolta può accadere che due gruppi, i cui elementi sono definiti in maniera diversa, siano algebricamente lo stesso gruppo.

**Definizione 1.2.1.** Due gruppi  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{H}$  sono quindi detti *isomorfi* se esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi  $g_a$  di  $\mathcal{G}$  e gli elementi  $h_a$  di  $\mathcal{H}$ , tali che se  $g_a g_b = g_c$  allora  $h_a h_b = h_c$  (dove il simbolo moltiplicativo  $\cdot$  è stato omesso).

**Definizione 1.2.2.** Dati due gruppi  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{H}$ , un'applicazione  $\omega : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$  è detta *omomorfismo* se  $\omega(g_a \cdot g_b) = \omega(g_a) \cdot \omega(g_b)$  per ogni  $g_a, g_b \in \mathcal{G}$ . Un omomorfismo biiettivo è detto *isomorfismo* e, in questo caso, anche il suo inverso  $\omega^{-1}$  è un isomorfismo.

**Proposizione 1.2.1.** Sia  $\omega : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$  un'omomorfismo tra gruppi. Allora  $\omega$  preserva gli elementi neutri e inversi, cioè  $\omega(\mathbb{1}) = \mathbb{1}'$ , con  $\mathbb{1} \in \mathcal{G}$  e  $\mathbb{1}' \in \mathcal{H}$ , e  $\omega(g)^{-1} = \omega(g^{-1})$ , con  $g \in \mathcal{G}$ .

*Dimostrazione.* Dalla definizione di omomorfismo abbiamo che:

$$\mathbb{1}'\omega(g) = \omega(g) = \omega(\mathbb{1} \cdot g) = \omega(\mathbb{1}) \cdot \omega(g), \quad (1.9)$$

quindi  $\omega(\mathbb{1}) = \mathbb{1}'$ . Inoltre:

$$\mathbb{1}' = \omega(\mathbb{1}) = \omega(g \cdot g^{-1}) = \omega(g) \cdot \omega(g^{-1}), \quad (1.10)$$

quindi  $\omega(g^{-1}) = \omega(g)^{-1}$ .

**Proposizione 1.2.2.** Sia  $\omega : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$  un'omomorfismo tra gruppi. Allora  $\ker(\omega)$ , cioè il sottoinsieme  $f^{-1}(\mathbb{1}')$  di  $\mathcal{G}$ , e  $Im(\omega)$ , cioè il sottoinsieme  $f(\mathcal{G})$  di  $\mathcal{H}$ , sono rispettivamente sottogruppi di  $\mathcal{G}$  e di  $\mathcal{H}$ , con  $\mathbb{1}'$  che è l'elemento neutro di  $\mathcal{H}$ .

*Dimostrazione.*  $\ker(\omega)$  è un sottogruppo di  $\mathcal{G}$  perché soddisfa le proprietà di gruppo (vedi definizione 1.1.1):

1. per la proposizione 1.2.1  $\mathbb{1}' = \omega(\mathbb{1})$ , quindi  $\mathbb{1}$  è l'elemento neutro di  $\ker(\omega)$ ;
2. sia  $g \in \ker(\omega)$ . Allora anche  $g^{-1}$  appartiene a  $\ker(\omega)$  perché, per la proposizione 1.2.1:

$$\mathbb{1}' = \omega(g) \cdot \omega(g^{-1}) = \mathbb{1}' \cdot \omega(g^{-1}), \quad (1.11)$$

quindi  $\omega(g^{-1}) = \mathbb{1}'$  e quindi  $g^{-1} \in \ker(\omega)$ ;

3. siano  $g, g' \in \ker(\omega)$ . Allora:

$$\omega(g \cdot g') = \omega(g) \cdot \omega(g') = \mathbb{1}' \cdot \mathbb{1}' = \mathbb{1}', \quad (1.12)$$

quindi  $g \cdot g' \in \ker(\omega)$ .

$Im(\omega)$  è un sottogruppo di  $\mathcal{H}$  perché soddisfa le proprietà di gruppo (vedi definizione 1.1.1):

1. per la proposizione 1.2.1  $\omega(\mathbb{1}) = \mathbb{1}'$ , quindi  $\mathbb{1}'$  è l'elemento neutro di  $Im(\omega)$ ;
2. dato  $\omega(g) \in Im(\omega)$ , per la proposizione 1.2.1 abbiamo che  $\omega(g)^{-1} = \omega(g^{-1})$ , quindi l'inverso di un elemento di  $Im(\omega)$  esiste e appartiene a  $Im(\omega)$ ;

3. dati  $\omega(g), \omega(g') \in \ker \omega$ , abbiamo che per la definizione di omomorfismo  $\omega(g) \cdot \omega(g') = \omega(g \cdot g')$ , quindi  $\omega(g) \cdot \omega(g')$  appartiene a  $\text{Im}(\omega)$ .

**Proposizione 1.2.3.** Se  $\omega : G \rightarrow G'$  è un omomorfismo tra gruppi e  $g \in G$  è un elemento di ordine finito, allora l'ordine di  $\omega(g)$  è un divisore dell'ordine di  $g$ . Se  $\omega$  è iniettivo, l'ordine di  $\omega(g)$  è uguale all'ordine di  $g$ .

*Dimostrazione.* Sia  $g$  di ordine  $n$ . Ciò significa che  $g^n = \underbrace{g \cdot g \cdots g}_{n \text{ volte}} = \mathbb{1}'$  con  $\mathbb{1}' \in G'$ .

Essendo  $\omega$  un omomorfismo, vale  $\omega(g^n) = \underbrace{\omega(g) \cdot \omega(g) \cdots \omega(g)}_{n \text{ volte}} = \mathbb{1}'$  e ciò è vero

se l'ordine di  $\omega(g)$  è un divisore  $m$  di  $n$ , perché in questo modo avremo  $\omega(g^n) = \underbrace{\omega(g)^m \cdot \omega(g)^m \cdots \omega(g)^m}_{p \text{ volte}} = \underbrace{\mathbb{1}' \cdot \mathbb{1}' \cdots \mathbb{1}'}_{p \text{ volte}} = \mathbb{1}'$  con  $n \setminus m = p$  e  $n, m, p$  interi.

Se  $\omega$  è iniettivo significa che il suo nucleo contiene solo l'elemento neutro  $\mathbb{1}$ . Prendendo l'elemento  $g$  di prima, vediamo che non può valere  $\omega(g)^m = \mathbb{1}'$ : infatti  $\omega(g)^m = \omega(g^m)$  per definizione di omomorfismo, ma  $g^m \neq \mathbb{1}$ , quindi, per l'injectività di  $\omega$ ,  $\omega(g^m) \neq \mathbb{1}'$ . Di conseguenza deve valere  $\omega(g)^n = \omega(g^n) = \mathbb{1}'$ , perché per come abbiamo definito  $g$ ,  $g^n = \mathbb{1}$ . Quindi se  $g$  è di ordine  $n$  e  $\omega$  è iniettivo, anche  $\omega(g)$  è di ordine  $n$ .

Le trasformazioni più interessanti da un punto di vista geometrico sono le *affinità*. Diamo prima la definizione di *spazio affine*.

**Definizione 1.2.3.** Uno spazio affine su un campo  $\mathcal{K}$  è una terna  $(A, L, +)$  dove:

1.  $A$  è un insieme non vuoto, i cui elementi sono i *punti*  $P$  dello spazio;
2.  $L$  è uno spazio vettoriale su  $\mathcal{K}$ , i cui elementi sono i *vettori* dello spazio;
3.  $+ : A \times L \rightarrow A$  è un'applicazione  $(P, \mathbf{v}) \rightarrow P + \mathbf{v}$ , con  $P \in A$  e  $\mathbf{v} \in L$ , che soddisfa le seguenti condizioni:
  - (a) *compatibilità con la somma di  $L$* :  $(P + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = P + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ , per ogni  $P \in A$  e  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in L$ ;
  - (b) *fedeltà*:  $P + \mathbf{v} = P$  se e solo se  $\mathbf{v} = 0$ ;
  - (c) *transitività*: per ogni coppia di punti  $P$  e  $Q$  in  $A$ , esiste un vettore  $\mathbf{v} \in L$  tale che  $P + \mathbf{v} = Q$ .

La dimensione dello spazio vettoriale  $L$  su  $\mathcal{K}$  prende il nome di *dimensione* dello spazio affine.

Possiamo adesso dare la definizione di *affinità*:

**Definizione 1.2.4.** Siano due spazi affini  $(A, L, +)$  e  $(A', L', +)$  su un campo  $\mathcal{K}$ . Un *isomorfismo affine* è un isomorfismo  $f : A \rightarrow A'$  di  $A$  su  $A'$  tale che esiste un isomorfismo degli spazi vettoriali associati  $\phi : L \rightarrow L'$  che soddisfa la condizione:  $f(P + \mathbf{v}) = f(P) + \phi(\mathbf{v})$  per ogni  $P \in A$  e  $\mathbf{v} \in L$ . Se  $A = A'$  si parla di *affinità*. In questo caso  $\phi$ , essendo un isomorfismo che va in sé stesso, prende il nome di *automorfismo*.

**Proposizione 1.2.4.** Siano  $(A, L, +), (A', L', +), (A'', L'', +)$  spazi affini sullo stesso campo  $\mathcal{K}$ , siano gli isomorfismi affini  $f : A \rightarrow A'$  e  $f' : A' \rightarrow A''$  e siano gli isomorfismi sugli spazi vettoriali associati  $\phi : L \rightarrow L'$  e  $\phi' : L' \rightarrow L''$ . Allora anche  $f' \circ f$  è un isomorfismo affine.

*Dimostrazione.* Siano  $P$  un punto di  $A$  e  $\mathbf{v}$  un vettore di  $L$ . Avremo:

$$(f' \circ f)(P + \mathbf{v}) = f'(f(P + \mathbf{v})) = f'(f(P) + \phi(\mathbf{v})) = f'(f(P)) + \phi'(\phi(\mathbf{v})) = f'(P') + \phi'(\mathbf{v}') \quad (1.13)$$

con  $P'$  punto di  $A'$  e  $\mathbf{v}'$  vettore di  $L'$ . Essendo una composizione di isomorfismi, anch'essa un isomorfismo, abbiamo che la proposizione è provata.

Se in particolare si compongono tra loro delle affinità, quindi degli isomorfismi affini di uno spazio affine in sé stesso, si ottengono ancora delle affinità. L'insieme delle affinità su uno spazio affine  $A$  forma un gruppo, in generale non abeliano, secondo la legge di composizione  $\circ$ . Possiamo vedere come le condizioni di gruppo siano rispettate:

1. l'operazione di composizione è un'operazione associativa;
2. esiste l'elemento neutro  $id_A$  tale che  $id_A(P + \mathbf{v}) = P + \mathbf{v}$ ;
3. essendo un'affinità  $f$  biettiva, esiste l'elemento inverso  $f^{-1}$  che è anch'esso un isomorfismo affine.

### 1.2.1 Esempio: il gruppo $\mathcal{S}_3$ e il gruppo $D_3$

Definiamo il gruppo  $\mathcal{S}_3$  (nel caso più generale il gruppo è rappresentato col simbolo  $\mathcal{S}_n$  ed è chiamato *gruppo simmetrico*) delle permutazioni  $P$  di tre oggetti per mostrare il suo isomorfismo con il gruppo  $D_3$ , definito precedentemente.

Per denotare una permutazione è utile usare la seguente notazione:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

in cui i numeri  $p_1 p_2 \dots p_n$  sono un riarrangiamento dei numeri  $1 2 \dots n$ . L'inverso  $P^{-1}$  dell'elemento  $P$  si può quindi scrivere come:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Per  $n = 3$  abbiamo:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ad esempio:

$$P_1 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = P_4.$$

In questo modo possiamo scrivere la seguente tabella moltiplicativa.

$\mathcal{S}_3 \backslash \mathcal{S}_3$	$I$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$I$	$I$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$P_1$	$P_1$	$I$	$P_4$	$P_5$	$P_2$	$P_3$
$P_2$	$P_2$	$P_5$	$I$	$P_4$	$P_3$	$P_1$
$P_3$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$I$	$P_1$	$P_2$
$P_4$	$P_4$	$P_3$	$P_1$	$P_2$	$P_5$	$I$
$P_5$	$P_5$	$P_2$	$P_3$	$P_1$	$I$	$P_4$

Notiamo che la corrispondenza  $I \leftrightarrow E$ ,  $R_1 \leftrightarrow P_5$ ,  $R_2 \leftrightarrow P_4$ ,  $R_3 \leftrightarrow P_1$ ,  $R_4 \leftrightarrow P_2$ ,  $R_5 \leftrightarrow P_3$ , mostra l'isomorfismo tra i gruppi  $D_3$  e  $\mathcal{S}_3$ . Per l'isomorfismo, la struttura dei sottogruppi del gruppo  $\mathcal{S}_3$  ha la stessa struttura di quella del gruppo  $D_3$ .

### 1.3 Rappresentazioni di un gruppo

Gli argomenti di questo paragrafo sono stati trattati a partire da [[5] pagg. 43 - 51] e da [[3]]. **Definizione 1.3.1.** Sia  $T$  un insieme di operatori lineari  $T(g_i)$  definito su uno spazio vettoriale  $L$ . Gli operatori sono lineari nel senso che, dati dei vettori  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}$  in  $L$ :

$$T(g_a)(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = T(g_a)\mathbf{r}_1 + T(g_a)\mathbf{r}_2. \quad (1.14)$$

$$T(g_a)c\mathbf{r} = cT(g_a)\mathbf{r}. \quad (1.15)$$

Se ad ogni operatore  $T(g_a)$  corrisponde un elemento  $g_a$  del gruppo  $\mathcal{G}$  tale che

$$T(g_a)T(g_b) = T(g_a g_b), T(E) = \mathbb{1}, \quad (1.16)$$

si dice che questo insieme di operatori forma una *rappresentazione* del gruppo  $\mathcal{G}$  nello spazio  $L$ .

La rappresentazione  $T(g_a)$  è detta *fedele* se c'è un isomorfismo, quindi una corrispondenza uno a uno, tra gli operatori  $T(g_a)$  e gli elementi del gruppo  $g_a$ . In generale può succedere che elementi diversi di un gruppo siano mappati dallo stesso operatore.

Si è soliti definire un operatore attraverso una matrice secondo una base opportuna. Quindi, scegliendo una base  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_s$  in  $L$ , possiamo formare una matrice per ogni operatore  $T(g_a)$  tale che:

$$T(g_a)\mathbf{e}_i = \sum_j T_{ji}(g_a)\mathbf{e}_j, \quad (1.17)$$

con  $T_{ij}(g_a)$  che sono gli elementi di matrice. Le matrici  $T(g_a)$  così definite obbediscono all'equazione 1.16 attraverso l'ordinaria moltiplicazione tra matrici. Infatti:

$$\begin{aligned} T(g_a)T(g_b)\mathbf{e}_i &= \sum_j T(g_a)T_{ji}(g_b)\mathbf{e}_j \\ &= \sum_j \sum_k T_{ji}(g_b)T_{kj}(g_a)\mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (1.18)$$

e

$$\begin{aligned} T(g_a)T(g_b)\mathbf{e}_i &= T(g_ag_b)\mathbf{e}_i \\ &= \sum_k T_{ki}(g_ag_b)\mathbf{e}_k. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Quindi, affinché 1.16 sia valida, deve valere:

$$T_{ki}(g_ag_b) = \sum_j T_{kj}(g_a)T_{ji}(g_b). \quad (1.20)$$

Adesso, prima di definire il concetto fondamentale di rappresentazione irriducibile, è necessario dare altre definizioni:

**Definizione 1.3.2.** Sia  $L_1 \subseteq L$  un sottospazio dello spazio vettoriale  $L$  su cui è definito un prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Definiamo *complemento ortogonale*  $L_1^\perp$  di  $L_1$  in  $L$  il sottospazio di tutti i vettori di  $L$  ortogonali ai vettori di  $L_1$  rispetto al prodotto scalare. Quindi:

$$L_1^\perp = \{\mathbf{r} \in L : \langle \mathbf{r}, \mathbf{r}_1 \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{r}_1 \in L_1\}. \quad (1.21)$$

**Definizione 1.3.3.** Sia un operatore  $T$  definito in uno spazio  $L$  e sia un sottospazio  $L_1$  di  $L$  tale che, dato un vettore  $\mathbf{r}_1$  in  $L_1$ , il vettore trasformato  $\mathbf{r}'_1 = T\mathbf{r}_1$  giace anch'esso

nel sottospazio  $L_1$ . Un sottospazio con questa caratteristica è detto *invariante* rispetto all'operatore  $T$ . Più in generale, dato un insieme di operatori  $T(g_a)$  in  $L$ ,  $L_1$  è detto *sottospazio invariante* se è invariante rispetto a tutte le trasformazioni indotte dal gruppo  $\mathcal{G}$ .

**Definizione 1.3.4.** Sia  $L$  uno spazio vettoriale invariante rispetto alle trasformazioni  $T(g_a)$  indotte da un gruppo  $\mathcal{G}$ . Sia poi  $L_1$  un sottospazio invariante di  $L$ . Se il complemento ortogonale  $L_2$  di  $L_1$  è anch'esso invariante, allora la rappresentazione  $T$  è detta *riducibile*. In caso contrario è detta *irriducibile*.

È quindi possibile dividere uno spazio  $L$  in una somma di sottospazi  $L_q$  ognuno dei quali è invariante e irriducibile. Questa divisione non è necessariamente unica. Possiamo quindi scrivere  $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots$  in cui ogni  $L_q$  è irriducibile e invariante sotto le trasformazioni  $T(g_a)$ . La corrispondente rappresentazione può essere scritta in forma di una matrice diagonale a blocchi, dove la matrice  $T^{(q)}(g_a)$  è una matrice quadrata di dimensione uguale a quella del sottospazio  $L_q$  e dove gli 0 rappresentano delle matrici rettangolari nulle.

$$\begin{pmatrix} T^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & T^{(3)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Dato adesso uno spazio affine  $(A, L, +)$ , cerchiamo una rappresentazione per il gruppo affine  $Aff(A)$ . Diamo prima la definizione di *sistema di riferimento affine*:

**Definizione 1.3.5.** Si chiama *sistema di riferimento affine*  $R = \{O, V\}$  nello spazio affine  $(A, L, +)$ , la scelta di un punto  $O \in A$ , chiamato *origine* del riferimento, e di una *base ordinata*  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  base dello spazio  $V$ . Le coordinate di un vettore  $r \in L$  nel riferimento  $R$  sono le coordinate del vettore  $\mathbf{r}$  nella base  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Le coordinate di un punto  $P \in A$  nel riferimento  $R$  sono le coordinate del vettore  $P - O$  nello stesso riferimento.

La scelta di un sistema di riferimento affine permette di associare alle applicazioni affini e, quindi, alle affinità, delle matrici.

Sia  $f : A \rightarrow A$  un'affinità su uno spazio affine  $(A, L, +)$  di dimensione  $n$  e sia il sistema di riferimento affine  $R = \{O, V\}$ . Dato un punto  $X = O + \mathbf{x}$ , con  $X \in A$  e  $\mathbf{x} \in L$ , si ha:

$$f(X) = f(O) + \phi(\mathbf{x}) = O + \mathbf{t} + \phi(\mathbf{x}), \quad (1.22)$$

dove  $\phi : L \rightarrow L$  è l'applicazione lineare associata a  $f$  e  $\mathbf{t} = f(O) - O$ .

Siano quindi  $f(O) - O = \mathbf{t} = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n$  e  $M = \alpha_{L,L}(\phi) \in M_{n,n}(K)$ , dove

$M_{n,n}(K)$  sono le matrici quadrate  $n \times n$  definite sul campo  $K$ , che mi descrive l'azione dell'applicazione lineare  $\phi$  sul vettore  $\mathbf{x}$ .

Ponendo  $\mathbf{t} + \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ , avremo anche  $f(X) = O + y_1v_1, \dots, y_nv_n$ , in funzione di  $X = O + x_1v_1, \dots, x_nv_n$ , cioè:

$$\mathbf{y} = M\mathbf{x} + \mathbf{t}. \quad (1.23)$$

Ciò significa che un'affinità, quindi un elemento del gruppo affine  $Aff(A)$ , è sempre determinata da una matrice quadrata  $M$  e da un vettore  $\mathbf{t}$ .

### 1.3.1 Esempio: il gruppo $D_3$

Cerchiamo una rappresentazione fedele per il gruppo  $D_3$  introdotto nel paragrafo 1.1.1. Come visto in Figura 1.1, scegliamo come vettori di base  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  e  $\mathbf{e}_z$ , con  $\mathbf{e}_z$  che punta fuori dal foglio. Avremo, per esempio, che l'elemento  $R_1$  del gruppo, il quale descrive una rotazione di  $120^\circ$  rispetto all'asse  $z$ , sarà mappato nel seguente modo:

$$\begin{aligned} T(R_1)\mathbf{e}_x &= \mathbf{e}'_x = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_y \\ T(R_1)\mathbf{e}_y &= \mathbf{e}'_y = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_x - \frac{1}{2}\mathbf{e}_y \\ T(R_1)\mathbf{e}_z &= \mathbf{e}'_z = \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Per l'equazione 1.17 otteniamo:

$$T(R_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per gli altri elementi del gruppo avremo:

$$\begin{aligned} T(R_2) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & T(R_3) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ T(R_4) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & T(R_5) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \text{con } T(E) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si verifica che queste matrici formano la stessa tabella moltiplicativa degli elementi del gruppo 1.2.1.

## 1.4 Azione di un gruppo su un insieme

Gli argomenti di questo paragrafo sono stati trattati a partire da [[6] pagg. 1 - 2].

**Definizione 1.4.1.** Sia  $X$  un insieme e  $(\mathcal{G}, \cdot)$  un gruppo. Un'azione del gruppo su  $X$  è un'applicazione del tipo:

$$\begin{aligned}\mathcal{G} \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longrightarrow g * x\end{aligned}\tag{1.25}$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

1.  $\mathbb{1} * x = x$  per ogni  $x \in X$ ;
2.  $(g_1 \cdot g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$  per ogni  $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$  e per ogni  $x \in X$ .

**Definizione 1.4.2.** Sia  $\mathcal{G}$  un gruppo che agisce su un insieme  $X$ . Si dice *orbita* di  $x \in X$  l'insieme  $orb(x) = \{g * x : g \in \mathcal{G}\}$ .

# Capitolo 2

## Isometrie del piano euclideo

In questo Capitolo verrà introdotto il concetto di isometria che ci permetterà di giungere al *teorema di Chasles*.

### 2.1 Definizione di isometria e proprietà

Gli argomenti di questo paragrafo sono stati trattati a partire da [[8] pagg. 243 - 250] e [[2] pagg. 68 - 69].

Nel Capitolo precedente è stata data la nozione di spazio affine che, adesso, ci è utile per ottenere la definizione di *spazio euclideo*.

**Definizione 2.1.1.** Uno spazio affine  $(E, V, +)$  su un campo  $\mathcal{K}$  è detto *spazio euclideo* se lo spazio vettoriale  $V$  è dotato di un prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e, quindi, se  $V$  è uno *spazio vettoriale euclideo*. In genere  $V$  viene denotato con  $E^n$ .

**Definizione 2.1.2.** Dato un insieme  $X$  definiamo *distanza* l'applicazione

$$d : X \times X \longrightarrow \mathcal{R} \tag{2.1}$$

tale che, per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ :

1.  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$  e  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$ ;
2.  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  (*Simmetria*);
3.  $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  (*Disuguaglianza triangolare*).

Se  $X = E^n$ , la distanza su uno spazio euclideo, dato il prodotto scalare euclideo, è definita come:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle} = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}, \quad (2.2)$$

con  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  e dove  $\|\cdot\|$  è la *norma euclidea*.

**Definizione 2.1.3.** Dato uno spazio euclideo  $(E, E^n, +)$ , l'angolo interno  $\theta$  tra due vettori  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^n$  è definito nel seguente modo:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}. \quad (2.3)$$

Dai risultati ottenuti alla fine del paragrafo 1.3 sappiamo che un'affinità in uno spazio euclideo  $(E, E^n, +)$  è una trasformazione del tipo

$$\mathbf{x} \longrightarrow M\mathbf{x} + \mathbf{t} \quad (2.4)$$

dove  $M$  è una matrice quadrata  $n \times n$  e  $\mathbf{t}$  è un vettore di  $E^n$ .

Prima di poter definire il concetto di *isometria* è necessaria un'ultima definizione:

**Definizione 2.1.4.** Un operatore lineare  $T : L \longrightarrow L$  si dice *unitario* se:

$$\langle T(\mathbf{v}), T(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \quad (2.5)$$

per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in L$ .

Quindi un operatore  $T$  è unitario se preserva il prodotto scalare.

Mostriamo adesso che gli operatori unitari formano un gruppo. Essendo la norma di un vettore definita come  $\|T(\mathbf{v})\| = \sqrt{\langle T(\mathbf{v}), T(\mathbf{v}) \rangle}$ , un operatore unitario conserva anche la norma di un vettore. Da ciò segue che se  $T$  è unitario, allora  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$  implica  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Questo significa che nel nucleo (vedi l'Appendice A) di  $T$  è contenuto solo il vettore nullo e, quindi, che l'operatore  $T$  è invertibile (per i dettagli della dimostrazione vedere l'Appendice A). Dimostriamo che, dato un'operatore unitario  $T$ , il suo inverso  $T^{-1}$  è unitario:

$$\langle T(\mathbf{v}), T(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle T^{-1}(T(\mathbf{v})), T^{-1}(T(\mathbf{w})) \rangle. \quad (2.6)$$

Se poniamo  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{x}$  e  $T(\mathbf{w}) = \mathbf{y}$ , otteniamo:

$$\langle T^{-1}(\mathbf{x}), T^{-1}(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad (2.7)$$

quindi  $T^{-1}$  è unitario.

L'elemento neutro del gruppo è dato dall'operatore identità  $id(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ , il quale è ovviamente unitario.

Serve ora mostrare come la composizione di due operatori unitari sia ancora unitaria. Dati  $T$  e  $T'$  due operatori unitari, abbiamo:

$$\langle T(T'(\mathbf{v})), T'(T(\mathbf{w})) \rangle = \langle T'(\mathbf{v}), T(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \quad (2.8)$$

in cui abbiamo usato due volte la definizione di operatore unitario.

Gli operatori unitari formano quindi un gruppo che, dato uno spazio vettoriale  $L$  su cui gli operatori agiscono, prende il nome di *gruppo ortogonale* e si denota con  $O(L)$ . Il gruppo ortogonale risulta essere un sottogruppo del *gruppo generale lineare*,  $GL(L)$ , cioè il gruppo delle matrici quadrate invertibili.

Gli elementi del gruppo ortogonale sono rappresentati dalle matrici ortogonali, cioè matrici quadrate invertibili  $A$  tali che  $A^{-1} = A^T$ . Infatti in  $\mathbb{R}^n$ , usando il prodotto scalare standard, vale  $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, A^T\mathbf{w} \rangle$ , quindi, se una matrice ortogonale deve preservare il prodotto scalare:

$$\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, A^T A\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \quad (2.9)$$

deve valere  $A^T A = \mathbb{1}$  e, di conseguenza,  $A^T = A^{-1}$ .

Si noti inoltre che per ogni matrice ortogonale  $A$  vale  $\det(A) = \pm 1$ , infatti, per il *teorema di Binet* (vedi l'Appendice A) e per il fatto che una matrice e la sua trasposta hanno lo stesso determinante:

$$1 = \det(\mathbb{1}) = \det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = (\det(A))^2. \quad (2.10)$$

Possiamo adesso dare la definizione di *isometria*.

**Definizione 2.1.5.** Sia  $(E, E^n, +)$  uno spazio euclideo. Un'affinità  $f : E \rightarrow E$  si dice *isometria* di  $E$  se l'automorfismo associato  $\phi : E^n \rightarrow E^n$  è un operatore unitario.

Essendo l'identità  $id_E$  un'isometria, poiché l'automorfismo associato, cioè l'identità in  $E^n$ , è unitaria, e poiché sia la composizione di due isometrie che l'inversa di un'isometria danno origine a un'isometria, si può concludere che le isometrie di  $E$  costituiscono un sottogruppo del gruppo affine euclideo  $Aff(E)$ . Esse formano quindi un gruppo che indicheremo con  $Isom(E)$  e che prende il nome di *gruppo delle isometrie di  $E$* . In particolare il gruppo delle isometrie del piano viene chiamato *gruppo euclideo* e denotato con  $E_2$ .

**Definizione 2.1.6.** Un'isometria  $f$  con automorfismo associato  $\phi$  si dice *diretta* se  $\det(\phi) = 1$ , e *inversa* se  $\det(\phi) = -1$ .

Le isometrie dirette formano un sottogruppo del gruppo ortogonale precedentemente definito, chiamato *gruppo ortogonale speciale* e denotato con  $SO(2)$  (il 2 indica che ci troviamo in uno spazio euclideo bidimensionale). Gli elementi di  $SO(2)$  sono le matrici nella forma:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Un elemento  $A \in O(2) \setminus SO(2)$  si può ottenere come prodotto:

$$A = (AB)B^{-1}, \quad (2.11)$$

dove  $B \in O(2) \setminus SO(2)$  e  $AB \in SO(2)$ . Quindi  $A$  può essere scritta come il prodotto di una matrice in  $SO(2)$  e una in  $O(2) \setminus SO(2)$ . Se poniamo:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

osserviamo che tutti gli elementi di  $O(2) \setminus SO(2)$  sono nella forma:

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

**Osservazione 2.1.1.** Ricordiamo che nella sua forma più generale, un'isometria è scritta come  $\mathbf{y} = M\mathbf{x} + \mathbf{t}$ , quindi per descrivere con un'unica matrice un'isometria diretta possiamo scrivere:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & t_1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un'isometria inversa può invece venire scritta come:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & t_1 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le isometrie mantengono invariate le proprietà euclidee quali le distanze e gli angoli.

**Proposizione 2.1.1.** Sia  $f \in Isom(E)$ . Allora  $\forall P, Q \in E$  vale:

$$d(P, Q) = d(f(P), f(Q)). \quad (2.12)$$

*Dimostrazione.* Dato un riferimento  $R = \{O, V\}$ , abbiamo  $P = O + \mathbf{x}$  e  $Q = O + \mathbf{x}'$ . Per l'equazione 1.23, abbiamo  $f(P) = O + \mathbf{y}$  e  $f(Q) = O + \mathbf{y}'$ , con  $\mathbf{y} = M\mathbf{x} + \mathbf{t}$  e

$\mathbf{y}' = M\mathbf{x}' + \mathbf{t}$ . Quindi, esprimendo  $P, Q, f(P), f(Q)$  secondo le coordinate definite dalla definizione 1.3.5, abbiamo:

$$\begin{aligned} d(f(P), f(Q)) &= d(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = d(M\mathbf{x} + \mathbf{t}, M\mathbf{x}' + \mathbf{t}) \\ &= \|M\mathbf{x} + \mathbf{t} - (M\mathbf{x}' + \mathbf{t})\| = \|M\mathbf{x} - M\mathbf{x}'\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \\ &= d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = d(P, Q), \end{aligned} \quad (2.13)$$

perché  $M$ , per la definizione di isometria 2.1.5, è un operatore unitario e conserva la norma.

**Proposizione 2.1.2.** Sia  $f \in Isom(E)$ . Allora se  $P, Q \in E$  e dato il sistema di riferimento affine  $R = \{O, V\}$ , si ha:

$$\widehat{POQ} = f(\widehat{P}O\widehat{f}(Q)). \quad (2.14)$$

*Dimostrazione.* La proposizione segue dalla definizione 2.1.3 di angolo in uno spazio euclideo e dalla proprietà che hanno le isometrie di preservare norme e prodotti scalari.

**Definizione 2.1.7** Data un'isometria  $f \in Isom(E)$  viene chiamato *punto fisso* un punto  $P \in E$  tale che:

$$f(P) = P. \quad (2.15)$$

## 2.2 Classificazione delle isometrie nel piano euclideo

Gli argomenti di questo paragrafo sono stati trattati a partire da [[8] pagg. 256 - 260] e [[11] pagg. 5 - 10].

Le isometrie del piano possono essere suddivise in:

1. traslazioni;
2. rotazioni;
3. riflessioni;
4. glissoriflessioni.

Attraverso il *Teorema di Chasles* dimostreremo che sono le uniche possibili isometrie esistenti.

1. Una traslazione (vedi Figura 2.1) è una trasformazione  $T$  del tipo:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x} &\longrightarrow \mathbf{x} + \mathbf{t} \end{aligned} \quad (2.16)$$

con  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$ .

L'inversa di una traslazione è una trasformazione del tipo:

$$\begin{aligned} T^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x} &\longrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{t} \end{aligned} \tag{2.17}$$

La traslazione è un'isometria diretta e non ha punti fissi.

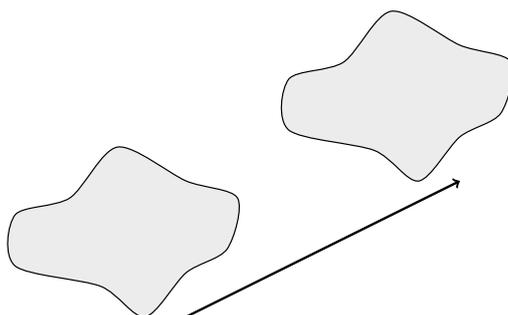


Figura 2.1: *Schema di una traslazione.*

2. Dato un sistema di riferimento  $R = \{O, V\}$ , con  $O$  origine, una rotazione (vedi Figura 2.2) di un angolo  $\theta$  intorno all'origine è definita come:

$$\begin{aligned} R : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longrightarrow R_\theta x \end{aligned} \tag{2.18}$$

con  $R_\theta$  che è una matrice ortogonale  $2 \times 2$  del tipo:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Se  $\theta > 0$  la rotazione va intesa in senso antiorario, se  $\theta < 0$  va invece intesa in senso orario.

Si tratta di un'isometria diretta e ha come unico punto fisso il centro  $O$ .

3. Dato un sistema di riferimento  $R = \{O, V\}$ , con  $O$  origine, una riflessione (vedi Figura 2.3) rispetto alla retta  $r$  che passa per  $O$  e forma un angolo  $\theta$  con l'asse delle ascisse è definita da:

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longrightarrow S_\theta x \end{aligned} \tag{2.19}$$

con  $S_\theta$  che è una matrice ortogonale  $2 \times 2$  del tipo:

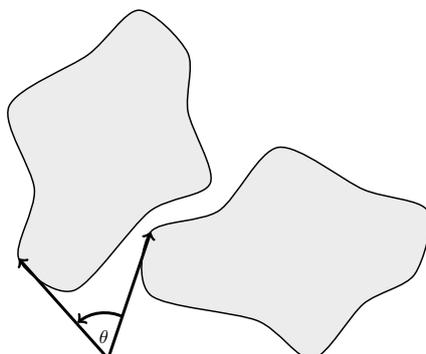


Figura 2.2: *Schema di una rotazione.*

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

Si tratta di un'isometria inversa e sono fissi tutti i punti della retta  $r$ .

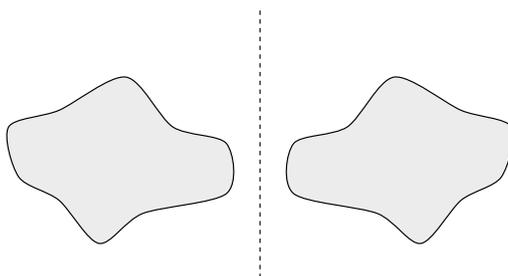


Figura 2.3: *Schema di una riflessione.*

4. Una glissoriflessione (vedi Figura 2.4) è un'isometria che si ottiene dalla composizione di una riflessione rispetto a una retta  $r$  e una traslazione lungo un vettore parallelo a  $r$ .

Si tratta di un'isometria inversa e non ha punti fissi.

**Osservazione 2.2.1** Le riflessioni generano, per composizione, tutte le altre isometrie del piano.

Infatti una traslazione  $T$  che trasforma un punto  $A$  in un punto  $B$  può essere scritta

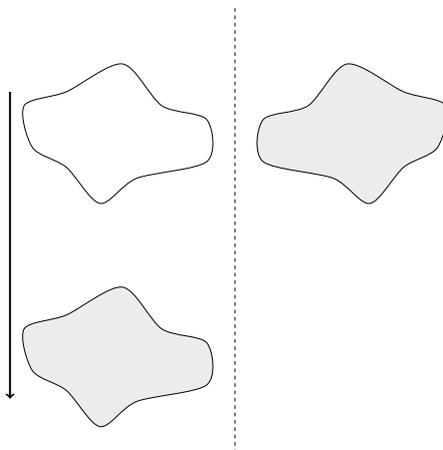


Figura 2.4: *Schema di una glissoriflessione.*

come  $T_{A,B} = S_{m_2} \circ S_{m_1}$ , dove  $S_{m_1}$  è la riflessione rispetto all'asse  $m_1$  passante per il punto medio di  $\overline{AB}$  e  $S_{m_2}$  è la riflessione rispetto all'asse  $m_2$  passante per  $B$ . I due assi  $m_1$  e  $m_2$  sono entrambi perpendicolari a  $\overline{AB}$ .

La composizione  $S_\phi \circ S_\chi$  di due riflessioni rispetto a rette distinte passanti per  $O$  (con  $\phi \neq \chi$ ) è invece una rotazione di un angolo  $2(\phi - \chi)$ . Infatti:

$$\begin{aligned}
 S_\phi \circ S_\chi &= \begin{pmatrix} \cos(2\phi) & \sin(2\phi) \\ \sin(2\phi) & -\cos(2\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\chi) & \sin(2\chi) \\ \sin(2\chi) & -\cos(2\chi) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(2\phi)\cos(2\chi) + \sin(2\phi)\sin(2\chi) & \sin(2\phi)\sin(2\chi) - \sin(2\phi)\cos(2\chi) \\ \sin(2\phi)\cos(2\chi) - \cos(2\phi)\sin(2\chi) & \sin(2\phi)\sin(2\chi) - \cos(2\phi)\sin(2\chi) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(2(\phi - \chi)) & -\sin(2(\phi - \chi)) \\ \sin(2(\phi - \chi)) & \cos(2(\phi - \chi)) \end{pmatrix} = R_{2(\phi - \chi)},
 \end{aligned}$$

dove sono state usate le formule di addizione e sottrazione del seno e del coseno.

Essendo una glissoriflessione una composizione di una riflessione e una traslazione e dato che una traslazione può essere scritta, come visto, come una composizione di due riflessioni, una glissoriflessione può essere scritta come una composizione di tre riflessioni.

## 2.3 Il Teorema di Chasles

Gli argomenti di questo paragrafo sono stati trattati a partire da [[8] pagg. 260 - 262].

### Teorema 2.2.1 (Chasles)

- Un'isometria del piano euclideo  $E$  che fissa un punto è una rotazione o una riflessione a seconda che sia diretta o inversa.
- Un'isometria di  $E$  che non fissa alcun punto è una traslazione o una glissoriflessione a seconda che sia diretta o inversa.

*Dimostrazione.* Consideriamo le quattro possibili situazioni:

1. Sia  $f \in E_2$  un'isometria diretta che fissa un punto. Allora dalla rappresentazione delle isometrie dirette ottenuta dopo la definizione 2.1.6, notiamo che deve essere una rotazione, dove il punto fisso è dato da  $\alpha = 0$ .
2. Sia  $f \in E_2$  un'isometria inversa che fissa un punto e sia un sistema di riferimento  $R = \{O, V\}$ . Sappiamo dalla definizione 2.1.6 che un'isometria inversa è descritta dalla matrice ortogonale  $A_\theta \in O(2) \setminus SO(2)$ . Notiamo che i punti fissi presenti in questo caso sono infiniti, cioè tutti quelli della retta passante per l'origine  $O$  e inclinata di un angolo  $\alpha = \frac{\theta}{2}$  rispetto all'asse delle ascisse. Infatti:

$$\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos(\alpha) \\ r \sin(\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2r \cos^3(\alpha) - r \cos(\alpha) + 2r \sin^2(\alpha) \cos(\alpha) \\ 2r \sin(\alpha) \cos^2(\alpha) - r \sin(\alpha) + 2r \sin^3(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\alpha) \\ r \sin(\alpha) \end{pmatrix},$$

dove  $r \in \mathbb{R}$  e dove sono state usate le formule di duplicazione  $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$ ,  $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1$  e  $\cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$ . Vediamo dal paragrafo 2.2 che un'isometria di questo tipo descrive una riflessione rispetto alla retta passante per l'origine  $O$  e inclinata di un angolo  $\alpha$  rispetto all'asse delle ascisse.

3. Sia  $f \in E_2$  un'isometria diretta priva di punti fissi. Allora anche  $f^2$  è priva di punti fissi, perché, se si avesse  $f^2(P) = P$  per qualche  $P$ , il segmento  $\overline{Pf(P)}$  verrebbe trasformato da  $f$  nel segmento:

$$\overline{f(P)f^2(P)} = \overline{f(P)P}, \quad (2.20)$$

cioè nello stesso segmento iniziale, ma con gli estremi scambiati e, quindi, avremmo che il punto medio del segmento sarebbe un punto fisso di  $f$ , fatto impossibile per ipotesi.

Per ogni  $P \in E$  consideriamo adesso i tre punti distinti  $P, f(P), f^2(P)$  e dimostriamo che sono allineati. Se così non fosse, infatti, (Figura 2.5) gli assi dei due segmenti  $\overline{Pf(P)}$  e  $\overline{f(P)f^2(P)}$  si incontrerebbero in un punto  $Q$ . Inoltre,

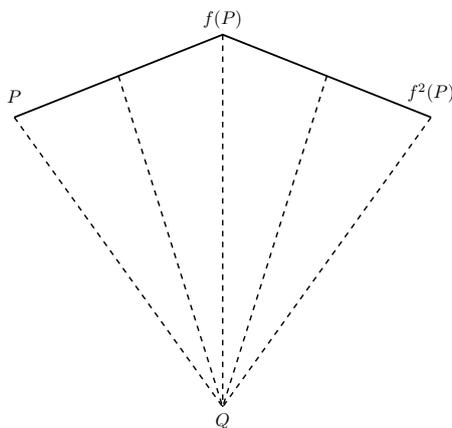


Figura 2.5: Schema costruttivo per il punto 3 del Teorema di Chasles.

dato che per la Proposizione 2.1.1 le isometrie conservano le distanze, avremo  $d(P, f(P)) = d(f(P), f^2(P))$  e:

$$d(Q, P) = d(Q, f(P)) = d(Q, f^2(P)). \quad (2.21)$$

Essendo poi che per la Proposizione 2.1.2 le isometrie preservano gli angoli, avremo che  $\widehat{PQf(P)} = \widehat{f(P)Qf^2(P)}$  e quindi ne segue che il triangolo di vertici  $Q, P, f(P)$  viene trasformato da  $f$  nel triangolo  $Q, f(P), f^2(P)$  e quindi  $f(Q) = Q$ . Ma quest'ultima affermazione è incompatibile con le ipotesi iniziali, quindi  $P, f(P), f^2(P)$  devono essere allineati.

In generale possiamo dire che tutti i punti  $P, f(P), f^2(P), \dots, f^i(P), \dots$  sono allineati e quindi  $f$  agisce sulla retta che li contiene come una traslazione. Essendo  $f$  un'isometria diretta,  $f$  agisce allo stesso modo su tutto il piano e, quindi, è una traslazione.

4. Sia infine  $f \in E_2$  un'isometria inversa priva di punti fissi. Allora  $f^2$  è un'isometria diretta, infatti, per il *teorema di Binet*:

$$\det(f^2) = \det(f)\det(f) = (-1)(-1) = 1. \quad (2.22)$$

Inoltre, come nel caso precedente,  $f^2$  non ha punti fissi ed è una traslazione  $f = T_{\mathbf{v}}$  per un certo  $\mathbf{v}$ .

Consideriamo un punto  $P \in E$ . Le rette definite da  $r_0 = \overline{Pf^2(P)}$  e da  $r_1 = \overline{f(P)f^3(P)}$ , tali quindi che  $f(r_0) = r_1$ , sono parallele (non necessariamente distinte), perché abbiamo che i punti  $f^{2n}(P)$  con  $n$  reale risiedono tutti sulla stessa

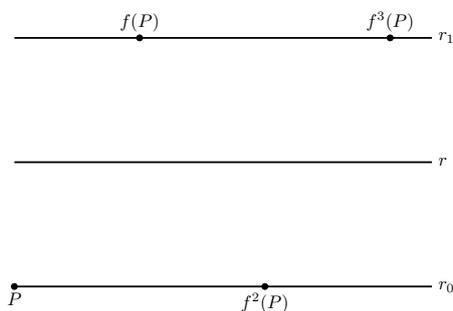


Figura 2.6: Schema costruttivo per il punto 4 del Teorema di Chasles.

retta, essendo le potenze pari di  $f$  delle traslazioni, e che anche i punti  $f^{2n+1}(P)$  risiedono tutti su una retta parallela a quella precedente, perché, se consideriamo come punto di partenza  $f(P)$ , abbiamo che le applicazioni pari di  $f$  a  $f(P)$  devono risiedere tutte sulla stessa retta, essendo traslazioni. Questo significa che la retta  $r$  parallela a  $r_0$  e a  $r_1$  ed equidistante da esse, viene trasformata da  $f$  in sé stessa (vedi Figura 2.6).

Dato che  $f^2$  agisce su  $r$  come la traslazione  $T_{\mathbf{v}}$ , allora  $f$  agisce su  $r$  come la traslazione  $T_{\mathbf{v}/2}$ . Di conseguenza la composizione  $T_{-\mathbf{v}/2} \circ f$  fissa tutti i punti di  $r$ , perché sui punti di  $r$ ,  $f$  si comporta come  $T_{\mathbf{v}/2}$  e  $T_{-\mathbf{v}/2} \circ T_{\mathbf{v}/2} = id$ . La trasformazione inversa che fissa tutti i punti di una retta è, come visto precedentemente, la riflessione.

Quindi  $f = T_{\mathbf{v}/2} \circ (T_{-\mathbf{v}/2} \circ f)$  è la composizione di una riflessione e di una traslazione e viene chiamata glissoriflessione.

**Definizione 2.3.7.** Sia  $E$  uno spazio euclideo. Un sottogruppo  $\mathcal{G}$  di  $Isom(E)$  si dice *discontinuo* se per ogni  $P \in E$  esiste  $r > 0$ , con  $r \in \mathbb{R}$ , tale che o  $g(P) = P$ , o  $g(P) \notin D(P, r)$ , con  $g \in \mathcal{G}$  e  $D(P, r)$  disco di centro  $P$  e raggio  $r$ .

I gruppi discontinui di isometrie del piano euclideo  $E^2$  si suddividono in tre classi: i gruppi finiti, i gruppi dei fregi (che contengono traslazioni in una sola direzione) e i *gruppi cristallografici piani* (che contengono due traslazioni indipendenti). Questi ultimi verranno trattati nel Capitolo 4.

# Capitolo 3

## Gruppi puntuali e reticoli

In questo Capitolo verranno affrontate le nozioni di *gruppo traslazionale* e di *gruppo puntuale*. Verrà poi data la definizione di *gruppo cristallografico piano*, la quale sarà approfondita nel Capitolo 4 e, infine, sarà introdotto il concetto di reticolo, utile per una classificazione dei gruppi cristallografici piani che sarà fatta nel Capitolo 4.

### 3.1 Gruppi traslazionali e gruppi puntuali

Gli argomenti di questo paragrafo sono stati trattati a partire da [[1] pagg. 145 - 147] e [[9] pagg. 8 - 9].

Nello scorso capitolo è stato visto come un'isometria  $f$  del piano possa essere rappresentata da una coppia  $(\mathbf{t}, M)$ , dove  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$  e  $M \in O(2)$ . Di conseguenza possiamo scrivere  $f = (\mathbf{t}, M)$ , con:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{t} + M\mathbf{x}, \quad (3.1)$$

per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ .

Definiamo ora  $\pi : E_2 \longrightarrow O(2)$  con  $\pi(\mathbf{t}, M) = M$ .  $\pi$  è un omomorfismo perché:

$$\begin{aligned} \pi((\mathbf{t}, M)(\mathbf{t}', M')) &= \pi((\mathbf{t} + M\mathbf{t}', MM')) \\ &= \pi(\mathbf{t} + M\mathbf{t}', MM') \\ &= \pi(\mathbf{t} + M\mathbf{t}', MM') \\ &= MM' \\ &= \pi(\mathbf{t}, M)\pi(\mathbf{t}', M') \end{aligned} \quad (3.2)$$

e il suo nucleo consiste nelle isometrie del tipo  $(\mathbf{t}, \mathbb{1})$  con  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$ , cioè nelle traslazioni  $T$ .

**Definizione 3.1.1.** Se  $G$  è un sottogruppo di  $E_2$ , possiamo definire  $H = G \cap T$  e  $J = \pi(G)$  e chiamare  $H$  il *sottogruppo traslazionale* di  $G$  e  $J$  il *gruppo puntuale* di  $G$ .

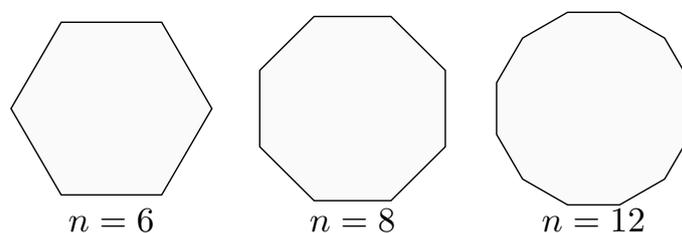


Figura 3.1: *Forme con simmetria rotazionale di ordine 6, 8 e 12.*

**Definizione 3.1.2.** Un sottogruppo di  $E_2$  è detto *gruppo cristallografico piano* se il suo sottogruppo traslazionale è generato da due traslazioni indipendenti e se il suo gruppo puntuale è finito.

I gruppi cristallografici piani sono anche detti gruppi di simmetria delle decorazioni del piano. Essi descrivono infatti i modi di ricoprire il piano ripetendo indefinitamente un certo motivo e, nel Capitolo 4, mostreremo come tali modi sono limitati.

Diamo adesso una giustificazione intuitiva per la Definizione 3.1.2. Abbiamo richiesto che il sottogruppo traslazionale fosse generato da due vettori linearmente indipendenti perché il nostro obiettivo è quello di riempire un intero spazio bidimensionale. Se avessimo un solo vettore linearmente indipendente, allora otterremmo un pattern unidimensionale e se avessimo più di due vettori linearmente indipendenti, allora essi genererebbe uno spazio di dimensione maggiore di due.

È stato poi richiesto che il gruppo puntuale fosse finito. Siano infatti delle forme con una simmetria rotazionale di ordine  $n$  (vedi Figura 3.1). È facile notare come all'aumentare dell'ordine di simmetria rotazionale le forme tendano a diventare circolari. Lo stesso vale per quanto riguarda le riflessioni: una forma con infiniti assi di riflessione è un cerchio. Dall'immagine 3.1 si nota che è impossibile riempire un piano con dei cerchi senza lasciare spazi vuoti e, di conseguenza, non possiamo avere un gruppo cristallografico piano composto da un pattern di cerchi ripetuti. Per questo motivo il gruppo puntuale deve essere finito.

## 3.2 Reticoli

Gli argomenti di questo paragrafo sono stati trattati a partire da [[1] pagg. 148 - 150] e [[9] pagg. 9 - 11].

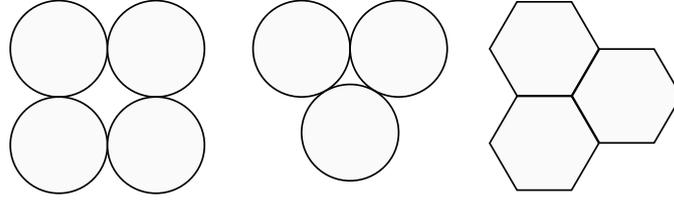


Figura 3.2: *Patterns di cerchi e esagoni ripetuti.*

**Definizione 3.2.1.** Il *reticolo*  $L$  di un gruppo cristallografico piano  $G$  è l'orbita (vedi Definizione 1.4.2) dell'origine in  $\mathbb{R}^2$  ottenuta dall'azione del sottogruppo traslazionale  $H$  di  $G$ .

**Proposizione 3.2.1.** Dato un gruppo cristallografico piano  $G$ , il suo reticolo  $L$  è un sottogruppo di  $\mathbb{R}^2$ .

*Dimostrazione.* Sia  $H$  il sottogruppo traslazionale di  $G$  e sia  $\gamma : H \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $\gamma(f) = \gamma((\mathbf{t}, \mathbb{1})) = \mathbf{t}$ .  $\gamma$  è un omomorfismo perché, date  $f, g \in H$  con  $f = (\mathbf{t}, \mathbb{1})$  e  $g = (\mathbf{w}, \mathbb{1})$ , abbiamo:

$$\gamma(f \circ g) = \gamma((\mathbf{t}, \mathbb{1})(\mathbf{w}, \mathbb{1})) = \gamma(\mathbf{t} + \mathbf{w}, \mathbb{1}) = \mathbf{t} + \mathbf{w} = \gamma(\mathbf{t}, \mathbb{1}) + \gamma(\mathbf{w}, \mathbb{1}) = \gamma(f) + \gamma(g). \quad (3.3)$$

Per la proposizione 1.2.2 l'immagine di un omomorfismo è un sottogruppo del gruppo di arrivo, in questo caso di  $\mathbb{R}^2$ . Essendo  $L$  formato dall'insieme dei vettori  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$  tali che  $(\mathbf{t}, \mathbb{1}) = f \in H$ ,  $L$  è un sottogruppo di  $\mathbb{R}^2$ .

**Definizione 3.2.2.** Chiamiamo  $\mathbf{a}$  il vettore di lunghezza minima in  $L$ . Scegliamo un secondo vettore  $\mathbf{b}$  in  $L$  non parallelo ad  $\mathbf{a}$  e della lunghezza minima possibile.

**Teorema 3.2.1.** I vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  così come sono definiti nella Definizione 3.2.2 formano una base del reticolo  $L$ . Quindi  $L$  consiste in tutte le combinazioni lineari  $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$  con  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

*Dimostrazione.* Per come sono definiti,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  sono linearmente indipendenti. Essendo  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$  e essendo  $L$  un sottogruppo di  $\mathbb{R}^2$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{Z}, m\mathbf{a} + n\mathbf{b} \in L$ . Usando i punti  $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$  possiamo dividere il piano in parallelogrammi, così come mostrato nella Figura 3.3. Se esistesse  $\mathbf{x} \in L$  non contenuto nel reticolo formato dai parallelogrammi, allora potremmo scegliere il parallelogramma che contiene  $\mathbf{x}$  e il vertice  $\mathbf{c}$  più vicino a  $\mathbf{x}$ . Allora il vettore  $\mathbf{x} - \mathbf{c}$  sarà un vettore non nullo e non potrà essere una combinazione lineare di  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . Essendo  $\mathbf{c}$  il punto più vicino a  $\mathbf{x}$ , deve valere  $\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| \leq \|\mathbf{b}\|$ . Per la definizione di  $\mathbf{a}$ ,  $\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| \geq \|\mathbf{a}\|$ , ma  $\mathbf{x} - \mathbf{c}$  non è un multiplo di  $\mathbf{a}$ , quindi contraddice la nostra scelta di  $\mathbf{b}$ , che deve essere il vettore di lunghezza minima non multiplo di  $\mathbf{a}$ . Abbiamo quindi

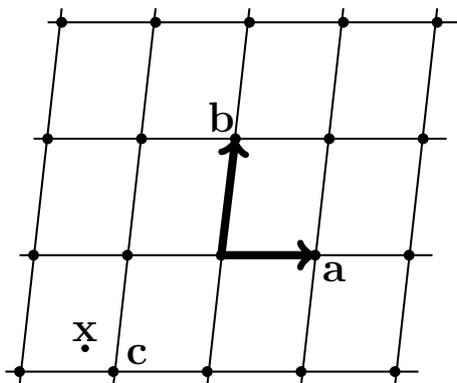


Figura 3.3: Schema costruttivo per il Teorema 3.2.1.

raggiunto una contraddizione, di conseguenza  $\forall \mathbf{x} \in L, \exists m, n \in \mathbb{Z}$  tali che  $\mathbf{x} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$ . Quindi  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  formano una base del reticolo  $L$ .

Possiamo classificare i reticoli in *cinque* diversi tipi a seconda della forma del parallelogramma di base determinato da  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . Per definizione vale  $\|\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{b}\|$ . Richiediamo  $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$ . Se l'affermazione è falsa, sostituiamo  $\mathbf{b}$  con  $-\mathbf{b}$ . Notiamo che essendo  $\mathbf{b}$  il più corto vettore non parallelo ad  $\mathbf{a}$ , deve valere  $\|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ . Quindi:  $\|\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$ .

I reticoli possono essere classificati in cinque tipi a seconda che il segno  $\leq$  sia  $=$  o  $<$ . Ricordiamo che  $\|\mathbf{a}\|$  e  $\|\mathbf{b}\|$  sono le lunghezze dei lati del parallelogramma, mentre  $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$  e  $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$  sono le lunghezze delle diagonali. Abbiamo quindi cinque diversi tipi di reticoli, per le immagini vedi Figura 3.4:

1. *Obliquo*:  $\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$ .
2. *Rettangolare*:  $\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$ .
3. *Rettangolare centrato*:  $\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$ .
4. *Quadrato*:  $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$ .
5. *Esagonale*:  $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$ .

Potrebbe sembrare che siano stati trascurati alcuni casi, ma adesso mostreremo che non è così.

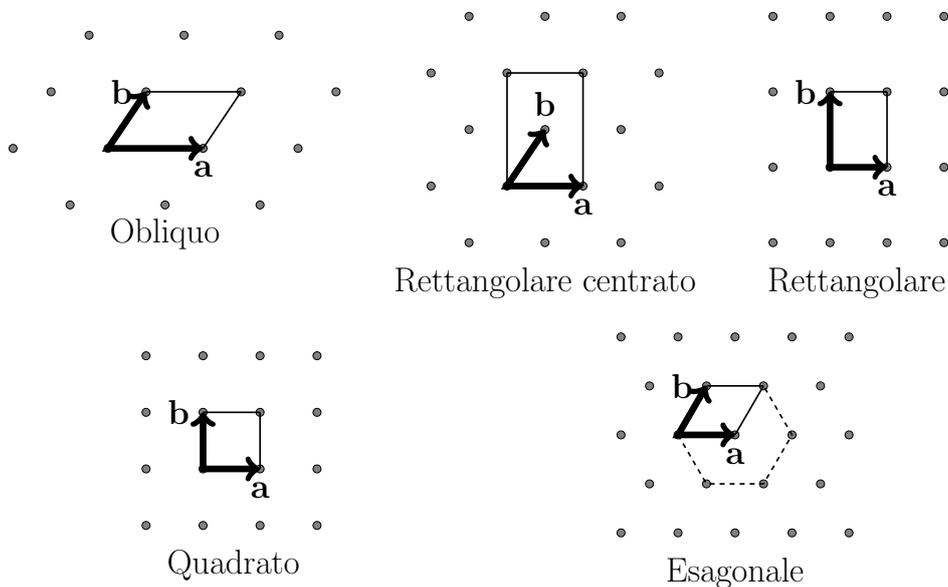


Figura 3.4: *Schemi dei cinque diversi tipi di reticoli.*

**Proposizione 3.2.2.** Dati  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  definiti come nella definizione 3.2.2, non può valere  $\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$ .

*Dimostrazione.* Sappiamo che  $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$ , quindi  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  devono essere concordi. L'unico modo per avere  $\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$  è quindi porre  $\mathbf{a} = 0$ , ma  $\mathbf{a}$  è un vettore non nullo per definizione. Quindi  $\|\mathbf{b}\| \neq \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$ .

Quindi, per quanto detto, i casi  $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$  e  $\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$  non sono possibili.

L'ultimo caso non ancora considerato è  $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$ . La forma di base di questo reticolo è quella di un rombo, le cui diagonali sono perpendicolari tra loro. Può però essere visto anche come un rettangolo centrato, i cui lati sono  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  e  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ . Di conseguenza, questo caso è già stato considerato. Vedi Figura 3.5 per le immagini.

**Teorema 3.2.2.** Sia  $G$  un gruppo cristallografico piano. Il gruppo puntuale  $J$  di  $G$  agisce sul reticolo  $L$  di  $G$ .

*Dimostrazione.* Il gruppo puntuale, essendo un sottogruppo di  $O(2)$ , agisce sui vettori del piano  $\mathbb{R}^2$ . Se la matrice  $M \in J$  e se il vettore  $\mathbf{x} \in L$ , allora si dice che il gruppo puntuale  $J$  agisce su  $L$  se  $M\mathbf{x} \in L$  (vedi Definizione 1.4.1). Supponiamo  $\pi(g) = M$  con  $\pi$  omomorfismo e  $g = (\mathbf{v}, M) \in G$  e denotiamo con  $\tau$  la traslazione  $(\mathbf{x}, 1)$ . Sia  $H$  il nucleo

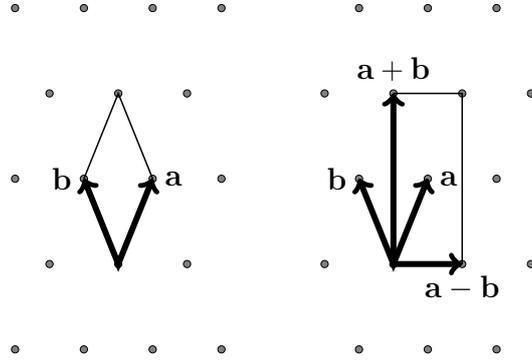


Figura 3.5: Schema che mostra l'isomorfismo tra un reticolo avente un rombo come forma di base e un reticolo rettangolare centrato.

dell'omomorfismo  $\pi : G \longrightarrow J$ . Per la Proposizione 1.2.2  $H$  è un sottogruppo di  $G$  e quindi,  $\forall g \in G, \forall \tau \in H, g\tau g^{-1} \in H$ , infatti:

$$\begin{aligned}
 g\tau g^{-1} &= (\mathbf{v}, M)(\mathbf{x}, \mathbb{1})(-M^{-1}\mathbf{v}, M^{-1}) \\
 &= (\mathbf{v}, M)(\mathbf{x} - M^{-1}\mathbf{v}, M^{-1}) \\
 &= (\mathbf{v} + M\mathbf{x} - MM^{-1}\mathbf{v}, MM^{-1}) = \\
 &= (M\mathbf{x}, \mathbb{1}).
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

con  $g^{-1} = (-M^{-1}\mathbf{v}, M^{-1})$ , perché:

$$\begin{aligned}
 g \circ g^{-1} &= (\mathbf{v}, M)(-M^{-1}\mathbf{v}, M^{-1}) \\
 &= (\mathbf{v} - MM^{-1}\mathbf{v}, MM^{-1}) \\
 &= (\mathbf{0}, \mathbb{1}) \\
 &= id
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

e

$$\begin{aligned}
 g^{-1} \circ g &= (-M^{-1}\mathbf{v}, M^{-1})(\mathbf{v}, M) \\
 &= (-M^{-1}\mathbf{v} + M^{-1}\mathbf{v}, M^{-1}M) \\
 &= (\mathbf{0}, \mathbb{1}) \\
 &= id.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dalla 3.4 si vede che  $g\tau g^{-1} = (M\mathbf{x}, \mathbb{1}) \in H$ . Poiché il gruppo puntuale agisce sui vettori del piano  $\mathbb{R}^2$ ,  $M \in J$  e  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  per la Proposizione 3.2.1, allora  $M\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . Quindi  $(M\mathbf{x}, \mathbb{1})$  è una traslazione e, di conseguenza,  $M\mathbf{x} \in L$ .

# Capitolo 4

## I gruppi cristallografici piani

In questo capitolo verrà approfondito il concetto di gruppo cristallografico piano e ne saranno definiti tutti i 17 tipi. Sarà poi dimostrata l'assenza di isomorfismi tra i 17 gruppi e, infine, verrà proposto un diagramma di flusso utile a identificare facilmente un gruppo cristallografico piano.

### 4.1 Proprietà dei gruppi cristallografici piani

Gli argomenti di questo paragrafo sono stati trattati a partire da [[1] 149 - 153] e [[9] pagg. 11 - 13].

**Teorema 4.1.1 (Restrizione cristallografica).** Le uniche possibili rotazioni in un gruppo cristallografico piano possono avere solo ordine (vedi Definizione 1.1.2) 2,3,4 o 6. *Dimostrazione.* Sia un reticolo  $L$  e sia il vettore  $\mathbf{a}$  come definito nella Definizione 3.2.2. Sia poi la traslazione  $\tau$  definita come  $\tau = (\mathbf{a}, \mathbb{1})$  e sia anche una rotazione  $g$  intorno all'origine di un angolo  $\theta$  tale che  $g = (\mathbf{0}, R_\theta)$ , con  $R_\theta$  definita come scritto nel paragrafo 2.2. Per il Teorema 3.2.2  $g$  manda un punto del reticolo  $L$  in un altro punto del reticolo, quindi una qualsiasi composizione di  $g$  e  $\tau$  manda l'origine in un punto del reticolo. Sia  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  e quindi  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ .

Dividiamo la dimostrazione in più step:

*Step 1:* mostriamo che in un gruppo cristallografico piano non si possono avere rotazioni di ordine maggiore di 6.

Facciamo una dimostrazione per assurdo, assumendo di avere una rotazione di ordine maggiore di 6. Consideriamo:

$$(\tau^{-1} \circ g \circ \tau)(\mathbf{0}) = (\tau^{-1} \circ g)(\mathbf{a}) = \tau^{-1}(R_\theta \mathbf{a}) = R_\theta \mathbf{a} - \mathbf{a}. \quad (4.1)$$

Quindi  $R_\theta \mathbf{a} - \mathbf{a}$  è un punto del reticolo. Notiamo che:

$$\begin{aligned}
R_\theta \mathbf{a} - \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta \\ a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1(\cos \theta - 1) - a_2 \sin \theta \\ a_1 \sin \theta + a_2(\cos \theta - 1) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
\|R_\theta \mathbf{a} - \mathbf{a}\| &= \sqrt{(a_1(\cos \theta - 1) - a_2 \sin \theta)^2 + (a_1 \sin \theta + a_2(\cos \theta - 1))^2} \\
&= \sqrt{a_1^2(\cos \theta - 1)^2 + a_2^2 \sin^2 \theta + a_1^2 \sin^2 \theta + a_2^2(\cos \theta - 1)^2} \\
&= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)((\cos \theta - 1) + \sin^2 \theta)} \\
&= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(2 - 2 \cos \theta)} \\
&= \sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta}{2} (a_1^2 + a_2^2)} \\
&= 2 \sin \frac{\theta}{2} \|\mathbf{a}\|,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

dove nella penultima riga è stato usato  $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ .

Quindi  $\|R_\theta \mathbf{a} - \mathbf{a}\| = 2 \sin \frac{\theta}{2} \|\mathbf{a}\|$ . Per avere una rotazione di ordine maggiore di 6, dobbiamo avere  $\theta < 2\pi \setminus 6$ , quindi  $2 \sin \frac{\theta}{2} < 1$  e, di conseguenza,  $\|R_\theta \mathbf{a} - \mathbf{a}\| < \|\mathbf{a}\|$ , relazione che però contraddice la nostra scelta iniziale di  $\mathbf{a}$ . Quindi in un gruppo cristallografico piano non possiamo avere rotazioni di ordine maggiore di 6.

*Step 2:* mostriamo che in un gruppo cristallografico piano non si possono avere rotazioni di ordine 5. Facciamo una dimostrazione per assurdo e assumiamo di avere una rotazione di ordine 5. Utilizziamo  $g$  e  $\tau$  sopra definiti, con  $\theta = 2\pi \setminus 5$ , e consideriamo:

$$(\tau \circ g \circ g \tau)(\mathbf{0}) = (\tau \circ g \circ g)(\mathbf{a}) = (\tau \circ g)(R_\theta \mathbf{a}) = \tau(R_\theta R_\theta \mathbf{a}) = R_\theta R_\theta \mathbf{a} + \mathbf{a}. \tag{4.4}$$

Quindi  $R_\theta R_\theta \mathbf{a} + \mathbf{a}$  è un punto del reticolo. Notiamo che:

$$\begin{aligned}
R_\theta R_\theta \mathbf{a} + \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ 2 \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2a_2 \cos \theta \sin \theta \\ 2a_1 \cos \theta \sin \theta + a_2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 1) - 2a_2 \cos \theta \sin \theta \\ 2a_1 \cos \theta \sin \theta + a_2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 1) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
\|R_\theta R_\theta \mathbf{a} + \mathbf{a}\| &= \sqrt{(a_1(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 1) - 2a_2 \cos \theta \sin \theta)^2 + (2a_1 \cos \theta \sin \theta + a_2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 1))^2} \\
&= \sqrt{a_1^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 1)^2 + 4a_2^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 4a_1^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + a_2^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 1)^2} \\
&= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)((\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 1)^2 + 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta)} \\
&= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)((2 \cos^2 \theta)^2 + 4 \cos^2 \theta(1 - \cos^2 \theta))} \\
&= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(4 \cos^2 \theta)} \\
&= 2 \cos \theta \|\mathbf{a}\|,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

dove nella penultima riga è stata usata la relazione  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ .

Quindi  $\|R_\theta R_\theta \mathbf{a} + \mathbf{a}\| = 2 \cos \theta \|\mathbf{a}\|$ . Se  $\theta = 2\pi \setminus 5$ ,  $2 \cos \theta < 1$  e, di conseguenza,  $\|R_\theta R_\theta \mathbf{a} + \mathbf{a}\| < \|\mathbf{a}\|$ . Si arriva cioè a una relazione che contraddice la scelta di  $\mathbf{a}$  come vettore di lunghezza più corta del reticolo. Quindi non possiamo avere rotazioni di ordine 5.

Le sole rotazioni permesse sono quindi di ordine 2,3,4,6 e sono generate da rotazioni di angoli  $\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$  o  $\frac{\pi}{3}$ .

**Teorema 4.1.2.** Un isomorfismo tra gruppi cristallografici piani manda traslazioni in traslazioni, rotazioni in rotazioni, riflessioni in riflessioni e glissoriflessioni in glissoriflessioni.

*Dimostrazione.* Sia  $\phi : G \rightarrow G_1$  un isomorfismo tra gruppi cristallografici piani e sia  $\tau$  una traslazione in  $G$ . Traslazioni e glissoriflessioni hanno ordine infinito, mentre rotazioni e riflessioni sono di ordine finito, quindi, per la Proposizione 1.2.3,  $\phi(\tau)$  dev'essere o una traslazione o una glissoriflessione. Supponiamo che  $\phi(\tau)$  sia una glissoriflessione e scegliamo una traslazione  $\tau_1 \in G_1$  che non commuta con  $\phi(\tau)$  (ad esempio ogni traslazione la cui direzione non è parallela all'asse della glissoriflessione). Se  $\phi(g) = \tau_1$ , allora  $g$  sarà o una traslazione o una glissoriflessione. Di conseguenza  $g^2$  è una traslazione e, in quanto tale, commuta con  $\tau$ . Ma questo contraddice il fatto che  $\phi(g^2) = \tau_1^2$  non commuti con  $\phi(\tau)$ , quindi un isomorfismo fa corrispondere traslazioni a traslazioni e glissoriflessioni a glissoriflessioni.

Le riflessioni hanno ordine 2, quindi l'immagine di una riflessione sotto un isomorfismo può essere o una riflessione o una rotazione di ordine 2. Sia  $g \in G$  una riflessione la cui immagine  $\phi(g)$  supponiamo essere una rotazione di ordine 2 e scegliamo una traslazione  $\tau \in G$  la cui direzione non è perpendicolare all'asse di riflessione di  $g$ . Quindi  $\tau g$  è una glissoriflessione. Ma  $\phi(\tau g) = \phi(\tau)\phi(g)$  è il prodotto di una traslazione e di una rotazione di ordine 2, che è un'altra rotazione di ordine 2. Quindi abbiamo trovato una contraddizione, perché l'immagine di una glissoriflessione dovrebbe essere una glissoriflessione,

e, di conseguenza, un isomorfismo deve far corrispondere riflessioni a riflessioni. L'immagine di una rotazione dovrà quindi essere forzosamente una rotazione.

**Corollario 4.1.1.** Se due gruppi cristallografici piani sono isomorfi, allora anche i loro gruppi puntuali sono isomorfi.

*Dimostrazione.* Siano  $G$  e  $G_1$  due gruppi cristallografici piani aventi  $H$  e  $H_1$  come sottogruppi traslazionali e  $J$  e  $J_1$  come gruppi puntuali. Se  $\phi : G \rightarrow G_1$  è un isomorfismo, allora per il Teorema 4.1.2 vale  $\phi(H) = H_1$ . Perciò  $\phi$  induce un isomorfismo da  $G/H$  a  $G_1/H_1$ . Il corollario segue dal fatto che  $J$  è isomorfo a  $G/H$  e  $J_1$  è isomorfo a  $G_1/H_1$ .

## 4.2 Classificazione dei gruppi cristallografici piani

Gli argomenti di questo paragrafo sono stati trattati a partire da [[1] pagg. 155 - 164], [[4] 57 - 69] e [[9] pagg. 13 - 18].

Adesso vogliamo definire tutti i 17 gruppi cristallografici piani e, alla fine, dimostrare che tra di loro non sono isomorfi.

**Definizione 4.2.1** Per un gruppo cristallografico piano definiamo la *cella unitaria* come la più piccola parte del pattern ripetuto che riproduce l'intero pattern solo attraverso traslazioni.

Una *cella primitiva* è una cella unitaria i cui vertici sono punti del reticolo. In questo caso i vettori che formano i lati della cella generano il gruppo traslazionale del pattern.

Una *cella centrata* è una cella unitaria che oltre ad avere i punti del reticolo come vertici, ne ha uno al centro.

Per classificare i gruppi cristallografici piani è necessario esaminare i cinque tipi possibili di reticolo. Infatti, dato un reticolo  $L$ , possiamo cercare le trasformazioni ortogonali che preservano  $L$ , le quali formano un gruppo che chiamiamo  $O_L$ . Per il Teorema 3.2.2 il gruppo puntuale di un gruppo cristallografico piano che ha  $L$  come reticolo dev'essere un sottogruppo di  $O_L$  e questa limitazione sul gruppo puntuale ci permetterà di elencare i diversi tipi di gruppi cristallografici piani aventi un certo reticolo  $L$ . La Tabella 4.1 mostra da quali elementi è composto il gruppo  $O_L$  per ogni reticolo ( $R_\theta$  è la matrice che indica una rotazione antioraria intorno all'origine di un angolo  $\theta$ , mentre  $S_\phi$  è la matrice che indica una riflessione rispetto alla linea passante per l'origine che forma con l'asse delle ascisse un angolo  $\phi$ ).

Prima di iniziare con la classificazione facciamo una breve digressione sulla notazione in uso. Ogni gruppo cristallografico piano è denotato dai simboli  $p, c, m, g$  e dagli interi 1, 2, 3, 4, 6. Il primo simbolo può essere una  $p$  o una  $c$  e si riferiscono al reticolo:  $p$  sta per la parola *primitive* e indica un reticolo formato da celle primitive (vedi Definizione

Reticolo	Trasformazioni ortogonali che preservano il reticolo	Tipo di reticolo
Obliquo	$O_L = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$	Primitivo
Rettangolare	$O_L = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}, S_0, S_{\frac{\pi}{2}}\}$	Primitivo
Rettangolare centrato	$O_L = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}, S_0, S_{\frac{\pi}{2}}\}$	Centrato
Quadrato	$O_L$ è generato da $R_{\frac{\pi}{2}}$ e da $S_0$	Primitivo
Esagonale	$O_L$ è generato da $R_{\frac{\pi}{3}}$ e da $S_0$	Primitivo

Tabella 4.1: La tabella mostra, per ogni reticolo, da quali elementi è composto il gruppo  $O_L$  delle trasformazioni ortogonali che preservano il reticolo  $L$ .

○	centro della rotazione di ordine 2 ( $\pi$ )
▲	centro della rotazione di ordine 3 ( $\frac{2\pi}{3}$ )
□	centro della rotazione di ordine quattro ( $\frac{\pi}{2}$ )
●	centro della rotazione di ordine sei ( $\frac{\pi}{3}$ )
—	asse di una riflessione
- - -	asse di una glissoriflessione

Tabella 4.2: *Legenda.*

4.2.1), mentre  $c$  sta per la parola *centred* e indica un reticolo formato da celle centrate (vedi Definizione 4.2.1). Il secondo simbolo è un numero che indica il massimo ordine di rotazione presente in  $G$ . Il terzo simbolo può essere una  $m$ , che sta per *mirror*, una  $g$ , che sta per *glide*, o un 1, e indica rispettivamente la presenza di una riflessione o di una glissoriflessione aventi l'asse parallelo alle ascisse, o l'assenza di entrambe. Infine il quarto simbolo può essere ancora una  $m$ , una  $g$  o un 1, e indica rispettivamente la presenza di una riflessione o di una glissoriflessione aventi l'asse che forma un angolo  $\phi$  con l'asse delle ascisse, o l'assenza di entrambe.  $\phi$  dipende dal secondo simbolo  $n$  e varrà  $\frac{\pi}{2}$  se  $n = 1, 2$ ,  $\frac{\pi}{4}$  se  $n = 4$  e  $\frac{\pi}{3}$  se  $n = 3, 6$ .

Nei grafici che compariranno sarà usata la legenda indicata nella Tabella 4.2.

Sia adesso un gruppo cristallografico piano  $G$  avente  $H$  come gruppo traslazionale,  $J$  come gruppo puntuale e  $L$  come reticolo. Noteremo come diversi gruppi cristallografici piani possano determinare lo stesso reticolo. Selezioniamo i vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  come fatto nella Definizione 3.2.2 e assumiamo che  $\mathbf{a}$  giaccia sull'asse positivo delle ascisse e che  $\mathbf{b}$  si trovi nel primo quadrante.

**Reticolo obliquo.** Consideriamo un reticolo  $L$  obliquo. Le uniche trasformazioni ortogonali che preservano  $L$  sono una rotazione di un angolo nullo, quindi l'identità  $\mathbb{1}$ , e una rotazione di  $\pi$ , quindi  $-\mathbb{1}$ .

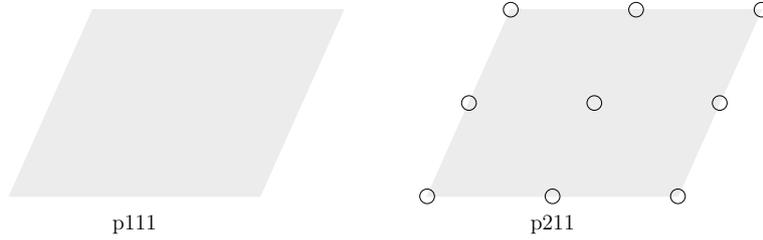


Figura 4.1: *Gruppi cristallografici piani ottenuti da un reticolo obliquo.*

**(p111)** Se  $J$  contiene solo la matrice identità, allora  $G$  è generato solo da due traslazioni indipendenti e i suoi elementi sono nella forma  $(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, \mathbb{1})$  con  $m, n \in \mathbb{Z}$ . In questo caso  $G$  si denota con  $p111$  o  $p1$ .

**(p211)** Se  $J = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ , allora  $G$  contiene anche una rotazione di ordine 2 e si denota con  $p211$  o  $p2$ . Possiamo supporre che il punto fisso di questa rotazione sia l'origine e quindi  $(\mathbf{0}, -\mathbb{1}) \in G$ . Quindi gli elementi di  $G$  sono dati da:

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, \mathbb{1})(\mathbf{0}, -\mathbb{1}) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, -\mathbb{1}), \quad (4.7)$$

con  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Avendo  $-\mathbb{1}$  determinante uguale a 1,  $(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, -\mathbb{1})$  identifica un'isometria diretta e, per il Teorema di Chasles (Teorema 2.2.1), gli elementi di  $p211$  possono essere solo o rotazioni o traslazioni. Studiamo i punti fissi dell'isometria:

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, -\mathbb{1})(P) = P \Leftrightarrow -P + m\mathbf{a} + n\mathbf{b} = P \Leftrightarrow P = \frac{1}{2}m\mathbf{a} + \frac{1}{2}n\mathbf{b}, \quad (4.8)$$

per ogni  $P \in \mathbb{R}^2$ . Questo significa che, sempre per il Teorema di Chasles (Teorema 2.2.1), il gruppo  $p211$  è formato da rotazioni di  $\pi$  intorno ai punti  $\frac{1}{2}m\mathbf{a} + \frac{1}{2}n\mathbf{b}$ .

**Reticolo rettangolare.** Consideriamo un reticolo  $L$  rettangolare. Le trasformazioni ortogonali che preservano  $L$ , oltre a  $\mathbb{1}$  e  $-\mathbb{1}$ , sono la riflessione rispetto all'asse  $x$ ,  $S_0$ , e la riflessione rispetto all'asse  $y$ ,  $S_{\frac{\pi}{2}}$ . Quindi tutti i gruppi puntuali devono essere sottogruppi di  $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}, S_0, S_{\frac{\pi}{2}}\}$ . Non considereremo i gruppi  $\{\mathbb{1}\}$  e  $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$  perché sono già stati studiati.

Se il gruppo puntuale  $J$  è formato da  $\{\mathbb{1}, S_0\}$ , allora  $G$  potrebbe avere due forme differenti:

**(p1m1)** Se il gruppo contiene riflessioni nella forma  $(\mathbf{0}, S_0)$ , allora  $G$  si denota con  $p1m1$  o  $pm$ .

**(p1g1)** Se il gruppo non contiene riflessioni, ma ha  $\{\mathbb{1}, S_0\}$  come gruppo puntuale, allora  $S_0$  dev'essere realizzata come una glissoriflessione e possiamo scegliere come origine un punto sul suo asse. In questo caso  $G$  viene denotato con  $p1g1$  o  $pg$ . Applicando una glissoriflessione due volte si ha una traslazione  $k\mathbf{a}$  con  $k$  intero, quindi la nostra glissoriflessione sarà del tipo  $(\frac{1}{2}k\mathbf{a}, S_0)$ . Se  $k$  fosse pari,  $(-\frac{1}{2}k\mathbf{a}, \mathbb{1})$  sarebbe una traslazione in  $G$  e allora avremmo:

$$(-\frac{1}{2}k\mathbf{a}, \mathbb{1})(\frac{1}{2}k\mathbf{a}, S_0) = (\mathbf{0}, S_0), \quad (4.9)$$

quindi la riflessione  $(\mathbf{0}, S_0)$  apparterebbe a  $G$ , contraddicendo la nostra ipotesi iniziale. Di conseguenza  $k$  dev'essere dispari e:

$$(-\frac{1}{2}(k-1)\mathbf{a}, \mathbb{1})(\frac{1}{2}k\mathbf{a}, S_0) = (\frac{1}{2}\mathbf{a}, S_0), \quad (4.10)$$

quindi  $(\frac{1}{2}\mathbf{a}, S_0) \in G$ . Gli elementi di  $G$  che non sono traslazioni, sono nella forma:

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b})(\frac{1}{2}\mathbf{a}, S_0) = ((m + \frac{1}{2})\mathbf{a} + n\mathbf{b}, S_0), \quad (4.11)$$

con  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Queste sono tutte glissoriflessioni con asse orizzontale passante sui lati del reticolo o a metà tra essi. La distanza tra gli assi di queste glissoriflessioni è un multiplo dispari di  $\frac{1}{2}\mathbf{a}$ .

Se il gruppo puntuale è  $\{\mathbb{1}, S_{\frac{\pi}{2}}\}$ , allora i casi sono equivalenti a quelli precedenti con la differenza che si invertono "orizzontale" con "verticale".

Se il gruppo puntuale è  $\{\mathbb{1}, S_0, S_{\frac{\pi}{2}}\}$ , allora possiamo avere tre diversi gruppi in base a come  $S_0$  e  $S_{\frac{\pi}{2}}$  sono realizzate.

**(p2mm)** Se sia  $S_0$  che  $S_{\frac{\pi}{2}}$  sono realizzate come riflessioni, si ha il gruppo  $p2mm$  o  $pmm$ . In questo caso  $G$  contiene riflessioni rispetto all'asse verticale e riflessioni rispetto all'asse orizzontale. Nella notazione è presente un 2 perché, se si sceglie come origine l'intersezione dell'asse di riflessione verticale con l'asse di riflessione orizzontale e si assume che  $(\mathbf{0}, S_0)$  e  $(\mathbf{0}, S_{\frac{\pi}{2}})$  appartengano a  $G$ , si nota che il prodotto

$$(\mathbf{0}, S_{\frac{\pi}{2}})(\mathbf{0}, S_0) = (\mathbf{0}, -\mathbb{1}) \quad (4.12)$$

è una rotazione di  $\pi$  intorno all'origine.

**(p2mg)** Se  $S_0$  è realizzata come riflessione e  $S_{\frac{\pi}{2}}$  come glissoriflessione, si ha il gruppo  $p2mg$  o  $pmg$ . Il 2 compare perché, come prima, possiamo scegliere come origine l'intersezione tra l'asse orizzontale della riflessione e l'asse verticale della glissoriflessione

e, attraverso l'argomentazione usata per il gruppo  $p1g1$ , si può assumere che  $(\mathbf{0}, S_0)$  e  $(\frac{1}{2}\mathbf{b}, S_{\frac{\pi}{2}})$  appartengono a  $G$ . Allora il prodotto

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{b}, S_{\frac{\pi}{2}}\right)(\mathbf{0}, S_0) = \left(\frac{1}{2}\mathbf{b}, -\mathbb{1}\right) \quad (4.13)$$

è una rotazione di  $\pi$  intorno a  $\frac{1}{4}\mathbf{b}$  perché il punto fisso dell'isometria è:

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{b}, -\mathbb{1}\right)(P) = P \iff -P + \frac{1}{2}\mathbf{b} = P \iff P = \frac{1}{4}\mathbf{b}. \quad (4.14)$$

Il gruppo  $G$  è costituito dai seguenti elementi:

$$H(\mathbf{0}, \mathbb{1}), \quad H(\mathbf{0}, S_0), \quad H\left(\frac{1}{2}\mathbf{b}, S_{\frac{\pi}{2}}\right), \quad H\left(\frac{1}{2}\mathbf{b}, -\mathbb{1}\right). \quad (4.15)$$

Il primo gruppo di elementi è costituito da traslazioni.

Il secondo gruppo di elementi è costituito da:

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, \mathbb{1})(\mathbf{0}, S_0) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, S_0), \quad (4.16)$$

con  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Quando  $m = 0$ , questa isometria è una riflessione con asse orizzontale che passa attraverso i punti del reticolo o giace a metà tra questi. Infatti i punti fissi sono dati dalle seguenti rette:

$$(n\mathbf{b}, S_0)(P) = P \iff n\mathbf{b} = (\mathbb{1} - S_0)(P) \iff 2y = n\mathbf{b} \iff y = \frac{n}{2}\mathbf{b}, \quad (4.17)$$

con  $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  e  $(\mathbb{1} - S_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Se  $m$  è diverso da zero, l'asse della riflessione diventa un'asse di glissoriflessione e la traslazione che compone la glissoriflessione ha vettore  $m\mathbf{a}$ .

Il terzo gruppo di elementi è costituito da:

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, \mathbb{1})\left(\frac{1}{2}\mathbf{b}, S_{\frac{\pi}{2}}\right) = \left(m\mathbf{a} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\mathbf{b}, S_{\frac{\pi}{2}}\right), \quad (4.18)$$

quindi da tutte le glissoriflessioni con assi verticale che passano attraverso i punti del reticolo o a metà tra questi.

Se si scambiano l'asse verticale con l'asse orizzontale si ottiene un gruppo isomorfo a  $p2mg$ .

**(p2gg)** Se sia  $S_0$  che  $S_{\frac{\pi}{2}}$  sono realizzati come glissoriflessioni, si ha il gruppo  $p2gg$  o  $pgg$ . Questo gruppo non ha riflessioni, ma glissoriflessioni rispetto alle due direzioni perpendicolari.

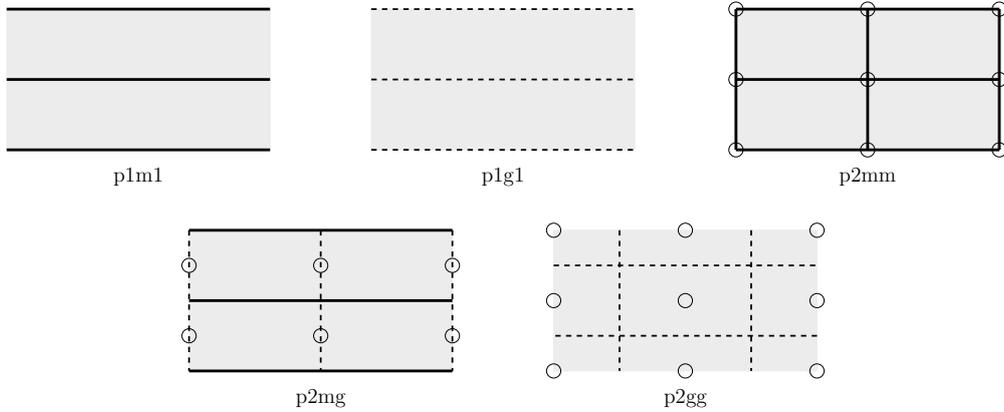


Figura 4.2: Gruppi cristallografici piani non isomorfi ai precedenti ottenuti da un reticolo rettangolare.

**Reticolo rettangolare centrato.** Le isometrie che preservano il reticolo rettangolare centrato sono le stesse che preservano il reticolo rettangolare, quindi il gruppo puntuale dev'essere ancora un sottogruppo di  $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}, S_0, S_{\frac{\pi}{2}}\}$ . Si trovano due nuovi gruppi.

**(c1m1)** Se il gruppo puntuale è  $\{\mathbb{1}, S_0\}$  si ottiene il gruppo  $c1m1$  o  $cm$ . Supponiamo che  $(\mathbf{v}, S_0)$  realizzi  $S_0$  in  $G$ . Questa isometria è o una riflessione con asse orizzontale o una glissoriflessione con asse orizzontale. Scegliamo come origine un punto dell'asse di riflessione o di glissoriflessione tale che  $2\mathbf{v}$  sia un multiplo di  $\mathbf{a}$  e tenendo conto che la direzione verticale è data dal vettore  $2\mathbf{b} - \mathbf{a}$  (vedi Figura 3.4).

1. Se  $2\mathbf{v} = k\mathbf{a}$  e  $k$  è pari, la riflessione

$$(\mathbf{0}, S_0) = \left(-\frac{1}{2}k\mathbf{a}, \mathbb{1}\right)\left(\frac{1}{2}k\mathbf{a}, S_0\right) \quad (4.19)$$

appartiene a  $G$ . Gli elementi di  $G$  che non sono traslazioni sono nella forma:

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, S_0) = \left(\left(m + \frac{1}{2}n\right)\mathbf{a} + \frac{1}{2}n(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), S_0\right), \quad (4.20)$$

con  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Scegliendo  $n$  pari e  $m = -\frac{1}{2}n$  si ha una riflessione con asse orizzontale che passa attraverso i punti del reticolo. Se invece  $n$  è pari, ma  $m \neq -\frac{1}{2}n$ , gli assi di riflessione diventano assi di glissoriflessione e la traslazione che fa parte di queste glissoriflessioni è un multiplo di  $\mathbf{a}$ . Infine, se  $n$  è dispari, si hanno glissoriflessioni i cui assi passano a metà tra i punti del reticolo e la traslazione che fa parte di queste glissoriflessioni è un multiplo dispari di  $\frac{1}{2}\mathbf{a}$ .

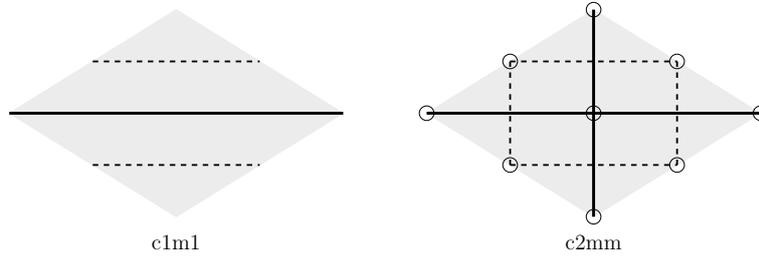


Figura 4.3: Gruppi cristallografici piani non isomorfi ai precedenti ottenuti da un reticolo rettangolare centrato.

2. Se  $k$  è dispari, allora

$$\left(-\frac{1}{2}(k+1)\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbb{1}\right)\left(\frac{1}{2}k\mathbf{a}, S_0\right) = \left(\frac{1}{2}(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), S_0\right) \quad (4.21)$$

appartiene a  $G$  ed è ancora una riflessione. Infatti spostando l'origine si riottiene  $(0, S_0)$  e ci si riconduce al caso in cui  $k$  è pari.

Il gruppo puntuale  $\{\mathbb{1}, S_{\frac{\pi}{2}}\}$  realizza un gruppo isomorfo a  $c1m1$ , infatti l'unico aspetto che cambia è che si invertono "verticale" con "orizzontale".

**(c2mm)** Il gruppo puntuale  $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}, S_0, S_{\frac{\pi}{2}}\}$  realizza il gruppo  $c2mm$  o  $cm$ . È presente un 2 per lo stesso motivo per cui è presente nel gruppo  $p2mm$  e i calcoli eseguiti per il gruppo  $c1m1$  possono essere fatti uguali per il gruppo  $c2mm$ , mostrando come  $S_0$  e  $S_{\frac{\pi}{2}}$  possano entrambe essere realizzate sia come riflessioni che come glissoriflessioni.

**Reticolo quadrato.** Il gruppo delle isometrie che preservano il reticolo quadrato è il gruppo diedrale di ordine 8 generato da  $R_{\frac{\pi}{2}}$  e  $S_0$ , quindi  $\{\mathbb{1}, R_{\frac{\pi}{2}}, -\mathbb{1}, R_{\frac{3\pi}{2}}, S_0, S_{\frac{\pi}{4}}, S_{\frac{\pi}{2}}, S_{\frac{3\pi}{4}}\}$ . I sottogruppi  $\{\mathbb{1}\}$ ,  $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ ,  $\{\mathbb{1}, S_0\}$ ,  $\{\mathbb{1}, S_{\frac{\pi}{2}}\}$ ,  $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}, S_0, S_{\frac{\pi}{2}}\}$  sono già stati studiati. Se i gruppi puntuali sono  $\{\mathbb{1}, S_{\frac{\pi}{4}}\}$  o  $\{\mathbb{1}, S_{\frac{3\pi}{4}}\}$ , possiamo scegliere come nuove basi del reticolo  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  e  $\mathbf{b}$ . In questo modo otteniamo dei gruppi isomorfi a  $c1m1$ . Se il gruppo puntuale è  $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}, S_{\frac{\pi}{4}}, S_{\frac{3\pi}{4}}\}$ , allora un cambio di base come quello fatto precedentemente ci porta ad avere un gruppo isomorfo a  $c2mm$ .

**(p411)** Il gruppo puntuale  $\{\mathbb{1}, R_{\frac{\pi}{2}}, -\mathbb{1}, R_{\frac{3\pi}{2}}\}$  ci dà il gruppo  $p411$  o  $p4$ , infatti non ha riflessioni o glissoriflessioni, ma solo rotazioni di ordine 4 e 2.

Il gruppo puntuale  $\{\mathbb{1}, R_{\frac{\pi}{2}}, -\mathbb{1}, R_{\frac{3\pi}{2}}, S_0, S_{\frac{\pi}{4}}, S_{\frac{\pi}{2}}, S_{\frac{3\pi}{4}}\}$  ci fornisce due diversi gruppi:

**(p4mm)** Se  $S_0$  è realizzata come una riflessione, abbiamo il gruppo  $p4mm$  o  $p4m$ . Questa scelta impone a tutte le altre riflessioni del gruppo puntuale di essere realizzate come riflessioni. Scegliamo infatti un'origine tale che  $(\mathbf{0}, R_{\frac{\pi}{2}})$  sia in  $G$ . Dato che  $S_0$  è realizzata come una riflessione, sarà nella forma  $(\mu\mathbf{b}, S_0)$ , perché  $\mathbf{b}$  è perpendicolare all'asse di riflessione. Ora abbiamo che

$$\begin{aligned}(\mathbf{0}, R_{\frac{\pi}{2}})(\mu\mathbf{b}, S_0) &= (-\mu\mathbf{a}, S_{\frac{\pi}{4}}) \\ (-\mu\mathbf{a}, S_{\frac{\pi}{4}})(-\mu\mathbf{a}, S_{\frac{\pi}{4}}) &= (-\mu\mathbf{a} - \mu\mathbf{b}, \mathbb{1})\end{aligned}\tag{4.22}$$

sono elementi di  $p4mm$ , con  $\mu \in \mathbb{Z}$ . Quindi

$$(-\mu\mathbf{b}, \mathbb{1})(\mu\mathbf{b}, S_0) = (\mathbf{0}, S_0)\tag{4.23}$$

è in  $G$  e componendolo più volte con  $(\mathbf{0}, R_{\frac{\pi}{2}})$  si ottengono  $(\mathbf{0}, S_{\frac{\pi}{4}})$ ,  $(\mathbf{0}, S_{\frac{\pi}{2}})$ ,  $(\mathbf{0}, S_{\frac{3\pi}{4}})$ , per cui si vede come  $S_0, S_{\frac{\pi}{4}}, S_{\frac{\pi}{2}}, S_{\frac{3\pi}{4}}$  siano tutte realizzate da riflessioni.

Il gruppo  $p4mm$  ha quindi riflessioni in quattro diverse direzioni, tutte separate da  $\frac{\pi}{4}$ , contiene glissoriflessioni in due direzioni e rotazioni di  $\frac{\pi}{2}$  e  $\pi$ .

**(p4gm)** Supponiamo adesso che  $S_0$  non possa essere realizzata come una riflessione in  $G$ . In questo caso abbiamo il gruppo  $p4gm$  o  $p4g$ . Scegliamo il punto fisso di una rotazione di ordine 4 come origine, così che  $(\mathbf{0}, R_{\frac{\pi}{2}})$  appartenga a  $G$  e che  $(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, S_0)$  realizzi  $S_0$  in  $G$ . Abbiamo

$$(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, S_0)(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, S_0) = (2\lambda\mathbf{a}, \mathbb{1}),\tag{4.24}$$

con  $2\lambda$  che è un intero. Se  $2\lambda$  è pari:

$$(-\lambda\mathbf{a}, \mathbb{1})(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, S_0) = (\mu\mathbf{b}, S_0)\tag{4.25}$$

è una riflessione in  $G$ , quindi abbiamo una contraddizione. Di conseguenza  $2\lambda$  deve essere dispari e

$$\left(\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\mathbf{a}, \mathbb{1}\right)(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, S_0) = \left(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, S_0\right)\tag{4.26}$$

è un elemento di  $G$ . Inoltre abbiamo che

$$(\mathbf{0}, R_{\frac{\pi}{2}})\left(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, S_0\right) = \left(\frac{1}{2}\mathbf{b} - \mu\mathbf{a}, S_{\frac{\pi}{4}}\right)\tag{4.27}$$

e

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{b} - \mu\mathbf{a}, S_{\frac{\pi}{4}}\right)\left(\frac{1}{2}\mathbf{b} - \mu\mathbf{a}, S_{\frac{\pi}{4}}\right) = \left(\left(\frac{1}{2} - \mu\right)(\mathbf{a} + \mathbf{b}), \mathbb{1}\right)\tag{4.28}$$

sono elementi di  $G$  e quindi  $(\frac{1}{2} - \mu)$  è un intero. Si conclude che la glissoriflessione

$$\left(\left(\frac{1}{2} - \mu\right)\mathbf{b}, \mathbb{1}\right)\left(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, S_0\right) = \left(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, S_0\right) \quad (4.29)$$

appartiene a  $G$ .

$G$  è formato dai seguenti gruppi di elementi:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{0}, \mathbb{1}) & & H(\mathbf{0}, R_{\frac{\pi}{2}}) \\ H(\mathbf{0}, -\mathbb{1}) & & H(\mathbf{0}, R_{\frac{3\pi}{2}}) \\ H\left(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, S_0\right) & & H\left(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, S_{\frac{\pi}{4}}\right) \\ H\left(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, S_{\frac{\pi}{2}}\right) & & H\left(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, S_{\frac{3\pi}{4}}\right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Un elemento di  $H(\mathbf{0}, \mathbb{1})$  è una traslazione.

Un elemento di  $H(\mathbf{0}, -\mathbb{1})$  è dato da:

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, \mathbb{1})(\mathbf{0}, -\mathbb{1}) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, -\mathbb{1}). \quad (4.31)$$

Se cerchiamo i punti fissi, otteniamo

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, -\mathbb{1})(P) = P \iff m\mathbf{a} + n\mathbf{b} - P = P \iff P = \frac{1}{2}m\mathbf{a} + \frac{1}{2}n\mathbf{b}, \quad (4.32)$$

quindi il secondo gruppo di elementi è dato da rotazioni di  $\pi$  intorno ai punti  $\frac{1}{2}m\mathbf{a} + \frac{1}{2}n\mathbf{b}$ .

Un elemento di  $H(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, S_{\frac{\pi}{4}})$  è dato da:

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, \mathbb{1})\left(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, S_{\frac{\pi}{4}}\right) = \left(\left(m + \frac{1}{2}\right)\mathbf{a} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\mathbf{b}, S_{\frac{\pi}{4}}\right) = \left(\frac{1}{2}(m+n+1)(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \frac{1}{2}(m-n)(\mathbf{a} - \mathbf{b}), S_{\frac{\pi}{4}}\right), \quad (4.33)$$

con  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Se si prende  $m + n + 1 = 0$ , si hanno tutte le riflessioni con asse inclinato di  $\frac{\pi}{4}$  rispetto all'asse orizzontale che passa a metà tra i punti del reticolo. Se  $m + n + 1$  è non nullo e  $m - n$  è dispari, allora si hanno delle glissoriflessioni. Se  $m + n + 1$  è non nullo e  $m - n$  è pari, si hanno altre glissoriflessioni.

Gli altri casi sono trattati nello stesso modo.

**Reticolo esagonale.** Il gruppo delle isometrie che preserva il reticolo esagonale è il gruppo diedrale di ordine 12 generato da  $R_{\frac{\pi}{3}}$  e  $S_0$ , quindi  $\{\mathbb{1}, R_{\frac{\pi}{3}}, R_{\frac{2\pi}{3}}, -\mathbb{1}, R_{\frac{4\pi}{3}}, R_{\frac{5\pi}{3}}, S_0, S_{\frac{\pi}{6}}, S_{\frac{\pi}{3}}, S_{\frac{\pi}{2}}, S_{\frac{2\pi}{3}}, S_{\frac{5\pi}{6}}\}$ . I sottogruppi  $\{\mathbb{1}\}, \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}, \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}, S_0, S_{\frac{\pi}{2}}\}$  sono già stati trattati.

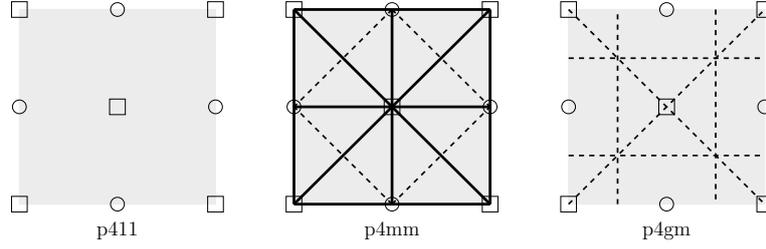


Figura 4.4: Gruppi cristallografici piani non isomorfi ai precedenti ottenuti da un reticolo quadrato.

Sia il gruppo puntuale  $\{\mathbb{1}, S_{\frac{k\pi}{6}}\}$  con  $0 \leq k \leq 5, k \in \mathbb{Z}$ . Per  $k = 0$  si ritorna al caso del gruppo  $c1m1$ . Se  $k = 1$  e sostituiamo  $a$  e  $b$  con  $a + b$  e  $b - a$ , otteniamo un reticolo rettangolare centrato con gruppo puntuale  $\{\mathbb{1}, S_0\}$  e otteniamo quindi nuovamente il gruppo  $c1m1$ . Per gli altri valori di  $k$ , con opportuni cambi di base, ci si può sempre ricondurre al gruppo  $c1m1$ .

Se il gruppo puntuale è  $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}, R_{\frac{\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}\}$  o  $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{5\pi}{3}}\}$ , con un cambio di base simile a quello usato nel caso precedente ci si può ricondurre a un reticolo rettangolare centrato con gruppo puntuale  $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}, S_0, S_{\frac{\pi}{2}}\}$  e ottenere quindi il gruppo  $c2mm$ .

**(p311)** Il gruppo puntuale  $\{\mathbb{1}, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{5\pi}{3}}\}$  dà origine al gruppo  $p311$  o  $p3$ , il quale non ha nè riflessioni nè glissoriflessioni, ma solo rotazioni di ordine tre.

**(p31m)** Il gruppo puntuale  $\{\mathbb{1}, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}, S_{\frac{\pi}{6}}, S_{\frac{\pi}{2}}, S_{\frac{5\pi}{6}}\}$  generato da  $R_{\frac{2\pi}{3}}$  e da  $S_{\frac{\pi}{6}}$ , dà origine al gruppo  $p31m$ . Per capire da quali elementi è formato il gruppo, scegliamo l'origine in modo che la rotazione  $(\mathbf{0}, R_{\frac{2\pi}{3}})$  appartenga al gruppo  $G$ . Sia poi  $(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, S_{\frac{\pi}{6}})$  la realizzazione di  $S_{\frac{\pi}{6}}$  in  $G$ . Abbiamo che:

$$(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, S_{\frac{\pi}{6}})(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, S_{\frac{\pi}{6}}) = ((\lambda + \mu)(\mathbf{a} + \mathbf{b}), \mathbb{1}), \quad (4.34)$$

quindi  $\lambda + \mu$  dev'essere un intero. Inoltre

$$(\mathbf{0}, R_{\frac{2\pi}{3}})(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, S_{\frac{\pi}{6}}) = (\lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \mu\mathbf{a}, S_{\frac{\pi}{2}}) \quad (4.35)$$

e

$$(\lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \mu\mathbf{a}, S_{\frac{\pi}{2}})(\lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \mu\mathbf{a}, S_{\frac{\pi}{2}}) = (\lambda(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), \mathbb{1}) \quad (4.36)$$

mostrano che  $\lambda$  e, di conseguenza, anche  $\mu$ , sono interi. Quindi la riflessione

$$(-\lambda\mathbf{a}) - \mu\mathbf{b}, \mathbb{1})(\lambda\mathbf{a}) + \mu\mathbf{b}, S_{\frac{\pi}{6}}) = (\mathbf{0}, S_{\frac{\pi}{6}}) \quad (4.37)$$

appartiene a  $G$ . In generale possiamo dire che gli elementi di  $G$  hanno forma  $(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, M)$  con  $m, n \in \mathbb{Z}$  e con  $M$  che è una delle matrici  $\mathbb{1}, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}, S_{\frac{\pi}{6}}, S_{\frac{\pi}{2}}, S_{\frac{5\pi}{6}}$ . Ad esempio

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, S_{\frac{\pi}{2}}) = ((m + \frac{1}{2}n)\mathbf{a} + \frac{1}{2}n(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), S_{\frac{\pi}{2}}) \quad (4.38)$$

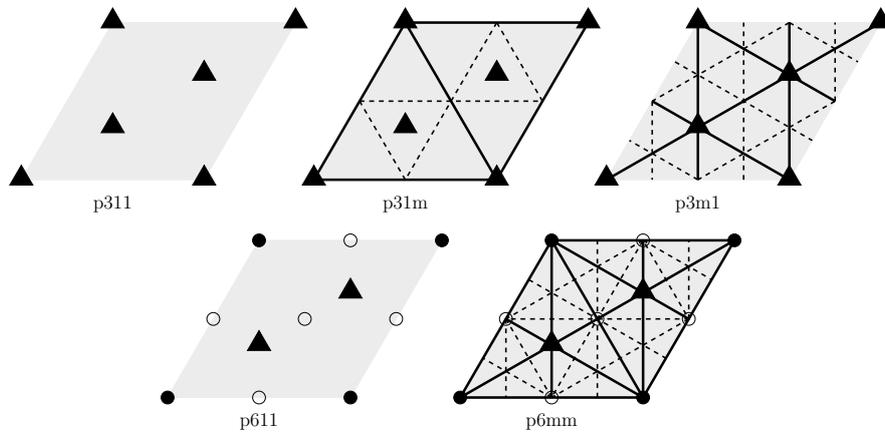


Figura 4.5: Gruppi cristallografici piani non isomorfi ai precedenti ottenuti da un reticolo esagonale.

è una riflessione con asse verticale quando  $n = 0$  ed è una glissoriflessione verticale negli altri casi.

**(p3m1)** Il gruppo puntuale  $\{\mathbb{1}, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}, S_0, S_{\frac{\pi}{3}}, S_{\frac{2\pi}{3}}\}$  è generato da  $R_{\frac{2\pi}{3}}$  e  $S_0$  e può essere trattato come il gruppo p31m.

**(p611)** Il gruppo puntuale  $\{\mathbb{1}, R_{\frac{\pi}{3}}, R_{\frac{2\pi}{3}}, -\mathbb{1}, R_{\frac{4\pi}{3}}, R_{\frac{5\pi}{3}}\}$  dà origine al gruppo p611 o p6. Il gruppo non ha riflessioni o glissoriflessioni, ma rotazioni di ordine due, tre e sei.

**(p6mm)** Il gruppo puntuale  $\{\mathbb{1}, R_{\frac{\pi}{3}}, R_{\frac{2\pi}{3}}, -\mathbb{1}, R_{\frac{4\pi}{3}}, R_{\frac{5\pi}{3}}, S_0, S_{\frac{\pi}{6}}, S_{\frac{\pi}{3}}, S_{\frac{\pi}{2}}, S_{\frac{2\pi}{3}}, S_{\frac{5\pi}{6}}\}$  dà origine al gruppo p6mm o p6m. Questo gruppo contiene riflessioni e glissoriflessioni con assi in sei diverse direzioni e rotazioni di  $\pi$ ,  $\frac{2\pi}{3}$  e  $\frac{\pi}{3}$ .

Sono stati quindi visti 17 gruppi cristallografici piani diversi. Adesso bisogna dimostrare che non sono tra di loro isomorfi. Dal Corollario 4.1.1 sappiamo che due gruppi isomorfi devono avere gruppi puntuali isomorfi, quindi confronteremo tra loro solo i gruppi con lo stesso gruppo puntuale. Ricordiamo inoltre che, per il Teorema 4.1.2, un isomorfismo tra gruppi cristallografici piani manda traslazioni in traslazioni, rotazioni in rotazioni, riflessioni in riflessioni e glissoriflessioni in glissoriflessioni.

**Teorema 4.2.1.** I gruppi p211, p1m1, p1g1 e c1m1 non sono isomorfi a due a due.

*Dimostrazione.* Tra i gruppi nominati solo p211 contiene rotazioni, quindi non può essere isomorfo agli altri tre. Dei tre gruppo rimanenti, p1g1 è l'unico a non contenere riflessioni, quindi non è isomorfo a p1m1 e a c1m1. Abbiamo inoltre che c1m1 contiene glissoriflessioni la cui riflessione non appartiene al gruppo. Infine, se prendiamo una glissoriflessione in p1m1 e la scriviamo come composizione di una traslazione e di una riflessione, abbiamo che sia la traslazione che la riflessione appartengono a p1m1. Al contrario, c1m1 contiene glissoriflessioni le cui parti costituenti non sempre appartengono al gruppo. Un esempio è la glissoriflessione che si ottiene dall'equazione 4.20 ponendo  $m = 0$  e  $n = 1$ . Ciò che si ottiene infatti è

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), S_0\right) = \left(\frac{1}{2}\mathbf{a}, \mathbb{1}\right)\left(\frac{1}{2}(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), S_0\right) \quad (4.39)$$

e in questo caso abbiamo che la traslazione  $(\frac{1}{2}\mathbf{a}, \mathbb{1})$  non appartiene a c1m1, essendo  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ . Consideriamo adesso p1m1 e scegliamo un'origine in modo che  $(\mathbf{0}, S_0) \in \text{p1m1}$ . Tutte le isometrie che non sono traslazioni avranno quindi la forma:

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, S_0) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, \mathbb{1})(\mathbf{0}, S_0) \quad (4.40)$$

con  $m, n \in \mathbb{Z}$  e, quindi, tutte le traslazioni appartengono al gruppo, a differenza del caso precedente.

**Teorema 4.2.2.** I gruppi p2mm, p2mg, p2gg, c2mm e p411 non sono isomorfi a due a due.

*Dimostrazione.* Tra i gruppi nominati p411 non contiene riflessioni o glissoriflessioni, quindi non può essere isomorfo agli altri quattro. Tra questi, p2gg non contiene riflessioni, quindi non è isomorfo ai rimanenti. Inoltre, similmente a quanto visto nel Teorema 4.2.1, abbiamo che la traslazione e la riflessione che compongono una glissoriflessione in p2mm, appartengono a p2mm. Questo a differenza dei gruppi p2mg e c2mm e, di conseguenza, p2mm non può essere isomorfo a loro. Infine, in p2mg, tutte le riflessioni sono orizzontali e, quindi, la composizione di due riflessioni dà una traslazione. In c2mm, invece, ci sono riflessioni sia verticali che orizzontali e il loro prodotto è una rotazione di  $\pi$ . Di conseguenza c2mm e p2mg non sono isomorfi.

**Teorema 4.2.3.** Il gruppo p4mm non è isomorfo al gruppo p4gm.

*Dimostrazione.* Sia l'elemento  $(\mathbf{0}, R_{\frac{\pi}{2}})$  che appartiene a entrambi i gruppi. Precedentemente si è visto come  $(\mathbf{0}, S_0)$  e  $(\mathbf{0}, S_{\frac{\pi}{4}})$  appartengano a p4mm. Abbiamo inoltre che:

$$(\mathbf{0}, S_{\frac{\pi}{4}})(\mathbf{0}, S_0) = (\mathbf{0}, R_{\frac{\pi}{2}}). \quad (4.41)$$

Adesso proviamo che in p4gm è impossibile fattorizzare  $(\mathbf{0}, R_{\frac{\pi}{2}})$  con due riflessioni. Ogni fattorizzazione ha la forma  $(\mathbf{0}, R_{\frac{\pi}{2}}) = (\mathbf{v}, S_{\alpha})(\mathbf{w}, S_{\beta})$ . Dato che  $A_{\alpha}A_{\beta} = R_{2(\alpha-\beta)}$ , le uniche opzioni sono:  $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{2}; \alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{4}; \alpha = \frac{3\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{2}; \alpha = 0, \beta = \frac{3\pi}{4}$ . In tutti e

quattro i casi uno dei fattori è  $S_0$  o  $S_{\frac{\pi}{4}}$ . Essendo però  $S_0$  e  $S_{\frac{\pi}{4}}$  realizzate in p4gm entrambe solo come glissoriflessioni, è impossibile svolgere la fattorizzazione sopra scritta. Quindi, p4mm e p4gm non sono isomorfi.

**Teorema 4.2.3.** Il gruppo p31m e il gruppo p3m1 non sono isomorfi.

*Dimostrazione.* La dimostrazione sarà svolta in maniera analoga al precedente teorema: dimostreremo cioè che  $(\mathbf{a}, R_{\frac{2\pi}{3}})$  può essere fattorizzato come la composizione di due riflessioni in p3m1, ma non in p31m.

Dall'equazione 4.35 si vede che in p31m si può fattorizzare  $(\mathbf{a}, R_{\frac{2\pi}{3}})$  come

$$(\mathbf{a}, R_{\frac{2\pi}{3}}) = (\mathbf{a}, S_{\frac{\pi}{2}})(\mathbf{0}, S_{\frac{\pi}{6}}) = (\mathbf{a}, \mathbf{1})(\mathbf{0}, S_{\frac{\pi}{2}})(\mathbf{0}, S_{\frac{\pi}{6}}). \quad (4.42)$$

Ipotizziamo ora la fattorizzazione  $(\mathbf{a}, R_{\frac{2\pi}{3}}) = (\mathbf{v}, S_{\alpha})(\mathbf{w}, S_{\beta})$  in p3m1. Poiché  $A_{\alpha}A_{\beta} = R_{2(\alpha-\beta)}$ , abbiamo tre casi:  $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = 0$ ;  $\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{3}$ ;  $\alpha = 0, \beta = \frac{2\pi}{3}$ . Consideriamo il primo caso: poiché  $(\mathbf{v}, S_{\frac{\pi}{3}})$  e  $(\mathbf{w}, S_0)$  sono entrambe riflessioni, possiamo porre  $\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{b} - 2\mathbf{a})$  e  $\mathbf{w} = \mu(2\mathbf{b} - \mathbf{a})$ . Quindi avremo:

$$(\mathbf{a}, R_{\frac{2\pi}{3}}) = ((\mu - 2\lambda)\mathbf{a} + (\lambda + \mu)\mathbf{b}, R_{\frac{2\pi}{3}}) = (\lambda(\mathbf{b} - 2\mathbf{a}), S_{\frac{\pi}{3}})(\mu(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), S_0). \quad (4.43)$$

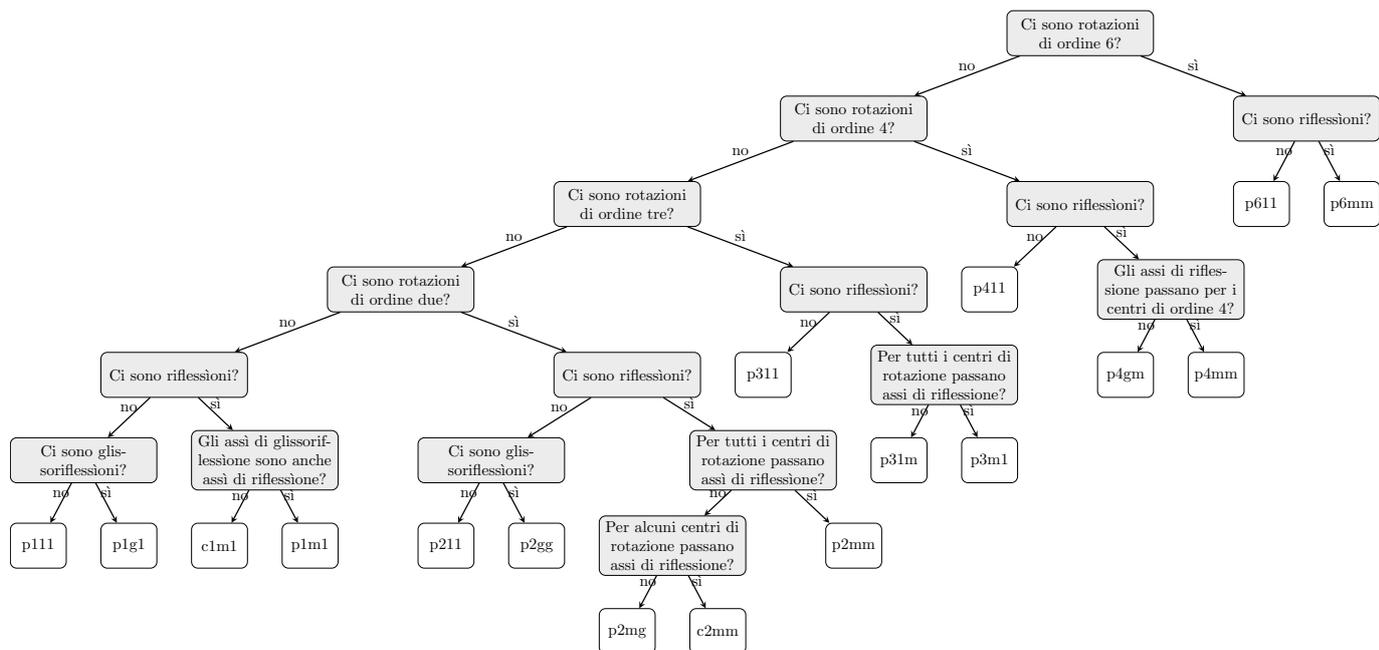
Quindi si dovrebbero avere  $\mu - 2\lambda = 1$  e  $\lambda + \mu = 0$  e, risolvendo, si ha  $\lambda = -\frac{1}{3}$  e  $\mu = \frac{1}{3}$ . Con questi coefficienti dovremmo poter scrivere una traslazione in p3m1 come

$$\left(\frac{1}{2}(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), S_0\right)(\mathbf{0}, S_0) = \left(\frac{1}{3}(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), \mathbf{1}\right). \quad (4.44)$$

Ma questa è una contraddizione, infatti  $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$ . Gli altri due casi sono analoghi, ma ruotati di  $\frac{2\pi}{3}$  e, quindi, sono anch'essi impossibili. Di conseguenza  $(\mathbf{a}, R_{\frac{2\pi}{3}})$  non può essere fattorizzato in p3m1 come la composizione di due riflessioni e allora p3m1 e p31m non sono isomorfi.

### 4.3 Riconoscimento dei gruppi cristallografici piani

I 17 gruppi cristallografici piani possono essere identificati in maniera semplice attraverso il seguente diagramma di flusso:



## Capitolo 5

# Applicazione: *Mauritius Cornelius Escher*

Gli argomenti di questo capitolo sono stati trattati a partire da [10] e [7].

I gruppi cristallografici piani permettono di definire i 17 modi diversi in cui realizzare una *tassellazione* del piano, cioè un disegno periodico basato su una o più forme chiuse, chiamate *tasselli*, che permettono di ricoprire il piano senza sovrapposizioni e senza lasciare spazi vuoti. L'artista che forse più di tutti si è distinto nell'arte della tassellazione è Mauritius Cornelius Escher. In questo capitolo verranno analizzate alcune delle sue opere, aventi tutte un unico tassello, riunite nell'album *Divisione regolare del piano*.

### 5.1 La *Divisione regolare del piano*

La *Divisione regolare del piano* è un album in cui Escher riunì tutti i disegni definitivi delle tassellazioni che realizzò a partire dagli anni '20 fino agli inizi degli anni '70. I disegni sono numerati da 1 a 137 e in più ci sono dei fogli in appendice numerati da A1 a A14.

La maggior parte dei disegni è caratterizzata da un solo tassello, ma talvolta Escher utilizza anche due, tre o quattro tasselli diversi. In generale i protagonisti delle sue opere sono animali fantastici o reali (come pesci, uccelli, rettili), ma talvolta compaiono anche figure umane opportunamente stilizzate.

Noi parleremo di tassellazioni periodiche del piano, cioè di tassellazioni in cui il motivo principale si ripropone idealmente all'infinito per traslazione ricoprendo tutto il piano, ma l'artista si è occupato anche di tassellazioni irregolari (in cui tutti i tasselli sono diversi) e di ricoprimenti di singole striscie (fregi). In alcuni casi inoltre Escher utilizza similitudini geometriche invece di isometrie.

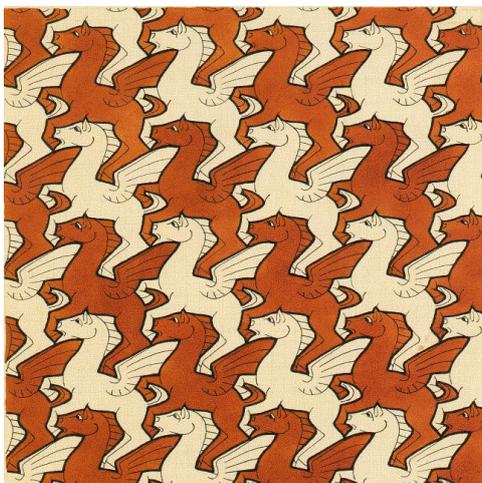


Figura 5.1: *Pegasus* di M. C. Escher, foglio 105 del quaderno "Divisione regolare del piano".

È possibile riferire ognuno di questi disegni a un gruppo cristallografico. La classificazione che faremo, però, valuterà solo il disegno e non la colorazione, la quale, se considerata, porterebbe ad una classificazione differente. Non considereremo inoltre i dettagli ornamentali introdotti dall'artista, che ci porterebbero a una riduzione o rottura della simmetria generale.

Come visto nel capitolo 4, i gruppi cristallografici piani sono 17. Non tutti sono però rappresentati nella *Divisione regolare del piano*, mancano infatti i gruppi  $p1m1$ ,  $c2mm$  e  $p4mm$ . Inoltre il gruppo  $p6mm$  è rappresentato in un disegno simmetrico, ma non in una tassellazione, e i gruppi  $p2mm$  e  $p3m1$  sono presenti in tassellazioni che contano più di un tassello.

## 5.2 Il gruppo $p111$ : *Pegasus*

La figura elementare a cui riferire questa tassellazione è un quadrato. Per riconoscere il gruppo cristallografico piano che caratterizza *Pegasus*, utilizziamo il diagramma rappresentato nel paragrafo 4.3. Notiamo che sono presenti solo due traslazioni, una nella direzione verticale e una nella direzione orizzontale, quindi il gruppo che lo caratterizza è il  $p111$ . Nello Figura 5.2 si può vedere lo schema di costruzione del tassello, che si realizza con le due traslazioni, indicate con una freccia.

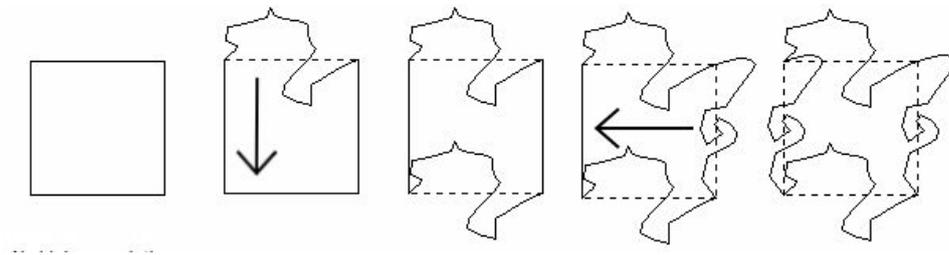


Figura 5.2: Schema di costruzione di un tassello di Pegasus



Figura 5.3: *Lizards* di M. C. Escher, foglio 75 del quaderno "Divisione regolare del piano".

### 5.3 Il gruppo p211: *Lizards*

La figura elementare a cui riferire questa tassellazione è un parallelogramma. Si nota che nella tassellazione non sono presenti glissoriflessioni e riflessioni, mentre invece è caratterizzata da traslazioni e rotazioni di  $\pi$ , quindi di ordine 2. Di conseguenza, il gruppo cristallografico piano a cui quest'opera fa riferimento è il gruppo p211. Nello Figura 5.4 si può vedere lo schema di costruzione del tassello, che si realizza infatti con una traslazione indicata con una freccia e due rotazioni le cui origini sono indicate con dei punti posizionati a metà dei lati corti del tassello.

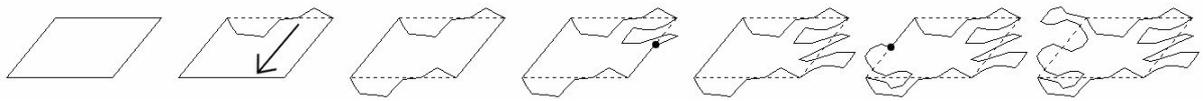


Figura 5.4: *Schema di costruzione di un tassello di Lizards*

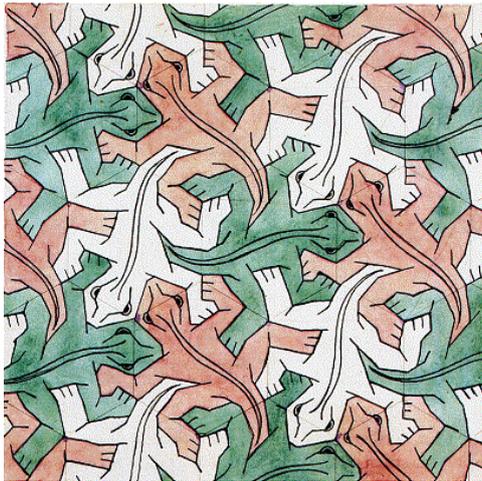


Figura 5.5: *Reptiles di M. C. Escher, foglio 25 del quaderno "Divisione regolare del piano"*.

## 5.4 Il gruppo $p311$ : *Reptiles*

La figura elementare a cui riferire questa tassellazione è un esagono. Si nota che nella tassellazione non sono presenti glissoriflessioni e riflessioni, mentre invece è caratterizzata da traslazioni e da tre rotazioni di  $2\pi/3$ , quindi di ordine 3. Di conseguenza, il gruppo cristallografico piano a cui quest'opera fa riferimento è il gruppo  $p311$ . Nello Figura 5.6 si può vedere lo schema di costruzione del tassello, che si realizza infatti con tre rotazioni, le cui origini sono indicate con dei punti posizionati su vertici alternati del tassello.

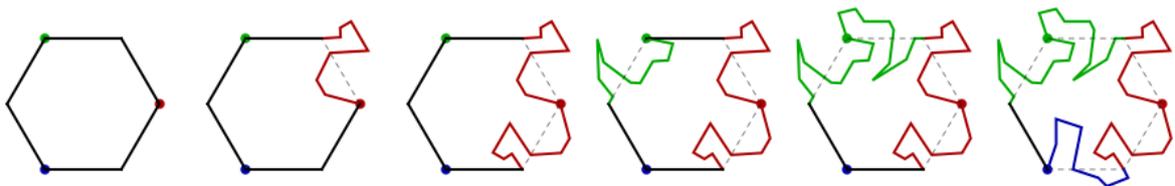


Figura 5.6: *Schema di costruzione di un tassello di Reptiles*

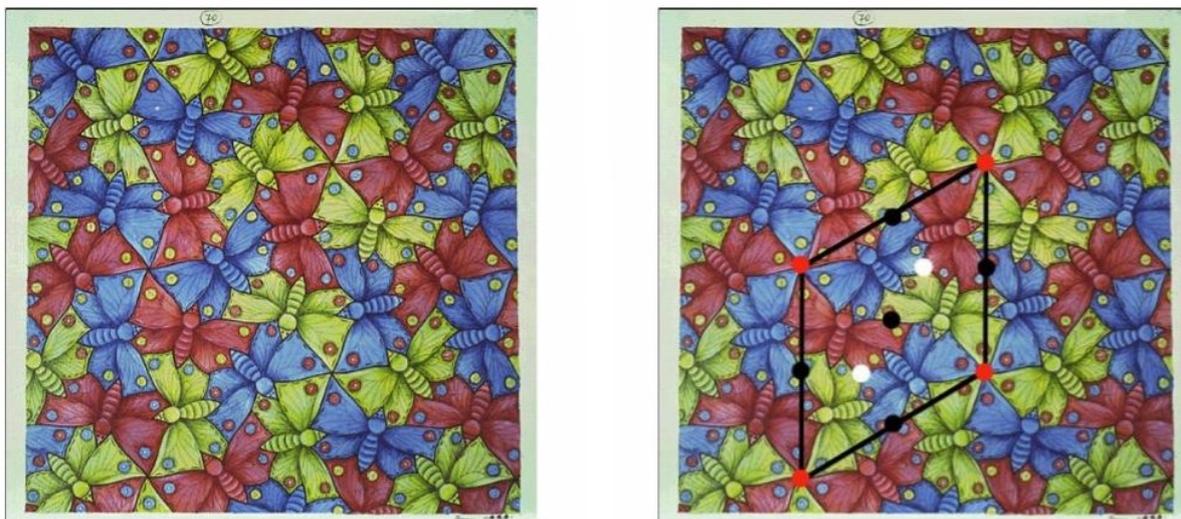


Figura 5.7: *A sinistra osserviamo Butterfly di M. C. Escher, foglio 70 del quaderno "Divisione regolare del piano".*

*A destra osserviamo lo schema di costruzione di Butterfly: il parallelogramma di base è disegnato con una linea nera, i cerchi neri rappresentano i centri di rotazione di ordine 2 (sono indicati solo quelli all'interno della figura di base), i cerchi bianchi indicano i centri di rotazione di ordine 3 (sono indicati solo quelli all'interno della figura di base), e i cerchi rossi rappresentano i centri di rotazione di ordine 6.*

## 5.5 Il gruppo p611: *Butterfly*

La figura elementare a cui riferire questa tassellazione è un parallelogramma. Si nota che nella tassellazione non sono presenti riflessioni e glissoriflessioni, mentre invece è caratterizzata da traslazioni e da centri di rotazione di ordine 2, 3 e 6 (quindi da rotazioni di angoli  $\pi$ ,  $2\pi/3$  e  $\pi/3$ ). Di conseguenza, il gruppo cristallografico piano a cui quest'opera fa riferimento è il gruppo p611. In particolare, il parallelogramma di base si ottiene unendo i punti di contatto della parte superiore delle ali sinistre delle farfalle. Si nota che i punti medi dei lati del parallelogramma sono centri di rotazione di ordine 2 e sono dati dall'intersezione della parte superiore delle ali destre. All'interno della cella troviamo un punto di rotazione di ordine 2, dato dal punto di contatto delle ali superiori destre (al centro della cella) e due punti di rotazione di ordine 3 ottenuti dall'intersezione delle ali inferiori destre delle farfalle. Questi ultimi si trovano sulla diagonale della cella unitaria. I centri di rotazione di ordine 6 si trovano invece sui vertici del parallelogramma. Il reticolo che viene generato è esagonale. Nella Figura 5.7 si osserva uno schema di costruzione del disegno.



Figura 5.8: *Bulldogs* di M. C. Escher, foglio 97 del quaderno "Divisione regolare del piano".

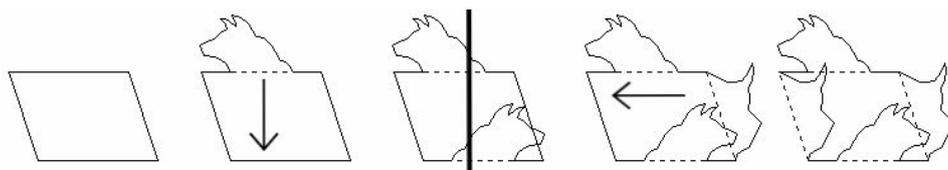


Figura 5.9: *Schema di costruzione di un tassello di Bulldogs*

## 5.6 Il gruppo $p1g1$ : *Bulldogs*

La figura elementare a cui riferire questa tassellazione è un parallelogramma. Si nota che nella tassellazione non sono presenti rotazioni e riflessioni, mentre invece è caratterizzata da una simmetria traslazionale orizzontale e da glissoriflessioni con asse verticale. Di conseguenza, il gruppo cristallografico piano a cui quest'opera fa riferimento è il gruppo  $p1g1$ . Nello Figura 5.9 si può vedere lo schema di costruzione del tassello, che si realizza infatti con una traslazione orizzontale, indicata con una freccia, e una glissoriflessione con asse verticale, composta dalla prima traslazione indicata con una freccia e dalla riflessione della quale si è disegnato l'asse.

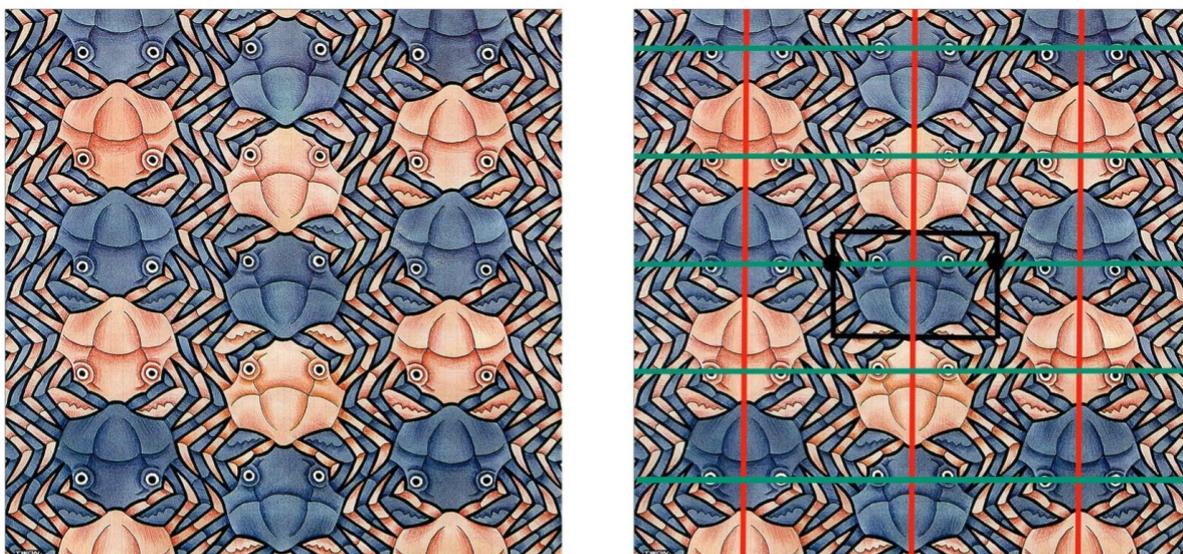


Figura 5.10: A sinistra osserviamo *Crab* di M. C. Escher, foglio 117 del quaderno "Divisione regolare del piano".

A destra osserviamo lo schema di costruzione di *Crab*: il rettangolo di base è disegnato con una linea nera, i cerchi neri sono i centri di rotazione di ordine 2 (sono indicati solo quelli all'interno della figura di base), le linee rosse sono gli assi di riflessione e le linee verdi rappresentano gli assi di glissoriflessione.

## 5.7 Il gruppo $p2mg$ : *Crab*

La figura elementare a cui riferire questa tassellazione è un rettangolo. Si nota che la tassellazione è caratterizzata da traslazioni, da rotazioni di  $\pi$ , quindi di ordine 2, da riflessioni con asse verticale e da glissoriflessioni con asse orizzontale. Di conseguenza, il gruppo cristallografico piano a cui quest'opera fa riferimento è il gruppo  $p2mg$ . In particolare si possono individuare i centri di rotazione di ordine 2 nel punto d'incontro delle zampe dei granchi (a metà zampa sinistra dei due granchi del medesimo colore). Individuiamo una cella rettangolare generata da due vettori indipendenti perpendicolari tra loro, uno verticale di modulo uguale alla lunghezza di un granchio e uno orizzontale di modulo uguale alla larghezza di un granchio (senza considerare la diversità di colore). Gli assi di riflessione dividono verticalmente il granchio all'interno del rettangolo, mentre gli assi di glissoriflessione sono orizzontali e passano per gli occhi del granchio. Nella Figura 5.10 si osserva uno schema di costruzione del disegno.



Figura 5.11: *A sinistra osserviamo Bugs di M. C. Escher, foglio del quaderno "Divisione regolare del piano".*

*A destra osserviamo lo schema di costruzione di Bugs: il quadrato di base è disegnato con una linea nera, i cerchi neri rappresentano i centri di rotazione di ordine 2 (sono indicati solo quelli all'interno della figura di base), i cerchi azzurri sono i centri di rotazione di ordine 4 (sono indicati solo quelli all'interno della figura di base), le linee rosse indicano gli assi di riflessione e le linee verdi rappresentano gli assi di glissoriflessione.*

## 5.8 Il gruppo $p4gm$ : *Bugs*

La figura elementare a cui riferire questa tassellazione è un quadrato. Si nota che la tassellazione è caratterizzata da traslazioni, da rotazioni di  $\pi$  e  $\pi/2$ , quindi di ordine 2 e 4, da riflessioni e da glissoriflessioni. Di conseguenza, il gruppo cristallografico piano a cui quest'opera fa riferimento è il gruppo  $p4gm$ . In particolare nei punti d'incontro delle zampe delle quattro cimici si trovano i centri di rotazione di ordine 4, che corrispondono ai vertici di un quadrato con lati di lunghezza pari a due volte l'insetto. Un altro punto uguale si trova al centro del quadrato. Nei punti medi ai lati della figura si trovano i centri di rotazione di ordine 2, dati dall'intersezione delle teste degli insetti. Possiamo poi individuare gli assi di riflessione se uniamo i punti medi dei lati consecutivi della cella unitaria, in questo modo osserviamo come la cimice venga tagliata perfettamente a metà. Infine osserviamo che traslando verticalmente o orizzontalmente l'insetto e poi riflettendolo rispetto a un'asse parallelo al vettore di traslazione, si ottiene la sovrapposizione di due insetti. Quindi sono presenti anche glissoriflessioni. Nella Figura 5.11 si osserva uno schema di costruzione del disegno.

# Appendice A

## Applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$

**Definizione A.1.** Sia  $T : X \rightarrow Y$  un operatore lineare tra due spazi vettoriali  $X$  e  $Y$ . Il *nucleo* di  $T$ , denotato con  $\ker(T)$ , è definito come:

$$\ker(T) = \{\mathbf{x} \in X : T(\mathbf{x}) = 0_{\mathbf{y}}, 0_{\mathbf{y}} \in Y\}. \quad (\text{A.1})$$

**Definizione A.2.** Sia  $T : X \rightarrow Y$  un operatore lineare tra due spazi vettoriali  $X$  e  $Y$ . L'*immagine* di  $T$ , denotata con  $\text{Im}(T)$ , è definita come:

$$\text{Im}(T) = \{\mathbf{y} \in Y : \mathbf{y} = T(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X\} \quad (\text{A.2})$$

**Teorema della dimensione A.1.** Sia  $T : X \rightarrow Y$  un'applicazione lineare. Allora:

$$\dim X = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(L)) \quad (\text{A.3})$$

**Teorema A.2.** Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un'applicazione lineare. Dimostriamo che se  $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ , allora l'applicazione è invertibile.

*Dimostrazione.* Dimostriamo prima che l'applicazione è biunivoca.

Sia  $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$  e supponiamo che l'applicazione non sia iniettiva e, quindi, che  $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w})$  con  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ . Allora per la linearità avremo  $T(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$ , dunque  $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in \text{Ker}(T)$ . Ma per l'ipotesi iniziale deve valere  $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$ , quindi  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$  e dunque  $T$  è iniettiva.

Dato che  $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ ,  $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$ . Per ipotesi abbiamo poi che la dimensione del dominio e quella del codominio sono equivalenti, cioè uguali a  $n$ . Per il teorema della dimensione abbiamo quindi che  $\dim \mathbb{R}^n = n = \dim(\text{Im}(T))$  e, essendo la dimensione del codominio di  $T$  uguale alla dimensione della sua immagine,  $T$  è suriettiva.

Un'applicazione lineare iniettiva e suriettiva è detta biunivoca.

Sapendo che  $T$  è biunivoca, cerchiamo l'inversa  $T^{-1}$  di  $T$ . Poiché  $T$  è biunivoca e,

in particolare, suriettiva, esiste  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$  con  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ , e, essendo  $T$  anche iniettiva,  $\mathbf{v}$  è unico. Definiamo  $T^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $T^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$ . Allora per costruzione  $T^{-1}(T(\mathbf{v})) = T^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$  e  $T(T^{-1}(\mathbf{w})) = T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ , quindi  $T^{-1}T = TT^{-1} = id$ , quindi  $T^{-1}$  è l'inversa di  $T$ .

**Teorema di Binet A.3.** Siano  $A$  e  $B$  due matrici quadrate  $n \times n$ . Allora

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{A.4}$$

# Bibliografia

- [1] M. A. Armstrong. *Groups and Symmetry*. Springer - Verlag New York Inc., 1988.
- [2] *Automorfismi di spazi vettoriali euclidei*. URL: [https://moodle2.units.it/pluginfile.php/714439/mod\\_resource/content/0/Geometria%20euclidea%20%282%29.pdf](https://moodle2.units.it/pluginfile.php/714439/mod_resource/content/0/Geometria%20euclidea%20%282%29.pdf).
- [3] Maurizio Candilera. *Geometria dello Spazio Affine*. 2019. URL: [https://www.math.unipd.it/~candiler/didafiles/matdue/spazio\\_affine.pdf](https://www.math.unipd.it/~candiler/didafiles/matdue/spazio_affine.pdf).
- [4] Alessandro Caravita. “I gruppi dei fregi e i gruppi cristallografici piani”. Tesi di laurea. Università di Bologna, 2020/2021.
- [5] J. P. Elliott e P. G. Dawber. *Symmetry in physics - Volume 1: Principles and simple applications*. Oxford University Press, New York, 1979.
- [6] Alessio Del Vigna - Giovanni Gaiffi. *Azioni di gruppi*. 2010. URL: <https://people.dm.unipi.it/gaiffi/Algebra1/Pages/dispense1.pdf>.
- [7] Roberto Giunti. *Cabri Escher*. URL: <http://www.robertogiunti.it/CabriEscher/CabriEscher.html>.
- [8] Edoardo Sernesi. *Geometria 1*. Bollati Boringhieri, 1989.
- [9] *Symmetry in Escher's Drawings*. 2023. URL: <https://resources.library.leeds.ac.uk/final-chapter/dissertations/maths/example1.pdf>.
- [10] *Tessellations by Recognizable Figures*. URL: [https://eschermath.org/wiki/Tessellations\\_by\\_Recognizable\\_Figures.html](https://eschermath.org/wiki/Tessellations_by_Recognizable_Figures.html).
- [11] *Trasformazioni geometriche del piano e dello spazio*. URL: <https://www.mat.uniroma2.it/~geo2/G2trasformazioni.pdf>.